

reitet Wandelement W_{b2} mittels des Hebels L_2 in die Höhe gezogen wird. Zu diesem Behufe muß das Hakenende des Seiles S_2 heruntergelassen werden; der an der Spitze des Wandelementes W_{b1} befindliche Hebel L_1 wird bei dieser Gelegenheit abmontiert und vom Haken des Seiles L_2 gefaßt heruntergelassen, sowie an die Spitze des Wandelementes W_{b2} aufmontiert, wenn nicht vorgezogen wird, zur Ersparung von Zeit einen dritten Hebel L_3 einzuführen.

Das beschriebene Montierungsverfahren wird nun abwechslungsweise fortgesetzt, indem immer von der höheren Spitze des zuletzt montierten Wandelementes das Wandelement der entgegengesetzten Wand aufgezogen und in seiner Lage befestigt wird. Die Handhabung der Doppelhebel wird durch deren statische Eigenschaft erleichtert, indem sie sich stets senkrecht zu der Resultierenden der Seilzüge an den Hebelenden einstellen, also durch Änderung der Seilrichtung durch den an der Arbeitsplattform befindlichen Arbeiter leicht regulierbar sind. Sowohl die Hebel als auch die nachstellbar hergestellten Verbindungslagertraversen können in Anbetracht der verhältnismäßig geringen Lasten leicht gehalten werden.

Aus der Beschreibung des neuen Verfahrens ist zu ersehen, daß der überwiegende Teil der Montierungsarbeit am Boden durchgeführt wird, während in den höheren Plattformen ein oder zwei Arbeiter hauptsächlich Verschraubungen auszuführen haben. Die zeitraubende und gefährliche Handhabung des Hebebaumes ist ausgeschaltet, wodurch ein stark beschleunigter und billiger Montierungsfortschritt gewährleistet erscheint. Die Kosten der Montierungswerkzeuge, die für mehrere Türme verwendet werden können, sind gering.

Prof. G. G. KRIVOCHÉINE, Prague:

La théorie exacte des ponts suspendus à trois travées

Chapitre I.

I. *Introduction.* Le plus grand pont suspendu de tout l'univers fut construit en 1926 aux États-Unis de l'Amérique du Nord sur la Delaware entre les deux villes de Philadelphie et de Camden. M. RALPH MODJESKI, l'auteur du projet de ce pont gigantesque, et son collaborateur M. LÉON MOISSEIFF ont adopté pour le calcul de ce pont une théorie qui est exposée dans l'œuvre connue du professeur J. MELAN¹. Cette théorie, nommée par M. L. MOISSEIFF « Deflection Theory »², donne une économie du métal pour la poutre de rigidité de 42 % avec une réduction des moments fléchissants maxima de 38 %. Ce résultat frappant nous a forcé d'étudier cette théorie pour expliquer la possibilité d'obtenir une économie aussi anormale.

M. le professor H. MÜLLER-Breslau³, M. F. BLEICH⁴ et M. le professeur W. SCHACHENMEIER⁵ donnent des indications qui contredisent la possibilité d'atteindre une économie considérable. Ainsi M. H. MÜLLER-Breslau croit, que les moments fléchissants de la poutre de rigidité pour le pont suspendu à une travée unique peuvent être de 10 à 14 % moindres que pourrait donner la méthode ordinaire d'après la théorie d'élasticité; M. F. BLEICH précise cette différence aussi pour un pont à une travée entre 6 et 11 %; M. W. SCHACHENMEIER fait valoir cette différence jusqu'à 12 %.

¹ Handbuch der Ing.-Wissenschaften, Brückenbau, II. Band, 5. Abt.

² a) Journal of the Franklin Institute, October 1925, N. 4.

b) The bridge over the Delaware River, Final report, 1st June 1927.

³ H. MÜLLER-Breslau, Graphische Statik, Bd. II, 2.

⁴ F. BLEICH, Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken, 1924, Berlin, JULIUS SPRINGER, P. 457.

⁵ Die Bautechnik, le 17 décembre 1926.

La théorie exacte des ponts suspendus à *trois travées* n'est décrite ni par M. MÜLLER-Breslau, ni par M. BLEICH. Elle n'est exposée que dans l'œuvre de M. le professeur J. MELAN et dans le rapport final sur le pont de la Delaware (par M. L. MOISSEIFF); pour former les équations fondamentales M. L. MOISSEIFF a accepté comme règle de sa théorie, que la chaîne déformée prend sa forme parabolique *quelle que soit la surcharge*¹. Tandis que la différence entre les ordonnées de la chaîne déformée et de la parabole atteint dans le pont sur la Delaware jusqu'à 11 %.

Comme nous ne pouvons pas accepter cette supposition, assez arbitraire, nous préférons choisir une autre méthode de composition des équations fondamentales, indiquées par M. MÜLLER-Breslau, mais nous devons les transformer de telle manière qu'elles puissent prendre la forme extérieure donnée par M. F. BLEICH pour le pont suspendu à une travée unique.

Le problème de composition des équations fondamentales dans le cas du pont sur la Delaware est plus compliqué parce que les pylônes de ce pont sont encastrés à leurs extrémités, et par conséquence les tensions horizontales dans les chaînes

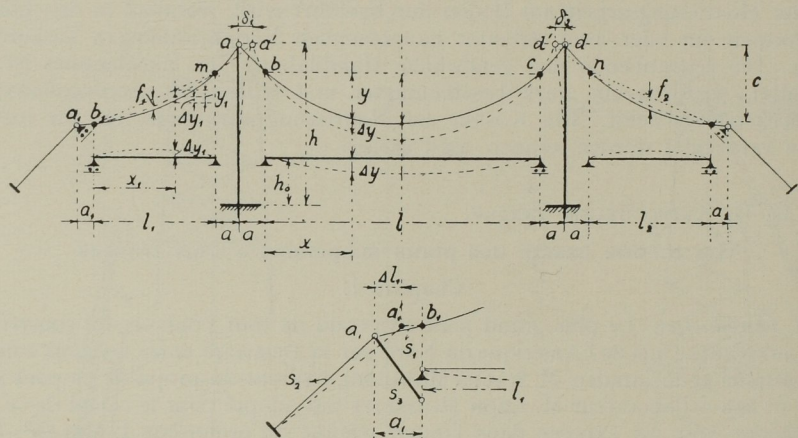


Fig. 1

des travées latérales ne doivent pas être égales à la tension horizontale de la chaîne dans la travée centrale. Ces conditions exigent la composition de trois équations fondamentales avec trois inconnues.

