10. Neue Auflösung 8. mit dem Koll'schen Pol. Bevor wir zur Möglichkeit b) übergehen, zwei *Su*- und zwei *Si*-Gl., ist nochmals die 2. Auflösung **8.** vorzunehmen, wie bereits oben angedeutet ist. Sie ist nämlich a. a. O. nur durch eine kleine Rechnungs-Unsicherheit so ungünstig geworden, dass der scheinbar gar zu grosse Widerspruch von 22 Einh.$_7$ in der einen *Si*-Gl. nach der Ausgleichung übrig blieb: es soll bei jener Anwendung des (für die Schärfe der Rechnung ungünstigen) Koll'schen Pols in der Aufstellung der *Si*-Gl. (Jordan a. a. O., Z. 22 von oben) heissen

$$(23) \quad \log\sin 4 = \log\sin 84^\circ\ 17'\ 25'' = 9.997\,8400 \text{ statt } 9.997\,8399.$$

Dies lässt sich freilich z. B. aus der Bruhns'schen 7stelligen Tafel nicht erkennen, wo man nur bei Abrundung des Schaltteils für 5″,00 gleich $\frac{1}{2} \cdot 21$ Einh.$_7$ = 10,5 Einh.$_7$ auf 11 die Zahl . . . 8400, bei Abrundung auf 10 aber . . . 8399 erhält. Aus der Schrön'schen Tafel (oder einer ähnlich eingerichteten) dagegen, (selbstverständlich noch einfacher aus einer 8stelligen Tafel, wie sie ja jetzt ebenfalls zu Gebot steht, die wir aber hier ausschliessen wollen), sieht man sofort, dass es bei 7stelliger Abrundung . . . 8400 heissen muss: in $\log\sin 84^\circ\ 17'\ 20'' = 9.997\,8389$ ist die letzte Ziffer nicht unterstrichen, d. h. etwas grösser als 9 zu denken. An sich ist also der gewöhnlichen 7stelligen Rechnung a. a. O., z. B. mit den Bruhns'schen Tafeln, kein Vorwurf zu machen, wenn auch tatsächlich in der Ausrechnung der Gleichung (K) log Z etwas zu klein und unglücklicherweise gleichzeitig log N ziemlich zu gross geworden ist. Rechnen wir nämlich etwas schärfer, aber immer noch 7stellig, mit Schrön bei Beachtung der —-Striche der letzten Ziffer und mit Anwendung der schärfern, nach Anblick der vorhergehenden und der folgenden Zahlen geschätzten 10″-Differenz, so ergeben sich, ohne jede nennenswerte Mehrarbeit, nachstehende Werte für die Koll'sche *Si*-Gl., wobei nur noch daran zu erinnern ist, dass die Ziffern der 8. Dezimale nicht scharf sind, sondern nur zur Sicherung der 7. Dez. mitgeführt werden:

			Diff. 10″			Diff. 10″
(24)	sin (1 + 2)	9.967 0150.8	85.2	sin 3	9.997 8401.8	21.0
	sin 4	9.997 8399.7	21.0	sin (5 + 6)	9.967 0133.8	85.2
	sin 6	9.946 9028.7	110.9	sin 1	9.946 9039.8	110.9
	Z	9.911 7579.2		N	9.911 7575.4	

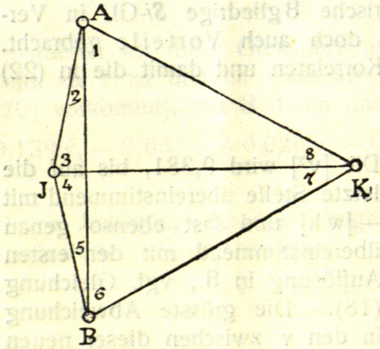

Fig. 8.

