selben Form wie für ein ebenes Viereck auch für die ausgeglichenen Winkel eines ganz beliebig grossen (nicht etwa nur eines geodätisch unmittelbar messbaren) sphärischen Vierecks gelten würden, so lange es sich eben um eine wirklich sphärische Figur handeln würde, d. h. die Ecken des Vierecks wirklich als einer und derselben Kugel r angehörig zu denken wären.

Eine zweite Ableitung etwas anderer *Si*-Bedingungsgleichungen kann dann allerdings auf Grund des Legendre'schen Satzes bekanntlich mit Hilfe des ebenen Vierecks gewonnen werden, dessen Streckenlängen genau mit den Längen der Grosskreisbögen der unmittelbar geodätisch messbaren Dreiecke übereinstimmen. Will man nämlich statt von (12) von der alten Identität

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{e}{a}=1 \text{ (erste Form der Gleichung (I) in \textbf{3.})}$$

ausgehen, so darf man zwar in dieser Gleichung nicht mehr $\frac{a}{b}$ durch $\frac{\sin \underline{3}}{\sin \underline{8}}$ ersetzen wollen, wohl aber kann man es, gemäss dem „einfachen" Legendre'schen Satz, so lange die Grosskreisbögen a, b, .. im Verhältnis zum Kugelhalbmesser gewisse kleine Beträge nicht überschreiten, ersetzen durch $\frac{\sin(\underline{3}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_1)}{\sin(\underline{8}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_1)}$, wenn ε_1 den sphärischen Exzess des kleinen sphärischen Dreiecks I II IV bedeutet (wobei ε_1 über eine gewisse nicht grosse Zahl von $''$ nicht hinausgeht). Man erhält so die neue *Si*-Bedingungsgleichung (**Ia**) oder (14):

$$(14)\quad \frac{\sin(\underline{3}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_1)\cdot\sin(\underline{5}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_3)\cdot\sin(\underline{7}+\underline{8}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_4)}{\sin(\underline{8}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_1)\cdot\sin(\underline{3}+\underline{4}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_3)\cdot\sin(\underline{6}-{}^1\!/_3\,\varepsilon_4)}=1,$$

in der ε_1, ε_3 und ε_4 die schon für die *Su*-Gl. (mit beliebiger Schärfe) zu berechnenden sphärischen Exzesse der Dreiecke I II IV, I II III und I II IV sind.

Aehnlich lauten die drei andern elementaren (sechsgliedrigen) *Si*-Gl. der neuen Art, deren Linearmachung (bei (**Ia**) = (14) die Verbesserungen v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, nämlich alle gesuchten Winkelverbesserungen ausser v_1 und v_2 enthaltend) sich in nichts unterscheidet von der Zurückführung von (**I**) u. s. f. auf die Form (**I'**) u. s. f. in **3.** Es ist auch, da die Exzesse ε selbst bei grossen geodätisch messbaren Dreiecken ja nur wenige $''$ betragen, klar, dass die linear gemachten Gleichungen (13) und (14) (und ähnlich für die weitern) auf genau dieselbe Gleichung führen müssen, während (13) und (14) zunächst verschiedene Formen der einen *Si*-Gl. sind.

Man hat mit dieser Doppelrechnung einer *Si*-Gl. also eine Probe für die richtige Aufstellung der Gleichung, die zwar für die Koeffizienten der v nichts leistet, wohl aber gut und willkommen ist für die Rechnung des Absolutglieds w der *Si*-Gl., und die deshalb auch mit Recht sehr allgemein empfohlen und angewandt wird.

