Vierter Abschnitt.

Triangulirung.

§. 38.

Vorbemerkung.

Der im vorigen Abschnitt beschriebenen Basismessung und Hauptwinkelmessung folgte als die zunächst darauf gegründete Operation die sphärische Triangulation. Da aber bei dieser verschiedene wichtige Gegenstände zu berücksichtigen waren, so ist auch die Einleitung in dieselbe, wie sie Professor von Bohnenberger in einer Dissertation vom Jahr 1826 über die Triangulirung eines ganzen Landes gegeben hat, der Beschreibung unserer Haupttriangulirung vorangestellt.

Die in lateinischer Sprache abgefasste Dissertation hat die Aufschrift: „De Computandis Dimensionibus Trigonometricis in Superficie Terrae sphaeroidica Institutis,“ sie erschien nie im Buchhandel, und würde desswegen auch nicht allgemein bekannt.

Diese Schrift ist in Folgendem so weit wortgetreu gegeben, als für unsere Beschreibung nöthig ist, und dürfte dieser Abschnitt nicht nur für das mathematische Publikum von besonderem Interesse sein, sondern auch dem um unsere Landesvermessung so hoch verdienten Professor von Bohnenberger ein bleibendes Denkmal in der Geschichte derselben geben.

§. 39.

Einleitung in die sphärische Triangulirung.

„Punctorum in superficie terrae jacentium situs commodissime determinatur triangulorum ope ita inter se conjunctorum, ut eorum quodvis cum proximo unum latus commune habeat. Quodsi horum triangulorum anguli dentur una cum uno latere cujusvis eorum, reliqua latera calculo erui poterunt, in quo triangula haec tanquam plana spectare licebit, quoties areae eorum quatuor milliaria geographica quadrata non excedunt. Anguli quidem observati et, si opus fuerit, ad horizontem reducti, quatenus terram sphaericam sapponimus, anguli sunt triangulorum sphaericorum, quorum summa in quovis triangulo sphaerico duos rectos excedit. Constat autem, excessum hunc, qui excessus sphaericus dicitur, esse ad quatuor rectos, ut area trianguli ad superficiem hemisphaerii, in qua descriptum sumitur, ideoque hunc excessum in triangulo terrestri, cujus area unius est milliaris quadrati, ad ö, 28 vix assurgere posse.

Totum igitur systema triangulorum in planum explicari poterit, et quodvis horum triangulorum quam proxime consentiet cum eo, quod ipsi in superficie terrae respondet, etsi tota figura aucto triangulorum numero magis magisque fiat erronea. Dum enim angulos observatos ita corrigimus, ut eorum summa in quovis triangulo fiat duobus rectis, summa autem angulorum circa idem punctum jacentium quatuor rectis aequalis, anguli ad perimetrum polygoni, quod formatur lateribus triangulorum ad limites totius figurae jacentium, fiunt justo minores. Quodsi numerus laterum hujus polygoni fuerit $= n$ summa angulorum ad perimetrum erit $2n - 4$ rectis. cui adjiciendus est excessus sphaericus polygoni, ut prodeat summa angulorum ad perimetrum polygoni sphaerici. Cumque hic excessus sit ad quatuor rectos, ut area polygoni ad hemisphaerium, non amplius negligendus erit, et in observationibus ipsis sese manifestabit, similesque differentiae prodibunt, quoties puncta remotiora systematis triangulorum variis modis inter se combinantur. Praeterea in dimensionibus trigonometricis saepenumero majora occurrunt triangula, quorum excessus sphaericus tantus est, ut negligi non possit, tumque quaeritur, an talia triangula in superficie terrae sphaeroidica tanquam sphaerica considerare liceat, qui radius sit assumendus, ubi commodissime centrum sphaerae sit collocandum? Hae disquisitiones ad geodaesiam sublimiorem sic dictam spectant, iisque plures jam pridem geometrae operam dederunt, ut vix novi quid addi posse videatur. Nihilo vero minus e re visum est, in methodos hucusque usitatas accuratius inquirere, erroresque determinare, quos relinquunt. Solutiones quorundam problematum huc pertinentium subjungemus.

§. 40.

Supponimus autem terram sphaeroidicam talem, qualis revolutione ellipseos circa axem minorem gignitur. Positis semiaxe majore ellipseos genitricis $= a$, semiaxe minore $= b$, iisque sumtis pro axibus ipsarum x, y habebimus:

$$1)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ad punctum ellipseos, cui respondent coordinatae x, y, ducatur normalis, cujus angulus cum axe majore dicatur φ, erit hic latitudo geographica illius puncti, fietque subnormalis $= y$ cotang φ. Constat autem ex conicis candem esse

$$= \frac{b^2}{a^2}x, \text{ hinc erit}$$

$$2)\quad b^2 x \sin\varphi = a^2 y \cos.\ \varphi.$$

Excentricitas meridiani terrestris dicatur e, ut sit

$$3)\quad a^2 e^2 = a^2 - b^2,$$

et ex combinatione aequationum 1, 2 obtinebimus coordinatas x, y per functiones latitudinis expressas, nempe

$$4)\quad x = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}}$$

$$5)\quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}}$$

Segmentum normalis perimetro ellipseos et axe minore interceptum dicatur r^1, eritque $r^1 = x \sec.\ \varphi$, sive ob aequationem 4,

$$6)\quad r^1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}}$$

Recta, quam haec normalis ab axe minore inde a centro ellipseos abscindit, ponatur $= c$, et habebimus $c = x \operatorname{Tang.} \varphi - y$, unde substitutis valoribus coordinatarum x, y ex aequationibus 4, 5, prodibit

$$7)\quad c = \frac{a e^2 \sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}} = r^1 e^2 \sin\varphi$$

Posito radio terrestri $= R$ ob $R^2 = x^2 + y^2$ earundem aequationum ope habebimus

$$8)\quad R^2 = a^2\, \frac{1 - e^2\,(2 - e^2) \sin\varphi^2}{1 - e^2 \sin\varphi^2}$$

Denique radius curvaturae meridiani elliptici latitudini φ competens dicatur r, sitque p semiparametro axis minoris aequalis.

Constat ex conicis esse $r p^2 = (r^1)^3$. Est autem $b : a = a : p$

$p = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$, (n 3); quare valore ipsius r^1 ex aequatione 6 substituto, prodibit

$$9)\quad r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{3/2}}$$

§. 41.

