Der Name **Seitengleichung** für die zweite Art der Bedingungsgleichungen ist ebenfalls nicht durchaus befriedigend. In der einfachsten Form lässt sich eine dieser Gleichungen freilich so schreiben, dass sie ausspricht, das Produkt aus einer Anzahl von je aus zwei Seitenlängen gebildeten Quotienten muss nach der Ausgleichung 1 sein; und auch die weitere Bedeutung dieser Art von Gleichungen, nämlich dass sich von einer bestimmten (z. B. der gegebenen) Seite aus eine andere Seite auf zwei möglichen Rechnungswegen nach der Ausgleichung genau gleich herausstellen muss, wird für den Namen Seitengleichung angeführt. Aber es sind eben unmittelbar keine Seiten, sondern Winkel auszugleichen und so sind auch in jenen Faktorenfolgen von Quotienten mit Seitenlängen im Zähler und im Nenner diese Seiten bei Aufstellung der „Seitengleichungen" sofort durch die Sinus der gegenüberliegenden Dreieckswinkel zu ersetzen. Hiernach halte ich für die „Seitengleichungen" die Bezeichnung Sinusbedingungsgleichungen oder Sinusgleichungen für die beste, wenn man auch einwenden kann, dass in der endgültigen, nämlich für die Rechnung notwendigen linearen Form von den Sinus keine Rede mehr ist. In dieser Form der zweiten Art von Bedingungsgleichungen der v unterscheiden sie sich von der ersten Art von v-Bedingungsgleichungen nur dadurch, dass diese erste Art lineare Zwangsgleichungen für je eine bestimmte Gruppe der v sind, in denen die v am besten nur mit den Koeffizienten (0 oder) $+1$ oder $-1$ vorkommen, die zweite Art aber lineare Zwangsgleichungen für je eine bestimmte v-Gruppe sind, in denen die v (mit dem Koeffizienten 0 oder) mit posit. oder negat. genähert anzusetzenden Koeffizienten auftreten, die von 1 verschieden sind.

Wir wollen trotzdem im folgenden die Bedingungsgleichungen zweiter Art *Sinus*-Gleichungen oder abgekürzt *Si*-Gl. nennen und die Bedingungsgleichungen erster Art als *Winkelsummen*-Gleichungen oder abgekürzt *Su*-Gl. bezeichnen. Dieser letzte Name ist freilich dann ebenfalls nicht befriedigend, wenn die Verwechslung mit *Stations*bedingungsgleichungen (die bei uns hier der Voraussetzung nach fehlen) nicht ausgeschlossen ist; denn auch jede Gleichung dieser dritten Art spricht eine Bedingung für die algebraische Summe einer gewissen v-Gruppe aus.

Als die vier voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen, die im vollständigen Viereck bei acht, ohne Stationsbedingungen gemessenen, Winkeln vorhanden sein müssen, werden in den Lehrbüchern stets als unbedingt erforderlich bezeichnet: drei Dreiecksschlussgleichungen (nach dem Vorstehenden *Su*-Gl.) und eine Seitengleichung (*Si*-Gl.). Man sollte diese Aufstellung nicht ohne Hinweis darauf machen, dass die angegebene Wahl der Bedingungsgleichungen zunächst an sich nicht notwendig ist, wenn auch die Rücksicht auf Einfachheit und Schärfe der Rechnung wohl in jedem Fall auf sie führt.

**2. Die *Su*-Bedingungsgleichungen des Vierecks.** Wir wollen unser Viereck, mit acht gemessenen Winkeln ohne Stationsgleichungen, zunächst konvex annehmen, vgl. Fig. 1, wo die gemessenen Winkel 1 bis 8 eingeschrieben sind. Die Abmessungen des Vierecks mögen vorerst so klein sein, dass die sphärischen Exzesse der notwendigen Rechenschärfe gegenüber verschwinden, die Sollsumme der Winkel jedes Dreiecks 180°, die des Vierecks 360° ist. Die vier Dreiecke, in die die Diagonalen das konvexe Viereck zerlegen, geben folgende vier *Su*-Gl., wenn wir neben den gemessenen Winkeln 1, 2, 3, ..... die ausgeglichenen Werte dieser Winkel mit $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots\ldots$ bezeichnen, so dass also

