„Schärfemass“-Verhältnis für die *Si*-Gl., das sich im vorliegenden Fall bei J : K als Polen wie 19 : 1 stellt (während das Schärfemass für A oder B als Pol in demselben Verhältnis $9^1/_2$ würde) nun auch ein Mass für die Schärfe der Auflösung überhaupt abgeben würde. Bei A oder B als Pol für eine *Si*-Gl. neben drei *Su*-Gl. zeigt sich schon keinerlei Einbusse an Schärfe der ganzen Auflösung (d. h. in den v) im Vergleich mit J als Pol der *Si*-Gl. Man soll nur (und diese wichtige Regel gilt nicht nur hier, sondern ganz allgemein in den Dreiecksnetzen) für die endgültige Rechnung der Seitenlängen nach der Ausgleichung, für die ja im allgemeinen überall verschiedene Wege zur Verfügung stehen, nicht die ausgeglichenen sehr spitzen Winkel verwenden, deren Einführung in die *Si*-Gl. für deren Rechenschärfe günstig war, also z. B. in Fig. 8 für die endgültige Rechnung der Seitenlängen das Dreieck A J B gar nicht verwenden. Zeigen sich noch kleine Widersprüche in den Log. der Seiten, wenn diese auf verschiedenen Wegen zur Probe berechnet werden, so ist solange auf diese kleinen Beträge kein Gewicht zu legen, als sie durch sehr spitze Winkel entstanden sind; ein Mass zur Beurteilung ist ja überall sofort durch die Diff. 10″ oder Diff. 1″ gegeben.

11. Ausgleichung des Vierecks Fig. 8 nach der Möglichkeit b): zwei *Su*-Gl. und zwei *Si*-Gl.

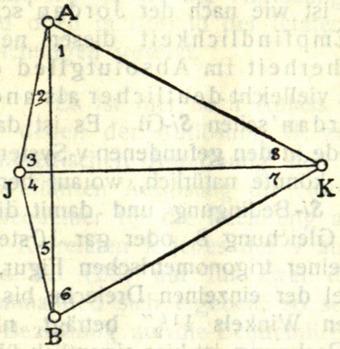

Fig. 8.

a) Versuchen wir eine Ausgleichung derart, dass wir als Bedingungsgleichungen im ganzen anwenden die in 9. benützte 8gliedrige *Si*-Gl. als „günstigste“ *Si*-Bedingung überhaupt (obwohl der Unterschied ihrer Schärfe gegen die sogleich zu nennende Jordan'sche *Si*-Gl., wie schon erwähnt hier ganz gering ist), in linearer Form beide in der ersten Gl. (21) vorhanden, ferner die „günstigste“ sechsgliedrige *Si*-Gl., nämlich die von Jordan, endlich als die zwei noch notwendigen *Su*-Gl. die von den Dreiecken A B K und A J K gelieferten Gleichungen. Ich lasse dabei die Jordan'sche *Si*-Gl. ohne Aenderung der Zahlen, wie sie als erste der Bedingungsgleichungen der v a. a. O. S. 266 steht obwohl kleine Aenderungen angezeigt wären, wie oben in 8. 1. nachgewiesen ist. Man erhält damit folgende Zusammenstellung der v-Gleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	k
(30)	0,139	−2,633	+0,026	−0,026	+2,633	0,139	+0,500	0,500	−3,475	
	0,108	−2,525	.	.	+2,525	−0,108	+0,500	0,500	−3,425	
	1	.	.	.	.	1	1	1	−3,000	
	1	1	1	.	.	.	.	1	−1,000	

Bilden wir mit der angegebenen Reihenfolge der v-Bedingungsgleichungen die Normalgleichungen der k, so werden diese:

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
14{,}405\, k_1 + 13{,}827\, k_2 + 0\,.\,k_3 - 2{,}968\, k_4 - 3{,}475 &= 0\\
13{,}827\, k_1 + 13{,}275\, k_2 + 0\,.\,k_3 - 2{,}917\, k_4 - 3{,}425 &= 0\\
0\,.\,k_1 + \quad 0\,.\,k_2 + 4\,.\,k_3 + \quad 2\,.\,k_4 - 3{,}000 &= 0\\
-2{,}968\, k_1 - \ 2{,}917\, k_2 + 2\,.\,k_3 + \quad 4\,.\,k_4 - 1{,}000 &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Reihenfolge dieser Gleichungen verspricht wenig Gutes für die Auflösung, schon weil $\frac{[ab]}{[aa]} = \frac{13{,}827}{14{,}405}$ zu gross ist für günstige Eliminationsrechnung;

versucht man aber auch eine Umstellung, etwa in der Ordnung k_4, k_3, k_2, k_1, d. h. mit Voranstellung der Gleichung

$$\underline{4} \, . \, k_4 + 2 \, . \, k_3 - 2{,}917 \, . \, k_2 - 2{,}968 \, . \, k_1 - 1{,}000 = 0$$

