Vierter Abschnitt.

Triangulirung.

§. 38.

Vorbemerkung.

Der im vorigen Abschnitt beschriebenen Basismessung und Hauptwinkelmessung folgte als die zunächst darauf gegründete Operation die sphärische Triangulation. Da aber bei dieser verschiedene wichtige Gegenstände zu berücksichtigen waren, so ist auch die Einleitung in dieselbe, wie sie Professor von Bohnenberger in einer Dissertation vom Jahr 1826 über die Triangulirung eines ganzen Landes gegeben hat, der Beschreibung unserer Haupttriangulirung vorangestellt.

Die in lateinischer Sprache abgefasste Dissertation hat die Aufschrift: „De Computandis Dimensionibus Trigonometricis in Superficie Terrae sphaeroidica Institutis," sie erschien nie im Buchhandel, und würde desswegen auch nicht allgemein bekannt.

Diese Schrift ist in Folgendem so weit wortgetreu gegeben, als für unsere Beschreibung nöthig ist, und dürfte dieser Abschnitt nicht nur für das mathematische Publikum von besonderem Interesse sein, sondern auch dem um unsere Landesvermessung so hoch verdienten Professor von Bohnenberger ein bleibendes Denkmal in der Geschichte derselben geben.

§. 39.

Einleitung in die sphärische Triangulirung.

„Punctorum in superficie terrae jacentium situs commodissime determinatur triangulorum ope ita inter se conjunctorum, ut eorum quodvis cum proximo unum latus commune habeat. Quodsi horum triangulorum anguli dentur una cum uno latere cujusvis eorum, reliqua latera calculo erui poterunt, in quo triangula haec tanquam plana spectare licebit, quoties areae eorum quatuor milliaria geographica quadrata non excedunt. Anguli quidem observati et, si opus fuerit, ad horizontem reducti, quatenus terram sphaericam sapponimus, anguli sunt triangulorum sphaericorum, quorum summa in quovis triangulo sphaerico duos rectos excedit. Constat autem, excessum hunc, qui excessus sphaericus dicitur, esse ad quatuor rectos, ut area trianguli ad superficiem hemisphaerii, in qua descriptum sumitur, ideoque hunc excessum in triangulo terrestri, cujus area unius est milliaris quadrati, ad ö, 28 vix assurgere posse.

Totum igitur systema triangulorum in planum explicari poterit, et quodvis horum triangulorum quam proxime consentiet cum eo, quod ipsi in superficie terrae respondet, etsi tota figura aucto triangulorum numero magis magisque fiat erronea. Dum enim angulos observatos ita corrigimus, ut eorum summa in quovis triangulo fiat duobus rectis, summa autem angulorum circa idem punctum jacentium quatuor rectis aequalis, anguli ad perimetrum polygoni, quod formatur lateribus triangulorum ad limites totius figurae jacentium, fiunt justo minores. Quodsi numerus laterum hujus polygoni fuerit $= n$ summa angulorum ad perimetrum erit $2n - 4$ rectis. cui adjiciendus est excessus sphaericus polygoni, ut prodeat summa angulorum ad perimetrum polygoni sphaerici. Cumque hic excessus sit ad quatuor rectos, ut area polygoni ad hemisphaerium, non amplius negligendus erit, et in observationibus ipsis sese manifestabit, similesque differentiae prodibunt, quoties puncta remotiora systematis triangulorum variis modis inter se combinantur. Praeterea in dimensionibus trigonometricis saepenumero majora occurrunt triangula, quorum excessus sphaericus tantus est, ut negligi non possit, tumque quaeritur, an talia triangula in superficie terrae sphaeroidica tanquam sphaerica considerare liceat, qui radius sit assumendus, ubi commodissime centrum sphaerae sit collocandum? Hae disquisitiones ad geodaesiam sublimiorem sic dictam spectant, iisque plures jam pridem geometrae operam dederunt, ut vix novi quid addi posse videatur. Nihilo vero minus e re visum est, in methodos hucusque usitatas accuratius inquirere, erroresque determinare, quos relinquunt. Solutiones quorundam problematum huc pertinentium subjungemus.

§. 40.

Supponimus autem terram sphaeroidicam talem, qualis revolutione ellipseos circa axem minorem gignitur. Positis semiaxe majore ellipseos genitricis $= a$, semiaxe minore $= b$, iisque sumtis pro axibus ipsarum x, y habebimus:

$$1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ad punctum ellipseos, cui respondent coordinatae x, y, ducatur normalis, cujus angulus cum axe majore dicatur φ, erit hic latitudo geographica illius puncti, fietque subnormalis $= y \operatorname{cotang} \varphi$. Constat autem ex conicis eandem esse

$$= \frac{b^2}{a^2} x, \text{ hinc erit}$$

$$2) \quad b^2 x \sin \varphi = a^2 y \cos. \varphi.$$

Excentricitas meridiani terrestris dicatur e, ut sit

$$3) \quad a^2 e^2 = a^2 - b^2,$$

et ex combinatione aequationum 1, 2 obtinebimus coordinatas x, y per functiones latitudinis expressas, nempe

$$4) \quad x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}}$$

$$5) \quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}}$$

Segmentum normalis perimetro ellipseos et axe minore interceptum dicatur r^1, eritque $r^1 = x \sec. \varphi$, sive ob aequationem 4,

$$6) \quad r^1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}}$$

Recta, quam haec normalis ab axe minore inde a centro ellipseos abscindit, ponatur $= c$, et habebimus $c = x \operatorname{Tang.} \varphi - y$, unde substitutis valoribus coordinatarum x, y ex aequationibus 4, 5, prodibit

$$7) \quad c = \frac{a e^2 \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}} = r^1 e^2 \sin \varphi$$

Posito radio terrestri $= R$ ob $R^2 = x^2 + y^2$ earundem aequationum ope habebimus

$$8) \quad R^2 = a^2\, \frac{1 - e^2\,(2 - e^2) \sin \varphi^2}{1 - e^2 \sin \varphi^2}$$

Denique radius curvaturae meridiani elliptici latitudini φ competens dicatur r, sitque p semiparametro axis minoris aequalis.

Constat ex conicis esse $r p^2 = (r^1)^3$. Est autem $b : a = a : p$

$p = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$, (n 3); quare valore ipsius r^1 ex aequatione 6 substituto, prodibit

$$9) \quad r = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{3/2}}$$

§. 41.

Quodsi jam sphaerois talis, qualem hic supponimus, secetur plano, constat sectionem esse ellipsin, quae in circulum abit, si planum sectionis cum aequatore coincidat, aut ipsi parallelum sit. Sectio per axem dabit meridianum terrestrem. Secetur denique quocunque alio plano, et per intersectionem hujus plani cum plano aequatoris ducatur diameter posterioris sub angulo recto, per hanc autem ducatur meridianus, et quaeratur aequatio ad sectionem inter abscissas t, quae sumantur in intersectione dicti meridiani cum plano sectionis inde a puncto, in quo axis ipsarum t plano aequatoris occurrit, et inter ordinatas rectangulares u. Sit porro ϑ aequalis angulo, quem axis ipsarum t includit cum axe sphaeroidis, ejusque segmentum plano sectionis et plano aequatoris interceptum dicatur c, quod in eo casu, quo axis ipsarum t normalis est ad superficiem sphaeroidis, abibit in lineam eodem charactere in (§. 40, n. 7) designatam. Hisce positis, quum aequatio ad superficiem sphaeroidis sit

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2 = 1, \text{ et}$$

$x = c \text{ tang. } \vartheta + t \sin \vartheta$, $y = t \cos \vartheta$, habebimus aequationem

$$\left(\frac{t \sin \vartheta + c \text{ tang. } \vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{t \cos \vartheta}{b}\right)^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2 = 1,$$

quae transformatur in hanc

$(1 - e^2 \sin \vartheta^2)\, t^2 + 2\,(1 - e^2)\, c\, t \sin \vartheta \text{ tang } \vartheta + (1 - e^2)\, u^2 = (1 - e^2)$ $(a^2 - e^2 \text{ tang } \vartheta^2)$,

et simplicissimam induit formam.

$$1) \quad \left(\frac{t^1}{b^1}\right)^2 + \left(\frac{u}{a^1}\right)^2 = 1, \text{ positis } t^1 = t + \frac{(1 - e^2)\, c \sin \vartheta \text{ tang } \vartheta}{1 - e^2 \sin \vartheta^2},$$

$$2) \quad b^1 = a \sqrt{\left[(1 - e^2)\left(1 - \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin \vartheta^2\right)\right] : (1 - e^2 \sin \vartheta^2)}$$

$$3) \quad a^1 = a \sqrt{\frac{1 - \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin \vartheta^2}{1 - e^2 \sin \vartheta^2}} \text{ ex quibus sequitur}$$

$$4)\quad \left(\frac{a^1}{b^1}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos\vartheta^2$$

Sectio itaque est ellipsis, cujus axes sunt $2a^1$, $2b^1$, patetque ex aequatione 4 omnes sectiones planis parallelis factas esse similes, et a^1 esse semiaxem majorem, qui ex constructione semper parallelus erit plano aequatoris. Quodsi semiparameter axis minoris dicatur p^1, erit $b^1p^1 = a^1a^1$, sive substitutis valoribus semiaxium

$$5)\quad p^1 = a\sqrt{\frac{1-\left(e^2+\frac{c^2}{a^2}\right)\sin\vartheta^2}{1-e^2}}$$

Ponamus jam sectionem transire per normalem sub latitudine φ ductam, sive esse sectionem verticalem, eritque $\varphi + \vartheta = 90^0$, unde $c = r^1 e^2 \sin\varphi$, (§. 40 n. 7) et $r^1 r^1 = a^2e^2 + c^2$, quare ex aequatione 5 habebimus

$$6)\quad p^1 = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin\varphi^2)}} = r^1.$$

Constat autem ex conicis, semiparametrum p^1 axis minoris b^1 esse radium curvaturae ellipseos in vertice ejusdem exis, quare si ad punctum quodvis superficiei sphaeroidicae ducatur normalis, segmentum hujus inter hoc punctum et axem sphaeroidis jacens radio curvaturae arcus elliptici in eodem puncto erit aequale, qui jacet in plano verticali per hoc punctum ducto sub angulo recto ad meridianum ejusdem puncti. Caeterum haec constructio radium curvaturae in polo ipso indeterminatum relinquere videtur. Sed in hoc casu pro centro curvaturae punctum, ad quod intersectio normalium cum axe crescente latitudine tanquam ad limitem propius propiusque accedit, sumendum esse constat, et formula 6 exhibet valorem radii curvaturae huicce limiti respondentem posito $\varphi = 90^0$, quippe

$$r^1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b}.$$

§. 42.

Determinandus restat radius curvaturae in vertice arcus elliptici jacentis in plano verticali pro lubitu assumto.

Sit φ' latitudo puncti, ad quod normalis ducta est, et α' angulus plani verticalis cum meridiano per idem punctum ducto, sive azimuthum ejus sumtum a polo versus orientem. Ducatur etiam secundus meridianus sub angulo recto ad planum verticale, et ex puncto axis tribus hisce planis communi tanquam centro radioque pro lubitu assumto descripta concipiatur superficies sphaerica, cujus intersectiones cum tribus illis planis formabunt triangulum sphaericum rectangulum. Hypothenusa hujus trianguli aequabitur complemento latitudinis φ', latus autem angulo α' oppositum metietur angulum, quem in §. 41 signe ϑ designavimus.

Posito tertio latere = w, habebimus ex trigonometria sphaerica

$$1) \quad \begin{cases} \sin \vartheta = \sin \alpha' \cos \varphi'. \\ \sin w \cos \vartheta = \cos \alpha' \cos \varphi' \\ \cos w \cos \vartheta = \sin \varphi'. \end{cases}$$

Deinde ex §. 40 n, 7 obtinebimus $e^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{e^2}{1 - e^2 \sin \varphi^2}$, et ope aequationis 5. §. 41 semiparametrum axis minoris sectionis ellipticae $p' = a\sqrt{\frac{1 - e^2 \sin \varphi'^2 - e^2 \sin \vartheta^2}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin \varphi'^2)}}$, sive introducto valore $\sin \vartheta$ ex n. 1, debitaque reductione facta

$$2) \quad p' = a\sqrt{\frac{1 - e^2 + e^2 \cos a'^2 \cos \varphi'^2}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin \varphi'^2)}}.$$

Cum autem normalis ad superficiem sphaeroidicam simul sit normalis ad ellipsin hac sectione genitem, segmentum hujus normalis superficie sphaeroidica et axe minore hujus ellipseos abscissum per n. 6 §. 40 erit $= \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi^2)}}$.

Hinc si radius curvaturae sectionis in puncto, ad quod normalis ducta est, dicatur r'', habebimus $r'' = \frac{a^3}{p'p'(1 - e^2 \sin \varphi^2)^{3/2}}$, sive substituto valore semiparametri ex n. 2.

$$3) \quad r'' = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 + e^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2)\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi^2)}},$$

quodsi ponatur $\alpha' = 90^0$, prodibit

$$r' = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)}}, \text{ ut in §. 40 n. 6}$$

posito autem $\alpha' = 0$, obtinebimus

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{3/2}}, \text{ ut in §. 40 n. 9}$$

hinc porro habebimus

$$rr' = \frac{a^2(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^2},$$

$$\text{et } r \sin \alpha'^2 + r' \cos \alpha'^2 = \frac{a(1 - e^2 + e^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2)}{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)^{3/2}}$$

adeoque $\frac{rr'}{r \sin\alpha'^2 + r' \cos\alpha'^2} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2+e^2\cos\alpha'\cos\varphi'^2)\sqrt{(1-e^2\sin\varphi'^2)}}$,
id est ob aequationem 3,

$$r' = \frac{rr'}{r \sin\alpha'^2 + r' \cos\alpha'^2}, \text{ sive}$$

$$4) \quad \frac{1}{r''} = \frac{\sin\alpha'^2}{r'} + \frac{\cos\alpha'^2}{r}$$

§. 43.

Radii curvaturae datis azimuthis respondentes commode quidem poterunt adhiberi, quoties ex longitudine exigui arcus elliptici in plano verticali jacentis angulus, quem normales ad terminos ejusdem ductae includunt, aut vice versa, inveniendus est, praesertim si in calculo adhibetur radius medio arcus respondens. Cum autem hi radii, ut ex aequatione 3. §. praec. patet, inde a meridiano usque ad primum verticalem sic dictum continue crescant, deinde in eadem ratione decrescant, minus apti videntur ad computanda triangula in superficie terrae descripta.

Caeterum errores ex varia sectionum verticalium curvatura oriundi quoad maximam partem sese destruunt, si anguli semper ad idem centrum referuntur. Sit enim s arcus exiguus meridiani, r radius circuli curvaturae ejusdem, et ex centro ejus ad terminos arcus ducantur rectae abscindentes a circulo ex eodem centro radio 1 descripto arcum w, et habebimus quam proxime $s = rw$.

In alterutro crure anguli w, producto si opus fuerit, sumatur aliud centrum priori vicinum, ex quo ad alterum terminum arcus s agatur recta, quae dicatur r', sitque angulus hujus rectae atque prioris $= w'$. Tum erit $r' : r = \sin w : \sin w'$, sive quam proxime $= w : w'$, unde $r'w' = rw = s$. Cumque centrum curvaturae primi verticalis jaceat in axe sphaeroidis, commodissime sphaera ex hoc puncto radio r' curvaturae primi verticalis descripta in calculo dimensionum geodaeticarum adhiberi posse videtur. Haud tamen obs re erit, in hanc approximationem accuratius inquirere, atque errores investigare, quos ea relinquit.

§. 44.

Sub latitudine φ' secetur sphaerois plano verticali, cujus azimuthum a septentrione versus orientem sumtum sit $= \alpha'$, et in hoc plano ex centro curvaturae primi verticalis ducatur recta z ad perimetrum sectionis, quae cum normali sive linea verticali includat angulum μ Ducatur etiam per rectam z meridianus terrestris, et ex centro curvaturae primi verticalis radio pro lubitu assumto descripta concipiatur superficies sphaerica, orieturque triangulum sphaericum, cuius unum latus erit complementum latitudinis φ', secundum latus erit angulus sive arcus μ, angulusque hisce lateribus interceptus $= \alpha'$. Tertium latus dicatur u, eritque per trigonometriam sphaericam

$$1)\quad \cos u = \sin \varphi \cos \mu + \cos \varphi' \sin \mu \cos \alpha'$$

A puncto, in quo recta z superficiei sphaeroidis occurrit, ducatur ordinata perpendicularis ad axem sphaeroidis, quae erit $=$ z sin u. Abscissa autem huic ordinatae respondens et a centro sphaeroidis computata erit $=$ z cos u $-$ c, ubi $c = r' e^2 \sin \varphi'$ (§. 40 n. 7).