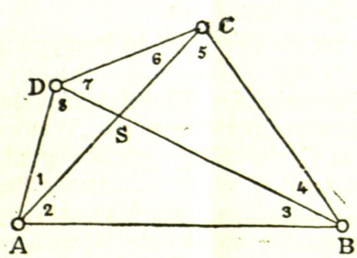

Fig. 1.

$$\underline{1} = 1 + v_1, \quad \underline{2} = 2 + v_2, \quad \underline{3} = 3 + v_3, \ldots \text{usw.}$$

$$(I)\ \underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\underline{8}-180^\circ=0, \quad \text{oder} \quad (I')\ v_1+v_2+v_3+v_8+w_1=0;$$
$$(II)\ \underline{4}+\underline{5}+\underline{6}+\underline{7}-180^\circ=0, \quad \text{oder} \quad (II')\ v_4+v_5+v_6+v_7+w_2=0;$$
$$(III)\ \underline{2}+\underline{3}+\underline{4}+\underline{5}-180^\circ=0, \quad \text{oder} \quad (III')\ v_2+v_3+v_4+v_5+w_3=0;$$
$$(IV)\ \underline{1}+\underline{6}+\underline{7}+\underline{8}-180^\circ=0.$$

Dass diese vier Gleichungen nicht alle unabhängig voneinander sind, liegt auf der Hand; es sind vielmehr nur drei beliebige der Gleichungen (*I*) bis (*IV*), die „Schlussgleichungen" von drei der vier Dreiecke unabhängig voneinander, und die vierte ergibt sich, indem von der Summe von zwei der drei andern Gleichungen (welche Summe den „Schluss" des Vierecks auf 360° ausspricht, wie sogleich etwas weiter zu verfolgen ist) die dritte abgezogen wird. Es sind deshalb oben nur drei (beliebige) von den vier Gleichungen auf die (v, w)-Form (*I'*) (*II'*) (*III'*) gebracht.

Noch auf zwei andere wichtige Arten lassen sich die Gleichungen (*I*) bis (*IV*) linear kombinieren: addieren wir (*I*) und (*II*), und ebenso (*III*) und (*IV*), so erhalten wir je dieselbe Gleichung, die ausspricht, dass die Summe der ausgeglichenen acht Winkel gleich 360° sein muss, nämlich die *Su*-Gl.:

$(V)\ \underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\underline{4}+\underline{5}+\underline{6}+\underline{7}+\underline{8}-360^\circ=0$, eine Gleichung, die auch durch Addition aller vier Gleichungen (I) bis (IV) und Halbierung der Summe entsteht [zur Erläuterung für den Satz, dass eine Bedingungsgleichung*), im Gegensatz zu den „Beobachtungs"-, „Verbesserungs"- oder „Fehlergleichungen" bei vermittelnder Ausgleichung, mit jeder beliebigen konstanten Zahl durchmultipliziert werden darf, ohne die Bedeutung der Gleichung zu verändern]. Andere additive Kombinationen der Gleichungen (*I*) bis (*IV*), nämlich z. B. (*I*) + (*III*), (*I*) + (*IV*), (*II*) + (*III*), (*III*) + (*IV*) (womit dann alle möglichen Kombinationen zu zweien erschöpft wären), sind ohne Bedeutung, mögen aber noch angedeutet sein um zu zeigen, dass in einer *Su*-Gl. nicht notwendig alle Koeffizienten der v (absolut) 1 sein müssen.