Quodsi jam sphaerois talis, qualem hic supponimus, secetur plano, constat sectionem esse ellipsin, quae in circulum abit, si planum sectionis cum aequatore coincidat. aut ipsi parallelum sit. Sectio per axem dabit meridianum terrestrem. Secetur denique quocunque alio plano, et per intersectionem hujus plani cum plano aequatoris ducatur diameter posterioris sub angulo recto, per hanc autem ducatur meridianus, et quaeratur aequatio ad sectionem inter abscissas t, quae sumantur in intersectione dicti meridiani cum plano sectionis inde a puncto, in quo axis ipsarum t plano aequatoris occurrit, et inter ordinatas rectangulares u. Sit porro ϑ aequalis angulo, quem axis ipsarum t includit cum axe sphaeroidis, ejusque segmentum plano sectionis et plano aequatoris interceptum dicatur c, quod in eo casu, quo axis ipsarum t normalis est ad superficiem sphaeroidis, abibit in lineam eodem charactere in (§. 40, n. 7) designatam. Hisce positis, quum aequatio ad superficiem sphaeroidis sit

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2 = 1, \text{ et}$$

$x = c \operatorname{tang.} \vartheta + t \sin \vartheta$, $y = t \cos \vartheta$, habebimus aequationem

$$\left(\frac{t \sin \vartheta + c \operatorname{tang.} \vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{t \cos \vartheta}{b}\right)^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2 = 1,$$

quae transformatur in hanc

$$(1 - e^2 \sin \vartheta^2)\, t^2 + 2(1 - e^2)\, c\, t \sin \vartheta \operatorname{tang} \vartheta + (1 - e^2)\, u^2 = (1 - e^2)(a^2 - e^2 \operatorname{tang} \vartheta^2),$$

et simplicissimam induit formam.

$$1)\quad \left(\frac{t^1}{b^1}\right)^2 + \left(\frac{u}{a^1}\right)^2 = 1, \text{ positis } t^1 = t + \frac{(1 - e^2)\, c \sin \vartheta \operatorname{tang} \vartheta}{1 - e^2 \sin \vartheta^2},$$

$$2)\quad b^1 = a \sqrt{\left[(1 - e^2)\left(1 - \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin \vartheta^2\right)\right] : (1 - e^2 \sin \vartheta^2)}$$

$$3)\quad a^1 = a \sqrt{\frac{1 - \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin \vartheta^2}{1 - e^2 \sin \vartheta^2}} \text{ ex quibus sequitur}$$

$$4)\quad \left(\frac{a^1}{b^1}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos\vartheta^2$$

Sectio itaque est ellipsis, cujus axes sunt $2a^1$, $2b^1$, patetque ex aequatione 4 omnes sectiones planis parallelis factas esse similes, et a^1 esse semiaxem majorem, qui ex constructione semper parallelus erit plano aequatoris. Quodsi semiparameter axis minoris dicatur p^1, erit $b^1p^1 = a^1a^1$, sive substitutis valoribus semiaxium

$$5)\quad p^1 = a\sqrt{\frac{1-\left(e^2+\frac{c^2}{a^2}\right)\sin\vartheta^2}{1-e^2}}$$

Ponamus jam sectionem transire per normalem sub latitudine φ ductam, sive esse sectionem verticalem, eritque $\varphi + \vartheta = 90^0$, unde $c = r^1 e^2 \sin\varphi$, (§. 40 n. 7) et $r^1r^1 = a^2e^2 + c^2$, quare ex aequatione 5 habebimus

$$6)\quad p^1 = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin\varphi^2)}} = r^1.$$

Constat autem ex conicis, semiparametrum p^1 axis minoris b^1 esse radium curvaturae ellipseos in vertice ejusdem exis, quare si ad punctum quodvis superficiei sphaeroidicae ducatur normalis, segmentum hujus inter hoc punctum et axem sphaeroidis jacens radio curvaturae arcus elliptici in eodem puncto erit aequale, qui jacet in plano verticali per hoc punctum ducto sub angulo recto ad meridianum ejusdem puncti. Caeterum haec constructio radium curvaturae in polo ipso indeterminatum relinquere videtur. Sed in hoc casu pro centro curvaturae punctum, ad quod intersectio normalium cum axe crescente latitudine tanquam ad limitem propius propiusque accedit, sumendum esse constat, et formula 6 exhibet valorem radii curvaturae huicce limiti respondentem posito $\varphi = 90^0$, quippe

$$r^1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b}.$$

§. 42.

Determinandus restat radius curvaturae in vertice arcus elliptici jacentis in plano verticali pro lubitu assumto.

Sit φ' latitudo puncti, ad quod normalis ducta est, et α' angulus plani verticalis cum meridiano per idem punctum ducto, sive azimuthum ejus sumtum a polo versus orientem. Ducatur etiam secundus meridianus sub angulo recto ad planum verticale, et ex puncto axis tribus hisce planis communi tanquam centro radioque pro lubitu assumto descripta concipiatur superficies sphaerica, cujus intersectiones cum tribus illis planis formabunt triangulum sphaericum rectangulum. Hypothenusa hujus trianguli aequabitur complemento latitudinis φ', latus autem angulo α' oppositum metietur angulum, quem in §. 41 signe ϑ designavimus.

Posito tertio latere = w, habebimus ex trigonometria sphaerica

$$1)\quad \begin{cases} \sin\vartheta = \sin\alpha'\cos\varphi'. \\ \sin w\cos\vartheta = \cos\alpha'\cos\varphi' \\ \cos w\cos\vartheta = \sin\varphi'. \end{cases}$$

Deinde ex §. 40 n, 7 obtinebimus $e^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{e^2}{1 - e^2\sin\varphi^2}$, et ope aequationis 5. §. 41 semiparametrum axis minoris sectionis ellipticae $p' = a\sqrt{\frac{1 - e^2\sin\varphi'^2 - e^2\sin\vartheta^2}{(1-e^2)(1-e^2\sin\varphi'^2)}}$, sive introducto valore $\sin\vartheta$ ex n. 1, debitaque reductione facta

$$2)\quad p' = a\sqrt{\frac{1 - e^2 + e^2\cos a'^2\cos\varphi'^2}{(1-e^2)(1-e^2\sin\varphi'^2)}}.$$

Cum autem normalis ad superficiem sphaeroidicam simul sit normalis ad ellipsin hac sectione genitem, segmentum hujus normalis superficie sphaeroidica et axe minore hujus ellipseos abscissum per n. 6 §. 40 erit $= \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2\sin\varphi^2)}}$.

