

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - \left( \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} - \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} \right) Y_{k-1} + \left[ \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} + 6 t_k + \cos^2 \gamma_k v''_k + \sin^2 \gamma_k v'_k \right] Y_k - \left( \cos^2 \gamma_k v''_k - \sin^2 \gamma_k v'_k \right) Y_{k+1} - \frac{\sin \beta_{k-1}}{4} \left( v'_{k-1} + v''_{k-1} \right) v_{k-1} X_{k-1} - \frac{1}{4} \left[ \sin \beta_k \left( v'_k - v''_k \right) v_k - \sin \beta_{k-1} \left( v'_{k-1} - v''_{k-1} \right) v_{k-1} \right] X_k + \frac{\sin \beta_k}{4} \left( v'_k + v''_k \right) v_k X_{k+1} - \left[ \mathfrak{M}_k \left( \cos^2 \gamma_k v''_k - \sin^2 \gamma_k v'_k \right) - \mathfrak{M}_{k-1} \left( \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} \right) \right] + R_k \left[ \sin \left( \alpha_k + \gamma_k \right) \sin \gamma_k v'_k + \cos \left( \alpha_k + \gamma_k \right) \cos \gamma_k v''_k \right] + R_{k-1} \left[ \sin \left( \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \sin \gamma_{k-1} v'_{k-1} - \cos \left( \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \cos \gamma_{k-1} v''_{k-1} \right] = 0$$

Erste und letzte Gleichung in a) und b) erhält man, indem man  $k = 1$ ,  $X_0 = X_1$ ,  $Y_0 = Y_1$  und  $v'_n = v''_n = 0$  setzt. Die Auflösung der simultanen Gleichungen erfolgt wieder am raschesten durch Iteration, da sie sowohl in den  $X$  als  $Y$  dreigliedrig sind.

c) Bei quadratischen Querviegeln gehen die Gleichungen sowohl unter a) als auch b) in dasselbe einfachere System über:

$$K_{te} \text{ Biegungsgleichung: } - v'_{k-1} v''_{k-1} \cos \beta_{k-1} X_{k-1} + \left[ v'_{k-1} v''_{k-1} + \left\{ v_{k-1} \left( 2 v_{k-1} + v_k \right) + v_k \left( 2 v_k + v_{k-1} \right) \right\} v'_k + v'_k v''_k \right] X_k - v'_k v''_k \cos \beta_k X_{k+1} + 2 v'_{k-1} v_{k-1} \sin \beta_{k-1} Y_{k-1} - 2 v'_k v_k \sin \beta_k Y_{k+1} - 2 \left[ M''_{k-1} \cdot \left( 2 v_{k-1} + v_k \right) + M'_k \cdot \left( 2 v_k + v_{k-1} \right) \right] v'_k - 2 \mathfrak{M}_k v'_k v_k \sin \beta_k - 2 \sin \alpha_k \left( v_k v'_k \cdot R_k - v_{k-1} v'_{k-1} \cdot R_{k-1} \right) = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - v'_{k-1} \cos \beta_{k-1} Y_{k-1} + \left[ v'_{k-1} + 6 t_k + v'_k \right] Y_k - v'_k \cos \beta_k Y_{k+1} - \frac{1}{2} v'_{k-1} v_{k-1} \sin \beta_{k-1} X_{k-1} + \frac{1}{2} v'_k v_k \sin \beta_k X_{k+1} - \left[ \mathfrak{M}_k v' \cos \beta_k - \mathfrak{M}_{k-1} v'_{k-1} \right] + \cos \alpha_k \left( v'_k R_k - v'_{k-1} R_{k-1} \right) = 0$$

d) Näherungslösung: Die Gleichungen unter a), b), c) zeigen, daß die Feldschübe  $X$  sich genügend genau aus den dreigliedrigen Biegungsgleichungen, unter Vernachlässigung der Torsionsmomente  $Y$ , bestimmen lassen.

