

noch für eine Darstellung in der Ebene hielt, hat sich bei meinen weiteren Studien als die beste Projektion des Vierstoffsystems im Raume ergeben, welche Darstellung im Raume schon seit Jahrzehnten von den verschiedenartigsten Gelehrten, insbesondere von den Metallurgen gesucht wurde und bisher nur zu sehr unübersichtlichen Projektionen geführt hat. In diesem Vierstoffparallelogramm, das während meines Vortrages in Zürich noch ein Embryo war, habe ich ein Jahr später schon die Zemente des größten Japanischen Zementkonzerns dargestellt gesehen. Heute arbeiten auch erste deutsche Zementtechniker mit diesem Vierstoffparallelogramm als dem tauglichsten wissenschaftlichen und praktischen Mittel, was ich Ihnen, meine hochverehrten Anwesenden, nur deswegen so ausführlich mitteile, weil es auch das kleine und große A-b-c für die Beurteilung der Betonzusammensetzung und für die Klärung aller Zusammenhänge zwischen Zementzuschlagsstoffen, Wasserzusatz, Verarbeitung und Festigkeit des Betons und somit auch das geeignetste Mittel zur Herstellung eines hochwertigen Betons bildet. Trotz des kurzen Alters von nur zwei Jahren kann ich in der kurzen Zeit unmöglich alle die wichtigen Erkenntnisse und Zusammenhänge aufzeigen, die ich mit Hilfe dieses Vierstoffparallelogramms gewonnen habe und verweise daher auf meine diesbezüglichen Veröffentlichungen der letzten zwei Jahre in der Tonindustriezeitung in Berlin und in Beton und Eisen.<sup>1</sup> Hier sollen hierüber nur die allernötigsten Mitteilungen gemacht werden.<sup>2</sup>

Prof. Dr. M. RITTER, Zürich:

### Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton

Bei der statischen Untersuchung von kreuzweise armierten Eisenbetonplatten hat man neuerdings neben den üblichen rohen Näherungsmethoden mehrfach die Ergebnisse der Elastizitätstheorie zu Rate gezogen. Die klassische Theorie der elastischen Platten, wie sie durch LAGRANGE und NAVIER begründet und später durch zahlreiche Forscher weiter ausgebaut wurde, bezieht sich indessen ausschließlich auf die homogenen Platten von konstanter Biegesteifigkeit, beruht also auf Voraussetzungen, die beim Eisenbeton nicht zutreffen. Zur Anwendung der Plattentheorie auf den Eisenbeton erscheint eine Abänderung der Rechnungsgrundlagen im Sinne einer besseren Anpassung an das elastische Verhalten dieses Baustoffes notwendig.

#### 1. Grundlagen der Plattentheorie.

Die Theorie der homogenen Platte gestattet, die Krümmungen der elastischen Fläche nach zwei zueinander senkrechten Richtungen durch die entsprechenden Biegemomente auszudrücken. Bezeichnet man mit  $z$  die Einsenkung an irgend einer Stelle mit den rechtwinkligen Grundrißkoordinaten  $x$  und  $y$ , so ergeben sich für die Krümmungen unter Annahme der üblichen Voraussetzungen die bekannten Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{EJ} \left( M_1 - \frac{M_2}{m} \right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{EJ} \left( M_2 - \frac{M_1}{m} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

worin  $M_1$  und  $M_2$  die Biegemomente bezeichnen, die in den Richtungen der Koordinaten auf die Einheit der Breite wirken.  $E$  ist der Elastizitätsmodul des Materials und  $J$  das konstante Trägheitsmoment des Querschnittes auf die Einheit

<sup>1</sup> Vergl. Spindel, Tonindustrie-Zeitung 1926, Jubiläumsnummer, und Jg. 1927, Heft 70 und 73, ferner in Beton und Eisen, Jg. 1927, Heft 1, und Jg. 1928, Heft 1 und 2.

<sup>2</sup> Wegen Raummangel wird diesbezüglich auf die unter Anmerkung 1 angeführten Veröffentlichungen verwiesen.