Hinc si radius curvaturae sectionis in puncto, ad quod normalis ducta est, dicatur r'', habebimus $r'' = \frac{a^3}{p'p'(1 - e^2\sin\varphi^2)^{3/2}}$, sive substituto valore semiparametri ex n. 2.

$$3)\quad r'' = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 + e^2\cos\alpha'^2\cos\varphi'^2)\sqrt{(1 - e^2\sin\varphi^2)}},$$

quodsi ponatur $\alpha' = 90^0$, prodibit

$$r' = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2\sin\varphi'^2)}}, \text{ ut in §. 40 n. 6}$$

posito autem $\alpha' = o$, obtinebimus

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\varphi'^2)^{3/2}}, \text{ ut in §. 40 n. 9}$$

hinc porro habebimus

$$rr' = \frac{a^2(1-e^2)}{(1 - e^2\sin\varphi'^2)^2},$$

$$\text{et } r\sin\alpha'^2 + r'\cos\alpha'^2 = \frac{a(1 - e^2 + e^2\cos\alpha'^2\cos\varphi'^2)}{(1 - e^2\sin\varphi'^2)^{3/2}}$$

adeoque $\frac{rr'}{r \sin \alpha'^2 + r' \cos \alpha'^2} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2+e^2 \cos\alpha' \cos\varphi'^2)\sqrt{(1-e^2 \sin\varphi'^2)}}$,
id est ob aequationem 3,

$$r' = \frac{rr'}{r \sin \alpha'^2 + r' \cos \alpha'^2}, \text{ sive}$$

$$4) \quad \frac{1}{r''} = \frac{\sin \alpha'^2}{r'} + \frac{\cos \alpha'^2}{r}$$

§. 43.

Radii curvaturae datis azimuthis respondentes commode quidem poterunt adhiberi, quoties ex longitudine exigui arcus elliptici in plano verticali jacentis angulus, quem normales ad terminos ejusdem ductae includunt, aut vice versa, inveniendus est, praesertim si in calculo adhibetur radius medio arcus respondens. Cum autem hi radii, ut ex aequatione 3. §. praec. patet, inde a meridiano usque ad primum verticalem sic dictum continue crescant, deinde in eadem ratione decrescant, minus apti videntur ad computanda triangula in superficie terrae descripta.

Caeterum errores ex varia sectionum verticalium curvatura oriundi quoad maximam partem sese destruunt, si anguli semper ad idem centrum referuntur. Sit enim s arcus exiguus meridiani, r radius circuli curvaturae ejusdem, et ex centro ejus ad terminos arcus ducantur rectae abscindentes a circulo ex eodem centro radio 1 descripto arcum w, et habebimus quam proxime s = rw.

In alterutro crure anguli w, producto si opus fuerit, sumatur aliud centrum priori vicinum, ex quo ad alterum terminum arcus s agatur recta, quae dicatur r', sitque angulus hujus rectae atque prioris = w'. Tum erit r' : r = sin w : sin w', sive quam proxime = w : w', unde r'w' = rw = s. Cumque centrum curvaturae primi verticalis jaceat in axe sphaeroidis, commodissime sphaera ex hoc puncto radio r' curvaturae primi verticalis descripta in calculo dimensionum geodaeticarum adhiberi posse videtur. Haud tamen obs re erit, in hanc approximationem accuratius inquirere, atque errores investigare, quos ea relinquit.

§. 44.

Sub latitudine φ' secetur sphaerois plano verticali, cujus azimuthum a septentrione versus orientem sumtum sit $= \alpha'$, et in hoc plano ex centro curvaturae primi verticalis ducatur recta z ad perimetrum sectionis, quae cum normali sive linea verticali includat angulum μ Ducatur etiam per rectam z meridianus terrestris, et ex centro curvaturae primi verticalis radio pro lubitu assumto descripta concipiatur superficies sphaerica, orieturque triangulum sphaericum, cuius unum latus erit complementum latitudinis φ', secundum latus erit angulus sive arcus μ, angulusque hisce lateribus interceptus $= \alpha'$. Tertium latus dicatur u, eritque per trigonometriam sphaericam

$$1)\ \cos u = \sin \varphi \cos \mu + \cos \varphi' \sin \mu \cos \alpha'$$

A puncto, in quo recta z superficiei sphaeroidis occurrit, ducatur ordinata perpendicularis ad axem sphaeroidis, quae erit $=$ z sin u. Abscissa autem huic ordinatae respondens et a centro sphaeroidis computata erit $=$ z cos u $-$ c, ubi $c = r' e^2 \sin \varphi'$ (§. 40 n. 7).

Habebimus itaque ex aequatione ad ellipsin generatricem

$$\left(\frac{z.\ \sin u}{a}\right)^2 + \left(\frac{z \cos u - c}{b}\right)^2 = 1,$$ qua aequatione soluta prodibit

$$z = \frac{c \cos u \pm b \sqrt{(1 - e^2 \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin u^2)}}{1 - e^2 \sin u^2},$$

patetque, valorem signo inferiori respondentem hic rejiciendum esse. Introducto jam valore ipsius c, debitaque reductione facta, emerget

$$2)\ z = \frac{\frac{e^2}{1-e^2} r' \sin \varphi' \cos u + r' \sqrt{(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\left(\cos u^2 - \sin \varphi'^2\right))}}{1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos u^2}.$$

Haec expressio in seriem evoluta dabit $\frac{z}{r'} = 1 - \frac{1}{2} . \frac{e^2}{1-e^2} (\cos u - \sin \varphi')^2$

$$+ \frac{3}{8}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \left[(\cos u - \sin \varphi')^4 + \frac{4}{3} \sin \varphi' (\cos u - \sin \varphi')^3\right] \text{ etc.}$$

cumque ex aequatione 1. sit.

$$(\cos u - \sin \varphi')^2 = \sin \mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 - 4 \sin \mu \sin \frac{1}{2} \mu^2 \cos \alpha' \sin \varphi' \cos \varphi' + 4 \sin \frac{1}{2} \mu^4 \sin \varphi'^2.$$

et $e^2 \sin \mu^4$, $e^4 \sin \mu$ sine errore sensibili negligi possint, quoties μ gradum unum non excedit, erit quam proxime

$$\frac{z}{r'} = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} (\mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 - \mu^3 \cos \alpha' \sin \varphi' \cos \varphi'),$$ neglectis quantitatibus $e^2 \mu^4$, $e^4 \mu^3$ altiorumque ordinum.

