1. bei Jordan	2. geschätzt	3. genau berechnet	4. anzuwenden bei Abrndg. auf Ziff.$_7$
+ 302	302.1	302.1	302
+ 22*)	21.9	21.87	22
+ 449	448.4	448.4	448 (nicht 449)
+ 498	497.2	497.3	497 (nicht 498)
+ 256	255.7	255.8	256
— 48	— 47.6	— 47.54	— 48

*) Anmerkung. Die Zahlen der Spalte 1. sind zugleich die unmittelbar neben der Tafelstelle stehenden Tafel-Differenzzahlen mit Ausnahme dieser einen mit *) bezeichneten, wo in der Tafel 21 steht, bei Jordan aber richtig, mit Rücksicht auf die vorhergehend und folgend je 5 mal 22 lautende Zahl, 22 gesetzt ist.

So sollte ferner, um noch ein weiteres Beispiel zu nennen, bei der fünfstelligen log. Rechnung auf S. 258 des genannten Bands von Jordan-Eggert als Diff. 1′ bei log sin (7 + 8) besser — 3 statt — 2 stehen (genauer nach Anblick der Differenzen in der Tafel — 2.7), bei log sin (3) besser 4 statt 3 (genauer + 3.8). Der Leser prüfe auch diese Schätzungen durch genauere Nachrechnung mit dem Rechenschieber.

Diese nach Anblick richtiger angesetzte Diff. 10″ sollte häufig auch besser als die unmittelbar neben dem Tafelwert stehende Zahl zur Einschaltung bei Aufsuchung des log sin für die Ausrechnung des $w = \log Z - \log N$ nach (5) gebraucht werden, ebenso bei der Ausrechnung der endgültigen Seitenlängen nach der Ausgleichung. Die Rechnung wird um nichts unbequemer dadurch, dass man nach zwei verschiedenen Schaltteilspalten zu sehen hat statt nach einer. Ist z. B. bei der Diff. für 10″ = 964.7 Einh.$_7$ der Schaltteil für 8″,732 aufzuschlagen, während man nur die nebenstehenden zwei P.-P.-Täfelchen für 965 und für 964 vor sich hat, so hat man nach Anblick dieser zwei Spalten:

	965	964
1	96.5	96.4
2	193.0	192.8
3	289.5	289.2
4	386.0	385.6
5	482.5	482.0
6	579.0	578.4
7	675.5	674.8
8	772.0	771.2
9	868.5	867.6

für 8″	771.8
„ 0,7	67.5
„ 0,03	2.9
„ 0,002	0.2
	842.4;

die unmittelbare scharfe Ausrechnung würde geben 842.376, so dass neben das $^1/_{10}$ der 7. Dez. richtig interpoliert ist, ganz ohne weitere Mühe im Vergleich mit der Einschaltung nur nach der Differenzspalte 964, die unmittelbar an der Stelle steht und geben würde 771.2 + 67.5 + 2.9 + 0.2 = 841.8, also 0.6 Einh$_7$ zu wenig.

Besonders wichtig ist der Hinweis auf diese verbesserte Einschaltung allerdings nur dort, wo in den Tafelzahlen zu den Argumenten der Tafel die Erhöhung oder Erniedrigung der Endziffer angedeutet ist, wie in den schönen 7stelligen Tafeln von Schrön, bei deren Anwendung man bei einer unterstrichenen letzten Ziffer 0.2 Einheiten dieser 7. Ziffer abzieht, bei einer nicht unterstrichenen Ziffer 0.2 Einheiten hinzufügt. Es lässt sich so nach ziemlich langer Addition 7stelliger Logarithmen die 7. Ziffer ziemlich gut sicherstellen, was bei Zahlen, die bei jeder einzelnen auf die Einheit$_7$ abrunden, nicht der Fall ist. In den folgenden Nummern finden sich einige Beispiele; der Leser bilde auch selbst Beispiele mit der ihm wohl mehr vertrauten 6stelligen Log.-Tafel.