Malgré la différence entre deux méthodes les résultats de nos recherches coïncident presque avec ceux du calcul admis par M. LÉON MOISSEIFF pour le projet du pont sur la Delaware.

Pour expliquer cette théorie exacte nous avons composé trois équations fondamentales et calculé les valeurs des moments fléchissants seulement pour quelques cas principaux de la surcharge du pont sur la Delaware:

1. quand la surcharge est uniformément répartie sur toute la longueur de la travée centrale avec l'effet d'accroissement positif de la température,
2. quand la surcharge est répartie sur une moitié de la travée centrale avec l'effet d'accroissement positif de la température, et
3. quand la surcharge est répartie sur toute la longueur d'une travée latérale avec l'effet d'accroissement positif de la température.

¹ L'équation (30), p. 99, Final report.

Il faut noter que les règles de superposition et la méthode des lignes d'influence ne sont pas applicables à nos recherches.

2. *Règles de la théorie exacte.* Nous envisageons un pont suspendu à trois travées qui est composé, Fig. 1, d'un câble, attaché par les tiges de suspension à trois poutres rigides, posées par leurs extrémités sur des appuis simples et soumises à une surcharge quelconque uniformément répartie.

Les câbles, la fibre moyenne des poutres de rigidité et les pylônes encastres à leurs bases sont marqués par les lignes continues avant la déformation et en pointillé après la déformation.

Les tiges de suspension, dans un pont suspendu, travaillent toujours à une faible tension et leurs allongements sont négligeables. Il en résulte que partout où règnent les tiges, l'abaissement positif ou négatif Δy d'un point de la fibre moyenne de la poutre est égale à celui du point correspondant du câble.

Un pont suspendu à trois travées avec les pylônes encastres dans les piles est triplement statiquement indéterminé. Ses valeurs inconnues sont les tensions horizontales du câble dans les trois travées: H , H_1 et H_2 .

La différence des tensions horizontales $\Delta H_1 = H - H_1$ ou $\Delta H_2 = H - H_2$, appliquées aux sommets des pylônes, nous permettra de déterminer les valeurs des composantes horizontales des déplacements pour les sommets des pylônes δ_1 et δ_2 ; les déplacements Δl_1 et Δl_2 des bouts des câbles a_1 pour les travées latérales, Fig. 1, peuvent être déterminés selon les déformations des câbles en retenue comme la fonction de la tension horizontale H_1 pour la travée latérale gauche et de H_2 pour la travée droite. Si la surcharge est symétrique H_1 sera égal à H_2 , $\Delta H_1 = \Delta H_2$, $\delta_1 = \delta_2$ et $\Delta l_1 = \Delta l_2$.

Pour déterminer les inconnues H , H_1 et H_2 nous pouvons citer les équations d'élasticité suivantes:

1. la somme des projections horizontales des déplacements des éléments du câble pour la travée centrale est égale à $[-(\delta_1 + \delta_2)]$; la partie gauche de l'équation contient l'inconnue H_1 , mais δ_1 et δ_2 peuvent être écrites comme une fonction de $\Delta H_1 = (H - H_1)$ et respectivement $\Delta H_2 = (H - H_2)$;

2. la somme des projections horizontales des déplacements des éléments du câble pour chaque travée latérale est égale à $[\delta_1 - \Delta l_1]$ et $[\delta_2 - \Delta l_2]$; les parties gauches de ces équations contiennent l'inconnue H_1 ou H_2 , mais Δl_1 peut être écrite comme une fonction de H_1 et Δl_2 — comme une fonction de H_2 . De plus, les équations des déformations pour chaque pylône, soumis à la force $\Delta H_1 = H - H_1$ ou $\Delta H_2 = H - H_2$, nous donneront les déplacements des sommets δ_1 et δ_2 .

Nous n'essayerons pas de résoudre ces trois équations ensemble parce qu'elles prennent la forme transcendante, mais nous voulons indiquer que nous avons employé ici une méthode de détermination des inconnues à l'aide de l'interpolation d'espace.

3. *La travée centrale.* Supposons que le câble avant sa suspension est pris effectivement un peu plus court que cela n'est exigé par le projet, pour que le câble, après le montage du pont, supportant la charge permanente (le poids du pont) puisse prendre la forme que le projet exige, c'est-à-dire, celle avec les flèches f , f_1 et f_2 .

Désignons la tension horizontale du câble par $H_g^0 = \frac{gl^2}{8f} = \frac{g_1 l_1^2}{8f_1} = \frac{g_2 l_2^2}{8f_2}$ — due à la surcharge permanente après le montage du pont, c'est-à-dire, avant la déformation du câble due à la surcharge et aux effets de température,

H_g — due à la charge permanente après la déformation qui est produite par l'action de la surcharge et de l'effet de température; dans ce cas la forme du câble ne peut pas être parabolique,

$\Delta H_g = H_g^0 - H_g$ — la différence, qui est produite par cette circonstance que la tension du câble due à l'action de la charge permanente change après la déformation

due à l'action de la surcharge et d'un changement de température, parce que la flèche du câble change sa valeur,

H_p — due à la surcharge,

H_t — due à l'action d'un changement de température,

$H_q = H_g + H_p + H_t$ — la tension totale du câble.

