keinen Pol verwendet, sei an Fig. 6 noch willkürlich herausgegriffen:

$$\frac{\underline{d}}{\underline{b}} \cdot \frac{\underline{b}}{\underline{a}} \cdot \frac{\underline{a}}{\underline{e}} \cdot \frac{\underline{e}}{\underline{d}} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \underline{7} \,.\, \sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{6} \,.\, \sin (\underline{3} + \underline{4})}{\sin \underline{5} \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{8} \,.\, \sin (\underline{1} + \underline{2})} = 1,$$

die sich aber natürlich ebensoleicht wie jede andere aus den elementaren zusammensetzen lässt.

5. Zusammenstellung, der Reziprozität zwischen *Su*- und *Si*-Gleichungen im Viereck entsprechend. In unserem Viereck mit acht gemessenen Winkeln ohne Stationsbedingung sind nur **Summen-** und **Sinus-**Bedingungsgleichungen und die ihnen entsprechenden reduzierten Bedingungsgleichungen der v möglich. Da man zur einfachen geometrischen Konstruktion des Vierecks, von der gegebenen Seite ausgehend, vier der gemessenen Winkel braucht, so sind im ganzen

vier unabhängige Bedingungsgleichungen für die v

vorhanden.

Unter den

aufstellbaren *Su*-Gl. (Dreiecks- oder Vierecks-„Schlussgleichungen") treten die vier als besonders einfach hervor, die den Winkelsummen der vier vorhandenen Dreiecke entsprechen (im konvexen Viereck je drei Winkel enthaltend, im nicht konvexen Viereck drei bis sechs Winkel enthaltend; die Zahl der in jeder Gleichung enthaltenen v ist ebensogross).

Aus ihnen lassen sich durch einfache Addition und Subtraktion alle andern aufstellbaren *Su*-Gl. sofort ablesen.

Jene vier einfachsten *Su*-Gl. sind aber nicht unabhängig voneinander; es sind vielmehr nur drei beliebige unter ihnen unabhängig voneinander. Werden diese drei *Su*-Gl. von den v befriedigt, so wird damit auch die vierte und auch jede andere mögliche *Su*-Gl. von den v erfüllt.

aufstellbaren *Si*-Gl. (wie viele von verschiedener Form gibt es?) treten die vier als besonders einfach hervor, die man durch Anwendung der Ketten-Quotientenregel auf den von jeder Ecke des Vierecks ausgehenden Dreistrahl erhält (im konvexen Viereck wie im nicht konvexen sechsgliedrig, in jenem auch je 6 v, in diesem eine wechselnde Zahl von v enthaltend).

Aus ihnen lassen sich durch einfache Multiplikation und Division der ursprünglichen Gl. (Addition und Subtraktion der logarithmierten) alle andern *Si*-Gl. sofort ablesen.

Jene vier einfachsten *Si*-Gl. sind aber nicht unabhängig voneinander; es sind vielmehr nur drei beliebige unter ihnen unabhängig voneinander. Werden diese drei *Si*-Gl. von den v erfüllt, so befriedigen die v auch die vierte und überhaupt jede andere mögliche *Si*-Gl.

Die in unserem Viereck im ganzen vorhandenen vier unabhängigen Bedingungsgleichungen kann man theoretisch beliebig auf *Su*- und auf *Si*-Gleichungen verteilen mit der Ausnahme, dass dem eben Ausgesprochenen gemäss nicht alle vier Bedingungsgleichungen derselben Art sein können.

Man wählt bekanntlich aus praktischen Gründen stets

a) **3** *Su*-Gl. und demnach **1** *Si*-Gl., und die Lehrbücher gehen auf die zwei andern Möglichkeiten gar nicht ein, was zunächst nur vom Standpunkt der ausführenden Rechnung aus zu billigen ist; ein Wort der Begründung sollte deshalb nicht fehlen, weil die Wahl theoretisch keineswegs notwendig ist und damit die Frage entsteht, ob in keinem Fall eine andre Wahl Vorteile bieten kann. Zu dieser ersten Wahl, 3 *Su*-, 1 *Si*-Gl., stehen, wie der Leser selbst weiter verfolgen mag, eine überaus grosse Zahl (wie viele?) verschiedener Möglichkeiten zu Gebot. Es ist dabei natürlich leicht zu zeigen, dass man, die 3 *Su*-Gl. als erfüllt vorausgesetzt, die eine weiter erforderliche *Si*-Gl., welche auch gewählt werden mag, auf dieselbe Form bringen kann.

