

bis zu der das Grundwasser bei Ausschaltung der Pumpen anstieg. Der weiße Strich oben deutet den niedersten Wasserstand außerhalb der Spundwand an.

Das Rammen der Spundwandisen, System Larssen, erfolgte im allgemeinen trotz des schweren Schotterbodens ohne Schwierigkeiten, nur vereinzelt wurde das Vortreiben durch größere Kiesstücke verhindert.

Die aus den schon früher erwähnten Gründen in die Wintermonate verlegte Ausführung der Tragwerke brachte für den Bestand des Lehrgerüsts eine nicht erwartete Gefahr. Ein seit mehr als 30 Jahren nicht aufgetretener Eisstoß von

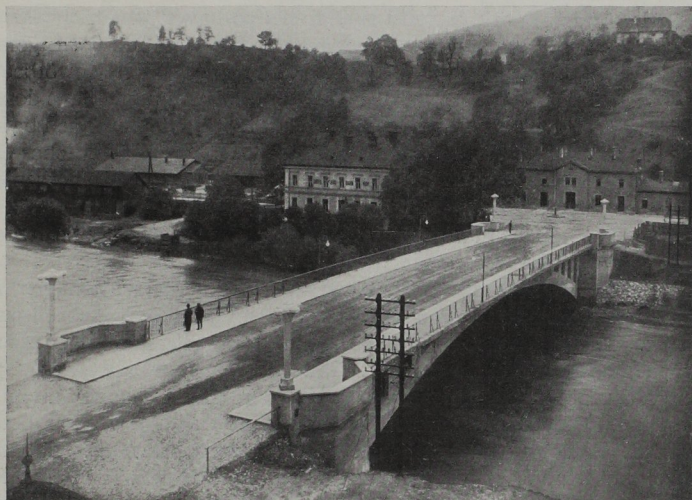


Abb. 6

durchschnittlich 1,5 m Stärke drohte das noch unbelastete Lehrgerüst abzuscheren. Abb. 5 gibt einen Blick vom Lehrgerüstboden gegen die sich aufstauenden Eismassen wieder, die glücklicherweise, ohne nennenswerten Schaden anzustiften, nach Eintritt von Tauwetter wieder abgetriftet werden konnten.

Zur Vervollständigung des Berichtes zeigt schließlich noch Abb. 6 eine Ansicht der fertigen Brücke.

Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Privatdozent für Eisenbetonbau und technische Statik an der E. T. H. Zürich:

### Die praktische Berechnung der durch mehrere Querriegel versteiften Brücken-Zwillingsgewölbe auf Winddruck<sup>1</sup>

Die strenge Lösung der in der Überschrift genannten, für den Brückenbau wichtigen Aufgabe bietet nach dem allgemeinen energo-analytischen Verfahren keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Eine solche Lösung ist auch schon früher von Dr. W. NAKONZ gegeben worden.<sup>2</sup> Bei einer größeren Anzahl von Querriegeln gestaltet sich aber das strenge Verfahren, das allgemeine Elastizitätsgleichungen benützt, dermaßen zeitraubend, daß es kaum allgemeine Verwendung in der Praxis finden kann.

<sup>1</sup> Der vollständige Vortrag ist in der „Schweizerischen Bauzeitung“, H. 18, Jahrg. 1928, erschienen.

<sup>2</sup> Die Berechnung des oberen Rahmen-Windverbandes bei einer Eisenbetonbrücke mit angehängter Fahrbahn. „Die Bautechnik“ 1923, S. 488.

Im folgenden schlagen wir eine Näherungslösung vor, die auf dreigliedrige, d. h. auf die bequemsten Systeme von Elastizitätsgleichungen führt und deren Genauigkeit in den weitaus meisten Fällen mehr als eine genügende ist.

Wir behandeln zwei im Brückenbau besonders häufig vorkommende Fälle:

A. Die Achsen der gleich ausgebildeten Bogen liegen in parallelen Vertikalebene. Dies ist die gewöhnliche Anordnung bei angehängter Fahrbahn (vgl. Abb. 1 auf Tafel 1, S. 768).

B. Die vertikalen Ebenen der gleichseitig liegenden Bogenachsenhälften sind gegeneinander geneigt (Abb. 4 auf Tafel II, S. 770). Eine solche Gewölbespreizung wird bei oben liegender Fahrbahn und größeren Spannweiten aus wirtschaftlichen, Stabilitäts- und auch ästhetischen Gründen zur Anwendung gelangen. Freilich verursacht die Bogenspreizung auch Zusatzspannungen in den Gewölbeebenen infolge der Vertikalbelastungen. Doch fallen diese Nebenspannungen aus dem Rahmen unseres heutigen Themas und wir werden uns an anderer Stelle mit ihnen beschäftigen.

In beiden genannten Fällen sind außerdem zwei gebräuchliche Querriegelanordnungen — die vertikale (in den Abb. 1 und 4 links) und jene senkrecht zur Bogenachse (in den Abb. 1 und 4 rechts) — zu berücksichtigen.