. . . . ,

so versagt die Auflösung dieses Systems für k_1 ganz, man kommt auf eine Schlussgleichung für k_1, in der dessen Koeffizient bei scharfer Rechnung sehr nahezu 0 wird. (Dem Anfänger sei geraten, den Versuch der Eliminationsrechnung aus (31) und aus der angedeuteten Umstellung durchzuführen.) Was ist der Grund? Antwort: Die Gleichungen (31) sind ein Schulbeispiel für ein System „unstabiler" Gleichungen (vgl. über diesen Ausdruck den Schluss von 5.), dadurch entstanden, dass zwei der Bedingungsgleichungen (30) sehr wenig voneinander verschieden sind, nämlich die erste und zweite Gleichung (30); es sind dies zwei tatsächlich verschiedene Bedingungsgleichungen, wie schon daraus hervorgeht, dass die erste alle acht v enthält, die zweite aber v_3 und v_4 nicht. Multiplizieren wir aber in der Tat die erste Gleichung (30) z. B. mit $^{49}/_{50}$ durch, d. h. ziehen wir von jedem ihrer Koeffizienten $^{2}/_{100}$ seines Betrags (absolut) ab, so lautet die erste Gleichung

$$0{,}136 v_1 - 2{,}580 v_2 + 0{,}025 v_3 - 0{,}025 v_4 + 2{,}580 v_5 - 0{,}136 v_6 + 0{,}490 v_7 - 0{,}490 v_8 - 3{,}405 = 0,$$

d. h. sie wird angesichts der Geringfügigkeit der Koeffizienten von v_3 und v_4 und der geringen Unterschiede der übrigen Koeffizienten von denen der zweiten Gleichung (30) wenig abweichend von dieser Gleichung. Und dasselbe zeigt sich natürlich dann auch in den Normalgleichungen, weil eben nun die einzelnen ab wenig von a^2 verschieden sind: zieht man in der ersten Normalgleichung (31) je $^{1}/_{25}$ ihrer Koeffizienten (absolut) ab, so entsteht die Gleichung:

$$13{,}829 \, k_1 + 13{,}274 \, k_2 + 0 \, . \, k_3 - 2{,}849 \, k_4 - 3{,}336 = 0,$$

die von der zweiten Normalgleichung sehr wenig verschieden ist. Wir haben hier eben, wie bereits gesagt, eine durchaus unstabile Auflösung vor uns. So einfach wie hier ist diese Unstabilität einer Lösung nicht immer von vornherein zu erkennen. Sie ist bei diesem Versuch a) in der Form unseres Vierecks mit fingierten Winkelmessungen begründet. Die zwei Pole: J („günstigste" 6gliedrige *Si*-Gl.) und der Diagonalenschnitt („günstigste" 8gliedrige *Si*-Gl.) geben nebeneinander nicht günstige *Si*-Gl., weil beide Gleichungen ungefähr dasselbe für die v festsetzen, wenn auch in der einen zwei v nicht vorkommen, die in der andern stehen; nur wenn eine jener Gleichungen allein verwendet wird neben 3 *Su*-Gl., ist jede von ihnen so „scharf" wie die andre, beide nebeneinander als unabhängige *Si*-Gl. aber führen nicht zu einer brauchbaren Lösung, weil die eine nicht viel anderes sagt als die andere, und dafür eine andere, wichtigere v-Bedingung nicht zu Wort kommt. Man beachte, dass die Pole dieser zwei *Si*-Bedingungsgleichungen sehr nahe beisammen liegen.

Es sei dem Leser empfohlen, neben die vier obigen Bedingungen noch eine weitere aufzunehmen; wir halten uns aber hier an vier Bedingungsgleichungen, die als unabhängige Bedingungsgleichungen notwendig sind. Als solche möge der Leser selbst die zwei sechsgliedrigen *Si*-Gl. mit J und mit K als Pol neben zwei *Su*-Gl. verwenden. Man suche auch dasjenige System der zwei *Si*- und der zwei *Su*-Gl, bei dem die Tabelle der v-Bedingungsgleichungen im ganzen am wenigsten Glieder enthält.

b) Dass eine beliebige Wahl von zwei *Si*- und zwei *Su*-Gl. zum Ziel führt, wenn man nur nicht gerade die zwei oben benützten *Si*-Gl. verwenden will, mag die folgende Auflösung zeigen, in der neben der ersten *Si*-Gl. von (30) (achtgliedrig) die sechsgliedrige mit B als Pol benützt wird. Diese lautet:

$$(32)\quad \frac{\sin \underline{2}\,.\,\sin(\underline{7}+\underline{8})\,.\,\sin \underline{4}}{\sin(\underline{3}+\underline{4})\,.\,\sin \underline{1}\,.\,\sin \underline{7}} = 1.$$

