14. Vermittelnde Ausgleichung des Vierecks Fig. 8. All den Ausgleichungen des Jordan-Koll'schen Vierecks in den Nummern **8.** bis **12.** möge hier noch eine vermittelnde Ausgleichung (Methode der unabhängigen Unbekannten) folgen, um die Uebereinstimmung der Ergebnisse auch dieses Rechnungsverfahrens mit denen der vorigen Auflösungen zu zeigen. Wir wählen als Unbekannte hier die erforderliche Zahl rechtwinkliger ebener Koordinaten der Eckpunkte der Figur. Praktisch kann diese Methode bei einer so einfachen Figur wie unserem Viereck nicht werden mit Rücksicht auf die so viel grössere Rechenarbeit; wohl aber ist dies gelegentlich möglich in einem umfangreicheren Netz. Denken wir uns z. B. ein trigonometrisches Netz von nur 7 Punkten, aber stark verstrebt, wie es bei selbständigen technischen Triangulationen (z. B. zur Tunnelabsteckung) gern verwendet wird, d. h. mit vielen „Diagonalen", und in dem Netz z. B. 25 Winkel beobachtet (ohne die zu zählen, die nur zu Stationsbedingungen Veranlassung geben, wie z. B. Summe der in einem Punkt gemessenen Winkel $= 360°$). Ein ebenes Siebeneck ist, die „Eckpunkte" können liegen wie sie wollen, durch $2 . 7 - 3 = 11$ unabhängige Stücke, wovon eins eine Strecke sein muss (also 10 Winkel) geometrisch einfach bestimmt; es sind also bei uns 15 „überschüssige" Winkel vorhanden und demnach ebensoviele Bedingungsgleichungen, wenn bedingt ausgeglichen werden soll. Statt die 15 Normalgleichungen der Korrelaten zu bilden und aufzulösen, kann man schon hier u. U. an Gesamt-Rechenarbeit sparen, wenn nicht bedingt, sondern vermittelnd ausgeglichen wird; als unabhängige Unbekannte dienen die Koordinaten der Eckpunkte in einem willkürlich angenommenen Koordinatensystem, die später doch berechnet werden müssen. Davon können zwei Eckpunkte (eine Seite) als fest gegeben angenommen werden, so dass noch die Koordinaten von 5 Punkten oder 10 unabhängige Unbekannte zu bestimmen sind. Die 25 Verbesserungs- („Beobachtungs"-)Gleichungen in diesen 10 Unbekannten auszudrücken ist freilich eine grössere Arbeit als bei bedingter Ausgleichung die 15 v-Gleichungen aufzustellen. Aber einmal erspart jene Arbeit schon einiges an den weiter doch erforderlichen Rechnungen; und wenn auch die Bildung der 10 Normalgleichungen bei vermittelnder Ausgleichung eine grössere Arbeit sein mag als die der 15 Korrelaten-Normalgleichungen bei bedingter Ausgleichung (wegen der hier meist runden Zahlen $+1$ und -1 als Koeffizienten der v im grössern Teil der Bedingungsgleichungen), so ist doch jedenfalls die Auflösung der 10 Normalgleichungen bei vermittelnder Ausgleichung bequemer als die der 15 bei bedingter Ausgleichung, auch wenn hier etwas grössere Lückenhaftigkeit in den Normalgleichungen (mehr 0-Koeffizienten) vorhanden ist als dort und auch wenn man dort die 10 Normalgleichungen nach Bestimmung der letzten Unbekannten einmal ganz umstellt zur Bestimmung der ersten Unbekannten, während bei den Korrelaten-Normalgleichungen nach Bestimmung des letzten k alle vorhergehenden durch Rückwärtseinsetzen gefunden werden können. Dazu kommt als in diesen Fällen oft ausschlaggebend, dass man bei vermittelnder Ausgleichung ohne jede Mehrarbeit die mittlern Fehler der Unbekannten (nämlich der 10 Koordinaten) mit erhält.

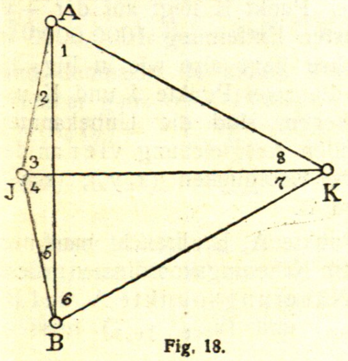

Fig. 18.