Die Berechnung auf Winddruck beider Zwillingbogentypen stützen wir auf folgende grundlegende Annahmen:

1. Den auf die Gewölbeansichtsflächen stetig verteilt wirkenden Winddruck ersetzen wir durch horizontale, längs der Riegelachsen in den Knotenpunkten angreifende Einzelkräfte. Ebenso sollen an den gleichen Stellen auch die auf den Überbau wirkenden Windkräfte auf das Gewölbe übertragen werden.

Bei der vorausgesetzten Spiegelsymmetrie der Gesamtkonstruktion in Bezug auf ihre vertikale Mittellängsschnittebene hat dies zur Folge, daß beide Bogen genau gleich, die Riegel antisymmetrisch beansprucht werden und daß die Mitten der Querriegel nur eine horizontale, sonst aber keine elastische Verschiebung erleiden. Die Querriegelmitten sind also Momenten-Nullstellen, selbst bei Berücksichtigung der gegensätzlich gleichen vertikalen Durchbiegungen der Bogen.

2. Die Vertikalverschiebungen der Knotenpunkte werden vernachlässigt und nur eine Horizontalverschiebung längs der Riegelachsen angenommen. Diese zweite Annahme findet ihre Begründung in der Kleinheit der aus den Windkräften sich ergebenden Zusatzbelastungen in den Bogenebenen und in der meistens bedeutend größeren Biegesteifigkeit der Bogen in ihren Ebenen gegenüber jenen in der Querrichtung.

Die Annahmen unter 1 und 2, die übrigens ihre volle Bestätigung in den Ergebnissen der genauen Berechnung mit allgemeinen Elastizitätsgleichungen erhalten, und die auch aus bloßer Anschauung einleuchten, ferner und vor allem die vorhandene Verwandtschaft der querversteiften Zwillingbogen mit den ebenen Rahmenträgern weisen auf folgende Berechnungsverfahren für die beiden unter A und B auseinander gehaltenen Fälle:

*Fall A* (Tafel I). Man wählt hier als Überzählige am einfachsten die auf einer Seite der Riegel in den Knotenpunkten auftretenden Bogen-Biegemomente  $X$  und Torsionsmomente  $Y$ . An Hand der Abb. 2, die die wirkenden Kräfte im Hauptsystem darstellt und mit Hilfe der MOHRschen Arbeitsgleichung, deren eminent praktische Bedeutung sich ganz besonders bei den Raumtragwerken zeigt, kann man das System der Elastizitätsgleichung für die  $X$  und  $Y$  unmittelbar anschreiben.

Man ordnet die Gleichungen am besten in zwei simultane Gruppen an: 1. in die *Biegungsgleichungen*, die zu den  $X = 1$  als virtuelle Belastungszustände gehören und 2. in die *Torsionsgleichungen*, die die Bedeutung haben, daß die virtuellen Arbeiten der  $Y = 1$  infolge des wirklichen Verschiebungszustandes verschwinden.

Dank der getroffenen Wahl für die Überzähligen sind beide simultanen Gleichungssysteme, die also im Grunde genommen ein einziges vollständiges System bilden, sowohl in den  $X$  als auch  $Y$  dreigliedrig, und zwar von dem häufigst auftretenden Typus mit negativen Matrixvorzeichen außerhalb der Hauptdiagonale.<sup>1</sup> Ihre Auflösung erfolgt am einfachsten durch Iteration, indem man vorerst im ersten Gleichungssystem die  $Y = 0$  setzt und durch die bekannte einfache Reduktion der verbleibenden, nun dreigliedrigen  $X$ -Gleichungen die  $X$  ermittelt und aus dem zweiten, jetzt ebenfalls dreigliedrigen  $Y$ -System auf gleiche Weise die  $Y$  findet. Die Gleichungen lassen sich ebenso leicht für vertikale als auch senkrecht zur Bogenachse liegende Querriegel aufstellen. Bemerkenswert ist die starke Vereinfachung und der Übergang in dasselbe Gleichungssystem in beiden Fällen bei Annahme *quadratischer* Riegel. In diesem Sonderfall kommt besonders deutlich die Verwandtschaft mit dem ebenen Rahmenträger in Erscheinung.

*Fall B* (Tafel II). Man könnte auch hier mit dem gleichen statisch unbestimmten Hauptsystem auskommen. Nur lassen sich dann die  $X$ - und  $Y$ -Gleichungen nicht mehr so unmittelbar wie unter *A* anschreiben. Dies gelingt aber wieder, wenn man hier am einfachsten die Feldschübe  $X$ , die in der Längssymmetrieebene und in den einzelnen Felderebenen in den Mitten der Riegelachsen angreifen, als Überzählige wählt. Als zweite Gruppe von Überzähligen führt man wieder die senkrecht zur Symmetrieebene wirkenden Drillmomente  $Y$  der einzelnen Bogenstäbe ein. Die MOHRsche Arbeitsgleichung, hier ganz besonders wirksam durch die bekannte Trapezformel unterstützt, liefert wieder zwei Gleichungsgruppen von demselben wie unter *A* gefundenen, in den  $X$  und  $Y$  dreigliedrigen Typus. Es sei betont, daß hier, wie im Fall *A*, die Dreigliedrigkeit der Gleichungen in den  $X$  und  $Y$  nur von der zweckmäßigen Wahl der Überzähligen und nicht etwa von der Annahme gerader Bogenstäbe und konstanten Trägheitsmomentes im Bereich der Einzelstäbe abhängig ist.