Sie enthält von den gemessenen Winkeln 5 und 6 nichts und gibt mit 7stelliger Ausrechnung (bei einfacher Einschaltung, ohne die äusserste Genauigkeit nach Schrön zu erstreben)

	log sin	Diff. 10″		log sin	Diff. 10″
2 = 5° 42′ 33″	8.997 7312	2106	3 + 4 = 168° 34′ 51″	9.296 6329	− 1043
7 + 8 = 55 30 58	9.916 0776	145	1 = 62 14 30	9.946 9040	111
4 = 84 17 25	9.997 8400	21	7 = 27 45 28	9 668 1386	400
Z	8.911 6488		N	8.911 6755	

log Z − log N = − 267 Einheiten$_7$; oder in Einh.$_6$:

$$21{,}06\,v_2 + 1{,}45\,v_7 + 1{,}45\,v_8, + 0{,}21\,v_4 + 10{,}43\,v_3 + 10{,}43\,v_4 - 1{,}11\,v_1 - 4{,}00\,v_7 - 26{,}7 = 0,$$

oder endlich geordnet und mit **8** durchdividiert:

$$(33)\quad -0{,}139\,v_1 + 2{,}633\,v_2 + 1{,}304\,v_3 + 1{,}330\,v_4 - 0{,}319\,v_7 + 0{,}181\,v_8 - 3{,}338 = 0.$$

Die Zusammenstellung der vier Bedingungsgleichungen der v gibt damit, wenn als die zwei letzten dieselben *Su*-Gl. wie in (30) genommen werden:

(34)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	k
0,139	−2,633	+0,026	−0,026	+2,633	−0,139	+0,500	−0,500	−3,475	+0,6012
−0,139	+2,633	+1,304	+1,330	.	.	−0,319	+0,181	−3,338	+1,2511
1	.	.	.	.	1	1	1	−3,000	+1,4811
1	1	1	.	.	.	.	1	−1,000	−1,2890

Die Normalgleichungen werden

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{lllll} 14{,}405\;k_1 & -\,7{,}2025\,.\,k_2 & +\,0\,.\,k_3 & -\,2{,}968\,.\,k_4 & -\,3{,}475 = 0 \\ & \quad 10{,}556 & -\,0{,}277 & +\,3{,}979 & -\,3{,}338 \\ & & \quad \underline{4} & \quad 2 & -\,3{,}000 \\ & & & \quad \underline{4} & -\,1{,}000 \end{array}\right.$$

und ihre Auflösung gibt

$$k_4 = -\,1{,}2890,\quad k_3 = +\,1{,}4811,\quad k_2 = +\,1{,}2511,\quad k_1 = +\,0{,}6012,$$

wie oben in das Schema (34) bereits eingeschrieben. Man erhält damit

$$(36)\qquad -[w\,k] = +\,9{,}419$$

und das folgende System der v:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = +\,0'',1021 \\ v_2 = +\,0\;,4222 \\ v_3 = +\,0\;,3580 \\ v_4 = +\,1\;,6483 \\ v_5 = +\,1\;,5830 \\ v_6 = +\,1\;,3975 \\ v_7 = +\,1\;,3826 \\ v_8 = +\,0\;,1179 \end{array}\right.$$

deren $[v^2] = 9{,}419$, übereinstimmend mit (36) wird.

Es stimmen also die $^1/_{100}{}''$ noch durchaus mit dem System (16) bei der Auflösung **8.** 1 überein, wenn in beiden v-Systemen auf 0″,01 abgerundet wird (mit Ausnahme von v_4, wo der Unterschied mit 0″,0055 am grössten ist); die $[v^2]$ ist gegen **8.** 1 unbedeutend vergrössert, $m_1 = \sqrt{\frac{9{,}419}{4}} = \pm\,1'',535$ gegen dort 1″,531.

12. Ausgleichung des Vierecks Fig. 8 nach der Möglichkeit c): 1 *Su*-Gl. und 3 *Si*-Gl. Bei dieser letzten Möglichkeit sei dem Leser überlassen, selbst den Versuch durchzuführen

a) die folgenden drei *Si*-Gl. zu wählen: die zwei ersten *Si*-Gl. von (34) n **11.** und als dritte dazu die achtgliedrige *Si*-Gl.

$$(38)\quad \frac{\sin(\underline{7}+\underline{8})\,.\,\sin(180^0-\underline{4})\,.\,\sin(180^0-\underline{1}-\underline{2})\,.\,\sin\underline{5}}{\sin(\underline{5}+\underline{6})\,.\,\sin\underline{8}\,.\,\sin(180^0-\underline{3}-\underline{4})\,.\,\sin(180^0-\underline{1})} = 1,$$

die der Leser