

$$\frac{v^2}{r} + \frac{v^2}{l},$$

jene im Punkte  $b$

$$\frac{v^2}{r} - \frac{v^2}{l}.$$

Substituiert man für  $v$  den Wert  $2r\pi n$ , dann ergibt sich die Beschleunigung des Kolbens in diesen beiden Punkten mit

$$4r\pi^2 n^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right) \text{ und } 4r\pi^2 n^2 \left(1 - \frac{r}{l}\right).$$

Diese beiden Werte ergeben sich selbstverständlich auch aus der vorhin entwickelten Gleichung der Beschleunigung  $a$ , wenn man darin  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 180^\circ$  einsetzt.

**175. Graphische Methode der Bestimmung der Kolbenbeschleunigung.** Die großen Geschwindigkeiten, mit welchen man heutzutage Wärmekraftmaschinen arbeiten läßt, erfordern in hohem Maße die Berücksichtigung des Einflusses der hin- und hergehenden Massen; infolgedessen sind auch in neuester Zeit bedeutsame Arbeiten über diesen Gegenstand sowie zahlreiche Vorschläge behufs Vereinfachung des Entwurfes der Beschleunigungsdiagramme veröffentlicht worden\*). Unter diesen Konstruktionen sind jene von Mohr und Rittershaus (*Civilingenieur* 1879) am einfachsten; sie leiden jedoch, wie der Proellsche Satz, an dem Übelstande, daß sie gerade in der Nähe der toten Punkte, wo die Beschleunigungsdrücke am größten sind, illusorisch werden; andererseits ist auch die Ableitung der Konstruktion nicht genügend einfach, worunter die Anschaulichkeit, welcher die graphische Methode in erster Linie ihre Anwendung verdankt, sehr leidet. Eine dieser verschiedenen Konstruktionen und zwar die unter dem Namen Kleins Konstruktion bekannt gewordene Methode der praktischen Bestimmung der Kolbenbeschleunigung sei hier im Zusammenhange besprochen und in Fig. 172 dargestellt.

Der Kurbelzapfen befinde sich im Punkte  $P$ , die Lage der Kurbel und Schubstange ist somit durch  $CP$  und  $AP$  gegeben. Man verlängere

\*) Radinger, *Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit*. — Proell, *Graphische Dynamik*. — Burmester, *Kinematik*. — Unwin, *Elements of Machine Design*. Vol. II. — Lorenz, *Die Massenwirkung am Kurbelgetriebe und ihre Ausgleichung bei mehrkurbeligen Maschinen*; Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 1897. — Kirsch, *Über die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung*, ebenda 1890. — *Civilingenieur* 1879, S. 612 und 1883, S. 136, 283. — *Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs*, 1890—91, von F. J. Vaes. — Ferner die in neuester Zeit erschienenen Arbeiten: Lorenz, *Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen*, Leipzig 1901. — Schubert, *Theorie des Schlichschen Massenausgleiches bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen*, Leipzig 1901. — Schlick, *On balancing of steam-engines*, Institution of Naval Architects und Engineering 1900.

die Gerade  $AP$  bis zum Durchschnittspunkte  $N$  mit der durch das Wellenmittel  $C$  gezogenen Vertikalen und beschreibe mit  $PN$  als Radius von  $P$  als Mittelpunkt einen Kreis. Von dem Halbierungspunkte  $E$  der Stangenlänge  $AP$  als Mittelpunkt beschreibe man mit  $EP$  als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den von  $P$  aus beschriebenen Kreis in den Punkten  $F$  und  $G$  durchschneidet.

Nun verbinde man  $F$  und  $G$  und verlängere diese Linie bis zum Durchschnitte  $H$  mit der Linie  $AC$ . Die Strecke  $HC$  multipliziert mit dem

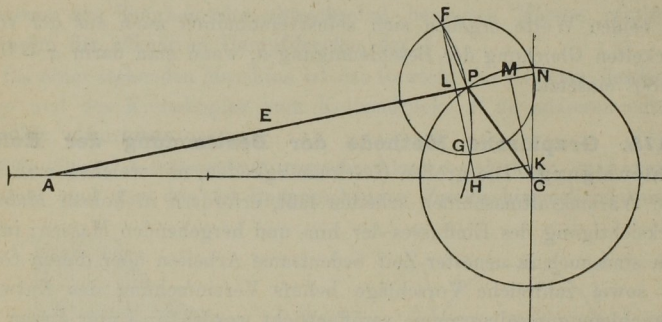


Fig. 172.

Quadrate der Winkelgeschwindigkeit der Kurbel gibt die Kolbenbeschleunigung; oder mit anderen Worten, wenn die Länge  $CP$  die Radialbeschleunigung des Kurbelzapfens darstellt, dann repräsentiert  $HC$  die Beschleunigung des Kolbens.