Habebimus itaque ex aequatione ad ellipsin generatricem

$$\left(\frac{z.\ \sin u}{a}\right)^2 + \left(\frac{z \cos u - c}{b}\right)^2 = 1,$$ qua aequatione soluta prodibit

$$z = \frac{c \cos u \pm b \sqrt{(1 - e^2 \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) \sin u^2)}}{1 - e^2 \sin u^2},$$

patetque, valorem signo inferiori respondentem hic rejiciendum esse. Introducto jam valore ipsius c, debitaque reductione facta, emerget

$$2)\quad z = \frac{\frac{e^2}{1-e^2} r' \sin \varphi' \cos u + r' \sqrt{(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\left(\cos u^2 - \sin \varphi'^2\right))}}{1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos u^2}.$$

Haec expressio in seriem evoluta dabit $\frac{z}{r'} = 1 - \frac{1}{2} . \frac{e^2}{1-e^2} (\cos u - \sin \varphi')^2$

$$+ \frac{3}{8}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \left[(\cos u - \sin \varphi')^4 + \frac{4}{3} \sin \varphi' (\cos u - \sin \varphi')^3\right] \text{ etc.}$$

cumque ex aequatione 1. sit.

$$(\cos u - \sin \varphi')^2 = \sin \mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 - 4 \sin \mu \sin \tfrac{1}{2} \mu^2 \cos \alpha' \sin \varphi' \cos \varphi' + 4 \sin \tfrac{1}{2} \mu^4 \sin \varphi'^2.$$

et $e^2 \sin \mu^4$, $e^4 \sin \mu$ sine errore sensibili negligi possint, quoties μ gradum unum non excedit, erit quam proxime

$$\frac{z}{r'} = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1-e^2} (\mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 - \mu^3 \cos \alpha' \sin \varphi' \cos \varphi'),$$ neglectis quantitatibus $e^2 \mu^4$, $e^4 \mu^3$ altiorumque ordinum.

Quodsi arcus ellipticus sectionis angulo μ respondens ponatur $= s'$, erit $(ds')^2 = (z d\mu)^2 + (dz)^2$,

$$\text{sive} \left(\frac{1}{r'} \cdot \frac{ds'}{d\mu}\right)^2 = \left(\frac{z}{r'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{r'}\right)^2,$$

hinc introducto valore ipsius $\frac{z}{r'}$ et extracta radice

$$\frac{1}{r'} \cdot \frac{ds'}{d\mu} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1-e^2} \mu^2 \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2 \left(1 - \frac{e^2}{1-e^2} \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2\right)$$

$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1-e^2} \mu^3 \cos \alpha' \sin \varphi^1 \cos \varphi^1$. Qua formula integrata, neglectis quantitatibus ordinis $e^4 \mu^3$ altiorumque ordinum, prodibit

3) $s' = r'\mu - \frac{r'}{6} \cdot \frac{e^2 \mu^3}{1-e^2} \cos \alpha'^2 \cos \varphi'^2$, ubi constans nulla est adjicienda.

Secundus terminus sub aequatore et pro $\alpha' = o$ fit maximus, et aequalis quantitati $\frac{a}{6} \cdot \frac{e^2 \mu^3}{1-e^2}$.

Jam vero pro $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{312,7}$, $a = 3271670$ hexap. paris. et $\mu = \frac{\pi}{180}$ fit ista quantitas $= 0,0187$ hexaped. Quare error ex formula simplicissima $s' = r' \mu$ oriundus in tali sphaeroide ad 0,02 hexap. assurgere nequit, quoties angulus μ gradum unum non excedit. Patet praeterea, sub latitudinibus $> 45^0$, errorem maximum 0,01 hexaped. superare non posse, eundemque deprimi ad quintam fere partem unius pollicis parisiensis, si adhibeatur radius curvaturae medio arcus respondens.

§. 45.

Ducta igitur ad punctum quodvis in superficie sphaeroidis situm normali, et ex puncto intersectionis illius cum axe sphaeroidis tanquam centro per dictum punctum descripta sphaera, haec quidem superficiem sphaeroidicam in puncto isto continget, non autem asculabitur, nisi punctum contactus fuerit polus; ut ex §. 42. patet, ideoque pro variis azimuthis variae quoque sphaerae erunt adhibendae, quoties relatio quaeritur inter arcus ellipticos et angulos normalium ad terminos arcuum ductarum. Nihilominus sphaera haec percommode adhiberi poterit in computandis dimensionibus trigonometricis. Arcus enim circuli maximi per punctum contactus ducti tam parum differunt ab arcubus ellipticis puncto contactus adjacentibus, quorum termini cum prioribus jacent in iisdem sphaerae radiis (productis si opus fuerit), ut haec differentia tuto negligi possit.

quoties in alterutro puncto signum quoddam in altero puncto positum videre licet. Et hinc sponte fluit solutio problematis: Data distantia s′ duorum punctorum in superficie terrae sphaeroidica sitorum, una cum latitudine φ' alterutrius puncti et azimutho α' lineae s′ in hoc puncto, invenire differentiam longitudinum eorundem, et latitudinem φ alterius. Etenim facta eadem constructione, qua in §. 44. usi sumus, habemus $r' = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi'^2)}}$, (§. 40. n. 6.) deinde $\mu = \frac{s'}{r'}$, vel si μ in minutis secundis exprimitur, $\mu = \frac{s'}{r' \sin 1''}$

Porro in triangulo sphaerico, cujus dantur latera $90^0 - \varphi'$ atque μ, cum angulo intercepto α', posito tertio latere = u et angulo lateri μ opposito = w, erit

$$\text{Cotang } w = \frac{\cos \mu \cos \varphi' - \sin \mu \sin \varphi' \cos \alpha'}{\sin \mu \sin \alpha'},$$

et cosin u = $\cos \mu \sin \varphi' + \sin \mu \cos \varphi' \cos \alpha'$, sive introducto angulo auxiliari λ, ut sit tang. $\lambda = \text{Tag } \mu \cos \alpha'$, habebimus

$$\text{cosin } u \cos \lambda = \cos \mu \sin (\varphi' + \lambda),$$
$$\sin u \sin w = \sin \mu \sin \alpha'$$
$$\sin u \cos w = \frac{\cos \mu \cos (\varphi' + \lambda)}{\cos \lambda}.$$

Innotescunt itaque anguli w et u. Prior est differentia quaesita longitudinum, posterior foret complementum latitudinis quaesitae φ, si radius sphaerae ad punctum alterum ductus simul esset normalis ad superficiem sphaeroidicam. Ad hoc decidendum correctionemque determinandam, quae complemento anguli u applicanda est, ut prodeat latitudo quaesita, in valores quantitatis, §. 40, signo c designatae inquirendum erit, quos sub variis latitudinibus induere potest. Sint c′ c valores ejusdem sub latitudinibus φ', φ, erit ex (§. 40. n. 7.)
$c' = r' e^2 \sin \varphi'$, et retinendo denominationes (§. 44.) usurpatas, habebimus subnormalem ad axem sphaeroidis relatam pro latitudine

$$\varphi = \frac{a^2}{b^2} (z \cos u - c')$$

$$\text{unde } c = \frac{a^2 - b^2}{b^2} (z \cos u - c') = \frac{e^2}{1 - e^2} (z \cos u - c')$$

$$\text{et } c - c' = \frac{r' e^2}{1 - e^2} \left(\frac{z}{r'} \cos u - \sin \varphi' \right)$$

sive valore ipsius $\frac{z}{r'}$ ex aequatione 2 §. 44. substituto, sequentem formulam exacte veram

$$c - c' = \frac{\frac{r' e^2}{1 - e^2} \cdot \cos u \sqrt{\left[1 + \frac{e^2}{1 - e^2} (\cos u^2 - \sin \varphi^2)\right]} - \sin \varphi'}{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos u^2}$$

Patet autem, hanc formulam in seriem quam maxime convergentem evolvi, et ob factorem communem e^2 potentias ipsius e secunda majores in hac evolutione negligi posse. Sic prodibit

$$c - c' = \frac{r' e^2}{1 - e^2} (\cos u - \sin \varphi') \left[1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} (\cos u - \sin \varphi')\right].$$

Denique posita correctione angulo $90^0 - u$ applicanda, ut prodeat latitudo quaesita $= \psi$, habebimus ex trigonometria plana

$$\tang = \psi \frac{(c - c') \sin u}{z + (c - c') \cos u},$$

$$\text{sive quam proxime } \psi = \frac{c - c'}{z} \cdot \sin u - \frac{1}{2} \left(\frac{c - c'}{z}\right)^2 \sin 2\, u.$$

Sed $\cos u - \sin \varphi' = \sin \mu \cos \varphi' \cos \alpha' - 2 \sin {}^1\!/_2\, \mu^2 \sin \varphi'$,

$= \mu \cos \varphi' \cos \alpha' - {}^1\!/_2\, \mu^2 \sin \varphi'$ quam proxime,

et $\left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)^2 \frac{\sin \mu^2}{\sin 1''}$, adhibitis iis dimensionibus sphaeroidis terrestris, quas in §. 44. usurpavimus, pro $\mu = \frac{\pi}{180}$ ad $0'',0026$ tantummodo assurgit, quare sine errore sensibili ponere licet angulum ψ minutis secundis expressum

$$\psi = \frac{e^2}{(1 - e^2) \sin 1''} \left(\frac{s'}{r'} \cos \varphi' \cos \alpha' - {}^1\!/_2 \left(\frac{s'}{r'}\right)^2 \sin \varphi'\right) \sin u,$$

eritque latitudo quaesita $\varphi = 90^0 - u + \psi$. Commodiorem hujus problematis solutionem infra docebimus. (§. 117.)

§. 46.

Superest jam, ut etiam azimuthum computemus. Designantibus M', M, P locum datum, quaesitum atque polum in superficie sphaeroidica, et m', m, p puncta superficiei sphaericae praec. §. consideratae, in quibus rectae ex centro ejus ad puncta M', M, P ductae superficiem posteriorem intersecant, habemus latera $pm = 90^0 - \varphi'$, $mm' = \mu$, angulumque iisdem interceptum $= \alpha'$. Quodsi supplementum anguli lateri pm' oppositi dicatur m, erit ex trigonometria sphaerica

1) Cotang. $m = \frac{\cos\mu \cos\varphi' \cos\alpha' - \sin\mu \sin\varphi'}{\cos\varphi' \sin\alpha'}$, angulusque m foret azimuthum lineae s' ultra punctum M productae, si radius sphaerae ad hocce punctum ductus normalis esset ad superficiem sphaeroidicam. Vidimus autem in praec. §. hunc radium includere cum dicta normali angulum, quem charactere ψ designavimus, unde angulo m correctio quaedam applicanda erit, exigua quidem ob anguli ψ parvitatem, sed non negligenda, quia, a puncto M ulterius ad punctum M', et sic porro progrediendo, hi azimuthorum errores magis magisque sese accumulant. Correctio haec pariter ope trigonometriae sphaericae inveniri potest. Ex puncto M radio pro lubitu assumto descripta concipiatur sphaera, designentur brevitatis gratia puncta axis terrestris, in quibus normales ad M', M ductae ipsi occurrunt, per n', n, ducantur rectae, Mn, Mn', MM', quae superficiei sphaericae in punctis l, q, r occurrant, et per haec puncta ducantur circuli maximi. Tum ob arcum M M' quam proxime circularem §. 44. habebimus $lr = 90^0 - \frac{1}{2}\mu$, $lq = \psi$ et $r\,l\,q = m$, quare, si supplementum anguli q dicatur k, erit k azimuthum producti arcus M' M et

$$\text{Cotang. } k = \frac{\cos \frac{1}{2}\mu \cos\psi \cos m - \sin \frac{1}{2}\mu \sin\psi}{\cos \frac{1}{2}\mu \sin m}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{unde Cotang. } m - \text{Cotang. } k \\ \text{id est } \dfrac{\sin(k-m)}{\sin k \sin m}\end{array}\right\} = \frac{\tang \frac{1}{2}\mu \sin\psi}{\sin m} + 2\sin\frac{1}{2}\psi^2 \operatorname{cotg.} m,$$

$$\sin(k-m) = \text{Tang } \tfrac{1}{2}\mu \sin\psi \sin\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\psi^2 \sin k \cos m,$$

sive quam proxime $k - m = \frac{1}{2}\mu\,\psi \sin m + \frac{1}{2}\psi^2 \sin m \cos m$, et introducto valore anguli ψ §. 45. neglecto secundo termino,

$k - m = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{s'}{r'}\right)^2 \cos\varphi' \cos\alpha' \sin u \sin m$, ubi loco u et m ponere licebit $90^0 - \varphi'$ et α', et sic habebimus in minutis secundis azimuthum α arcus M M' $= 180^0 + k$, sive

$$2)\ \alpha = 180^0 + m + \tfrac{1}{2}\,\frac{e^2}{(1-e^2)\sin 1''}\left(\frac{s'}{r'}\right)^2 \cos\varphi'^2 \sin\alpha' \cos\alpha'.$$

Adhibitis iis dimensionibus terrae, quibus in §. 44. usi sumus, posito $\mu = \frac{\pi}{180}$, erit $\alpha = 180^0 + m + 0'',2019 \cos\varphi'^2 \sin\alpha' \cos a'$, maximusque valor correctionis azimuthi sub latitudinibus $> 45^0$ ad $0'',05$ tantummodo assurgere potest.

§. 47.

Vidimus §. 44 arcum ellipticum sectione verticali sphaeroidis genitum tam prope accedere ad arcum circularem radio curvaturae primi verticalis ad alterutrum terminum illius arcus ducto, ut perexigua differentia, quae inter longitudinem arcus elliptici arcusque circularis intercedit, tuto negligi possit, quoties amplitudo arcus gradum unum non excedit. Quodsi termini hujus arcus elliptici dicantur A, B, planumque secans normale fuerit ad punctum A et sphaerois secetur secundo plano ad punctum B normali atque per punctum A transeunte, hoc planum deviabit a primo (casibus quibusdam specialibus exceptis), ut §. 46 vidimus et quidem ita, ut, characteres α, m in significatione ibidem stabilita retinendo, angulus ejusdem cum plano primo sit $= 180 + \alpha - m$. Eodem modo a puncto quodam C hujus sectionis ad novum punctum D, et sic porro, progrediendo obtinebimus polygonum quoddam curvilineum ex arcubus ellipticis compositum, quod imminutis iisdem magis magisque accedet ad lineam continuo curvam duplicis curvaturae tanquam ad limitem, quae est linea brevissima in superficie sphaeroidica inter quaevis puncta ejusdem descripta, atque in sphaeroide circuli maximi loco poni potest in sphaera. Constat enim, in triangulo, cujus basis est linea brevissima, reliqua autem latera sunt meridiani, sinus angulorum basi adjacentium esse in ratione inversa perpendiculorum ex angulorum verticibus in axem rotationis demissorum, unde sponte fluit trita triangulorum sphaericorum proprietas, sinus angulorum esse in ratione sinuum laterum oppositorum.

Etsi autem in computandis dimensionibus trigonometricis triangula lineis brevissimis formata haud incommode adhiberi posse videantur, nos tamen in hisce disquisitionibus triangulis istis non utemur. Nam primum angulis observatis correctio ab altitudine montium pendens erit applicanda quoties ea non videtur esse negligenda, ut prodeant anguli sectionum verticalium. Deinde hi anguli reducendi erunt ad angulos triangulorum sphaeroidicorum et ex triangulorum serie calculo eruenda erit linea brevissima data quaevis ejusdem puncta jungens, cum azimutho hujus lineae, aut etiam linea brevissima e vertice cujusvis trianguli sub angulo recto ducta ad meridianum loci cujusdam dati, et arcus meridiani interceptus ab eadem perpendiculari. Ex posterioribus denique calculo satis commodo invenire licet latitudinem, longitudinem azimuthumque, praesertim tabulas quasdam auxiliares adhibendo, ut docuit cel. Bessel.[1] Sed calculo haud prolixiori ex latere cujusvis trianguli, latitudine et longitudine alterutrius termini ejusdem, atque ex azimutho lateris in hoc puncto, latitudinem et longitudinem alterius termini, cum azimutho lateris in altero puncto, deducere, et sic per totam triangulorum seriem progredi licet, ex quibus dein, si opus fuerit, methodo inversa coordinatae sphaeroidicae derivari poterunt. Quin etiam perparum a veritate discedemus, si totum triangulorum systema, quod aliquot tantummodo gradus complectitur, descriptum supponamus in superficie sphaerica, cujus radius aequatur radio curvaturae primi verticalis sub latitudine media systematis, ut §. 44 §. 46. monstratum est, et tunc facillime computantur coordinatae sphaericae punctorum systematis, qua methodo jam inde ab anno 1809 usus est cel. Soldner in dimensione trigonometrica Bavariae. Notari etiam meretur, cel. Gausium[2] via ab ea, quam hic ingressi sumus, prorsus diversa eundem radium maxime idoneum invenisse ad computandas dimensiones trigonometricas in sphaeroide, et ex relatione inter latitudinem in sphaera atque veram latitudinem in sphaeroide abeodem exhibita eandem prodire correctionem prioris, quam §. 45 charactere ψ designavimus.

