

Weise möglich. Bei Stabquerschnitten, welche von der Rechteckform abweichen, sind die Abminderungen bzw. Erhöhungen der Knickkräfte auf Grund dieses Verfahrens einzuschätzen oder genau zu untersuchen. Abb. 7.

Der klaren Erkenntnis des Wesens des Knickens als Stabilitätsproblem, sowie der physikalisch richtigen Darstellung des Knickvorganges, ist die größte Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Die Prüfung des Tragvermögens bei exzentrischem Kraftangriff, Knickrichtung winkelrecht zur Kraftebene, sowie des Knicktragvermögens von nach beiden Hauptachsen exzentrisch gedrückten Stäben, wäre bis auf weiteres auf Grund der angegebenen Verfahren von Fall zu Fall durchzuführen, da sich hierüber allgemeine Angaben in einer für die Praxis leicht anwendbaren Weise vorderhand noch nicht machen lassen.

Anmerkungen

¹) TH. von KÁRMÁN. Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V.D.I., Heft 81, Berlin 1910.

²) M. ROŠ und J. BRUNNER. Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Bericht Nr. 13 der Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E.T.H. und der Gruppe VI der T.K.V.S.B., Zürich, August 1926.

³) M. ROŠ. Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunkte eiserner Fachwerkbauwerke. Bericht der Gruppe V der T.K.V.S.B. Juni 1922 und „Schweizerische Ingenieurbauten in Theorie und Praxis“, September 1926.

⁴) TH. WYSS. Beitrag zur Spannungsuntersuchung an Knotenblechen eiserner Fachwerke. Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V.D.I., Heft Nr. 262, 1923.

Diskussion

Professor M. BROSZKO, Warschau:

I.

In seinem Referat über die grundlegenden Fragen der Knickfestigkeit¹ lehnt sich Herr ROŠ auf das engste an die theoretischen Untersuchungen ENGESSERS² und v. KÁRMÁNS³ an. Diese enge Anlehnung der verdienstvollen Arbeit der Herren ROŠ und BRUNNER an die von den genannten Forschern aufgestellte Knickungstheorie ist zu bedauern. Denn die ENGESSER-v. KÁRMÁNSche Theorie, an die in der Arbeit angeschlossen wird, fußt auf einer evident falschen Grundlage, ihre Endergebnisse sind irrig, und infolgedessen ist auch das von Herrn ROŠ angegebene Berechnungsverfahren (das sogenannte T. K. V. S. B.-Verfahren) nicht einwandfrei.

2.

Bei der theoretischen Behandlung des nichtelastischen Knickungsvorganges knüpft v. KÁRMÁN seine Überlegungen⁴ an den Fall eines prismatischen homogenen Stabes vom Querschnitt F an (s. Abb. 29), der durch eine achsparallele Kraft $P = F \sigma_m$

¹ Siehe S. 282 des genannten Referates.

² F. ENGESSER, „Über Knickfragen“, Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXVI, Seite 24, 1895.

³ TH. v. KÁRMÁN, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V. D. I., Heft 81, Berlin 1910.

⁴ TH. v. KÁRMÁN, l. c. S. 11 f.

gleichmäßig zusammengedrückt und, infolge einer anfänglichen kleinen Exzentrizität y_a dieser Kraft, in der Ebene seiner kleinsten Steifigkeit leicht ausgebogen wurde.¹ Über das elastische Verhalten des Stabmaterials wird dabei in den Überlegungen v. KÁRMÁNS folgendes vorausgesetzt:

a) Der BERNOULLISCHEN Hypothese entsprechend, bleiben die ebenen Querschnitte des ungebogenen Stabes nach dessen erfolgter Ausbiegung eben. Die vor der Ausbiegung gleichmäßige Verteilung der spezifischen Verkürzungen längs der in der Biegungsebene liegenden Querschnittshauptachse befolgt daher nach erfolgter Ausbiegung ein lineares Gesetz.

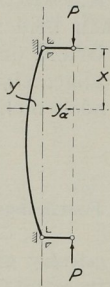


Abb. 29

b) In demjenigen Querschnittsteile, in dem die vor der Ausbiegung gleichmäßig verteilten spezifischen Verkürzungen ϵ_m infolge der Ausbiegung vergrößert wurden, gilt das durch die Druckversuche ermittelte, im Druck-Stauchungs-Diagramm zur Darstellung gelangende, empirische Gesetz $\sigma = f(\epsilon)$.

c) An jeder Stelle desjenigen Querschnittsteiles, in dem die durch das Zusammendrücken hervorgerufenen spezifischen Verkürzungen ϵ_m infolge der Ausbiegung verringert wurden, besteht, nach erfolgter Ausbiegung, zwischen der Abnahme der spezifischen Verkürzung $\Delta \epsilon_m$ und der zugehörigen Druckspannungsabnahme $\Delta \sigma_m$ die lineare Beziehung $\Delta \sigma_m = E \Delta \epsilon_m$, in der E den YOUNGSCHEM Elastizitätsmodul bedeutet.

Auf Grund dieser Annahmen und unter Benutzung des die elastischen Eigenschaften des Stabmaterials angehenden Druck-Stauchungs-Diagramms kann man offenbar die nach der Ausbiegung sich einstellende Spannungsverteilung im Querschnitt eindeutig bestimmen, falls die, vor der Ausbiegung gleichmäßig über den Querschnitt verteilte, spezifische Verkürzung ϵ_m (oder die mittlere Druckspannung

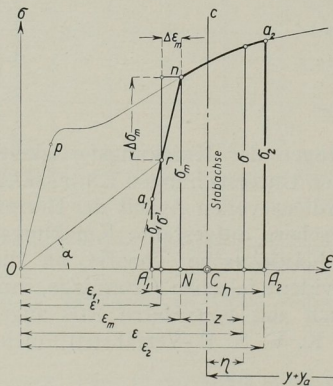


Abb. 30

σ_m) und die spezifischen Verkürzungen in den äußersten Fasern (ϵ_1 und ϵ_2) bekannt sind. Zum Zwecke dieser eindeutigen Bestimmung errichte man zunächst (s. Abb. 30) in demjenigen Abszissenpunkte N des Druck-Stauchungs-Diagramms, der dem Werte ϵ_m entspricht,² eine zur Abszissenachse senkrechte Gerade und ziehe von dem Schnittpunkte n dieser Geraden mit der Diagrammlinie eine zum geradlinigen Teil Op der letzteren parallele Gerade $n a_1$. Durch die Abszissenpunkte A_1 bzw. A_2 , die den spezifischen Verkürzungen ϵ_1 bzw. ϵ_2 entsprechen, ziehe man hierauf zwei zur Ordinatenachse parallele Geraden. Die erste dieser Geraden schneidet die Gerade $n a_1$ im Punkte a_1 , die zweite gelangt dagegen mit der Diagrammlinie im Punkte a_2 zum Schnitt. Der aus der geraden Strecke $a_1 n$ und aus dem Kurvenstück $n a_2$ zusammen-

gesetzte gebrochene Linienzug $a_1 n a_2$ stellt dann die Verteilung der Druckspannungen längs der in der Biegungsebene liegenden Querschnittshauptachse dar. Die Länge h dieser Querschnittshauptachse erscheint dabei im Diagramm durch die Strecke $A_1 A_2$ abgebildet, der Punkt N stellt in dieser Abbildung den Fußpunkt

¹ Der den Gegenstand der Überlegungen bildende Stab ist an seinen beiden Enden gelenkig gelagert, und seine beiden Enden sollen bei der Ausbiegung längs seiner ursprünglich geraden Achse geführt werden.

² Unsere Abbildung 30 stimmt in allen wesentlichen Stücken mit der v. KÁRMÁNSCHEN Fig. 9 überein.

der sogenannten „neutralen Achse“¹ dar, und der Punkt C deckt sich mit dem Schwerpunkte der Querschnittsfläche, falls durch das auf der Strecke $A_1 A_2$ senkrecht stehende Liniestück Cc ein Teilstück der in der Biegungeebene liegenden Stabachse abgebildet wurde.

Die auf Grund der vorstehend erörterten Überlegungen ermittelte und in der Abb. 31 dargestellte Spannungsverteilung ermöglicht nun die Aufstellung der beiden Gleichgewichtsbedingungen, die in jedem Querschnitt eines axial und unelastisch zusammengedrückten und hierauf leicht ausgebogenen Stabes erfüllt sein müssen. Diese Gleichgewichtsbedingungen drückt v. KÁRMÁN in der Form der beiden Gleichungen aus:²

$$\int_{(F)} \sigma dF = P \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\int_{(F)} \sigma z dF = P (y + y_a) \quad \dots \dots \dots (2)$$

wobei, nach v. KÁRMÁN'S ausdrücklicher Angabe,

z den Abstand der einzelnen Faser von der „neutralen Achse“,³

y_a die anfängliche Exzentrizität der Last in Bezug auf die gerade Schwerpunktslinie⁴ und

y die Ordinate der ausgebogenen Mittellinie im Abstände x bedeutet.⁴

Es ist nun ohne weiteres ersichtlich, daß die v. KÁRMÁN'Sche Momentengleichung (in unseren Bemerkungen als Gleichung 2 angeführt) unrichtig ist. Denn nach den oben angeführten Angaben v. KÁRMÁN'S ist der Hebelarm $(y + y_a)$ der äußeren Kraft P mit der kürzesten Entfernung der Richtung dieser Kraft von derjenigen Schwerpunktsachse des Querschnitts gleichbedeutend, die auf der Biegungeebene senkrecht steht. Da nun im Gleichgewichtsfalle die Gleichheit des Momentes der äußeren Kraft und des resultierenden Momentes der Spannungen nur dann besteht, wenn diese beiden Momente auf *dieselbe* Momentenachse bezogen werden, so kann die im Gleichgewichtsfalle bestehende Momentengleichheit nur durch die in der Form

$$\int_{(F)} \sigma \eta dF = P (y + y_a) \quad \dots \dots \dots (3)$$

angeschriebene Gleichung richtig zum Ausdruck gebracht werden, falls man die rechte Seite der v. KÁRMÁN'Schen Momentengleichung (Gl. 2) ungeändert läßt, und (s. Abb. 28) mit η den kürzesten Abstand der einzelnen Faser von der zur Biegungeebene senkrechten Schwerpunktsachse des Querschnitts bezeichnet. Diese richtige Gleichung ist aber offenbar mit der v. KÁRMÁN'Schen Momentengleichung nicht identisch.

3.