Infolge der Symmetrie im Tragwerk und in den Belastungen hat man die Gleichungen im Fall *A* und *B* nur für die auf einer Gewölbehälfte liegenden Knotenpunkte anzuschreiben. Die erste und letzte Gleichung beider simultanen Gleichungssysteme, die jeweils nur zwei  $X$  und zwei  $Y$  enthalten, erhält man aus den leicht ersichtlichen Randbedingungen

$$X_1 = X_0, \quad Y_1 = Y_0; \quad r'_n = r''_n = 0,$$

wo  $r'_n$  und  $r''_n$  die verschwindenden Biegunslängen der Widerlager bei vollkommener Einspannung des Gewölbes bedeuten. Die Belastungsglieder in den  $X$ - und  $Y$ -Gleichungen sind aus den halben Windkragemomenten des im Scheitel aufgeschnittenen Gewölbes zu ermitteln, wobei die Torsionsmomente, infolge der fehlenden Torsionssteifigkeit der Gewölbe im Hauptsystem, von den Riegeln aufgenommen werden müssen.

Durchgerechnete Zahlenbeispiele haben zu dem überraschenden und willkommenen Ergebnis geführt, daß die Torsionsbeanspruchung schon bei einer mäßig großen Zahl von Querriegeln gegenüber der Biegungsbeanspruchung in der Querrichtung verschwindet und daß also die Biegemomentenverteilung in der Querrichtung der Bogen und in den Riegeln infolge des Winddruckes sich aus einem einzigen dreigliedrigen Gleichungssystem, das sich aus den Biegunsgleichungen unter *A* und *B* durch Weglassen der Torsionsglieder ergibt, sehr rasch und praktisch genau erschließen läßt. Bei zur Bogenachse senkrechten Riegeln unterscheiden sich die so gewonnenen Biegunsgleichungen praktisch nicht von den entsprechenden Gleichungen des ebenen symmetrischen Stockwerkrahmens mit vertikalen bzw. gespreizten Ständern.

<sup>1</sup> Vgl. PASTERNAK: Berechnung vielfach statisch unbestimmter Stabtragwerke. Verlag Gebr. Leemann, Zürich u. Leipzig, 1927.

Tafel I

A. Berechnung auf Winddruck  
paralleler, durch mehrere Querriegel versteifter Zwillingsgewölbe

a) Vertikale Querriegel

b) Zur Gewölbeachse senkrechte Querriegel

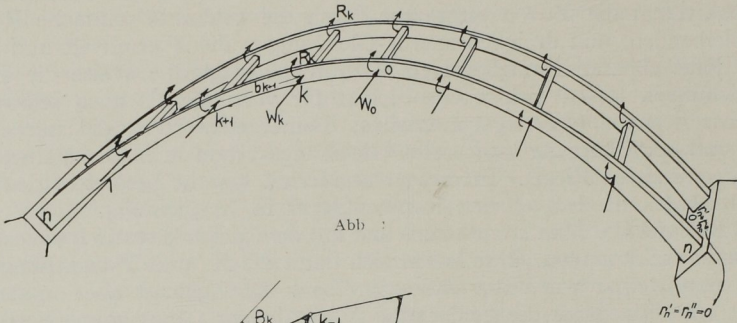


Abb. 1

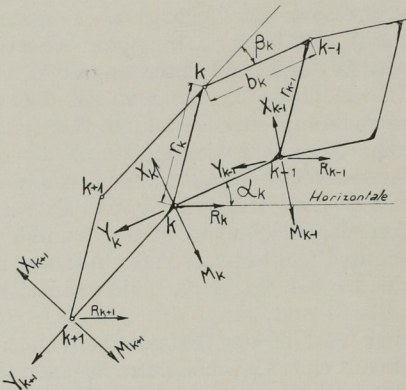


Abb. 2. Biegemomente im stat. unbest. Hauptsystem (dargestellt durch ihre Achsen)

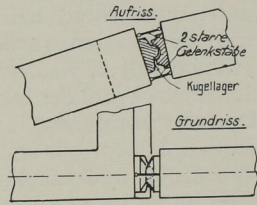


Abb. 3. Anschlüsse der Bogenstäbe im stat. unbest. Hauptsystem

1. *Grundlegende Annahme:* Knotenpunkte verschieben sich nur horizontal längs der Riegelachsen.
2. *Wahl der Überzähligen:* Bei paralleler Lage der Zwillingsgewölbe wählt man am einfachsten die in den Knotenpunkten, auf einer Seite der Riegel, in den Gewölben wirkenden Quer-Biegemomente ( $X$ ) und die Torsionsmomente ( $Y$ ). In den Gewölbeebenen bleibt also, unter Ausschaltung der Torsionssteifigkeit, die volle Gewölbewirkung bestehen (siehe Abb. 3).