Es ist also für (schärfer geführte, aber immer noch) 7stellige Rechnung ganz sicher, dass

$$\log Z - \log N = w = +\mathbf{4} \text{ Einh.}_7$$

zu setzen ist (in + 3.8 ist wie bemerkt die Dezimale etwas unsicher); Jordan hat a. a. O.

$$\log Z = 9.911\,7579, \ \log N = 9.911\,7576, \quad w = +3 \text{ Einh.}_7.$$

Es ist nicht ohne Interesse, mit der vorstehenden schärfern 7stelligen Rechnung die mit einer noch genauern Log.-Tafel zu vergleichen; es mag dazu nicht eine 8stellige, sondern der 10stellige Thesaurus von Vega gewählt sein (italienische Neuausgabe) trotz der unbequemern Einschaltung mit 2ten Differenzen. Man erhält folgende Zahlen:

$\sin(1+2) = \sin 67°\ 57'\ 03''$	9.967 0151.032	
$\sin 4 \ \ = \sin 84\ \ 17\ \ 25$	9.997 8399.731	
$\sin 6 \ \ = \sin 62\ \ 14\ \ 29$	9.946 9028.570	
Z	9.911 7579.333	(25)
$\sin 3 \ \ = \sin 84°\ 17'\ 26''$	9.997 8401.836	
$\sin(5+6) = \sin 67\ \ 57\ \ 01$	9.967 0133.976	
$\sin 1 \ \ = \sin 62\ \ 14\ \ 30$	9.946 9039.652	
N	9.911 7575.464	

das Absolutglied der *Si*-Gl. ist also $w = +3.869$ Einh.$_7$ (mit hier unsicherer 3. Stelle nach dem Komma), oder für 7stell. Rechn. $w = +4$, für 8stell. Rechn. $w = +39$, für 9stell. Rechn. $w = +387$, je mit Sicherheit für die letzte Ziffer. (Oben nach (24) ist also zufällig bei $+3.8$ auch die Dezimale fast richtig geworden.) Zur Einschaltungsrechnung bei (25) ist vielleicht die Bemerkung nicht überflüssig, dass man hier, wo es sich durchaus nur um Einschaltung für ganze $''$ (ganze Zehntel des Tafelintervalls) handelt, gar kein besondres Rechenhilfsmittel braucht, indem man die der 1. Differenz entsprechenden Schaltteile am besten durch direktes Ausmultiplizieren rechnet. Als Beispiel diene $\log\sin 67°\ 57'\ 03''$; die Tafelzahlen sind die unten links stehenden, somit zu rechnen wie rechts:

Tafel-Sinus, letzte 7 Ziffern			
67° 57′ 00″	0125 448		
		85 276	
10	0210 724		−12
		85 264	
20	0295 988		−11
		85 253	
30	0381 241		

Schaltteile in Einh.$_{10}$:

$$0{,}3 \,.\, 85276 + \frac{0{,}3 \,.\, -0{,}7}{1 \,.\, 2} \,.\, -12$$

$$= 25582{,}8 + 1{,}3 = \begin{array}{r} 25\,584 \\ 0125\,448 \\ \hline 0151\,032 \end{array}$$

(Es mag auch noch beigefügt sein, dass für die 1. Auflösung **8**, mit dem Jordanschen Pol, die 10stelligen Zahlen werden:

$$\log Z = 8.632\,8637.682,\ \log N = 8.632\,8911.247,\ w = -273.6 \text{ Einh.}_7,$$

übereinstimmend mit Jordan, während hier eine Abweichung um 1 oder selbst mehrere Einheiten der 7. Dezimalen auch formell keine Bedeutung hätte).

Lassen wir nun also im übrigen die Jordan'schen Zahlen unverändert und nehmen nur das gemäss (24) in $w = +4$ verbesserte Absolutglied der *Si*-Gl. für den Koll'schen Pol, so lautet diese *Si*-Gl. für Einheiten der 7. Dezimalstelle:

$$(26) \qquad -2{,}4\,v_1 + 8{,}6\,v_2 - 2{,}1\,v_3 + 2{,}1\,v_4 - 8{,}6\,v_5 + 2{,}4\,v_6 + \mathbf{4} = 0;$$

etwas richtiger würden die Koeffizienten der v (nach den verbesserten bei (24) angeschriebenen Differenzen) diese werden:

$$(27) \quad -2{,}6\,v_1 + 8{,}5\,v_2 - 2{,}1\,v_3 + 2{,}1\,v_4 - 8{,}5\,v_5 + 2{,}6\,v_6 + 4 = 0, \text{ oder } +3{,}9 = 0.$$