Bei der Ableitung der Formel für den kritischen Wert P_K der Belastung P , d. h. für die theoretische Knicklast bei vollkommener Zentrierung ($y_a = 0$) ist eine

¹ Als „neutrale Achse“ bezeichnet v. KÁRMÁN in seiner Abhandlung diejenige im Querschnitt liegende gerade Linie, längs deren die Spannung σ_m nach erfolgter Ausbiegung unverändert bleibt. Er bemerkt dabei, daß diese Bezeichnung dem üblichen Sprachgebrauch insofern nicht entspricht, als diese „neutrale Achse“ nicht spannungsfrei ist; ihre Fasern erhalten eben nur keine Spannungsänderung infolge der Biegung.

² TH. v. KÁRMÁN, l. c. S. 12. Gleichungen (5a) und (5b).

³ TH. v. KÁRMÁN, l. c. S. 12.

⁴ TH. v. KÁRMÁN, l. c. S. 9.

bedeutend sind, obwohl sie nach dem Sinne v. KÁRMÁNScher Ausführungen dieselbe Gleichgewichtsbedingung zum Ausdruck bringen sollen. Außerdem ist leicht einzusehen, daß auch die zweite dieser beiden sich widersprechenden Gleichungen in ihrer Anwendung auf einen *elastischen* Stab obendrein noch falsch ist. Denn die im Gleichgewichtsfall bestehende Gleichheit des Momentes der zentrischen Belastung P und des Momentes der Spannungen kann offenbar (s. Abb. 31) in dem vorliegenden *elastostatischen* Problem nur durch die Gleichung

$$\int_{(K)} \sigma \eta \, dF = P y \dots \dots \dots (3a)$$

richtig zum Ausdruck gebracht werden, falls man die Momente auf die zur Biegeebene senkrechte Schwerpunktsachse des Querschnitts bezieht. Diese richtige Momentengleichung ist aber offenbar weder mit der Gleichung (2a) noch mit der Gleichung (4) identisch. Es müssen demnach diese beiden Ausgangsgleichungen der v. KÁRMÁNSchen Theorie falsch sein.

4.

Von der Bedingungsgleichung (3 a) ausgehend, habe ich nun eine Theorie der Knickung zentrisch gedrückter Stäbe aufgestellt, die vor einigen Monaten in den Sitzungsberichten der Pariser Akademie der Wissenschaften veröffentlicht worden ist.¹ Der geänderten Ausgangsgleichung entsprechend, führt diese neue Knickungstheorie naturgemäß zu Endergebnissen, die von denen der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie grundverschieden sind. Denn die Knicklast P_K eines an seinen beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes, dessen Enden bei der Ausbiegung längs seiner ursprünglich geraden Achse geführt werden, ist nach der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie bei zentrischem Kraftangriff durch die Gleichung gegeben

$$P_K = \pi^2 \frac{T J}{l_0^2} \dots \dots \dots (5)$$

in der T den sogenannten Knickmodul, J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die zur Biegeebene senkrechte Schwerpunktsachse und l_0 die ursprüngliche Stablänge bezeichnet. Der Knickmodul T ist dabei durch die beiden simultanen Gleichungen bestimmt

$$T = \frac{E J_{1N} + \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_K J_{2N}}{J} \dots \dots \dots (6a)$$

$$E S_{1N} + \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_K S_{2N} = 0 \dots \dots \dots (6b)$$

in denen J_{1N} und J_{2N} die Trägheitsmomente der beiden durch die neutrale Achse getrennten Teilflächen der Querschnittsfläche in Bezug auf die neutrale Achse, S_{1N} und S_{2N} die statischen Momente derselben Teilflächen in Bezug auf dieselbe Achse², E den YOUNGSchen Elastizitätsmodul und $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_K$ den der kritischen Belastung P_K entsprechenden Wert der (aus dem Druck-Stauchungs-Diagramm zu bestimmenden) Ableitung $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ bezeichnen. Nach der neuen Knickungstheorie ist dagegen die Knicklast durch die Gleichung gegeben

$$P_K = \pi^2 \frac{\tilde{E}_K J}{(1 - \varepsilon_K) l_0^2}, \dots \dots \dots (7)$$

¹ Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Bd. 186, 1928, S. 1041.

² Der Index „1“ bezeichnet dabei die Biegezugseite, der Index „2“ dagegen die Biegedruckseite.

wobei der in dieser Gleichung auftretende Modul \tilde{E}_K durch die einfache Gleichung

$$\tilde{E}_K = \frac{\sigma_K}{\varepsilon_K} \dots \dots \dots (8)$$

als das Verhältnis der Knickspannung σ_K zu der Knickstauchung ε_K definiert ist¹ und der im Nenner auftretende Faktor $(1 - \varepsilon_K)$ den — sowohl in den EULER-Formeln als auch in den v. KÁRMÁNSchen Gleichungen vernachlässigten — Einfluß der Stabverkürzung zum Ausdruck bringt.

Auf Grund der vorstehenden Angaben erkennt man nun, daß das überraschend einfache Ergebnis der neuen Knickungstheorie folgendermaßen formuliert werden kann: *Die ursprünglich nur für den Fall einer elastischen Knickung abgeleiteten EULERSchen Knickformeln stellen auch im Bereiche der unelastischen Knickung eine strenge Lösung des Stabilitätsproblems dar, sofern man nur, in der sonst üblichen Weise,² die Bedeutung des Begriffes „Elastizitätsmodul“ dahin verallgemeinert, daß er stets (d. h. auch nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze) den Wert des Verhältnisses $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ bedeuten soll.³*

Bezüglich der mathematischen Ableitung⁴ der Gleichung (7) muß auf die vorerwähnte Akademienote verwiesen werden. An dieser Stelle möge nur, zwecks besserer Beleuchtung des Endergebnisses der neuen Knickungstheorie, die folgende einfache Betrachtung angestellt werden:

Wird einem durch die zentrische Knicklast P_K unelastisch zusammengedrückten Stabe eine *unendlich kleine* Ausbiegung in der Ebene seiner kleinsten Steifigkeit erteilt, so werden sich, infolge dieser unendlich kleinen Ausbiegung, die vorhin im Querschnitt gleichmäßig verteilten Werte der spezifischen Verkürzungen ε nur um unendlich kleine Beträge gegenüber demjenigen endlichen Wert ε_K der spezifischen Verkürzung ändern, der, bei der alleinigen gleichmäßigen Zusammendrückung, sämtlichen Fasern gemeinsam war. Da nun aber die diesen unendlich kleinen Deformationsänderungen zugehörigen Änderungen der Spannung ebenfalls unendlich klein sein müssen, so ist es klar, daß die Werte der für verschiedene Querschnittspunkte berechneten Verhältnisse $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \tilde{E}$ bei einer unendlich kleinen Ausbiegung nur um unendlich kleine additive Glieder von dem vorhin gemeinsamen Werte $\frac{\sigma_K}{\varepsilon_K} = \tilde{E}_K$ verschieden sein können. Diese unendlich kleinen Abweichungen der Werte \tilde{E} von dem endlichen Werte \tilde{E}_K dürfen im ganzen Verlaufe des Vorganges einer unendlich kleinen Ausbiegung nach den Regeln der Infinitesimalrechnung vernachlässigt werden. Da nun aber die Betrachtung des Verhaltens eines zentrisch belasteten Stabes während seiner nur unendlich kleinen Ausbiegung vollauf genügt, um über die Art seines Gleichgewichtszustandes (stabil, labil oder indifferent) zu ent-

¹ Die Bestimmung des Wertes des Moduls \tilde{E}_K kann offenbar (im Gegensatz zu derjenigen des Knickmoduls T) auf rein analytischem Wege erfolgen.

² S. A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. III, 9. Aufl., 1922, S. 47.

³ Für diesen verallgemeinerten Begriff eines nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze variablen Elastizitätsmoduls wird hiemit die Bezeichnung \tilde{E} in Vorschlag gebracht.

⁴ Mit Rücksicht auf den sehr knappen (auf $2\frac{1}{2}$ Seiten beschränkten) Umfang der Akademienoten mußte die mathematische Ableitung des Endresultats in einer sehr gedrängten Form gebracht werden. Ich habe daher zwar ursprünglich die Absicht gehabt, diese Ableitung in der Niederschrift meines Diskussionsvortrages etwas ausführlicher zu behandeln, um sie auch denjenigen Lesern zugänglich zu machen, die in den Gedankengängen der höheren Mathematik weniger bewandert sind. Mit Rücksicht auf die in Aussicht gestellte Polemik habe ich aber aus naheliegenden Gründen von diesem meinen anfänglichen Vorhaben Abstand genommen.

scheiden, so ist nicht einzusehen, weshalb ein Stab aus einem Material, dessen Elastizitätsmodul \tilde{E}_K im Verlaufe dieser unendlich kleinen Ausbiegung als unveränderlich im strengsten mathematischen Sinne zu gelten hat, sich in Bezug auf seine Stabilität anders verhalten sollte als ein anderer Stab von den gleichen Dimensionen, dessen Material unter der Knicklast noch das HOOKESCHE Gesetz befolgt und dessen YOUNGScher Modul E einen numerischen Wert $E = \tilde{E}_K$ hat. Es ist vielmehr von vornherein zu erwarten, daß beide Stäbe dieselben Stabilitätsbedingungen befolgen, also — mit Rücksicht auf ihre gleichen Dimensionen und auf die Gleichheit der einzigen beim Stabilitätsproblem in Frage kommenden Materialkonstante — unter der gleichen Axialbelastung ausknicken werden. Dieser Erwartung wird aber offenbar bei allen möglichen Werten von \tilde{E}_K nur dann entsprochen werden können, wenn die bei der unelastischen Knickung geltende Knickformel mit der analogen, die elastische Knickung bestimmenden, in Bezug auf ihren Aufbau völlig übereinstimmt.

Zur Kennzeichnung der neuen Knickungstheorie muß vor allem hervorgehoben werden, daß sie — im Gegensatz zu der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie — auch auf solche Materialien anwendbar ist, die keine Proportionalitätsgrenze besitzen, sofern nur für diese Materialien die BERNOULLISCHE Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bei Biegung zutrifft.¹ Des weiteren soll nochmals betont werden, daß in der neuen Gleichung für die Knicklast, infolge einer exakteren Fassung der Deformationsvorgänge beim Knicken, auch der — allerdings unerhebliche — Einfluß der Stabverkürzung zum Ausdruck gelangt. Keiner besonderen Unterstreichung bedarf, nach dem oben Gesagten, die selbstverständliche Eigenschaft der neuen Knickungstheorie, daß sie die EULERSche als einen Spezialfall in sich einschließt.

