$$(32)\quad \frac{\sin \underline{2} \,.\, \sin (\underline{7} + \underline{8}) \,.\, \sin \underline{4}}{\sin (\underline{3} + \underline{4}) \,.\, \sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{7}} = 1.$$

Sie enthält von den gemessenen Winkeln 5 und 6 nichts und gibt mit 7stelliger Ausrechnung (bei einfacher Einschaltung, ohne die äusserste Genauigkeit nach Schrön zu erstreben)

	log sin	Diff. 10″		log sin	Diff. 10″
$2 = 5^\circ\,42'\,33''$	8.997 7312	2106	$3 + 4 = 168^\circ\,34'\,51''$	9.296 6329	− 1043
$7 + 8 = 55\;\;30\;\;58$	9.916 0776	145	$1 = 62\;\;14\;\;30$	9.946 9040	111
$4 = 84\;\;17\;\;25$	9.997 8400	21	$7 = 27\;\;45\;\;28$	9 668 1386	400
Z	8.911 6488		N	8.911 6755	

$\log Z - \log N = -267$ Einheiten$_7$; oder in Einh.$_6$:

$$21{,}06\,v_2 + 1{,}45\,v_7 + 1{,}45\,v_8, + 0{,}21\,v_4 + 10{,}43\,v_3 + 10{,}43\,v_4 - 1{,}11\,v_1 - 4{,}00\,v_7 - 26{,}7 = 0,$$

oder endlich geordnet und mit **8** durchdividiert:

$$(33)\quad -0{,}139\,v_1 + 2{,}633\,v_2 + 1{,}304\,v_3 + 1{,}330\,v_4 - 0{,}319\,v_7 + 0{,}181\,v_8 - 3{,}338 = 0.$$

Die Zusammenstellung der vier Bedingungsgleichungen der v gibt damit, wenn als die zwei letzten dieselben *Su*-Gl. wie in (30) genommen werden:

(34)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	k
0,139	−2,633	+0,026	−0,026	+2,633	−0,139	+0,500	−0,500	−3,475	+0,6012
−0,139	+2,633	+1,304	+1,330	.	.	−0,319	+0,181	−3,338	+1,2511
1	.	.	.	.	1	1	1	−3,000	+1,4811
1	1	1	.	.	.	.	1	−1,000	−1,2890

Die Normalgleichungen werden

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{rrrrl} 14{,}405\;k_1 & -\,7{,}2025\,.\,k_2 & +\,0\,.\,k_3 & -\,2{,}968\,.\,k_4 & -\,3{,}475 = 0 \\ & 10{,}556 & -\,0{,}277 & +\,3{,}979 & -\,3{,}338 \\ & & \underline{4} & 2 & -\,3{,}000 \\ & & & \underline{4} & -\,1{,}000 \end{array}\right.$$

und ihre Auflösung gibt

$$k_4 = -1{,}2890,\quad k_3 = +1{,}4811,\quad k_2 = +1{,}2511,\quad k_1 = +0{,}6012,$$

wie oben in das Schema (34) bereits eingeschrieben. Man erhält damit

$$(36)\qquad -[w\,k] = +9{,}419$$

und das folgende System der v:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = +0'',1021 \\ v_2 = +0\;\;,4222 \\ v_3 = +0\;\;,3580 \\ v_4 = +1\;\;,6483 \\ v_5 = +1\;\;,5830 \\ v_6 = +1\;\;,3975 \\ v_7 = +1\;\;,3826 \\ v_8 = +0\;\;,1179 \end{array}\right.$$

deren $[v^2] = 9{,}419$, übereinstimmend mit (36) wird.

Es stimmen also die $^1/_{100}{}''$ noch durchaus mit dem System (16) bei der Auflösung **8.** 1 überein, wenn in beiden v-Systemen auf 0″,01 abgerundet wird (mit Ausnahme von v_4, wo der Unterschied mit 0″,0055 am grössten ist); die $[v^2]$ ist gegen **8.** 1 unbedeutend vergrössert, $m_1 = \sqrt{\dfrac{9{,}419}{4}} = \pm 1'',535$ gegen dort 1″,531.