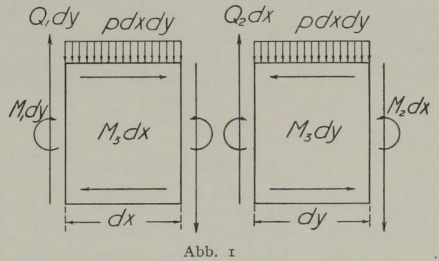
der Breite;  $EJ$  heißt die Biegesteifigkeit der Platte. Durch die Poissonzahl  $m$  kommt der Einfluß der Querdehnung auf die Krümmungen zum Ausdruck. Aus den Gleichungen (1) berechnen sich die Biegemomente zu

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{EJ}{1 - \frac{1}{m^2}} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -\frac{EJ}{1 - \frac{1}{m^2}} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Eine einfache Betrachtung liefert auch noch einen Ausdruck für die sogenannte Verdrillung der Querschnitte, die durch die wagrechten Schubspannungen zustande kommt, welche in den lotrechten Schnitten wirken und auf die Einheit der Breite das Drillmoment

$$M_3 = -\frac{EJ}{1 + \frac{1}{m}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (3)$$

liefern. Denkt man sich weiter nach Abb. 1 ein Plattenelement vom Grundrisse  $dx \cdot dy$  abgegrenzt, so folgt aus den drei Gleichgewichtsbedingungen die sogenannte Grundgleichung der Plattentheorie



$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -p \dots \dots \dots (4)$$

wo  $p$  die im allgemeinen veränderliche spezifische Belastung der Platte darstellt. Setzt man darin für die Momente die Ausdrücke (2) und (3) ein, so erhält man die bekannte Differentialgleichung der elastischen Fläche

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{EJ} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) \dots \dots \dots (5)$$

deren Integration mit Berücksichtigung der Randbedingungen die Gestalt der elastischen Fläche liefert, aus der schließlich die Momente und Querkräfte an jeder Stelle der Platte leicht zu berechnen sind.

Die Gleichungen (1) und (2) beruhen auf der Voraussetzung des HOOKEschen Gesetzes und den bekannten Annahmen von NAVIER. Indessen können diese Beziehungen auch für unhomogenes Material in gleicher Form angeschrieben werden, wobei dann  $EJ$  und  $m$  veränderliche Koeffizienten darstellen, die experimentell bestimmt werden können. Auch die Grundgleichung der Plattentheorie, Gl. (4), ist nicht auf die homogene Platte beschränkt. Dagegen gilt die Differentialgleichung (5) nur für die homogene Platte; sie verliert ihre einfache Gestalt, wenn man bei ihrer Ableitung  $EJ$  und  $m$  als Veränderliche behandelt.

2. Die Biegesteifigkeit.

Die Biegesteifigkeit  $EJ$  einer Eisenbetonplatte läßt sich durch direkte Messung des Formänderungswinkels finden. Solche Messungen sind u. a. in den Materialprüfungsanstalten Stuttgart und Zürich durchgeführt worden; in Abb. 2 sind einige Messungsergebnisse und die daraus nach der Formel

$$EJ = M \cdot \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} \dots \dots \dots (6)$$

berechneten Biegesteifigkeiten dargestellt (Messungen an Balken 20 . 30 cm,

Meßstrecke  $\Delta s = 30$  cm). Man erkennt, wie mit zunehmendem Moment die Biegesteifigkeit  $EJ$  namentlich bei den niedrigen Armierungen derart abnimmt, daß die Voraussetzung einer konstanten Biegesteifigkeit auch in erster Annäherung nicht berechtigt erscheint. Die beträchtliche Abnahme von  $EJ$  mit wachsender Belastung rührt in der Hauptsache von der Rissebildung des Betons in der Zugzone her, die indessen nach den Versuchen frühzeitig einsetzt. Für sehr

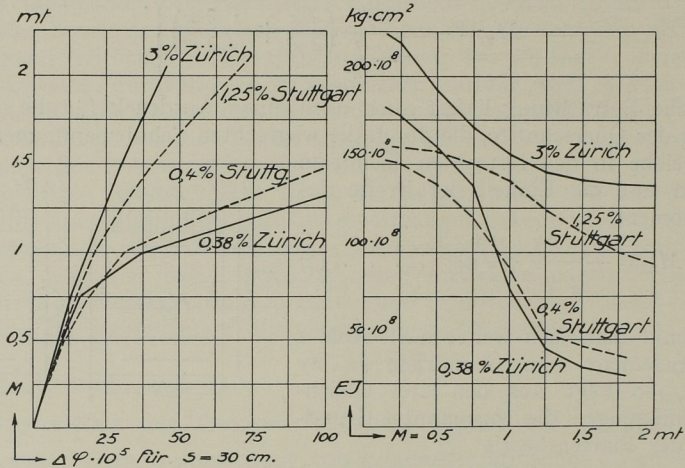


Abb. 2

geringe Belastungen (unterhalb jeder Rissebildung) erscheint vielleicht die Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit zulässig, doch liegt dieser Zustand weit unterhalb der zulässigen Spannungen und hat für den Ingenieur, der den Sicherheitsgrad zu beurteilen hat, nur ein beschränktes Interesse.