In welchem Grade und in welchem Sinne die Endergebnisse der neuen Knickungstheorie von denjenigen der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie abweichen, ist aus der Abb. 32 ersichtlich. In diese Abbildung sind zwei Kurven eingezeichnet worden, in denen die aus den v. KÁRMÁNSchen Druckversuchen auf Grund der bei-

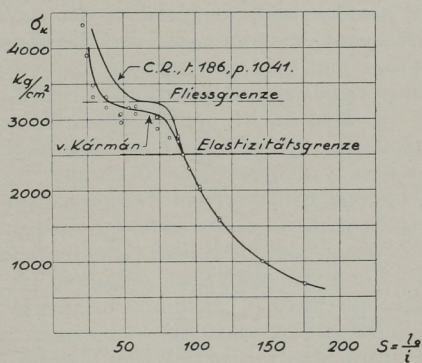


Abb. 32

den vorerwähnten Knickungstheorien abgeleitete Abhängigkeit der Knickspannungen von der Schlankheit des Stabes $s = \frac{l_0}{i} = \frac{\text{ursprüngliche Stablänge}}{\text{Trägheitshalbmesser}}$ zur Darstellung gebracht worden ist. Außerdem wurden in diese Abbildung auch Punkte eingetragen, in denen die Ergebnisse der v. KÁRMÁNSchen Knickversuche zum Ausdruck gelangen. Man sieht auf den ersten Blick, daß die aus der neuen Theorie abgeleitete Knickspannungskurve, im Gegensatz zu der v. KÁRMÁNSchen,² die tatsächlich

¹ Diese Eigenschaft der neuen Theorie folgt daraus, daß man auch dann, wenn der Teil $a_1 n$ des Spannungsverteilungsdiagrammes (s. Abb. 30) nicht geradlinig ist, zu demselben, durch die Gl. (7) gegebenen Endresultat gelangt.

² In der Fig. 23 der v. KÁRMÁNScher Abhandlung wird die theoretische Knickspannungskurve von einigen Versuchspunkten in unzulässiger Weise nach oben überschritten. Es kann infolgedessen von einer Bestätigung der v. KÁRMÁNSchen Theorie durch seine Knickversuche kaum die Rede sein, zumal der in den v. KÁRMÁNSchen Knickversuchen erreichte Genauigkeitsgrad der Zentrierung der Versuchsstäbe wohl überschreitbar ist.

obere Grenze für die beobachteten Knickspannungswerte bildet, und daß — wie es sein soll — keine Abweichungen der letzteren nach oben vorkommen.

In meiner vorerwähnten Akademienote wird nur die Knickung bei zentrischem Kraftangriff behandelt. Es ist aber leicht einzusehen, daß eine Erweiterung dieser Theorie auf den Fall exzentrischen Kraftangriffs ohne Mühe vorgenommen werden kann.

Prof. Dr. Ing. M. T. HUBER, Warschau:

Der Bericht des Herrn Prof. Dr. M. Roš über die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung beleuchtet an Hand der wertvollen Versuchsergebnisse die hohe Bedeutung und die Schwierigkeiten der behandelten allgemeinen Aufgabe, er läßt aber die theoretischen Grundbegriffe derselben nur andeutungsweise hervortreten.

Ich gestatte mir deswegen ganz kurz die Aufmerksamkeit der Herren Fachkollegen auf diese Grundbegriffe zu lenken und dabei einiges in Erinnerung zu bringen, was teilweise seit langer Zeit in der Schatzkammer der technischen Mechanik niedergelegt worden ist.

In den sehr oft gebrauchten Bezeichnungen: „Knickgefahr“, „Knickbelastung“, „Knickfestigkeit“ u. dgl. stecken nämlich zwei grundverschiedene Begriffe:

1. Für einen praktisch homogenen, zentrisch gedrückten Stab sucht man denjenigen Grenzwert der Belastung P , deren Überschreitung zur *Instabilität* der *geraden* und zur *Stabilität* der *verbogenen* Form der Stabachse führt. Dieser Grenzwert entspricht also dem *indifferenten* Gleichgewichtszustande des belasteten Stabes und wird zweckmäßig als *kritische Belastung* (P_{kr}) bezeichnet. Demnach hängt der Begriff der kritischen Belastung mit der *Stabilitätsforderung* zusammen.

2. Man sucht denjenigen Grenzwert der Belastung, dessen Überschreitung unzulässige gefährliche Formänderungen des Stabes bedingt. Ich möchte diesen Grenzwert als *gefährliche Belastung* (P_{gef}) bezeichnen. Der Begriff der gefährlichen Belastung wird von der *Festigkeitsforderung* bestimmt. Er ist mit dem Begriffe des Sicherheitsgrades und der Beanspruchung eng verbunden.¹

Wenn man die beiden Grundbegriffe des Problems, d. h. die *kritische Belastung* (P_{kr}) und die *gefährliche Belastung* (P_{gef}) immer scharf auseinander hält und sie nicht durchweg — wie in der technischen Literatur üblich — mit dem gemeinsamen Namen „Knickbelastung“ bezeichnet, so vermeidet man Mißverständnisse, welche in unfruchtbare Streitigkeiten auszuarten pflegen. Von den Ingenieuren der Bau Praxis wird nämlich unter „Knickung“ (fr. „flambage“) im allgemeinen jede deutliche Ausbiegung der Stabachse verstanden, die infolge der zusammendrückenden Längskraft stattfindet, und zwar gleichgültig, ob die Belastung zentrisch oder exzentrisch wirkt. Es wäre vielleicht aussichtslos, gegen diese alte Gewohnheit zu kämpfen, aber es ist unbedingt notwendig, die beiden Bedeutungen desselben Wortes scharf auseinander zu halten.

Der wichtigste Unterschied zwischen der zentrischen und der sogenannten „*exzentrischen Knickung*“ besteht darin, daß beim exzentrischen Kraftangriff der Begriff der kritischen Belastung vollständig in Wegfall kommt. Der Stab wird bei jedem noch so kleinen Werte von P verbogen und seine gekrümmte Gestalt ist immer stabil, so lange die Anstrengung des Materials eine gewisse Grenze nicht

¹ Diese beiden Forderungen entsprechen den Hauptzwecken der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre, welche folgendermaßen ausgedrückt werden können:

Jedes Konstruktionselement soll den Bedingungen einer ausreichenden *Steifigkeit*, *Widerstandsfähigkeit* sowie möglichst hoher *Wirtschaftlichkeit* genüge leisten. Die zwei ersten ergeben in unserem Falle die *Stabilitätsforderung* und die *Festigkeitsforderung*.

erreicht. Diese Grenze aber entspricht dem Werte der gefährlichen Belastung.

Im Falle der exzentrischen Belastung hat somit nur der Begriff der gefährlichen Belastung einen konkreten Sinn.

Bei praktisch achsialer Belastung genügend schlanker Stäbe nehmen die beiden Größen P_{kr} und P_{gef} praktisch gleiche Werte an und wahrscheinlich deswegen hat man sie so oft durcheinander geworfen.

Der Wert der kritischen Belastung ist bekanntlich für genügend schlanke Stäbe durch die EULERSche Formel mit großer Genauigkeit bestimmt („elastische Knickung“). Für die weniger schlanken Stäbe, d. h. im Gebiete der „unelastischen Knickung“ scheint mir den Wert von P_{kr} erst die neue Formel vom Herrn Prof. M. BROZKO theoretisch einwandfrei zu liefern.¹

Die graphische Darstellung der Abhängigkeit der $\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F}$ von der Schlankheit s gibt eine glatte Kurve, welche aus zwei Teilen zusammengesetzt ist (Abb. 33). Der erste für das Schlankheitsintervall $0 < s < s_{gr}$ entspricht dem unelastischen Gebiet; der zweite für $s_{gr} < s < \infty$ gehört der EULERSchen Hyperbel im elastischen Gebiet. Beide Teile bilden die vollständige *Stabilitätskurve* des Stabes.

¹ Die Berechtigung der Einwände von BROZKO gegen die Ableitung des ENGESSER-V. KÄRMÄNSchen Knickmoduls stehen meines Erachtens außer jedem Zweifel.

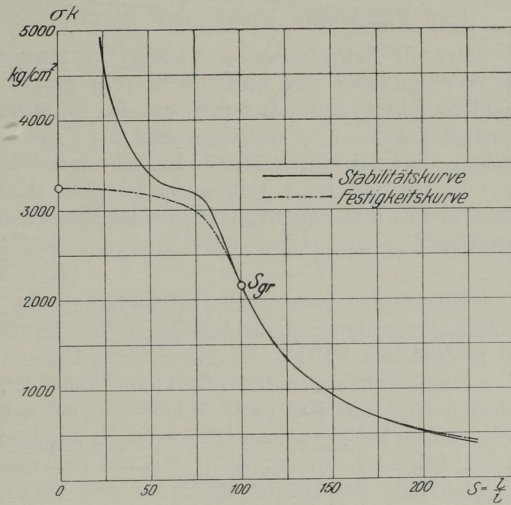


Abb. 33

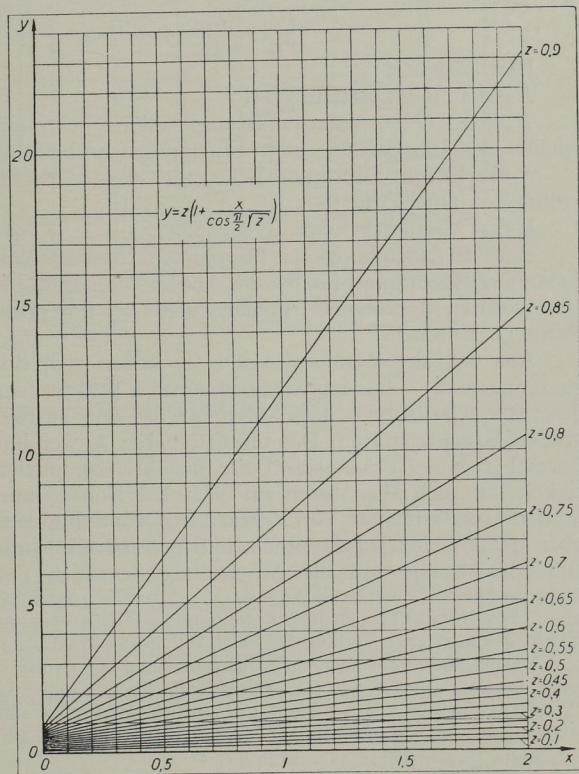


Abb. 34

Eine zugehörige Kurve der gefährlichen mittleren Spannungen $\sigma_{gef} = \frac{P_{gef}}{F}$ — kurz die *Festigkeitskurve* — liegt im Bereiche sehr kleiner Schlankheiten ausgesprochen tiefer und im Bereiche sehr großer (praktisch fast nie vorkommender) Schlankheiten deutlich höher als die Stabilitätskurve. Es gibt offenbar mehrere Festigkeitskurven, je nachdem man das Erreichen der Elastizitätsgrenze oder Fließgrenze, bzw. der Bruchspannung als *gefährlich* betrachtet.¹

In dem praktisch wichtigsten Bereiche mittlerer Werte der Schlankheit werden die Unterschiede der Ordinaten beider Kurven unbedeutend und praktisch vernachlässigbar.²

II.

