15. Fortsetzung. Berechnung der Koeffizienten der Unbekannten und der Absolutglieder in den Verbesserungsgleichungen.

a. Für die Koeffizienten der Unbekannten in den Verbesserungsgleichungen, nämlich die Beträge [bei Endpunkts verschiebungen $d x_2$, $d y_2$, vgl. (63)]

$$(\text{Koeff. von } d x_2)\ \frac{-\sin(P_1 P_2) . \varrho''}{\overline{P_1 P_2}} \text{ und } (\text{Koeff. von } d y_2)\ \frac{+\cos(P_1 P_2) . \varrho''}{\overline{P_1 P_2}},$$

wo zur Berechnung bei der erforderlichen Genauigkeit 5stell. Log. ausreichen, erhält man, $d x_2$ und $d y_2$ in Millimetern genommen, für

	$K B_0$	$K A_0$	$J A_0$	$J B_0$	
Koeff. von $d x_2$ . .	$+0{,}17003$	$+0{,}17003$	$-0{,}04084$	$-0{,}04083$	. . (73)
„ „ $d y_2$ . .	$-0{,}89487$	$+0{,}89487$	$+0{,}40845$	$-0{,}40845$	

Bei dieser Rechnung sind für die Tangens des Richtungswinkels die folgenden Zahlen gebildet (zunächst wie angegeben für die 5stell. Rechnung):

tg (Richt.-W.) . .	$\frac{-950{,}012}{-499{,}998}$	$\frac{-950{,}011}{+500{,}002}$	$\frac{+49{,}989}{+500{,}002}$	$\frac{+49{,}988}{-499{,}998}$	. . (74)

b. Die zu den soeben angeschriebenen Tangens-Werten (74) gehörigen Richtungswinkel selbst sind nun aber, wie schon bemerkt, auf 0″,0001 aufzusuchen, was 10stellig geschehen soll. Zum Aufschlagen der 10stell. Log. der Zahlen, mit Benützung der zweiten Differenzen, ist das in **10.** Gesagte zu vergleichen; zum Uebergang von log tang auf den Winkel, gleichfalls mit Berücksichtigung der zweiten Differenzen, mag noch folgende Bemerkung beigefügt sein: bei $(J A_0)$ als Beispiel hat man

$$\log + 49{,}989\,(00\,..) = 1.698\,8744{\cdot}490$$
$$\log + 500{,}002\,(00\,..) = 2.698\,9717{\cdot}415$$
$$\log \operatorname{tang}(J A_0) = 8.999\,9027{\cdot}075$$

Zum Uebergang auf den zugehörigen Winkelwert schreiben wir aus dem Thesaurus heraus:

		$\triangle$ in Einh.$_{10}$	$\triangle_2$ in Einh.$_{10}$
30″	8.999 8269·632		
		+2126895	
40″	9.000 0396·527		— 1022
		+2125873	
50″	2522·400		— 1021
		+2124852	
60″	4647·252		

Bedeutet also $(x . 10'')$ die zu 30″ hinzuzufügende Anzahl von ″ und wird in Einh$_{10}$ gerechnet, so ist x zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\ldots 99027075 = \ldots 98269632 + x . 2126895 - \frac{x(x-1)}{1 . 2} . 1022 \text{ oder}$$

(75) $$757443 = 2126895 . x + 511\,x - 511\,x^2 = 2127406 . x - 511\,x^2$$

Derartige, bei Rechnung mit zweiten Differenzen auftretende in x quadratische Gleichungen werden nun selbstverständlich nicht direkt, sondern durch Näherung aufgelöst. Da x ein echter Bruch ist (im Beispiel in der Nähe von $^1/_3$), so ist x^2 kleiner als x, und da ferner der Koeffizient von x^2 stets sehr klein ist im Vergleich mit dem von x, so ist das x^2 enthaltende Glied stets gering im Vergleich mit dem Glied mit x^1. Es genügt stets, in dem in x quadratischen Glied den Näherungswert von x, der mit x_0 bezeichnet sei, einzusetzen, der sich aus der ursprünglich vorgelegten Gleichung ergibt, wenn in dieser vorläufig das Glied mit x^2 vernachlässigt wird. In unserem Beispiel ist dieser Näherungswert von x

$$x_0 = \frac{757443}{2127406}; \text{ damit wird (Rechenschieber) } 511 . x_0^2 = 64.7 \text{ und demnach}$$

die in x lineare Gleichung, aus der sich der endgültige Wert von x ergibt:

(76) $$2127406\,x = 757443 + 65 = 757508 \text{ oder } x = 0{,}35634,$$

d. h. die zu 30″ hinzuzurechnende Zahl von ″ ist 3″,5634.

