etwa $5^\circ\,42^1/_2{}'$ gross), die in der 6gliedr. *Si*-Gl. mit J als Pol vorkommen, bei einer Diff. $\log\sin_{10''} = 2106$ Einh.$_7$, um nur $0'',01$ den log sin um je 21 Einh. der 7. Dez. ändert, so ist angesichts der Bemerkung nach (15) der bestehende Widerspruch von 22 Einh.$_7$ als sachlich gleichgültig zu bezeichnen. Formell aber ist allerdings die erste Ausgleichung mit den kleinen Winkeln in der *Si*-Gl. durchaus im Vorteil gegen die zweite. Und diese Ueberlegenheit bleibt erhalten, wenn auch der Unterschied überhaupt nicht so gross ist, als bei Jordan berechnet wird, weil sich in der zweiten Ausgleichung noch eine kleine Unrichtigkeit findet, auf die unten (s. **10.**) näher eingegangen wird und deren Hebung den Unterschied zwischen der ersten und zweiten Ausgleichung stark vermindert. Jedenfalls sei davor gewarnt, die „Schärfemasse" für die *Si*-Gl. als Wertigkeitszahlen für die verschiedenen Ausgleichungen des ganzen Vierecks überhaupt ansehen zu wollen.

9. Weitere Ausgleichung des in 8. angegebenen Vierecks, wie in **8.** nach der Möglichkeit a): drei *Su*-Gl. und eine *Si*-Gl. Diese weitere Auflösung füge ich hier ein mit Rücksicht auf eine Bemerkung von Helmert. Jordan hat darauf hingewiesen, dass man das „Günstigkeitsmass" einer *Si*-Gl. oft noch etwas erhöhen kann, nämlich z. B. bei konvexen Vierecken, wenn man statt der 6gliedrigen *Si*-Gl. beim Viereck eine 8gliedrige *Si*-Gl. einführt: während das Schärfemass jeder der 6gliedrigen Gleichungen (I) bis (IV) gegeben ist durch die Dreiecksfläche, die der als Pol der Gleichung benützten Ecke „gegenüberliegt" (vgl. oben bei **3.** und **4**), hat die achtgliedrige Gl. (V) im konvexen Viereck Fig. 3, 4 als Schärfemass die Vierecksfläche, also ein grösseres Mass als jede der 6gliedrigen Gleichungen. Helmert bemerkt dazu (Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl., Leipzig 1907, S. 521): „praktisch hat dieses wenig Bedeutung, da die Schärfe höchstens verdoppelt wird gegenüber dem besten dreistrahligen Zentralsystem; ausserdem ist der Nachteil, dass statt sechs nun acht Sinus aufzuschlagen sind und in die Ausgleichung mehr Glieder eingehen" (bei Winkeln 8 gegen 6, bei Richtungen 12 gegen 9 Glieder). Diese Bemerkung ist an sich gewiss zutreffend, da eine gute 6gliedrige *Si*-Gl. bequemer für die Auflösung ist als eine 8gliedrige und ihre Schärfe in jedem Fall hinreicht (bei den einzelnen 6gliedrigen *Si*-Gl. kann sowohl im konvexen wie im nichtkonvexen Viereck das Verhältnis der „Schärfemasse" zwischen zweien davon jeden Wert bis zu ∞ haben, während, wie Helmert bemerkt, das Schärfeverhältnis zwischen der günstigsten 6gliedrigen und der 8gliedrigen Gl. (V) im konvexen Viereck nur bis 1 : 2 gehen kann); in unserem Falle der Fig. 8 wird z. B. ohnehin mit der **8**gliedrigen *Si*-Gl. [vgl. oben (V)]:

$$(\log\sin\underline{1} + \log\sin\underline{3} + \log\sin\underline{5} + \log\sin\underline{7}) - (\log\sin\underline{2} + \log\sin\underline{4} + \log\sin\underline{6} + \log\sin\underline{8}) = 0 \tag{19}$$

gegen die **6**gliedrige *Si*-Gl. mit J als Pol überhaupt nichts gewonnen, weil die Flächen des Dreiecks ABK und des Vierecks AJBK sich sehr wenig unterscheiden (Verhältnis beider ist 19 : 20). Es ist jedoch auch noch zu bedenken, dass die Gleichung (19) (= (V) von oben) die am meisten symmetrische Form einer *Si*-Gl. im konvexen Viereck vorstellt; wie im nichtkonvexen Viereck Fig. 6 jedermann ohne Besinnen zu der (dort **6**gliedrigen) Gleichung mit D als Pol als der sich „am natürlichsten" darbietenden, nämlich die am meisten symmetrische v-Gleichung liefernden greift (eine Wahl, die zudem noch durch das grösste Schärfemass = Dreiecksfläche ABC daselbst bestätigt wird), so kann (19) = (V) in