§. 48.

Transimus ad solutionem triangulorum sphaericorum, quorum latera exigua, sed multo accuratius computanda sunt, quam in trigonometria sphaerica fieri solet. Prior methodus innititur propositioni notatu dignae a cel. Legendre inventae, talia triangula solvi posse tanquam triangula plana, si unusquisque angulorum trianguli sphaerici diminuatur tertia parte excessus sphaerici, ita ut summa angulorum exacte aequalis sit duobus rectis. Sed probe notandam est, angulos sic diminutos in calculo laterum tantummodo usurpandos esse, minime vero in calculo azimuthorum. Cumque hi anguli facillime inter se confundi possint, huic approximationi praeferenda esse videtur directa triangulorum sphaericorum solutio, quae eo casu, ubi unum latus et anguli dantur, aeque facilis est atque solutio triangulorum rectilineorum. Haec altera methodus requirit logarithmos sinuum laterum, qui tabulis trigonometricis ob inaequales logarithmorum sinuum angulorum per singula minuta secunda crescentium differentias commode depromi non possunt. Tollitur hoc incommodum adhibendo

[1] Schumachers astronomische Nachrichten. Nr. 86.
[2] Astronom. Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft S. 21 u. f.

numeros, qui tabulis numerorum Calleti adjecti sunt, vel ope tabulae exhibentis excessus logarithmorum arcuum super logarithmos sinuum eorundem. Habemus nempe

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{2.3}\sin x^2 + \frac{1.3}{2.4.5.}\sin x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin x^6 + \ldots,$$

unde facile deducitur

$$\text{Log. nat}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = {}^1/_6 \sin x^2 + \frac{11}{180}\sin x^4 + \frac{191}{5670}\sin x^6 + \frac{2497}{113400}\sin x^8 + \ldots$$

et log. vulg. $x = \text{Log.} \sin x + A \sin x^2 + B \sin x^4 + C \sin x^6 + D \sin x^8 + \ldots$

positis Log. A = Log. m — Log. 6.

Log. B = Log. m + Log. 11 — Log. 180.

Log. C = Log. m + Log. 191 — Log. 5670.

Log. D = Log. m + Log. 2497 — Log. 113400.

ubi m modulus Log. vulg. = 0,43429448. cuj. Log = 9,63778431.

unde A = 0,07238241; Log. A = 8,85963306 — 10.

B = 0,02654022; Log. B = 8,42390449 — 10.

C = 0,01462965; Log. C = 8,16523462 — 10.

D = 0,00956290; Log. D = 7,98058980 — 10.

Datus sit e. g. Log. sin x = 8,4000266 pro radio tabulari, eritque

Log. sin x^2 = 6,8000532

Log. A = 8,8596331

5,6596863; A sin x^2 = 0,0000456.8

Log. sin x^4 = 3,6001064

Log. B = 8,4239045

2,0240109; B sin x^4 = 0,0000000.1

0,0000456.9 = m; Log. x = Log. sin x + m.

Log. sin x = 8,4000266

Log. sin x = 8,4000723 ubi x denotat longitudinem arcus circularis radio tabularum descripti, habebimusque pro quocunque alio radio r

Log. arcus = Log. r + 8,4000723 — 10, atque logarithmum anguli minutis secundis expressi $\left(r = 1;\ \text{Log.}\ \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251.3\right)$

= 5,3144251.3 + 8,4000723 — 10 = 3,7144974, cui respondet numerus 5182″,0 = 1° 26′ 22″.

Ope praecedentis formulae computata est tabula sequ. quae exhibet figuras decimales appositis logarithmis sinuum addendas, ut prodeant logarithmi arcuum, pro radio tabularum trigonometricarum. Figura octava, quam exactioris calculi gratia adjecimus, a reliquis puncto separata est.

Tabula Additamentorum. Log. arc. $x =$ Log. sin $x + m$; $r = 1$.

Log. sin.	m.	Log. s n.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.	Log. sin.	m.
6,500	0.1	7,250	2.3	7,550	9.1	7,850	36.3	8,150	144.4	8,450	575.1
6,600	0.1	7,260	2.4	7,560	9.5	7,860	38.0	8,160	151.2	8,460	602.2
6,700	0.2	7,270	2.5	7,570	10.0	7,870	39.8	8,170	158.4	8,470	630.6
6,800	0.3	7,280	2.6	7,580	10.5	7,880	41,7	8,180	165.8	8,480	660.4
6,900	0.5	7,290	2.7	7,590	11.0	7,890	43 6	8,190	173.6	8,490	691.5
7,000	0.7	7,300	2.9	7,600	11.5	7,900	45.7	8,200	181.8	8,500	724.1
7,010	0.8	7,310	3.0	7,610	12 0	7,910	47.8	8,210	190.4	8,510	758.2
7,020	0.8	7,320	3.2	7,620	12.6	7,920	50.1	8,220	199.4	8,520	794.0
7,030	0.8	7,330	3.3	7,630	13.2	7,930	52.4	8,230	208.8	8,530	831.4
7,040	0.9	7,340	3.5	7,640	13.8	7,940	54.9	8,240	218.6	8,540	870.6
7,050	0.9	7,350	3.6	7,650	14.4	7,950	57.5	8,250	228.9	8,550	911.7
7,060	1.0	7,360	3.8	7,660	15.1	7,960	60.2	8,260	239.7	8,560	954.6
7,070	1.0	7,370	4.0	7,670	15.8	7,970	63.1	8,270	251.0	8,570	999.7
7,080	1.0	7,380	4.2	7,680	16.6	7,980	66.0	8,280	262.8	8,580	1046.8
7,090	1.1	7,390	4.4	7,690	17.4	7,990	69.1	8,290	275.2	8,590	1096.2
7,100	1.1	7,400	4.6	7,700	18.2	8,000	72.4	8,300	288.2	8,600	1147.8
7,110	1.2	7,410	4.8	7,710	19.0	8,010	75.8	8,310	301.8	8,610	1202.0
7,120	1.3	7,420	5.0	7,720	19.9	8,020	79.4	8,320	316.0	8,620	1258.7
7,130	1.3	7,430	5.2	7,730	20.9	8,030	83.1	8,330	330.9	8,630	1318.0
7,140	1.4	7,440	5.5	7,740	21.9	8,040	87.0	8,340	346.5	8 640	1380.2
7,150	1.4	7,450	5.7	7,750	22.9	8,050	91.1	8,350	362.8	8,650	1445 3
7,160	1.5	7,460	6.0	7,760	24.0	8,060	95.4	8,360	379.9	8,660	1513.4
7,170	1.6	7,470	6.3	7,770	25.1	8,070	99.9	8,370	397.8	8,670	1584.8
7,180	1.7	7,480	6.6	7,780	26.3	8,080	104.6	8,380	416.6	8,680	1659.6
7,190	1.7	7,490	6.9	7,790	27.5	8,090	109.6	8,390	436.2	8,690	1737.9
7,200	1.8	7,500	7.2	7,800	28.8	8,100	114.7	8,400	456.8	8,700	1819.8
7,210	1.9	7,510	7.6	7,810	30.2	8,110	120.1	8,410	478.3	8,710	1905.7
7,220	2.0	7,520	7.9	7,820	31.6	8,120	125 8	8,420	500.9	8,720	1995.6
7,230	2.1	7,530	8 3	7,830	33.1	8,130	131.7	8,430	524.5	8,730	2089.7
7,240	2.2	7,540	8.7	7,840	34.7	8,140	137.9	8,440	549.1	8,740	2188.3
7,250	2 3	7,550	9.1	7,850	36.3	8,150	144.4	8,450	575.1	8,750	2291.6

Cumque etiam sit $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$

habemus $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 - \ldots$

unde Log. nat $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 + \ldots$

Quare ex tabula, logarithmum arcus tanquam argumentum tabulae spectando, depromi potest numerus a logarithmo arcus subtrahendus, ut prodeat logarithmus sinus ejusdem, quoties membrum secundum seriei negligere licet, quod, ut supra vidimus, octavam figuram vix mutat, si arcus $< 1\frac{1}{2}^0$. Quodsi vero arcus major fuerit, valor prope verus logorithmi sinus hac via inventus dabit reductionem quaesitam logarithmi sinus ad logarithmum arcus.

§. 49.

Hisce praemissis, triangulorum sphaericorum, quorum anguli et quodlibet latus dantur, solutio ita se habebit.

Quaerendus est radius curvaturae primi verticalis sub latitudine φ' puncti fere medii trianguli, vel systematis triangulorum, ope formulae §. 40 n. 6.

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi'^2}}$$

$$\text{aut } r' = \frac{a}{\cos E}, \text{ facto } \sin E = e \sin \varphi',$$

aut etiam, formula in seriem evoluta, neglectisque terminis, qui in figuram decimalem octavam cadunt, per formulam

$\text{Log. } r' = \text{Log. } a + \frac{M}{2} . e^2 \sin \varphi'^2 + \frac{M}{4} e^4 \sin \varphi'^4$, in qua M denotat modulum logarithmorum vulgarium. Adhibendo numeros §. 44. assumtos habemus $\text{Log. } a = 6{,}5147696$ et $\text{Log } e^2 = 7{,}8052071 - 10$.

$$\text{Log. } \frac{M}{2} e^2 = 7{,}1419614 - 10.$$

$$\text{Log. } \frac{M}{4} e^4 = 4{,}6461385 - 10.$$

Exemplum. $\varphi' = 48^0\ 31'$; $\text{Log. } \sin \varphi'^2 = 9{,}74914.$

$$\text{Log. } \frac{M}{2} e^2 = 7{,}14196.$$

$$6{,}89110; \ldots 0{,}000.7782.2.$$

$$\text{Log. } \sin \varphi'^4 = 9{,}49827.$$

$$\text{Log. } \frac{M}{4} e^4 = 4{,}64614.$$

$$4{,}14441; \ldots 0{,}000.0013.9$$

$$\text{Log. } a = 6{,}5147696.$$

$$\text{Log. } r' = 6{,}5155492.$$

Deinde opus est nobis excessu sphaerico, quo anguli observati debite corrigi possint. Positis duobus lateribus trianguli = a,b. et angulo intercepto = C, habemus quam proxime aream trianguli sphaerici, quale hic consideramus, = $\frac{1}{2}$ ab. sin C, et hinc ope propositionis in §. 39. allegatae obtinebimus

$$\text{excessum sphaericum } \varepsilon = \frac{\text{a b. sin C}}{2\,\text{r}'^2 \sin 1''},$$

facileque perspicitur, latera a, b ad hunc scopum satis accurate inveniri triangulum tanquam planum considerando et logarithmos quinque decimalium adhibendo. Pro systemate triangulorum in eadem sphaera jacentium adhiberi potest logarithmus constans, nempe Log. $\left(\frac{1}{2\,\text{r}'^2 \sin 1''}\right)$, qui pro radio supra invento prodit = 1,98230 — 10.

§. 50.

Quotiescunque autem totum triangulorum systema pro eodem radio r′ computandum fuerit, haud abs re erit, in locum logarithmorum sinuum, quos tabula prima (§. 48) continet, substituere summam Log. sin + Log. r′ — 10, tumque ex nova hoc tabula immediate dato logarithmo sinus (pro radio r′) respondentem reductionem ad arcum, ac vice versa, depromere licebit, atque solutio triangulorum sphaericorum aeque commode ac planorum absolvetur.

Bezeichnet demnach R den Radius des Vermessungs-Horizonts von Württemberg, welcher 844 Par. Fuss über dem Meer liegt, so ist (für württ. Fuss) Log. R = Log. r′ + Log. $\frac{864}{126{,}97}$ + 185,4 = 7,3483804 und Log. sin (der Tabelle in §. 48.) + Log. R — 10 gibt folgende zweite Additamenten-Tabelle, welche bei der sphärischen Triangulirung, bei Reduction der Logarithmen der Distanzen von Log. sin D in Log. D und umgekehrt, angewendet wurde. Log. (R sin D) + m = Log. D.

Additamenten-Tabelle
für die Log. sin der Distanzen der Haupttriangulirung.

Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.	Log. R sin.	m.
3,50	0.02	4,21	0.4	4,47	1.3	4,73	4.2	4,99	13.9	5,25	46.0	5,51	152.4
3,60	0 03	4,22	0.4	4,48	1 3	4,74	4.4	5,00	14.6	5,26	48.2	5,52	159.6
3,70	0.04	4,23	0.4	4,49	1.4	4,75	4.6	5,01	15.2	5,27	50.5	5,53	167.1
3,80	0.06	4,24	0.4	4,50	1.5	4,76	4.8	5,02	16.0	5,28	52.9	5,54	175.0
3,90	0.08	4,25	0.5	4,51	1.5	4,77	5.0	5,03	16 7	5,29	55.3	5,55	183.3
4,00	0.10	4,26	0.5	4,52	1.6	4,78	5.3	5,04	17.5	5,30	58.0	5,56	191.9
4,01	0.20	4,27	0.5	4,53	1.7	4,79	5.5	5,05	18.3	5,31	60.7	5,57	201.0
4,02	0.20	4,28	0.5	4,54	1.7	4,80	5.8	5,06	19.2	5,32	63.5	5,58	210.4
4,03	0.2	4,29	0.6	4,55	1.8	4,81	6.1	5,07	20.1	5,33	66.5	5,59	220.3
4,04	0.2	4,30	0.6	4,56	1.9	4,82	6.4	5,08	21 0	5,34	69.7	5,60	230.8
4,05	0.2	4,31	0.6	4,57	2.0	4,83	6.7	5,09	22.0	5,35	73.0	5,61	241.6
4,06	0.2	4,32	0.6	4,58	2.1	4,84	7.0	5,10	23.1	5,36	76.4	5,62	253 0
4,07	0.2	4,33	0.7	4,59	2.2	4,85	7.3	5,11	24.2	5,37	80.0	5,63	265.0
4,08	0.2	4,34	0.7	4,60	2.3	4,86	7.6	5,12	25.3	5,38	83.8	5,64	277.4
4,09	0.2	4,35	0.7	4,61	2.4	4,87	8.0	5,13	26 5	5,39	87.7	5,65	290.5
4,10	0.2	4,36	0.8	4,62	2.5	4,88	8.4	5,14	27.7	5,40	91.9	5,66	304 2
4,11	0.2	4,37	0.8	4,63	2.7	4,89	8.8	5,15	29.0	5,41	96.2	5,67	318.6
4,12	0 3	4,38	0.8	4,64	2.8	4,90	9.2	5,16	30.4	5,42	100.7	5,68	333.6
4,13	0.3	4,39	0.9	4,65	2.9	4,91	9.6	5,17	31.9	5,43	105.5	5,69	349.3
4,14	0.3	4,40	0.9	4,66	3.0	4,92	10.1	5,18	33.4	5,44	110.4	5,70	365.8
4,15	0.3	4,41	1.0	4,67	3.2	4,93	10.5	5,19	34.9	5,45	115.6	5,71	383.0
4,16	0.3	4,42	1.0	4,68	3.3	4,94	11.0	5,20	36.6	5,46	121.1	5,72	401.0
4,17	0.3	4,43	1,1	4,69	3.5	4,95	11.6	5,21	38.3	5,47	126.8	5,73	419.9
4,18	0.3	4,44	1.1	4,70	3.7	4,96	12.1	5,22	40.07	5,48	132.8	5,74	430.7
4,19	0.3	4,45	1.2	4,71	3.8	4,97	12.7	5,23	42.0	5,49	139.0	5,75	460.5
4,20	0.4	4,46	1.2	4,72	4.0	4,98	13.3	5,24	44.0	5,50	145.6		

Log. arc. x = Log. R + Log. sin x + m und Log. (R sin x) = Log. arc. x — m. (s. unten §. 62.)

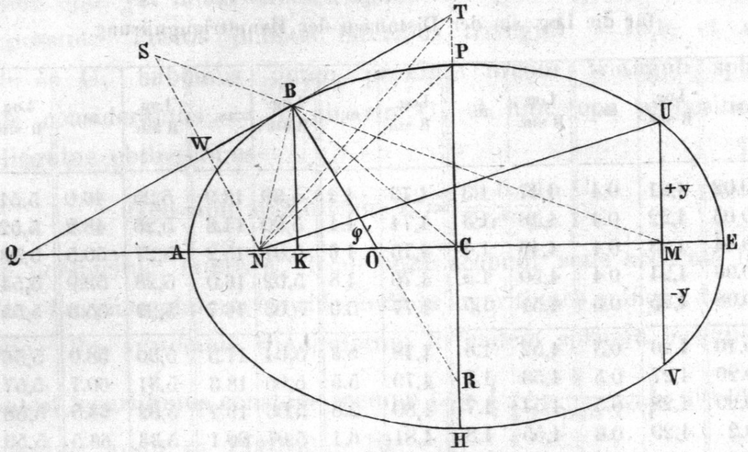
§. 51.

Entwicklung der Formeln für die Krümmungshalbmesser,

wie sie in §. 40 aufgestellt sind.