12. Ausgleichung des Vierecks Fig. 8 nach der Möglichkeit c): 1 *Su*-Gl. und 3 *Si*-Gl. Bei dieser letzten Möglichkeit sei dem Leser überlassen, selbst den Versuch durchzuführen

a) die folgenden drei *Si*-Gl. zu wählen: die zwei ersten *Si*-Gl. von (34) n **11.** und als dritte dazu die achtgliedrige *Si*-Gl.

$$(38)\quad \frac{\sin (\underline{7} + \underline{8}) \,.\, \sin (180^0 - \underline{4}) \,.\, \sin (180^0 - \underline{1} - \underline{2}) \,.\, \sin \underline{5}}{\sin (\underline{5} + \underline{6}) \,.\, \sin \underline{8} \,.\, \sin (180^0 - \underline{3} - \underline{4}) \,.\, \sin (180^0 - \underline{1})} = 1,$$

die der Leser

selbst begründen mag und deren 7 stellige Ausrechnung (ohne feinere Einschaltung) gibt:

		Diff. 10″			Diff. 10″
7 + 8 = 55°30′58″	9.916 0776	145	5 + 6 = 67°57′01″	9.967 0134	85
180° − 4 = 95 42 35	9.997 8400	− 21	8 = 27 45 30	9.668 1466	400
180° − 1 − 2 = 112 02 57	9.967 0151	− 85	180° − 3 − 4 = 11 25 09	9.296 6329	1043
5 = 5 42 32	8 997 7101	2106	180° − 1 = 117 45 30	9.946 9040	− 111
Z	8.878 6428		N	8.878 6969	

$$\mathbf{w} = -541 \text{ Einh}_7 \text{ oder } -54{,}1 \text{ Einh}_8;$$

oder geordnet und nach Durchdivision mit **8**

$$(39) \qquad -0{,}033\, v_1 + 0{,}106\, v_2 \mp 1{,}304\, v_3 + 1{,}330\, v_4 + 2{,}526\, v_5 - 0{,}106\, v_6 + 0{,}181\, v_7 - 0{,}319\, v_8 - 6{,}763 = 0.$$

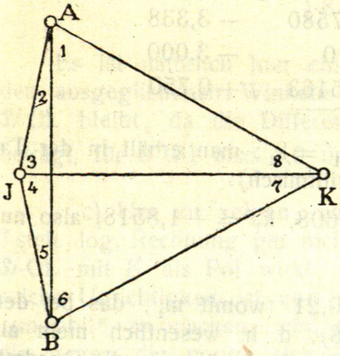

Fig. 8.

Nimmt man dazu als die eine erforderliche ***Su***-Gl. wider die dritte Gleichung von (34), so mag so geordnet werden: erst die zwei im Eingang von **12.** genannten ***Si***-Gl., dann die soeben angeführte ***Su***-Gl., endlich die dritte ***Si***-Gl. (39). Weshalb wird so die Auflösung der Normalgleichungen ebenfalls nicht befriedigend?

b) Nehmen wir für eine weitere Auflösung mit 3 ***Si***- und 1 ***Su***-Gl. dagegen z. B. drei der sechsgliedrigen ***Si***-Gl. (womit die vierte, und alle andern ***Si***-Gl., dann ohne weiteres ebenfalls erfüllt sind), die Jordan'sche scharfe mit J als Pol, die am wenigsten schärfste mit dem Koll'schen Pol, ferner die oben in **11.** b) entwickelte mit B als Pol; endlich die auch in **11.** b) benützte und diesmal einzige ***Su***-Gl.: $v_1 + v_6 + v_7 + v_8 - 3 = 0$.