Man kann in dieser einfachen Art die an sich nicht gerade bequeme Rechnung mit 10stell. Log. beim Uebergang vom log zur Zahl bedeutend abkürzen.

Man erhält nun nach der in a. und b. angegebenen Rechenweise die folgenden Ausdrücke für die endgültigen, „ausgeglichenen" Richtungswinkel (für (A B) vgl. Schluss von **14.**), wobei die Unbekannten dx_a, dy_a, dx_b, dy_b in Millimetern genommen sind.

$$(77)\begin{cases}(AB) = 180^\circ\ 0'\ 0'',2063 - 0,20626\,.\,dy_b + 0,20626\,.\,dy_a\\ (KB) = 242^\circ 14'\ 30'',6677 + 0,17003\,.\,dx_b - 0,89487\,.\,dy_b\\ (KA) = 297^\circ 45'\ 29'',8981 + 0,17003\,.\,dx_a + 0,89487\,.\,dy_a\\ (JA) = \quad 5^\circ 42'\ 33'',5634 - 0,04084\,.\,dx_a + 0,40845\,.\,dy_a\\ (JB) = 174^\circ 17'\ 26'',6844 - 0,04084\,.\,dx_b - 0,40845\,.\,dy_b.\ \text{Dazu gehört noch}\\ (JK)\ \text{angenommen} = 90^\circ\ 0'\ 0'',0000;\end{cases}$$

und es ist zu beachten, dass die Richtungswinkel der umgekehrten Richtungen, (B A) usf., einfach durch Addition von $\pm 180^\circ$ aus den vorstehenden zu bilden sind, ohne Aenderung in den kleinen Zusatzgliedern rechter Hand, also z. B.:

$$(AK) = 117^\circ 45'\ 29'',8981 + 0,17003\,.\,dx_a + 0,89487\,.\,dy_a \text{ usf.}$$

Aus diesen Ausdrücken der endgültigen Richtungswinkel in den gesuchten Koordinaten-Verbesserungen ergeben sich endlich die Ausdrücke für die ausgeglichenen Winkel $1 + v_1,\ 2 + v_2, \ldots 8 + v_8$ nach:

$$(78)\begin{cases}\mathbf{1} = 1 + v_1 = (AB) - (AK) = 62^\circ 14'\ 30'',3082 - 0,20626\,.\,dy_b + 0,20626\,.\,dy_a\\ \qquad\qquad - 0,17003\,.\,dx_a - 0,89487\,.\,dy_a\\ \mathbf{2} = 2 + v_2 = (AJ) - (AB) = \ 5^\circ 42'\ 33'',3571 - 0,04084\,.\,dx_a + 0,40845\,.\,dy_a\\ \qquad\qquad + 0,20626\,.\,dy_b - 0,20626\,.\,dy_a\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{7} = 7 + v_7 = (KJ) - (KB) = 27^\circ 45'\ 29'',3323 - 0,17003\,.\,dx_b + 0,89487\,.\,dy_b\\ \mathbf{8} = 8 + v_8 = (KA) - (KJ) = 27^\circ 45'\ 29'',8981 + 0,17003\,.\,dx_a + 0,89487\,.\,dy_a\end{cases}$$

Setzt man in diese Gleichungen links noch die gemessenen Winkelwerte 1, 2, ... 7, 8 ein (vgl. **8.**), so erhält man die Verbesserungsgleichungen (oder Beobachtungsgleichungen, meist aber Fehlergleichungen genannt) in der gewöhnlichen Form:

$$(79)\begin{cases}v_1 = a_1\,.\,dx_a + b_1\,.\,dy_a + c_1\,.\,dx_b + d_1\,.\,dy_b + l_1\\ v_2 = a_2\,.\,dx_a + b_2\,.\,dy_a + c_2\,.\,dx_b + d_2\,.\,dy_b + l_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_8 = a_8\,.\,dx_a + b_8\,.\,dy_a + c_8\,.\,dx_b + d_8\,.\,dy_b + l_8.\end{cases}$$

Wir wollen übrigens die vier Unbekannten in etwas andere Ordnung bringen, nämlich in diese:

$$dy_a,\ dy_b,\ dx_a,\ dx_b;$$

damit ergibt sich, nach den in (78) möglichen Koeffizientenzusammenziehungen, die in **16.** folgende Uebersicht der Verbesserungsgleichungen v.