Nous pouvons écrire

$$H_q = H_g^0 - \Delta H_g + H_p + H_t = H_g^0 + H_x,$$

où $H_x = H_p - \Delta H_g + H_t$ — représente la valeur de la tension horizontale, qui est la tension supplémentaire pour la tension horizontale H_g^0 du câble due à la charge permanente unique avant l'action de la surcharge et de l'effet d'un changement de température. H_x est la tension inconnue à déterminer. Il faut faire attention que la valeur H_x dépend non seulement de l'influence de la surcharge et d'un changement de température, mais contient aussi l'influence de la charge permanente due au changement de la forme du câble.

a) *La déformation de la poutre de rigidité.* Si nous voulons prendre en considération la déformation du câble, qui est assez grande dans les ponts suspendus, alors le moment fléchissant est égal à

$$M = M_0 - (H_p - \Delta H_g + H_t) (y + \Delta y) - H_g^0 \Delta y \dots \dots (1)$$

ou

$$M = M_0 - H_q (y + \Delta y) + H_g^0 y \dots \dots \dots (2)$$

où Δy est un changement de l'ordonnée d'un point du câble répondant à l'abscisse x , ou un abaissement de la poutre dû à l'action de la surcharge et de la température.

L'équation de la ligne élastique de la poutre est

$$E J \frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = -M = -M_0 + H_q (y + \Delta y) - H_g^0 y$$

ou

$$\frac{d^2 \Delta y}{d x^2} - \alpha^2 \Delta y + \left(\frac{H_g^0}{E J} - \alpha^2 \right) y + \frac{M_0}{E J} = 0,$$

où

$$\alpha = \sqrt{\frac{H_q}{E J}}.$$

L'intégrale générale de cette équation, quand la chaîne avant la déformation a la forme parabolique, est

$$\Delta y = C_1 \sin h \alpha x + C_2 \cos h \alpha x + \left(\frac{H_g^0}{E J \alpha^2} - 1 \right) \left(y - \frac{8f}{(\alpha l)^2} \right) + \frac{1}{E J \alpha^2} \left(M_0 - \frac{p}{\alpha^2} \right) \quad (3)$$

La seconde dérivée de cette expression nous fournit

$$M = -H_q (C_1 \sin h \alpha x + C_2 \cos h \alpha x) - (H_q - H_g^0) \frac{8f}{(\alpha l)^2} + \frac{p}{\alpha^2} \dots \dots (4)$$

et enfin, la troisième dérivée $\frac{d^3 \Delta y}{d x^3}$ ou la première $\frac{dM}{d x}$ donnera la valeur de l'effort tranchant:

$$Q = -(\alpha l) \frac{H_q}{l} (C_1 \cos h \alpha x + C_2 \sin h \alpha x) \dots \dots \dots (5)$$

où p — est la surcharge continue.

b) *Détermination de la tension horizontale totale du câble.* Quand nous avons déterminé la ligne élastique de la poutre de rigidité, nous avons suivi la

méthode commune qui est exposée par MM. J. MELAN, H. MÜLLER-Breslau, L. MOISSEIFF et F. BLEICH, mais nous avons préféré de choisir une forme extérieure des formules que donne M. F. BLEICH. Même dans le cas où nous voulons déterminer la tension horizontale totale du câble H_q nous devons refuser d'adopter les méthodes de MM. MOISSEIFF et F. BLEICH, parce que celles-ci ne sont pas libres de certaines thèses mathématiques, qui ne sont pas très exactes.

Remarque. Ainsi, quand M. L. MOISSEIFF¹ détermine la tension horizontale du câble, il écrit l'expression du travail des tensions dans les tiges de suspension d'après la formule:

$$A_a = q \int \Delta y \, dx,$$

où q —est la tension des tiges de suspension

$$q = \frac{8f}{l^2} \left(H_g^0 + \frac{1}{2} H_p \right),$$

c'est-à-dire, il prend le câble déformé pour la *parabole ordinaire*. Et voilà une circonstance qui nous oblige d'être fort réservé pour approuver cette thèse. Cette supposition est, peut-être, admissible pour la méthode approximative, mais nous ne pouvons pas l'admettre pour la méthode exacte, parce que la fibre moyenne de la poutre courbée n'est pas une parabole et par conséquent, le câble déformé diffère assez considérablement de la parabole, surtout, si la poutre subit la surcharge non symétrique, qui produit des fléchissements aussi bien positifs que négatifs. Ensuite nous donnerons un exemple du pont sur la Delaware, qui nous montrera que les tensions de tiges de suspension peuvent avoir une différence entre elles jusqu'à 5%, si la surcharge couvre toute la longueur de la travée centrale, et jusqu'à 11%, si celle-ci ne couvre que la moitié de cette travée. Sans doute, nous n'avons pas le droit d'admettre que les tensions des tiges de suspensions soient égales pour toute la longueur de la travée.

Pour corriger l'expression du travail des tensions dans les tiges de suspension, composée par M. L. MOISSEIFF,² il faudrait écrire cette expression sous cette forme:

$$A_a = \int q \Delta y \, dx,$$

$$q = - \left(H_g^0 + \frac{H_p}{2} \right) \frac{d^2 \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right)}{dx^2},$$

où le coefficient $\frac{1}{2}$ est introduit avant le terme Δy , parce que nous devons supposer quelque position du câble moyenne intermédiaire. D'où nous avons

$$A_a = \left(H_g^0 + \frac{H_p}{2} \right) \frac{8f}{l^2} \int \Delta y \, dx - \frac{1}{2} \left(H_g^0 + \frac{H_p}{2} \right) \int \Delta y \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} \, dx.$$

Ainsi le travail des tensions dans les tiges de suspension d'après M. L. MOISSEIFF est exagéré par le second terme de la dernière expression.

M. F. BLEICH dans son investigation, où il détermine la tension horizontale du câble d'un pont à une travée unique, fait deux simplifications. Premièrement, il suppose qu'un angle de rotation d'un élément du câble est égal à

$$\Delta \varphi = \frac{d \Delta y}{ds} \cos \varphi \quad (p. 460),$$

tandis que cet angle doit être égal à

$$\Delta \varphi = \frac{d \Delta y}{ds} \cos \varphi - \frac{d \Delta x}{ds} \sin \varphi.$$

Nous préférons ne pas négliger l'influence de ce terme.

¹ The Bridge over the Delaware River. Final report (p. 99, formules 29 et 30).

² M. J. MELAN admet aussi $A_a = q \int \Delta y \, dx$ au lieu de $A_a = \int q \Delta y \, dx$.