An den Punkt B der Ellipse ABPE, welchem die Coordinaten x und y entsprechen, werde die Normale BO gezogen, und es sey der Winkel BOA, welchen diese Normale mit der grossen Axe AE bildet = φ' = der

Fig. 23.



geographischen Breite des Orts B. Um die Krümmungshalbmesser für den Meridian und Perpendikel des Punktes B in der Breite φ' bestimmen zu können, sind vorerst nach der Lehre der Kegelschnitte die Gleichungen der Ellipse, der Subnormale KO, der Excentricität CN und der Coordinaten x und y zu suchen.

Es sey nun AC die grosse Halbaxe $= a$.
CP die kleine „ $= b$.
CK die Abscisse $= x$ und KB die Ordinate $= y$.
CN die Excentricität $= e$.
$NK = CN - CK = e - x$.
$KM = e + x$; $BN = z$; $BM = 2a - z$.

so ist in den Dreiecken BNK und BKM

$$BK^2 = BN^2 - KN^2 = BM^2 - KM^2.$$
$$y^2 = z^2 - (e - x)^2 = (2a - z)^2 - (e + x)^2$$
$$(e + x)^2 - (e - x)^2 = (2a - z)^2 - z^2$$
$$e^2 + 2ex + x^2 - e^2 + 2ex - x^2 = 4a^2 - 4az + z^2 - z^2$$
$$4ex = 4a^2 - 4az \text{ und } 4az = 4a^2 - 4ex$$

also $z = \dfrac{4a^2 - 4ex}{4a} = a - \dfrac{ex}{a}$, diesen Werth in die obige Gleichung $y^2 = z^2 - (e - x)^2$ gesetzt, gibt:

$$y^2 = \left(a - \frac{ex}{a}\right)^2 - (e - x)^2$$
$$= a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} - e^2 + 2ex - x^2$$

$$= a^2 - e^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2} - x^2 = a^2 - e^2 + \frac{(e^2 - a^2)}{a} x^2$$

$$= \frac{(a^2 - e^2)\, a^2 - (a^2 - e^2)\, x^2}{a^2}, \text{ folglich}$$

$$y = \sqrt{\frac{(a^2 - e^2)\, a \quad - (a^2 - e^2)}{a^2}\, x^2} = \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - e^2)} . \sqrt{(a^2 - x^2}$$

da aber $\sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{PN^2 - CN^2} = \sqrt{CP^2} = \sqrt{b^2} = b$. so ist

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ und}$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Dieses sind die Gleichungen der Ellipse, wenn die Abscissen x vom Mittelpunkt aus genommen werden.

Ist CM $= x$ statt CK, so hat man $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2}$, und UM $= + y$ MV $= - y$. Ist demnach M der Brennpunkt der Ellipse, so wird auch UM $= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e} = \frac{b^2}{a}$; und da UV $= p$ dem Parameter der Ellipse, so ist $p = 2$ UM $= \frac{2\, b^2}{a}$ und auch $b^2 = \frac{a\, p}{2}$.

Für die Bestimmung der Subnormale KO, sey wieder CK $= x$, NK $= e - x$, BN $=$ BS wie oben $= a - \frac{e x}{a}$, BO und NS senkrecht auf der Tangente QT; so ist $\triangle$ MBO $\backsim \triangle$ MSN, folglich MS : MN $=$ BS : NO. und weil MS $=$ MB $+$ BN $= 2\, a$, so ist $2\, a : 2\, c$

$$= \left(a - \frac{e\, x}{a}\right) : \text{NO und also NO} = \frac{2\, e \left(a - \dfrac{e\, x}{a}\right)}{2\, a} = \frac{2\, a^2\, e - 2\, e^2\, x}{2\, a^2}$$

daher NO $= e - \frac{e^2\, x}{a^2}$. Zieht man hievon NK $= e - x$ ab, so erhält man die Subnormale KO $= e - \frac{e^2\, x}{a^2} - (e - x) = \frac{a^2\, e - e^2\, x}{a^2} - e + x$

$$\text{KO} = \frac{a^2\, e - e^2\, x - a^2\, e + a^2\, x}{a^2} = \frac{a^2\, x - e^2\, x}{a^2} = \frac{(a^2 - e^2)\, x}{a^2} = \frac{b^2\, x}{a^2}$$

$$\text{also Subnormale KO} = \frac{b^2\, x}{a^2}, \text{ erster Werth.}$$

Für einen zweiten Werth derselben, hat man

$$\text{BK} : \text{KO} = 1 : \text{Cotg. } \varphi'.$$

$$y : \text{KO} = 1 : \text{Cotg. } \varphi' \text{ und KO} = y \text{ Cotg. } \varphi'.$$

daher $KO = \frac{b^2 x}{a^2} = y \text{ Cotg. } \varphi' = y \cdot \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'}$

und

$$b^2 x \sin \varphi' = a^2 y \cos \varphi'. \quad (\text{§. 40. Form 2.})$$

§. 52.

Ist ferner in dem rechtwinkligen Dreieck CPN, $PN = a$, $CP = b$ und $CN = e$ der Excentricität, so ist $PN^2 = CP^2 + CN^2$

$$a^2 = b^2 + e^2$$

und $e^2 = a^2 - b^2$ folglich $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, und in Theilen der halben grossen Axe $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ daher $a\, e = \sqrt{a - b^2}$

oder $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ (§. 40 Form 3.)

wornach auch $b = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}$.

§. 53.

Bestimmung der Abscisse x.

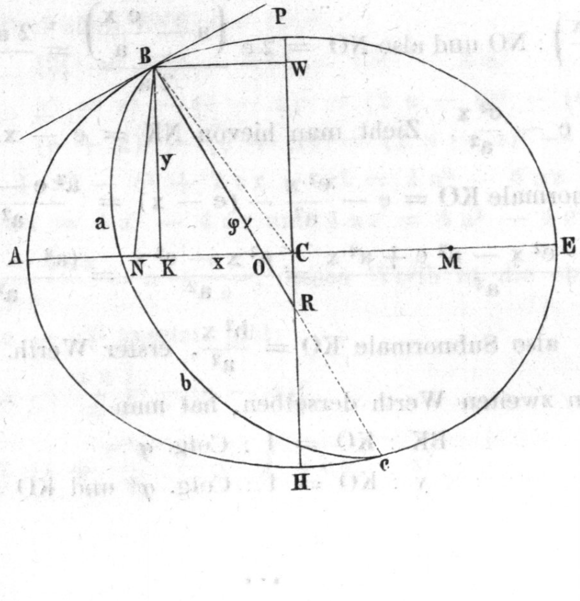
Die Gleichung der Ellipse $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\text{gibt: } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Fig. 24.



$$\frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Die Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ differenzirt gibt:

$$2 a^2 y d y + 2 b^2 x d x = o$$

$$2 b^2 x d x = - 2 a^2 y d y$$

$$\frac{d x}{d y} = - \frac{2 a^2 y d y}{2 b^2 x} \text{ und } - \frac{d x}{d y} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Ferner ist die allgemeine Gleichung der Normale $y' - y = - \frac{d x}{d y} (x' - x)$ wo $- \frac{d x}{d y}$ die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Normale mit der Axe der Abscissen bildet, und bei einem Erdmeridian ist also $- \frac{d x}{d y}$ die Tangente der geographischen Breite eines Orts B $= \text{Tang.}\ \varphi' = - \frac{d x}{d y}$.

Setzt man nun statt $- \frac{d x}{d y}$ seinen obigen Werth, so ist:

$$\text{Tang.}\ \varphi' = \frac{a^2 y}{b^2 x} \text{ oder } \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit denen der §§. 51 und 52 kann man nun die Coordinaten x und y durch Functionen der geographischen Breite ausdrücken, wozu folgende Entwickelung führt.

Es ist BO die Normale des Punkts B und φ' die geographische Breite desselben. Die halbe grosse Axe der Ellipse sey wieder $= a$ und b die halbe kleine. Setzt man nun in obige Gleichung der Tang. φ' den Werth von $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ so ist:

$$\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{b^2 x} = \frac{a \sqrt{a^2 - x^2}}{b x} \text{ und ins Quadrat erhoben}$$

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = \frac{a^2 (a^2 - x^2)}{b^2 x^2} \text{ woraus } b^2 x^2 \sin^2 \varphi' = a^2 (a^2 - x^2) \cos^2 \varphi'$$

$$b^2 x^2 \sin^2 \varphi' = a^4 \cos^2 \varphi' - a^2 x^2 \cos^2 \varphi'$$

$$b^2 x^2 \sin^2 \varphi' + a^2 x^2 \cos^2 \varphi' = a^4 \cos^2 \varphi'$$

$$x^2\,(b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi') = a^4 \cos^2 \varphi' \text{ daher}$$

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2\,(1 - \cos^2 \varphi') + a^2 \cos^2 \varphi'}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2\,(1 - \cos^2 \varphi') + a^2 \cos^2 \varphi'}} = \frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2 - b^2 \cos^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'}} =$$

$$\frac{a^2 \cos \varphi'}{\sqrt{b^2\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \cos^2 \varphi'}}$$

und setzt man nun $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e^2$, so ist

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{b\sqrt{1 + e^2 \cos^2 \varphi'}}$$

Führt man aber in obiger Gleichung $x^2 = \frac{a^4 . \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \cos^2 \varphi'}$

für $\cos^2 \varphi'$ die ihr gleiche Grösse $1 - \sin^2 \varphi'$ ein, so ist

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2\,(1 - \sin^2 \varphi')} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{b^2 \sin^2 \varphi' + a^2 - a^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{(b^2 - a^2) \sin^2 \varphi' + a^2}$$

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi'} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi'}{\left(a^2\, 1 - \frac{(a - b^2)}{a^2}\right) \sin^2 \varphi'}$$ und folglich wenn

man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ setzt, so ist

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi'}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \quad (\S.\ 40.\ \text{Form } 4.)$$

§. 54.

Bestimmung der Ordinate y.

Um den Werth der Ordinate y zu finden, hat man wieder die Gleichung der Ellipse $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ in die Gleichung $\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$

zu setzen, und es ist $\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{a^2 y}{b^2 \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a\,y}{b\sqrt{b^2 - y^2}}$ folglich

$\left(b\sqrt{b^2 - y^2}\right) \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} = a\,y$. Diese Gleichung ins Quadrat erhoben,

gibt: $b^4 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} - b^2\, y^2\, \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = a^2\, y^2$

$$b^4 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = a^2 y^2 + b^2 y^2 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = \left(a^2 + b^2 \frac{\sin^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi'}\right) y^2$$

$$b^4 \sin^2 \varphi' = (a^2 \cos^2 \varphi' + b^2 \sin^2 \varphi')\, y^2, \text{ folglich:}$$

$$y^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi'}{(a^2 \cos^2 \varphi' + b^2 \sin^2 \varphi'} \text{ und}$$

$$y = \frac{b^2 \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi' + b^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ weil aber } \cos^2 \varphi'$$

$$= 1 - \sin^2 \varphi' \text{ so ist auch } y = \frac{a^2 \sin \varphi' - a^2 \sin \varphi' + b^2 \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \varphi') + b^2 \sin^2 \varphi'}}$$

$$= \frac{a^2 \sin \varphi' - (a^2 - b^2) \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi' + b^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a^2 \sin \varphi' - (a^2 - b^2) \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi'}}$$

$$y = \frac{[a^2 - (a^2 - b^2)] \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi'}} = \frac{a^2 \left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\right] \sin \varphi'}{\sqrt{a^2 \left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi'\right.}}$$

$$\text{und } y = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin \varphi'}{a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \quad \text{(§. 40. Form 5.)}$$

§. 55.

Bestimmung des Krümmungsradius der Perpendikelcurve in B Fig. 24.

Das Segment der Normale, welches zwischen dem elliptischen Bogen ABP und der kleinen Axe PH liegt, ist der Radius der Perpendikel-Curve B a b c, also BR = r′, und für die Bestimmung von r′ hat man in dem rechtwinkligen Dreieck BWR.

$$BW : BR = 1 : \text{Secante } \varphi'$$

$$x : r' = 1 \,.\, \text{Sec. } \varphi' \text{ folglich}$$

$r' = x \sec. \varphi' = \dfrac{x}{\cos \varphi'}$ Substituirt man nun für x den oben §. 53 gefundenen Werth, so hat man,

$$r' = \frac{a \cos \varphi'}{\cos \varphi' \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \quad \text{(§. 40. Form 6.)}$$

§. 56.

Das Stück CR Fig. 24. welches die Normale BR von CH abschneidet, heisse c, dieses zu bestimmen hat man:

$$BW : WR = 1 : \text{Tang. } \varphi'$$

$$x : y + c = 1 : \text{Tang. } \varphi'$$

und $y + c = x \text{ Tang } \varphi'$ folglich $c = x$ Tang.

$\varphi' - y$. Substituirt man nun aus §§. 53 und 54 in diese Gleichung die Werthe von x und y, so ist:

$$c = \frac{a \cos \varphi' \text{ Tang. } \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} - \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$$

$$= \frac{a [\cos \varphi' \text{ Tang. } \varphi' - (1 - e^2) \sin \varphi']}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a \left[\cos \varphi' \dfrac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} - (1 - e^2) \sin \varphi'\right]}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$$

$$= \frac{a \sin \varphi' - a \sin \varphi' + a e^2 \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ folglich } c = \frac{a e^2 \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ und}$$

weil nach §. 55. $r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}$, so ist auch

$$c = r' e^2 \sin \varphi'. \quad (\text{§. 40. Form 7.})$$

§. 57.

Setzt man den Halbmesser der Erde $= R$, und $R^2 = y^2 + x^2$, so ist, wenn die für x und y oben gefundenen Werthe substituirt werden:

$$R^2 = \left(\frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^2 + \left(\frac{a (1 - e^2) \sin \varphi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \varphi' + a^2 (1 - e^2)^2 . \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 . \sin^2 \varphi' + a^2 (1 - 2 e^2 + e^4) \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi' + (a^2 - 2 a^2 e^2 + a^2 e^4) \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 \sin^2 \varphi' + a^2 \sin^2 \varphi' - 2 a^2 e^2 \sin^2 \varphi' + a^2 e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 - 2 a^2 e^2 \sin^2 \varphi' + a^2 e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{a^2 (1 - 2 e^2 \sin^2 \varphi' + e^4 \sin^2 \varphi'}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

$$= \frac{a^2 [1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi']}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'} \text{ oder } R^2 = \frac{[a^2 1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi']}{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}$$

(§. 40. Form 8.)

§. 58.

Bestimmung des Krümmungsradius für den Meridian des Punktes B. Fig. 24.

Es sey der Krümmungs-Halbmesser des elliptischen Meridians von B, unter der Breite $\varphi' = r$, und auch $p =$ dem halben Parameter der kleinen Axe, so ist aus der Lehre der Kegelschnitte bekannt, dass bei der Ellipse der Krümmungs-Halbmesser sich zur Normallinie verhält, wie das Quadrat dieser Normallinie zu dem Quadrat des halben Parameters derjenigen Axe, an welche hin die Normallinie geht, folglich ist $r : r' = r'^2 : p^2$ daher $r\,p^2 = r'^3$ (I).

Es ist aber auch der Parameter die dritte Proportionallinie zu zwei zugeordneten Durchmessern, und zwar zum ersteren, nämlich:

$$b : a = a : p \text{ folglich } p = \frac{a^2}{b}$$

Da aber nach §. 52 $b = a\sqrt{1 - e^2}$, so ist auch $p = \dfrac{a^2}{a\sqrt{1 - e^2}}$ $= \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$.

Substituirt man nun diesen Werth für p in (I), so wie auch aus §. 55 r' so ist $r\left(\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}}\right)^3 = \dfrac{a^3}{(1 - e^2 \sin \varphi')^{3/2}}$ und

$$r = \frac{a^3 (1 - e^2)}{a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} \quad (\text{§. 40. Form 9.})$$

§. 59.

Berechnung des Krümmungshalbmessers

für die Perpendikelcurve des Mittelpunkts der württembergischen Landesvermessung, des Observatoriums zu Tübingen, dessen Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$ ist.[1]

In §. 55 ist der Radius für die Perpendikels-Curve in der Formel

$$r' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \text{ bestimmt.}$$

Um diesen Ausdruck für r' in eine unendliche Reihe zu verwandeln, werde zuerst die Reihe, welche dem Nenner desselben entspricht, nach dem Binominal-Theorem gesucht, und zu diesem Behufe vorläufig $e^2 \sin^2 \varphi' = x^2$ gesetzt, so ist allgemein für $(1 - x^2)^{1/2}$

$$1)\ (a - x^2)^n = a^n - n\,a^{n-1} x^2 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2} (x^2)^2 - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,(x^2)^3 + \ldots \text{ und}$$

$$2)\ (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5\,x^8}{128} - \ldots \text{ folglich}$$

[1] Ueber die neu bestimmte geographische Lage der Sternwarte fand sich im Nachlass des Professors v. Bohnenberger nichts vor; im zwölften Abschnitt ist daher die geographische Bestimmung nachgewiesen.

