N i c h t k o n v e x e s V i e r e c k. Es ist leicht zu übersehen, dass alles Vorstehende im wesentlichen erhalten bleibt auch für das Viereck, dessen eine Ecke i n n e r h a l b des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt.

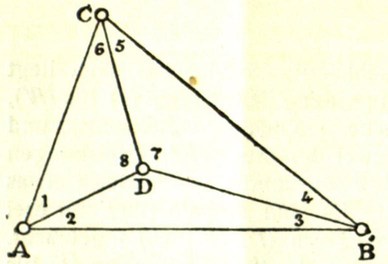

Fig. 2.

Die Figur 2 (in der in D ebenfalls nur 2 Winkel, 7 und 8, als gemessen angenommen sind, da die vorausgesetzten 8 Winkel eine S t a t i o n s bedingung ausschliessen sollen) zeigt, dass hier von den vier Dreiecks-*Su*-Gl. zwei dreigliedrig, eine viergliedrig (A B D mit $\underline{2}+\underline{3}-\underline{7}-\underline{8}+180^\circ=0$), eine sechsgliedrig wird (A B C); die drei Vierecks-*Su*-Gl. lauten hier $\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\underline{6}-\underline{7}=0$, $\underline{2}+\underline{3}+\underline{4}+\underline{5}-\underline{8}=0$, endlich $\underline{1}+\underline{4}+\underline{5}+\underline{6}+\underline{7}+\underline{8}-360^\circ=0$.

3. Die *Si*-Bedingungsgleichungen des Vierecks. Auch hier mag das Viereck zunächst konvex sein. Gehen wir in derselben Weise vor wie bei **2.**, so entspricht jedem der vier Dreiecke, das dort als „Gegendreieck" der vierten Ecke des Dreiecks gegenübersteht (in Fig. 1 A B C Gegendreieck von D, B C D von A usf.), und in denen je die *Su*-Gl. angeschrieben worden ist, nun ein von jeder Ecke ausgehender D r e i s t r a h l, der diese Ecke mit den drei Eckpunkten ihres „G e g e n d r e i e c k s" verbindet.

Es ist bekanntlich und ganz mit Recht üblich geworden, die einzelnen elementaren *Si*-Bedingungsgleichungen zunächst rein arithmetisch aufzustellen durch Ansetzung der Identität $\frac{m\,.\,n\,.\,p}{n\,.\,p\,.\,m}=1$, wobei m, n, p die von der betrachteten Ecke („S p i t z e d e s Z e n t r a l s y s t e m s", besser einfach Pol, wie Amerikaner und Engländer sagen) ausgehenden Strecken bedeuten, und Verwandlung dieser Streckengleichung in eine Sinusgleichung durch Ersetzung der Verhältnisse $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{p}$ und $\frac{p}{m}$ durch die Verhältnisse der Sinus der Winkel, die in den m und n, n und p, p und m als Seiten enthaltenden Dreiecken jenen Seiten gegenüberliegen. Sind (Fig. 3) a, b, c, d, e, f die Längen der Seiten und Diagonalen des konvexen Vierecks und bedeutet wieder U n t e r s t r e i c h u n g dieser Buchstaben die aus den a u s g e g l i c h e n e n Winkeln ohne Widerspruch (d. h. ohne Abhängigkeit vom Rechnungsweg von einer Strecke zu einer andern) sich ergebenden Werte, so erhält man folgeweise für die Punkte I, II, III, IV als Pol die Identitäten:

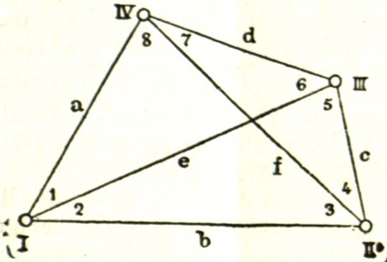

Fig. 3.