Lassen wir, um zu zeigen dass in manchen Fällen die Durchdivision der *Si*-Gl. mit bestimmter Zahl (wie bei Jordan, a. a. O. S. 265, um auf Einheiten der 6. Dezimalstelle zu bringen; bei (26) wäre Division nur mit 4 besser als die mit 10) wenig Vorteil bietet, die Gleichung (26) ganz unverändert in Einh.$_7$ stehen, und nehmen wir die drei *Su*-Gl. von Jordan a. a. O. hinzu, so ergibt sich folgende Zusammenstellung der v-Bedingungsgleichungen:

(28)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	k
−2,4	+8,6	−2,1	+2,1	−8,6	+2,4	.	.	+4	+0,00704
1	.	.	.	.	1	1	1	−3	−0,2500
1	1	1	.	.	.	.	1	−1	+0,3678
.	.	.	1	1	1	1	.	−6	+1,6322

Die entsprechenden Normalgleichungen der Korrelaten werden (vgl. die Gleichungen (21) bei Jordan-Eggert, S. 267)

$$\begin{array}{rrrrl} \underline{168{,}3}\, k_1 & + 0\,.\, k_2 & + 4{,}10\, k_3 & - 4{,}10\, k_4 & + 4{,}00 = 0 \\ 0 & \underline{4} & + 2 & + 2 & - 3{,}00 \\ + 4{,}10 & + 2 & \underline{4} & 0 & - 1{,}00 \\ - 4{,}10 & + 2 & 0 & \underline{4} & - 6{,}00; \end{array}$$

ihre Auflösung braucht nicht mit Benützung des Gauss'schen Algorithmus (erst k_4 und dann mit Rückwärtsrechnung aus den vorhergehenden Gleichungen bis zu k_1) gemacht zu werden, sie können vielmehr einfacher und sogar fast vollständig im Kopf aufgelöst werden, worauf ihr besonderer Bau hinweist: von der Summe der 3. und 4. Gleichung die 2. abgezogen gibt $2(k_3 + k_4) - 4 = 0$, d. h. $k_3 + k_4 = 2{,}0000$, womit aus der zweiten folgt $k_2 = -\frac{1}{4} = -0{,}2500$. Die Differenz der 3. und 4. Gleichung wird ferner $8{,}20\, k_1 + 4(k_3 - k_4) + 5{,}00 = 0$; muliplizert man diese Gleichung mit $^{41}/_{40}$ durch, d. h. erhöht die Koeffizienten alle um $^1/_{40}$ ihres Betrags, so lautet sie $8{,}405\, k_1 + 4{,}10(k_3 - k_4) + 5{,}125 = 0$. Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so erhält man die Gleichung für k_1 $159{,}9\, k_1 - 1{,}125 = 0$, woraus k_1 sich ergibt und ebenso $(k_3 - k_4)$; da auch $(k_3 + k_4)$ schon bekannt ist, so ist die Auflösung in kürzester Zeit zu beenden. Die Werte der k sind oben in (28) in der letzten Spalte bereits neben die einzelnen v-Bedingungsgleichungen gesetzt.

Es ist hier noch Anlass gegeben, die soeben aufgelösten Normalgleichungen mit denen der Auflösung **9.** zu vergleichen. Trotz der gegen (21) weit weniger symmetrischen Anordnung der in (28) auftretenden v werden bei unserer soeben ausgeführten Auflösung die Normalgleichungen dem Anblick nach kaum wesentlich unbequemer für die Rechnung als dort und da man bei (21) nach der Bestimmung der Korrelaten k jedes der v aus drei Summanden zusammensetzen muss, während dies bei (28) nur für zwei der v zutrifft und die andern sechs aus je zwei Summanden sich ergeben, so scheint der Unterschied zwischen beiden Auflösungen in Beziehung auf die Bequemlichkeit der Rechnung ganz zu verschwinden. Indessen ist die Auflösung der aus (21) gebildeten Normalgleichungen doch noch etwas bequemer als die der Normalgleichungen aus (28), weil dort der Wert einer Korrelate sofort angeschrieben werden kann und hier nur der zufällige Umstand günstig wirkt, dass, wie soeben benützt, 4,10 eine für die Auflösung sehr bequeme Zahl ist. Im ganzen bleibt doch die in **9.** gemachte Bemerkung bestehen, nach der die möglichst symmetrische Form der v-Bedingungsgleichungen nicht nur eine (ganz unwesentliche) Vermehrung der Rechenarbeit bringt, sondern auch eine (nicht unwesentliche) Vereinfachung der Auflösung der Normalgleichungen und dass im ganzen dieser Vorteil jenen Nachteil bei der Vierecksausgleichung etwas überwiegt.