### 3. Einfluß der Querdehnung.

Die Poissonzahl  $m$  beträgt nach neueren Versuchen für Beton zirka  $m = 0$  und ist wenig veränderlich, so daß bei der Anwendung auf den Eisenbeton dieser Koeffizient konstant gesetzt werden kann. Indessen ist zu beachten, daß bei der Eisenbetonplatte im Stadium der Rissebildung der Einfluß der Querdehnung auf die Krümmung nicht durch  $1/m$  zum Ausdruck kommt, wie bei der homogenen Platte nach Gleichung (1), sondern in stark vermindertem Maße, da nach Eintritt der Rissebildung lediglich die Druckzone eine Querdehnung erleidet.

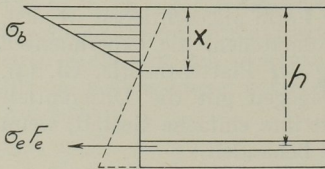


Abb. 3

Um den Einfluß der Querdehnung auf die Krümmung und die Gestalt der elastischen Fläche einer Eisenbetonplatte zu berechnen, werde der Einfachheit halber eine Stelle betrachtet, wo die Biegemomente  $M_1$  und  $M_2$  einander gleich sind. In Abb. 3 ist ein Querschnitt an dieser Stelle im Rissestadium dargestellt. Setzt man den Elastizitätsmodul  $E_b$  des Betons in der Druckzone als konstant voraus, was zulässig erscheint, so berechnet sich der Abstand  $x_1$  der neutralen Achse vom oberen Rand aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_b \cdot \frac{b x_1}{2} = \sigma_e \cdot F_e$$

worin  $\sigma_b$  die Druckspannung im Beton am oberen Rande und  $\sigma_e$  die Zugspannung im Eisenquerschnitt  $F_e$  (für die Breite  $b$ ) bezeichnen. Die Bedingung für das Ebenbleiben des Querschnittes ergibt, da die obere Randdehnung gleich  $\frac{\sigma_b}{E_b} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$  zu setzen ist,

$$\frac{\sigma_b \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{E_b \cdot x_1} = \frac{\sigma_e}{E_e (h - x_1)}$$

Durch Division der beiden Beziehungen folgt für den Abstand der neutralen Achse die quadratische Gleichung

$$\frac{b x_1^2}{2} = \frac{E_e}{E_b} \left(1 - \frac{1}{m}\right) F_e (h - x_1)$$

Setzt man zur Abkürzung noch  $n = \frac{E_e}{E_b}$  und  $n_1 = n \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ , so lautet die gültige Wurzel

$$x_1 = \frac{n_1 F_e}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n_1 F_e}} - 1 \right) \dots \dots \dots (7)$$

Für die Druckspannung  $\sigma_b$  erhält man

$$\sigma_b = \frac{2 M_1}{b x_1 \left(h - \frac{x_1}{3}\right)} = M_1 \cdot \frac{x_1}{J_1}$$

worin zur Abkürzung  $J_1 = \frac{b x_1^3}{3} + n_1 F_e (h - x_1)^2$  gesetzt ist.  $J_1$  kann als ideelles Trägheitsmoment bezeichnet werden, bei dessen Bildung jedoch zum Unterschied vom ebenen Spannungszustand der Eisenquerschnitt mit  $n_1$  zu multiplizieren ist.