Ich wiederhole die Aufforderung, der Studierende möge, angesichts der vollständigen Reziprozität zwischen ***Su***- und ***Si***-Gleichungen, auch die zwei weitern Möglichkeiten b) und c) wenigstens an einem Beispiel mit denselben Vierecks-Daten wie bei a) durchrechnen, wozu die folgenden Nummern dieses Aufsatzes Andeutungen bringen. Diese zwei weitern Möglichkeiten sind die Ausgleichung mit Hilfe von

b) **2** ***Su***-Gl. und damit **2** ***Si***-Bedingungsgleichungen; endlich mit

c) **1** ***Su***-Gl. und demnach **3** ***Si***-Gl. Mit a) bis c) sind die Möglichkeiten erschöpft. Was die Koeffizienten in den von Haus aus linearen v-***Su***-Gl. und in den linear gemachten v-***Si***-Gl. angeht, so sind sie

in den ***Su***-Gl., von der Null abgesehen, stets die Zahlen $+1$ oder -1. Andre (runde) Zahlen sind, von der Möglichkeit der Durchmultiplikation oder Durchdivision jeder Bedingungsgleichung mit einer bestimmten Konstanten abgesehen, an sich nicht von vornherein ausgeschlossen,*) praktisch aber n i e a n g e z e i g t.

in den ***Si***-Gl., von der Null abgesehen, stets u n r u n d e Zahlen, deren Grössen durch entsprechende Durchdivision der ***Si***-Gl. mit bestimmten Konstanten im Interesse der einfachern und schärfern Rechnung dem absoluten Durchschnittsbetrag 1 zu nähern sind. Ein runder Koeffizient in einer ***Si***-Gl. kann nur ausnahmsweise durch Zufall entstehen oder könnte durch Durchmultiplikation dieser ursprünglichen ***Si***-Gl. mit einer nichtrunden Konstanten hergestellt werden, was aber praktisch n i e a n g e z e i g t ist.

Ich wiederhole, dass der vorstehende Ueberblick über die Möglichkeiten a) bis c), den die Lehrbücher zugunsten der auch als t h e o r e t i s c h n o t w e n d i g hingestellten Möglichkeit a) unterlassen, nicht ohne Interesse ist. Er hat freilich nur solange Bedeutung, als sämtliche Bedingungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form als exakte Gleichungen zu gelten haben. Die ***Si***-Gl. müssen aber in Wirklichkeit zum Gebrauch erst „linear gemacht" werden, was nur mit grösserer oder geringerer, in den Gleichungen selbst liegender R e c h n u n g s s c h ä r f e geschehen kann. In Beziehung auf die Rechenpraxis der Ausgleichung kommt es auf zwei Dinge an: 1) „S c h ä r f e der Ergebnisse" (keine „u n s t a b i l e" Auflösung, wie mit ganz gutem Ausdruck die Amerikaner sagen, s. u.) und 2) „möglichst e i n f a c h e Rechnung". Rechentechnisch ist also z. B. schon nicht jede der vier elementaren ***Si***-Gl. so viel wert als eine andere und ebensowenig sind die Möglichkeiten a) bis c) etwa gleichwertig. Vgl. auch noch den Abschnitt **13.** a.

6. Berechnung der v-Koeffizienten und des Absolutglieds einer linear zu machenden *Si*-Gl. Die ***Si***-Gl. (ohne Beziehung zu einer der bisherigen Figuren sechsgliedrig angeschrieben):

$$(1)\quad \frac{\sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{3}}{\sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{5} \,.\, \sin \underline{6}} = 1, \text{ d. h. } (2)\quad \frac{\sin(1+v_1) \,.\, \sin(2+v_2) \,.\, \sin(3+v_3)}{\sin(4+v_4) \,.\, \sin(5+v_5) \,.\, \sin(6+v_6)} = 1 \text{ oder}$$

logarithmiert:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\{\log\sin(1+v_1) + \log\sin(2+v_2) + \log\sin(3+v_3)\} \\ &-\{\log\sin(4+v_4) + \log\sin(5+v_5) + \log\sin(6+v_6)\} = 0 \end{aligned}$$

muss zur weitern Verwendung auf die Form gebracht werden:

$$(4)\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + w = 0;$$

dabei sind die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots a_6$ und das Absolutglied w transzendente, also bei gewisser Dezimalstelle, die von der erforderlichen Rechenschärfe abhängt, abzubrechende Zahlen. Der Wert des A b s o l u t g l i e d s ist leicht zu sehen; da die v

*) Wollte man z. B. die Summe von (*II*) und (*IV*) oder von (*I*) und (*III*) als eine der ***Su***-Bedingungsgleichungen aufstellen, so erhielten im ersten Fall die Verbesserungen v_6 und v_7, im zweiten v_2 und v_3 die Koeffizienten 2.