3) $r' = \dfrac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \ldots}$ und setzt man diese Function gleich der allgemeinen Reihe $= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots$ also

4) $\dfrac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} \ldots} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots$ so ist

$$5)\quad a = \left\{ \begin{array}{l} A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots \\ - \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{2}x^4 - \frac{C}{2}x^6 - \frac{D}{2}x^8 - \ldots \\ \qquad - \frac{A}{8}x^4 - \frac{B}{8}x^6 - \frac{C}{8}x^8 - \ldots \\ \qquad\qquad - \frac{A}{16}x^6 - \frac{B}{16}x^8 - \ldots \end{array} \right.$$

6) $o = A - a + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^2 + \left(C - \frac{B}{2} - \frac{A}{8}\right)x^4 + \left(D - \frac{C}{2} - \frac{B}{8} - \frac{A}{16}\right)x^6 + \ldots$

und hiernach

$$A - a = o \quad B - \frac{A}{2} = o \quad C - \frac{B}{2} - \frac{A}{8} = o. \quad D - \frac{C}{2} - \frac{B}{8} - \frac{A}{16} = o$$

$$A = a \quad B - \frac{a}{2} = o \quad C - \frac{a}{4} - \frac{a}{8} = o. \quad D - \frac{3a}{8} - \frac{a}{16} - \frac{a}{16} = o$$

$$B = \frac{a}{2} \qquad C = \frac{3a}{8}. \qquad D = \frac{5a}{16}$$ hat man

7) $\dfrac{a}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}} = a + \dfrac{a x^2}{2} + \dfrac{3 a x^4}{8} + \dfrac{5 a x^6}{16} + \ldots$

folglich $r' = a\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \ldots\right)$ und für x den Werth gesetzt: 8) $r' = a\left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{3 e^4 \sin^4 \varphi'}{8.} + \frac{5 e^6 \sin^6 \varphi'}{16.} + \ldots\right)$

Nun ist nach §. 49.

Log. a = 6,5147696 (für Toisen.)

Log. e^2 = 7,8052071 — 10

Log. e^4 = 5,6104142 — 10

Log. sin φ' = Log. sin 48° 31′ = 9,8745679 — 10

Log. $\sin^2 \varphi'$ = 9,7491358 — 10

Log. $\sin^4 \varphi'$ = 9,4982716 — 10 und es berechnet sich der eingeschlossenen Reihe: Erstes Glied, 1 = 1,000.0000

zweites Glied Log. e^2 = 7,8052071 — 10

Log. $\sin^2 \varphi'$ = 9,7491358 — 10

D. E. Log. 2 = 9,6989700 — 10

7,2533129 — 10; = 0,001.7919

Drittes Glied Log. 3 = 0,4771212

Log. e^4 = 5,6104142 — 10

Log. $\sin^4 \varphi'$ = 9,4982716 — 10

D. E. Log. 8 = 9,0969101 — 10

4,6827171 — 10; = 0,0000048

Summe 1,0017967

folglich r' = 1,0017967. a. und Log. a = 6,5147696

Log. 1,0017967 = 0,0007796

Log. r' = 6,5155492.

(wie §. 49.)

Verwandelt man aber die Gleichung 8) $r' = a\left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \right.$ $\left. + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8} + \ldots\right)$ nach der allgemeinen Formel: Log. $(1 + y) = M$ $(y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots)$ so ist

$$y = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{3\, e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

$$-\frac{1}{2} y^2 = \qquad - \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{8}$$

also $y - \frac{1}{2} y^2 = \frac{e^2 \sin^2 \varphi'}{2} + \frac{e^4 \sin^4 \varphi'}{4}$ folglich

$$M\,(y - \tfrac{1}{2} y^2) = \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi' \text{ daher}$$

$$\text{Log } r' = \text{Log } a + \frac{M}{2}\, e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{M}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi'. \text{ (wie Bohnenberger §. 49.)}$$

§. 60.

Berechnung des Krümmungshalbmessers

für den elliptischen Meridian des Observatoriums von Tübingen, in der Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$.

Nach §. 58 ist der Krümmungs-Halbmesser des elliptischen Meridians von B Fig. 24 in der geographischen Breite φ' = r, und

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}}$$

In dieser Formel für r ist zuerst der Nenner nach dem Binominal-Theorem in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Setzt man nun

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2} = (a - x^2)^n, \text{ so ist:}$$

$$(a - x^2)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} (x^2) + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} a^{n-2} (x^2)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$a^{n-3} (x^2)^3 + \ldots = 1 - {}^3\!/_2\, x^2 + {}^3\!/_8\, x^4 + {}^3\!/_{48}\, x^6 + {}^9\!/_{384}\, x^8 + \ldots \text{ folglich}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - {}^3\!/_2\, x^2 + {}^3\!/_8\, x^4 + {}^3\!/_{48}\, x^6 + {}^9\!/_{384}\, x^8 + \ldots}, \text{ nun sey}$$

$$\frac{a(1-e^2)}{1 - {}^3\!/_2\, x^2 + {}^3\!/_8\, x^4 + {}^3\!/_{48}\, x^6} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots,$$

dann ist

$$a(1-e^2) = \left\{\begin{array}{llllll} A + & B x^2 + & C x^4 + & D x^6 + & E x^8 + \ldots \\ & - {}^3\!/_2\, A x^2 - & {}^3\!/_2\, B x^4 - & {}^3\!/_2\, C x^6 - & {}^3\!/_2\, D x^8 + \ldots \\ & & + {}^3\!/_8\, A x^4 + & {}^3\!/_8\, B x^6 + & {}^3\!/_8\, C x^8 + \ldots \\ & & & + {}^3\!/_{48}\, A x^6 + & {}^3\!/_{48}\, B x^8 + \ldots \end{array}\right.$$

$$\text{und } o = A - a(1-e^2) + (B - {}^3\!/_2\, A)\, x^2 + (C - {}^3\!/_2\, B + {}^3\!/_8\, A)\, x^4 + (D - {}^3\!/_2\, C + {}^3\!/_8\, B + {}^3\!/_{48}\, A)\, x^6 + \ldots$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten

1) $A - a(1-e^2) = o$ 2) $B - {}^3\!/_2 A = o$ 3) $C - {}^3\!/_2 B + {}^3\!/_8 A = o$

$A = a(1-e^2)$ $B = {}^3\!/_2\, a(1-e^2)$ $C - {}^9\!/_4\, a(1-e^2) + {}^3\!/_8\, a(1-e^2) = o$

$C = {}^{15}\!/_8\, a(1-e^2)$

4) $D - {}^3\!/_2\, C + {}^3\!/_8\, B + {}^3\!/_{48}\, A = o$ woraus

$D = {}^{105}\!/_{48}\, a(1-e^2)$.

folglich

$$r = a(1-e^2) + {}^3\!/_2\, a(1-e^2)\, x^2 + {}^{15}\!/_8\, a(1-e^2)\, x^4 + {}^{105}\!/_{48}\, a(1-e^2)\, x^6 + \ldots$$

oder

$$r = a(1-e^2) + {}^3\!/_2\, a(1-e^2)\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}\!/_8\, a(1-e^2)\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}\!/_{48}\, a(1-e^2)\, e^6 \sin^6 \varphi' \ldots$$

$$\text{oder } r = a(1-e^2)\,[1 + {}^3\!/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}\!/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}\!/_{48}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots]$$

Endlich diese Gleichung nach der allgemeinen Formel Log. $(1 + y) = M\,(y - {}^1\!/_2\, y^2 + {}^1\!/_3\, y^3 - {}^1\!/_4\, y^4 + \ldots)$ umgewandelt, so erhält man,

$$\begin{array}{rl} y = & {}^3\!/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^{15}\!/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{105}\!/_{48}\, e^6 \sin^6 \varphi' - \ldots \\ -\,{}^1\!/_2\, y^2 = & \qquad - {}^9\!/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' - {}^{45}\!/_{32}\, e^6 \sin^6 \varphi' - \ldots \\ +\,{}^1\!/_3\, y^3 = & \qquad\qquad + {}^{27}\!/_{24}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots \\ \hline y - {}^1\!/_2\, y^2 + {}^1\!/_3\, y^3 = & {}^3\!/_2\, e^2 \sin^2 \varphi' + {}^6\!/_8\, e^4 \sin^4 \varphi' + {}^{61}\!/_{32}\, e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots \end{array}$$

und $M\,(y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \ldots) = \frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \frac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$ folglich

$\text{Log. } r = \text{Log. } a\,(1 - e^2) + \frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi' + \frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi' + \frac{61}{32} M e^6 \sin^6 \varphi' + \ldots$

Log. e^2 = 7,8052071—10 = 0,0063857 und $1 - e^2$ = 0,9936143.

Log. $(1 - e^2)$ = 9,9972179—10	Log. 3 = 0,4771212
Log. a = 6,5147696	Log. M = 9,6377843—10
1) Log. $[a\,(1 - e^2)]$ = 6,5119875	Log. e^2 = 7,8052071—10
2) $\frac{3}{2} M e^2 \sin^2 \varphi'$ = 0,0023346	Log. $\sin^2 \varphi'$ = 9,7491358—10
3) $\frac{6}{8} M e^4 \sin^4 \varphi'$ = 0,0000041	D. E. Log. 2 = 9.6989700—10
Log. r = 6,5143262 für T.	7,3682 84—10
und §. 49.	0,0023346
Log. r′ = 6,5155492.	Log. 6 = 0,7781512
	Log. M = 9,6377843—10
	Log. e^4 = 5,6104142—10
	Log. $\sin^4 \varphi'$ = 9,4982716—10
	D. E. Log. 8 = 9,0969100—10
	4,6215313—10
	0,0000041

Diese Radien für Württemberger Fuss und den Vermessungs-Horizont 844 Par. Fuss über dem Meer, sind

Log. r = 7,3471574 und Log. r′ = 7,3483804.

Die Halbmesser r′ und r sind eigentlich für jeden Dreiecks-Punkt zu berechnen. Ist aber das zu vermessende Land nicht sehr gross, so ist es hinreichend, diese Radien nur für den Mittelpunkt desselben zu berechnen, und sich ihrer bei allen Coordinaten-Berechnungen zu bedienen.

§. 61.

Das sphärische Dreieck bei Erdmessungen. (v. Bohnenberger.)

Es ist $\sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2\ldots5} - \frac{a^7}{1.2\ldots7} + \frac{a^9}{1.2\ldots9} - \ldots$

Wenn aber der Bogen a nicht über 2 Grade beträgt, so ist sehr nahe $\sin a = a - \frac{1}{6} a^3$ für den Halbmesser = 1. Denn das nächste vernachlässigte Glied ist $\frac{1}{1.2.3.4.5} a^5$ welches in einem Kreis von dem Halbmesser r′ ausmacht $\frac{r' a^5}{120}$.

Da nun die Länge eines Kreisbogens von zwei Graden für den Halbmesser 1. gleich ist 0,03490659 so hat man in Beziehung auf den Erd-Krümmungs-Halbmesser r′, dessen Logarithmus, für den württembergischen Vermessungs-Horizont = 7,3483804 und Log. 0,03490659 = 8,5429074 so wie Log. a^5 = 2,7145370—10 ist,

$$\begin{array}{ll} \text{Log. } r' & = 7{,}3483804 \\ \text{Log. } a^5 & = 2{,}7145370-10 \\ \text{D. E. Log. } 120 & = 7{,}9208188-10 \\ \hline \end{array}$$

so ist auch: Log. $\frac{r' a^5}{120}$ = 7,9837362—10 und $\frac{r' a^5}{120}$ = 0′,0096324 w. Fuss und da in diesem Fall die Reihe für den sin a geschwinder convergirt als eine geometrische Reihe, deren Exponent $\frac{1}{2}$ ist, so beträgt der Fehler welcher aus der Vernachlässigung aller auf $\frac{1}{6}\, a^3$ folgenden Glieder entsteht, weniger als das Doppelte von $\frac{r' a^5}{120}$, d. i. weniger als 0,0192648 württ. Fuss. Also ist obige Annäherung für die grössten sphärischen Dreiecke, welche bei Erdmessungen vorkommen können, mehr als hinreichend, indem nicht leicht eine Seite von einem Grad vorkommen wird, die also eine Länge von 15 geographischen Meilen haben müsste, wo der Fehler schon 32 mal kleiner ist, als bei 2 Graden.

Man bezeichne die Winkel eines sphärischen Dreiecks mit ABC und die Gegenseiten dieser Winkel mit abc so erhält man bekanntlich

$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$

$= a - \frac{1}{6} a^3 : b - \frac{1}{6} b^3$, sehr nahe, wenn a und b nicht $> 2^0$

$= a\,(1 - \frac{1}{6} a^2) : b\,(1 - \frac{1}{6} b^2)$

oder $(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \frac{1}{6} a^2) \sin B = a : b$

Da nun die sinus von A und B mit ächten Brüchen multiplicirt, (nämlich mit $1 - \frac{1}{6} b^2$ und $1 - \frac{1}{6} a^2$) mithin vermindert werden müssen, damit das Verhältniss der so verminderten sinus, dem Verhältniss der Seiten a und b selbst, wie bei ebenen Dreiecken, gleich wird, so kann man setzen: 1) $a : b = \sin(A - x) : \sin(B - x)$ folglich

$(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \frac{1}{6} a^2) \sin B = \sin(A - x) : \sin(B - x)$

$(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A : (1 - \frac{1}{6} a^2)$

$\sin B = \sin A \cos x - \cos A \sin x : \sin B \cos x - \cos B \sin x$

$= \sin A - \cos A \text{ tang. } x : \sin B - \cos B \text{ tang. } x$ woraus folgt:

$(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \cos B \text{ Tang. } x = (1 - \frac{1}{6} a^2)$

$\sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \cos A \sin B \text{ tang. } x$

also: $(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \sin A \sin B = [(1 - \frac{1}{6} b^2) \sin A \cos B - (1 - \frac{1}{6} a^2) \cos A \sin B] \text{ tang. } x$

$$\tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \sin A \sin B$$

$$= [\sin A \sin B - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B - \cos A \sin B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) + \tfrac{1}{6} a^2 \sin A \cos B - \tfrac{1}{6} b^2 \sin A \cos B + \tfrac{1}{6} a^2 \cos A \sin B - \tfrac{1}{6} a^2 \sin A \cos B] \text{ tang. } x$$

$$= [\sin (A - B) + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \sin A \cos B - \tfrac{1}{6} a^2 \sin (A - B)] \text{ tang. } x$$

$$\tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}$$

$$= [1 + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} \text{ Cotg. } B - \tfrac{1}{6} a^2] \text{ tang. } x.$$

Mithin

$$2) \text{ tang. } x = \frac{\tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}}{1 - \tfrac{1}{6} a^2 + \tfrac{1}{6} (a^2 - b^2) \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} \text{ cotg. } B}$$

Für das geradlinige Dreieck ist:

$$a : b = \sin A : \sin B \text{ folglich}$$

$$a + b : a = \sin A + \sin B : \sin A$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} (A - B) : \sin A \text{ und}$$

$$a - b : b = \sin A - \sin B : \sin B$$

$$= 2 \cos \tfrac{1}{2} (A + B) \sin \tfrac{1}{2} (A - B) : \sin B.$$

Daher $a^2 - b^2 : ab = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A + B) \, 2 \sin \frac{1}{2} (A - B) \cos \frac{1}{2} (A - B) : \sin A \sin B$

$$= \sin (A + B) \sin (A - B) : \sin A \sin B$$

also ist $\dfrac{(a^2 - b^2) \sin A \sin B}{\sin (A - B)} = ab \sin (A + B) = ab \sin C =$ dem doppelten Inhalt des Dreiecks. Setzt man nun dieses Dreiecks Inhalt $= \triangle$; so ist vermöge Nro. 2

$$\text{Tang. } x = \frac{\tfrac{1}{3} \triangle}{1 - \tfrac{1}{6} a^2 + \tfrac{1}{3} \triangle \text{ Cotg. } B}$$

Bei diesen Untersuchungen ist der Halbmesser $= 1$ angenommen. Nimmt man an, die Bogen a und b gehören einem Kreis von dem Halbmesser $= r'$ zu, so muss man statt a und b setzen $\frac{a}{r'}$ und $\frac{b}{r'}$ und alsdann wird, weil $2 \triangle = ab \sin C$ ist

$$3)\ \text{tang. } x = \frac{\frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C}{1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r'^2} + \frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C \text{ cotg. } B} = \frac{\frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C}{1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r'^2} + \frac{1}{6}\frac{a\,c}{r'^2}\cos B}$$

weil $b \sin C = c \sin B$.