Wenn die Koeffizienten der ***Si***-Gleichung mit K als Pol im Vergleich mit Jordan unverändert gelassen werden, insbesondere das unrichtige absolute Glied wie in **8.** 2. bleibt (vgl. **10.**), so lautet diese Gleichung:

$$-2{,}4\, v_1 + 8{,}6\, v_2 - 2{,}1\, v_3 + 2{,}1\, v_4 - 8{,}6\, v_5 + 2{,}4\, v_6 + 3 = 0.$$

Wir wollen diesmal (im Gegensatz zu **10.**, Gl. [28]), um die v-Koeffizienten dieser Gleichung besser mit denen der drei übrigen Bedingungsgleichungen nach ihrer absoluten Grösse in Einklang zu bringen, zuerst mit **4** durchdividieren; es wird damit:

$$(40) \qquad -0{,}60\, v_1 + 2{,}15\, v_2 - 0{,}525\, v_3 + 0{,}525\, v_4 - 2{,}15\, v_5 + 0{,}60\, v_6 + 0{,}750 = 0.$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass das Absolutglied von (40) zu klein ist [vgl. **10.** und unten in c)], ferner dass die Jordan'schen v-Koeffizienten unverändert beibehalten sind (vgl. **8.**). Ordnen wir nun die Bedingungsgleichungen der v in folgender Art:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
(41)	0,108	− 2,525	.	.	+ 2,525	− 0,108	+ 0,500	− 0,500	− 3,425
	1	.	.	.	.	1	1	1	− 3,000
	− 0,600	+ 2,150	− 0,525	+ 0,525	− 2,150	+ 0,600	.	.	+ 0,750
	− 0,139	+ 2,633	+ 1,304	+ 1,330	.	.	− 0,319	+ 0,181	− 3,338

so lauten die Normalgleichungen

$$
(42)\quad \left\{
\begin{array}{lllll}
\underline{13{,}2745\, k_1} + 0\,.\, k_2 & - 10{,}9871\, k_3 & - 6{,}9133\, k_4 & - 3{,}425 = 0. \\
\quad\underline{4} & \quad 0 & - 0{,}277 & - 3{,}000 \\
 & \underline{10{,}5162} & + 5{,}7580 & + 0{,}750 \\
 & & \underline{10{,}5559} & - 3{,}338;
\end{array}
\right.
$$

die Ordnung zeigt sich also als nicht besonders günstig. Die Auflösung (5 stellig logarithmisch) gibt

$$
(43) \qquad k_4 = + 0{,}7608,\ k_3 = + 1{,}4465,\ k_2 = + 0{,}8027,\ k_1 = + 1{,}8515.
$$

Stellt man die v-Bedingungsgleichungen (41) so um, dass statt der dortigen Ordnung 1) 2) 3) 4) die Ordnung 1) 4) 2) 3) entsteht, so lauten die Normalgleichungen

$$
(44)\quad \left\{
\begin{array}{lllll}
\underline{13{,}2745\, k_1{}'} - 6{,}9133\, k_2{}' + 0\, k_3{}' & - 10{,}9871\, k_4{}' & - 3{,}425 = 0 \\
\quad \underline{10{,}5559\, k_2{}'} - 0{,}277 + & \quad 5{,}7580 & - 3{,}338 \\
\qquad\qquad \underline{4} & \quad 0 & - 3{,}000 \\
 & \underline{10{,}5163} & + 0{,}750
\end{array}
\right.
$$

und es sollte werden $k_4{}' = k_3$, $k_3{}' = k_2$, $k_2{}' = k_4$, $k_1{}' = k_1$; man erhält in der Tat aus der Auflösung von (44) (ebenfalls 5 stellig logarithmisch):

(45) $k_4{}' = + 1{,}4469$, $k_3{}' = + 0{,}8027$, $k_2{}' = + 0{,}7608$, $k_1{}' = + 1{,}8518$, also nur ganz geringe Unterschiede im Vergleich mit (43).