3. *Bezeichnungen:*  $r' = \frac{J_c}{J_1} \cdot r$  } horizontale und vertikale (bzw. tangentielle und normale)  
 $r'' = \frac{J_c}{J_2} \cdot r$  } Biegunslängen der Riegel.

$$\left. \begin{aligned} b' &= \frac{J_c}{J} \cdot b \text{ Biegunslänge in der Querrichtung} \\ t &= \frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{T} \cdot b = \frac{2(m+1)}{m} \cdot \frac{J_c}{T} \cdot b \text{ Torsionslänge} \end{aligned} \right\} \text{ der Bogenstäbe}$$

$$M_k = \frac{1}{2} b_k \left( \frac{W_0}{2} + \sum_{i=1}^{i=k-1} W_i \right)$$

$R_k$  = Biegemoment in der Riegel-Vertikalebene infolge des Winddruckes auf den Gewölbeaufbau.

4. *Elastizitätsgleichungen:* Sie können in der Form simultaner Biegungs- und Torsionsgleichungen als virtuelle Arbeiten infolge  $X_k = 1$  und  $Y_k = 1$  als Belastungszustand und dem Gesamtbelastungszustand als Verschiebungszustand unmittelbar angeschrieben werden. (Alle Vorzahlen sind mit  $6J_cE$  vervielfacht).

a) Bei vertikalen Querriegeln:

$$K_{te} \text{ Biegungsgleichung: } - (v' \cos \alpha_{k-1} \cos \alpha_k + v''_{k-1} \sin \alpha_{k-1} \sin \alpha_k) X_{k-1} + [v'_{k-1} \cos^2 \alpha_k + v''_{k-1} \sin^2 \alpha_k + 6 b'_k + v' \cos^2 \alpha_k + v'' \sin^2 \alpha_k] X_k - (v'_k \cos \alpha_k \cos \alpha_{k+1} + v''_k \sin \alpha_k \sin \alpha_{k+1}) X_{k+1} + (v'_{k-1} \cos \alpha_k \sin \alpha_{k-1} - v''_{k-1} \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k) Y_{k-1} - (v'_{k-1} - v''_{k-1} + v'_k - v''_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k Y_k + (v'_k \cos \alpha_k \sin \alpha_{k+1} - v''_k \cos \alpha_{k+1} \sin \alpha_k) Y_{k+1} - [(v'_{k-1} \cos^2 \alpha_{k-1} + v''_{k-1} \sin^2 \alpha_{k-1} + v'_k \cos^2 \alpha_k + v''_k \sin^2 \alpha_k + 3 b'_k) M_k - (v'_k \cos \alpha_k \cos \alpha_{k+1} + v''_k \sin \alpha_k \sin \alpha_{k+1}) M_{k+1} + (R_k v'_k - R_{k-1} v''_{k-1}) \sin \alpha_k] = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - (v'_{k-1} \sin \alpha_{k-1} \sin \alpha_k + v'_{k-1} \cos \alpha_{k-1} \cos \alpha_k) Y_{k-1} + [v'_{k-1} \sin^2 \alpha_k + v''_{k-1} \cos^2 \alpha_k + 6 t_k + v'_k \sin^2 \alpha_k + v''_k \cos^2 \alpha_k] Y_k - (v'_k \sin \alpha_k \sin \alpha_{k+1} + v''_k \cos \alpha_k \cos \alpha_{k+1}) Y_{k+1} + (v'_{k-1} \sin \alpha_k \cos \alpha_{k-1} - v''_{k-1} \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k) X_{k-1} - (v'_{k-1} - v''_{k-1} + v'_k - v''_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k X_k + (v'_k \sin \alpha_k \cos \alpha_{k+1} - v''_k \cos \alpha_{k+1} \sin \alpha_k) X_{k+1} + (v'_{k-1} - v''_{k-1}) \sin \alpha_k \cos \alpha_k M_k - (v'_k \cos \alpha_{k+1} \sin \alpha_k - v''_k \sin \alpha_{k+1} \cos \alpha_k) M_{k+1} + (R_k \cdot v'_k - R_{k-1} \cdot v''_{k-1}) \cos \alpha_k = 0$$

b) Bei normal zur Bogenachse liegenden Riegeln: mit  $\frac{\beta}{2} = \gamma$ .

