

Ich wiederhole die Aufforderung, der Studierende möge, angesichts der vollständigen Reziprozität zwischen Su - und Si -Gleichungen, auch die zwei weiteren Möglichkeiten b) und c) wenigstens an einem Beispiel mit denselben Vierecks-Daten wie bei a) durchrechnen, wozu die folgenden Nummern dieses Aufsatzes Andeutungen bringen. Diese zwei weiteren Möglichkeiten sind die Ausgleichung mit Hilfe von

b) 2 Su -Gl. und damit 2 Si -Bedingungsgleichungen; endlich mit

c) 1 Su -Gl. und demnach 3 Si -Gl. Mit a) bis c) sind die Möglichkeiten erschöpft. Was die Koeffizienten in den von Haus aus linearen v - Su -Gl. und in den linear gemachten v - Si -Gl. angeht, so sind sie

in den Su -Gl., von der Null abgesehen, stets die Zahlen + 1 oder - 1. Andre (runde) Zahlen sind, von der Möglichkeit der Durchmultiplikation oder Durchdivision jeder Bedingungsgleichung mit einer bestimmten Konstanten abgesehen, an sich nicht von vornherein ausgeschlossen,*) praktisch aber nie angezeigt.

in den Si -Gl., von der Null abgesehen, stets unrunde Zahlen, deren Grössen durch entsprechende Durchdivision der Si -Gl. mit bestimmten Konstanten im Interesse der einfachern und schärfern Rechnung dem absoluten Durchschnittsbetrag 1 zu nähern sind. Ein runder Koeffizient in einer Si -Gl. kann nur ausnahmsweise durch Zufall entstehen oder könnte durch Durchmultiplikation dieser ursprünglichen Si -Gl. mit einer nichtrunden Konstanten hergestellt werden, was aber praktisch nie angezeigt ist.

Ich wiederhole, dass der vorstehende Ueberblick über die Möglichkeiten a) bis c), den die Lehrbücher zugunsten der auch als theoretisch notwendig hingestellten Möglichkeit a) unterlassen, nicht ohne Interesse ist. Er hat freilich nur solange Bedeutung, als sämtliche Bedingungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form als exakte Gleichungen zu gelten haben. Die Si -Gl. müssen aber in Wirklichkeit zum Gebrauch erst „linear gemacht“ werden, was nur mit grösserer oder geringerer, in den Gleichungen selbst liegender Rechnungsschärfe geschehen kann. In Beziehung auf die Rechenpraxis der Ausgleichung kommt es auf zwei Dinge an: 1) „Schärfe der Ergebnisse“ (keine „unstable“ Auflösung, wie mit ganz gutem Ausdruck die Amerikaner sagen, s. u.) und 2) „möglichst einfache Rechnung“. Rechentechnisch ist also z. B. schon nicht jede der vier elementaren Si -Gl. so viel wert als eine andere und ebensowenig sind die Möglichkeiten a) bis c) etwa gleichwertig. Vgl. auch noch den Abschnitt 13. a.

6. Berechnung der v -Koeffizienten und des Absolutglieds einer linear zu machenden Si -Gl. Die Si -Gl. (ohne Beziehung zu einer der bisherigen Figuren sechsgliedrig angeschrieben):

$$(1) \frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3}{\sin 4 \cdot \sin 5 \cdot \sin 6} = 1, \text{ d. h. } (2) \frac{\sin(1 + v_1) \cdot \sin(2 + v_2) \cdot \sin(3 + v_3)}{\sin(4 + v_4) \cdot \sin(5 + v_5) \cdot \sin(6 + v_6)} = 1 \text{ oder}$$

logarithmiert:

$$(3) \quad \{ \log \sin(1 + v_1) + \log \sin(2 + v_2) + \log \sin(3 + v_3) \} \\ - \{ \log \sin(4 + v_4) + \log \sin(5 + v_5) + \log \sin(6 + v_6) \} = 0$$

muss zur weitem Verwendung auf die Form gebracht werden:

$$(4) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + w = 0;$$

dabei sind die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots a_6$ und das Absolutglied w transzendente, also bei gewisser Dezimalstelle, die von der erforderlichen Rechenschärfe abhängt, abzubrechende Zahlen. Der Wert des Absolutglieds ist leicht zu sehen; da die v