Nehmen wir in unserem Viereck, in dem keine Seitenlänge tatsächlich angegeben ist, eine solche beliebig an, indem wir z. B. $\overline{JK} = 1000{,}000$ m setzen. Es ist schon oben (**7.**) darauf hingewiesen, dass damit die Fläche des Vierecks sehr nahezu $(^1/_2 . 1000 . 1000)$ qm gross wird, d. h. $^1/_2$ qkm und dass damit dem Viereck ein Exzess von nahe $^1/_{400}''$ zukäme, d. h. also, dass die Exzesse, falls die Schärfe der Rechnung der in **8.** ff. für die v festgehaltenen vergleichbar werden sollte, zu berücksichtigen wären. Wir können hier trotzdem davon absehen und von Anfang an eben rechnen, weil wir ja ebensogut J K hätten = 1 setzen können. Es ist ferner an sich sachlich sinnlos, auch bei schärfster Bezeichnung der Eckpunkte u. s. f. bei den angegebenen Abmessungen (J K = 1000 m) die Korrektionen der Winkel bis auf $^1/_{1000}{}''$ zu rechnen, da eine Richtungsänderung von $^1/_{1000}{}''$ auf 1000 m Länge nur eine Querverschiebung des Endpunkts von $\frac{1\,000\,000}{206\,265\,000}$ mm = $^1/_{206}$ mm = rund 5 μ hervorbringt.

Wir wollen trotzdem aus den früher angegebenen formellen Gründen z. T. noch etwas schärfer rechnen.

Erinnern wir uns zur weitern Vorbereitung ferner der folgenden drei Formeln, die vom trigonometrischen Einschneiden von Neupunkten her geläufig sind:

1. Die Punkte P_1 und P_2 haben in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$. Der Anfangspunkt P_1 wird festgehalten und der Endpunkt P_2 um die kleinen Beträge $d\,x_2$, $d\,y_2$ (die natürlich positiv oder negativ sein können) verschoben nach $(x_2 + d\,x_2,\ y_2 + d\,y_2)$; dabei sind, wie schon die Bezeichnung andeutet, diese Verschiebungen so klein, dass sie im Vergleich mit der Strecke $P_1 P_2$ als Differentiale angesehen werden dürfen. Der Richtungswinkel $(P_1 P_2)$ der Strecke $P_1 P_2$ ändert sich durch diese kleine Endpunktsverschiebung, wenn $\overline{P_1 P_2}$ die genäherte Länge der Strecke bedeutet und $\varrho'' = 206265''$ ist, um den folgenden Betrag in $''$:

$$(63) \qquad -\frac{d\,x_2}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \sin(P_1 P_2) \cdot \varrho'' + \frac{d\,y_2}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \cos(P_1 P_2) \cdot \varrho''.$$

Dabei sind hier sowohl als in den zwei folgenden Formeln selbstverständlich die kleinen Koordinatenverschiebungen in demselben Mass zu nehmen wie die Strecke $\overline{P_1 P_2}$.

2. Wird der Endpunkt P_2 festgehalten und der Anfangspunkt P_1 verschoben um die kleinen Beträge $d\,x_1$, $d\,y_1$ nach $x_1 + d\,x_1$, $y_1 + d\,y_1$, so ändert sich der Richtungswinkel $(P_1 P_2)$ um den Betrag in $''$:

$$(64) \qquad +\frac{d\,x_1}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \sin(P_1 P_2) \cdot \varrho'' - \frac{d\,y_1}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \cos(P_1 P_2) \cdot \varrho''.$$

3. Werden demnach beide Punkte gleichzeitig um kleine Beträge verschoben, P_1 nach $(x_1 + d\,x_1,\ y_1 + d\,y_1)$ und P_2 nach $(x_2 + d\,x_2,\ y_2 + d\,y_2)$, so ändert sich $(P_1 P_2)$ um den Betrag in $''$:

$$(65) \qquad -\frac{(d\,x_2 - d\,x_1)}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \sin(P_1 P_2) \cdot \varrho'' + \frac{(d\,y_2 - d\,y_1)}{\overline{\overline{P_1 P_2}}} \cdot \cos(P_1 P_2) \cdot \varrho''.$$

Ueberall in (63) bis (65) sind natürlich nicht nur die Vorzeichen der kleinen Verschiebungen, sondern auch die von sin und cos des Richtungswinkels $(P_1 P_2)$ zu beachten.

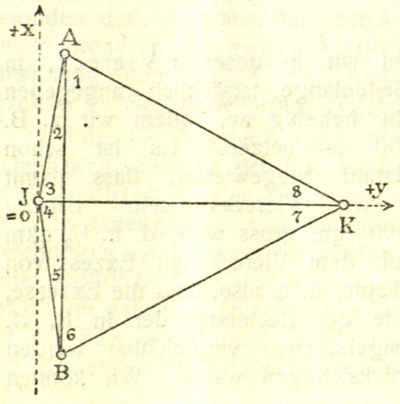

Fig. 19.

Wir führen hier nun das folgende Koordinatensystem ein: Nullpunkt ist der Punkt J; der Punkt K liegt auf der + y-Achse in der festen Entfernung 1000,0000 m von J, die x-Achse liegt also wie in Fig. 19 angedeutet. Da die zwei Punkte J und K unveränderlich festliegen, sind die Unbekannten unserer vermittelnden Ausgleichung vier an der Zahl, nämlich die Koordinaten $(x_a\, y_a)$, $(x_b\, y_b)$ der Punkte A und B.

Für die Punkte A, B, braucht man nun wie stets vor allem Näherungskoordinaten; diese Koordinaten der Näherungspunkte A_0 und B_0 mögen $(x_{0,a}\,,\ y_{0,a})$ und $(x_{0,b}\,,\ y_{0,b})$ heissen.