Dans la seconde simplification M. F. BLEICH prend la valeur approximative $tg \varphi (1 - tg^2 \varphi)$ au lieu de l'expression $\cos \varphi \sin \varphi = \frac{tg \varphi}{1 + tg^2 \varphi}$ et remplace $(1 - tg^2 \varphi)$ par la valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} (1 - tg^2 \varphi) dx.$$

Nous préférons de nous passer de ces simplifications.

Dans notre recherche nous voulons admettre la méthode exposée par M. H. MÜLLER-Breslau.

Nous avons pour un élément du câble

$$d(\Delta x) = d(\Delta s) \frac{ds}{dx} - d(\Delta y) \frac{dy}{dx}.$$

L'allongement d'un élément du câble est

$$d(\Delta s) = \frac{S_x ds}{E_k F_k} \pm \epsilon t ds.$$

Le déplacement horizontal réciproque des sommets des pylônes est égal à

$$-(\delta_1 + \delta_2) = \int_{x=0}^{x=l} d(\Delta s) \frac{ds}{dx} + 2 \frac{H_x a}{E_k F_k \cos^3 \varphi_0} \pm 2 \epsilon t \frac{a}{\cos^2 \varphi_0} - \int_{x=0}^{x=l} d(\Delta y) \frac{dy}{dx}.$$

Enfin, l'équation fondamentale nécessaire pour la détermination de la tension horizontale du câble prend la forme

$$\frac{H_x L}{E_k F_k} \pm \epsilon t L_t - \frac{8f}{l^2} \int_{x=0}^{x=l} \Delta y dx + (\delta_1 + \delta_2) = 0 \dots \dots \dots (I)$$

où $L = L_0 + 2 \frac{a}{\cos^3 \varphi_0}$, $L_t = L_{0t} \pm 2 \epsilon t \frac{a}{\cos^2 \varphi_0}$; l'intégrale dans cette expression (I) doit être déterminée toutes les fois séparément en dépendance de la surcharge donnée.

4. *La travée latérale.* Les lettres de la même valeur dans les travées latérales sont marquées par indices (1) pour la travée gauche et (2) pour celle de droite.

$$\Delta y_1 = C_1' \sin h a_1 x_1 + C_2' \cos h a_1 x_1 + \left(\frac{H_g^0}{E J_1 a_1^2} - 1 \right) \left(y_1 - \frac{8 f_1}{(a_1 l_1)^2} \right) + \frac{1}{E J_1 a_1^2} \left(M_0' - \frac{p_1}{a_1^2} \right) \quad (6)$$

$$M_1 = H_q' (C_1' \sin h a_1 x_1 + C_2' \cos h a_1 x_1) - (H_q' - H_g^0) \frac{8 f_1}{(a_1 l_1)^2} + \frac{p_1}{a_1^2} \quad (7)$$

$$Q_1 = - (a_1 l_1) \frac{H_q'}{l_1} (C_1 \cos h a_1 x_1 + C_2' \sin h a_1 x_1) \quad (8)$$

Si la surcharge est absente sur la travée latérale, il y aura $p_1 = 0$ et $M_0' = 0$. Le déplacement horizontal réciproque des deux points du câble de la travée latérale a_1 et a est $(\delta_1 - \Delta l_1)$.

$$L_0 = \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \varphi} = l \left\{ \left(\frac{5}{8} + 4 \frac{f^2}{l^2} \right) \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} + \frac{3}{64} \frac{l}{f} \lg \text{nat} \frac{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} + 4 \frac{f}{l}}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} - 4 \frac{f}{l}} \right\}$$

$$L_{0t} = \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \varphi} = l \left(1 + \frac{16 f^2}{3 l^2} \right).$$

Analogiquement nous pouvons écrire à la fois l'équation fondamentale pour la travée latérale gauche¹:

$$\frac{H_x' L_1}{E_k F_k} \pm \varepsilon t L_{1t} - \frac{8 f_1}{l_1^2} \int_{x_1=0}^{x_1=l_1} \Delta y_1 dx_1 - \delta_1 + \Delta l_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (II)$$

Nous pouvons écrire la même équation (II) pour la travée latérale droite, mais il faut seulement y remplacer les indices (1) par ceux (2).

5. Détermination de Δl_1 . Cette valeur peut être facilement déterminée en fonction de la tension horizontale H_x' du câble de la travée latérale, par exemple à l'aide du principe des déplacements virtuels:

$$\bar{1} \cdot \Delta l_1 = (\Sigma \bar{S} \cdot \Delta s) \cos \alpha_1 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Exemple. Nous trouvons pour le pont sur la Delaware:

$$\Delta l_1 = \frac{5584}{10^{12}} H_x' \pm 121,92 \varepsilon t \text{ (pieds anglais)} \quad \dots \dots \dots (10)$$

6. Détermination de la déformation du sommet du pylône δ . Le déplacement horizontal du sommet du pylône δ peut être déterminé, par exemple, à l'aide de la règle des déplacements virtuels:

$$\bar{1} \cdot \delta = \int_0^h \bar{M} \frac{M}{EJ} dx + \int_0^h \bar{N} \frac{N}{EF} dx \pm \varepsilon t \bar{N} s \quad \dots \dots \dots (11)$$

Exemple. Nous trouvons pour le pont sur la Delaware:

$$\delta = \frac{4682}{10^9} \Delta H_x + \frac{126}{10^9} (A - B_1),$$

où A et B_1 sont les réactions des appuis de la poutre de rigidité.

Chapitre II.

Surcharge couvrant toute la longueur de la travée centrale avec effet d'accroissement positif de la température.