8. Das Jordan-Koll'sche Viereck. Die folgenden Nummern wenden sich nunmehr dem Viereck zu, an dem Jordan den von ihm etwas vereinfachten Zachariae'schen Satz (nämlich zum anschaulichen Flächensatz gemachten Satz) über die Wahl der für die Rechnung „günstigsten" *Si*-Gl. erläutert hat [Zeitschr. für Vermessungswesen 1894, S. 176—182 und S. 235—240, ferner Jordan-Eggert, Handbuch Band I, 6. Aufl. (1910; s. oben), S. 264—270]. In diesem Viereck AJBK, vgl. Fig. 8, sind als unabhängig gemessen angenommen die folgenden acht Winkel

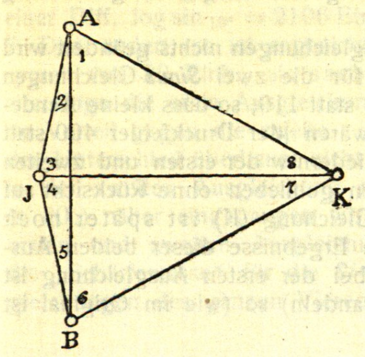

Fig. 8.

$$
(15)\quad
\begin{array}{l}
1 = 62^\circ\ 14'\ 30'' \\
2 = 5\ \ 42\ \ 33 \\
3 = 84\ \ 17\ \ 26 \\
4 = 84\ \ 17\ \ 25 \\
5 = 5\ \ 42\ \ 32 \\
6 = 62\ \ 14\ \ 29 \\
7 = 27\ \ 45\ \ 28 \\
8 = 27\ \ 45\ \ 30.
\end{array}
$$

Die Zahlen zeigen, dass das Beispiel fingiert ist; die ″-Zahlen liegen z. B. sämtlich zwischen 25″ und 33″. Die Punkte A und B liegen zu J K fast genau symmetrisch, d. h. die eine Diagonale A B ist fast genau senkrecht zur zweiten J K (und beide sind zudem noch fast genau gleich lang). Doch ist diese schematische Form des Vierecks zunächst ohne Einfluss auf unsere Rechnung. Stellt man die vier elementaren *Su*-Gl. (Dreiecks-„Schluss"-Gleichungen) zusammen, so ergeben sich vier w von demselben (negativen) Vorzeichen, nämlich für die Dreiecke A B K, A J K, A J B und J B K der Reihe nach die Dreiecksschlussfehler

$-3''$, $-1''$, $-4''$, $-6''$. Die an den gemessenen Winkeln zum Zweck der Ausgleichung notwendigen Verbesserungen v sind hiernach alle als mit dem Vorzeichen + behaftet zu vermuten und auch hierin zeigt sich die Fiktion des Beispiels. Die Quadratsumme der soeben angeschriebenen vier w ist 62, also als mittlerer Fehler eines der gemessenen Winkel etwa $\sqrt{\frac{62}{4 \cdot 3}} =$ rund $\pm 2''$ zu schätzen; er wird sich nachher richtiger zu rund $\pm 1\frac{1}{2}''$ zeigen. Immerhin ist soviel sicher, dass nach dieser Zahl die Ausrechnung der v und damit die Aufstellung der „verbesserten" (ausgeglichenen) Winkel genauer als auf höchstens 0″,1 sachlich keinen Wert hat. Wenn nachher auf 0″,01 und selbst 0″,001, ja 0″,0001 gegangen wird, so hat dies nur formelle Gründe. Es wird ferner im folgenden angenommen, dass die Abmessungen der Figur so klein seien, dass die Exzesse ausser Betracht bleiben können. Wenn die fast gleichen Diagonalen A B und J K z. B. rund je 1000 m lang wären, so wäre der Inhalt des Vierecks etwa $\frac{1}{2}$ qkm, der Vierecksexzess rund $\frac{1}{400}''$, fast ebensogross der Exzess des Dreiecks A B K und halb so gross die Exzesse der Dreiecke A J K und B J K. Bei J K = 1000 m müssten also, wenn auf $\frac{1}{1000}''$ in den Winkeln gerechnet wird, die Exzesse bereits berücksichtigt werden.