Man findet auf einfachste Art mit 7stelligen oder genügend selbst 6stelligen Tafeln, dass wir der endgültigen Lage der Punkte $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sehr nahe kommen mit folgenden Annahmen für die Näherungspunkte A_0 und B_0

$$(66) \quad \begin{cases} A_0 & x_{0,a} = +500{,}002, \; y_{0,a} = +49{,}989 \\ B_0 & x_{0,b} = -499{,}998, \; y_{0,b} = +49{,}988. \end{cases}$$

Es könnte hier an Gesamtrechenarbeit einiges gespart werden, wenn für die Näherungskoordinaten, d. h. die eben angeschriebenen Koordinaten, von A_0 und B_0 (absolut) dieselben Zahlen eingeführt würden, es wären dann nur zwei Richtungswinkel scharf auszurechnen (weil ferner noch $A_0 B_0$ so nahe $\parallel$ x-Achse geht, dass dieser Richtungswinkel ganz ohne Tafel gerechnet werden kann). Da diese Vereinfachung jedoch nur in der besondern Form des Vierecks Fig. 19 ihren Grund hätte, so ist davon abgesehen und es sind die Näherungen (66) eingeführt. Diese Zahlen sind mit aller hier erforderlichen Schärfe festzuhalten, ebenso natürlich die fest angenommenen Zahlen der Koordinaten von J und von K. Die endgültigen Koordinaten der vier Ecken lauten danach:

$$(67) \quad \begin{cases} \underline{\underline{x_i = 0{,}00000}} & \underline{\underline{y_i = 0{,}00000}} \\ \underline{\underline{x_k = 0{,}00000}} & \underline{\underline{y_k = +1000{,}00000}}; \end{cases}$$

ferner, wenn dx_a, dy_a, dx^b, dy_b unsere vier kleinen Unbekannten sind:

$$(68) \quad \begin{cases} \underline{\underline{x_a = +500{,}00200 + dx_a}} & \underline{\underline{y_a = +49{,}98900 + dy_a}} \\ \underline{\underline{x_b = -499{,}99800 + dx_b}} & \underline{\underline{y_b = +49{,}98800 + dy_b}} \end{cases}$$

Aus diesen Koordinaten (67) und (68) sind nun zunächst die Richtungswinkel zwischen den fest angenommenen Punkten $\underline{J}$, $\underline{K}$ und den genäherten Punkten A_0, B_0 auszurechnen, ebenso, jedoch mit weit geringerer Schärfe, die Koeffizienten der Unbekannten gemäss (63), wozu man die roh genäherten Entfernungen der Punkte von einander braucht. Die Rechnung der Richtungswinkel aus den Koordinaten von $\underline{J}$, $\underline{K}$ und denen der Näherungspunkte A_0, B_0 ist so genau zu führen, als nachher die endgültigen (ausgeglichenen) Richtungswinkel sollen angegeben werden können, d. h., um unsere jetzige Auflösung mit den frühern vergleichen zu können, bis auf 0″,0001. Wir reichen also hier mit 7stell. Log. nicht aus, sondern wollen trotz der etwas unbequemern Einschaltung den 10stell. Thesaurus zu Hilfe nehmen. Mit der angegebenen Schärfe brauchen wir die Richtungswinkel $(\underline{JK}) = 0°\,0'\,0'',0000$ (angenommen)

$$(69) \qquad (A_0B_0), \quad (KB_0), \quad (KA_0), \quad (JA_0) \quad \text{und} \quad (JB_0).$$

Was (A_0B_0) angeht, so braucht man dazu ebenfalls keine Tafel; da

$$x_{0,b} - x_{0,a} = -1000{,}0000\ldots \quad \text{und} \quad y_{0,b} - y_{0,a} = -0{,}00100\ldots,$$

je in Metern ist, so wird

$$(70) \qquad (A_0B_0) = 180°\,0'\,0'',0000 + \tfrac{1}{1000000} \cdot 206265'' = 180°\,0'\,0'',2063$$

und demnach, da kleine Veränderungen der Abszissen der Punkte A_0 und B_0 offenbar ganz ohne Einfluss auf den Richtungswinkel (A_0B_0) sind $\{\sin(A_0B_0) = 0$, $\cos(A_0B_0) = -1$, vgl. (65)$\}$,

$$(71) \qquad \underline{\underline{(AB)}} = 180°\,0'\,0'',2063 - \frac{dy_b}{A_0B_0} \cdot \varrho'' + \frac{dy_a}{A_0B_0} \cdot \varrho''.$$

In dieser Gleichung sind dy_b, dy_a und $\overline{A_0B_0}$ in demselben Mass zu nehmen; nimmt man sie in mm, so wird (die zwei letzten Zusatzglieder rechter Hand in ″)

$$(72) \qquad \underline{\underline{(AB)}} = 180°\,0'\,0'',2063 - \underset{(mm)}{dy_b} \cdot 0{,}2063 + \underset{(mm)}{dy_a} \cdot 0{,}2063.$$