Dagegen erhält man noch zwei wichtige Formen von *Su*-Gl. durch subtraktive Kombination je zweier Gl. (I) bis (IV) derart, dass jedesmal zwei Winkel herausfallen: (*I*) − (*IV*) [= − {(*II*) − (*III*)}] und (*I*) − (*III*) [= − {(*II*) − (*IV*)}]. Die zwei Gleichungen lauten:

$$(VI)\ \underline{2}+\underline{3}-\underline{6}-\underline{7}=0$$
$$(VII)\ \underline{1}+\underline{8}-\underline{4}-\underline{5}=0.$$

Sie sind eben deshalb von einiger Bedeutung, weil sie, ebenfalls viergliedrig wie (*I*) bis (*IV*), zeigen, dass in diesen *Su*-Gl., auch wenn sie nur vier Winkel enthalten, keineswegs alle v mit dem Vorzeichen + auftreten müssen. Die Gl. (*VI*) und (*VII*) ergeben sich auch nach der Fig. 1 sofort, wenn die Gleichheit des Winkels in S für die Dreiecke ASB und CSD beachtet wird, aus denen dann folgt $\underline{2}+\underline{3}=\underline{6}+\underline{7}$, ebenso aus den Dreiecken ASD und BSC $\underline{1}+\underline{8}=\underline{4}+\underline{5}$. Man kann die zwei letzten Gleichungen (*VI*) und (*VII*) aber auch, ganz ebenso wie (*V*), als Vierecks-*Su*-Gl. ansehen: wie (*V*) die *Su*-Gl. des „gewöhnlichen" Vierecks ABCD ist, so sind (*VI*), (*VII*) die *Su*-Gl. der „geschränkten" Vierecke ABDCA und ADBCA.

Wir haben also in (*I*) bis (*VII*) vier Dreiecks- und drei Vierecks-*Su*-Gl. Drei davon, z. B. (*I*) bis (*III*), sind unabhängig voneinander (drei ganz beliebige aber nur unter den vier ersten), die vier andern folgen durch lineare Kombination aus ihnen. Werden jene drei durch die v befriedigt, so sind auch alle andern durch die v erfüllt. Daraus folgt, dass nicht alle die vier unabhängigen Bedingungsgleichungen, denen die ausgeglichenen 8 Winkel unseres Vierecks genügen müssen, *Su*-Gl. sein können.

---

*) Leider dringt die Gewohnheit der Astronomen, auch bei einfacher vermittelnder Ausgleichung (mit unabhängigen Messungen und unabhängigen Unbekannten) von Bedingungsgleichungen statt von Verbesserungsgleichungen oder Fehlergleichungen zu sprechen, mehr und mehr auch in die Geodäsie ein. Ich habe in letzter Zeit mehrfach Gelegenheit gehabt, mich in Referaten über neue Veröffentlichungen zur Ausgleichungsrechnung gegen diese ganz überflüssige Unklarheit auszusprechen und möchte das auch hier nicht unterlassen.

Nicht konvexes Viereck. Es ist leicht zu übersehen, dass alles Vorstehende im wesentlichen erhalten bleibt auch für das Viereck, dessen eine Ecke innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt.

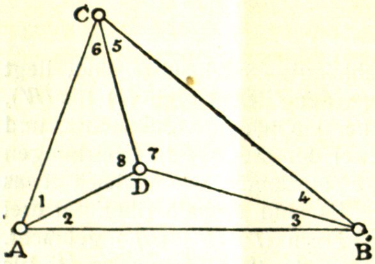

Fig. 2.

Die Figur 2 (in der in D ebenfalls nur 2 Winkel, 7 und 8, als gemessen angenommen sind, da die vorausgesetzten 8 Winkel eine Stationsbedingung ausschliessen sollen) zeigt, dass hier von den vier Dreiecks-*Su*-Gl. zwei dreigliedrig, eine viergliedrig (A B D mit $\underline{2}+\underline{3}-\underline{7}-\underline{8}+180^\circ=0$), eine sechsgliedrig wird (A B C); die drei Vierecks-*Su*-Gl. lauten hier $\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\underline{6}-\underline{7}=0$, $\underline{2}+\underline{3}+\underline{4}+\underline{5}-\underline{8}=0$, endlich $\underline{1}+\underline{4}+\underline{5}+\underline{6}+\underline{7}+\underline{8}-360^\circ=0$.