Für den Formänderungswinkel bzw. die Krümmung ergibt sich jetzt

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sigma_b \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{E_b \cdot x_1} = \frac{M_1}{E_b J_1} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Man erkennt, daß der Einfluß der Querdehnung hier nicht mehr durch  $\frac{1}{m}$  zum Ausdruck kommt, wie bei der homogenen Platte, weil jetzt  $J_1$  ebenfalls von  $m$  abhängig ist. Bezeichnet man mit  $J$  das ideelle Trägheitsmoment für den ebenen Spannungszustand, so läßt sich der obige Ausdruck wie folgt schreiben:

$$\frac{M_1}{E_b J_1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{M_1}{E_b J} \cdot \frac{J}{J_1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{M_1}{E_b J} \left(1 - \frac{1}{m_1}\right);$$

darin ist  $m_1$  ein Koeffizient, der an Stelle der Poissonzahl  $m$  den Einfluß der Querdehnung darstellt. Man findet aus obiger Gleichung

$$m_1 = \frac{m}{m - \frac{J}{J_1} (m - 1)} \dots \dots \dots (8)$$

Die Rechnung liefert für verschiedene Werte von  $m$  und für verschiedene Armierungsgehalte folgende Werte  $m_1$ :

	$m = 3$	$4$	$5$	$6$
0,50%	$m_1 = 12$	16	19	24
0,75%	$m_1 = 10$	13	17	21
1,00%	$m_1 = 9$	12	15	18

Der Einfluß der Querdehnung ist darnach bedeutend geringer, als bei der homogenen Platte. Man wird nur einen geringen Fehler begehen, wenn man bei der Eisenbetonplatte mit  $m_1 = \infty$  rechnet, was eine wesentliche Vereinfachung der Theorie zur Folge hat.

4. Die Platte als Balkenrost.

Bei einer Eisenbetonplatte, die lediglich kreuzweise nach den Richtungen  $x$  und  $y$  armiert ist, können im Stadium der Rissebildung die Drillungsmomente  $M_3$  (Gleichung 3) nicht übertragen werden, da die Eiseneinlagen allein wagrechte Schubkräfte nicht aufnehmen können. Der Drillungswiderstand der Eisenbetonplatte wird bei niedriger Belastung relativ am größten sein und mit zunehmender Belastung und Rissebildung abnehmen; Hand in Hand damit wachsen die Einsenkungen nach der Rissebildung bedeutend rascher als die Belastungen. Durch geeignete Zusatzarmierungen wird es zwar (nach H. LEITZ) möglich sein, die Übertragung der Drillungsmomente auch bei höheren Belastungen in gewissem Umfange sicherzustellen; doch sind solche Zusatzarmierungen in der Praxis nicht üblich und keineswegs notwendig, da die Eisenbetonplatte auch ohne Drillungswiderstand tragfähig bleibt.

Die Platte ohne Drillungswiderstand wirkt wie ein Rost sich kreuzender Balken. Man gewinnt die Differentialgleichung der elastischen Fläche analog Gleichung (4), indem man bei der Ableitung die Drillungsmomente unberücksichtigt läßt. Ersetzt man die Poissonzahl  $m$  durch  $m_1$ , so erhält man bei Annahme konstanter Biegesteifigkeit

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2}{m_1} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{EJ} \left( 1 - \frac{1}{m_1^2} \right).$$

Da indessen die Biegesteifigkeit stark vom Moment abhängt, erscheint es zweckmäßig, bei der Ableitung von vornherein in den Richtungen  $x$  und  $y$  verschiedene Biegesteifigkeiten  $E_1 J_1$  und  $E_2 J_2$  einzuführen (analog der Behandlung der orthotropen Platten nach T. HUBER). Alsdann lautet die Differentialgleichung der elastischen Fläche

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{m_1} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + E_2 J_2 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = p \left( 1 - \frac{1}{m_1^2} \right),$$

und für  $m_1 = \infty$

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + E_2 J_2 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = p. \dots \dots \dots (9)$$

Bei der Anwendung dieser Gleichungen ist jedoch zu beachten, daß sich  $E_1 J_1$  und  $E_2 J_2$  in der Platte von Punkt zu Punkt ändern. Näherungsweise kann man diesen Umstand berücksichtigen, indem man die Platte gemäß Abb. 4 in Maschen einteilt und annimmt, daß die Biegesteifigkeiten innerhalb jeder Masche konstant sind, sich also von Masche zu Masche sprungweise ändern. Gleichung (9) gilt dann innerhalb jeder Masche. Die elastische Fläche läßt sich in der Form darstellen