Eine andere wesentliche Schwierigkeit des Problems beruht darauf, daß kleine zufällige und unvermeidliche Exzentrizitäten der Kraftwirkung den Wert von P_{gef} in praktischen Fällen sehr stark herabdrücken.³

Diese verhängnisvolle Rolle kleiner Exzentrizitäten wurde durch die Versuche der Herren ROŠ und BRUNNER sehr schön beleuchtet. Seine diesbezüglichen Schlußfolgerungen lassen sich auch theoretisch ableiten. Wenn man nämlich von unmerklichen Exzentrizitäten absieht, bei welchen nur die Lösung der strengen Differentialgleichung der Biegelinie mit den Versuchsergebnissen vergleichbar ist, so kann man genügend genau nach der bekannten Näherungslösung den Wert der gefährlichen Belastung aus der folgenden Formel berechnen:

$$\frac{P_0}{P_E} = \frac{P_{gef}}{P_E} \left(1 + \frac{\delta}{k} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_{gef}}{P_E}} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Hier bedeutet:

P_E den EULERSchen Wert;

P_0 jene Querschnittsbelastung, welche bei gleichförmiger Verteilung das Erreichen der Elastizitäts- bzw. Fließgrenze herbeiführen würde;

δ die Exzentrizität der Belastung (in der Richtung des kleinsten Trägheitsradius des Querschnitts).

k den entsprechenden Kernradius.

Bei der Aufstellung der Formel ist allerdings von der kleinen Krümmung der Spannungs-Dehnungslinie bei der Annäherung an die Fließgrenze abgesehen worden. Der daraus entspringende Fehler dürfte bei der praktischen Anwendung kaum in Betracht kommen.

Aus der allgemeinen Formel (1) lassen sich durch weitere starke Vernachlässigungen die seinerzeit vorgeschlagenen praktischen Formeln von v. EMPERGER, JOHNSON, OSTENFELD u. a. ableiten.⁴ Sie sind ausreichend genau nur bei ziemlich großen Exzentrizitäten. Der unmittelbaren Anwendung der genaueren allgemeinen Formel (1) in der Praxis stand offenbar ihre Kompliziertheit im Wege. Diese Schwierigkeit läßt sich aber durch ein einfaches Nomogramm umgehen. Ich habe bereits in der oben zitierten Veröffentlichung vom Jahre 1907 darauf hingewiesen, bin aber erst jetzt dazu gekommen, daß betreffende Nomogramm anfertigen zu lassen. Die Einrichtung und die Anwendung desselben gestaltet sich folgendermaßen:

¹ Für Baustahl ist meines Erachtens die Fließgrenze maßgebend. Dieser Annahme entspricht der ungefähre Verlauf der Festigkeitskurve in Abb. 33.

² Denn einer äußerst kleinen Überschreitung der Größe P_{hr} durch die Belastung im elastischen Bereiche entsprechen sehr große Ausbiegungen und Spannungserhöhungen.

³ Die übrigen Abweichungen des praktischen Stabes von dem theoretischen Schema, wie ursprüngliche schwache Krümmung, Unhomogenitäten des Materials u. dgl. lassen sich auf eine reduzierte Exzentrizität zurückführen.

⁴ M. T. HUBER, „Über die Säulenfestigkeit“ (poln.). — Przegląd Techniczny, Warszawa, 1907.

Mit den Bezeichnungen der Verhältniszahlen:

$$\frac{\delta}{k} = x, \quad \frac{P_0}{P_E} = y, \quad \frac{P_{gef}}{P_E} = z$$

geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$y = z \left(1 + x \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{z} \right) \dots \dots \dots (1a)$$

Dieser Gleichung entspricht in der XY-Ebene ein System von Geraden mit dem variablen Parameter z (Abb. 34 und 35). Für einen gegebenen exzentrisch belasteten Stab berechnet man die Werte von

$$\frac{\delta}{k} = x \quad \text{und} \quad \frac{P_0}{P_E} = y$$

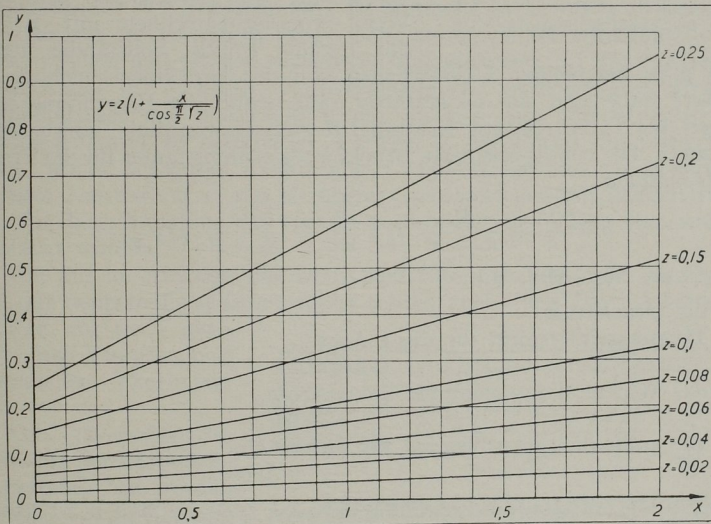


Abb. 35

und entnimmt aus dem Nomogramm — nötigenfalls durch Interpolation — den zugehörigen Wert von

$$z = \frac{P_{gef}}{P_E}$$

Das Nomogramm gilt selbstverständlich für alle Stoffe, welche dem Proportionalitätsgesetze bis zu der als gefährlich betrachteten Spannung genügend genau folgen.¹

Wie man sieht, übernimmt hier die Größe P_E die Rolle eines Maßstabes, mit welchem der Wert der gefährlichen Belastung gemessen wird. Der Einfluß der Exzentrizitäten auf Verminderung des Wertes $P_{gef} = z P_E$ läßt sich aus dem Nomogramm sehr bequem ablesen.

Es wäre wünschenswert, die Ergebnisse der Roßchen Versuche bei exzentrischer Belastung mit der obigen theoretischen Formel zu vergleichen.

¹ Es ist bereits in meinem polnischen Aufsatz „Zur Berechnung der Druckstäbe“ (Przeglad Techniczny, Warschau 1928) veröffentlicht worden.

Professor H. KAYSER, Darmstadt:

Das Problem der Knickung wird schon seit Jahren in allen Ländern, die heute an dem Kongreß teilnehmen, mit dem größten Interesse verfolgt. Umfangreiche Versuche sind durchgeführt worden und haben sehr wertvolles Material für die weitere theoretische Behandlung der Knickfrage geliefert. Ich glaube daher, daß es an der Zeit ist, zu versuchen, alle gewonnenen Versuchsergebnisse zusammenzufassen und zu vereinheitlichen, um eine breite theoretische Grundlage zu gewinnen, auf der die Praxis in den nächsten Jahren arbeiten kann.

Anschließend an Vorschläge, die ich im Jahre 1910 gemacht habe, und gestützt auf Versuche, die ich in diesem Jahre mit doppelwandigen Druckstäben für den

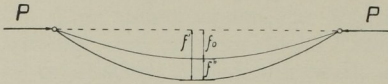


Abb. 36. Ausbiegung der Stabachse

Deutschen Eisenbau-Verband durchgeführt habe, will ich Ihnen heute ein theoretisch-praktisches Verfahren vorführen, welches es ermöglicht, alle Druckstäbe auf einfachste Weise vorauszuberechnen mit Ergebnissen, die für die Praxis vollständig ausreichend sind. Ich gehe bei meinen Überlegungen von der Druckbiegegleichung aus, die ich erweitert habe und die es gestattet, auf Grund der Berechnung der Randspannungen bei exzentrischem Kraftangriff eine einwandfreie Vorausberechnung durchzuführen. Die verallgemeinerte Druckbiegegleichung lautet für die Ermittlung der Randspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{R_x}{R_x - P} \cdot f_0 x \frac{P}{W_x} \pm \frac{R_y}{R_y - P} \cdot f_0 y \frac{P}{W_y};$$

hierin bedeutet (vgl. Abb. 36)

- P die Druckkraft,
- R_x Biegungswiderstand für die x -Achse,
- R_y „ „ „ „ y -Achse,
- W_x das Widerstandmoment für die x -Achse,
- W_y „ „ „ „ y -Achse,
- $f_0 x$ die anfängliche Ausbiegung für die x -Achse,
- $f_0 y$ „ „ „ „ „ „ y -Achse.

Die hieraus ermittelte Randspannung darf das zulässige Maß nicht übersteigen. Das ganze Rechnungsverfahren verläuft unterhalb der Proportionalitätengrenze und schließt sich damit dem Rechnungsverfahren für Zugbeanspruchung und für Biegebeanspruchung an. Die *Druckbiegegleichung* schließt den Eulerwert in sich ein und gilt gleichmäßig für gedrungene und schlanke Druckstäbe. σ wird unendlich groß, falls $R_x = P$ oder $R_y = P$; für den gelenkig gestützten Stab ist $R = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$, für den eingespannten Stab ist $R = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$.

Man sieht also, daß die Randspannung in hohem Maße von dem Wert R abhängig ist und daß die richtige Bestimmung dieses Wertes von großer Bedeutung ist.

Bei doppelteiligen Druckstäben ist der Wert R nicht nur von der Einspannung, sondern auch von der Abminderung infolge der Bindungen durch Gitterstäbe oder Bindebleche abhängig. Diese Abminderung kann nach den bekannten Formeln von KAYSER oder MÜLLER-Breslau genau genug berechnet werden.¹

Schwieriger ist es, den Einspannungsgrad durch Rechnung festzustellen. In dieser Beziehung leistet *der Versuch* mit Druckstäben an fertigen Bauwerken gute

¹ KAYSER, Die Knickversteifung doppelwandiger Druckquerschnitte. Der Eisenbau 1910. — MÜLLER, Breslau: Neuere Methoden. — PETERMANN: MÜLLER, Breslau, Versuche. Bauingenieur 1926.

Dienste. Man kann den Stab in der Mitte mit einer Einzelkraft Q querbelasten; es wird dann

$$R = P + 0,2 Q \cdot \frac{l}{fm};$$

fm ist der gemessene Ausbiegungswert, P die vorhandene Längskraft.¹ (vgl. Abb. 37) Wie nachgewiesen werden kann, ist in diesem Wert sowohl der Grad der Einspannung, als auch der der Abminderung enthalten. Man kann diesen Wert R als Biegungswiderstand oder Rückstellkraft bezeichnen. Wenn man ihn in die allgemeine Biegungsgleichung einführt, ist Einspannungsgrad und Abminderung auch bei mehrteiligen Druckstäben berücksichtigt.