*) Wollte man z. B. die Summe von (II) und (IV) oder von (I) und (III) als eine der Su -Bedingungsgleichungen aufstellen, so erhielten im ersten Fall die Verbesserungen v_6 und v_7 , im zweiten v_7 und v_8 die Koeffizienten 2.

nur je eine ganz kleine Zahl von " erreichen können und demnach alle $\frac{v''}{\rho''}$ als Differentiale angesehen werden dürfen und in der Entwicklung von $\sin(\alpha + v_a)$, wo α irgend einen der gemessenen Winkel vorstellt, nach dem Taylorschen Satz nur die Potenz $\left(\frac{v_a}{\rho}\right)^1$ berücksichtigt zu werden braucht, so ist

$$(5) \quad w = (\log \sin 1 + \log \sin 2 + \log \sin 3) - (\log \sin 4 + \log \sin 5 + \log \sin 6) \\ = \log Z(\text{ähler}) - \log N(\text{enner})$$

nach der gewöhnlichen und zweckmässigen Bezeichnung. Die Vorzeichen der Koeffizienten a in (4) sind ebenfalls klar; liegt

einer der gemessenen Winkel 1 bis 3 (Z) $\left. \begin{array}{l} \text{zwischen } 0^\circ \text{ und } 90^\circ \text{ (spitz)} \\ \text{zwischen } 90^\circ \text{ und } 180^\circ \text{ (stumpf)} \end{array} \right\}$ so ist das Vorzeichen des $\left. \begin{array}{l} (+) \\ (-) \end{array} \right\}$ a seiner Verbesserung

einer der gemessenen Winkel 4 bis 6 (N) $\left. \begin{array}{l} \text{zwischen } 0^\circ \text{ und } 90^\circ \text{ (spitz)} \\ \text{zwischen } 90^\circ \text{ und } 180^\circ \text{ (stumpf)} \end{array} \right\}$ so ist das Vorzeichen des $\left. \begin{array}{l} (-) \\ (+) \end{array} \right\}$ a seiner Verbesserung

Für die Werte von a endlich ist $\log \sin(\alpha + v_a)$, wenn wir unter α einen der gemessenen Winkel und unter v_a die jedenfalls geringe Zahl von " verstehen, die an ihm als „Verbesserung“ zum Zweck der Ausgleichung anzubringen sind, endlich $M_{10} = 0,434294\dots$ den Modulus des Briggs'schen Systems bedeutet,

$$(6) \quad \log \sin(\alpha + v_a) = \log \sin \alpha + \frac{v_a''}{\rho''} \cdot \frac{M_{10}}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \log \sin \alpha + v_a'' \cdot \frac{M_{10} \cdot \text{ctg } \alpha}{\rho''} \quad \text{oder}$$

(7) der Koeffizient $a_\alpha = \frac{M_{10} \cdot \text{ctg } \alpha}{\rho''}$, was die angeschriebene Vorzeichenregel bestättigt. All das Vorstehende ist bekannt; ebenso sind dies die zwei Wege, auf denen man die Gleichung (7) zu benützen pflegt, nämlich

1. durch direkte Rechnung nach (7) oder aber, und fast ausschliesslich
2. durch Ersetzung dieser Rechnung durch die **Diff. log sin α** aus der Logarithmentafel (z. B. für $10''$ in 6- und 7-stelligen Logarithmentafeln); auch diese Differenzen dürfen ja an den für die Ausgleichung wirklich gemessener Netze in Betracht kommenden Stellen der log sin-Tafel im allgemeinen ebenfalls einfach als Differentiale angesehen werden.