Da hier a und b in Vergleichung mit dem Halbmesser r' sehr klein sind, so ist der Nenner von Nro. 3 nahe $= 1$ und wegen der Kleinheit des Zählers kann man statt tang. x den Bogen x setzen, so dass man hat:

$$x = \frac{1}{6}\frac{a\,b}{r'^2}\sin C \text{ in Theilen des Halbmessers } r'.$$

$$\text{oder } 4)\ x = \frac{a\,b\sin C}{6\,r'^2 \sin 1''} \text{ in Sekunden ausgedrückt.}$$

Der Inhalt des sphärischen Dreiecks heisse $\triangle'$ so ist bekanntlich, wenn der Halbmesser der Kugel, auf welcher dieses Dreieck liegt R heisst, und die Winkel A, B, C durch Längen von Kreisbögen für den Halbmesser 1 gemessen werden, $\triangle' = (A + B + C - \pi) R^2$,

also $A + B + C - \pi = \frac{\triangle'}{R^2}$ in Theilen des Halbmessers R und

$$A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle'}{R^2 \sin 1''} \text{ in Sekunden ausgedrückt.}$$

Da aber der Inhalt eines sphärischen Dreiecks von dem Inhalte eines geradlinigten, von eben so langen Seiten, in dem hier betrachteten Fall nicht merklich verschieden ist, so ist sehr nahe:

$$5)\ A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle}{r'^2 \sin 1''} = \frac{1}{2}\frac{a\,b\sin C}{r'^2 \sin 1''} = 3\,x \text{ (Nro. 4)}$$

$$\text{mithin } x = \frac{A + B + C - 180^0}{3}$$

Aus diesem Ausdruck, verbunden mit der Proportion Nro. 1 aus welcher er abgeleitet wurde, folgt also, dass wenn man von den 3 Winkeln eines sphärischen Dreiecks, dessen Seiten nicht über 2 Grade betragen, den dritten Theil ihres Ueberschusses über 180^0 abzieht, die Sinus dieser so verminderten Winkel, sehr nahe den Seiten proportional sind.

Wenn bei Erdmessungen die 3. Winkel eines Dreiecks beobachtet worden sind, so hat man eigentlich die 3. Winkel eines sphärischen Dreiecks beobachtet, und daher muss ihre Summe, wenn man genau beobachtet hat, mehr als 180^0 ausmachen. Diesen Ueberschuss betrachtet man gewöhnlich als einen Fehler der Messung, und zieht den dritten Theil desselben von jedem der drei beobachteten Winkel ab, damit die Summe der 3 Winkel, wie in einem geradlinigten Dreieck genau 180^0 macht. Mit diesen so verbesserten Winkeln löst man dann das Dreieck als ein geradlinigtes auf. Der vorher erwiesene Satz zeigt, dass man auf diesem Wege die Seiten des sphärischen Dreiecks ebenso genau erhält, als wenn man es nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie aufgelöst hätte, weil die auf 7 Decimalstellen beschränkten gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln nicht erlauben die Genauigkeit weiter zu treiben, als diese Methode die kleinen sphärischen Dreiecke zu berechnen verstattet, wenn es anders der Mühe werth wäre, bei solchen Messungen den Calcul mit noch grösserer Schärfe zu führen.

Indessen ist es zur Beurtheilung des Grades der Genauigkeit der Winkelmessungen gut, den Ueberschuss der drei Winkel über 180^0, welchen man den sphärischen Excess nennt, zu berechnen, zu welchem Ende zwei Seiten a und b des Dreiecks nach der gewöhnlichen Methode vorläufig berechnet werden, bei welcher Rechnung übrigens, da a und b nur beiläufig bekannt seyn dürfen, nur die Minuten beizubehalten sind. Dieser sphärische Excess werde mit E bezeichnet, so ist nach Nro. 5

$E = \frac{ab \sin C}{2\, r'^2 \sin 1''}$; wo r′ durch dasselbe Längenmass ausgedrückt werden muss, in welchem a und b berechnet sind.

In Beziehung auf württembergische Fuss ist: (r′ der Perpendikels-Curven-Radius) Log. r′ = 7,3483804

$$\begin{array}{lcl} \text{Log. } r'^2 & = & 14{,}6967608 \\ \text{Log. } \sin 1'' & = & 4{,}6855749-10 \\ \text{Log. } 2 & = & 0{,}3010300 \\ \hline \text{Log. } 2\, r'^2 \sin 1'' & = & 9{,}6833657 \end{array}$$

Also die Constante Log. $\frac{1}{2\, r'^2 \sin 1''} = 0{,}3166343-10$

Folglich ist Log. E = 0,3166343—10 + Log. a + Log. b + Log. sin C — 10

Beispiel. Es sey a = 200000 so ist Log. a = 5,3010300

$$\begin{array}{lll} b = 160000 & \text{Log. b} & = 5{,}2041200 \\ C = 75^0 23 & \text{Log. sin C} & = 9{,}9857117-10 \\ & \text{Log. const.} & = 0{,}3166343-10 \\ \hline & \text{Log. E} & = 0{,}8074960 \\ & \text{E} & = 6{,}''4194. \end{array}$$

In diesem Dreieck hätte also die Summe der 3 Winkel

$$180^0\,0'\,6'',4194$$ ausmachen sollen.

Sind in einem Dreieck nur zwei Winkel beobachtet, A und B z. B. so berechne man den sphärischen Excess, und man wird haben:

$$A + B + C = 180^0 + E \text{ mithin } C = 180^0 - A - B + E$$

Die 3 Winkel des sphärischen Dreiecks werden also seyn:

$$A$$
$$B$$
$$180 - A - B + E.$$

Und man wird bei der Berechnung der Seiten dieses Dreiecks nach den Regeln der geradlinigten Trigonometrie folgende Winkel gebrauchen:

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\,E$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3}\,E$$
$$C' = 180^0 - A - B + \tfrac{2}{3}\,E = 180 - A' - B'.$$

und in diesem Fall ist es nothwendig, den sphärischen Excess zu berechnen, wenn das Dreieck als ein sphärisches betrachtet werden soll. Jedoch wird man diese verminderten Winkel in jedem Fall nur zur Berechnung der Länge der Seiten der Dreiecke, nicht aber bei dem Anreihen der Dreiecke an einander anzuwenden haben, und man sieht leicht, dass diese verminderten Winkel rund um einen Punkt herum nicht 360^0 ausmachen würden, was hingegen bei den Winkeln sphärischer Dreiecke rund um einen Punkt herum stattfinden muss, wenn sie genau beobachtet, oder gehörig verbessert sind.

§. 62.

Auflösung der sphärischen Dreiecke nach Legendre und Soldner.

a) Reduction von Log. sin a in Log. a und umgekehrt. (v. B.)

Da die unmittelbare Auflösung der sphärischen Dreiecke für die bei Erdmessungen vorkommenden Fälle ebenso leicht, als die der geradlinigten ist, so scheint diese Berechnungsart der auf Legendre's Satz sich gründenden (genäherten) Auflösung vorzuziehen zu seyn. Allein da man die Seiten in Graden, Minuten und Sekunden erhält, so muss man mittelst des bekannten Erdhalbmessers hieraus erst die Längen der Seiten in einem bekannten Längenmass ausgedrückt finden, und die den Sinus entsprechenden Winkel bis auf $\frac{1}{1000}$ Sekunde genau berechnen, weil eine Sekunde schon 108,074 württ. Fuss ausmacht. Diess erfordert ein mühsames Berechnen der Proportionaltheile, welches überdiess nur alsdann die nöthige Genauigkeit gewährt, wenn die Logarithmen der Sinus der zwei ersten Grade von Sekunde zu Sekunde in den Tafeln vorkommen. Man kann aber dieser Unbequemlichkeit auf folgende Art abhelfen:

Es ist [nach Anal. §. 34. pag. 67.]

$$a = \sin a + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^3}{3} + \frac{1.3\sin a^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\sin a^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7\sin a^9}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

also

$$\frac{a}{\sin a} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin a^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\sin a^6}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\sin a^8}{9} + \ldots$$

und [nach Anal. §. 28 pag. 56 Nro. 1.] wenn man statt u die auf 1 folgenden Glieder $\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin a^4}{5} + \ldots$ setzt,

$$^1\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\sin a} = \frac{1}{A}\Big(\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin a^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\sin a^6}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\sin a^8}{9} + \ldots\Big)$$

$$- \tfrac{1}{2}.\frac{1}{A}\Big(\tfrac{1}{2}.\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\Big)^2$$

$$+ \tfrac{1}{3}.\frac{1}{A}\Big(\tfrac{1}{2}.\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\Big)^3$$

$$- \tfrac{1}{4}.\frac{1}{A}\Big(\tfrac{1}{2}.\frac{\sin a^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin a^4}{5} + \ldots\Big)^4$$

$$+ \ldots$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen und nimmt die ähnlichen Glieder zusammen, so findet man:

$$\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\sin a} = \frac{1}{A}\Big(\tfrac{1}{6}\sin a^2 + \frac{11}{180}\sin a^4 + \frac{191}{5670}\sin a^6 + \frac{2497}{113400}\sin a^8 + \ldots\Big)$$

Da für die gemeinen Logarithmen $\frac{1}{A}$ oder der Modulus $M = 0{,}4342944819$ (Anal. §. 29 pag. 58) ist, so findet man

$$\mathrm{Log.\ vulg.}\,\frac{a}{\sin a} = 0{,}07238241365.\ \sin a^2 = \mathrm{Const.}\ \sin a^2 + C'\sin a^4 + C''\sin a^6 + C'''\sin a^8 + \ldots$$

[1] Man findet auf ähnliche Art

$$\mathrm{Log.}\,\frac{a}{\mathrm{Tang.}\ a} = -\frac{1}{A}\Big(\frac{1}{3}\,\mathrm{Tang.}\ a^2 - \frac{13}{90}\,\mathrm{Tang.}\ a^4 + \frac{251}{2835}\,\mathrm{Tang.}\ a^6 - \ldots\Big)$$

$$+ 0{,}02654021834 . \sin a^4$$
$$+ 0{,}01462965539 . \sin a^6$$
$$+ 0{,}00965290407 . \sin a^8$$
$$+ \text{etc.}$$

und es sind die Constanten:

$$\text{Log. } C = 8{,}8596330.6 - 10$$
$$\text{Log. } C' = 8{,}4239044.9 - 10$$
$$\text{Log. } C'' = 8{,}1652346.2 - 10$$
$$\text{Log. } C''' = 7{,}9805898.0 - 10.$$

Setzt man noch den Werth dieser Reihe, d. i. $\text{Log.} \left(\frac{a}{\sin a} \right) = m$, so folgt

$$\text{Log. } a = \text{Log. } \sin a + m.$$

Es sey z. B. $a = 2^0$, so ist

$$\text{Log. } \sin a^2 = 2 \text{ Log. } \sin a = 7{,}0856384 - 10$$
$$\text{Log. } C = 8{,}8596330.6 - 10$$
$$5{,}9452714.6 - 10; = 0{,}0000881.6$$
$$\text{Log. } \sin a^4 = 4{,}1712768 - 10$$
$$\text{Log. } C' = 8{,}4239044.9 - 10$$
$$2{,}5951812.9 - 10; = 0{,}0000000.39$$

Demnach $m = 0{,}0000881.6 + 0{,}0000000.39 = 0{,}0000882.$

Dieses Beispiel zeigt, dass so lange a nicht über 2^0 beträgt, das erste Glied der Reihe hinreichend ist, und man setzen kann:

$$m = 0{,}0723824 \sin a^2 \text{ mithin Log. } a = \text{Log. } \sin a + 0{,}0723824 \sin a^2.$$

Wenn also Log. sin a = 8,5428192—10
so addirt man m = 0,0000882
und man hat Log. a = 8,5429074—10 und a = 0,03490659,

welches bis auf die achte Decimalstelle genau die Länge eines Bogens von 2^0 für den Halbmesser = 1 ist, dessen sinus man oben angenommen hat.

Verlangt man die Länge des Bogens eines Kreises von dem Halbmesser R aus seinem Sinus, wenn letzterer, wie gewöhnlich, durch seinen Logarithmen aus den trigonometrischen Tafeln gegeben ist, so hat man:

$$\text{Log. } a = \text{Log. } \sin a + \text{Log. } R + m.$$

In Beziehung auf obiges Beispiel und auf den Perpendikels-Curven-Radius §. 60 dessen Log. für württ. Fuss, und für den württ. Vermessungs-Horizont = $r' = 7{,}3483804$ und Log. sin 2^0 nach der Tafel = 8,5428192—10 so hat man

$$\begin{aligned}
\text{Log. sin a} &= 8{,}5428192-10\\
\text{Log. m} &= \phantom{8{,}5428}882\\
\text{Log. r}' &= 7{,}3483804\\
\hline
\text{Log. a} &= 5{,}8912878
\end{aligned}$$

und a = 778552,35 württ. Fuss für 2^0 Länge in der Breite $\varphi = 48^0\ 31'$, folglich den Bogen von $1^0 = 386276$ württ. Fuss.

In Beziehung auf den Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians für die Breite $\varphi' = 48^0\ 31'$ welcher nach §. 60 = r dessen Log. für württ. Fuss = 7,3471574 ist, hat man für 2^0 der Breite

$$\begin{aligned}
\text{Log. sin a} &= 8{,}5428192-10\\
\text{Log. m} &= \phantom{8{,}5428}882\\
\text{Log. r} &= 7{,}3471574\\
\hline
\text{Log. a} &= 5{,}8900648
\end{aligned}$$

und a = 776363 württ. Fuss, was für einen Bogen von $1^0 = 388181$ württ. Fuss beträgt.

Umgekehrt, wenn a und R gegeben sind, und Log. sin a gesucht wird, ist Log. sin a = Log. a — Log. R — m.

Da a in Vergleichung mit R als klein angenommen wird, so ist nahe Log. sin a = Log. a — Log. R und man kann mittelst dieses beiläufigen Werthes von Log. sin a hinreichend genau die Zahl m berechnen.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\text{Log. a} &= 5{,}8912878 & \text{Log. a}^2 &= 11{,}7821070\\
\text{Log. r}' &= 7{,}3483804 & \text{Log. r}'^2 &= 14{,}6967608\\
\hline
\end{aligned}$$

genäherter Werth von $\text{Log. } \frac{a}{r'} = 8{,}5429074-10$ $\text{Log. } \frac{a^2}{r'^2} = 7{,}0853462-10$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } \left(\frac{a}{r'}\right)^2 &= 7{,}0858148-10\\
\text{Log. C} &= 8{,}8596330.6-10\\
\hline
\text{Log. m} &= 5{,}9454478.6-10
\end{aligned}$$

und m = 0,0000881.95 oder = 0,0000882.

Diess von $\text{Log. } \frac{a}{r'}$ abgezogen gibt Log. sin a = 8,5428192—10 genau wie es seyn soll.

Diese letztere Aufgabe kommt jedoch bei Erdmessungen nur alsdann vor, wenn eine Seite eines Dreiecks unmittelbar gemessen worden ist.

In den übrigen Fällen gibt die Auflösnng der Dreiecke mittelst der sphärischen Trigonometrie unmittelbar die Logarithmen der Sinus der Seiten, zu welchen man noch Log. + m zu addiren hat, um Log. a im Längenmass zu erhalten.

Zu Abkürzung der Rechnung bringt man die Zahlen m in eine kleine Hülfstabelle (wie §. 48), aus welcher man für gegebene Log. sin a die zugehörigen Werthe von m findet. Oder man addirt zu den Werthen von m sogleich Log. r′ (wie in §. 50), so ist, wenn man m + Log. r′ = m′ setzt

$$\text{Log. } a = \text{Log. sin } a + m'$$

wo man m′ unmittelbar aus der Hülfstabelle mittelst der gegebenen Log. sin a findet.

Diese Tafel darf sich, wenn von Erdmessungen die Rede ist, nicht über Log. sin 1^0 erstrecken, und kann daher auf eine Octavseite gebracht werden, indem man für diejenigen Werthe von Log. sin a welche in der Tafel nicht vorkommen, die Werthe von n′ durch Proportionaltheile findet.

b) Beispiele der Berechnung.

Bei der Bayerischen Vermessung wurden die sphärischen Dreiecke nach dieser letztern Methode berechnet.

Beispiel. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks seyen:

$A = 48^0\ 23'\ 24''$ so ist 1) nach Legendre $^{42}/_3 = 14''$ und $A' = 48^0\ 23'\ 10''$

B = 96 17 34	B′ = 96 17 20
C = 35 19 44	C′ = 35 19 30
180 0 42	180 0 0

und c = 389066,2 Fuss. Log. c = 5,5900235

Log. sin C′ = 9,7620884—10

5,8279351

Log. sin A′ = 9,8736909—10

Log. sin B′ = 9,9973786—10

Log. a = 5,7016260; a = 503067,2

Log. b = 5,8253137; b = 668826,8

2) Berechnung nach der Bayerischen Methode von Soldner.

Die beobachteten Winkel sind also ein wenig zu gross.