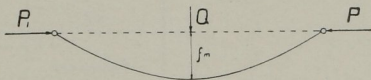


Abb. 37. Querbelastung des Stabes

Die Berechnung der Nutzsprungung ist nunmehr noch von f_0 abhängig. Dieser Wert ist aber auf theoretischem Wege nicht zu finden; er wird innerhalb weiter Grenzen schwanken und ist von mancherlei Zufälligkeiten bei der Ausführung des Stabes abhängig. Er schließt Stabverbiegungen, exzentrischen Kraftangriff, Ungleichmäßigkeiten des Materiales u. dgl. in sich ein und ist daher lediglich als *Rechnungshilfswert* zu betrachten. Er wird in der Praxis mit etwa 1:200 angenommen, wobei bei guter Ausführung 1:250 als unterer Grenzwert und bei weniger guter Ausführung 1:150 als oberer Grenzwert gewählt werden dürfte. Ein Nachweis für diese Annahme auf versuchstechnischer Grundlage war seither noch nicht erbracht worden.

Die von mir im Auftrage des Deutschen Eisenbau-Verbandes durchgeführten Versuche mit doppelteiligen Druckstäben sollten auch diese Frage klären. Ich will Ihnen daher nur noch ganz kurz über diese Versuche und die gewonnenen Ergebnisse berichten.

In Abb. 38 ersehen Sie die Ausbildung der untersuchten Druckstäbe. Sie wurden mit steigender Längsbelastung von 5 bis 30 t belastet und dabei die Spannungen in vier Randpunkten *der Stabmitte* und die Ausbiegung gemessen. Zur Ermittlung des Biegungswiderstandes R diente eine

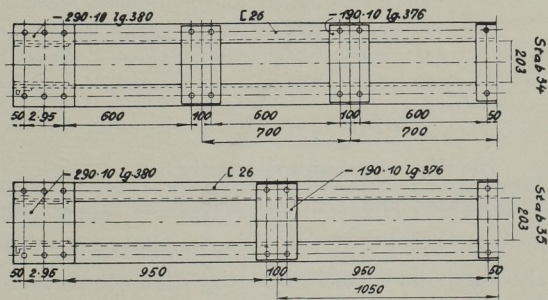


Abb. 38. Ausbildung der Versuchsstäbe

Querbelastung von 0,5 bis 3,0 t. Das Ergebnis der Querbelastung lieferte R -Werte, wie sie in der Tafel 3 zusammengestellt sind.

In dieser Tabelle sind zum Vergleiche auch die theoretischen Werte aufgeführt und zeigen gute Übereinstimmung.

Die Ermittlung der Randspannungen durch Messung liefert in Verbindung mit der Druckbiegungsgleichung die Werte f_0 , welche naturgemäß innerhalb weiter Grenzen schwanken. Die Ergebnisse der Messungen und Rechnungen zeigt Tafel 4.

¹ KAYSER, Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegungsfestigkeit. Ztschr. d. Vereines dtsh. Ingenieure 1917, S. 92.

Tafel 3
Zusammenstellung der Biegungswiderstände

Stab Nr.	R-Werte theoretisch nach			R aus dem Versuch kg
	EULER kg	KAYSER kg	MÜLLER- Breslau kg	
32	1 466 000	1 233 000	1 155 000	912 000
33	1 466 000	1 020 000	897 000	926 000
34	1 466 000	865 000	722 000	852 000
35	1 466 000	616 000	448 000	446 000
36	1 466 000	446 000	286 000	422 000

Tafel 4
Tabelle für die „anfängliche Ausbiegung“ der Stabachse

$$P = 25\,000 \text{ kg} \quad f_{0x} = \frac{R_x - P}{R_x} \cdot f'_x \quad f_{0y} = \frac{R_y - P}{R_y} \cdot f'_y$$

$$R_x = 896\,000 \text{ kg} \quad l = 471,5 \text{ cm}$$

Stab Nr.	$\frac{R_x - P}{R_x}$	f'_x	f_{0x}	R_y	$\frac{R_y - P}{R_y}$	f'_y	f_{0y}	f_0	$f_0 : l$
32	0,972	1,1800	1,145	912 000	0,971	0,249	0,242	1,170	1:403
33	0,972	1,0300	1,000	926 000	0,972	0,297	0,289	1,040	1:453
34	0,972	0,0186	0,018	852 000	0,969	0,466	0,452	1:1040	
35	0,972	0,9520	0,927	446 000	0,943	0,174	0,164	0,941	1:500
36	0,972	0,4640	0,451	422 000	0,939	0,399	0,374	0,587	1:804

Die Werte f_0 schwanken zwischen $\frac{1}{400}$ und $\frac{1}{1000}$. Da die Versuchsstäbe sehr gut ausgerichtet und zentriert waren, so müssen für den praktischen Gebrauch die f_0 -Werte erhöht werden. Die Annahme für mittlere Verhältnisse $f_0 = \frac{1}{200}$ scheint also durch die Versuche bestätigt. Man könnte auch, wie es Professor ROß vorschlägt, f_0 in Abhängigkeit von der Kernweite bringen und etwa zu $\frac{1}{4}$ derselben annehmen. Es mag weiteren Versuchen vorbehalten bleiben, festzustellen, ob die eine oder die andere Annahme für die Praxis zweckmäßiger ist. Wünschenswert wäre es jedenfalls, wenn in den verschiedenen Ländern und bei den verschiedenen Verwaltungen nach einheitlichen Grundsätzen recht bald gerechnet werden könnte.

Dozent Dr. Ing. I. RATZERSDORFER, Breslau.

Bei der Berechnung des Gleichgewichts von Balken auf nachgiebiger Unterlage ist in der technischen Literatur, wie auch aus dem Referat des Herrn G. PIGEAUD ersichtlich ist, die insbesondere von H. ZIMMERMANN entwickelte Annahme üblich, daß zwischen der Pressung, dem sogenannten „Bettungsdruck“ $p(x)$ und der „Einsenkung“ $y(x)$ der einfache Zusammenhang

$$p(x) = c \cdot y(x)$$

besteht. Die Konstante c ist eine stets positive Erfahrungszahl, die Bettungs- oder Bodenziffer.¹

Eine Kritik dieses Ansatzes wurde von K. WIEGHARDT in einer tiefgreifenden Abhandlung gegeben.² Die Einsenkung an einer Stelle hängt nicht nur von der Pressung an dieser Stelle ab, sondern von der Gesamtheit aller Pressungen. WIEGHARDT ersetzt diese Gleichung durch eine Integralgleichung, die man auch in der Form

$$p(x) = c \int k(x, \xi) \cdot y(\xi) d\xi$$

anschreiben kann. k ist eine unbekannte Funktion der gegenseitigen Entfernung der Stellen x und ξ , hat den größten Wert für $x = \xi$ und verschwindet für wachsende positive und negative $\xi - x$ entweder schon im Endlichen oder erst im Unendlichen. Die GREENsche Funktion k stellt die Einflußlinie der Pressungen vor (Abb. 39). c ist ein Analogon zur ZIMMERMANNschen Bettungsziffer.

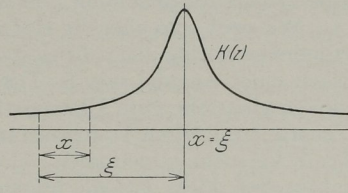


Abb. 39

Um mit diesem Ansatz eine Berechnung des Knickfalls durchzuführen, muß man einen großen mathematischen Apparat in Bewegung setzen. Wenn man sich aber, nach einer Idee des Herrn Professor v. MISES, mit einer Annäherung an die WIEGHARDTsche Forderung begnügt, so geht man so vor: Man schreibt mit $\xi - x = z$

$$p(x) = c \int k(z) \cdot y(x + z) \cdot dz$$

entwickelt $y(x + z)$ in die TAYLORSche Reihe

$$y(x + z) = y(x) + z y'(x) + \frac{z^2}{2} y''(x) + \frac{z^3}{6} y'''(x) + \dots$$

und bekommt

$$p(x) = c \cdot y(x) \int k(z) dz + c y'(x) \int z k(z) dz + \frac{c}{2} y''(x) \int z^2 k(z) dz + \dots$$

Infolge der Symmetrie von k bezüglich der Stelle $x = \xi$ sind das zweite Integral, das vierte Integral usf. gleich null und man gewinnt, wenn man beim vierten Glied abbricht und die neuen Konstanten

$$c \int k(z) dz = c_1, \quad \frac{c}{2} \int z^2 k(z) dz = c_2$$

einführt, die Gleichung

$$p(x) = c_1 y(x) + c_2 y''(x)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite bildet eine Korrektur zur ZIMMERMANNschen Gleichung und man wird bei Berücksichtigung dieses Gliedes dem WIEGHARDTschen Ansatz wenigstens einigermaßen entgegenkommen.³

Die Differentialgleichung der Elastika kann man für den elastisch gelagerten Druckstab leicht aufstellen. Setzt man nach der EULER-BERNOULLISchen Theorie

¹ H. ZIMMERMANN, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888. Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906.
² K. WIEGHARDT, Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1922. S. 165—184.
³ Für Platten auf elastischer Unterlage wird man ähnliche Erwägungen anstellen dürfen.

die Krümmung dem biegenden Moment proportional, so erhält man für kleine y für den Stab von konstanter Höhe und der Breite b die Gleichung

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P + b c_2}{E J} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{b c_1}{E J} y = 0$$

P ist die achsiale Druckkraft, E der YOUNGSche Elastizitätsmodul, J das maßgebende Querschnittsträgheitsmoment. Die Randbedingungen sind das Verschwinden von Bieugungsmoment und Querkraft an den Stabenden. Diese Gleichung unterscheidet sich von der bei ZIMMERMANN nur dadurch, daß an Stelle von P jetzt $P + b c_2$ steht.

Für die Bieungsaufgabe (bei $P = 0$) ergibt sich mit dem korrigierten Ansatz eine Differentialgleichung von derselben Form wie beim Stabilitätsproblem.