1. Die direkte Ausrechnung kommt nur in Betracht, wenn eine bequeme, kurze und doch der verlangten Genauigkeit der Rechnung entsprechende Tafel der natürlichen Tang-Werte oder (und) Ctg-Werte vorhanden ist und ein Rechenschieber, nach Bedarf eines der grössern Modelle des logarithmischen Rechenwerkzeugs (Rechenrost oder Rechenwalze) verwendet werden kann. Setzen wir, um die Zahlen Diff. log sin der meisten 6-, 7- und mehrstelligen Tafeln zu erhalten,

$$(8) \quad d\alpha = 10'', \text{ so wird nach (6) und (7):}$$

$$(9) \quad d(\log \sin \alpha)_{d\alpha = 10''} = \frac{0,43429\dots}{10} \cdot 206265 \cdot \text{ctg } \alpha = 0,000021055 \text{ ctg } \alpha = \frac{0,000021055}{\text{tang } \alpha},$$

also für 7stellige Rechnung und für die Rechenschieberbestimmung der α :

$$(10) \quad d(\log \sin \alpha)_{d\alpha = 10''} = 210,55 \cdot \text{ctg } \alpha = \frac{210,55}{\text{tg } \alpha} \text{ Einheiten der 7. Log. Dez.}$$

Ebenso bequem ist für diese Rechenweise die Form

$$(11) \quad \frac{1000 \cdot \text{ctg } \alpha}{4,7496} \quad \text{oder meist genügend} \quad \frac{1000 \cdot \text{ctg } \alpha}{4,75} \text{ Einheiten der 7. Log. Dez.}$$

Die Ausdrücke (9) bis (11) beziehen sich, um dies zu wiederholen, auf $d\alpha = 10''$, die rechten Seiten sind also noch mit 10 zu dividieren, wenn $d\alpha = 1''$ sein soll (Einheit für die v) und (10) oder (11) sind im ganzen mit 100 zu dividieren, wenn ferner in Einheiten der 6. statt der 7. Dezimale gerechnet werden soll, wie es bei Ausgleichungen am gebräuchlichsten geworden ist. Sonst ist zu der direkten

Benützung von (6) kaum etwas zu sagen; wer bei Rechenschieberrechnung Fehlern in der Kommastellung glaubt ausgesetzt zu sein, benützt allerdings statt 1. überhaupt besser die üblichere Rechnungsweise

2. mit Hilfe der Diff. ($\log \sin$) der Logarithmentafel, aus der man die $\log \sin$ für Z und für N nach (5) aufschlägt. Hier ist nicht verständlich, weshalb in den Lehrbüchern nirgends darauf aufmerksam gemacht wird, wie man bei dieser Rechnungsweise in einfachster Art, ohne jede Mehrarbeit, die Ablebung der a nach Bedarf wesentlich verschärfen kann: man sollte bei dem Herausschreiben der ($\text{Diff. } \log \sin a$)_{10''} bei Gelegenheit des Aufschlagens des $\log \sin a$ für Z und N sich angewöhnen, wenn die Genauigkeit der angewandten Log.-Tafel tatsächlich ausgenützt werden soll, nicht einfach die Differenz zu nehmen, die zwischen den zwei 10''-Tafelwerten steht, zwischen die a fällt, sondern mit dem Auge rasch auch noch je 3 bis 4 sich folgende Differenzen rückwärts und vorwärts von dieser Stelle aus zu verfolgen, womit man die Diff._{10''} in der letzten Stelle sicher richtig ansetzen kann, ja, bei ganz geringer Übung, nach Bedarf auf 1 bis 2 Zehntel der letzten Stelle richtig ansetzt. Einige Beispiele: in der 7stelligen Tafel steht bei $\log \sin 62^\circ 14' 30''$ als Diff. zwischen $30''$ und $40''$ 110 Einh. der 7. Stelle, zwischen $20''$ und $30''$ 111 Einh.₇; bei einem Beispiel, das uns gleich näher beschäftigen wird, setzt deshalb Jordan (Jordan-Eggert, Handbuch, I, 6. Aufl., Stuttgart 1910, S. 265) links bei $\sin (6) = \sin 62^\circ 14' 29''$ als Diff. für $10''$ 111, rechts bei $\sin (1) = \sin 62^\circ 14' 30''$ als Diff. 110 an. Diese letzte Zahl muss aber ebenfalls 111 heißen: nach aufwärts in der Tafel folgt auf 110 5 mal 111, nach abwärts ebenfalls 5 mal (und öfter) 111; es ist also bei Abrundung auf die 7. Stelle ganz sicher 111, nicht 110 zu setzen, bei Anblicksschätzung der 8. Stelle ist 110.9 zu setzen, was mit 110.8 als Ergebnis der direkten Ausrechnung nach (10) bestätigt wird. Ebenda steht bei $\log \sin 67^\circ 57' 3''$ und bei $67^\circ 57' 1''$ als Diff. $10''$ 86 Einh. der 7. Dez.; die Tafel-Diff. zwischen $67^\circ 57' 0''$ und $67^\circ 57' 10''$ ist nun allerdings 86 Einh.₇ (Einh.₇ bedeutet im folgenden stets: Einheiten der 7. Dezimalstelle), nach beiden Richtungen hin steht aber dann je 3 mal 85, bis wieder 86 kommt. Die richtige Zahl bei Abrundung auf die 7. Dez. ist also unbedingt 85 und nicht 86; bei Schätzung der 8. Dez. nach Anblick (3 mal 85, 1 mal 86) hat man 85.3 und nach (10) erhält man in der Tat bei nachträglicher Rechnung aus