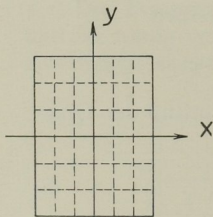


Abb. 4

$$z = \sum c \cdot F_1(x) \cdot F_2(y). \dots \dots \dots (10)$$

wo  $F_1(x)$  und  $F_2(y)$  Funktionen von  $x$  bzw.  $y$  allein sind, die den Randbedingungen der Platte genügen. Bei zweckmäßiger Wahl dieser Funktionen kann man  $z$  mit genügender Genauigkeit durch so viele Summanden darstellen, als die Anzahl der Maschen beträgt. Die Bestimmung der Koeffizienten  $c$  erfolgt dann sehr einfach, indem man den Ausdruck (10) in Gleichung (9) einsetzt und letztere für die Mitte jeder Masche anschreibt; man erhält auf diese Weise ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Werte  $c$  eindeutig berechnen lassen. Für eine erste Rechnung müssen allerdings vorläufige Annahmen über die Biegefähigkeiten  $E_1 J_1$  und  $E_2 J_2$  in den einzelnen Maschen getroffen werden; die Wiederholung der Rechnung gestattet, diese Größen entsprechend den Biegemomenten zu korrigieren. Das Verfahren ist umso genauer, je enger die Maschenteilung gewählt wird, doch zeigen die Zahlenrechnungen, daß schon eine grobe Maschenteilung genügt.

5. Anwendung auf die quadratische Platte.

Die Platte liege allseitig frei auf und trage die hügelartig verteilte Belastung  $p$  pro Flächeneinheit. Die Eiseneinlagen seien in beiden Richtungen gleich. Man wird hier keinen großen Fehler begehen, wenn man in diesem Falle  $E_1 J_1 = E_2 J_2$  setzt. Alsdann kann in erster Annäherung die Rechnung wie folgt durchgeführt werden.

Die Gleichung der elastischen Fläche läßt sich mit Bezugnahme auf Abb. 5 zu

$$z = \frac{z_0}{1 + 2c} \left[ \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + c + \left( \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \right) \right]$$

anschreiben. Darin bezeichnet  $z_0$  die Einsenkung in Plattenmitte und  $c$  ist ein Koeffizient, der von der Verteilung der Belastung, aber auch von der Änderung der Biegesteifigkeit innerhalb der Platte abhängt. Zur obigen elastischen Fläche gehört nach Gleichung (9) mit  $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$  die Belastung

$$\frac{p}{EJ} = \frac{\delta^4 z}{\delta x^4} + \frac{\delta^4 z}{\delta y^4} = \frac{2z_0}{1 + 2c} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} \left[ \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + 4Ic \left( \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \right) \right]$$

Für die Plattenmitte lautet dieser Ausdruck mit  $p = p_0$  und  $EJ = E_0 J_0$

$$\frac{p_0}{E_0 J_0} = \frac{2z_0}{1 + 2c} \cdot \frac{\pi^4}{l^4} (1 + 82c),$$

woraus durch Division

$$\frac{p}{p_0} = \frac{EJ}{E_0 J_0} \cdot \frac{\cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + 4Ic \left( \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \right)}{1 + 82c} \quad \dots (10)$$

Für das Biegemoment in Plattenmitte ergibt sich mit  $m_1 = \infty$

$$M_0 = -E_0 J_0 \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{x=0} = \frac{p_0 l^2}{2\pi^2} \frac{1 + 10c}{1 + 82c} \quad \dots (11)$$

Die Biegesteifigkeit wird naturgemäß von der Plattenmitte gegen die Ränder zunehmen. Setzt man für die Mitte der Plattenränder ( $x = \frac{l}{2}, y = 0$  und  $x = 0, y = \frac{l}{2}$ )  $p = p_1$  und  $EJ = E_1 J_1$  und bezeichnet den Koeffizienten  $c$  für den Sonderfall konstanter Biegesteifigkeit ( $E_1 J_1 = E_0 J_0$ ) mit  $c_0$ , so folgt aus Gleichung (10) die Beziehung

$$\frac{E_1 J_1}{E_0 J_0} = \frac{(1 - 82c_0)(1 + 82c)}{(1 + 82c_0)(1 - 82c)} \quad \dots (12)$$

die gestattet, den Koeffizienten  $c$  für bekannte oder angenommene Werte von  $c_0$  und  $E_1 J_1 / E_0 J_0$  zu berechnen.