Für den sphärischen Excess hat man:	Beobachtete Winkel	Verbesserte Winkel.
Log. a = 5,7016260	A = 48⁰ 23′ 24″	A′ = 48 23 23,45
Log. b = 5,8253137	B = 96 17 34	B′ = 96 17 33,45
Log. sin C = 9,7620884	C = 35 19 44	C′ = 35 19 43,45
Log. const. = 0,3166343	180 0 42	180 0 40,35
Log. E = 1,6056624	sollte seyn 40,34	
E = 40″, 333	Summe der Fehler 1″,66	⅓ hiervon = 0″,55

$$\text{Log. c} = 5{,}5900235$$
$$\text{Log. r}' = 7.3483804$$
$$\text{Log.} \frac{c}{r'} = 8{,}2416431-10$$
$$\text{Log.} \left(\frac{r'}{c}\right)^2 = 6{,}4832862-10$$
$$\text{Log. const.} = 8{,}8596331$$
$$\text{Log.} \left(\frac{c}{r'}\right)^2 + c = 5{,}3429193-10 = \text{Log. m}$$
$$m = 0{,}0000220.25$$
$$\text{Log.} \frac{c}{r'} - m = 8{,}2416210.8 = \text{Log. sin c}$$

Bemerkung. Hier ist c als unmittelbar gegeben angenommen, wie bei einer Basis.

Berechnung der Werthe von m' welche sonst aus der Hülfstafel genommen werden.

$$\text{Log. const.} = 8{,}8596331-10$$
$$2.\ \text{Log. sin a} = 6{,}7064175.8-10$$
$$2.\ \text{Log. sin b} = 6{,}9537364.8-10$$
$$\left.\begin{matrix} 5{,}5660506.8-10 \\ 5{,}8133695.8-10 \end{matrix}\right\} \text{also Werthe}$$
$$\text{v. m} \begin{cases} 0.0000368.17 \\ 0{,}0000650.68 \end{cases}$$
$$\text{Log. r}' = 7{,}3483804$$
$$m + \text{Log. r}' = 7{,}3484172.17 = m'$$
$$= 7{,}3484454.68 = m'.$$

Auflösung des sphärischen Dreiecks mittelst der verbesserten Winkel.

$$\text{Log. sin c} = 8{,}2416210.8$$
$$\text{Log. sin C}' = 9{,}7621283.4$$
$$8{,}4794927.4$$
$$\text{Log. sin A}' = 9{,}8737160.5$$
$$\text{Log. sin B}' = 9{,}9973755$$
$$\text{Log. sin a} = 8{,}3532087.9$$
$$\text{Log. sin b} = 8{,}4768682.4$$
$$m' = 7{,}3484172.2$$
$$m' = 7{,}3484454.7$$
$$\text{Log. a} = 5{,}7016260.1;\ a = 503067{,}2$$
$$\text{Log. b} = 5{,}8253137.1;\ b = 668826{,}8$$

genau so, wie diese Seiten oben nach der Legendre'schen Methode gefunden worden sind, und zwar bei einem sehr grossen Dreieck, dergleichen bei Erdmessungen nicht leicht vorkommen.

§. 63.

Theorie der sphärischen Coordinatenbestimmung. (v. B.)

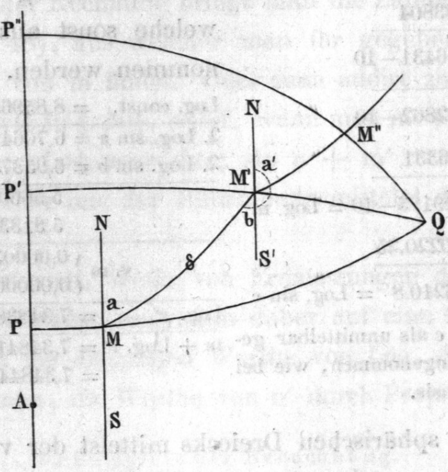
Es sey $AP = x$; $PM = y$; $AP' = x'$; $P'M' = y'$; $MM' = \delta$; $\llcorner NMM' = a$; $\llcorner N'M'M = a'$;

$$1)\ \left.\begin{matrix}\text{Tang. MQM}' \\ \text{oder} \\ \text{Tang. PP}'\end{matrix}\right\} = \frac{\sin MM' \sin QMM'}{\cos MM' \sin QM - \sin MM' \cos QM \cos QMM'}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos a}{\cos \delta \operatorname{cotg.} y - \sin \delta \sin y \sin a}.$$

$$\text{Tang.}\ (x' - x) = \frac{\text{Tang.}\ \delta \cos a}{\operatorname{cotg.} (1 - \text{Tg.}\ \delta)\ \text{Tg. y} \sin a} = \frac{\text{Tg.}\ \delta \cos a \sqrt{1 + \text{Tg. y}^2}}{1 - \text{Tg.}\ \delta\ \text{Tg. y} \sin a}$$

Fig. 25.



$$\left.\begin{array}{c}2)\ \cos QM' \\ \text{oder} \\ \sin y'\end{array}\right\} = \cos QM \cos MM' + \sin QM \sin MM' \cos M'MQ$$

$$= \sin y \cos \delta + \cos y \sin \delta \sin a.$$

$$\text{Cotg. } QM'M = \frac{\cos QM \sin MM' - \sin QM \cos MM' \cos QMM'}{\sin QM \sin QMM'}$$

$$= \frac{\text{Cotg. } QM \sin MM'}{\sin QMM'} - \cos MM' \text{ Cotg. } QMM'$$

$$\left.\begin{array}{c}3)\ \text{Tang. } S'M'M \\ \text{oder} \\ \text{Tang. } b\end{array}\right\} = \cos MM' \text{ Tang. } a - \frac{\text{Tg. } PM \sin MM'}{\cos a} = \cos \delta \text{ Tg. } a - \frac{\text{Tang. } y \cos \delta}{\cos a}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Tang. } a - \text{Tang. } b \\ \text{oder} \\ \dfrac{\sin (a - b)}{\cos a \cos b}\end{array}\right\} = 2 \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 \text{ Tang. } a + \frac{\sin \delta \text{ Tang. } y}{\cos a}$$

$$\text{Sin } (a - b) = (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 \sin a) \cos b$$

$$\text{und } \cos b = \cos a - (a - b)$$

$$= \cos a \cos (a - b) + \sin a . \sin (a - b)$$

$$= (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 \sin a) (\cos a \cos (a - b)$$

$$+ \sin a \sin (a - b).$$

$$\text{Tang. } (a - b) = (\sin \delta \text{ Tang. } y + 2 \sin \tfrac{1}{2} \delta^2 \sin a) (\cos a + \sin a \text{ Tg. } [a - b].)$$

$$4)\ \text{Tang.}\,(a-b)=\frac{(\sin\delta\ \text{Tang.}\ y+2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a}{1-(\sin\delta\ \text{Tang}\ y+2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$

$$=\frac{2\sin{}^1\!/_2\,\delta\,(\cos{}^1\!/_2\,\delta\ \text{Tang.}\ y+\sin{}^1\!/_2\,\delta\sin a)\cos a}{1-2\sin{}^1\!/_2\,\delta\,(\cos{}^1\!/_2\,\delta\ \text{Tang.}\ y+\sin{}^1\!/_2\,\delta\sin a)\sin a}$$

$$\sin y'=\sin y\cos\delta+\cos y\sin\delta\sin a$$

$$=(y-{}^1\!/_6\,y^3)(1-{}^1\!/_2\,\delta^2)+(1-{}^1\!/_2\,y^2)(\delta-{}^1\!/_6\,\delta^3)\sin a$$

$$=y-{}^1\!/_2\,\delta^2 y-{}^1\!/_6\,y^3+\delta\sin a-{}^1\!/_2\,\delta\,y^2\sin a-{}^1\!/_6\,\delta^3\sin a$$

$$y'=\sin y'+{}^1\!/_6\sin y'^3=y+\delta\sin a-{}^1\!/_6\,y^3-{}^1\!/_6\,\delta^3\sin a-{}^1\!/_2\,\delta^2 y-{}^1\!/_2\,\delta\,y^2\sin a+{}^1\!/_6\,y^3+{}^1\!/_6\,\delta^3\sin a^3+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a^2+{}^1\!/_2\,y^2\,\delta\sin a$$

$$=y+\delta\sin a-{}^1\!/_6\,\delta^3\sin a\cos a^2-{}^1\!/_2\,\delta^2\,y\cos a^2$$

$$\text{I)}\ y'=y+\delta\sin a-{}^1\!/_6\,\delta\sin a\,\delta^2\cos a^2-{}^1\!/_2\,y\,\delta^2\cos a^2$$

$$\text{Tang. PP}'=\frac{\text{Tg.}\,\delta\cos a\sqrt{1+\text{Tg. }y^2}}{1-\text{Tg.}\,\delta\ \text{Tg. }y\sin a}=\frac{(\delta+{}^1\!/_3\,\delta^3)\cos a\,(1+{}^1\!/_2\,y^2)}{1-y\,\delta\sin a}$$

$$=(\delta\cos a+{}^1\!/_3\,\delta^3\cos a+{}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a)(1+y\,\delta\sin a)$$

$$=\delta\cos a+{}^1\!/_3\,\delta^3\cos a+{}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a+y\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$\text{PP}'=\text{Tang. PP}'-{}^1\!/_3\,\text{Tang. PP}'^3$$

$$=\delta\cos a+{}^1\!/_3\,\delta^3\cos a+{}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a+y\,\delta^2\sin a\cos a-{}^1\!/_3\,\delta^3\cos a^3$$

$$=\delta\cos a+{}^1\!/_3\,\delta^3\cos a\sin a^2+{}^1\!/_2\,y^2\,\delta\cos a+y\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$\text{II)}\ x'=x+\delta\cos a+{}^1\!/_3\,\delta\cos a\,\delta^2\sin a^2+{}^1\!/_2\,\delta\cos a\,y^2+y\,\delta\sin a\,\delta\cos a$$

$$\text{Tg.}\,(a-b)=\frac{(\sin\delta\ \text{Tg. }y+2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a}{1-(\sin\delta\ \text{Tg. }y+2\sin{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$

$$=\frac{(y\,\delta+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a}{1-(y\,\delta+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\sin a}$$

$=(y\,\delta+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a)\cos a$ bis zur grössten Ordinate inclusive.

$$a-b=y\,\delta\cos a+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$a=b+y\,\delta\cos a+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$180^0+a=180^0+b+y\,\delta\cos a+{}^1\!/_2\,\delta^2\sin a\cos a$$

$$\text{III)}\ \left.\begin{matrix}180+b\\ a'\end{matrix}\right\}=180+a-y\,\delta\cos a-{}^1\!/_2\,\delta\sin a\,\delta\cos a$$ wo der convexe Winkel $N'M'M=a'$

Setzt man nun $\delta\cos a=m$ und $\delta\sin a=n$

so ist $y=y'-n$, $y^2=y'^2-2\,n\,y'+n^2$ und $m\,y^2=m\,y'-2\,m\,n\,y'+m\,n^2$

$$5)\ \frac{m\,y^2}{2}=\frac{m\,y'}{2}-m\,n\,y'+{}^1\!/_2\,m\,n^2;\quad m\,n\,y=m\,n\,y'-m\,n^2$$ zu 5 addirt gibt

$$\frac{m\,y^2}{2}+m\,n\,y=\frac{m\,y'^2}{2}-{}^1\!/_2\,m\,n^2$$

$$\frac{m y^2}{2} + m n y + \tfrac{1}{3} m n^2 = \frac{m y'^2}{2} - \tfrac{1}{2} m n^2 + \tfrac{1}{3} m n^2$$

$$= \frac{m y'^2}{2} - \tfrac{1}{6} m n^2$$

$$\text{folglich } x' = x + m + \frac{m y'^2}{2 r'^2} - \tfrac{1}{6} \frac{m n^2}{r'^2}.$$

Endlich:

$$\text{I) } y' = y + \delta \sin a - \frac{1}{6 r'^2} \delta \sin a (\delta \cos a)^2 - \frac{1}{2 r'^2} y (\delta \cos a)^2$$

$$= y + n - \frac{y m^2}{2 r'^2} - \frac{m^2 n}{6 r'^2}.$$

$$\text{II) } x' = x + \delta \cos a + \frac{1}{3 r'^2} \delta \cos a (\delta \sin a)^2 + \frac{1}{2 r'^2} y^2 \delta \cos a$$

$$= x + m + \frac{y'^2 m}{2 r'^2} + \frac{m n^2}{3 r'^2} + \frac{y m n}{r'^2} + \frac{y \delta \sin a \delta \cos a}{r'^2}$$

$$= x + m + \frac{y'^2 m}{2 r'^2} - \frac{m n^2}{6 r'^2}.$$

$$\text{III) } a' = 180 + a - \frac{y \delta \cos a}{r'^2 \sin 1''} - \frac{1}{2 r'^2 \sin 1''} \delta \sin a \delta \cos a$$

$$= 180 + a - \frac{y m}{r'^2 \sin 1''} - \frac{m n}{2 r'^2 \sin 1''}.$$

§. 64.

Berechnung der Constanten für die Coordinatenformeln des vorhergehenden Paragraphen.

Der Halbmesser der Perpendikelscurve des Observatoriums zu Tübingen r', welcher den Coordinatenformeln zu Grunde liegt, ist in §. 59 berechnet, und sein Logarithme für Toisen ist = 6,5155492. Dieser gibt für württ. Fuss und den Vermessungshorizont nach §. 60 Log. r' = 7,3483804 und es berechnen sich die Constanten und deren Complemente von $\frac{1}{2 r'^2}$, $\frac{1}{6 r'^2}$, $\frac{1}{r'^2 \sin 1''}$ und $\frac{1}{2 r'^2 \sin 1''}$ folgendermassen:

1) $\frac{1}{2 r'^2}$

Log. r'^2 = 14,6967608
Log. 2 = 0,3010300

Log. ($2 r'^2$) = 14,9977908
Cpl. Log. ($2 r'^2$) = 5,0022092—20.

2) $\frac{1}{6 r'^2}$

Log. r'^2 = 14,6967608
Log. 6 = 0,7781512

Log. ($6 r'^2$) = 15,4749120
Cpl. Log. ($6 r'^2$) = 4,5250880—20.

3) $\frac{1}{r'^2 \sin 1''}$

Log. $r'^2 \quad = 14{,}6967608$

Log. $\sin 1'' \quad = 4{,}6855749-10$

Log. $(r'^2 \sin 1'') = 9{,}3823357$

Cpl. Log. $(r'^2 \sin 1'') = 0{,}6176643-10$

4) $\frac{1}{2\,r'^2 \sin 1''}$

Log. $r'^2 \quad = 14{,}6967608$

Log. $2 \quad = \quad 0{,}3010300$

Log. $\sin 1'' \quad = \quad 4{,}6855749-10$

Log. $(2\,r'^2 \sin 1'') \quad = \quad 9{,}6833687$

Cpl. Log. $(2\,r'^2 \sin 1'') = 0{,}3166343-10.$

Zusatz 1. Die obigen Formeln I, II, III, kommen mit denjenigen überein, welche Soldner bei der Bayerischen Haupt-Triangulirung gebraucht hat, nur dass von demselben die westlichen, von dem Meridian des nördlichen Thurms der Frauenkirche zu München senkrecht ausgehenden Ordinatenkreise als + genommen und die Winkel, welche die Seiten der Dreiecke mit den Ordinatenkreisen machen, als Directionswinkel angenommen, und vom Westpunkte über Nord, Ost und Süd bis 360^0 gezählt werden.

Zusatz 2. Wenn man in obigen drei Formeln diejenigen Glieder welche den Halbmesser r' enthalten weglässt, so ist:

1) $y' = y + n = y + \delta \sin a$

2) $x' = x + m = x + \delta \cos a$ und

3) $a' = 180^0 + a$ welches die gewöhnlichen Formeln sind, die für geradlinige Coordinaten in der ebenen Trigonometrie gebraucht werden.

Zusammenstellung der Formeln für sphärische Coordinatenberechnung.

Zusatz 3.

I. Die Ordinate $y' = y + n - \frac{y\,m^2}{2\,r'^2} - \frac{m^2\,n}{6\,r'^2}$	Cpl. Log. $\left(\frac{1}{2\,r'^2}\right) = 5{,}0022092-20$
II. Die Abscisse $x' = x + m + \frac{y'^2\,m}{2\,r'^2} - \frac{m\,n^2}{6\,r'^2}$	„ Log. $\left(\frac{1}{6\,r'^2}\right) = 4{,}5250880-20$
III. Der Directionswinkel vom gesuchten auf den gegebenen Punkt.	„ Log. $\left(\frac{1}{r'^2 \sin 1''}\right) = 0{,}6176643-10$
$a' = 180^0 + a - \frac{y\,m}{r'^2 \sin 1''} - \frac{m\,n}{2\,r'^2 \sin 1''}$	„ Log. $\left(\frac{1}{2\,r'^2 \sin 1''}\right) = 0{,}3166343-10$

$n = \delta \sin a \qquad m = \delta \cos a \qquad \delta = MM'$ (Fig. 25.)