Wie groß sind aber die *Bodenkonstanten*? Es sind so gut wie gar keine Versuchsergebnisse vorhanden, die gestatten würden, die beiden Konstanten zu berechnen. Nach einer Angabe von S. TIMOSHENKO zeigte sich bei Versuchen an Eisenbahngleisen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den nach der ZIMMERMANNschen Theorie ermittelten Durchbiegungen und Pressungen mit den gemessenen Werten.¹ Diese Versuche bilden aber — leider — nicht auch die Bestätigung, daß unser Korrekturglied klein ist, da infolge der Lagerung auf Querschwellen keine stetige Stützung vorhanden war. Ältere Versuche, die A. FÖPPL im Hofe seines Laboratoriums vornahm, zeigten eigentlich nur, daß die Senkungen sehr rasch mit der Entfernung von der Laststelle abklingen, weiter geben sie keine Auskunft.² — Wirklichen Aufschluß könnten nur sorgfältig und präzise durchgeführte Versuche geben. Auch die Auswertung der Experimente, bei denen aus der Bieungslinie auf die Konstanten geschlossen werden muß, ist keineswegs vollständig mühelos. Es wäre aber meiner Ansicht nach sicher von Interesse, wenn man bei der Baugrundforschung auch solchen Versuchen nähertreten würde. Man könnte zumindest erkennen, mit welcher Berechtigung man bei dem einfacheren ZIMMERMANNschen Ansatz bleiben darf.

Prof. F. KEELHOFF, Gand:

Avant de lever la séance, je crois devoir remarquer, qu'aucun des orateurs précédents ne s'est préoccupé des efforts tranchants à craindre dans les pièces chargées de bout, alors que, dans toutes les charpentes un peu importantes, la plupart des barres comprimées sont en treillis: cela me paraît peu justifié, d'autant plus, qu'au point de vue pratique, toutes les formules modernes donnent à peu près le même résultat quant au flambement par moment fléchissant. Il n'en est pas de même quant aux formules proposées pour le calcul des efforts tranchants, ce qui constitue un vrai danger: on sait que l'écrasement du pont de Québec, pendant le montage, c'est-à-dire la plus grande catastrophe dont l'histoire des constructions métalliques fasse mention, est due à une sous-évaluation des efforts tranchants à prévoir dans les membrures comprimées. J'exprime donc le vœu que, d'ici à notre prochain congrès, cette question soit étudiée à fond théoriquement et, si possible, expérimentalement.

Außer obigen bei der Tagung vorgetragenen Diskussionsbeiträgen sind die folgenden Beiträge auf schriftlichem Wege eingelangt (und zwar die Beiträge CHWALLA, MEMMLER und CHAUDY während der Tagung, die übrigen nach derselben).

¹ S. TIMOSHENKO, Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail. Verhandlungen des 2. Internat. Kongresses für Techn. Mechanik. Zürich 1926, S. 407.

² A. FÖPPL, Vorlesungen über Techn. Mech. 3. Bd. Festigkeitslehre. 7. Aufl. 1919, S. 258.

Besides the above papers read before the Congress we have now received the following contributions in writing (and that, the papers of the authors CHWALLA, MEMMLER and CHAUDY during the Congress, the others after it).

En outre des communications faites pendant le Congrès à l'occasion des discussions, nous sont parvenues les communications écrites ci-dessous: (les communications des MM. CHWALLA, MEMMLER and CHAUDY nous sont parvenues pendant le Congrès, les autres après la clôture du Congrès).

Dozent Dr. Ing. E. CHWALLA, Wien:

Im ersten und auch dritten Kapitel des Referates PIGEAUD wird für einen geraden Stab, der nach Voraussetzung „vollkommen elastisch bis zum Bruche“ ist und eine endlich große, „bekannte und bestimmte“ Anfangsexzentrizität der Achskraft aufweist, aus dem Unendlichwerden der Ausbiegung eine „Knicklast“ abgeleitet. Einem derartigen Vorgang kann ich mich nicht anschließen. Ein exzentrisch gedrückter, gerader Stab aus einem Werkstoff, der unbeschränkt dem HOOKESchen Gesetze gehorcht, besitzt nur eine einzige Gleichgewichtsform, die eine ausgebogene Achse aufweist und unbeschränkt stabil ist; *eine Knicklast existiert hier nicht.* Diesbezügliche Fehlschlüsse verdanken ihr Entstehen der üblichen Vernachlässigung der ersten Ableitung im analytischen Ausdruck für die Achsenkrümmung und nur als Folge dieser Vernachlässigung ergibt sich dann beispielsweise unter der exzentrisch wirksamen EULERlast ungeachtet der Endlichkeit der Stablänge eine unendlich große Ausbiegung, die ungerechtfertigterweise als Kriterium eines Stabilitätswechsels dient.

Im Anschlusse an das im vierten Kapitel des Referates behandelte Knickproblem eines elastisch gebetteten Druckstabes, das schon im Jahre 1884 von ENGESSER im „Zentralblatt d. Bauverwaltung“ gelöst wurde, möchte ich mir einige ergänzende Bemerkungen erlauben. Die Randbedingungen dieses Problems, die im Referate durch die Worte „frei an beiden Enden“ gekennzeichnet sind, würden präziser durch die Worte „gelenkig festgehalten an beiden Enden“ beschrieben werden; den etwas verwickelteren Fall tatsächlich freier Stabenden habe ich in der „Z. f. ang. Math. u. Mech. 1927“ behandelt. Von großer praktischer Bedeutung ist die Stabilitätsuntersuchung eines elastisch gebetteten Druckstabes, dessen beide Endpunkte *für sich* elastisch quergestützt sind, da dieser Fall beim „Seitensteifigkeitsproblem“ offener Brücken mit Parallel-, Trapez- oder Halbparabelträgern vorteilhaft Verwertung finden kann, welches Problem vollständig von der aus konstruktiven Gründen unvermeidlich starken Nachgiebigkeit der Endquerrahmen beherrscht wird. Ich habe diesen Fall in einer unveröffentlichten Arbeit vor einigen Jahren behandelt und eine relativ einfache, geschlossene Formel für die erforderlichen Endrahmenwiderstände erhalten. Vergleiche mit den strengen, tabellarisch gefaßten Lösungen für Einzelstützung (SCHWEDA, „Bauingenieur 1928“) zeigen, daß die Abweichungen, die sich durch die Aufteilung der Zwischenrahmenwiderstände ergeben, wegen der immer vorhandenen großen Gurtsteifigkeit praktisch unbedeutend sind.

Das zweite, von Prof. Roš verfaßte Referat befriedigt nicht nur ein brennendes Bedürfnis der Praxis, sondern ist auch vom Standpunkt der Erkenntnis zu begrüßen, da es mithilft, die grundlegende Bedeutung des *Formänderungsgesetzes* bei allen Knickproblemen in quantitativer und qualitativer Beziehung zu unterstreichen. Wir müssen uns bewußt sein, daß alle im Rahmen unserer Elastizitätstheorie gelösten Stabilitätsprobleme, die alle das HOOKESche Gesetz unbeschränkt voraussetzen, dem Eisenbau bloß einen Teil seiner kritischen Belastungen zu liefern vermögen,

während eine ganze Gruppe baupraktisch bedeutungsvoller Knickerscheinungen wie auch fast alle Ergebnisse qualitativer Natur dem eigenartigen Formänderungsgesetze des Baustahls mit seiner ausgesprochenen Plastizitätsgrenze entspringen. Die gewohnte, mit dem HOOKESchen Gesetz allein arbeitende Knicktheorie verkündet bekanntlich das Kriterium der Eindeutigkeit des Gleichgewichtes im stabilen und der Mehrdeutigkeit im instabilen Zustand; ein eiserner Bauwerkstab besitzt im Gegensatz hiezu vor dem kritischen Zustand (mindestens) *zwei* und darüber hinaus nur *eine* mögliche Gleichgewichtslage. Ferner vermag selbst der schlankste der eisernen Bauwerkstäbe seine Knicklast ungeachtet der bekannten zugeschärften Eulertheorie schon bei Ausbiegungen von nur etwa der halben Querschnittshöhe überhaupt nicht mehr im Gleichgewicht zu halten und schließlich kennt die genannte Theorie auch keine Knickerscheinung gerader Stäbe unter exzentrischem Druck, der ein Eisenstab in gefährlichem Maße unterliegt. Selbst der grundlegende Begriff der „Stabilität“, das ist die Fähigkeit einer Gleichgewichtslage, sich nach einer kleinen Störung aus eigenem wieder herzustellen, kann in dieser Bedeutung nicht schlechtweg übernommen werden; denn die im unelastischen Bereich unter zentrischem Druck knickenden Baustahlstäbe besitzen diese Fähigkeit gar nicht im ganzen „stabil“ genannten Zustand, da im vorkritischen, unelastischen Bereich das Spannungsbild im Zuge der Wiederherstellung durch das Entlastungsgesetz vollständig verändert wird. An diesen Beispielen soll nicht nur die tiefgreifende Bedeutung des Formänderungsgesetzes für die Knickerscheinungen, sondern auch die große Gefahr von Irrtümern ermessen werden, die durch eine nicht ausreichend scharfe Trennung der Problemgruppen nach dem ihnen zugrunde liegenden Formänderungsgesetz heraufbeschworen wird. Und da die didaktisch so wichtige Betonung dieser Problemtrennung nicht selten vermißt wird, will ich ihr meinen Sektionsvortrag widmen. Zum Inhalt des Referates selbst seien folgende Bemerkungen erlaubt:

1. Die der Behandlung des *exzentrischen* Knickproblems zugrunde gelegten Spannungsbilder des unelastischen Bereiches scheinen mir grundsätzlich unzutreffend. Das Formänderungsgesetz einer *Entlastung* unelastisch gestauchter Fasern würde hier nur dann Geltung besitzen, wenn die Achsiallast in ideal zentrischem Zustand bis auf ihren kritischen Wert anwachsen und *hierauf erst* hinausrücken würde in die in Rechnung gestellte exzentrische Lage. Nun ist aber eine Angriffsexzentrizität bei wohl allen Bauwerks- und Versuchsstäben unveränderlich an das System gebunden, so daß im Zuge des Anwachsens der Achsiallast die geweckten Grund- und Biegespannungen *gemeinsam*, wenn auch nicht genau verhältnismäßig, zunehmen; zu einer Entlastung unelastisch gestauchter Fasern kann es somit nicht kommen und im Spannungsbild hat an Stelle der Entlastungsgeraden das Formänderungsgesetz der Belastung zu treten. Die im Referat berechneten inneren Momente sind daher im unelastischen Bereich grundsätzlich zu groß und die Abweichungen werden, wie man sich leicht vergegenwärtigen kann, insbesondere bei Grundspannungen an und über der Quetschgrenze bedeutend. Diese Feststellung bezieht sich übrigens auch auf den III. und V. Abschnitt des Referates, da die erwähnten Spannungsbilder auch dort zur Verwendung gelangen.