**3. Die *Si*-Bedingungsgleichungen des Vierecks.** Auch hier mag das Viereck zunächst konvex sein. Gehen wir in derselben Weise vor wie bei **2.**, so entspricht jedem der vier Dreiecke, das dort als „Gegendreieck" der vierten Ecke des Dreiecks gegenübersteht (in Fig. 1 A B C Gegendreieck von D, B C D von A usf.), und in denen je die *Su*-Gl. angeschrieben worden ist, nun ein von jeder Ecke ausgehender Dreistrahl, der diese Ecke mit den drei Eckpunkten ihres „Gegendreiecks" verbindet.

Es ist bekanntlich und ganz mit Recht üblich geworden, die einzelnen elementaren *Si*-Bedingungsgleichungen zunächst rein arithmetisch aufzustellen durch Ansetzung der Identität $\frac{m\,.\,n\,.\,p}{n\,.\,p\,.\,m}=1$, wobei m, n, p die von der betrachteten Ecke („Spitze des Zentralsystems", besser einfach Pol, wie Amerikaner und Engländer sagen) ausgehenden Strecken bedeuten, und Verwandlung dieser Streckengleichung in eine Sinusgleichung durch Ersetzung der Verhältnisse $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{p}$ und $\frac{p}{m}$ durch die Verhältnisse der Sinus der Winkel, die in den m und n, n und p, p und m als Seiten enthaltenden Dreiecken jenen Seiten gegenüberliegen. Sind (Fig. 3) a, b, c, d, e, f die Längen der Seiten und Diagonalen des konvexen Vierecks und bedeutet wieder Unterstreichung dieser Buchstaben die aus den ausgeglichenen Winkeln ohne Widerspruch (d. h. ohne Abhängigkeit vom Rechnungsweg von einer Strecke zu einer andern) sich ergebenden Werte, so erhält man folgeweise für die Punkte I, II, III, IV als Pol die Identitäten:

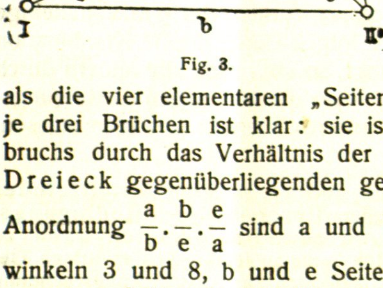

Fig. 3.

$$(\mathrm{I})\quad \frac{\underline{a}}{\underline{b}}\cdot\frac{\underline{b}}{\underline{e}}\cdot\frac{\underline{e}}{\underline{a}}=1,\qquad (\mathrm{II})\quad \frac{\underline{b}}{\underline{c}}\cdot\frac{\underline{c}}{\underline{f}}\cdot\frac{\underline{f}}{\underline{b}}=1,$$

$$(\mathrm{III})\quad \frac{\underline{c}}{\underline{d}}\cdot\frac{\underline{d}}{\underline{e}}\cdot\frac{\underline{e}}{\underline{c}}=1,\qquad (\mathrm{IV})\quad \frac{\underline{d}}{\underline{a}}\cdot\frac{\underline{a}}{\underline{f}}\cdot\frac{\underline{f}}{\underline{d}}=1$$

als die vier elementaren „Seitengleichungen". Die Anordnung der Produkte aus je drei Brüchen ist klar: sie ist so zu treffen, dass die Ersetzung jedes Einzelbruchs durch das Verhältnis der Sinus der dem Zähler und dem Nenner in einem Dreieck gegenüberliegenden gemessenen Winkel möglich ist; z. B. in (I) mit der Anordnung $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{e}{a}$ sind a und b Seiten eines Dreiecks I II IV mit den Gegenwinkeln 3 und 8, b und e Seiten in I II III mit den Gegenwinkeln 5 und (3 + 4), e und a Seiten in I III IV mit den Gegenwinkeln (7 + 8) und 6. Bei der Anordnung der Gleichungen (I) bis (IV) ist in jedem folgenden Bruch der Zähler