Wählt man die hügelartige Belastung derart, daß in den Punkten  $x = y = \pm \frac{l}{4}$   $p = p_0$  wird, so erhält man aus Gleichung (10) für konstante Biegesteifigkeit

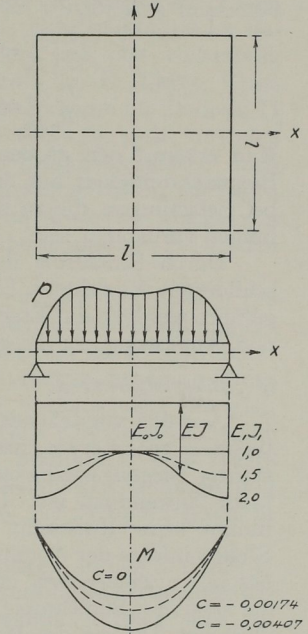


Abb. 5

steifigkeit  $c_0 = -0,00407$  und darnach für das Moment in Plattenmitte nach Gleichung (11)

$$M_0 = \frac{p_0 l^2}{13,7}$$

Dieser Wert entspricht, wie bekannt, auch dem Fall der gleichmäßig verteilten Belastung in der homogenen Platte ohne Drillungswiderstand. Aus Gleichung (12) berechnet sich jetzt  $c$  für veränderliche Biegesteifigkeit, und zwar für

$$\begin{array}{lll} \frac{E_1 J_1}{E_0 J_0} = 1,5 & c = -0,00174 & M_0 = \frac{p_0 l^2}{17,3} \\ \frac{E_1 J_1}{E_0 J_0} = 2,0 & c = 0 & M_0 = \frac{p_0 l^2}{2 \pi^2} \end{array}$$

Man erkennt den großen und günstigen Einfluß, den die Veränderlichkeit der Biegesteifigkeit auf das Maximalmoment ausübt. Diese Veränderlichkeit wird bei Belastungen, die an der zulässigen Grenze oder darüber liegen, in Wirklichkeit immer vorhanden sein.

Durch Einteilung der Platte in Maschen und Anwendung des unter 4 geschilderten Verfahrens kann die obige Näherungsrechnung leicht genauer durchgeführt werden; die Ergebnisse ändern sich jedoch auch bei enger Maschenteilung und Anpassung der Biegesteifigkeiten an die Momente nur unwesentlich.

#### 6. *Schlußfolgerungen.*

Aus den vorstehenden Darlegungen und einer Reihe durchgerechneter Zahlenbeispiele geht hervor, daß die klassische Theorie der homogenen Platten mit konstanter Biegesteifigkeit zur Berechnung kreuzweise armierter Eisenbetonplatten nicht anwendbar ist. Diese Theorie überschätzt den Drillungswiderstand und nimmt keine Rücksicht auf die wesentliche Entlastung, die an den gefährdeten Stellen infolge der Abminderung der Biegesteifigkeit eintritt. Wenn, wie üblich, besondere Zulageeisen zur Übertragung der Drillungsmomente fehlen, so erfolgt die statische Berechnung der kreuzweise armierten Eisenbetonplatten zweckmäßig nach der Theorie des Balkenrostes, wobei der Einfluß der Querdehnung zu vernachlässigen, der Einfluß der Veränderlichkeit der Biegesteifigkeit jedoch in geeigneter Weise zu berücksichtigen ist.

## Diskussion

Prof. Dr. H. LEITZ, Graz:

Meine Herren! Die Ausführungen von Herrn Prof. Dr. RITTER zeigen, daß die Biegemomente der Platte gegen den Bruch zu infolge Weicherwerdens der hochbeanspruchten Stellen sich gleichmäßiger über den Querschnitt verteilen und die Maxima geringer ausfallen als es sich nach der Balkenrostrechnung ergibt. Diese Selbsthilfe des Materials läßt sich also unter Verwendung von Differenzenrechnung und Berücksichtigung der mit zunehmenden Momenten abnehmenden Biegesteifigkeit berechnen. Es dürfte dies jedoch nur dann der Fall sein, wenn die Bewehrung gleichmäßig über den Schnitt verteilt ist, und nicht wenn die Bewehrung dem Momentenquerschnitt des Balkenrostes genau angepaßt ist. Das Biegemoment beim Bruch folgt der Verteilung der Widerstandsfähigkeit, wie sie durch die Bewehrung gegeben ist. Wenn letztere auf einem statisch vollständigen Momentensystem beruht, so stellt sich dieses mit zunehmender Beanspruchung mehr und mehr her. Es dürfte wohl zu weitgehend sein, die Veränderlichkeit der Steifigkeit mit zunehmender Beanspruchung in die praktische Rechnung einzuführen; man hat z. B. auch bei der Berechnung der Rahmen davon abgesehen und rechnet konsequent mit den ursprünglichen Trägheitsmomenten. Um so mehr muß jedoch