2. Die Ableitungen des Referates setzen für die Gleichgewichtsformen *Sinuslinien* voraus, und zwar werden im Interesse einer einfachen Problembehandlung *ganze Sinushalbwellen* auch im Falle des *exzentrischen* Druckes gewählt. Diese Annahme wird im Referat als praktisch zulässige Näherung bezeichnet, trotzdem sie zum Beispiel dem oft recht großen Angriffsmoment an den beiden Stabenden, also dem Produkt „Kraft mal Angriffsexzentrizität“, willkürlich die Achsenkrümmung Null gegenüberstellt. Nun habe ich in einer Arbeit, die in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie erschien, das zentrische und exzentrische Knick-

problem des Baustahlstabes mit Schärfe behandelt und fand unter Zugrundelegung des gleichen Arbeitslinienverlaufes für die Gleichgewichtsformen merkliche Unterschiede gegenüber der Sinushalbwellen und im Endergebnis zum Teil starke Abweichungen in den kritischen Schlankheiten; so beträgt schon bei der kleinen Grundspannung von 1000 kg/qcm, also tief im elastischen Bereich, wo die Sinuslinie noch am ehesten gerechtfertigt erscheinen mag, der Unterschied bei einem Angriff in der dreifachen Kernweite über 40%! Es scheint daher ungeachtet der vorkommenden großen Streuungen auch für praktische Nutzenwendungen erforderlich zu sein, bei der Ermittlung der gebrauchsfertigen Diagramme (deren Entwurf überdies auch für den St. 48 und den Si-Stahl recht erwünscht wäre) eine genauere Form der Deformationsfiguren in Rechnung zu stellen. Der Einfluß der Schubverzerrung oder Nulllinienverschiebung ist natürlich praktisch bedeutungslos.

Ferner möchte ich bemerken, daß es bei derartigen Diagrammen praktischer wäre, das Exzentrizitätsmaß nicht auf die Kernweite, sondern auf den für alle Profile unmittelbar nachschlagbaren Trägheitsradius zu beziehen und schließlich noch auf einen kleinen Zeichenfehler in Abb. 9 des Referates aufmerksam machen: Die Nulllinie der Biegespannungen und damit der Verdrehungspunkt der Querschnittsebenen liegt grundsätzlich in der dem Krümmungsmittelpunkt *abgewendeten* Stabhälfte und nicht auf der Innenseite, wie versehentlich eingetragen wurde.

3. Eine unmittelbare Verwertung der erhaltenen Ergebnisse bei der Bemessung *gegliederter* Druckstäbe, wie im Referat vorgeschlagen wird, scheint vom theoretischen Standpunkt etwas gewagt, da die Zerreißen des einflußreichen Spannungsbildes, die Beschränkung des inneren Hebelsarmes und die lokale Wirkung des Verbundes *wesentliche* Abweichungen gegenüber einem Vollstab ergeben dürften. So ist zum Beispiel schon bei der zentrischen Knickung eines Rahmenstabes (die ich im letzten Jahrgang der Wiener Sitzungsberichte ausführlich behandelt habe) nicht, wie vom Vollstab bekanntlich übernommen wird, das Bindeblech am Stabende, sondern das diesem *benachbarte*, vorletzte, das weitaus stärkst beanspruchte.

Zum Schlusse sei mir noch eine wichtige *ergänzende* Bemerkung gestattet:

Bei der knicksicheren Ausbildung eines Druckstabes aus Baustahl ist es ein grundlegendes Erfordernis, die Stärke aller *plattenartigen* Elemente des Stabes, wie der Stege, Lamellen und freien Schenkel derart zu bemessen, daß ein „Ausbeulen“ dieser Teile vor dem Ausknicken des ganzen Stabes ausgeschlossen ist. Gegen diese Forderung wird in der Praxis häufig gesündigt, so bedeutungsvoll sie insbesondere bei den zarten Profiltypen des Spezialstahlbaues ist. Das Problem wurde von Dr. BLEICH weitgehend behandelt und in Bemessungsformeln gefaßt, doch scheint allgemein bei Stabilitätsuntersuchungen eiserner „Platten“ und „Schalen“ eine *wesentliche Materialeigenschaft nicht* berücksichtigt zu werden, was sich gefährlicher Weise auf Seite der Unsicherheit auswirkt. Die kritische Spannung eines in der Längsrichtung gedrückten, langen, schmalen Plattenstreifens von der Dicke „*d*“ und der Breite „*a*“ beträgt im elastischen Bereich bekanntlich

$$\sigma_k = \beta^2 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot \frac{E}{12 \cdot (1-m^2)},$$

wobei für den Beiwert β bei einer Einspannung der beiden Längsseiten $\beta = 8,30$, bei einer freien Verdrehbarkeit $\beta = 6,28$ zu setzen ist und „*m* = 0,3“ die Poissonzahl bedeutet. Eine vorzeitige Ausbeulgefahr ist gebannt, wenn diese Knickspannung zumindest gleich ist der Knickspannung des ganzen Stabes $\bar{\sigma}_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l/i)^2}$. Nun knickt die Mehrzahl der Bauwerkstäbe im unelastischen Bereich, so daß in Richtung der Stabachse sowohl für die Platte als auch für den ganzen Stab das Knickspannungsbild und damit der Knickmodul nach KÁRMÁN Gültigkeit besitzt. Beim Plattenproblem ist jedoch noch die Kenntnis des Moduls für die andere, hier lastfreie Richtung,

wie auch des Gleitmoduls erforderlich. Dr. BLEICH setzt, wie es bei der üblichen Auffassung der Platten als „elastisches Gewebe“ naheliegend erscheint, für den ersteren *wegen der Lastfreiheit* den *Elastizitätsmodul* und wählt für die Schubverzerrung einen Mittelwert aus diesem und dem Knickmodul. Einem derartigen Vorgang steht jedoch entgegen, daß *die Quasi-Isotropie des Materials erwiesenermaßen auch im plastischen Bereich erhalten bleibt*. Ich schlage daher vor, den Knickmodul allen drei Gliedern der Plattengleichung zuzuordnen und die geringfügige Änderung der Poissonzahl im plastischen Bereich auf 0,5 zu vernachlässigen. Es resultiert dann die einfache, in *beiden* Bereichen geltende Bemessungsformel $\frac{d}{a} \geq \frac{k}{(l/i)}$, wobei (l/i) die maßgebende Knickschlankheit des ganzen Stabes bedeutet und für „ k “ bei beiderseitiger Einspannung der Platte „1,25“ und bei freier Verdrehbarkeit „1,65“ zu setzen ist, bzw. ein dem geschätzten Einspannungsgrad entsprechender Zwischenwert gewählt werden kann.

Prof. Dipl. Ing. MEMMLER, Berlin:

Die Ergebnisse der in der Schweiz durchgeführten Versuche mit Walzprofilen stimmen überein mit den Knickspannungswerten, die auf Grund der KÁRMÁNSchen Theorie aus dem Druckstauchungsdiagramm berechnet werden können. Es müßte danach das Bestreben sein, ideale Druckstauchungsdiagramme festzulegen, die in ihrem Verlauf charakteristisch für die verschiedenen Stähle sind. Bei den im Materialprüfungsamt in Berlin-Dahlem für den Deutschen Eisenbau-Verband untersuchten Stählen zeigen sich nun gerade für diese Diagramme Abweichungen von dem von Herrn ROŠ angegebenen ideellen Diagramm, und zwar für alle Materialien in so starkem Maße, daß die hieraus zu errechnenden Knickspannungslinien entsprechend stark von der Knickspannungslinie der T. K. V. S. B. abweichen müssen. Die bis zu $\lambda = 20$ im Amt durchgeführten Knickversuche bestätigen diese Abweichung.

Das von den Herren ROŠ und BRUNNER angegebene ideelle Druckstauchungsdiagramm zeigt zwischen P und S -Grenze eine verhältnismäßig starke Krümmung, also starke bleibende Verformungen. Die Moduli T ändern sich schnell und weichen von dem E -Modul stark ab. Der Übergang zwischen dem Bereich elastischen Knickens und dem Bereich, in dem die Knickspannungen gleich oder eventuell größer als die Quetschgrenze sind, vollzieht sich sehr allmählich, im Schlankheits-Knickspannungsschaubild gekennzeichnet durch einen allmählichen Übergang aus dem Geltungsbereich der EULER-Hyperbel zu der Kurve, deren Ordinate gleich oder größer als die Quetschgrenze ist. Bei den im Amt durchgeführten mannigfaltigen Versuchen zeigt im Gegensatz hierzu das Zug-Dehnungsdiagramm für Stahl 37 und für hochwertige Baustähle in den weitaus meisten Fällen oberhalb der P -Grenze, die vielfach nur wenig kleiner als die Streckgrenze ist, eine verhältnismäßig geringe Abweichung von der HOOKESchen Geraden. Die bisher ermittelten Druckstauchungsdiagramme hatten das gleiche Ergebnis. Dementsprechend verläuft auch der durch Knickversuche festgestellte Übergang aus dem Bereich elastischen Knickens in dem plastischen Bereich, und zwar für die verschiedenen Materialien mehr oder weniger stark ausgeprägt. In allen Fällen vollzieht sich aber dieser Übergang plötzlicher als nach den Schaubildern von Herrn ROŠ. Man gelangt also im Übergangsbereich zu *günstigeren* Ergebnissen, da die Knickspannungen in diesem Bereich entsprechend der geringeren Abweichung der Moduli T vom Modul E weit geringere Unterschiede vom EULER-Wert aufweisen als in den von Herrn ROŠ mitgeteilten Kurven. Im ideellen Druckstauchungsdiagramm ist ferner von Herrn ROŠ der wagrechte in Höhe der Quetschgrenze verlaufende Teil des Diagramms nur bis 7 bis 8‰ angegeben. Bei den meisten im Amt untersuchten Materialien und auch

nach Erfahrungen in der Praxis muß man aber im allgemeinen mit einem Fließen bis zu 15 und sogar 20^{0/100} rechnen. Es liegen zwar für die meisten Fälle nur Zug-Dehnungsdiagramme vor, da die Ausführung von Druckversuchen aus bekannten Gründen weit schwieriger ist. Für Stahl 37 ist im letzten Jahr für den Eisenbau-Verband aber auch das Druckstauchungsdiagramm bei uns in Dahlem aufgenommen. Bei diesen Versuchen wurden besondere Vorkehrungen getroffen, um fehlerhafte Beeinflussung der Messungen, vor allem den Einfluß der Endflächenreibung auszuschalten. Auch bei diesen Diagrammen zeigte sich wie beim Zugversuch ein längerer Fließbereich. Die auf Grund der ENGESSER-KÁRMÁNSchen Theorie an einem solchen Diagramm errechnete Knickspannungslinie verläuft für einen großen Bereich der Schlankheitsgerade parallel oder nahezu parallel zur Abszissenachse in Höhe der Quetschgrenze, ein Ergebnis, das durch die Knickversuche belegt wird. Eine Überschreitung der Quetschgrenze konnte durch diese auch für die kleine Schlankheit $\lambda = 20$ nur in einigen wenigen Fällen um 3 bis 4%, in einem Fall um 6% festgestellt werden. Bei den hochwertigsten Stählen liegen die Verhältnisse nach den Knickversuchen ganz ähnlich.