16. Schluss: Verbesserungsgleichungen, Normalgleichungen, Ergebnisse. Es sind hier zunächst, in (80), in tabellarischer Form und gemäss der zuletzt angegebenen Ordnung der Unbekannten die Koeffizienten und Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen v_1 bis v_8 zusammengestellt:

Verbess.	Koeffizient von				Absol.-Glied	
	dy_a	dy_b	dx_a	dx_b		
$v_1 =$	$-0,6886$	$-0,2063$	$-0,1700$	.	$+0,3082$	
$v_2 =$	$+0,2022$	$+0,2063$	$-0,0408$	.	$+0,3571$	
$v_3 =$	$-0,4084_5$	.	$+0,0408$	.	$+0,4366$	
$v_4 =$	.	$-0,4084_5$	.	$-0,0408$	$+1,6844$	(80)
$v_5 =$	$+0,2063$	$+0,2022$	.	$+0,0408$	$+1,5219$	
$v_6 =$	$-0,2063$	$-0,6886$	.	$+0,1700$	$+1,4614$	
$v_7 =$	.	$+0,8949$	.	$-0,1700$	$+1,3323$	
$v_8 =$	$+0,8949$	.	$+0,1700$	.	$-0,1019$	

Die hieraus sich ergebenden Normalgleichungen lauten:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
\underline{1{,}5678} \,.\, dy_a & +\,0{,}3675 \,.\, dy_b & +\,0{,}2443 \,.\, dx_a & -\,0{,}0266 \,.\, dx_b & -\,0{,}3971 = 0 \\
 & \underline{1{,}5678} & +\,0{,}0266 & -\,0{,}2443 & -\,0{,}1843 \\
 & & \underline{0{,}0612} & 0 & -\,0{,}0665 \\
 & & & \underline{0{,}0612} & +\,0{,}0153 \\
 & & & & \underline{9{,}4876} = [ll].
\end{array}\right\} \quad (81)^{*)}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen (ich habe 5stellige Log. benützt; auch eine genügend grosse Rechenwalze, z. B. die Dämen-Schmidsche würde noch ausreichen) gibt für die Unbekannten nebst ihren Gewichten, die man hier nebenbei erhält, folgende Zahlen (ich schreibe die Unbekannten in der Reihenfolge ihrer Bestimmung, zuerst dx_b, dann nach vollständiger Umstellung der Normalgleichungen dy_a; sodann dx_a und dy_b mehrfach aus den reduzierten Normalgleichungen der verschiedenen Stufen):

---

*) Zum Schreiben dieser Normalgleichungen sei nochmals verwiesen auf eine frühere Anmerkung (Notiz von mir, Zeitschr. f. Vermess. 1906, Bd. 35, S. 249). Es gibt Werke über Ausgleichungsrechnung und Werke, in denen viele Ausgleichungen vorkommen, in denen grundsätzlich Normalgleichungssysteme stets ausgeschrieben, nie abgekürzt geschrieben werden. Es gibt Fälle, in denen dies seine Vorzüge hat; einer ist in **9.** hervorgehoben (vgl. auch **10.**, **11.**), die grössere Uebersichtlichkeit der Gleichungen für den Fall, dass sie nicht nach dem Gaussschen Algorithmus aufgelöst werden sollen, sondern vermöge ihres Baus, der ausser der selbstverständlichen Symmetrie zum Diagonalglied der Koeffizienten-Determinante noch weitere Symmetrien aufweist, andere Wege der Auflösung naheliegen, besonders im Fall von Korrelaten-Normalgleichungen im Gegensatz zu „Elementen"-Normalgleichungen: bei jenen handelt es sich ja nicht wie bei diesen neben der Bestimmung der Unbekannten zugleich um die ihrer Gewichte aus den Normalgleichungen. Einen weitern Vorzug des Anschreibens aller Glieder sehen manche noch in der Kontrolle gegen Schreib- oder Druckfehler, die eben in der Symmetrie der Koeffizienten gegen das Diagonalglied liegt; die wichtigsten Koeffizienten der Normalgleichungen, die der Diagonalreihe und die Absolutglieder, entgehen freilich dieser Kontrolle, und wenn diese irgendwo nicht stimmt (Vorzeichenfehler, Ziffernirrtum), so ist doch nicht ohne weiteres zu sehen, was richtig ist. Auch in diesem Fall des vollständigen Anschreibens aller Normalgleichungen würde die Anschaulichkeit gewinnen, wenn die Koeffizienten der Diagonalreihe der Determinante leicht unterstrichen oder im Druck auch etwa halbfett gesetzt würden (starkem Unterstreichen behalte ich, wie oben mehrfach angegeben, gerne die Bedeutung „ausgeglichener Wert" vor). Die Normalgleichungen z. B.