A. a. O. sind zwei Ausgleichungen duchgeführt, beide wie gewöhnlich mit drei *Su*-Gl. (Dreiecke A B K, A J K und B J K, also den drei grössten Dreiecken, was hier ohne Bedeutung ist) und demnach je einer *Si*-Gl.; bei der ersten Ausgleichung mit der schärfsten 6gliedrigeu *Si*-Gl., in die die kleinsten Winkel eingehen, nämlich mit J als Pol, bei der zweiten Ausgleichung mit der unschärfsten 6gliedrigen *Si*-Gl., nämlich mit K als Pol. Das Mass der Zahlenschärfe (der Ausdruck ist vielleicht besser als „Mass der Genauigkeit", der leichter unrichtige Vorstellungen erwecken kann) für jede der elementaren 6gliedrigen *Si*-Gl., wie wir sie oben in **3.** angeschrieben haben, ist nämlich nach dem Zachariae-Jordan'schen Satz die Dreiecksfläche, die den Polpunkt nicht als Ecke enthält; also für die *Si*-Gl. der ersten Ausgleichung, mit J als Pol, die Dreiecksfläche A B K, für die *Si*-Gl. der zweiten Ausgleichung, mit K als Pol, die Dreiecksfläche A B J. Die Flächen dieser zwei Dreiecke in Fig. 8 verhalten sich rund wie 19 : 1 zueinander und es ist in der Tat kein Zweifel, dass die Jordan'sche *Si*-Gl. (J als „Zentralpunkt" oder „Spitze des Zentralsystems") eine in den Zahlen viel schärfere Beziehung zwischen den v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8 ausspricht als die Koll'sche *Si*-Gl. (K als „Zentralpunkt") zwischen den Verbesserungen v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 und dass demnach jene Gleichung für die Durchführung der Ausgleichungsrechnung günstiger ist.

Indem nun hier an den Zahlen dieser zwei Ausgleichungen nichts geändert wird (— in den Diff. 10″ beim Aufschlagen der Sinus für die zwei *Sinus*-Gleichungen sollte viermal besser 85 statt 86 stehen, einmal 111 statt 110, so dass kleine Aenderungen in den Koeffizienten der *Si*-Gl. angezeigt wären [der Druckfehler 400 statt 100 spielt natürlich keine Rolle]; bei den Absolutgliedern w der ersten und zweiten *Si*-Gl. ist bei unmittelbar 7 stelliger Rechnung stehen geblieben ohne Rücksicht auf die —-Striche bei Schrön; das Absolutglied der Gleichung (K) ist später noch besonders zu erörtern, vgl. **10.** —) lauten die Ergebnisse dieser beiden Ausgleichungen (auf die Angabe der v beschränkt; bei der ersten Ausgleichung ist das Vorzeichen der letzten Korrelate in + zu verwandeln) so (wie im Original ist bis auf $^1/_{10000}$ der Sekunde in den v gegangen):

	1. Ausgleichung (Pol der *Si*-Gl. der Punkt J)	2. Ausgleichung (Pol der *Si*-Gl. der Punkt K)	
(16)	$v_1 = +0'',1047$	$v_1 = +0'',0794$	(17)
	$v_2 = +0\ ,4191$	$v_2 = +0\ ,4757$	
	$v_3 = +0\ ,3573$	$v_3 = +0\ ,3334$	
	$v_4 = +1\ ,6428$	$v_4 = +1\ ,6666$	
	$v_5 = +1\ ,5810$	$v_5 = +1\ ,5243$	
	$v_6 = +1\ ,3954$	$v_6 = +1\ ,4206$	
	$v_7 = +1\ ,3806$	$v_7 = +1\ ,3887$	
	$v_8 = +0\ ,1195$	$v_8 = +0\ ,1113$	