$$(10) \frac{210,55}{2,469} = 85.3. \text{ Solche Schätzung der 8. Stelle der Diff. } 10'' \text{ in 7 stell.}$$

Tafeln nach dem einfachen Anblick der unmittelbar vorhergehenden und folgenden Diff. schützt unbedingt und ohne jede Mehrarbeit vor unrichtiger Ziffer₇. Oft ist freilich recht gleichgültig, ob diese Ziffer richtig ist, oft aber auch nicht. In dem oben angeführten Beispiel bei Jordan sind mit den genannten Zahlen die Koeffizienten der v in den Gleichungen (J) und (K) immerhin schon in der angesetzten 2. Dezimale nicht mehr richtig; dies hat dort wenig zu bedeuten, obwohl nachher die v bis auf $\frac{1}{10000}$ der '' ausgerechnet werden. Aber in andern Fällen ist es, wie gesagt, erwünscht (besonders wenn mit einem konstanten Faktor durchdividiert wird u. dgl.), dass die Rechnung der Koeffizienten etwas schärfer ist, ohne dass man doch zu einer mehrziffrigen Tafel zu greifen hätte; und dies kann ohne irgendwelche Vermehrung des Zeitaufwands geleistet werden. Um noch für eine ganze \mathcal{S} -Gl. die Koeffizienten als Erläuterung herzusetzen, diene das Beisp. S. 210 unten in dem genannten Band von Jordan-Eggert, wobei hier in Spalte 1. die Jordan'schen Zahlen für die Diff. $10''$, in Sp. 2. die nach unmittelbarem Anblick von Differenzen-Vorgang und -Folge geschätzte Zahl, in Sp. 3. die scharf (und zwar 5stellig logarithmisch) berechnete Diff. $10''$, in Spalte 4. die demnach bei Abrundung auf die 7. Dez. anzuwendenden Zahlen stehen. Man vergleiche besonders die Sp. 2. und 3.

1. bei Jordan	2. ge- schätzt	3. genau berechnet	4. anzuwenden bei Abrndg. auf Ziff. 7
+ 302	302.1	302.1	302
+ 22*)	21.9	21.87	22
+ 449	448.4	448.4	448 (nicht 449)
+ 498	497.2	497.3	497 (nicht 498)
+ 256	255.7	255.8	256
- 48	- 47.6	- 47.54	- 48

*) Anmerkung. Die Zahlen der Spalte 1. sind zugleich die unmittelbar neben der Tafelstelle stehenden Tafel-Differenzzahlen mit Ausnahme dieser einen mit *) bezeichneten, wo in der Tafel 21 steht, bei Jordan aber richtig, mit Rücksicht auf die vorhergehend und folgend je 5 mal 22 lautende Zahl, 22 gesetzt ist.