7. Formules fondamentales. Les constantes d'intégration C_1 et C_2 peuvent être déterminées à condition que les déformations $\Delta y = 0$ pour les appuis $x = 0$ et $x = l$, où il y a aussi $y = 0$.

$${}^1 L_1 = \int_0^{l_1} \frac{dx_1}{\cos^3 \varphi} + \frac{a_1}{\cos^3 \varphi_1} + \frac{a}{\cos^3 \varphi_0} \text{ et } \int_0^{l_1} \frac{dx_1}{\cos^3 \varphi} = l_1 \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{c}{64 f_1} \right) (2m^2 + 3)m + \left(\frac{1}{16} - \frac{c}{64 f_1} \right) (2n^2 + 3)n + \frac{3}{64} \frac{l_1}{f_1} \lg \text{nat} \frac{n + 4 \frac{f_1}{l_1} - \frac{c}{l_1}}{m - 4 \frac{f_1}{l_1} - \frac{c}{l_1}} \right]$$

$$\text{où } m = \sqrt{1 + 16 \frac{f_1^2}{l_1^2} + 8 \frac{f_1}{l_1} \cdot \frac{c}{l_1} + \frac{c^2}{l_1^2}}$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{16 f_1^2}{l_1^2} - 8 \frac{f_1}{l_1} \cdot \frac{c}{l_1} + \frac{c^2}{l_1^2}}$$

$$L_{1t} = \int_0^{l_1} \frac{dx_1}{\cos^2 \varphi} + \frac{a_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{a}{\cos^2 \varphi_0} \text{ et } \int_0^{l_1} \frac{dx_1}{\cos^2 \varphi} = \frac{l_1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{8 f_1} \right) m^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{8 f_1} \right) n^2 + 2 \right]$$

Nous avons $M_0 = \frac{p}{2} x (l - x)$.

On peut alors écrire les formules (3), (4) et (5) dans la forme suivante:

$$\Delta y = \frac{1}{(al)^2} \left(\frac{pl^4 + 8H_g^0 f l^2}{EJ(al)^2} - 8f \right) \left[\frac{\sin h ax + \sin h a(l-x)}{\sin h al} + \frac{(al)^2}{2} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - 1 \right] \quad (I3)$$

$$M = \frac{1}{(al)^2} [pl^2 - 8f(H_g - H_g^0)] \left[1 - \frac{\sin h ax + \sin h a(l-x)}{\sin h al} \right] \dots \quad (I4)$$

$$Q = - \frac{1}{(al)} \left[pl - \frac{8f}{l} (H_g - H_g^0) \right] \left[\frac{\cos h ax - \cos h a(l-x)}{\sin h al} \right] \dots \quad (I5)$$

Les formules fondamentales prendront la forme suivante:

$$\frac{8f}{l} \left(\frac{pl^4 + 8H_g^0 f l^2}{EJ(al)^2} - 8f \right) \left[\frac{1}{(al)^2} - \frac{2}{(al)^3} tgh \frac{al}{2} - \frac{1}{12} \right] + (al)^2 \frac{EJL}{E_k F_k l^2} - \frac{H_g^0 L}{E_k F_k} + \varepsilon t L_t + 2 \delta_1 = 0 \dots \dots \dots (I6)$$

$$\frac{8f_1}{l_1} \left(\frac{8H_g^0 f_1 l_1^2}{EJ_1(al_1)^2} - 8f_1 \right) \left[\frac{1}{(al_1)^2} - \frac{2}{(al_1)^3} tgh \frac{al_1}{2} - \frac{1}{12} \right] + (al_1)^2 \frac{EJ_1 L_1}{E_k F_k l_1^2} - \frac{H_g^0 L_1}{E_k F_k} + \varepsilon t L_{1t} - \delta_1 + \Delta l_1 = 0 \dots \dots \dots (I7)$$

En remplaçant dans cette formule δ_1 et Δl_1 et les exprimant en fonction de al et $a_1 l_1$, nous obtenons deux équations, que nous pouvons résoudre d'abord approximativement par voie d'essais, et puis à l'aide de l'interpolation nous trouvons les valeurs (al) et $(a_1 l_1)$ exactes. Les valeurs des tensions horizontales des câbles des travées centrale et latérale seront déterminées à l'aide des formules:

$$H_q = EJ a^2 \text{ et } H_q' = EJ_1 a_1^2.$$

Exemple. Nous avons les données suivantes pour le pont sur la Delaware: a) $l = 1722'$, $f = 193,70'$, $a = 14'$, $g = 13000 \text{ lb/p}$ — la charge permanente, $p = 6000 \text{ lb/p}$, la surcharge, $s_0 = 15,352'$, $E = 29500000 \times 144 \text{ lb/p}^2$ — le coefficient d'élasticité pour la poutre $E_k = 27000000 \times 144 \text{ lb/p}^2$ — pour le câble, $J = 1002 \text{ p}^4$, $F_k = 562 \times \frac{1}{144} \text{ p}^2$, $\varepsilon = 0,0000066$, $t = + 55^0 F$, $L = 1938,39'$. b) $l_1 = 702,67'$, $f_1 = 33,68'$, $a_1 = 35'$, $p_1 = 0$, $J_1 = 1,24 J$, $c = 240,6'$, $L_1 = 1056,38$

$$\Delta l_1 = 0,05969 (a_1 l_1)^2 - 0,0947$$

$$2 \delta_1 = 13,4410 (al)^2 - 100, 1002 (a_1 l_1)^2 + 0,5996.$$

La théorie d'élasticité donne les valeurs approximatives $al = 4,96$ et $a_1 l_1 = 1,805$. D'après quelques essais nous pouvons prendre les valeurs plus petites et résoudre le problème finalement à l'aide d'interpolation de surface.

L'interpolation graphique donne $al = 4,8830$ et $a_1 l_1 = 1,7819$.

		D'après la théorie d'élasticité	D'après la théorie exacte	Déduction en %
Tension horizontale du câble ...	$Hq =$	35 325 300 l.	34 226 000 l.	3%
" " " " ...	$H_x = H_p + H_t =$	10 488 300 ,,	9 349 000 ,,	11%
" " " " ...	ΔH_x	359 500 ,,	284 000 ,,	21%
Moment fléchissant	$M_{l/2} =$	200 127 000 l. p.	114 820 000 l. p.	43%
" "	$M_{l/4} =$	150 095 000 l. p.	94 458 000 l. p.	37%
Déformation (max).....	$\Delta y =$	13,17 p.	8,72 p.	33%

Cette table nous donne les résultats du calcul d'après deux méthodes, qui sont très remarquables, surtout la réduction de la déformation de 33 0/0.