$$(\mathrm{I})\ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}\cdot\frac{\underline{b}}{\underline{e}}\cdot\frac{\underline{e}}{\underline{a}}=1,\qquad (\mathrm{II})\ \frac{\underline{b}}{\underline{c}}\cdot\frac{\underline{c}}{\underline{f}}\cdot\frac{\underline{f}}{\underline{b}}=1,$$

$$(\mathrm{III})\ \frac{\underline{c}}{\underline{d}}\cdot\frac{\underline{d}}{\underline{e}}\cdot\frac{\underline{e}}{\underline{c}}=1,\qquad (\mathrm{IV})\ \frac{\underline{d}}{\underline{a}}\cdot\frac{\underline{a}}{\underline{f}}\cdot\frac{\underline{f}}{\underline{d}}=1$$

als die vier elementaren „Seitengleichungen". Die Anordnung der Produkte aus je drei Brüchen ist klar: sie ist so zu treffen, dass die Ersetzung jedes Einzelbruchs durch das Verhältnis der Sinus der dem Zähler und dem Nenner in einem D r e i e c k gegenüberliegenden gemessenen Winkel möglich ist; z. B. in (I) mit der Anordnung $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{e}{a}$ sind a und b Seiten eines Dreiecks I II IV mit den Gegenwinkeln 3 und 8, b und e Seiten in I II III mit den Gegenwinkeln 5 und (3 + 4), e und a Seiten in I III IV mit den Gegenwinkeln (7 + 8) und 6. Bei der Anordnung der Gleichungen (I) bis (IV) ist in jedem f o l g e n d e n Bruch der Z ä h l e r gleich dem Nenner des vorhergehenden; es wäre selbstverständlich auch die Anordnung möglich, dass jeder folgende Bruch als Nenner den Zähler des vorhergehenden erhielte, also z. B. in (I) $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{b}$, nur erhält man mit diesen Gleichungen nichts Neues im Vergleich mit den obigen, sondern nur deren reziproke Bedingungsgleichungen. Nicht möglich zur unmittelbaren Ablesung der gewünschten Sinus-Bedingungsgleichungen wäre aber die Anordnung z. B. bei (I) $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{e} \cdot \frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{e}{a}$.

Ersetzen wir nun in (I) bis (IV) jedes einzelne Streckenverhältnis durch das ihm gemäss dem Dreiecks-Sinussatz gleiche Sinus-Verhältnis, so ergeben sich die vier folgenden einfachsten (nämlich 6-gliedrigen) oder elementaren ***Si***-Gleichungen des Vierecks:

$$\text{(I)} \quad \frac{\sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin (7+8)}{\sin 8 \cdot \sin (3+4) \cdot \sin 6} = 1;$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin (1+2)}{\sin 2 \cdot \sin (5+6) \cdot \sin 8} = 1;$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\sin 7 \cdot \sin 1 \cdot \sin (3+4)}{\sin 4 \cdot \sin (7+8) \cdot \sin 2} = 1;$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin (5+6)}{\sin 6 \cdot \sin (1+2) \cdot \sin 4} = 1.$$