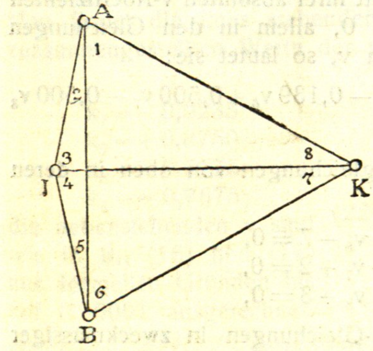

Fig. 8.

gewissem Sinn als die „natürlichste“ *Si*-Gl. des konvexen Vierecks gelten und es ist zu erwarten, dass die kleine Mehrarbeit, die ihre Anwendung bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen und der Normalgleichungen verursacht (und ebenso die kleine Vermehrung der Unsicherheit im Absolutglied der *Si*-Gl., die durch algebraische Addition von 8 statt 6 Logarithmen entsteht), aufgewogen oder überwogen wird durch den Vorteil e i n f a c h e r e r A u f l ö s u n g der Normalgleichungen, falls die übrigen Bedingungsgleichungen (*Su*-Gl.) in ähnlich symmetrischer Form aufgestellt werden können. In dieser Erwartung bedarf also die H e l m e r t'sche Bemerkung an unserem Viereck weiterer Untersuchung, die sich durch Vergleichung der Auflösungen **9.** und **10.** darbieten wird.

Nehmen wir für jetzt zu der vorstehenden einzigen vollständig symmetrischen *Si*-Gl. (19) als die drei *Su*-Gl., um weiter ebenfalls symmetrisch zu verfahren, die drei V i e r e c k s - *Su*-Gl. (vgl. oben **2.**) hinzu, nämlich:

$$(20)\quad \begin{cases} \underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\underline{4}+\underline{5}+\underline{6}+\underline{7}+\underline{8}-360^\circ=0. \\ \underline{2}+\underline{3}-\underline{6}-\underline{7} \qquad\qquad\qquad\qquad =0. \\ \underline{1}+\underline{8}-\underline{4}-\underline{5} \qquad\qquad\qquad\qquad =0, \end{cases}$$
so ergibt sich mit

(19) und (20) die sogleich folgende Uebersicht (21) der linearen v-Gleichungen, der nur noch die 7stellige Ausrechnung für die Linearmachung von (19) vorangestellt werden mag; zu dieser sei bemerkt, dass auch hier o h n e Beachtung der — Striche bei S c h r ö n und mit Verwendung der besten g a n z e n 10″ Diff.-Zahl bei der Einschaltung und für die v-Koeffizienten gerechnet ist (also z. B. 111 statt 110 bei sin 1 und bei sin 6), ganz wie bei den zwei in **8.** angegebenen J o r d a n'schen Rechnungen.

		Diff. 10″			Diff. 10″
sin 1	9.946 9040	111	sin 2	8.997 7312	2106
sin 3	9.997 8402	21	sin 4	9.997 8400	21
sin 5	8.997 7101	2106	sin 6	9.946 9029	111
sin 7	9.668 1386	400	sin 8	9 668 1466	400
Z	8.610 5929		N	8.610 6207	

Z — N = — 278 Einh. der 7. Dezimale.

In Einheiten der 6. Dez. für die Koeffizienten (die Einheit für die v ist wie stets die ″) gibt dies

$$1{,}11\, v_1 + 0{,}21\, v_3 + 21{,}06\, v_5 + 4{,}00\, v_7 - 21{,}06\, v_2 - 0{,}21\, v_4 - 1{,}11\, v_6 - 4{,}00\, v_8 - 27{,}8 = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung, um den Durchschnitt ihrer absoluten v-Koeffizienten nahe zu 1 zu bringen (was als Koeffizient, neben 0, allein in den Gleichungen (20) vorkommt), mit **8** durch und ordnen nach den v, so lautet sie:

$$0{,}139\, v_1 - 2{,}633\, v_2 + 0{,}026\, v_3 - 0{,}026\, v_4 + 2{,}633\, v_5 - 0{,}139\, v_6 + 0{,}500\, v_7 - 0{,}500\, v_8 - 3{,}475 = 0.$$

Durch Anfügung der drei übrigen (*Su*)-Bedingungsgleichungen von oben in deren „reduzierter“ Form, nämlich

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 - 7 &= 0, \\ v_2 + v_3 - v_6 - v_7 + 2 &= 0, \\ v_1 - v_4 - v_5 + v_8 + 3 &= 0, \end{aligned}$$

ergibt sich die folgende Zusammenstellung der v-Gleichungen in zweckmässiger Ordnung:

(21)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
0,139	2,633	+0,026	−0,026	+2,633	−0,139	+0,500	−0,500	−3,475
1	1	1	1	1	1	1	1	−7,00
.	1	1	.	.	−1	−1	.	+2,00
1	.	.	−1	−1	.	.	1	+3,00