Diese Formeln beziehen sich auf die Vermessungs-Abtheilung NO. Die sphärischen Directionswinkel werden vom Nordpunkt über Ost, Süd und West bis 360^0 gezählt.

a ist der Directionswinkel für den gegebenen Punkt

a' „ „ „ „ gesuchten „

also in Figur 25. $NMM' = a$ und $N'M'M = a'$

Der erste Directionswinkel für das Observatorium zu Tübingen ist das Azimuth von Kornbühl, welches Professor v. Bohnenberger schon 1792 — 1796 zu $169^0\ 12'\ 44'',3$ bestimmt hat.

Zusatz 4. In den §. 63 entwickelten Formeln für die Coordinatenberechnung kommt nur der Halbmesser r′ der Perpendikelcurve vor; führt man aber die beiden Krümmungshalbmesser r′ und r, wie sie in den §§. 59 und 60 gefunden wurden, in dieselben ein, so findet man:

1) für die Ordinate $y' = y + \delta \sin a - \frac{(\delta \cos a)^2}{2 r^2} y - \frac{(\delta \cos a)^2 \delta \sin a}{6 r^2}$

2) „ die Abscisse $x' = x + \delta \cos a + \frac{\delta \cos a}{2 r'^2} y^2 + \frac{\delta \cos a (\delta \sin a)}{r'^2} y + \frac{\delta \cos a (\delta \sin a)^2}{3 r'^2}$

3) „ den Directionswinkel $a' = 180^0 + a - \frac{\delta \cos a\, y}{r r' \sin 1''} - \frac{\delta \sin a\, \delta \cos a}{2 r r' \sin 1''}$

und setzt man: $d \sin a = n$ und $\delta \cos a = m$

$(\delta \sin a)^2 = n^2 \quad (\delta \cos a)^2 = m^2$

so wie

1)	Compl. $2 r^2$	$= a$	dessen Log.	$= 5{,}0046552-20$
2)	„ $6 r^2$	$= b$	„ „	$= 4{,}5275339-20$
3)	„ $2 r'^2$	$= c$	„ „	$= 5{,}0022092-20$
4)	„ r'^2	$= d$	„ „	$= 5{,}3032392-20$
5)	„ $3 r'^2$	$= e$	„ „	$= 4{,}8261179-20$
6)	„ $r r' \sin 1''$	$= f$	„ „	$= 0{,}6188873-10$
7)	„ $2 r r' \sin 1''$	$= g$	„ „	$= 0{,}3178573-10$

Folglich 1) Ordinate $y' = y + n - a m^2 y - b m^2 n$

2) Abscisse $x' = x + m + c m y^2 + d m n y + e m n^2$

3) Direct. Winkel $a' = 180^0 + a - f m y - g m n.$

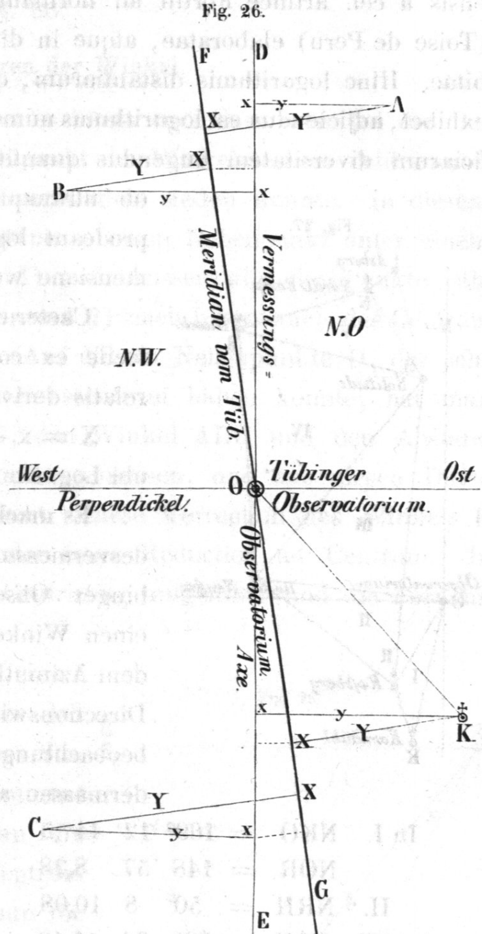
Diese Formeln tabellarisch gestellt, gewähren eine leichte Coordinaten-Berechnung. (Nach Deckers höherer Geodäsie. Mannheim 1836.)

§. 65.

Das Azimuth von Kornbühl auf dem Horizont der Sternwarte zu Tübingen.

Das Detail der Beobachtungen des Polarsterns und der Sonnenhöhen, woraus die doppelte astronomische Bestimmung dieses Azimuths hervorgieng, kann nicht gegeben werden und es folgen hier nur die Resultate

Fig. 26.



derselben wie sie Professor v. Bohnenberger in der §. 38 bezeichneten Dissertation niedergelegt hat, wo er sagt:

Distantia sacelli Salmandingensis (Kornbühl), ab observatorio aequatur 9592,921 hexap. par azimuthum autem 169° 12′ 59″,88. — Azimuthum hoc ex observationibus stellae polaris instrumento universali Reichenbachiano institutis deductum est, differtque ab azimutho 169° 12′ 44″,3 ejusdem puncti sextantis quatuor pollicum ope annis jam 1792 et 1796 a nobis invento,[2] quod fundamenti loco est coordinatis sphaericis dimensionibus wurtembergicae. Nam sub initium hujus dimensionis organa accuratiori azimuthorum determinationi inservientia nondum ad manus erant, nec e re esse videbatur, postea azimuthum assumtum corrigere, cum in hisce dimensionibus axis abscissarum prorsus sit arbitrarius, atque azimuthum situs tantummodo geographicos afficiat. Praeterea hae coordinatae pedibus wurtembergicis expressae sunt, atque respondent superficiei mediae fere wurtembergiae, quae 844 pedes paris. supra libellam maris jacet.

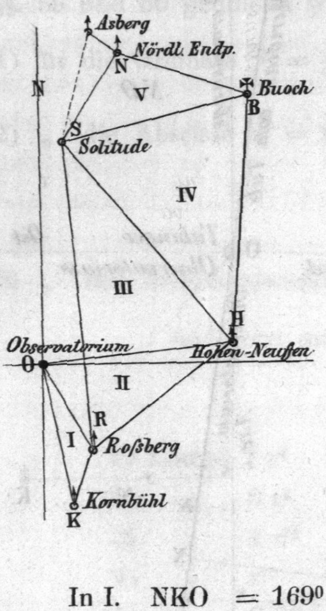
Pes autem wurtembergicus aequatur 126,97 lineis hexapedae parisi-

[1] Allg. geogr. Ephem. I. Bd. 1798. S. 360. Mittelst der Methode wenn die Sonne nahe am Horizont steht. Der Vernier des vierzölligen Sextanten gab 30″ an.

[2] In Zachs monatlicher Correspondenz V. Bd. Gotha 1802. S. 225 findet sich folgende Anzeige über die Azimuthbestimmung von Kornbühl Cap. von Prof. v. Bohnenberger: „Auf der Tübinger Sternwarte bestimmte ich das Azimuth von Kornbühl nach der von dem O. L. von Zach (Astron. Jahrb. für 1793. S. 167 f.) gezeigten Methode, welche ich auch in der geograph. Ortsbestimmung S. 449 f. erläutert habe.“ Fünf gemessene Abstände gaben folgende Azimuthe, von Norden an gerechnet:

ensis a cel. artifice Fortin ad normam hexapedae Peruvianae sic dictae (Toise de Peru) elaboratae, atque in dimetienda basi wurtembergica adhibitae. Hinc logarithmis distantiarum, quos commentatio haec (§. 38 dicta) exhibet, adjiciendus est logarithmus numeri $^{86\ 00}/_{12697} = 0{,}8328126.2$, ob superficiarum diversitatem augendus quantitate 0,0000185.4 (§. 35 c.) adeoque ob utramque causam simul 0,8328311.6, ut prodeant logarithmi distantiarum, quae in dimensione wurtembergica usurpantur.

Fig. 27.



Caeterum ordinatae X, Y ad meridianum facile ex coordinatis x, y ad axem assumtum relatis derivantur ope aequationum:

$$X = x - y \sin \beta \qquad Y = y + x \sin \beta$$

ubi Log. sin $\beta = 5{,}8781424 =$ Log. sin 15″,58.

Es macht sonach die Abscissenaxe der Landesvermessungs-Coordinaten im Punkte des Tübinger Observatoriums mit dessen Meridian einen Winkel von 15″,58 (Fig. 26.) und von dem Azimuth 169° 12′ 44″,3 = NOK wurde der Directionswinkel für die Basis, aus den Winkelbeobachtungen der 5 Dreiecke Fig. 27 folgendermassen abgeleitet:

In I.	NKO =	169°	12′	44″,3	NKO =	349°	12′	44″,46
	NOR =	148	57	8,28	NRO =	328	57	8,48
II.	NRH =	50	8	10,08	NHR =	230	8	8,84
III.	NSH =	138	24	11,12	NHS =	318	24	12,91
IV.	NSB =	78	1	48,99	NBS =	258	1	48,59
V.	NSN =	33	49	9,2	NNS =	213	49	8,87

	169°	12′	31″
	—	—	52
	—	—	45
	—	—	41
	—	—	35
Mittel	169°	12′	40″,2
Reducirt auf das Centrum			+ 2,7
	169°	12′	42″,9

oder in runder Zahl 169° 12′ 43″.

(Die oben angegebene Bestimmung 169° 12′ 44″,3 scheint also später als diese ausgeführt worden zu seyn.)

Anmerk. Die neue Methode der Azimuthbestimmung ist unten §. 141 aufgeführt und durch Beispiele erläutert.

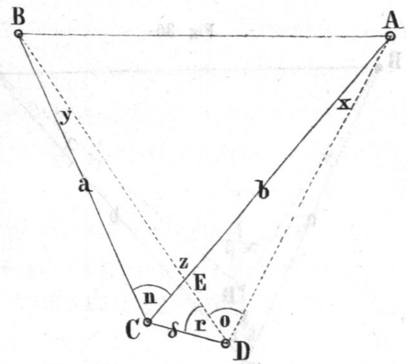
§. 66.

Das Centriren der Winkel.

Bei den Winkelmessungen kam es öfters vor, dass man bei der Beobachtung eines Winkels den Mittelpunkt des Winkelmessers nicht immer über den Mittelpunkt der Beobachtungsstation stellen konnte. In diesem Falle hat man, namentlich auf Thürmen, einen Nebenpunkt unter einem Schallladen so gewählt, dass man 1) nach Aussen alle die Punkte sah, für welche man die Winkel suchte, und 2) nach Innen auch das Centrum des Stationspunktes sehen konnte. Auf diesem Nebenpunkte D, der sehr verschiedene Lagen gegen das Stationscentrum haben konnte, hat man den falschen Dreieckswinkel ADB, den Winkel ADC und den Abstand des Centrums vom Aufstellungspunkte gemessen, und aus diesen Daten die Ableitung des Winkels C gesucht. Diese Correction des Winkels D heisst die Centrirung desselben, oder seine Reduction ad Centrum. In folgendem sind 4) Hauptfälle der Centrirung aufgeführt und die Formeln dafür hergeleitet.

I. Fall wo D rechts von C ist.

Fig. 28.



In dem Dreieck ABC kann man den Winkel C = n nicht im Centrum der Station messen, und es sey das Instrument im Punkt D aufgestellt, wo man die Punkte A und B und auch das Centrum C sehen kann. Beobachtet man nun die Winkel o und r und misst auch die Distanz CD = δ, auf Linien genau, so hat man in diesen drei Stücken und in den näherungsweise berechneten Seiten AC = b und BC = a alles was zur Bestimmung des Winkels C = n nöthig ist, und man hat $\angle$ AEB = z = o + x = n + y also n = o + x − y.

Da aber b : δ = sin (r + o) : sin x und a : δ = sin r : sin y so ist:

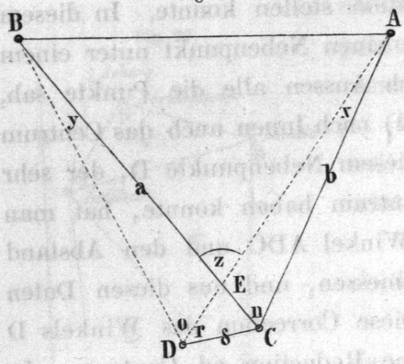
$$1)\ \sin x = \frac{\delta \sin (r + o)}{b} \text{ und } 2)\ \sin y = \frac{\delta \sin r}{a}$$

Weil aber die Winkel x und y gewöhnlich sehr klein sind, so kann man statt sin x und sin y, x und y setzen, und ihre Werthe durch Division mit sin 1″ gleich in Sekunden erhalten, folglich:

$x = \dfrac{\delta \sin (r + o)}{b \sin 1''}$ und $y = \dfrac{\delta \sin r}{a \sin 1''}$ und nachdem x und y bekannt sind, hat man, $C = n = o + x - y = o + \dfrac{\delta \sin (r + o)}{b \sin 1''} - \dfrac{\delta \sin r}{a \sin 1''}$

II. Fall, wo D links von C ist.

Fig. 29.



Wenn der Standpunkt D links vom Centrum C liegt, so ist $z = o + y = x + n$.

folglich $n = o + y - x$. Da aber

1) $a : \delta = \sin (o + r) : \sin y$

2) $b : \delta = \sin r : \sin x$ so ist

$\sin y = \dfrac{\delta \sin (o + r)}{a}$ und $\sin x = \dfrac{\delta \sin r}{b}$

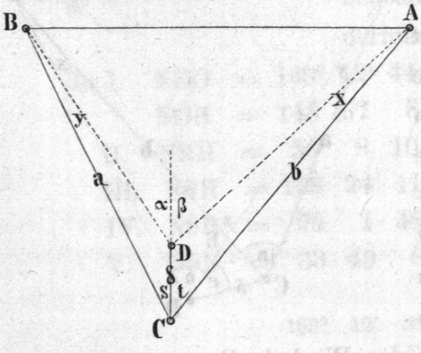
also in Sekunden

$$y = \frac{\delta \sin (o + r)}{a \sin 1''} \text{ und } x = \frac{\delta \sin r}{b \sin 1''}$$

Daher $C = n = o + y - x = o + \dfrac{\delta \sin (o + r)}{a \sin 1''} - \dfrac{\delta \sin r}{b \sin 1''}$

III. Fall, wo B in dem Winkel BCA liegt.

Fig. 30.



Liegt der Beobachtungsort D im $\triangle$ ABC so misst man die drei Winkel ADC, CDB und BDA. Dieser letzte Winkel theilt sich bei der Centrirung von D in α und β und es ist $\alpha = y + s$ $\beta = x + t$, so wie $s = \alpha - y$ und $t = \beta - x$, folglich $C = s + t = \alpha - y + \beta - x = \alpha + \beta - x - y$. Es ist aber $a : \delta = \sin \alpha : \sin y$ und $b : \delta = \sin \beta : \sin x$, daher $\sin y = \dfrac{\delta \sin \alpha}{a}$;

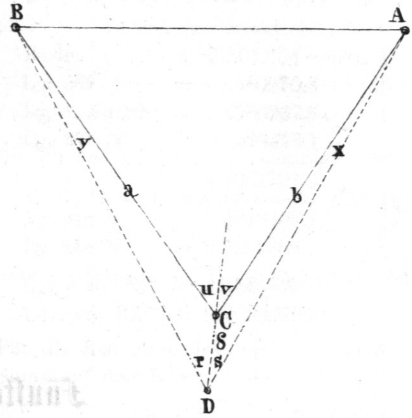
$$\sin x = \frac{\delta \sin \beta}{b}; \text{ und } y = \frac{\delta \sin \alpha}{a \sin 1''}; x = \frac{\delta \sin \beta}{b \sin 1''}$$

folglich $C = \alpha + \beta - x - y = BDA - \dfrac{\delta \sin \beta}{b \sin 1''} - \dfrac{\delta \sin \alpha}{a \sin 1''}$

IV. Fall, wenn D hinter C liegt.

Liegt der Beobachtungspunkt D hinter dem Punkt C und man misst die drei Winkel BDA, r, s und $CD = \delta$ so ist:

Fig. 31.



$$u = y + r \text{ und } r = x + s$$

$$C = u + v = x + y + r + s.$$

Setzt man aber

$$u + v = C \text{ und } r + s = D, \text{ so ist}$$

$$C = D + x + y$$

Da aber $b : \delta = \sin s : \sin x$ und $a : \delta = \sin r : \sin y$ so ist:

$$\sin x = \frac{\delta \sin s}{b} \text{ und } \sin y = \frac{\delta \sin r}{a}$$

und in Sekunden

$$x = \frac{\delta \sin s}{b \sin 1''} \qquad y = \frac{\delta \sin r}{a \sin 1''}$$

$$\text{folglich } C = D + x + y = D + \frac{\delta \sin s}{b \sin 1''} + \frac{\delta \sin r}{a \sin 1''}$$