Die vollständige Symmetrie dieser vier Gleichungen ist ebenso leicht zu erkennen, wie oben die unserer vier elementaren ***Su***-Gleichungen (*I*) bis (*IV*). Man braucht neben nur in den untereinanderstehenden Brüchen der vier Gleichungen die Winkelfolge zu beachten. Jede der vier ***Si***-Gleichungen enthält 6 von den gemessenen 8 Winkeln; in jeder Gleichung kommen die zwei Winkel nicht vor, die im Gleichungspol ihren Scheitel haben, ferner kommen in jeder Gleichung zwei Winkel je zweimal vor, einmal allein und einmal in der Summe mit einem andern Winkel. Die Gleichungen (I) bis (IV) stellen ganz in derselben Art die einfachsten (nämlich 6gliedrigen) ***Si***-Gleichungen vor, wie oben die Gleichungen (*I*) bis (*IV*) die einfachsten ***Su***-(Dreiecksschluss-)Gleichungen waren. Auf das für die Benützung der Gleichungen bei Durchführung der Ausgleichung erforderliche Linearmachen durch Logarithmieren und Ausdruck der log sin-Zuwächse in linearer Abhängigkeit von den v der gemessenen Winkel wird erst im unten folgenden Abschnitt **6.** eingegangen; es sei aber gleich hier die lineare Form der drei ersten unserer ***Si***-Gl. angedeutet. Die Form bleibt 6gliedrig, da, wie schon angegeben, in jeder Gleichung zwei Winkel je zweimal vorkommen; in der ersten, zweiten, dritten (vierten falls sie auch noch mit ihren Koeffizienten d angeschrieben würde) kommen die Verbesserungen $v_1, v_2; v_3, v_4; v_5, v_6; (v_7, v_8)$ nicht vor.

$$\text{(I')} \quad a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_8 v_8 + w^{I} = 0;$$

$$\text{(II')} \quad b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + b_7 v_7 + b_8 v_8 + w^{II} = 0;$$

$$\text{(III')} \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_7 v_7 + c_8 v_8 + w^{III} = 0.$$

Es sind wieder nur drei Gleichungen in dieser Form angeschrieben [lineare (v, w)-Form], weil ganz in derselben Art, wie bei den ***Su***-Gl. (*I*) bis (*IV*), so auch an unsern elementaren ***Si***-Gl. (I) bis (IV) nachzuweisen ist, dass nicht alle vier unabhängig voneinander sind: jede der vier Gleichungen ist aus den drei andern einfach abzuleiten und also erfüllt, wenn diese drei erfüllt sind. Um z. B. (IV) aus (I) bis (III) herzuleiten, ist das Produkt von (I) und (III) durch (II) zu dividieren; man beachte dabei die vollständige Analogie zur Herleitung der vierten ***Su***-Gl. aus den drei andern: dort hiess es, Summe von zweien minus der dritten gibt die vierte, und dies trifft also genau ebenso zu für ***Si***-Gleichungen, nachdem diese nur logarithmiert sind. Aus (I') bis (III') müssen sich danach z. B. die Koeffizienten $d_1, d_2, \ldots d_6$ und w^{IV} der ebenfalls linear gemachten Form (IV') von (IV) dadurch ergeben, dass v_7 und v_8 aus (I') bis (III') eliminiert werden;

oder es ergeben sich auf diesem Weg zunächst die Zahlen $k \,.\, d_1,\ k \,.\, d_2, \ldots k \,.\, d_6$, $k \,.\, w^{IV}$, (k beliebige Konstante), was aber wieder keinen Unterschied bringt und nur abermals auf die Tatsache weist, dass eine Bedingungsgleichung der v mit einer beliebigen Konstanten durchmultipliziert werden darf ohne Aenderung ihrer Bedeutung.

Die Analogie zwischen den „elementaren" *Su*- und *Si*-Gleichungen geht aber noch weiter: wie in 2. alle übrigen möglichen *Su*-Gleichungen aus (*I*) bis (*IV*) durch lineare Kombination hergestellt werden konnten, so können hier bei den *Si*-Gleichungen alle übrigen möglichen aus den elementaren (I) bis (IV) durch Multiplikation und Division dieser Gleichungen (Addition und Subtraktion nach ihrer Logarithmierung) aufgestellt werden.

4. Fortsetzung über die *Si*-Bedingungsgleichungen des Vierecks. Neben den 6gliedrigen *Si*-Gl. sind nämlich oft von Bedeutung die 8gliedrigen. Die wichtigsten davon erhält man einfach als Produkt oder als Quotient zweier der Gleichungen (I) bis (IV).