Quodsi arcus ellipticus sectionis angulo μ respondens ponatur $= s'$, erit $(ds')^2 = (zd\mu)^2 + (dz)^2$,

$$\text{sive} \left(\frac{1}{r'} \cdot \frac{ds'}{d\mu}\right)^2 = \left(\frac{z}{r'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{r'}\right)^2,$$

hinc introducto valore ipsius $\frac{z}{r'}$ et extracta radice

$$\frac{1}{r'} \cdot \frac{ds'}{d\mu} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 \left(1 - \frac{e^2}{1 - e^2} \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2\right)$$

$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \mu^3 \cos \alpha' \sin \varphi^1 \cos \varphi^1$. Qua formula integrata, neglectis quantitatibus ordinis $e^4 \mu^3$ altiorumque ordinum, prodibit

3) $s' = r'\mu - \frac{r'}{6} \cdot \frac{e^2 \mu^3}{1 - e^2} \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2$, ubi constans nulla est adjicienda. Secundus terminus sub aequatore et pro $\alpha' = 0$ fit maximus, et aequalis quantitati $\frac{a}{6} \cdot \frac{e^2 \mu^3}{1 - e^2}$.

Jam vero pro $\frac{a - b}{a} = \frac{1}{312{,}7}$, $a = 3271670$ hexap. paris. et $\mu = \frac{\pi}{180}$ fit ista quantitas $= 0{,}0187$ hexaped. Quare error ex formula simplicissima $s' = r' \mu$ oriundus in tali sphaeroide ad 0,02 hexap. assurgere nequit, quoties angulus μ gradum unum non excedit. Patet praeterea, sub latitudinibus $> 45^0$, errorem maximum 0,01 hexaped. superare non posse, eundemque deprimi ad quintam fere partem unius pollicis parisiensis, si adhibeatur radius curvaturae medio arcus respondens.

§. 45.

Ducta igitur ad punctum quodvis in superficie sphaeroidis situm normali, et ex puncto intersectionis illius cum axe sphaeroidis tanquam centro per dictum punctum descripta sphaera, haec quidem superficiem sphaeroidicam in puncto isto continget, non autem asculabitur, nisi punctum contactus fuerit polus; ut ex §. 42. patet, ideoque pro variis azimuthis variae quoque sphaerae erunt adhibendae, quoties relatio quaeritur inter arcus ellipticos et angulos normalium ad terminos arcuum ductarum. Nihilominus sphaera haec percommode adhiberi poterit in computandis dimensionibus trigonometricis. Arcus enim circuli maximi per punctum contactus ducti tam parum differunt ab arcubus ellipticis puncto contactus adjacentibus, quorum termini cum prioribus jacent in iisdem sphaerae radiis (productis si opus fuerit), ut haec differentia tuto negligi possit.

quoties in alterutro puncto signum quoddam in altero puncto positum videre licet. Et hinc sponte fluit solutio problematis: Data distantia s' duorum punctorum in superficie terrae sphaeroidica sitorum, una cum latitudine φ' alterutrius puncti et azimutho α' lineae s' in hoc puncto, invenire differentiam longitudinum eorundem, et latitudinem φ alterius. Etenim facta eadem constructione, qua in §. 44. usi sumus, habemus $r' = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)}}$, (§. 40. n. 6.) deinde $\mu = \frac{s'}{r'}$, vel si μ in minutis secundis exprimitur, $\mu = \frac{s'}{r' \sin 1''}$

Porro in triangulo sphaerico, cujus dantur latera $90^0 - \varphi'$ atque μ, cum angulo intercepto α', posito tertio latere = u et angulo lateri μ opposito = w, erit

$$\text{Cotang w} = \frac{\cos \mu \cos \varphi' - \sin \mu \sin \varphi' \cos \alpha'}{\sin \mu \sin \alpha'},$$

et cosin u = $\cos \mu \sin \varphi' + \sin \mu \cos \varphi' \cos \alpha'$, sive introducto angulo auxiliari λ, ut sit tang. $\lambda = \text{Tag}\, \mu \cos \alpha'$, habebimus

$$\text{cosin u} \cos \lambda = \cos \mu \sin (\varphi' + \lambda),$$
$$\sin \text{u} \sin \text{w} = \sin \mu \sin \alpha'$$
$$\sin \text{u} \cos \text{w} = \frac{\cos \mu \cos (\varphi' + \lambda)}{\cos \lambda}.$$

Innotescunt itaque anguli w et u. Prior est differentia quaesita longitudinum, posterior foret complementum latitudinis quaesitae φ, si radius sphaerae ad punctum alterum ductus simul esset normalis ad superficiem sphaeroidicam. Ad hoc decidendum correctionemque determinandam, quae complemento anguli u applicanda est, ut prodeat latitudo quaesita, in valores quantitatis, §. 40, signo c designatae inquirendum erit, quos sub variis latitudinibus induere potest. Sint c' c valores ejusdem sub latitudinibus φ', φ, erit ex (§. 40. n. 7.)
$c' = r' e^2 \sin \varphi'$, et retinendo denominationes (§. 44.) usurpatas, habebimus subnormalem ad axem sphaeroidis relatam pro latitudine

$$\varphi = \frac{a^2}{b^2} (z \cos u - c')$$

$$\text{unde } c = \frac{a^2 - b^2}{b^2} (z \cos u - c') = \frac{e^2}{1 - e^2} (z \cos u - c')$$

$$\text{et } c - c' = \frac{r' e^2}{1 - e^2} \left(\frac{z}{r'} \cos u - \sin \varphi' \right)$$

sive valore ipsius $\frac{z}{r'}$ ex aequatione 2 §. 44. substituto, sequentem formulam exacte veram

$$c - c' = \frac{r' e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{\cos u \sqrt{\left[1 + \frac{e^2}{1 - e^2}(\cos u^2 - \sin \varphi^2)\right]} - \sin \varphi'}{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos u^2}$$

Patet autem, hanc formulam in seriem quam maxime convergentem evolvi, et ob factorem communem e^2 potentias ipsius e secunda majores in hac evolutione negligi posse. Sic prodibit

$$c - c' = \frac{r' e^2}{1 - e^2}(\cos u - \sin \varphi')\left[1 - \frac{1}{2}\frac{e^2}{1 - e^2}(\cos u - \sin \varphi')\right].$$