$$\left.\begin{array}{l}
13{,}000\,x + 10{,}427\,y + 8{,}610\,z = 4{,}592 \\
10{,}427\,x + 14{,}082\,y + 4{,}919\,z = 4{,}243 \\
8{,}610\,x + 4{,}919\,y + 6{,}911\,z = 2{,}772
\end{array}\right\}$$

vgl. Helmert, Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl., 1907, S. 476, scheinen mir nicht so bequem übersichtlich wie eine der folgenden Formen:

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{13{,}000\,x} + 10{,}427\,y + 8{,}610\,z - 4{,}592 = 0 \\
10{,}427\,x + \underline{14{,}082\,y} + 4{,}919\,z - 4{,}243 = 0 \\
8{,}610\,x + 4{,}919\,y + \underline{6{,}911\,z} - 2{,}772 = 0
\end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l}
\mathbf{13{,}000}\,x + 10{,}427\,y + 8{,}610\,z - 4{,}592 = 0 \\
10{,}427\,x + \mathbf{14{,}082}\,y + 4{,}919\,z - 4{,}243 = 0 \\
8{,}610\,x + 4{,}919\,y + \mathbf{6{,}911}\,z - 2{,}772 = 0
\end{array}\right\}$$

In sehr vielen Fällen, besonders auch in der laufenden Praxis der Methode der kleinsten Quadrate in der Niedern Geodäsie, wo Normalgleichungen fast stets mit Hilfe eines mechanisch-logarithmischen Rechenwerkzeugs aufzulösen sind, ist es aber auch entschieden von Vorteil, von den Koeffizienten der Normalgleichungen nur die zu schreiben, die man für die Rechnung tatsächlich braucht, also die nicht zu schreiben, die sich von selbst verstehen und gar nicht gebraucht werden, deren Mitnahme für die Rechnung also gar nichts nützt, sondern diese nur stört. Mit seinem scharfen Auge für das praktisch Wichtige hat dies besonders Jordan hervorgehoben. Ich habe a. a. O. der Zeitschr. f. Verm. nun Bedenken geäussert gegen seine Schreibweise, die bei Gleichungsform die selbstverständlichen Glieder ganz weglässt (das Unterstreichen der Diagonalglieder kann diese Weglassung nicht genügend ersetzen) oder die fehlenden Glieder durch Punkte andeutet, die aber ihrerseits die Uebersicht der Rechnung wieder stören. Er schrieb die obenstehenden Normalgleichungen kurzweg so:

$$\begin{array}{r}
\underline{13{,}000\,x} + 10{,}427\,y + 8{,}610\,z - 4{,}592 = 0 \\
\underline{14{,}082\,y} + 4{,}919\,z - 4{,}243 = 0 \\
\underline{6{,}911\,z} - 2{,}772 = 0,
\end{array}$$

wobei dann als letzte Zeile zweckmässig immer auch noch die [ll], ebenfalls unterstrichen, unter den Absolutgliedern der drei Gleichungen mitgeführt wird. Es ist kaum anzuerkennen, dass das Unterstreichen der Diagonalglieder diese „abgekürzte Schreibweise" genügend als zulässig begründet. In den neuen Auflagen des I. Bandes des Jordanschen Werks (z. B. 6. Aufl. 1910 von Eggert;

$$(82)\quad \left|\begin{array}{ll} dx_b = +0{,}2816, & g\,x_b = 0{,}0224 \\ dy_a = +0{,}1850, & g\,y_a = 0{,}5391 \\ dx_a = +0{,}2988, & g\,x_a = 0{,}0224 \\ dy_b = +0{,}1130, & g\,y_b = 0{,}5391 \end{array}\right.$$

Wie zu erwarten, fallen die Gewichte von x_a und x_b gleich aus, ebenso die von y_a und y_b; auch dass die Gewichte der Ordinaten von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ viel grösser sind als die der Abszissen, ist ebenfalls aus den Messungen unmittelbar geometrisch klar.