Sowohl (I) × (III) wie auch (II) × (IV) gibt z. B. die Gleichung

$$\text{(V)}\quad \sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{5} \,.\, \sin \underline{7} = \sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{6} \,.\, \sin \underline{8} \ \text{ oder } \ \frac{\sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{5} \,.\, \sin \underline{7}}{\sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{6} \,.\, \sin \underline{8}} = 1.$$

Man kann diese wichtige (und nicht nur fürs Viereck wichtige), weil in sich vollständig symmetrische Gleichung auch unmittelbar einfach am Viereck ablesen, indem man die mechanische Regel, die zu den Gleichungen (I) bis (IV) mit I, II, III, IV als Pol geführt hat, auf den Schnittpunkt S der Diagonalen im konvexen Viereck (Fig. 4) als Pol und den von ihm ausgehenden Vierstrahl anwendet: die Identität

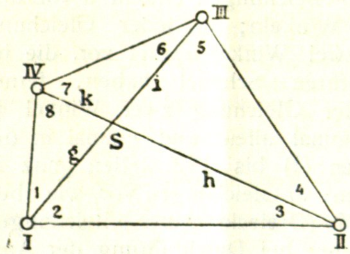

Fig. 4.

$$\frac{\underline{g}}{\underline{h}} \,.\, \frac{\underline{h}}{\underline{i}} \,.\, \frac{\underline{i}}{\underline{k}} \,.\, \frac{\underline{k}}{\underline{g}} = 1$$

gibt nach Ersatz der Seitenverhältnisse durch die Sinusverhältnisse unmittelbar (V). Als Pol einer „Seitengleichung" eignet sich also auch ein anderer Schnittpunkt der Seiten als eine Ecke. Ausser S als Schnittpunkt von (I III) und (II IV) müssen demnach auch noch die Schnittpunkte S′ von (I II), (III IV) und S″ von (II III), (IV I) als Pole betrachtet werden, vgl. Fig. 5. Der Punkt S′ gibt in ganz derselben Weise durch den Ansatz

$$\frac{\underline{l}}{\underline{m}} \,.\, \frac{\underline{m}}{\underline{n}} \,.\, \frac{\underline{n}}{\underline{o}} \,.\, \frac{\underline{o}}{\underline{l}} = 1$$

die Gleichung

$$\text{(VI)}\quad \frac{\sin(\underline{7}+\underline{8}) \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin(\underline{5}+\underline{6}) \,.\, \sin \underline{2}}{\sin(\underline{1}+\underline{2}) \,.\, \sin \underline{7} \,.\, \sin(\underline{3}+\underline{4}) \,.\, \sin \underline{6}} = 1,$$

eine Gleichung, die nichts anderes vorstellt als (I) : (II); und ebenso erhält man durch Benützung von S″ die Gleichung

$$\text{(VII)}\quad \frac{\sin(\underline{7}+\underline{8}) \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin(\underline{1}+\underline{2}) \,.\, \sin \underline{5}}{\sin(\underline{5}+\underline{6}) \,.\, \sin \underline{8} \,.\, \sin(\underline{3}+\underline{4}) \,.\, \sin \underline{1}} = 1,$$

übereinstimmend mit (I) : (IV).

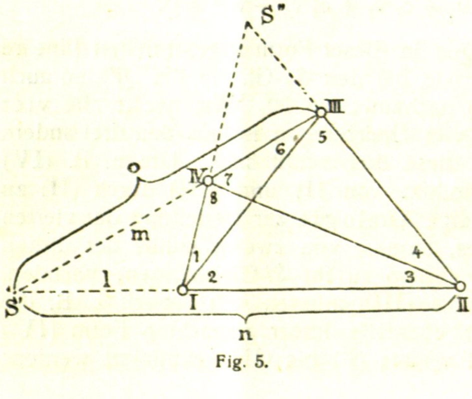

Fig. 5.

Die Gleichungen (VI) und (VII) sind hier noch auf diesem Weg abgeleitet, weil in einem Lehrbuch gesagt wird, man könne derartige weitere achtgliedrige *Si*-Glei-