$$K_{te} \text{ Biegungsgleichung: } - (v'_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1} - v''_{k-1} \sin^2 \gamma_{k-1}) X_{k-1} + [(v'_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1} + v''_{k-1} \sin^2 \gamma_{k-1}) + 6 b'_k + (v'_k \cos^2 \gamma_k + v''_k \sin^2 \gamma_k)] X_k - (v'_k \cos^2 \gamma_k - v''_k \sin^2 \gamma_k) X_{k+1} - \frac{1}{2} \sin \beta_{k-1} (v'_{k-1} + v''_{k-1}) Y_{k-1} - \frac{1}{2} [(v'_{k-1} - v''_{k-1}) \sin \beta_{k-1} - (v'_k - v''_k) \sin \beta_k] Y_k + \frac{1}{2} \sin \beta_k (v'_k + v''_k) Y_{k+1} - [( \cos^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} + 3 b'_k + v'_k \cos^2 \gamma_k + v''_k \sin^2 \gamma_k) \cdot M_k - (\cos^2 \gamma_k v'_k - \sin^2 \gamma_k v''_k) M_{k+1}] + R_k [\sin (\alpha_k + \gamma_k) \cdot \cos \gamma_k \cdot v'_k - \cos (\alpha_k + \gamma_k) \sin \gamma_k \cdot v''_k] - R_{k-1} [\sin (\alpha_{k-1} + \gamma_{k-1}) \cdot \cos \gamma_{k-1} v'_{k-1} + \cos (\alpha_{k-1} + \gamma_{k-1}) \cdot \sin \gamma_{k-1} \cdot v''_{k-1}] = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - (\cos^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} - \sin^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1}) Y_{k-1} + (v''_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1} + v'_{k-1} \sin^2 \gamma_{k-1} + 6 t_k + v'_k \cos^2 \gamma_k + v''_k \sin^2 \gamma_k) Y_k - (v''_k \cos^2 \gamma_k - v'_k \sin^2 \gamma_k) Y_{k+1} + \frac{1}{2} \sin \beta_{k-1} \cdot (v'_{k-1} + v''_{k-1}) X_{k-1} - \frac{1}{2} [\sin \beta_{k-1} (v'_{k-1} - v''_{k-1}) - \sin \beta_k (v'_k - v''_k)] X_k - \frac{1}{2} \sin \beta_k (v'_k + v''_k) X_{k+1} + \frac{1}{2} (v'_k + v''_k) M_{k+1} \sin \beta_k + \frac{1}{2} [(v'_{k-1} - v''_{k-1}) \sin \beta_{k-1} - (v'_k - v''_k) \sin \beta_k] \cdot M_k + R_k [\sin (\alpha_k + \gamma_k) \cdot \sin \gamma_k \cdot v'_k + \cos (\alpha_k + \gamma_k) \cdot \cos \gamma_k \cdot v''_k] - R'_{k-1} [\cos (\alpha_{k-1} + \gamma_{k-1}) \cdot \cos \gamma_{k-1} \cdot v'_{k-1} - \sin (\alpha_{k-1} + \gamma_{k-1}) \cdot \sin \gamma_{k-1} \cdot v''_{k-1}] = 0$$

Die ersten und letzten Gleichungen in beiden Systemen ergeben sich aus den Randbedingungen:

$$1. X_0 = X_1, Y_0 = Y_1 \text{ und } 2. v'_n = v''_n = 0$$

c) Bei quadratischen Riegeln: mit  $v' = v''$  gehen die Gleichungen unter a) und b) auf dasselbe, noch viel einfachere simultane System über:

$$K_{te} \text{ Biegungsgleichung: } - v'_{k-1} \cos \beta_{k-1} X_{k-1} + (v'_{k-1} + 6 b'_k + v'_k) X_k - v'_k \cos \beta_k X_{k+1} - \sin \beta_{k-1} v'_{k-1} Y_{k-1} + \sin \beta_k v'_k Y_{k+1} - [(v'_{k-1} + 3 b'_k + v'_k) M_k - \cos \beta_k M_{k+1}] + [R_k \cdot v'_k - R_{k-1} \cdot v'_{k-1}] \cdot \sin \alpha_k = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - v'_{k-1} \cos \alpha_{k-1} Y_{k-1} + (v'_{k-1} + 6 t_k + v'_k) Y_k - v'_k \cos \beta_k Y_{k+1} + \sin \beta_{k-1} v'_{k-1} X_{k-1} - \sin \beta_k v'_k X_{k+1} + v'_k \sin \beta_k M_{k+1} + (R_k v'_k - R_{k-1} v'_{k-1})$$

Die simultanen X- und Y-Gleichungen unter a), b), c) sind sowohl in den X als auch in den Y dreigliedrig. Ihre Auflösung erfolgt deswegen durch Iteration sehr rasch.

d) Näherungslösung: Aus a), b) und c) erkennt man, daß für Bemessungszwecke die Y vernachlässigt und die X aus den nun dreigliedrigen Biegungsgleichungen berechnet werden können.