Man findet ferner aus der Ausgleichung

$$(83)\qquad [v\,v] = [l\,l\,.\,4] = 9{,}378, \text{ also}$$

(84) mittl. Fehler eines der gemessenen Winkel $m_1 = \sqrt{\dfrac{9{,}378}{8-4}} = \pm 1''{,}531$,

in sachlich genügender Uebereinstimmung mit den Ausgleichungen nach der Methode bedingter Beobachtungen.

Rechnet man mit den gefundenen Unbekannten-Werten das v-System nach (80) aus, so findet sich, auf die $^1/_{1000}''$ abgerundet:

---

vgl. die 4 Systeme von Normalgleichungen S. 416) ist deshalb auch oft eine etwas andere Schreibweise gebraucht, nämlich

$$\begin{array}{l} \underline{13{,}000}\,x + 10{,}427\,y + 8{,}610\,z - 4{,}592 = 0 \\ \quad \ldots\ldots + \underline{14{,}082}\,y + 4{,}919\,z - 4{,}243 = 0 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots + \underline{6{,}911}\,z - 2{,}772 = 0. \end{array}$$

Die Form ist nicht zu beanstanden, nur stören die Punkte bei der Durchführung der Rechnung wieder (auch hat das Vorsetzen von Punkten auch vor [ll] natürlich keinen Sinn).

Ich habe mit Rücksicht auf alle diese Dinge a. a. O. vorgeschlagen, bei der Rechenanordnung der Normalgleichungen einfach so zu schreiben:

$$\begin{array}{llll} \underline{13{,}000}\,x + & 10{,}427\,y + & 8{,}610\,z - & 4{,}592 = 0 \\ & \underline{14{,}082} & +4{,}919 & -4{,}243 \\ & & \underline{6{,}911} & -2{,}772, \end{array}$$

dazu als letzte Zeile [ll]. Die erste Normalgleichung wird als Gleichung ausgeschrieben, um die Unbekannten zu bezeichnen; diese Unbekannten auf den folgenden Zeilen teilweise nochmals zu setzen hat so wenig Wert wie das Wiederholen selbstverständlicher Koeffizienten hätte, ebenso hat keinen Wert, diesen folgenden Zeilen die Gleichungsform zu lassen. Bei der ersten Gleichung eines Normalsystems ist es aber zweckmässig, die Gleichungsform zu wahren, weil sie auf einen Blick zeigt, wie das Vorzeichen der am Schluss stehenden, zuerst zu bestimmenden Unbekannten anzusetzen ist, davon abhängig, wie die l in den Verbesserungsgleichungen zu verstehen sind, nämlich nach

$v_k = a_k\,.\,x + b_k\,.\,y + c_k\,.\,z - l_k$ oder $v_k = a_k\,.\,x + b_k\,.\,y + c_k\,.\,z + l_k$. Darüber besteht ja noch immer kein allgemeines Uebereinkommen; ich ziehe die zweite (z. B. Jordan sche) Form der v-Gleichungen vor, während andere an der ersten Form festhalten (so z. B. Näbauer in seinen „Grundzügen der Geodäsie", Leipzig 1915; wie fremd sieht damit z. B. das l-Glied aus, wenn man die Encke schen Summenproben mitnimmt, z. B. a. a. O. S. 35, erste Gleichung (108):

$$[p\,a\,a] + [p\,a\,b] + [p\,a\,c] + [p\,a\,d] - [p\,a\,l] + [p\,a\,s] = 0).$$

Meinem Vorschlag haben einzelne als praktisch zugestimmt, z. B. Wellisch in seiner Ausgleichungsrechnung; andere haben Aenderungen vornehmen zu sollen geglaubt. So z. B., um nur zwei meiner Schüler zu nennen, schreibt Werkmeister in der Zeitschr. f. Vermess. 1915, S. 180, drei Normalgleichungen so:

$$\begin{array}{rrrr} \triangle x & \triangle y & \triangle z & l \\ \underline{5{,}247} & -2{,}274 & +4{,}734 & -11{,}720 \\ & \ldots\underline{3{,}383} & -9{,}135 & +\ 9{,}915 \\ & & \ldots\underline{35{,}562} & -25{,}597 \\ & & & \underline{36{,}012} \end{array}$$

die Punkte sind hier, wo keine der Normalgleichungen, auch die erste nicht, mehr Gleichungsform hat, gewiss mehr als überflüssig, ferner kann man das Vorzeichen, mit dem die l genommen sind, nicht erkennen, es wird nur dadurch, dass a. a. O. unmittelbar über den Normalgleichungen die Verbesserungsgleichungen stehen, klar, dass die erste der zwei obigen v-Formen zugrunde liegt. Und Berroth würde nach der in seiner Dissertation (Die Erdgestalt . . . nach Messungen der Schwerkraft, 1915) ständig festgehaltenen Schreibweise die drei zuletzt angeführten Normalgleichungen so schreiben:

$$\begin{array}{rrrr} \underline{5{,}247}\,\triangle x - & 2{,}274\,\triangle y + & 4{,}734\,\triangle z - & 11{,}720 = 0 \\ -\,\underline{2{,}274} & \underline{3{,}383} & -9{,}135 & +\ 9{,}915 = 0 \\ +\,4{,}734 & -\,\overline{9{,}135} & \underline{35{,}562} & -25{,}597 = 0 \\ & & & [l\,l] = 36{,}012, \end{array}$$

wobei aber die Gleichungsform der zweiten und dritten „Gleichung" zu beanstanden ist und die Wiederholungen der selbstverständlichen Koeffizienten links von der Diagonalreihe in Fällen wie dem vorliegenden, wo die Gleichungen für die mechanisch-logarithmische Auflösung vorbereitet sind, mindestens überflüssig sind, wie sie auch für den Fall gewöhnlicher logarithmischer Rechnung nur stört. Die Weglassung der Unbekannten in allen Gleichungen ausser der ersten ist dem Ueberblick förderlich.

$$(85)\quad \begin{cases} v_1 = +0'',107 \\ v_2 = +0\;,406 \\ v_3 = +0\;,373 \\ v_4 = +1\;,627 \\ v_5 = +1\;,594 \\ v_6 = +1\;,393 \\ v_7 = +1\;,386 \\ v_8 = +0\;,114 \end{cases}$$

Diese v weichen von den v der besten bedingten Lösungen nicht viel, immerhin bis zu $1^1/_2$ Hundertsteln der $''$ ab; ihre Quadratsumme stimmt mit (83), 9,378. Es ist natürlich zufällig, dass dieses [v v] etwas geringer ist als die der besten Ausgleichungen nach der Methode bedingter Beobachtungen 9,381.

Die verbesserten Winkel erfüllen auch genügend die Bedingungsgleichungen des ausgeglichenen Vierecks, wie hier wenigstens an drei von den vier elementaren *Su*-Gl. gezeigt sei (mit denen dann die vierte von selbst erfüllt ist), während die Kontrolle der *Si*-Gl. dem Leser überlassen bleiben mag. Es wird nach (85):

1 = 62° 14′ 30″,107	2 = 5° 42′ 33″,406	1 = 62° 14′ 30″,107
2 = 5 42 33 ,406	3 = 84 17 26 ,373	6 = 62 14 30 ,393
3 = 84 17 26 ,373	4 = 84 17 26 ,627	7 = 27 45 29 ,386
8 = 27 45 30 ,114	5 = 5 42 33 ,594	8 = 27 45 30 ,114
180° 00′ 00″,000	180° 00′ 00″,000	180° 00′ 00″,000

und es zeigt sich also hier nirgends ein Widerspruch, der bis zu 0″,001 ginge. (Die Addition der v in (85) gibt [v] = + 7″,000 und dies ist der Betrag, der die Summe der gemessenen Winkel zu 360° 00′ 00″ macht).