Anmerkung: Die Vorzahlen in den Biegungsgleichungen sind mit  $24 J_c E$  und jene in den Torsionsgleichungen mit  $6 J_c E$  vervielfacht.

Alfonso Peña BOEUF, Madrid:

### Figure d'équilibre dans les grandes voûtes de béton armé

A l'époque à laquelle le béton armé était inconnu, les vides étaient franchis par des voûtes en maçonnerie, et leur forme s'assujettissait exclusivement à un style d'ornement et d'architecture qui s'imposait à la construction de l'ouvrage.

Après avoir établi la portée et la flèche de la voûte, le tracé de l'intrados et de l'extrados, était généralement assez capricieux fixant leurs épaisseurs, à la clef et à la naissance de la voûte, par des formules empiriques de valeur restreinte malgré leur caractère expérimental.

Au fur et à mesure, que les procédés de la construction ont fait des progrès, en transformant leur caractère d'art en caractère scientifique il était naturel que la vieille méthode, pour la détermination des voûtes, ne pût plus donner satisfaction.

Dans la plupart des cas, on projetait la figure géométrique en appliquant un tracé arbitraire mais, respectant une certaine harmonie avec la conception architectonique.

Le calcul des épaisseurs s'établissait par vérification mécanique des résultantes des forces influentes en observant la méthode classique de Méry, bien plus rationnelle que la méthode empirique et qui serait entièrement acceptable, abstraction faite du principe de fixation du point de passage de l'une des forces.

Le béton armé composition essentiellement hétérogène, exige, pour son bon emploi, une parfaite connaissance du travail auquel sont soumises les différentes matières qui le composent.

Le béton et le fer suivant les propriétés de chacun depuis que leur emploi s'est généralisé dans la construction, on s'est vu obligé de faire intervenir pour leur étude certaines théories dotées d'un coefficient d'élasticité. Étant donné que dans la répartition des forces sur un corps on peut simplement faire appel à la théorie des lignes de tension fixées par la théorie des déformations; d'autant plus que de nombreuses expériences ont prouvé l'assimilation possible des solides naturels aux corps élastiques mais naturellement dans la limite du travail habituel de chaque matière.

L'application du béton armé aux ponts sur voûtes établissant des portées de plus en plus grandes, en s'imposant la condition de réduire au minimum et dans la limite maxima de résistance pratique du matériel le volume du béton, exige l'intervention des études élastiques permettant de connaître la forme du travail en harmonisant les conditions de sécurité et de maximum d'économie.

En appliquant la théorie des déformations élastiques à l'étude des voûtes on comprendra facilement que pour une même portée et une même flèche la forme donnée à la directrice géométrique de l'arc influe d'une façon notoire dans la résistance pour un même système de charge de béton armé étant constitué par l'union de deux matières présentant chacune respectivement des propriétés de compression et de traction, le régime le plus économique du travail sera celui dans lequel prédomineront les compressions avec le coefficient le plus réduit pour les parties métalliques. En pareil cas la forme par excellence d'une voûte serait celle qui permettrait de considérer exclusivement la compression de ses fibres.

Si les différentes charges qui agissent sur une voûte comme par exemple son propre poids, il n'y a pas le moindre doute que l'antifuniculaire de ces charges serait celle qui aurait sa ligne directrice, car de cette façon toutes les résultantes aboutiraient au centre géométrique des sections produisant des compressions absolues.

Il est évidemment très rare que l'on puisse procéder d'une façon aussi simple, car abstraction faite de la charge permanente, les charges que la voûte doit supporter sont généralement variables en forme et en position déformant la figure d'équilibre, par suite des flexions produites.

En outre, les variations du volume dues à la température et à la prise des mortiers altèrent sensiblement le régime des charges verticales produisant des désaxements dans les résultantes qui peuvent être encore plus grands que ceux des surcharges.

En prenant les précautions nécessaires on peut arriver dans la construction à neutraliser les effets de la prise des mortiers; mais il n'en est pas de même avec la température qui ne devient méprisable que lorsque les roütes sont pourvues de trois arceaux consécutifs.