$\frac{x}{l}$	Déformations (en pieds)	Déviations de la parabole (Fig. 2)
0,1	2,50	11 0/0
0,2	4,86	13 0/0
0,3	7,14	3 0/0
0,4	8,32	3 0/0
0,5	8,72	—

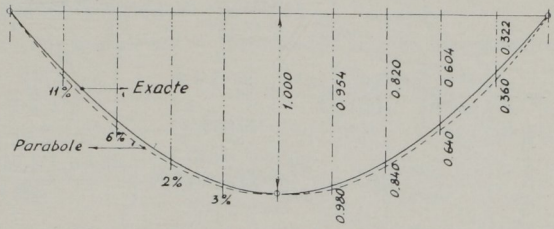


Fig. 2. Déviations du câble déformé de la parabole

Cette table indique que la forme exacte du câble déformé due à la surcharge répartie sur toute la longueur de la travée centrale diffère très considérablement de la parabole ordinaire, Fig. 2.

8. Tensions dans les tiges de suspension. Elles peuvent être déterminées à l'aide de l'équation de la chaîne:

$$q = -H_g \frac{d^2(y + \Delta y)}{dx^2}$$

ou

$$q = + \frac{8f}{l^2} H_g + \left[p - \frac{8f}{l^2} (H_g - H_g^0) \right] \left[\frac{1 - \sin h a x + \sin h a (l - x)}{\sin h a l} \right] \quad (18)$$

Cette formule indique que la courbe des tensions dans les tiges de suspension diffère de la parabole par la valeur du deuxième terme.

Exemple. Nous avons pour le pont sur la Delaware:

La théorie d'élasticité donne $q = 18460 \text{ lb}$.

Cette table indique que la différence dans les tensions des tiges de suspension est assez considérable.

m	$q \text{ (lb)}$	Différence
0	17 886	0
1	18 308	2 0/0
2	18 561	4 0/0
3	18 708	5 0/0
4	18 784	5 0/0
5	18 807	5 0/0

Chapitre III.

Surcharge couvrant la moitié gauche de la travée centrale avec effet d'accroissement positif de la température.

9. Formules fondamentales. Si la surcharge sur la travée centrale est non symétrique, les deux moitiés du câble auront la forme non symétrique. Quand la surcharge couvre la moitié gauche de la travée centrale, la partie gauche du câble s'abaisse, celle de droite monte.

Moments fléchissants pour la poutre simple de la travée centrale sont:

$$M_0 = \frac{p}{2} x \left(\frac{3}{4} l - x \right) \dots \dots \dots \text{pour } x < \frac{l}{2},$$

$$M_0 = \frac{p}{8} l (l - x) \dots \dots \dots \text{pour } x > \frac{l}{2}.$$

Les constantes d'intégration peuvent être déterminées par les conditions suivantes:

$$y = 0, \Delta y = 0, \Delta y' = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = l,$$

$$\Delta y = \Delta y', \frac{d \Delta y}{dx} = \frac{d \Delta y'}{dx} \text{ pour } x = \frac{l}{2}.$$

Nous pouvons obtenir :

a) pour la moitié gauche :

$$\Delta y = \frac{1}{(al)^2} \left(\frac{8 H_g^0 f l^2}{E J (al)^2} - 8 f \right) \left[\frac{\sin h a x + \sin h a (l-x)}{\sin h a l} - 1 \right] + \frac{\rho l^4}{E J (al)^4} \left[\frac{\sin h a (l-x)}{\sin h a l} + \frac{\sin h a x}{2 \sin h \frac{al}{2}} - 1 \right] + \left(\frac{H_g^0}{E J a^2} - 1 \right) y + \frac{1}{E J a^2} \frac{\rho}{2} x \left(\frac{3}{4} l - x \right) \quad (19)$$

$$M = \frac{8 f}{(al)^2} (H_q - H_g^0) \left[\frac{\sin h a x + \sin h a (l-x)}{\sin h a l} - 1 \right] - \frac{\rho l^2}{(al)^2} \left[\frac{\sin h a (l-x)}{\sin h a l} + \frac{\sin h a x}{2 \sin h \frac{al}{2}} - 1 \right] \dots \dots \dots (20)$$

$$Q = \frac{1}{(al)} \cdot \frac{8 f}{l} (H_q - H_g^0) \left[\frac{\cosh a x - \cosh a (l-x)}{\sin h a l} \right] + \frac{\rho l}{(al)} \left[\frac{\cosh a (l-x)}{\sin h a l} - \frac{\cosh a x}{2 \sin h \frac{al}{2}} \right] \quad (21)$$

b) pour la moitié droite :

$$\Delta y' = \frac{1}{(al)^2} \left(\frac{8 H_g^0 f l^2}{E J (al)^2} - 8 f \right) \left[\frac{\sin h a x + \sin h a (l-x)}{\sin h a l} - 1 \right] + \frac{\rho l^4}{E J (al)^4} \left(1 - \cosh \frac{al}{2} \right) \frac{\sin h a (l-x)}{\sin h a l} + \left(\frac{H_g^0}{E J a^2} - 1 \right) y + \frac{1}{E J a^2} \frac{\rho}{8} l (l-x) \quad (22)$$

$$M' = \frac{8 f}{(al)^2} (H_q - H_g^0) \left[\frac{\sin h a x + \sin h a (l-x)}{\sin h a l} - 1 \right] + \frac{\rho l^2}{(al)^2} \left(\cosh \frac{al}{2} - 1 \right) \frac{\sin h a (l-x)}{\sin h a l} \dots \dots \dots (23)$$

$$Q' = \frac{1}{(al)} \frac{8 f}{l} (H_q - H_g^0) \left[\frac{\cosh a x - \cosh a (l-x)}{\sin h a l} \right] - \frac{\rho l}{(al)} \left(\cosh \frac{al}{2} - 1 \right) \frac{\cosh a (l-x)}{\sin h a l} \quad (24)$$

Pour les travées latérales $M_0 = 0$ et $\rho = 0$.