Um dies zu beweisen, ziehe man  $CM$  senkrecht und  $HK$  parallel zu  $PN$ ; ferner bestimme man den Momentan-Schwingungsmittelpunkt  $I$  der Schubstange, indem man  $CP$  bis zum Durchschnitte mit einer in  $A$  errichteten Vertikalen verlängert. Das in der Fig. 172 nicht eingezeichnete Dreieck  $AIP$  ist ähnlich dem Dreiecke  $NCP$  und daraus folgt

$$\frac{IP}{CP} = \frac{AP}{PN}.$$

Bezeichne  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel und  $\omega'$  die korrespondierende Winkelgeschwindigkeit der Schubstange, ferner  $v$  die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens, dann ist

$$\omega = \frac{v}{CP}$$

und

$$\omega' = \frac{v}{IP},$$

ferner

$$\omega' = \omega \frac{CP}{IP} = \omega \frac{PN}{AP}.$$

Die Bewegung der Schubstange kann man sich aus zwei Bewegungen zusammengesetzt denken und zwar aus der Bewegung in der Richtung der Tangente an den Kurbelwarzenkreis im Punkte  $P$  mit der Geschwindigkeit  $v$  und der Winkelbewegung um  $P$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$ . Die Beschleunigung des Punktes  $P$  längs  $PC$  ist  $\omega^2 PC$ ; man kann dieselbe in Komponenten in der Richtung der Stange und senkrecht zu dieser auflösen. Die Komponente in der Stangenrichtung ist  $\omega^2 PM$ ; dies ist zugleich die Beschleunigung des Punktes  $A$  in der Richtung  $AP$ , insofern  $A$  infolge der Bewegungsübertragung auf die Stange eine Beschleunigung erhält. Die Acceleration des Punktes  $A$  infolge der Drehbewegung der Stange um  $P$  ist

$$\omega'^2 AP = \omega^2 \frac{PN^2}{AP} = \omega^2 \frac{PF^2}{AP} = \omega^2 LP,$$

nachdem

$$\frac{LP}{PF} = \frac{PF}{AP}.$$

Diese Beschleunigung tritt gleichfalls in der Richtung  $AP$  auf. Die totale Beschleunigung des Punktes  $A$  in der Richtung  $AP$  ist daher

$$\omega^2 (PM + LP) = \omega^2 LM;$$

die andere Komponente der Acceleration steht senkrecht zu  $AP$ .

Die Beschleunigung  $a$  des Punktes  $A$  in der Richtung  $AC$  ist somit

$$\omega^2 LM \frac{HC}{HK} = \omega^2 HC$$

(nachdem infolge der Konstruktion  $LM = HK$ ), was zu beweisen war.

Die zu  $AP$  senkrechte Komponente der Acceleration des Punktes  $A$  ist  $\omega^2 CK$ . Dieselbe setzt sich ihrerseits zusammen aus der Komponente  $\omega^2 CM$ , der allgemeinen Acceleration  $\omega^2 CP$  der Stange und aus der Acceleration  $AP \frac{d^2\beta}{dt^2}$ , zufolge der Drehung um  $P$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$ .

Es ist somit

$$\omega^2 CK = \omega^2 CM - AP \frac{d^2\beta}{dt^2},$$

oder

$$AP \frac{d^2\beta}{dt^2} = \omega^2 (CM - CK) = \omega^2 LH$$

und

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \omega^2 \frac{LH}{AP}.$$

Faßt man diese Resultate zusammen, so ergibt sich:

Die Winkelgeschwindigkeit der Schubstange, gleich  $\omega \frac{PN}{AP}$ , ändert sich mit der Größe der Strecke  $PN$ .

Die Winkelbeschleunigung der Schubstange, gleich  $\omega^2 \frac{LH}{AP}$ , ändert sich mit der Größe der Strecke  $LH$ .

Die Beschleunigung des Kolbens, gleich  $\omega^2 CH$ , ändert sich mit der Größe der Strecke  $CH$ .

**176. Stellung der Kurbel, in welcher die Beschleunigung des Kolbens gleich Null ist.** Die Stellung der Kurbel, in welcher die Beschleunigung des Kolbens gleich Null, die Geschwindigkeit desselben somit ein Maximum ist, läßt sich entweder unter Zugrundelegung der im vorhergehenden erörterten Konstruktion oder auf andere Weise ermitteln. Aus dem Diagramm Fig 172 ergibt sich diese Kurbelstellung für jene Lage des Punktes  $P$ , für welche  $H$  mit  $C$  zusammenfällt; der dieser Kurbellage entsprechende Drehungswinkel  $\alpha$  bestimmt sich aus der kubischen Gleichung von  $\sin^2 \alpha$

$$\sin^6 \alpha - n^2 \sin^4 \alpha - n^4 \sin^2 \alpha + n^4 = 0,$$

wenn  $n$  das Verhältnis der Stangenlänge zur Kurbellänge darstellt\*).

In der nachstehenden Tabelle sind die Werte des Winkels  $\alpha$  für verschiedene Stangenverhältnisse  $n$  sowie jene Winkel zusammengestellt, in welchen die Richtung der Schubstange den Kurbelwarzenkreis tangiert.

Stangenverhältnis $n$	Kurbeldrehungswinkel, vom Totpunkte gerechnet, für welchen die Kolbengeschwindigkeit ein Maximum wird	Kurbeldrehungswinkel, bei welchem die Stangenrichtung senkrecht zur Kurbel steht
2	67° 42'	63° 26'
3	73° 11'	71° 34'
4	76° 43'	75° 58'
5	79° 7'	78° 41'
6	80° 48'	80° 32'
7	82° 2'	81° 52'
8	82° 59'	82° 52'
9	83° 44'	83° 40'
10	84° 20'	84° 17'

Diese Tabelle zeigt, daß die in § 174 gemachte Annahme, die größte Kolbengeschwindigkeit finde bei jener Stellung des Kolbens statt, bei welcher die Stangenrichtung nahezu senkrecht zur Kurbel steht, unter den gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen keinen merkbaren Fehler in der Berechnung des Beschleunigungsdruckes zur Folge hat.

\*) Siehe Professor Minchins *Uniplanar Kinematics*, 1882, S. 48. Ferner die Arbeiten von Prof. Hill, Unwin und Burls in *Min. Proc. Inst.*, Vol. CXXIV.