Par conséquent pour chaque position d'un train il existe une courbe antifuniculaire de charge proprement dite et une autre correspondante à celle du train qui marque la ligne d'équilibre de compression; mais par suite du déplacement de la surcharge la ligne précitée enveloppera d'une façon continue la courbe qui devra être adoptée.

En général et en chaque sens il y aura deux courbes définies par la méthode ci-dessus indiquée; et puis qu'on ne peut pas songer à obtenir une courbe unique exclusivement du régime des compressions, la moyenne entre les deux sera celle qui accusera le minimum de flexions. Néanmoins, dans tous les cas il sera indispensable d'accepter les valeurs accusées par le changement thermique.

Pour le régime d'équilibre la nature des supports joue un grand rôle pour ce qui a trait à la voûte. Pour le béton armé la forme rationnelle des supports est l'encastrement des extrémités non pas au point de vue économique, mais pour se

rapprocher le plus possible des conditions supposées dans la théorie. Les ponts voûtés sont toujours composés d'une arche sur laquelle reposent les piliers soutenant les poutres du seuil.

Quand il s'agit de ponts de petites portées (jusqu'à 20 ou 25 m) la rigidité relative de l'arche et du seuil sont comparables et si l'on étudie la courbe plus « ad-hoc » d'équilibre de la voûte, comme élément isolé, soutenant les charges transmises par les piliers et les tympans, la réalité ne confirme pas les résultats supposés.

Effectivement, les piliers encastrés dans la voûte ou dans le tablier produisent des compressions et des flexions.

Supposant même que la voûte agisse comme antifuniculaire de charge et que dans ce sens elle eût un régime de compression seulement, par l'ensemble de la déformation du tablier, piliers et voûtes qui sont solidaires, la fibre neutre des flexions cesserait d'être la directrice étudiée et à la rigueur l'arc entrerait dans le régime de flexions comme pièce dont la directrice serait une courbe comprise entre sa fibre moyenne et l'horizontale des centres de gravité du tablier.

Cette courbe directrice du système total serait définie par l'égalité des moments statiques du tablier et de l'arc dans chaque section et cette courbe est celle qui doit être étudiée comme figure d'équilibre des compressions maxima pour obtenir le système élastique le plus économique.

Au fur et à mesure que la portée des ponts augmente, le rapport entre l'inertie du tablier et de la voûte diminue et quand il s'agit de grandes voûtes, bien que les piliers soient encastrés la flexibilité relative à l'arc conduit à mépriser les flexions transmises.

En ce cas l'effet de la surcharge mobile est très atténué et les deux enveloppentes des antifuniculaires se rapprochent beaucoup et par la suite la moyenne sera la figure à adopter comme directrice. En aucun cas on ne devra négliger les tensions thermiques qui en rapport à la croissance de l'arc augmentent considérablement de valeur étant donné que la cause qui les produit plus rapidement c'est le moment d'inertie il sera indispensable de chercher à l'amoindrir en tâchant d'obtenir des sections qui aient une grande flexibilité relative, c'est à dire, réduire l'épaisseur et augmenter la largeur.

Si la condition nécessaire pour obtenir une relative indépendance entre le tablier et l'arc est due principalement au manque de rigidité qui doit être donné aux piliers servant à rattacher les différents éléments, on devra prendre les dispositions nécessaires pour obtenir cette assimilation. On pourrait préconiser l'articulation inférieure des piliers, mais s'il n'en était pas ainsi et bien qu'encastrés, leur moment d'inertie peut être très petit et on les construirait en forme de cloison qui permettrait une déformation facile, mais nécessaire pour éviter la solidarité de leurs efforts.

Dans toutes les structures qui par suite de leur complexité, et étude élastique d'ensemble, est difficile, il est possible d'introduire quelques simplifications non arbitraires s'ajustant à des dispositions de la construction faisant jouer l'inertie (clef fondamentale des déformations relatives) pour s'orienter dans la distribution des efforts qui permettent d'avoir confiance dans les calculs élastiques.