Die Hinzufügung der in (82) zusammengestellten Unbekannten zu den Näherungswerten gibt in dem angenommenen Koordinatensystem und mit der willkürlich angenommenen Länge JK = 1000,0000 m, wenn auch sogleich je der gemäss dem Gewicht g_u der Unbekannten u sich ergebende m. F. $m_u = \frac{m_1}{\sqrt{g_u}}$ beigesetzt wird, folgende endgültige Koordinaten, alles in Metern angeschrieben:

$$\left.\begin{array}{rl} x_i = & 0{,}00000\,(\pm 0) \\ y_i = & 0{,}00000\,(\pm 0) \\ x_k = & 0{,}00000\,(\pm 0) \\ y_k = & +\,1000{,}00000\,(\pm 0) \end{array}\right\} \text{Angenommen} \quad \left\{\begin{array}{l} x_a = +\,500{,}0050 \pm 0{,}0102 \\ y_a = +\;\;49{,}9892 \pm 0{,}0021 \\ x_b = -\,499{,}9977 \pm 0{,}0102 \\ y_b = +\;\;49{,}9811 \pm 0{,}0021 \end{array}\right\} \quad (86)$$

Die mittlere Unsicherheit von ± 10 mm in den Abszissen von A und B und von ± 2 mm in den Ordinaten dieser Punkte, bei JK nur = 1000 m, zeigt wohl wieder ebenso deutlich wie die mittlere Unsicherheit von mehr als $1^1/_2''$ in einem der gemessenen Winkel, wie sehr sachlich überflüssig die Berechnung der v selbst auf $^1/_{100}''$ ist, während oben aus formellen Gründen viel schärfer gerechnet ist.

Praktisch hat die Ausgleichung unseres Vierecks nach vermittelnden Beobachtungen (im Sinn der Aufgabe: zwei der Punkte, z. B. A und B sind von den zwei andern nur je durch zwei Winkel vorwärts eingeschnitten und gleichzeitig durch je zwei Winkel als „Doppelpunkt" rückwärts eingeschnitten über dieselben zwei andern Punkte und gegenseitig) selbstverständlich neben der einfachen Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen keine Bedeutung; sie könnte, mit Rücksicht auf die hier sehr einfache Bestimmung der mittleren Unsicherheit der Koordinaten der zwei Punkte, allenfalls nur in Betracht kommen, wenn der Rechenschieber zur Durchführung der ganzen Aufgabe, abgesehen von der Rechnung der Richtungswinkel, der Genauigkeit der gemessenen Winkel entsprechend, ausreichend wäre, was bei unserer Aufgabe sachlich zutreffen würde. Immerhin ist die Vergleichung der Ergebnisse dieser Auflösung mit den in **8.** bis **11.** angegebenen bedingten Auflösungen nicht ohne Interesse. Der Vergleich deutet zugleich an, dass man gelegentlich Veranlassung hätte (nämlich bei mehreren gleichzeitig eingeschnittenen Punkten und nicht vielen Bedingungsgleichungen im Fall der bedingten Ausgleichung) die beim „Einschneiden“ trigonometrischer Neupunkte allein übliche Methode der „vermittelnden“ Ausgleichung zu ersetzen durch die „bedingte“ Ausgleichung, bei der nur allerdings weniger einfach als dort zugleich die Gewichte und damit die m. F. der Koordinaten der gesuchten Punkte erhalten werden, die oft ebenso wichtig sind wie die ausgeglichenen Koordinaten selbst.

Nachträgliche Bemerkung. Beigefügt sei der letzten Ausgleichung noch, dass die Uebereinstimmung der v nach (85) mit den früher berechneten besten v-Systemen nicht ganz der Erwartung, nämlich dem Rechenaufwand in **15.** und **16.** entspricht. Es ist auch nachträglich in der vorstehenden Rechnung noch ein Versehen aufgefunden worden, in einem Schreibfehler bei Herleitung des Richtungswinkels $(J\,A_0)$ bestehend, vgl. **15.**; es ist dort im Konzept $511\,x_0^2 = 647$ statt 64.7 gesetzt worden und der genannte Richtungswinkel muss infolgedessen nicht $(J\,A_0) = 5°\,42'\,33'',5634$ heissen, sondern $(J\,A_0) = 5°\,42'\,33'',5607$, um $0'',0027$ kleiner als in **15.** angegeben.