Tafel II

B. Berechnung auf Winddruck  
gespreizter, durch mehrere Querriegel versteifter Zwillingsgewölbe

a) Vertikale Querriegel

b) Zur mittleren Bogenachse senkrechte Querriegel

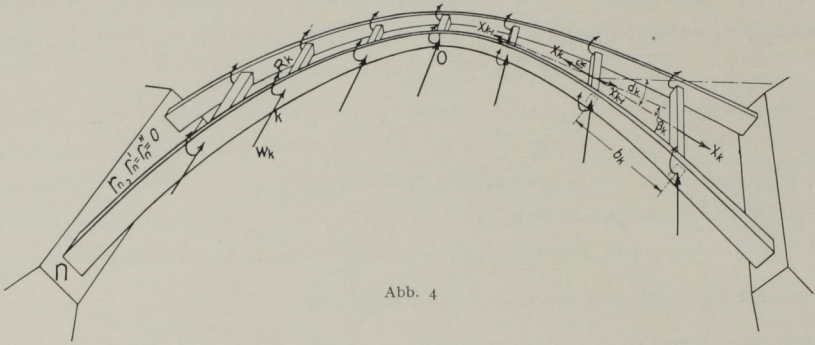


Abb. 4

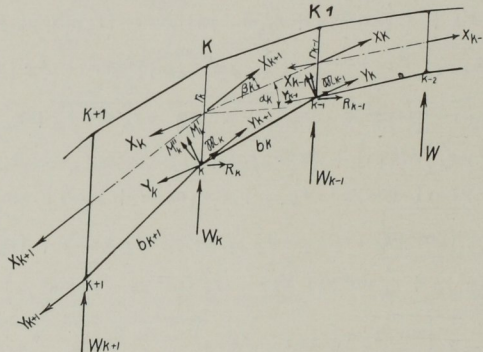


Abb. 5. Kräfte im stat. unbest. Hauptsystem

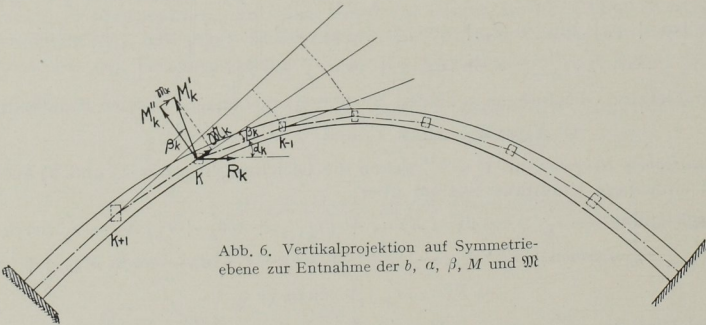


Abb. 6. Vertikalprojektion auf Symmetrie-ebene zur Entnahme der  $b, a, \beta, M$  und  $\mathfrak{M}$

$M'_k$  Windkragnomente des im Scheitel aufgeschnittenen } im Knotenpunkt  $K$ .  
 $M''_k = M_k \cos \beta_k$  Bogens  
 $\mathfrak{M}_k = M'_k \sin \beta_k$  Torsionsmoment in  $k$ , das im gewählten Hauptsystem vom Riegel auf-  
 zunehmen ist.  
 $R_k =$  äußeres Biegemoment des Riegels (vom Überbau) in der Vertikalebene.

1. *Grundlegende Annahme:* Knotenpunkte verschieben sich nur horizontal.

2. *Wahl der Überzähligen:* Bei gespreizten Zwillingsbögen wählt man am einfachsten als Überzählige die an den Riegeln in der Symmetrieebene angreifenden *Feldschübe*  $X$  und die zur Symmetrieebene senkrechten *Drillmomente*  $Y$  der Bogenstäbe. Die Gewölbewirkung in den Bogenebenen bleibt also vollkommen erhalten. Die Zusatzspannungen infolge der Gewölbepreisung sind bei Vertikalbelastung gesondert zu bestimmen.

3. *Ergänzende Bezeichnungen:*  $r' = \frac{J_c}{J_1} \cdot r$  } horizontale und vertikale bzw. tangentielle und  
 $r'' = \frac{J_c}{J_2} \cdot r$  } normale Biegunslängen der Riegel.  
 $b' = \frac{J_c}{J} \cdot b$  = Biegunslänge in der Querrichtung }  
 $t = \frac{E}{G} \cdot \frac{J_c}{T} \cdot b = \frac{2(m+1)}{m} \cdot \frac{J_c}{T} \cdot b$  = Torsionslänge } der Bogenstäbe.

4 *Elastizitätsgleichungen:* Man erhält durch Anschreiben der zu  $X_k = 1$  und  $Y_k = 1$  und dem gesamten Verschiebungszustand gehörenden virtuellen Arbeiten und Benützung der Trapezformel unmittelbar zwei Systeme simultaner, in den  $X$  und  $Y$  dreigliedrigen, Gleichungen:

a) *Bei vertikalen Querriegeln:*

$$K_{te} \text{ Biegunsgleichung: } - \left( r'_{k-1} \cos a_{k-1} \cos a_k + r''_{k-1} \sin a_{k-1} \sin a_k \right) r_{k-1}^2 X_{k-1} + \left[ \left( r'_{k-1} \cos^2 a_k + r''_{k-1} \sin^2 a_k \right) r_{k-1}^2 + b'_k \left\{ r_{k-1} (2r_{k-1} + r_k) + r_k (2r_k + r_{k-1}) \right\} + \left( r'_k \cos^2 a_k + r''_k \sin^2 a_k \right) r_k^2 \right] X_k - \left( r'_k \cos a_k \cos a_{k+1} + r''_k \sin a_k \sin a_{k+1} \right) r_k^2 X_{k+1} - 2 \left( r'_{k-1} \sin a_{k-1} \cos a_k - r''_{k-1} \sin a_k \cos a_{k-1} \right) r_{k-1} Y_{k-1} + \sin 2 a_k \left[ \left( r'_{k-1} - r''_{k-1} \right) r_{k-1} + \left( r'_k - r''_k \right) r_k \right] Y_{k-2} + \left( r'_k \sin a_{k+1} \cos a_k - r''_k \sin a_k \cos a_{k+1} \right) r_k Y_{k+1} - 2 \left[ M''_{k-1} \cdot (2r_{k-1} + r_k) + M'_k \cdot (2r_k + r_{k-1}) \right] b'_k - \left[ 2 \mathfrak{M}_k r_k \left( r'_k \cos a_k \sin a_{k+1} - r''_k \sin a_k \cos a_{k+1} \right) - \mathfrak{M}_{k-1} \left( r'_{k-1} - r''_{k-1} \right) r_{k-1} \sin 2 a_k \right] - 2 \sin a_k \left( r_k r'_k \cdot R_k - r_{k-1} \cdot r'_{k-1} \cdot R_{k-1} \right) = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - \left( r'_{k-1} \sin a_{k-1} \sin a_k + r''_{k-1} \cos a_{k-1} \cos a_k \right) Y_{k-1} + \left[ \left( r'_{k-1} \sin^2 a_k + r''_{k-1} \cos^2 a_k \right) + 6 t k + \left( r'_k \sin^2 a_k + r''_k \cos^2 a_k \right) \right] Y_k - \left( r'_k \sin a_k \sin a_{k+1} + r''_k \cos a_k \cos a_{k+1} \right) Y_{k+1} - \frac{1}{2} \left( r'_{k-1} \cos a_{k-1} \sin a_k - r''_{k-1} \cos a_k \sin a_{k-1} \right) r_{k-1} X_{k-1} + \frac{\sin 2 a_k}{4} \left[ \left( r'_{k-1} - r''_{k-1} \right) r_{k-1} + \left( r'_k - r''_k \right) r_k \right] X_k - \frac{1}{2} \left( r'_k \sin a_k \cos a_{k-1} - r''_k \cos a_k \sin a_{k+1} \right) r_k X_{k+1} - \left[ \mathfrak{M}_k \left( r'_k \sin a_k \sin a_{k+1} + r''_k \cos a_k \cos a_{k+1} \right) - \mathfrak{M}_{k-1} \left( r'_{k-1} \sin^2 a_k + r''_{k-1} \cos^2 a_k \right) \right] + \cos a_k \cdot \left( r'_k \cdot R_k - r''_{k-1} \cdot R_{k-1} \right) = 0$$

b) *Bei zur Bogenachse senkrechten Querriegeln:* mit  $\frac{\beta}{2} = \gamma$  erhält man:

$$K_{te} \text{ Biegunsgleichung: } - \left( \cos^2 \gamma_{k-1} r'_{k-1} - \sin^2 \gamma_{k-1} r''_{k-1} \right) r_{k-1}^2 X_{k-1} + \left[ \left( \cos^2 \gamma_{k-1} r'_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} r''_{k-1} \right) r_{k-1}^2 + \left\{ r_{k-1} (2r_{k-1} + r_k) + r_k (2r_k + r_{k-1}) \right\} b'_k + \left( \cos^2 \gamma_k r'_k + \sin^2 \gamma_k r''_k \right) \cdot r_k^2 \right] X_k - \left( \cos^2 \gamma_k r'_k - \sin^2 \gamma_k r''_k \right) r_k^2 X_{k+1} + r_{k-1} \left( r'_{k-1} + r''_{k-1} \right) \sin \beta_{k-1} Y_{k-1} - \left[ r_k \left( r'_k - r''_k \right) \sin \beta_k - r_{k-1} \left( r'_{k-1} - r''_{k-1} \right) \sin \beta_{k-1} \right] Y_{k-2} + r_k \left( r'_k + r''_k \right) \sin \beta_k Y_{k+1} - 2 \left[ M_{k-1} \cdot (2r_{k-1} + r_k) + M_k \cdot (2r_k + r_{k-1}) \right] b'_k - \left[ r_k \cdot \left( r'_k + r''_k \right) \sin \beta_k \cdot \mathfrak{M}_k - r_{k-1} \left( r'_{k-1} - r''_{k-1} \right) \sin \beta_{k-1} \mathfrak{M}_{k-1} \right] - 2 r_k R_k \left[ \sin \left( a_k + \gamma_k \right) \cos \gamma_k r'_k - \cos \left( a_k + \gamma_k \right) \sin \gamma_k r''_k \right] + 2 r_{k-1} R_{k-1} \left[ \sin \left( a_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \cos \gamma_{k-1} \cdot r'_{k-1} + \cos \left( a_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \sin \gamma_{k-1} \cdot r''_{k-1} \right] = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - \left( \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} - \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} \right) Y_{k-1} + \left[ \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} + 6 t_k + \cos^2 \gamma_k v''_k + \sin^2 \gamma_k v'_k \right] Y_k - \left( \cos^2 \gamma_k v''_k - \sin^2 \gamma_k v'_k \right) Y_{k+1} - \frac{\sin \beta_{k-1}}{4} \left( v'_{k-1} + v''_{k-1} \right) v_{k-1} X_{k-1} - \frac{1}{4} \left[ \sin \beta_k \left( v'_k - v''_k \right) v_k - \sin \beta_{k-1} \left( v'_{k-1} - v''_{k-1} \right) v_{k-1} \right] X_k + \frac{\sin \beta_k}{4} \left( v'_k + v''_k \right) v_k X_{k+1} - \left[ \mathfrak{M}_k \left( \cos^2 \gamma_k v''_k - \sin^2 \gamma_k v'_k \right) - \mathfrak{M}_{k-1} \left( \cos^2 \gamma_{k-1} v''_{k-1} + \sin^2 \gamma_{k-1} v'_{k-1} \right) \right] + R_k \left[ \sin \left( \alpha_k + \gamma_k \right) \sin \gamma_k v'_k + \cos \left( \alpha_k + \gamma_k \right) \cos \gamma_k v''_k \right] + R_{k-1} \left[ \sin \left( \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \sin \gamma_{k-1} v'_{k-1} - \cos \left( \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} \right) \cos \gamma_{k-1} v''_{k-1} \right] = 0$$