Nous pouvons obtenir les équations fondamentales (I) et (II) — (avec l'effet d'accroissement positif de la température)¹ pour la travée centrale :

$$\frac{8 f}{l} \left[\frac{1}{(al)^2} \left\{ \left[- \frac{\rho l^4 + 16 H_g^0 f l^2}{E J (al)^3} + \frac{16 f}{(al)} \right] t g h \frac{al}{2} + \frac{\rho l^4}{2 E J (al)^2} - 8 f \left(1 - \frac{H_g^0 l^2}{E J (al)^2} \right) \right\} + \left(1 - \frac{H_g^0 l^2}{E J (al)^2} \right) \frac{2}{3} f - \frac{1}{24} \frac{\rho l^4}{E J (al)^2} \right] + \frac{E J L (al)^2}{E_k F_k l^2} - \frac{H_g^0 L}{E_k F_k} + \varepsilon t L_t + (\delta_1 + \delta_2) = 0 \dots \dots \dots (I)$$

pour la travée latérale gauche :

$$\frac{8 f_1}{l_1} \left[\frac{1}{(a_1 l_1)^2} \left\{ \left[- \frac{16 H_g^0 f_1 l_1^2}{E J_1 (a_1 l_1)^3} + \frac{16 f_1}{(a_1 l_1)} \right] t g h \frac{a_1 l_1}{2} - 8 f_1 \left(1 - \frac{H_g^0 l_1^2}{E J (a_1 l_1)^2} \right) \right\} + \left(1 - \frac{H_g^0 l_1^2}{E J_1 (a_1 l_1)^2} \right) \frac{2}{3} f_1 \right] + \frac{E J_1 L_1 (a_1 l_1)^2}{E_k F_k l_1^2} - \frac{H_g^0 L_1}{E_k F_k} + \varepsilon t L_{1t} - \delta_1 + \Delta l_1 = 0 \dots \dots \dots (II)$$

La même équation sera obtenu pour la travée latérale droite, mais il faut remplacer les indices (1) par les indices (2).

¹ Ces formules diffèrent un peu de celles de M. BLEICH.

En remplaçant ici les valeurs $\delta_1, \delta_2,$ et $\Delta l_1, \Delta l_2$ et en exprimant en fonction de $(al), (a_1 l_1)$ et $(a_2 l_2)$ nous pouvons obtenir *trois équations transcendantes avec trois inconnues* ($a\bar{l}$), $(a_1 l_1)$ et $(a_2 l_2)$. En les résolvant par essais nous pouvons trouver leurs valeurs exactes à l'aide de l'interpolation d'espace¹.

Exemple. Nous pouvons trouver pour le pont sur la Delaware à l'aide de l'interpolation d'espace

$$al = 4,5120,$$

$$a_1 l_1 = 1,6475,$$

$$a_2 l_2 = 1,6455.$$

Travée		Valeurs d'après la théorie d'élasticité	Valeurs exactes	Différence	
<i>I. Tension horizontale (lb.)</i>					
Centrale	$H_q =$	30 104 800	29 223 000	3%	
Latérale gauche	$H_q' =$	29 855 250	29 015 000		
Latérale droite	$H_q'' =$		28 944 000		
Centrale	$H_x =$		4 346 000		
Latérale gauche	$H_x' =$		4 138 000		
Latérale droite	$H_x'' =$		4 067 000		
	$\Delta H_1 =$ $\Delta H_2 =$	} $\Delta H = 249 550$	208 000 279 000		
<i>II. Moments (lb. p.)</i>					
Centrale	$M_{l/4} =$	} $\begin{cases} + 359 000 000 = \\ = \frac{1}{50} p l^2 \end{cases}$	$+ 249 548 000 =$ $= \frac{1}{71} p l^2$	31% ²	
Centrale	$M_{l/2} =$		$+ 109 041 000$		$+ 84 160 000$
Centrale	$M_{3/4} =$		$- 196 215 000$		$- 112 306 000$
<i>III. Effort tranchant (lb.)</i>					
Centrale	$A = Q_0 =$	$+ 1 544 490$	$+ 1 200 000$	22%	

	Déformations (pieds)	La tension dans les tiges de suspension (lb./p.)	
	Δy	q	Différence
0		15 271	—
0,10	+ 4,15	16 330	+ 7%
0,20	+ 7,02	16 887	+ 11%
0,25	+ 7,91	16 984	+ 11%
0,30	+ 8,38	16 981	+ 11%
0,40	+ 8,05	16 647	+ 9%
0,50	+ 6,88	15 849	+ 4%
0,60	+ 4,09	14 999	— 2%
0,70	+ 2,05	14 583	— 5%
0,75	+ 1,26	14 498	— 5%
0,80	+ 0,70	14 471	— 5%
0,90	+ 0,19	14 684	— 4%
1,00		15 271	—

¹ Pour adapter la méthode de l'interpolation d'espace il faut choisir 4 points dans l'espace avec les axes des coordonnées $(al), (a_1 l_1)$ et $(a_2 l_2)$. Ces 4 points doivent former un tétraèdre sans angles aigus, Fig. 3a. Nous pouvons faire l'interpolation graphiquement à l'aide de la

Ces tables indiquent que les déformations du câble ont la différence maximum de 5% et que les tensions dans les tiges de suspension diffèrent entre elles de (- 5%) jusqu'à (+ 11%) par rapport à la valeur moyenne.

Chapitre IV.

Surcharge couvrant la travée latérale gauche avec effet d'accroissement positif de la température.

Les formules (16) et (17) sont les mêmes; il faut prendre pour les travées centrale et latérale droite $\phi = 0$, parce que la surcharge est absente sur ces travées, et remplacer dans la formule (17) pour la travée droite les indices (1) par les indices (2).