Denique posita correctione angulo $90^0 - u$ applicanda, ut prodeat latitudo quaesita $= \psi$, habebimus ex trigonometria plana

$$\text{tang} = \psi \, \frac{(c - c') \sin u}{z + (c - c') \cos u},$$

$$\text{sive quam proxime } \psi = \frac{c - c'}{z} \cdot \sin u - \frac{1}{2}\left(\frac{c - c'}{z}\right)^2 \sin 2u.$$

Sed $\cos u - \sin \varphi' = \sin \mu \cos \varphi' \cos \alpha' - 2 \sin {}^1\!/_2\, \mu^2 \sin \varphi'$,

$= \mu \cos \varphi' \cos \alpha' - {}^1\!/_2\, \mu^2 \sin \varphi'$ quam proxime,

et $\left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)^2 \frac{\sin \mu^2}{\sin 1''}$, adhibitis iis dimensionibus sphaeroidis terrestris, quas in §. 44. usurpavimus, pro $\mu = \frac{\pi}{180}$ ad $0'',0026$ tantummodo assurgit, quare sine errore sensibili ponere licet angulum ψ minutis secundis expressum

$$\psi = \frac{e^2}{(1 - e^2) \sin 1''}\left(\frac{s'}{r'} \cos \varphi' \cos \alpha' - {}^1\!/_2 \left(\frac{s'}{r'}\right)^2 \sin \varphi'\right) \sin u,$$

eritque latitudo quaesita $\varphi = 90^0 - u + \psi$. Commodiorem hujus problematis solutionem infra docebimus. (§. 117.)

§. 46.

Superest jam, ut etiam azimuthum computemus. Designantibus M′, M, P locum datum, quaesitum atque polum in superficie sphaeroidica, et m′, m, p puncta superficiei sphaericae praec. §. consideratae, in quibus rectae ex centro ejus ad puncta M′, M, P ductae superficiem posteriorem intersecant, habemus latera $pm = 90^0 - \varphi'$, $mm' = \mu$, angulumque iisdem interceptum $= \alpha'$. Quodsi supplementum anguli lateri pm′ oppositi dicatur m, erit ex trigonometria sphaerica

1) Cotang. $m = \frac{\cos\mu\cos\varphi'\cos\alpha' - \sin\mu\sin\varphi'}{\cos\varphi'\sin\alpha'}$, angulusque m foret azimuthum lineae s' ultra punctum M productae, si radius sphaerae ad hocce punctum ductus normalis esset ad superficiem sphaeroidicam. Vidimus autem in praec. §. hunc radium includere cum dicta normali angulum, quem charactere ψ designavimus, unde angulo m correctio quaedam applicanda erit, exigua quidem ob anguli ψ parvitatem, sed non negligenda, quia, a puncto M ulterius ad punctum M', et sic porro progrediendo, hi azimuthorum errores magis magisque sese accumulant. Correctio haec pariter ope trigonometriae sphaericae inveniri potest. Ex puncto M radio pro lubitu assumto descripta concipiatur sphaera, designentur brevitatis gratia puncta axis terrestris, in quibus normales ad M', M ductae ipsi occurrunt, per n', n, ducantur rectae, Mn, Mn', MM', quae superficiei sphaericae in punctis l, q, r occurrant, et per haec puncta ducantur circuli maximi. Tum ob arcum M M' quam proxime circularem §. 44. habebimus $lr = 90^0 - \frac{1}{2}\mu$, $lq = \psi$ et $r\,l\,q = m$, quare, si supplementum anguli q dicatur k, erit k azimuthum producti arcus M' M et

$$\text{Cotang. } k = \frac{\cos\frac{1}{2}\mu\cos\psi\cos m - \sin\frac{1}{2}\mu\sin\psi}{\cos\frac{1}{2}\mu\sin m}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{unde Cotang. } m - \text{Cotang. } k \\ \text{id est } \dfrac{\sin(k-m)}{\sin k\sin m}\end{array}\right\} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mu\sin\psi}{\sin m} + 2\sin\tfrac{1}{2}\psi^2\operatorname{cotg.} m,$$

$$\sin(k-m) = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}\mu\sin\psi\sin\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\psi^2\sin k\cos m,$$

sive quam proxime $k - m = \frac{1}{2}\mu\,\psi\sin m + \frac{1}{2}\psi^2\sin m\cos m$, et introducto valore anguli ψ §. 45. neglecto secundo termino,

$k - m = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{s'}{r'}\right)^2\cos\varphi'\cos\alpha'\sin u\sin m$, ubi loco u et m ponere licebit $90^0 - \varphi'$ et α', et sic habebimus in minutis secundis azimuthum α arcus M M' $= 180^0 + k$, sive

$$2)\ \alpha = 180^0 + m + \tfrac{1}{2}\frac{e^2}{(1-e^2)\sin 1''}\left(\frac{s'}{r'}\right)^2\cos\varphi'^2\sin\alpha'\cos\alpha'.$$

Adhibitis iis dimensionibus terrae, quibus in §. 44. usi sumus, posito $\mu = \frac{\pi}{180}$, erit $\alpha = 180^0 + m + 0'',2019\cos\varphi'^2\sin\alpha'\cos a'$, maximusque valor correctionis azimuthi sub latitudinibus $> 45^0$ ad $0'',05$ tantummodo assurgere potest.

§. 47.

Vidimus §. 44 arcum ellipticum sectione verticali sphaeroidis genitum tam prope accedere ad arcum circularem radio curvaturae primi verticalis ad alterutrum terminum illius arcus ducto, ut perexigua differentia, quae inter longitudinem arcus elliptici arcusque circularis intercedit, tuto negligi possit, quoties amplitudo arcus gradum unum non excedit. Quodsi termini hujus arcus elliptici dicantur A, B, planumque secans normale fuerit ad punctum A et sphaerois secetur secundo plano ad punctum B normali atque per punctum A transeunte, hoc planum deviabit a primo (casibus quibusdam specialibus exceptis), ut §. 46 vidimus et quidem ita, ut, characteres α, m in significatione ibidem stabilita retinendo, angulus ejusdem cum plano primo sit $= 180 + \alpha - \mathrm{m}$. Eodem modo a puncto quodam C hujus sectionis ad novum punctum D, et sic porro, progrediendo obtinebimus polygonum quoddam curvilineum ex arcubus ellipticis compositum, quod imminutis iisdem magis magisque accedet ad lineam continuo curvam duplicis curvaturae tanquam ad limitem, quae est linea brevissima in superficie sphaeroidica inter quaevis puncta ejusdem descripta, atque in sphaeroide circuli maximi loco poni potest in sphaera. Constat enim, in triangulo, cujus basis est linea brevissima, reliqua autem latera sunt meridiani, sinus angulorum basi adjacentium esse in ratione inversa perpendiculorum ex angulorum verticibus in axem rotationis demissorum, unde sponte fluit trita triangulorum sphaericorum proprietas, sinus angulorum esse in ratione sinuum laterum oppositorum.