So sollte ferner, um noch ein weiteres Beispiel zu nennen, bei der fünfstelligen log. Rechnung auf S. 258 des genannten Bands von Jordan-Eggert als Diff. 1' bei log sin (7 + 8) besser - 3 statt - 2 stehen (genauer

nach Anblick der Differenzen in der Tafel - 2.7), bei log sin (3) besser 4 statt 3 (genauer + 3.8). Der Leser prüfe auch diese Schätzungen durch genauere Nachrechnung mit dem Rechenschieber.

Diese nach Anblick richtiger angesetzte Diff. 10'' sollte häufig auch besser als die unmittelbar neben dem Tafelwert stehende Zahl zur Einschaltung bei Aufsuchung des log sin für die Ausrechnung des $w = \log Z - \log N$ nach (5) gebraucht werden, ebenso bei der Ausrechnung der endgültigen Seitenlängen nach der Ausgleichung. Die Rechnung wird um nichts unbequemer dadurch, dass man nach zwei verschiedenen Schalteilspalten zu sehen hat statt nach einer. Ist z. B. bei der Diff. für 10'' = 964.7 Einh.₇ der Schaltteil für 8'', 732 aufzuschlagen, während man nur die nebenstehenden zwei P.-P.-Täfelchen für 965 und für 964 vor sich hat, so hat man nach Anblick dieser zwei Spalten:

	965	964	für 8''	771.8	die unmittelbare scharfe Ausrechnung würde
1	96.5	96.4	„ 0,7	67.5	geben 842.376, so dass neben das $\frac{1}{10}$ der
2	193.0	192.8	„ 0,03	2.9	7. Dez. richtig interpoliert ist, ganz ohne
3	289.5	289.2	„ 0,002	0.2	weitere Mühe im Vergleich mit der Ein-
4	386.0	385.6		842.4;	schaltung nur nach der Differenzspalte 964,
5	482.5	482.0			die unmittelbar an der Stelle steht und geben
6	579.0	578.4			würde $771.2 + 67.5 + 2.9 + 0.2 = 841.8$, also 0.6 Einh. ₇ zu wenig.
7	675.5	674.8			Besonders wichtig ist der Hinweis auf diese verbesserte
8	772.0	771.2			Einschaltung allerdings nur dort, wo in den Tafelzahlen zu den
9	868.5	867.6			Argumenten der Tafel die Erhöhung oder Erniedrigung der End-

ziffer angedeutet ist, wie in den schönen 7stelligen Tafeln von Schrön, bei deren Anwendung man bei einer unterstrichenen letzten Ziffer 0.2 Einheiten dieser 7. Ziffer abzieht, bei einer nicht unterstrichenen Ziffer 0.2 Einheiten hinzufügt. Es lässt sich so nach ziemlich langer Addition 7stelliger Logarithmen die 7. Ziffer ziemlich gut sicherstellen, was bei Zahlen, die bei jeder einzelnen auf die Einheit, abrunden, nicht der Fall ist. In den folgenden Nummern finden sich einige Beispiele; der Leser bilde auch selbst Beispiele mit der ihm wohl mehr vertrauten 6stelligen Log.-Tafel.

7. Grössere Vierecke, bei denen die sphärischen Exzesse der vier Dreiecke in Betracht kommen. Alles Vorstehende ist zunächst für den Fall aufgestellt, dass die Figur so klein ist, dass selbst für sehr grosse Rechenschärfe von den sphärischen Exzessen abgesehen werden kann. Man erinnere sich, dass auf der Erdoberfläche in runder Zahl der Fläche 200 qkm der Exzess 1'' entspricht; gleichseitige geodätische Dreiecke mit etwas über 21 km Seite oder Dreiecke mit zusammengehöriger Seite und Höhe von rund 20 und 20, oder rund 30 und 13 km u. s. f. haben 1'' Exzess.