darauf geachtet werden, daß auch alle vorausgesetzten Kraftäußerungen, insbesondere bei der Berechnung nach der Elastizitätstheorie die Drillungsmomente durch die Bewehrung aufgenommen werden können.

M. T. HUBER, Warschau:

Ich kann mich kurz fassen, da meine Ansichten über die Schlußfolgerungen aus der Theorie orthotroper Platten, welche sich auf eine richtige praktische Berechnung und Bewehrung der Eisenbetonplatten beziehen, sich fast vollständig mit denjenigen decken, welche mein Vorredner (Herr Prof. Dr. H. LEITZ, Graz) bereits dargelegt hat. Nur bezüglich der Rolle der Drillungsmomente im Stadium II bin ich einer etwas abweichenden Meinung und möchte vorläufig nicht auf eine merkliche Drillungssteifigkeit der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten auch in diesem Stadium verzichten. Eine endgültige Entscheidung dieser wichtigen Teilfrage ist aber meines Erachtens erst von Versuchen zu erwarten, welche von theoretischen Gesichtspunkten geleitet werden sollen. Ich hoffe, daß die in Dresden geplanten Versuche dazu Wesentliches beitragen werden.

Ich habe seinerzeit die Theorie orthotroper Platten mit den Ergebnissen der Stuttgarter Plattenversuche verglichen<sup>1</sup> und für das Stadium I eine vollständig befriedigende Übereinstimmung gefunden. Besonders auffallend ist die Proportionalität der Durchbiegungen zu den Belastungen bis zu dem Auftreten der Risse in der Zugzone. Wir haben hier dasselbe auf den vom Herrn Vortragenden gezeigten Schaubildern sehr gut beobachten können. Man sah deutlich eine Gerade, welche vom Koordinatenanfang ausgeht. Dieser schloß sich im Stadium II eine zweite anders geneigte Gerade an. Dies entspricht in der Theorie der starken Verminderung der Plattensteifigkeitszahlen, welche mit der Erschöpfung der Betonfestigkeit in der Zugzone eintritt.

Der aussichtsreiche Versuch des Herrn Prof. Dr. M. RITTER, in das Stadium II an Hand der allgemeinen Theorie orthotroper Platten einzudringen, ist meines Erachtens zu begrüßen. Da meine Arbeiten dabei erwähnt worden sind, so möchte ich noch daran erinnern, daß Herr Prof. Dr. H. LEITZ kurz nach meinen ersten Veröffentlichungen auf diesem Gebiete auf einem anderen Wege dieselben Grundgleichungen der Biegungstheorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten abgeleitet hat und in einigen klaren und interessanten Aufsätzen in der Bautechnik und in der Zeitschr. f. ang. Math. u. Mechanik die Unzulänglichkeit der von anderen Verfassern vorgeschlagenen Ansätze für eine strenge Theorie der Eisenbetonplatten nachwies.

Prof. Dr. R. BORTSCH, Graz:

Die kreuzweis bewehrte Platte stellt im Falle des Auftretens von Rissen ein Zwischenglied dar, zwischen homogener Platte und Balkenrost, und es ist die Frage, welchem Idealfall sie näher liegt. Herr Prof. RITTER vertritt die Anschauung, sie ähnele mehr dem Balkenroste, und das zweite Glied der LAGRANGESchen Differentialgleichung, welches den entlastenden Einfluß der Drillungsmomente darstellt, sinke zur Bedeutungslosigkeit herab.