7. Grössere Vierecke, bei denen die sphärischen Exzesse der vier Dreiecke in Betracht kommen. Alles Vorstehende ist zunächst für den Fall aufgestellt, dass die Figur so klein ist, dass selbst für sehr grosse Rechenschärfe von den sphärischen Exzessen abgesehen werden kann. Man erinnere sich, dass auf der Erdoberfläche in runder Zahl der Fläche 200 qkm der Exzess 1″ entspricht; gleichseitige geodätische Dreiecke mit etwas über 21 km Seite oder Dreiecke mit zusammengehöriger Seite und Höhe von rund 20 und 20, oder rund 30 und 13 km u. s. f. haben 1″ Exzess.

a) ***Su***-Gleichungen. Ueber sie ist für diesen Fall kaum etwas weiteres zu sagen; da man den Exzess jedes messbaren Dreiecks auf einfache Art mit nach Bedarf beliebig weitgehender Schärfe berechnen kann, so kann in die Gleichungen (*I*) bis (*IV*) sofort eingesetzt werden $(180^\circ + \varepsilon_1)$, $(180^\circ + \varepsilon_2)$, $(180^\circ + \varepsilon_3)$, $(180^\circ + \varepsilon_4)$, wobei bei der Berechnung der Exzesse die Probe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 =$ Vierecksexzess [der in (*V*) wieder erscheint] nicht zu übersehen ist. Auch für (*VI*) und (*VII*) ist alles klar.

b) ***Si***-Gleichungen. Die Ableitung dieser Gleichungen jedoch ist für den jetzigen Fall in den Lehrbüchern nicht überall klar genug. In einem der verbreitetsten Lehr- und Handbücher heisst es z. B. darüber: „Diese Gleichung" (die eine in dem auszugleichenden Viereck erforderliche ***Si***-Gl.) „ist allerdings zunächst dem ebenen Viereck entsprechend, allein die Gleichung gilt ebenso auch für ein sphärisches Viereck, weil der Sinussatz, insofern er die Winkel eines Dreiecks betrifft, für ein ebenes und für ein sphärisches Dreieck gleichlautend ist und die Sinus der Zentriwinkel am Erdmittelpunkt für die Dreiecksseiten hier nicht auftreten, eventuell durch die „Additamentenmethode" der sphärischen Dreiecksberechnung berücksichtigt würden". Diese Begründung erscheint nicht genügend und ist sogar als nicht zutreffend zu bezeichnen. Einen Sinussatz, der nur die Winkel eines ebenen oder sphärischen Dreiecks betreffen würde, gibt es nicht; und gerade die, eine Faktorenfolge von Verhältnissen der sin je zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks enthaltenden ***Si***-Bedingungsgleichungen eines sphärischen Triangulationsnetzes kommen dadurch zustand, dass im sphärischen Dreieck das Verhältnis der Sinus zweier Seiten des Dreiecks durch das ihm gleiche Verhältnis der Sinus der gegenüberliegenden Winkel ersetzt werden kann. Hieran wird nichts geändert durch die Tatsache, dass der Legendre'sche Satz auch gestattet, für eine sphärische Triangulation auch mit Hilfe von ebenen Dreiecken ***Si***-Gleichungen aufzustellen mit Winkeln, die von den gemessenen nur wenig verschieden sind: immerhin sind eben diese „Legendre'schen Winkel" nicht mehr die gemessenen.

Der Beweis für die ***Si***-Gleichungen in sphärischen Triangulationsnetzen wird nämlich am einfachsten auf folgendem Weg geführt: stellt die Fig. 3 ein sphärisches Dreiecksnetz vor, sind also z. B. a, b, e die Grosskreisbögen, die von der Ecke I ausgehen (und zwar im Längenmass gemessen) und ist r in demselben Längenmass der Halbmesser der Kugel, dem die sphärische Figur angehört, so ist an Stelle der Identität (I) in **3.** die folgende aufzustellen:

(12) $$\frac{\sin\frac{\underline{a}}{r}}{\sin\frac{\underline{b}}{r}} \cdot \frac{\sin\frac{\underline{b}}{r}}{\sin\frac{\underline{e}}{r}} \cdot \frac{\sin\frac{\underline{e}}{r}}{\sin\frac{\underline{a}}{r}} = 1,$$ in der $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{e}$ die mit Hilfe der ausgeglichenen sphärischen Winkel $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, ... zu berechnenden endgültigen und widerspruchsfreien Grosskreisbogenlängen bedeuten. In der Gleichung (12) darf nach dem Sinus-Satz des sphärischen Dreiecks jedes der drei Verhältnisse ersetzt werden durch das Verhältnis der Sinus der den sphärischen Seiten gegenüberliegenden Winkel, d. h. die Erfüllung der Gleichung (12) ist erreicht, wenn die Gleichung

(13) $$\frac{\sin \underline{3}}{\sin \underline{8}} \cdot \frac{\sin \underline{5}}{\sin (\underline{3} + \underline{4})} \cdot \frac{\sin (\underline{7} + \underline{8})}{\sin \underline{6}} = 1$$ erfüllt wird von den Winkeln $\underline{3} = 3 + v_3$, $\underline{4} = 4 + v_4$, ... , übereinstimmend mit der zweiten Form der Gleichung (I) in **3.**, die dort zunächst für das ebene Viereck galt. Es ist mit dieser Ableitung der ***Si***-Gleichungen zugleich bewiesen, dass sie ganz in der-

selben Form wie für ein ebenes Viereck auch für die ausgeglichenen Winkel eines ganz beliebig grossen (nicht etwa nur eines geodätisch unmittelbar messbaren) sphärischen Vierecks gelten würden, so lange es sich eben um eine wirklich sphärische Figur handeln würde, d. h. die Ecken des Vierecks wirklich als einer und derselben Kugel r angehörig zu denken wären.