In den zwei Ergebnissen (16) und (17) zeigen sich also Abweichungen in den einzelnen v, die bis zu 0″,057 gehen (die v auf $^1/_{1000}$″ abgerundet gedacht), nämlich bei v_2 und bei v_5, den Verbesserungen der sehr spitzen Winkel 2 und 5; dies ist noch als sachlich gleichgültig zu bezeichnen, vgl. die Bemerkung nach (15), nötigt aber formell, bei der aufgewandten Rechenschärfe (7stell. Log. bei der *Si*-Bed.-Gl. u. s. f.) zur Untersuchung. Die [v v] ist bei beiden Auflösungen nicht wesentlich verschieden, und in beiden Fällen je in guter Uebereinstimmung mit der —[w k]; es wird nämlich (bei Jordan nicht angegeben) bei der ersten und der zweiten Ausgleichung

$$(18)\begin{cases}\text{erste Aufl., (J als „Zentralpunkt" der } Si\text{-Gl.),} & [vv] = -[wk] = 9{,}380\\ \text{zweite Aufl., (K . . . .),} & [vv] = -[wk] = 9{,}404,\end{cases}$$

so dass der m. F. eines der gemessenen Winkel in beiden Fällen erhalten wird zu

$\sqrt{\frac{9{,}380}{4}} = \pm 1'',531$ und $\sqrt{\frac{9{,}404}{4}} = \pm 1'',533$, Unterschied bei weitem $< 0'',01$.

Fügt man die oben angegebenen gefundenen v in beiden Fällen den gemessenen Dreieckswinkeln hinzu und bildet mit diesen verbesserten Winkeln die *Su*-Gl. der vier Dreiecke, so gehen in beiden Fällen die noch verbleibenden Widersprüche nicht über wenige Einheiten der 10000stel″ hinaus und die zweite Ausgleichung scheint nach diesen *Su*-Gl. sogar noch schärfer zu sein. Anders dagegen bei den *Si*-Gl.; während z. B. mit den verbesserten Winkeln bei der ersten Auflösung [J; vgl. (16)] in der 6gliedrigen *Si*-Gl. mit J als Pol log Z = 8.632 9030, log N = 8.632 9029 und bei der 6gliedrigen *Si*-Gl. mit K als Pol log Z = 9.911 7602, log N = 9.911 7603 erhalten wird, gibt die zweite Auflösung [K; vgl. (17)] in der 6gliedr. *Si*-Gl. mit K als Pol zwar ebenfalls log Z = 9.911 7603, log N = 9.911 7603, dagegen die 6gliedr. *Si*-Gl. mit J als Pol log Z = 8.632 9019, log N = 8.632 9041, also einen nach der Ausgleichung mit ihrem ganzen Rechenaufwand bleibenden, auf den ersten Blick sehr verblüffenden Widerspruch von — 22 Einh. der 7. Dez.-Stelle. Bedenkt man freilich, dass eine Aenderung der Winkel 5 und 2 (je nur etwa $5^\circ\,42^1/_2{}'$ gross), die in der 6gliedr. *Si*-Gl. mit J als Pol vorkommen, bei einer Diff. $\log\sin_{10''} = 2106$ Einh.$_7$, um nur $0'',01$ den log sin um je 21 Einh. der 7. Dez. ändert, so ist angesichts der Bemerkung nach (15) der bestehende Widerspruch von 22 Einh.$_7$ als sachlich gleichgültig zu bezeichnen. Formell aber ist allerdings die erste Ausgleichung mit den kleinen Winkeln in der *Si*-Gl. durchaus im Vorteil gegen die zweite. Und diese Ueberlegenheit bleibt erhalten, wenn auch der Unterschied überhaupt nicht so gross ist, als bei Jordan berechnet wird, weil sich in der zweiten Ausgleichung noch eine kleine Unrichtigkeit findet, auf die unten (s. **10.**) näher eingegangen wird und deren Hebung den Unterschied zwischen der ersten und zweiten Ausgleichung stark vermindert. Jedenfalls sei davor gewarnt, die „Schärfemasse“ für die *Si*-Gl. als Wertigkeitszahlen für die verschiedenen Ausgleichungen des ganzen Vierecks überhaupt ansehen zu wollen.