Bildet man gemäss (28) mit den gefundenen k-Werten die einzelnen v, so erhält man das nebenstehende System, dessen [v v], übereinstimmend mit $-$[w k], auch fast nicht nachweisbar über die erste Zahl (18) und die aus (22) folgende Zahl sich erhebt, nämlich wird

$$[v\,v] = 9{,}383 \text{ [gegen 9,404 bei der zweiten Zahl (18)].}$$

$$(29)\quad \begin{cases} v_1 = +\,0'',1008 \\ v_2 = +\,0\;\,,4286 \\ v_3 = +\,0\;\,,3530 \\ v_4 = +\,1\;\,,6470 \\ v_5 = +\,1\;\,,5714 \\ v_6 = +\,1\;\,,3992 \\ v_7 = +\,1\;\,,3822 \\ v_8 = +\,0\;\,,1178 \end{cases}$$

Die grösste Abweichung in den v, die zwischen den Auflösungen von Jordan mit Verwendung der *Si*-Gl. J oder K (**8.** 1 und **8.** 2) 0'',057 betrug (bei v_2 und v_5; der nächst grösste Unterschied von 0'',025 bei v_1 und v_6), vgl. (16) und (17), ist hier zwischen **10.** und **8.** 1. auf weniger als $^1/_{100}$'' (0'',0095 bei v_2 und v_5, den gefährlichen spitzen Winkeln) gesunken (es folgt 0'',0042 bei v_3 und v_4). Der Leser bilde ferner selbst die Dreiecksschlüsse, er wird durchaus gutes Stimmen finden. Sehen wir aber hier vor allem noch, wie genau die *Si*-Gl. mit dem Pol J (die gefährlichen spitzen Winkel enthaltend) erfüllt ist, die bei Jordan's Auflösung **8.** 2 mit dem Koll'schen Pol 22 Einh.$_7$ Widerspruch nach der Auflösung übrig gelassen hatte. Wir finden bei 7stelliger schärferer Rechnung mit Hilfe von Schrön (Beachtung der — Striche und Einschaltung mit Hilfe der genau abgelesenen Differenzen für 10″), für die freilich die 0″,0001 keine Bedeutung mehr haben, die nebenstehenden Zahlen:

sin ($\underline{1}+\underline{2}$) = sin 67° 57′ 3″,5294	. . . 7 0155.4
sin $\overline{7}$ = sin 27 45 29 ,3822	. . . 8 1441.1
sin $\overline{\underline{5}}$ = sin 5 42 33 ,5714	. . . 7 7431.9
Z	8.632 9028.4
sin 8 = sin 27° 45′ 30″,1178	. . . 8 1470.5
sin ($\overline{\underline{5}}+\underline{6}$) = sin 67 57 3 ,9706	. . . 7 0159.1
sin $\underline{2}$ = sin 5 42 33 ,4286	. . . 7 7401.8
N	8.632 9031.4