Damit ergibt sich (46) $[v\,v] = - [w\,k] = 10{,}21$ (womit m_1, das bei den besten Lösungen $\pm 1'',531$ betrug, würde $\pm 1'',598$), d. h. wesentlich mehr als bei allen vorstehenden guten Ausgleichungen; mit (46) stimmt überein die Quadratsumme des folgenden v-Systems (zur Bildung der einzelnen v^2 4 stellig angeschrieben, in (47) aber auf zwei Dezimalen abgerundet):

$$
(47)\quad \left\{
\begin{array}{l}
v_1 = + 0'',03 \\
v_2 = + 0\ ,44 \\
v_3 = + 0\ ,23 \\
v_4 = + 1\ ,77 \\
v_5 = + 1\ ,57 \\
v_6 = + 1\ ,47 \\
v_7 = + 1\ ,49 \\
v_8 = + 0\ ,01
\end{array}
\right.
$$

Die Abweichungen der v gegen die richtigen gehen also bis zu 0″,13 ziemlich über die $^1/_{10}''$ hinaus. Dementsprechend nicht einmal für die praktisch erforderliche Genauigkeit ganz befriedigend sind die *Su*-Gl. erfüllt; zwar die eine, oben verwendete, für das Dreieck ABK, stimmt natürlich gut, nämlich

Dreieck ABK

$$
\begin{array}{rcl}
1 + v_1 = \overline{1} & = & 62^\circ\ 14'\ 30'',03 \\
6 + v_6 = \overline{6} & = & 62\ \ \ 14\ \ \ 30\ \ ,47 \\
7 + v_7 + 8 + v_8 = \overline{7} + \overline{8} & = & 55\ \ \ 30\ \ \ 59\ \ ,50 \\
\hline
 & & 180^\circ\ 00'\ 00'',00
\end{array}
$$

dagegen ergeben sich für die drei übrigen Dreiecke ABJ, AJK und BJK die unten verzeichneten „Dreieckschlüsse" (die Viereckswinkelsumme, d. h. die Summe aller vorhandenen acht Winkel, stimmt nach den beiden möglichen Dreieckssummen auf 0″,01):

Dreieck ABJ.		Dreieck AJK.		Dreieck BJK.	
$\overline{2} =$	5° 42′ 33″,44	$\overline{1} + \overline{2} =$	67° 57′ 3″,47	$\overline{4} =$	84° 17′ 26″,77
$\overline{3} + \overline{4} =$	168 34 53 ,00	$\overline{3} =$	84 17 26 ,23	$\overline{5} + \overline{6} =$	67 57 4 ,04
$\overline{5} =$	5 42 33 ,57	$\overline{8} =$	27 45 30 ,01	$\overline{7} =$	27 45 29 ,49
	180° 00′ 00″,01		179° 59′ 59″,71		180° 00′ 00″,30.

Die zwei letzten Dreiecke lassen also Schlussfehler von 0″,3 übrig. Von Interesse ist noch zu sehen, ob die vierte sechsgliedrige *Si*-Gl. erfüllt ist, wie es ohne weiteres der Fall sein muss, da die drei übrigen unmittelbar als Bedingungsgleichungen benützt sind. Diese vierte elementare *Si*-Gl. (Pol in A) lautet (sie enthält die Winkel 1 und 2 nicht):

$$\frac{\sin \underline{6} \cdot \sin (\underline{3} + \underline{4}) \cdot \sin \underline{8}}{\sin (\underline{7} + \underline{8}) \cdot \sin \underline{5} \cdot \sin \underline{3}} = 1$$ und es wird, wenn in den v und den danach verbesserten Winkeln gemäss (47) bis auf 0″,01 gegangen wird, bei 7stelliger (flüchtigerer) Rechnung:

$\sin \underline{6} = \sin\ 62° 14' 30'',47$	9.9469045	$\sin (\underline{7} + \underline{8}) = \sin 55° 30' 59'',50$	9.9160798
$\sin \underline{3} + \underline{4} = \sin 168\ 34\ 53\ ,00$	9.2966120	$\sin \underline{5} = \sin\ 5\ 42\ 33\ ,57$	8.9977432
$\sin \underline{8} = \sin\ 27\ 45\ 30\ ,01$	9.6681466	$\sin \underline{3} = \sin 84\ 17\ 26\ ,23$	9.9978402
	8.9116631		8.9116632