In dieser am meisten symmetrischen Form der vier Bedingungsgleichungen der Möglichkeit a) zeigt sich sofort, dass $[ab] = 0$ ist (da alle $b = 1$ sind und $[a] = 0$ ist, dieses allerdings nur zufällig wegen der fast genauen Uebereinstimmung der gemessenen Winkel 1, 6; 2, 5; 3, 4; 7, 8), ferner ist aber auch $[bc] = 0$, $[bd] = 0$, $[cd] = 0$. Die Normalgleichungen erhalten also für die Auflösung sehr bequeme Koeffizienten; sie werden nämlich, wenn wir ausnahmsweise alle Glieder der Normalgleichungen, auch die von selbst sich verstehenden neben den unbedingt notwendigen anschreiben (— was hier geschehen mag, um an dem Beispiel zu zeigen, dass dieses vollständige Anschreiben, das den Ueberblick lückenhafter Gleichungen etwas fördert, gelegentlich zu empfehlen ist, wenn Normalgleichungen nicht nach dem Gauss'schen Algorithmus aufgelöst werden sollen, während für diese Auflösung die Beschränkung auf das Diagonalglied und die rechts davon stehenden Koeffizienten nicht nur ausreicht, sondern übersichtlicher ist —):

$$
\begin{aligned}
14{,}405 \,.\, k_1 + 0 \,.\, k_2 - 2{,}968 \,.\, k_3 - 2{,}968 \,.\, k_4 - 3{,}475 &= 0. \\
0 \,.\, k_1 + \underline{8} \,.\, k_2 + 0 \,.\, k_3 + 0 \,.\, k_4 - 7{,}00 &= 0. \\
-2{,}968 \,.\, k_1 + 0 \,.\, k_2 + \underline{4} \,.\, k_3 + 0 \,.\, k_4 + 2{,}00 &= 0. \\
-2{,}968 \,.\, k_1 + 0 \,,\, k_2 + 0 \,.\, k_3 + \underline{4} \,.\, k_4 + 3{,}00 &= 0.
\end{aligned}
$$

Man sieht sofort, dass überhaupt nur ein System von drei Korrelaten-Normalgleichungen aufzulösen ist, indem man für die zweite Korrelate k_2 aus der zweiten Normalgleichung unmittelbar erhält $k_2 = +\frac{7}{8} = +0{,}875$; und die Auflösung der drei andern Gleichungen ist deshalb sehr einfach, weil man nach der 3. und 4. Gleichung $(k_3 + k_4)$ in k_1 ausdrücken und sodann 2,968 $(k_3 + k_4)$ in die 1. Gleichung einsetzen kann, womit sich aus ihr k_1 und damit also auch $(k_3 + k_4)$ ergibt. Da man ausserdem durch Subtraktion der 3. und 4. Gleichung $k_3 - k_4 = +\frac{1}{4} = +0{,}2500$ kennt, so ist die ganze Rechnung zur Auflösung der Normalgleichungen (Bestimmung der Korrelaten) das Werk von 2 Minuten, auf ganz wenigen Zeilen abzumachen, ja fast vollständig im Kopf zu erledigen. Die symmetrische 8gliedrige *Si*-Gl. in Verbindung mit drei symmetrischen *Su*-Gl. hat also doch auch Vorteile gebracht. Man findet die links stehenden Zahlen für die Korrelaten und damit die in (22) zusammengestellten Werte der v:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0{,}0235 \\
k_2 &= +0{,}8750 \\
k_3 &= -0{,}5175 \\
k_4 &= -0{,}7675;
\end{aligned}
$$

die nebenstehenden v sind wie in **8.**, (16) und (17) aus formellen Gründen bis auf 0″,0001 ausgerechnet.

$$
(22) \left\{
\begin{aligned}
v_1 &= +0''{,}1042 \\
v_2 &= +0\ \ {,}4194 \\
v_3 &= +0\ \ {,}3569 \\
v_4 &= +1\ \ {,}6431 \\
v_5 &= +1\ \ {,}5806 \\
v_6 &= +1\ \ {,}3958 \\
v_7 &= +1\ \ {,}3807 \\
v_8 &= +0\ \ {,}1193
\end{aligned}
\right.
$$

Die $[v^2]$ wird 9,381, bis auf die letzte Stelle übereinstimmend mit $-[wk]$ und fast ebenso genau übereinstimmend mit der ersten Auflösung in **8.**, vgl. Gleichung (18). Die grösste Abweichung in den v zwischen dieser neuen Auflösung **9.** und der ersten in **8.** ist $^5/_{10000}{}'' = {}^1/_{2000}{}''$, dann folgt dreimal $^4/_{10000}{}''$, das Tausendstel der ″ stimmt also überall.