Es bleibt also auch nach der Berichtigung der Ausgleichung unter Anwendung der Koll'schen *Si*-Bedingungsgleichung in der Tat in der empfindlichsten *Si*-Gl., der Jordan'schen, ein Widerspruch von 3 Einh.$_7$ nach der Ausgleichung bestehen; nach wie vor ist die Schärfe der Rechnung mit Benützung des Jordan'schen Pols für die *Si*-Gl. grösser als bei der *Si*-Gl. mit dem Koll'schen Pol, wenn der Unterschied auch nicht so gross ist wie nach der Jordan'schen Darstellung. Gerade die ausserordentliche Empfindlichkeit dieser neuen Ausgleichung **10.** gegen die kleinste Unsicherheit im Absolutglied der angewandten *Si*-Gl. [erste Gleichung (28)] zeigt vielleicht deutlicher als andre Wege die grössere Zweckmässigkeit der Jordan'schen *Si*-Gl Es ist dabei zunächst nicht wichtig, dass sachlich die Unterschiede in den gefundenen v-Systemen (16) und (29) ganz ohne Bedeutung sind. Man könnte natürlich, worauf bereits Jordan a a. O. S. 268 hinweist, die Koll'sche *Si*-Bedingung und damit diese ganze Ausgleichung sehr verschärfen, wenn jene Gleichung 8- oder gar 10stellig aufgestellt würde. Aber man will und soll bei einer trigonometrischen Figur, in der die Widersprüche in der Summe der Winkel der einzelnen Dreiecke bis zu 6″ gehen und in der der m. F. eines gemessenen Winkels $1^1/_2$″ beträgt, nicht 8- bis 10stellig rechnen müssen, schon 7stellige Rechnung ist hier eigentlich übertrieben genau. Eben deshalb kommt es aber auch, vom praktischen, nicht vom theoretischen Standpunkt aus, bereits auf die 0″,01 in den v durchaus nicht an, schon die $^1/_{10}$″ geht fast über die hier vorhandene praktische Notwendigkeit hinaus und es ist also praktisch gleichgültig, ob die v bei zwei verschiedenen Ausgleichungen dieses Vierecks überall auf die $^1/_{10}$″ stimmen oder nicht. So ist auch sachlich der Widerspruch von 3 Einh.$_7$ in der vorstehenden *Si*-Gl.-Probe nach der Ausgleichung vollständig ohne Belang. Man muss sich erinnern, dass in den Winkeln 5 und 2, die in dieser *Si*-Gl. vorkommen, einer Aenderung des Winkels um 1″ eine log sin-Aenderung von rund 210 Einh.$_7$ entspricht und der sich zeigende Widerspruch von 3 Einh.$_7$ demnach durch $^1/_{70}$″ Fehler in dem einen der Winkel $\underline{5}$ oder $\underline{2}$ bereits erklärt wäre, während sachlich und praktisch das 10fache dieses Betrags kaum von Bedeutung ist. Selbst die 22 Einh.$_7$ Widerspruch bei der Jordan'schen Auflösung in der *Si*-Gl mit J als Pol nach der Anwendung der Koll'schen *Si*-Gl. bedingen nur rund $^1/_{10}$″ Aenderung in einem der Winkel $\underline{2}$ oder $\underline{5}$ und wären also ohne praktisches Bedenken, auch wenn sie der neuen Auflösung mit dem verbesserten Absolutglied der *Si*-Gl. entsprächen. Trotz alledem ist natürlich die Wahl des Koll'schen Pols nicht zu empfehlen, sondern die Wahl des Jordan'schen Pols zweckmässiger, weil mit der letzten durchaus nicht etwa eine Mehrarbeit im Vergleich mit der ersten verbunden ist, wenn man nicht die etwas sorgfältiger und mit mehr Ziffern zu machende Einschaltung im log sin kleiner Winkel als solche ansehen will. Es soll nur vor der Vorstellung gewarnt werden, als ob das