Exemple. Nous avons trouvé pour le pont sur la Delaware à l'aide de l'interpolation d'espace:

$$a_1 l = 4,1470,$$

$$a_1 l_1 = 1,5204,$$

$$a_2 l_2 = 1,5176.$$

		Valeurs d'après la théorie d'élasticité	Valeurs exactes	Différence
Tension horizontale (lb.)	$H_q' =$	24 839 000	24 711 000	
" " " "	$H_x' =$	— 37 961	— 166 000	
Moment (lb. p.)	$M_{l_2} =$	+ 371 584 000	+ 302 615 000	19 ⁰ / ₀ ³
Effort tranchant (lb.)	$Q_0 =$	+ 2 115 000	+ 1 788 000	16 ⁰ / ₀ ³

Résumé.

Il résulte de tout ce qui précède que la réduction du moment fléchissant maximum de 38% dans la travée centrale, prévue par l'auteur du calcul du pont sur la Delaware, est confirmée casuellement par notre recherche exacte; nous avons reçu pour la travée latérale une réduction du moment fléchissant de 19% au lieu de 26¹/₂ (ce qui était fait par l'auteur du pont sur la Delaware).

Géométrie descriptive, Fig. 3b. Nous prenons 4 points C, E, F, K, qui forment le tétraèdre, Fig. 3a et b, et puis à l'aide de l'interpolation nous trouvons pour trois points de chaque face du tétraèdre les lignes d'interpolation, au travers de chaque paire desquelles nous traçons les

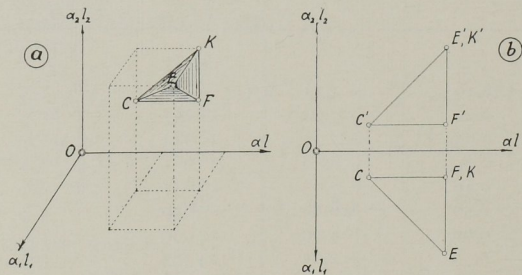


Fig. 3. a) Le tétraèdre. b) La méthode de la Géométrie descriptive

surfaces planes; l'intersection de deux surfaces planes donne une ligne droite, qui croise la troisième surface au point cherché avec les coordonnées cherchées.

² M. L. MOISSEIFF donne la valeur approximative + 324 000 000 l. p. et la valeur exacte + 200 500 000 l. p. avec la différence de 38⁰/₀.

³ M. L. MOISSEIFF donne $M = + 272 000 000$ lb. p. avec la différence de 26¹/₂⁰/₀ et $Q_0 = + 1 682 000$ lb. avec la différence de 20¹/₂⁰/₀.

Mais, ce qui est important pour un pont suspendu, c'est que la théorie exacte donne la déformation maximal du pont moindre (de 33 %); c'est tout à fait clair puisque la déformation d'un pont suspendu dépend principalement de la dilatation du câble. Si l'accroissement de la flèche du câble diminue sa tension, due à la charge permanente, nous avons le droit d'attendre encore une réduction générale de la flèche du câble.

Toutefois, la théorie exacte du pont suspendu à trois travées a une importance très essentielle pour obtenir une économie considérable dans la poutre de rigidité (jusqu'à 42 % de poids, comme disent les calculations des auteurs du pont sur la Delaware) et pour recevoir une réduction de 33 % des déformations du pont. Cette dernière circonstance a une grande signification pour les ponts suspendus, puisqu'elle peut facilement écartier les attaques contre la rigidité insuffisante des ponts suspendus.

Nous pouvons en tirer la conclusion que les susdites considérations ont aussi de l'importance surtout quand il y a concurrence entre les ponts suspendus et les ponts à consoles; une économie obtenue par l'application de la théorie exacte dans les ponts suspendus doit leur donner la préférence.

Prague, le 3 Novembre 1926.

Littérature.

Prof. J. MELAN, Handbuch d. Ing.-Wissenschaften. Brückenbau, II. Band, 5. Abt., 1925. — Prof. G. MEHRTENS, Eisenbrückenbau, III. Band, 1923. — Prof. H. MÜLLER-Breslau, Die Graphische Statik, II. Band, 2. Abt., 1925. — G. PIGEAUD, Nouvelles recherches sur le calcul des ponts suspendus et de leurs poutres de rigidité, Le Génie Civil, 2 et 9 juillet 1927. — The theory of the stiffened suspension bridge, Engineering, April 29, 1927. — The stiffening girder with variable moment of inertia, Engineering, January 6, 1928. — Steifigkeit von Hängebrücken, von S. TIMOSHENKO in Pittsburgh, ins Deutsche übertragen von J. MALKIN in Berlin. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 8, Februar 1928, Heft 1. — JEAN KARPINSKI, Le calcul des ponts suspendus à poutre de rigidité. Annales des Travaux Publics de Belgique, Juin 1928.

Diskussion

Prof. GRÜNING, Hannover:

Im Zusammenhang mit den beachtenswerten Ausführungen des Herrn KRIWOSCHEN über die *exakte Berechnung der Hängebrücke* darf wohl das Ergebnis meiner Untersuchung des gleichen Problems mitgeteilt werden.

Ich habe die Bauart „Kette in drei Öffnungen mit durchlaufendem Versteifungsbalken“ nach zwei Verfahren behandelt. Das eine setzt in jeder Öffnung unveränderliches Trägheitsmoment voraus und benutzt Differenzgleichungen, das zweite gilt für den allgemeinen Fall beliebiger Trägheitsmomente. Der Horizontalzug muß durch Approximation, aber mit großer Genauigkeit berechnet werden. Zwei Rechnungsgänge reichen trotzdem immer aus. Die Rechnung zeigt, daß unter sonst gleichen Verhältnissen das Moment im Versteifungsbalken durch das Trägheitsmoment der Mittelöffnung wesentlich beeinflußt wird. Je kleiner das Trägheitsmoment, desto kleiner das Moment im Versteifungsbalken, desto größer die Abweichung von dem gleichen Wert der Elastizitätstheorie. Das für den Querschnitt des Versteifungsbalkens maßgebende Moment in etwa $\frac{1}{4}$ der Spannweite kann man nicht nur auf 62%, wie im Falle der Delaware-Brücke, sondern auf 50, ja 40% des Wertes der Elastizitätstheorie herabdrücken.

Folgendes Verfahren ist allgemein anwendbar. Man setzt die Höhe h des Versteifungsträgers

$$h = \frac{2J}{W} = \frac{J}{M} a$$