9. Weitere Ausgleichung des in 8. angegebenen Vierecks, wie in **8.** nach der Möglichkeit a): drei *Su*-Gl. und eine *Si*-Gl. Diese weitere Auflösung füge ich hier ein mit Rücksicht auf eine Bemerkung von Helmert. Jordan hat darauf hingewiesen, dass man das „Günstigkeitsmass“ einer *Si*-Gl. oft noch etwas erhöhen kann, nämlich z. B. bei konvexen Vierecken, wenn man statt der 6gliedrigen *Si*-Gl. beim Viereck eine 8gliedrige *Si*-Gl. einführt: während das Schärfemass jeder der 6gliedrigen Gleichungen (I) bis (IV) gegeben ist durch die Dreiecksfläche, die der als Pol der Gleichung benützten Ecke „gegenüberliegt“ (vgl. oben bei **3.** und **4**.), hat die achtgliedrige Gl. (V) im konvexen Viereck Fig. 3, 4 als Schärfemass die Vierecksfläche, also ein grösseres Mass als jede der 6gliedrigen Gleichungen. Helmert bemerkt dazu (Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl., Leipzig 1907, S. 521): „praktisch hat dieses wenig Bedeutung, da die Schärfe höchstens verdoppelt wird gegenüber dem besten dreistrahligen Zentralsystem; ausserdem ist der Nachteil, dass statt sechs nun acht Sinus aufzuschlagen sind und in die Ausgleichung mehr Glieder eingehen“ (bei Winkeln 8 gegen 6, bei Richtungen 12 gegen 9 Glieder). Diese Bemerkung ist an sich gewiss zutreffend, da eine gute 6gliedrige *Si*-Gl. bequemer für die Auflösung ist als eine 8gliedrige und ihre Schärfe in jedem Fall hinreicht (bei den einzelnen 6gliedrigen *Si*-Gl. kann sowohl im konvexen wie im nichtkonvexen Viereck das Verhältnis der „Schärfemasse“ zwischen zweien davon jeden Wert bis zu ∞ haben, während, wie Helmert bemerkt, das Schärfeverhältnis zwischen der günstigsten 6gliedrigen und der 8gliedrigen Gl. (V) im konvexen Viereck nur bis 1 : 2 gehen kann); in unserem Falle der Fig. 8 wird z. B. ohnehin mit der 8gliedrigen *Si*-Gl. [vgl. oben (V)]:

$$(19)\quad \begin{aligned}(\log\sin\underline{1} + \log\sin\underline{3} + \log\sin\underline{5} + \log\sin\underline{7}) - (\log\sin\underline{2} + \log\sin\underline{4} + \log\sin\underline{6}\\ + \log\sin\underline{8}) = 0\end{aligned}$$

gegen die 6gliedrige *Si*-Gl. mit J als Pol überhaupt nichts gewonnen, weil die Flächen des Dreiecks ABK und des Vierecks AJBK sich sehr wenig unterscheiden (Verhältnis beider ist 19 : 20). Es ist jedoch auch noch zu bedenken, dass die Gleichung (19) (= (V) von oben) die am meisten symmetrische Form einer *Si*-Gl. im konvexen Viereck vorstellt; wie im nichtkonvexen Viereck Fig. 6 jedermann ohne Besinnen zu der (dort 6gliedrigen) Gleichung mit D als Pol als der sich „am natürlichsten“ darbietenden, nämlich die am meisten symmetrische v-Gleichung liefernden greift (eine Wahl, die zudem noch durch das grösste Schärfemass = Dreiecksfläche ABC daselbst bestätigt wird), so kann (19) = (V) in

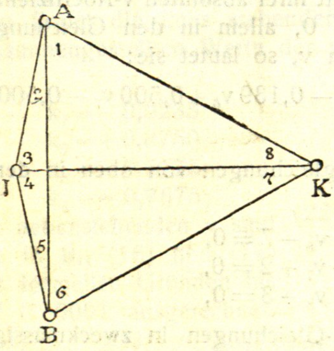

Fig. 8.