Etsi autem in computandis dimensionibus trigonometricis triangula lineis brevissimis formata haud incommode adhiberi posse videantur, nos tamen in hisce disquisitionibus triangulis istis non utemur. Nam primum angulis observatis correctio ab altitudine montium pendens erit applicanda quoties ea non videtur esse negligenda, ut prodeant anguli sectionum verticalium. Deinde hi anguli reducendi erunt ad angulos triangulorum sphaeroidicorum et ex triangulorum serie calculo eruenda erit linea brevissima data quaevis ejusdem puncta jungens, cum azimutho hujus lineae, aut etiam linea brevissima e vertice cujusvis trianguli sub angulo recto ducta ad meridianum loci cujusdam dati, et arcus meridiani interceptus ab eadem perpendiculari. Ex posterioribus denique calculo satis commodo invenire licet latitudinem, longitudinem azimuthumque, praesertim tabulas quasdam auxiliares adhibendo, ut docuit cel. Bessel.[1] Sed calculo haud prolixiori ex latere cujusvis trianguli, latitudine et longitudine alterutrius termini ejusdem, atque ex azimutho lateris in hoc puncto, latitudinem et longitudinem alterius termini, cum azimutho lateris in altero puncto, deducere, et sic per totam triangulorum seriem progredi licet, ex quibus dein, si opus fuerit, methodo inversa coordinatae sphaeroidicae derivari poterunt. Quin etiam perparum a veritate discedemus, si totum triangulorum systema, quod aliquot tantummodo gradus complectitur, descriptum supponamus in superficie sphaerica, cujus radius aequatur radio curvaturae primi verticalis sub latitudine media systematis, ut §. 44 §. 46. monstratum est, et tunc facillime computantur coordinatae sphaericae punctorum systematis, qua methodo jam inde ab anno 1809 usus est cel. Soldner in dimensione trigonometrica Bavariae. Notari etiam meretur, cel. Gausium[2] via ab ea, quam hic ingressi sumus, prorsus diversa eundem radium maxime idoneum invenisse ad computandas dimensiones trigonometricas in sphaeroide, et ex relatione inter latitudinem in sphaera atque veram latitudinem in sphaeroide abeodem exhibita eandem prodire correctionem prioris, quam §. 45 charactere ψ designavimus.

§. 48.

Transimus ad solutionem triangulorum sphaericorum, quorum latera exigua, sed multo accuratius computanda sunt, quam in trigonometria sphaerica fieri solet. Prior methodus innititur propositioni notatu dignae a cel. Legendre inventae, talia triangula solvi posse tanquam triangula plana, si unusquisque angulorum trianguli sphaerici diminuatur tertia parte excessus sphaerici, ita ut summa angulorum exacte aequalis sit duobus rectis. Sed probe notandam est, angulos sic diminutos in calculo laterum tantummodo usurpandos esse, minime vero in calculo azimuthorum. Cumque hi anguli facillime inter se confundi possint, huic approximationi praeferenda esse videtur directa triangulorum sphaericorum solutio, quae eo casu, ubi unum latus et anguli dantur, aeque facilis est atque solutio triangulorum rectilineorum. Haec altera methodus requirit logarithmos sinuum laterum, qui tabulis trigonometricis ob inaequales logarithmorum sinuum angulorum per singula minuta secunda crescentium differentias commode depromi non possunt. Tollitur hoc incommodum adhibendo

[1] Schumachers astronomische Nachrichten. Nr. 86.
[2] Astronom. Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft S. 21 u. f.

numeros, qui tabulis numerorum Calleti adjecti sunt, vel ope tabulae exhibentis excessus logarithmorum arcuum super logarithmos sinuum eorundem. Habemus nempe

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{2.3} \sin x^2 + \frac{1.3}{2.4.5.} \sin x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \sin x^6 + \ldots,$$

unde facile deducitur

$$\text{Log. nat}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = {}^1\!/_6 \sin x^2 + \frac{11}{180} \sin x^4 + \frac{191}{5670} \sin x^6 + \frac{2497}{113400} \sin x^8 + \ldots$$

et $\text{log. vulg. } x = \text{Log. } \sin x + A \sin x^2 + B \sin x^4 + C \sin x^6 + D \sin x^8 + \ldots$

positis Log. A = Log. m — Log. 6.
Log. B = Log. m + Log. 11 — Log. 180.
Log. C = Log. m + Log. 191 — Log. 5670.
Log. D = Log. m + Log. 2497 — Log. 113400.

ubi m modulus Log. vulg. = 0,43429448. cuj. Log = 9,63778431.

unde A = 0,07238241; Log. A = 8,85963306 — 10.
B = 0,02654022; Log. B = 8,42390449 — 10.
C = 0,01462965; Log. C = 8,16523462 — 10.
D = 0,00956290; Log. D = 7,98058980 — 10.

Datus sit e. g. Log. sin x = 8,4000266 pro radio tabulari, eritque

Log. sin x^2 = 6,8000532
Log. A = 8,8596331
5,6596863; A sin x^2 = 0,0000456.8

Log. sin x^4 = 3,6001064
Log. B = 8,4239045
2,0240109; B sin x^4 = 0,0000000.1

0,0000456.9 = m; Log. x = Log. sin x + m.
Log. sin x = 8,4000266
Log. sin x = 8,4000723 ubi x denotat

longitudinem arcus circularis radio tabularum descripti, habebimusque pro quocunque alio radio r

Log. arcus = Log. r + 8,4000723 — 10, atque logarithmum anguli minutis secundis expressi $\left(r = 1;\ \text{Log. } \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251.3\right)$

= 5,3144251.3 + 8,4000723 — 10 = 3,7144974, cui respondet numerus 5182″,0 = 1° 26′ 22″.