Erste und letzte Gleichung in a) und b) erhält man, indem man  $k = 1$ ,  $X_0 = X_1$ ,  $Y_0 = Y_1$  und  $v'_n = v''_n = 0$  setzt. Die Auflösung der simultanen Gleichungen erfolgt wieder am raschesten durch Iteration, da sie sowohl in den  $X$  als  $Y$  dreigliedrig sind.

c) Bei quadratischen Querviegeln gehen die Gleichungen sowohl unter a) als auch b) in dasselbe einfachere System über:

$$K_{te} \text{ Biegungsgleichung: } - v'_{k-1} v''_{k-1} \cos \beta_{k-1} X_{k-1} + \left[ v'_{k-1} v''_{k-1} + \left\{ v_{k-1} \left( 2 v_{k-1} + v_k \right) + v_k \left( 2 v_k + v_{k-1} \right) \right\} v'_k + v'_k v''_k \right] X_k - v'_k v''_k \cos \beta_k X_{k+1} + 2 v'_{k-1} v_{k-1} \sin \beta_{k-1} Y_{k-1} - 2 v'_k v_k \sin \beta_k Y_{k+1} - 2 \left[ M''_{k-1} \cdot \left( 2 v_{k-1} + v_k \right) + M'_k \cdot \left( 2 v_k + v_{k-1} \right) \right] v'_k - 2 \mathfrak{M}_k v'_k v_k \sin \beta_k - 2 \sin \alpha_k \left( v_k v'_k \cdot R_k - v_{k-1} v'_{k-1} \cdot R_{k-1} \right) = 0$$

$$K_{te} \text{ Torsionsgleichung: } - v'_{k-1} \cos \beta_{k-1} Y_{k-1} + \left[ v'_{k-1} + 6 t_k + v'_k \right] Y_k - v'_k \cos \beta_k Y_{k+1} - \frac{1}{2} v'_{k-1} v_{k-1} \sin \beta_{k-1} X_{k-1} + \frac{1}{2} v'_k v_k \sin \beta_k X_{k+1} - \left[ \mathfrak{M}_k v' \cos \beta_k - \mathfrak{M}_{k-1} v'_{k-1} \right] + \cos \alpha_k \left( v'_k R_k - v'_{k-1} R_{k-1} \right) = 0$$

d) Näherungslösung: Die Gleichungen unter a), b), c) zeigen, daß die Feldschübe  $X$  sich genügend genau aus den dreigliedrigen Biegungsgleichungen, unter Vernachlässigung der Torsionsmomente  $Y$ , bestimmen lassen.

Anmerkung: Die Vorzahlen in den Biegungsgleichungen sind mit  $24 J_c E$  und jene in den Torsionsgleichungen mit  $6 J_c E$  vervielfacht.

Alfonso Peña BOEUF, Madrid:

### Figure d'équilibre dans les grandes voûtes de béton armé

A l'époque à laquelle le béton armé était inconnu, les vides étaient franchis par des voûtes en maçonnerie, et leur forme s'assujettissait exclusivement à un style d'ornement et d'architecture qui s'imposait à la construction de l'ouvrage.

Après avoir établi la portée et la flèche de la voûte, le tracé de l'intrados et de l'extrados, était généralement assez capricieux fixant leurs épaisseurs, à la clef et à la naissance de la voûte, par des formules empiriques de valeur restreinte malgré leur caractère expérimental.

Au fur et à mesure, que les procédés de la construction ont fait des progrès, en transformant leur caractère d'art en caractère scientifique il était naturel que la vieille méthode, pour la détermination des voûtes, ne pût plus donner satisfaction.

Dans la plupart des cas, on projetait la figure géométrique en appliquant un tracé arbitraire mais, respectant une certaine harmonie avec la conception architectonique.

Le calcul des épaisseurs s'établissait par vérification mécanique des résultantes des forces influentes en observant la méthode classique de Méry, bien plus rationnelle que la méthode empirique et qui serait entièrement acceptable, abstraction faite du principe de fixation du point de passage de l'une des forces.