Es ist natürlich hier einigermassen Zufall, dass bei Abrundung auf 0″,01 in den ausgeglichenen Winkeln nur ein Widerspruch von 1 Einh_7 in der vierten *Si*-Gl. bleibt, da die Differenz für 1″ bei $\underline{3} + \underline{4}$ 104 und bei $\underline{5}$ gar 211 Einh_7 beträgt, für 0″,01 also 1,0 und 2,1 Einheiten.

c) Um zu zeigen, wie ungünstig die an sich geringe, bei gewöhnlicher 7stell. log. Rechnung gar nicht zu beanstandende Unrichtigkeit im Absolutglied der *Si*-Gl. mit K als Pol wirkt, wie empfindlich diese unscharfe *Si*-Gl. gegen eine solche Unrichtigkeit ist und wie sehr sie dazu beiträgt, auch diese Auflösung b) „unstabil" zu machen, wird noch die Auflösung auf demselben Weg mitgeteilt, die gegen die vorige sich lediglich darin unterscheidet, dass in jene *Si*-Gl. der bessere Wert 4 statt 3 für das Absolutglied eingesetzt wird, so dass sie nach Durchdivision mit 4 so lautet (vgl. (40), Abs.-Gl. 1,00 statt 0,75):

$$(48) \qquad -0{,}60\, v_1 + 2{,}15\, v_2 - 0{,}525\, v_3 + 0{,}525\, v_4 - 2{,}15\, v_5 + 0{,}60\, v_6 + \mathbf{1{,}00} = 0.$$

Ordnen wir die v-Bedingungsgleichungen in derselben Weise wie bei der zweiten der Auflösungen in b):

(49)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
0,108	− 2,525	.	.	+ 2,525	− 0,108	+ 0,500	− 0,500	− 3,425
− 0,139	+ 2,633	+ 1,304	+ 1,330	.	.	− 0,319	+ 0,181	− 3,338
1	.	.	.	.	1	1	1	− 3,000
− 0,600	+ 2,150	− 0,525	+ 0,525	− 2,150	+ 0,600	.	.	+ 1,000

so erhält man durch Auflösung der Normalgleichungen (50), die sich von (44) nur im Wert des letzten Absolutglieds unterscheiden, ebenfalls mit Hilfe 5stelliger Logarithmen

$$(51) \qquad k_4'' = +\,1{,}2711,\ k_3'' = +\,0{,}8028,\ k_2'' = +\,0{,}7618,\ k_1'' = +\,1{,}7067.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{rrrrr} \underline{13{,}2745}\ k_1'' & -\ 6{,}9133\ k_2'' & +\ 0\ .\ k_3'' & -\ 10{,}9871\ k_4'' & -\ 3{,}425 = 0 \\ & \underline{10{,}5559} & -\ 0{,}277 & +\ 5{,}7580 & -\ 3{,}338 \\ & & \underline{4} & 0 & -\ 3{,}000 \\ & & & \underline{10{,}5163} & +\ 1{,}000. \end{array} \right.$$

Der Vergleich der Korrelaten (51) mit (45) zeigt, dass nur k_4 und k_1 stark verändert, k_2 und besonders k_3 beinahe unverändert erscheinen.

Das System der v, auf 0″,001 abgerundet, wird (52), ihre Quadratsumme, übereinstimmend mit $-[w\,k]$ gibt

$$(52)\quad \left.\begin{aligned} v_1 &= +0'',119 \\ v_2 &= +0\ ,429 \\ v_3 &= +0\ ,326 \\ v_4 &= +1\ ,681 \\ v_5 &= +1\ ,576 \\ v_6 &= +1\ ,381 \\ v_7 &= +1\ ,413 \\ v_8 &= +0\ ,087 \end{aligned}\right\}$$