Ope praecedentis formulae computata est tabula sequ. quae exhibet figuras decimales appositis logarithmis sinuum addendas, ut prodeant logarithmi arcuum, pro radio tabularum trigonometricarum. Figura octava, quam exactioris calculi gratia adjecimus, a reliquis puncto separata est.

Tabula Additamentorum. Log. arc. $x =$ Log. $\sin x + m$; $r = 1$.

Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.
6,500	0.1	7,250	2.3	7,550	9.1	7,850	36.3	8,150	144.4	8,450	575.1
6,600	0.1	7,260	2.4	7,560	9.5	7,860	38.0	8,160	151.2	8,460	602.2
6,700	0.2	7,270	2.5	7,570	10.0	7,870	39.8	8,170	158.4	8,470	630.6
6,800	0.3	7,280	2.6	7,580	10.5	7,880	41,7	8,180	165.8	8,480	660.4
6,900	0.5	7,290	2.7	7,590	11.0	7,890	43 6	8,190	173.6	8,490	691.5
7,000	0.7	7,300	2.9	7,600	11.5	7,900	45.7	8,200	181.8	8,500	724.1
7,010	0.8	7,310	3.0	7,610	12 0	7,910	47.8	8,210	190.4	8,510	758.2
7,020	0.8	7,320	3.2	7,620	12.6	7,920	50.1	8,220	199.4	8,520	794.0
7,030	0.8	7,330	3.3	7,630	13.2	7,930	52.4	8,230	208.8	8,530	831.4
7,040	0.9	7,340	3.5	7,640	13.8	7,940	54.9	8,240	218.6	8,540	870.6
7,050	0.9	7,350	3.6	7,650	14.4	7,950	57.5	8,250	228.9	8,550	911.7
7,060	1.0	7,360	3.8	7,660	15.1	7,960	60.2	8,260	239.7	8,560	954.6
7,070	1.0	7,370	4.0	7,670	15.8	7,970	63.1	8,270	251.0	8,570	999.7
7,080	1.0	7,380	4.2	7,680	16.6	7,980	66.0	8,280	262.8	8,580	1046.8
7,090	1.1	7,390	4.4	7,690	17.4	7,990	69.1	8,290	275.2	8,590	1096.2
7,100	1.1	7,400	4.6	7,700	18.2	8,000	72.4	8,300	288.2	8,600	1147.8
7,110	1.2	7,410	4.8	7,710	19.0	8,010	75.8	8,310	301.8	8,610	1202.0
7,120	1.3	7,420	5.0	7,720	19.9	8,020	79.4	8,320	316.0	8,620	1258.7
7,130	1.3	7,430	5.2	7,730	20.9	8,030	83.1	8,330	330.9	8,630	1318.0
7,140	1.4	7,440	5.5	7,740	21.9	8,040	87.0	8,340	346.5	8 640	1380.2
7,150	1.4	7,450	5.7	7,750	22.9	8,050	91.1	8,350	362.8	8,650	1445 3
7,160	1.5	7,460	6.0	7,760	24.0	8,060	95.4	8,360	379.9	8,660	1513.4
7,170	1.6	7,470	6.3	7,770	25.1	8,070	99.9	8,370	397.8	8,670	1584.8
7,180	1.7	7,480	6.6	7,780	26.3	8,080	104.6	8,380	416.6	8,680	1659.6
7,190	1.7	7,490	6.9	7,790	27.5	8,090	109.6	8,390	436.2	8,690	1737.9
7,200	1.8	7,500	7.2	7,800	28.8	8,100	114.7	8,400	456.8	8,700	1819.8
7,210	1.9	7,510	7.6	7,810	30.2	8,110	120.1	8,410	478.3	8,710	1905.7
7,220	2.0	7,520	7.9	7,820	31.6	8,120	125 8	8,420	500.9	8,720	1995.6
7,230	2.1	7,530	8 3	7,830	33.1	8,130	131.7	8,430	524.5	8,730	2089.7
7,240	2.2	7,540	8.7	7,840	34.7	8,140	137.9	8,440	549.1	8,740	2188.3
7,250	2 3	7,550	9.1	7,850	36.3	8,150	144.4	8,450	575.1	8,750	2291.6

Cumque etiam sit $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$

habemus $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 - \ldots$

unde Log. nat $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 + \ldots$

Quare ex tabula, logarithmum arcus tanquam argumentum tabulae spectando, depromi potest numerus a logarithmo arcus subtrahendus, ut prodeat logarithmus sinus ejusdem, quoties membrum secundum seriei negligere licet, quod, ut supra vidimus, octavam figuram vix mutat, si arcus $< 1\frac{1}{2}^0$. Quodsi vero arcus major fuerit, valor prope verus logorithmi sinus hac via inventus dabit reductionem quaesitam logarithmi sinus ad logarithmum arcus.

§. 49.

Hisce praemissis, triangulorum sphaericorum, quorum anguli et quodlibet latus dantur, solutio ita se habebit.

Quaerendus est radius curvaturae primi verticalis sub latitudine φ' puncti fere medii trianguli, vel systematis triangulorum, ope formulae §. 40 n. 6.

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi'^2}}$$

$$\text{aut } r' = \frac{a}{\cos E}, \text{ facto } \sin E = e \sin \varphi',$$

aut etiam, formula in seriem evoluta, neglectisque terminis, qui in figuram decimalem octavam cadunt, per formulam

$\text{Log. } r' = \text{Log. } a + \frac{M}{2} . e^2 \sin \varphi'^2 + \frac{M}{4} e^4 \sin \varphi'^4$, in qua M denotat modulum logarithmorum vulgarium. Adhibendo numeros §. 44.
assumtos habemus Log. a = 6,5147696 et Log e^2 = 7,8052071 — 10.

$$\text{Log. } \frac{M}{2} e^2 = 7{,}1419614 - 10.$$

$$\text{Log. } \frac{M}{4} e^4 = 4{,}6461385 - 10.$$

Exemplum. $\varphi' = 48^0\ 31'$; Log. $\sin \varphi'^2 = 9{,}74914$.