Ich kann diese Auffassung nicht ganz teilen und stelle mir vor, daß trotz der Risse Drillungsmomente weiter tätig sind, nachdem die, durch unebene Risse voneinander getrennten, Querschnitte noch immer durch Schubspannungen aufeinander einwirken können, ähnlich wie dies bei verzahnten Trägern der Fall ist. Es müssen

<sup>1</sup> M. T. HUBER, „Vereinfachte strenge Lösung der Biegungsaufgabe einer rechteckigen Eisenbetonplatte...“, Bauingenieur 1926, H. 7, 8 u. 9.



noch Drillungsmomente in der von Rissen durchzogenen Platte sein, sonst könnten diese bei Versuchen nicht höhere Bruchlasten aufweisen, wie gleichartig konstruierte Balken.

Bezüglich der rechnungsmäßigen Behandlung der Aufgabe würde ich es für zweckmäßig halten, die LAGRANGESche Differentialgleichung in eine Differenzengleichung umzuwandeln. Es würde dies den Vorteil mit sich bringen, den verschwommenen Verlauf der Trägheitsmomente, wie er sich bei der Darstellung durch eine stetige Funktion ergibt, den bei Platten vorhandenen besser anzupassen, welche meist sprunghafte Änderungen der Höhe aufweisen. Ferner läßt sich die tatsächliche Auflast, insbesondere beim Auftreten von Einzelkräften, durch die Differenzenrechnung schärfer fassen, als durch eine aus einer Reihenentwicklung hervorgegangenen, Funktion.

Hofrat Ing. LEOPOLD HERZKA, Wien:

### Über Riß-, insbesondere Schwindrißerscheinungen an Bauwerken aus Beton und Eisenbeton

Der seit langem geübten optischen Beobachtung, gleichsam der Diagnostik von Bauschäden aus der oft zeitveränderlichen Physiognomik der Bauwerke kommt in Verbindung mit theoretischem Wissen und praktischem Können große Bedeutung zu; sie bietet ohne Zweifel dem Ingenieur ein brauchbares Mittel, um ihn mit dem Wesen und der Wirkungsweise eines Bauwerkes, mit der Eignung der verwendeten Materialien zu einem bestimmten Zweck besser vertraut zu machen und seine Aufmerksamkeit auf theoretische und konstruktive Unzulänglichkeiten zu lenken.

Die aus Beobachtungen gewonnenen Erkenntnisse sind stets das Ergebnis persönlicher Veranlagung und Einfühlung und langjähriger Erfahrung; sie sind aber einer zahlenmäßigen Verarbeitung kaum oder nur schwer zugänglich. Doch kann nicht geleugnet werden, daß einer systematischen Zusammenfassung und Bearbeitung solcher Ergebnisse ein großer erzieherischer Wert innewohnt und daß dieser Zusammenfassung für den meiner Ansicht nach notwendigen Ausbau *der Lehre einer Bauschadendiagnostik* grundlegende Bedeutung zukommt.

Ich möchte aus dem großen Betätigungsfelde der ingenieurmäßigen Beobachtungen die der *Rißbeobachtung* herausgreifen; sie ist so alt wie das Bauen und jeder erfahrene und statisch geschulte Bautechniker vermag gewisse Bauschäden richtig zu beurteilen, einzuschätzen und zu deuten; er wird Setzungs-, Momenten- und Scherrisse an ihrem charakteristischen Verlaufe leicht erkennen und aus den festgestellten Ursachen geeignete Maßnahmen ableiten, um unliebsame Wiederholungen zu vermeiden.

Eine große Rolle spielt z. B. die Rißdiagnostik bei bergbaulichen oder durch andere örtliche Bodenbewegungen nachteilig beeinflussten Bauwerken, weil festzustellen sein wird, ob und inwieweit die Schäden auf solche Ursachen oder auf ungenügende Bemessung, unsachgemäße Ausführung usf. zurückzuführen sind.

Die Schwierigkeit der Beantwortung solcher Fragen liegt unter anderem darin, daß, wie GOLDBREICH in seinem Buche „Die Bodenbewegungen im Kohlenrevier und deren Einfluß auf die Tagesoberfläche“ an einzelnen charakteristischen Rißbildern zeigt, gewisse gemeinsame Merkmale zwischen den vorgenannten und den durch die Bergschäden hervorgerufenen Rißformen bestehen.

Es ist dann Sache der Sachverständigen, durch differentialdiagnostische Zergliederung der Rißerscheinungen eine Trennung nach den möglichen Ursachen anzustreben.

Erdbebenschäden sollen hier nur der Vollständigkeit wegen Erwähnung finden