Eine zweite Ableitung etwas anderer *Si*-Bedingungsgleichungen kann dann allerdings auf Grund des Legendre'schen Satzes bekanntlich mit Hilfe des ebenen Vierecks gewonnen werden, dessen Streckenlängen genau mit den Längen der Grosskreisbögen der unmittelbar geodätisch messbaren Dreiecke übereinstimmen. Will man nämlich statt von (12) von der alten Identität

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{e}{a} = 1 \text{ (erste Form der Gleichung (I) in } \mathbf{3.})$$

ausgehen, so darf man zwar in dieser Gleichung nicht mehr $\frac{a}{b}$ durch $\frac{\sin \underline{3}}{\sin \underline{8}}$ ersetzen wollen, wohl aber kann man es, gemäss dem „einfachen" Legendre'schen Satz, so lange die Grosskreisbögen a, b, .. im Verhältnis zum Kugelhalbmesser gewisse kleine Beträge nicht überschreiten, ersetzen durch $\frac{\sin(\underline{3} - {}^1/_3\,\varepsilon_1)}{\sin(\underline{8} - {}^1/_3\,\varepsilon_1)}$, wenn ε_1 den sphärischen Exzess des kleinen sphärischen Dreiecks I II IV bedeutet (wobei ε_1 über eine gewisse nicht grosse Zahl von $''$ nicht hinausgeht). Man erhält so die neue *Si*-Bedingungsgleichung (**I a**) oder (14):

$$(14) \quad \frac{\sin(\underline{3} - {}^1/_3\,\varepsilon_1) \cdot \sin(\underline{5} - {}^1/_3\,\varepsilon_3) \cdot \sin(\underline{7} + \underline{8} - {}^1/_3\,\varepsilon_4)}{\sin(\underline{8} - {}^1/_3\,\varepsilon_1) \cdot \sin(\underline{3} + \underline{4} - {}^1/_3\,\varepsilon_3) \cdot \sin(\underline{6} - {}^1/_3\,\varepsilon_4)} = 1, \text{ in der } \varepsilon_1, \varepsilon_3$$

und ε_4 die schon für die *Su*-Gl. (mit beliebiger Schärfe) zu berechnenden sphärischen Exzesse der Dreiecke I II IV, I II III und I II IV sind.

Aehnlich lauten die drei andern elementaren (sechsgliedrigen) *Si*-Gl. der neuen Art, deren Linearmachung (bei (**I a**) = (14) die Verbesserungen v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, nämlich alle gesuchten Winkelverbesserungen ausser v_1 und v_2 enthaltend) sich in nichts unterscheidet von der Zurückführung von (**I**) u. s. f. auf die Form (**I'**) u. s. f. in **3.** Es ist auch, da die Exzesse ε selbst bei grossen geodätisch messbaren Dreiecken ja nur wenige $''$ betragen, klar, dass die linear gemachten Gleichungen (13) und (14) (und ähnlich für die weitern) auf genau dieselbe Gleichung führen müssen, während (13) und (14) zunächst verschiedene Formen der einen *Si*-Gl. sind.

Man hat mit dieser Doppelrechnung einer *Si*-Gl. also eine Probe für die richtige Aufstellung der Gleichung, die zwar für die Koeffizienten der v nichts leistet, wohl aber gut und willkommen ist für die Rechnung des Absolutglieds w der *Si*-Gl., und die deshalb auch mit Recht sehr allgemein empfohlen und angewandt wird.

8. Das Jordan-Koll'sche Viereck. Die folgenden Nummern wenden sich nunmehr dem Viereck zu, an dem Jordan den von ihm etwas vereinfachten Zachariae'schen Satz (nämlich zum anschaulichen Flächensatz gemachten Satz) über die Wahl der für die Rechnung „günstigsten" *Si*-Gl. erläutert hat [Zeitschr. für Vermessungswesen 1894, S. 176—182 und S. 235—240, ferner Jordan-Eggert, Handbuch Band I, 6. Aufl. (1910; s. oben), S. 264—270]. In diesem Viereck AJBK, vgl. Fig. 8, sind als unabhängig gemessen angenommen die folgenden acht Winkel