$$\text{Log. } \frac{M}{2} e^2 = 7{,}14196.$$

$$6{,}89110; \ .. \ 0{,}000.7782.2.$$

$$\text{Log. } \sin \varphi'^4 = 9{,}49827.$$

$$\text{Log. } \frac{M}{4} e^4 = 4{,}64614.$$

$$4{,}14441; \ .. \ 0{,}000.0013.9$$

$$\text{Log. } a = 6{,}5147696.$$

$$\text{Log. } r' = 6{,}5155492.$$

Deinde opus est nobis excessu sphaerico, quo anguli observati debite corrigi possint. Positis duobus lateribus trianguli = a,b. et angulo intercepto = C, habemus quam proxime aream trianguli sphaerici, quale hic consideramus, = ½ ab. sin C, et hinc ope propositionis in §. 39. allegatae obtinebimus

$$\text{excessum sphaericum } \varepsilon = \frac{\text{a b. sin C}}{2\,\text{r}'^2 \sin 1''},$$

facileque perspicitur, latera a, b ad hunc scopum satis accurate inveniri triangulum tanquam planum considerando et logarithmos quinque decimalium adhibendo. Pro systemate triangulorum in eadem sphaera jacentium adhiberi potest logarithmus constans, nempe Log. $\left(\frac{1}{2\,\text{r}'^2 \sin 1''}\right)$, qui pro radio supra invento prodit = 1,98230 — 10.

§. 50.

Quotiescunque autem totum triangulorum systema pro eodem radio r′ computandum fuerit, haud abs re erit, in locum logarithmorum sinuum, quos tabula prima (§. 48) continet, substituere summam Log. sin + Log. r′ — 10, tumque ex nova hoc tabula immediate dato logarithmo sinus (pro radio r′) respondentem reductionem ad arcum, ac vice versa, depromere licebit, atque solutio triangulorum sphaericorum aeque commode ac planorum absolvetur.

Bezeichnet demnach R den Radius des Vermessungs-Horizonts von Württemberg, welcher 844 Par. Fuss über dem Meer liegt, so ist (für württ. Fuss) Log. R = Log. r′ + Log. $\frac{864}{126{,}97}$ + 185,4 = 7,3483804 und Log. sin (der Tabelle in §. 48.) + Log. R — 10 gibt folgende zweite Additamenten-Tabelle, welche bei der sphärischen Triangulirung, bei Reduction der Logarithmen der Distanzen von Log. sin D in Log. D und umgekehrt, angewendet wurde. Log. (R sin D) + m = Log. D.

Additamenten-Tabelle
für die Log. sin der Distanzen der Haupttriangulirung.

Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.
3,50	0.02	4,21	0.4	4,47	1.3	4,73	4.2	4,99	13.9	5,25	46.0	5,51	152.4
3,60	0.03	4,22	0.4	4,48	1.3	4,74	4.4	5,00	14.6	5,26	48.2	5,52	159.6
3,70	0.04	4,23	0.4	4,49	1.4	4,75	4.6	5,01	15.2	5,27	50.5	5,53	167.1
3,80	0.06	4,24	0.4	4,50	1.5	4,76	4.8	5,02	16.0	5,28	52.9	5,54	175.0
3,90	0.08	4,25	0.5	4,51	1.5	4,77	5.0	5,03	16.7	5,29	55.3	5,55	183.3
4,00	0.10	4,26	0.5	4,52	1.6	4,78	5.3	5,04	17.5	5,30	58.0	5,56	191.9
4,01	0.20	4,27	0.5	4,53	1.7	4,79	5.5	5,05	18.3	5,31	60.7	5,57	201.0
4,02	0.20	4,28	0.5	4,54	1.7	4,80	5.8	5,06	19.2	5,32	63.5	5,58	210.4
4,03	0.2	4,29	0.6	4,55	1.8	4,81	6.1	5,07	20.1	5,33	66.5	5,59	220.3
4,04	0.2	4,30	0.6	4,56	1.9	4,82	6.4	5,08	21.0	5,34	69.7	5,60	230.8
4,05	0.2	4,31	0.6	4,57	2.0	4,83	6.7	5,09	22.0	5,35	73.0	5,61	241.6
4,06	0.2	4,32	0.6	4,58	2.1	4,84	7.0	5,10	23.1	5,36	76.4	5,62	253.0
4,07	0.2	4,33	0.7	4,59	2.2	4,85	7.3	5,11	24.2	5,37	80.0	5,63	265.0
4,08	0.2	4,34	0.7	4,60	2.3	4,86	7.6	5,12	25.3	5,38	83.8	5,64	277.4
4,09	0.2	4,35	0.7	4,61	2.4	4,87	8.0	5,13	26.5	5,39	87.7	5,65	290.5
4,10	0.2	4,36	0.8	4,62	2.5	4,88	8.4	5,14	27.7	5,40	91.9	5,66	304.2
4,11	0.2	4,37	0.8	4,63	2.7	4,89	8.8	5,15	29.0	5,41	96.2	5,67	318.6
4,12	0.3	4,38	0.8	4,64	2.8	4,90	9.2	5,16	30.4	5,42	100.7	5,68	333.6
4,13	0.3	4,39	0.9	4,65	2.9	4,91	9.6	5,17	31.9	5,43	105.5	5,69	349.3
4,14	0.3	4,40	0.9	4,66	3.0	4,92	10.1	5,18	33.4	5,44	110.4	5,70	365.8
4,15	0.3	4,41	1.0	4,67	3.2	4,93	10.5	5,19	34.9	5,45	115.6	5,71	383.0
4,16	0.3	4,42	1.0	4,68	3.3	4,94	11.0	5,20	36.6	5,46	121.1	5,72	401.0
4,17	0.3	4,43	1.1	4,69	3.5	4,95	11.6	5,21	38.3	5,47	126.8	5,73	419.9
4,18	0.3	4,44	1.1	4,70	3.7	4,96	12.1	5,22	40.07	5,48	132.8	5,74	430.7
4,19	0.3	4,45	1.2	4,71	3.8	4,97	12.7	5,23	42.0	5,49	139.0	5,75	460.5
4,20	0.4	4,46	1.2	4,72	4.0	4,98	13.3	5,24	44.0	5,50	145.6		

Log. arc. x = Log. R + Log. sin x + m und Log. (R sin x) = Log. arc. x — m. (s. unten §. 62.)

§. 51.

Entwicklung der Formeln für die Krümmungshalbmesser,

wie sie in §. 40 aufgestellt sind.

An den Punkt B der Ellipse ABPE, welchem die Coordinaten x und y entsprechen, werde die Normale BO gezogen, und es sey der Winkel BOA, welchen diese Normale mit der grossen Axe AE bildet = φ' = der