Diese geringe Aenderung lässt jedoch die Auflösung auch noch nicht genau übereinstimmen mit den besten Lösungen nach bedingten Beobachtungen und es ist deshalb an den vorstehenden Zahlen gar nichts geändert worden; die neuen v (s. u.) unterscheiden sich von denen in (85) nur in zwei Fällen um etwas über $^1/_{1000}''$ (diese grössten Aenderungen treten bei v_2 und bei v_5 ein). Immerhin seien die wesentlichen Zahlen der verbesserten Rechnung noch nachgetragen. In der Zusammenstellung (80) ändern sich die Absolutglieder der 2. und 3. Verbesserungsgleichung auf $+0'',3544$ und $+0'',4393$ statt $+0'',3571$ und $+0'',4366$, in den Normalgleichungen (81) erleiden [al], [bl], [cl], {[dl] nicht} und [ll] kleine Aenderungen, die in [ll] ist ganz gering, es wird [ll] jetzt 9,4881 gegen 9,4876 dort. Die Normalgleichungen lauten jetzt, nachdem übrigens die Koeffizienten der Unbekannten in (80) je auf eine Dezimalstelle schärfer berechnet sind, folgendermassen:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\underline{1{,}56777} \,.\, d\,y_a & +\,0{,}36747 \,.\, d\,y_b & +\,0{,}24430 \,.\, d\,x_a & -\,0{,}02665 \,.\, d\,x_b & -\,0{,}39871 = 0 \\
 & \underline{1{,}56771} & +\,0{,}02665 & -\,0{,}24430 & -\,0{,}18485 \\
 & & \underline{0{,}06116} & 0 & -\,0{,}06626 \\
 & & & \underline{0{,}06116} & +\,0{,}01531 \\
 & & & & \underline{9{,}48805}
\end{array}\right\} \quad (87)$$

Ihre Auflösung (6stellig logarithmisch, gegen Ende der Eliminationen meist 5stellig), stets mit mehreren Proben und in der Reihenfolge der Unbekannten, in der sie gewonnen werden, gibt

$$(88)\quad \begin{cases} d\,x_b = +\,0{,}2832 \\ d\,y_a = +\,0{,}18938 \\ d\,x_a = +\,0{,}2778 \\ d\,y_b = +\,0{,}11293\,; \end{cases}$$

an den Gewichten der Unbekannten ändert sich gegen die Zahlen in (82) gar nichts. Die 5. Dezimale bei $d\,y_a$ und $d\,y_b$ neben im Vergleich mit der 4. in $d\,x_a$ und $d\,x_b$ drückt aus, dass die zwei zuerst genannten Unbekannten aus den Normalgleichungen (87) sich viel schärfer bestimmen lassen als die zwei zuletzt genannten, die tatsächlich nur etwas unstabil aus (87) hervorgehen.

Auch die [v v] ändert sich gegen (83) gar nicht, so dass die mittlern Unsicherheiten der Unbekannten genau wie in (86) bleiben. Es wird hier, aus allen Proben bis auf die Dez. Einh.$_4$ übereinstimmend,

$$(89)\qquad [v\,v] = [ll\,.\,4] = 9{,}3776; \quad m_1 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{4}} = \pm\,1'',531$$

wie in (84) und früher bei den besten bedingten Auflösungen.

Die Ausrechnung und Zusammenstellung der v gibt folgendes System:

$$(90)\quad \begin{cases} v_1 = +0'',1073 \\ v_2 = +0\ ,4047 \\ v_3 = +0\ ,3733 \\ v_4 = +1\ ,6267 \\ v_5 = +1\ ,5954 \\ v_6 = +1\ ,3928 \\ v_7 = +1\ ,3852 \\ v_8 = +0\ ,1148, \end{cases}$$

dessen Quadratsumme abermals 9,378 gibt in Uebereinstimmung mit (89).

Die Abweichungen der einzelnen v gegen die früher gefundenen Systeme möge der Leser selbst feststellen, ebenso die Genauigkeit der Erfüllung der **Bedingungsgleichungen** des Vierecks durch die mit (90) verbesserten Winkel. Die Aenderung an den Koordinaten $(x_a\, y_a)$, $(x_b\, y_b)$ in (86), deren mittlere Unsicherheiten wie erwähnt ganz genau wie dort bleiben, erreicht nur bei $d\,x_a$ etwa $-\,^1/_{50}$ mm, während sie bei den andern Koordinaten nicht über wenige Tausendstel des mm beträgt. Die Zahlen von (86) mit der dort gewählten Abrundung sind also unverändert gültig.