(53) $[v\,v] = -[w\,k] = 9{,}526$, bedeutend geringer als bei (46) und nicht mehr sehr viel grösser als 9,38 bei den besten Lösungen (m. F. eines der gemessenen Winkel dort $\pm 1'',53$, hier nach (53) $\pm 1'',54$). Die Abweichungen der einzelnen v von denen der besten frühern Lösungen gehen über wenige Hundertstel der ″ nicht hinaus. Die Auflösung ist also wieder sachlich ganz genügend, sogar mit Hinzunahme der unscharfen, nur im Absolutglied etwas richtiger gemachten Koll'schen *Si*-Gl. Sie befriedigt auch formell besser als die vorige; was vor allem die vierte sechsgliedrige *Si*-Gl. angeht, die mit den drei verwendeten von selbst erfüllt sein muss (auch ohne dass z. B. eine der *Su*-Gleichungen erfüllt wäre), so wird hier

$\sin \underline{6} = \sin\ 62°\ 14'\ 30'',381$	9.9469044	$\sin(\underline{7+8}) = \sin 55°\ 30'\ 59'',500$	9.9160798
$\sin(\underline{3+4}) = \sin 168°\ 34'\ 53'',007$	9.2966119	$\sin \underline{5} = \sin\ 5°\ 42'\ 33'',576$	8.9977433
$\sin \underline{8} = \sin\ 27°\ 45'\ 30'',087$	9.6681469	$\sin \underline{3} = \sin 84°\ 17'\ 26'',326$	9.9978402
	8.9116632		8.9116633

Das Stimmen dieser letzten *Si*-Gl. auf 1 Einheit$_7$ ist etwas weniger zufällig als bei der vorigen Auflösung; ebenso ist die (wenn auch weniger genaue als bei Auflösungen mit mehr *Su*-Gleichungen) Erfüllung der *Su*-Gleichungen bis auf wenige $^1/_{100}$″ zu erwarten (vgl. das nach (53) Gesagte). In der Tat wird für die vier Dreiecke:

Dreieck A B K

$$\begin{aligned} 1 + v_1 = \underline{1} &= 62°\ 14'\ 30'',119 \\ 6 + v_6 = \underline{6} &= 62\ \ 14\ \ 30\ ,381 \\ 7 + v_7 + 8 + v_8 = \underline{7} + \underline{8} &= 55\ \ 30\ \ 59\ ,500 \\ \hline & 180°\ 00'\ 00'',000 \end{aligned}$$

Dreieck A B J

$$\begin{aligned} 2 + v_2 = \underline{2} &= \ \ 5°\ 42'\ 33'',429 \\ 3 + v_3 + 4 + v_4 = \underline{3} + \underline{4} &= 168\ \ 34\ \ 53\ ,007 \\ 5 + v_5 = \underline{5} &= \ \ 5\ \ 42\ \ 33\ ,576 \\ \hline & 180°\ 00'\ 00'',012 \end{aligned}$$

Dreieck A J K

$$\begin{aligned} 1 + v_1 + 2 \mp v_2 = \underline{1} + \underline{2} &= 67°\ 57'\ \ 3'',548 \\ 3 + v_3 = \underline{3} &= 84\ \ 17\ \ 26\ ,326 \\ 8 + v_8 = \underline{8} &= 27\ \ 45\ \ 30\ ,087 \\ \hline & 179°\ 59'\ 59'',961 \end{aligned}$$

Dreieck B J K

$$\begin{aligned} 4 + v_4 = \underline{4} &= 84°\ 17'\ 26'',681 \\ 5 + v_5 + 6 + v_6 = \underline{5} + \underline{6} &= 67\ \ 57\ \ \ 3\ ,957 \\ 7 + v_7 = \underline{7} &= 27\ \ 45\ \ 29\ ,413 \\ \hline & 180°\ 00'\ 00'',051 \end{aligned}$$

Das Dreieck ABK, bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen zur *Su*-Gl. verwendet, stimmt also auf die $^1/_{1000}$″, bei A B J zeigt sich $^1/_{100}$″ Widerspruch, bei den Dreiecken A J K und B J K sind die obigen Restwidersprüche bei b) von $+0'',29$ und $-0'',30$ hier in c) auf $+0'',04$ und $-0'',05$ gesunken.