„Schärfemass“-Verhältnis für die *Si*-Gl., das sich im vorliegenden Fall bei J : K als Polen wie 19 : 1 stellt (während das Schärfemass für A oder B als Pol in demselben Verhältnis $9^1/_2$ würde) nun auch ein Mass für die Schärfe der Auflösung überhaupt abgeben würde. Bei A oder B als Pol für eine *Si*-Gl. neben drei *Su*-Gl. zeigt sich schon keinerlei Einbusse an Schärfe der ganzen Auflösung (d. h. in den v) im Vergleich mit J als Pol der *Si*-Gl. Man soll nur (und diese wichtige Regel gilt nicht nur hier, sondern ganz allgemein in den Dreiecksnetzen) für die endgültige Rechnung der Seitenlängen nach der Ausgleichung, für die ja im allgemeinen überall verschiedene Wege zur Verfügung stehen, nicht die ausgeglichenen sehr spitzen Winkel verwenden, deren Einführung in die *Si*-Gl. für deren Rechenschärfe günstig war, also z. B. in Fig. 8 für die endgültige Rechnung der Seitenlängen das Dreieck AJB gar nicht verwenden. Zeigen sich noch kleine Widersprüche in den Log. der Seiten, wenn diese auf verschiedenen Wegen zur Probe berechnet werden, so ist solange auf diese kleinen Beträge kein Gewicht zu legen, als sie durch sehr spitze Winkel entstanden sind; ein Mass zur Beurteilung ist ja überall sofort durch die Diff. 10″ oder Diff. 1″ gegeben.

11. Ausgleichung des Vierecks Fig. 8 nach der Möglichkeit b): zwei *Su*-Gl. und zwei *Si*-Gl.

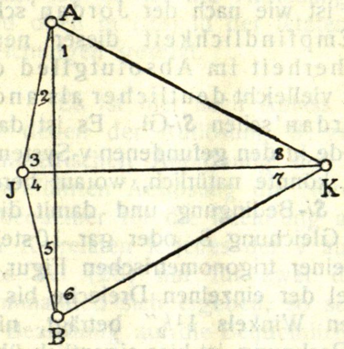

Fig. 8.

a) Versuchen wir eine Ausgleichung derart, dass wir als Bedingungsgleichungen im ganzen anwenden die in 9. benützte 8gliedrige *Si*-Gl. als „günstigste“ *Si*-Bedingung überhaupt (obwohl der Unterschied ihrer Schärfe gegen die sogleich zu nennende Jordan'sche *Si*-Gl., wie schon erwähnt hier ganz gering ist), in linearer Form beide in der ersten Gl. (21) vorhanden, ferner die „günstigste“ sechsgliedrige *Si*-Gl., nämlich die von Jordan, endlich als die zwei noch notwendigen *Su*-Gl. die von den Dreiecken ABK und AJK gelieferten Gleichungen. Ich lasse dabei die Jordan'sche *Si*-Gl. ohne Aenderung der Zahlen, wie sie als erste der Bedingungsgleichungen der v a. a. O. S. 266 steht obwohl kleine Aenderungen angezeigt wären, wie oben in 8. 1. nachgewiesen ist. Man erhält damit folgende Zusammenstellung der v-Gleichungen:

(30)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	k
0,139	−2,633	+0,026	−0,026	+2,633	0,139	+0,500	0,500	−3,475	
0,108	−2,525	.	.	+2,525	−0,108	+0,500	0,500	−3,425	
1	.	.	.	.	1	1	1	−3,000	
1	1	1	.	.	.	.	1	−1,000	

Bilden wir mit der angegebenen Reihenfolge der v-Bedingungsgleichungen die Normalgleichungen der k, so werden diese:

$$(31)\quad \begin{cases} 14{,}405\ k_1 + 13{,}827\ k_2 + 0\,.\,k_3 - 2{,}968\ k_4 - 3{,}475 = 0 \\ \underline{13{,}827}\ k_1 + \underline{13{,}275}\ k_2 + 0\,.\,k_3 - 2{,}917\ k_4 - 3{,}425 = 0 \\ 0\,.\,k_1 + \quad 0\,.\,k_2 + \underline{4}\,.\,k_3 + \quad 2\,.\,k_4 - 3{,}000 = 0 \\ -2{,}968\ k_1 - \ 2{,}917\ k_2 + \underline{2}\,.\,k_3 + \quad 4\,.\,k_4 - 1{,}000 = 0. \end{cases}$$

Die Reihenfolge dieser Gleichungen verspricht wenig Gutes für die Auflösung, schon weil $\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{13{,}827}{14{,}405}$ zu gross ist für günstige Eliminationsrechnung;