Wenn man in der Zukunft den ideellen Verlauf des Druckstauchungsschaubildes auf Grund von Versuchen für die jetzt verwendeten Baustoffe ableitet, werden sich nach den im Dahlemer Materialprüfungsamt gemachten Feststellungen praktisch auch bei kleinen Schlankheiten, die für die Praxis noch Bedeutung haben, auch auf Grund der ENGESSER-KÁRMÁNSchen Theorie keine Knickspannungen ergeben, die wesentlich größer als die Quetschgrenze sind. Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Versuche der T. K. V. S. B. für die Schlankheit $\lambda = 30$ (40) — 90 im allgemeinen unter der Quetschgrenze liegen. Das erklärt sich wohl hauptsächlich daraus, daß für die Versuche Walzprofile verwendet worden sind, bei denen auch nach unserer Erfahrung eine exakte Versuchsdurchführung sich sehr viel schwieriger gestaltet, als mit Modellstäben, zumal auch mit wesentlichen Materialverschiedenheiten in den Querschnittsflächen zu rechnen ist.

Ein weiterer Punkt wäre noch zu berühren. Man hat sich daran gewöhnt, die Quetschgrenze gleich der Streckgrenze anzunehmen und die Knickspannung unter dieser Annahme zu berechnen. Es ist die Frage aufzuwerfen, ob die Ergebnisse des Zugversuches ohne weiteres auf den Druckversuch zu übertragen sind, vor allem, ob die Erscheinung der oberen und unteren Streckgrenze analog auch beim Stauchversuch vorliegt. Nach den in meinem Amte für den Eisenbau-Verband und auch anderwärts angestellten Versuchen kann man diese Verhältnisse nicht allgemein als analog annehmen, danach auch nicht immer $\sigma_Q = \sigma_S$ setzen, eine Tatsache, die in bezug auf die Knickspannung bei kleinen Schlankheiten wichtig erscheint.

Ing. M. CHAUDY, Paris:

M. CHAUDY, Ingénieur Principal au Chemin de fer du Nord, à Paris, expose sommairement une solution personnelle du problème des pièces prismatiques chargées de bout axialment.

Il considère le cas type, auquel tous les autres se ramènent, d'un prisme encastré à sa base, libre à son sommet et soumis en ce dernier point à l'action d'une charge N . Lorsque le prisme fléchit sous l'action d'un effort transversal éphémère, le point d'application de N subit un déplacement élastique longitudinal u et un déplacement transversal f . Si p désigne la force transversale appliquée au sommet qui donne une flèche égale f , on doit avoir:

$$N u \leq p f.$$

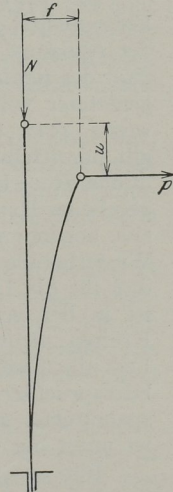


Abb. 40

Cette relation exprime que le travail de la force extérieure N est inférieur ou au plus égal au travail des forces élastiques intérieures lequel, comme le montre M. CHAUDY, a pour limite inférieure $p f$.

On doit donc avoir, pour que le prisme ne flambe pas ou, s'il fléchit, pour que les forces élastiques intérieures puissent le ramener à sa position d'origine:

$$N \leq \frac{p f}{u} = \frac{10 E I}{l^2},$$

en désignant par E le coefficient d'élasticité, par I le moment d'inertie transversal et par l la longueur du prisme.

On sait que la formule d'EULER donne:

$$N \leq \frac{9,86 E I}{l^2}$$

Cette théorie de M. CHAUDY permet de se rendre aisément compte que le treillis, lorsque le prisme chargé de bout en comporte un, doit résister, sur toute la longueur de la pièce, à un effort tranchant p qui se détermine comme suit:

Partant de la charge totale N , on calcule, au moyen de la la formule $N = \frac{10 E I}{l^2}$, la section transversale ω à donner au prisme. On écrit ensuite que le travail moléculaire à la base est égal au taux limite R , soit:

$$R = \frac{N}{\omega} + \frac{v p l}{I} \dots \dots \dots (1)$$

v désignant la moitié de la largeur de la pièce.

De cette formule (1) on tire la valeur de p qui est celle de l'effort tranchant à considérer pour le calcul du treillis.

Prof. GRÜNING, Hannover:

Das bemerkenswerteste Ergebnis der wertvollen Knickversuche, die von der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt durchgeführt sind, ist wohl der Nachweis der Abnahme der Knicklast mittelschlanker und kurzer Stäbe mit der Exzentrizität des Kraftangriffes. Auf theoretischem Wege bin ich in der Arbeit: „Knickung genieteter vollwandiger Druckstäbe“, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1917, Seite 85ff“ zu dem gleichen Ergebnis gelangt. Meine Untersuchung gilt unmittelbar nur für solche Querschnitte, die einen oder zwei verhältnismäßig dünne Stege haben. Sie geht von den Randspannungen aus und ermittelt bei vorgegebener Exzentrizität die durch die mittlere Spannung ausgedrückte Last, welche eine angenommene Spannung an dem stärker beanspruchten Rande erzeugt. Die Wiederholung der Rechnung für eine steigende Reihe von Randspannungen zeigt, daß für die Last ein Größtwert besteht. Unter einer diesen übersteigenden Last ist in der vorgegebenen Stellung Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften nicht möglich. Ein anderer Rechnungsgang ermittelt für vorgegebene Last die Exzentrizität, in welcher eine angenommene Spannung an dem stärker beanspruchten Rande entsteht, und findet aus einer steigenden Reihe von Randspannungen einen Größtwert für die Exzentrizität. Bei größerer Exzentrizität ist unter der vorgegebenen Last Gleichgewicht nicht möglich.

Für unsymmetrische Querschnittformen führt meine Untersuchung zu dem Ergebnis, daß die Empfindlichkeit gegen exzentrischen Kraftangriff nach beiden Seiten wesentlich verschieden ist. Während die Abweichung der Kraft nach der Seite des größeren Randabstandes die Knicklast erheblich herabsetzt, ist die Abweichung nach der entgegengesetzten Seite kaum von Einfluß. In der gedrückten

Obergurtung von Balkenbrücken, in der nicht alle Stabachsen in die Systemlinie gelegt werden können, sind deshalb Stabachsen über den Netzlinien besser zu vermeiden.

Das Problem des gedrückten Stabes läßt sich jenseits des elastischen Bereiches natürlich nicht mathematisch exakt erfassen. Jeder Lösungsversuch ist mit Mängeln behaftet. Überdies ist die Grundlage unsicher, wenn die Spannungs-Dehnungslinie des Materials nicht durch genaue Messung bestimmt ist. Um so wertvoller sind die Versuche der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt. Sie zeigen, daß die Theorie trotz ihrer Mängel der Praxis brauchbare Ergebnisse liefert. Die Ergebnisse der Versuche erheischen unbedingte Beachtung.

Auf gedrückte Fachwerkstäbe, deren Achsen in den Systemlinien liegen, können jedoch nach meiner Auffassung die Versuche mit exzentrischer Belastung keine Anwendung finden. Denn wenn auch die Kraftlinie durch die Momente infolge Vernietung der Knotenpunkte aus der Stabachse verschoben wird, so sind doch die Bedingungen der Belastung von denen des Versuches wesentlich verschieden. Beim Versuch wirkt die Last in gegebener, unveränderter Lage. In einem Fachwerkstab nehmen die Momente ab, wenn sich der Stab krümmt. Die Kraftlinie nähert sich der Stabachse. Ferner verschwinden die Momente, sobald die Stabspannung die Quetschgrenze erreicht. Die Knicksicherheit eines Fachwerkstabes wird daher mit Recht nach der Knicklast des zentrisch beanspruchten Stabes beurteilt. Als logische Folge dieser Auffassung muß die Verminderung der Knicklänge auf 0,8 der Stablänge als unrichtig angesehen werden. Es kann nur in Betracht kommen, in durchlaufenden Gurtungen gemäß der von ZIMMERMANN und BLEICH nachgewiesenen Zusammenhänge den Überschuß eines Stabes an Knicksicherheit für den benachbarten Stab auszunutzen.

J. F. VAN DER HAEGHEN, Bruxelles:

Le flambage: Phénomène vibratoire

Le flambage des pièces chargées debout est un phénomène physique; il a donc nécessairement une cause et un processus physiques, qui doivent pouvoir se contrôler et se comprendre en dehors de toute intervention préalable des mathématiques.

La théorie vibratoire apporte l'explication physique du fait et conduit ensuite tout naturellement à la mise en équation du phénomène.

Ce phénomène, paradoxal pour la mécanique rationnelle, s'explique comme suit:

Toute variation de la charge en bout provoque une onde ou vibration longitudinale, dont la vitesse de transmission est celle du son dans la matière et qui s'amortit plus ou moins vite suivant l'importance de l'impulsion motrice et la nature de la matière.

Si la matière, dont est constituée la barre, était rigoureusement homogène et isotrope en chacun de ses points, les augmentations successives de la charge axiale détermineraient simplement un tassement progressif de plus en plus accentué, jusqu'à l'effondrement de la pièce par écrasement ou écoulement symétrique, mais sans aucune déflexion latérale, puisque la résultante des efforts tranchants transversaux serait restée constamment nulle dans toutes les sections.

Seulement la nature ne livre pas des masses matérielles parfaitement isotropes; dès lors, la vibration longitudinale, que provoque chaque variation de charge, ne se propage pas suivant un front immuablement plan et droit, mais suivant une surface continuellement déformée; la résultante des efforts tranchants ne reste pas nulle en toutes les sections et sous son impulsion naît une vibration transversale. Celle-ci s'amortit plus ou moins vite suivant la force de l'impulsion motrice, la nature de la matière et la viscosité du milieu ambiant, pour ramener la pièce au repos dans

sa position initiale, à moins que, pour certaines conditions de charge, elle ne se traduise par une déflexion unique et sans rappel élastique: c'est le moment du flambage avec toute sa brusquerie.

Flexion statique

L'équation qui exprime les conditions d'équilibre d'une pièce fléchie statiquement par une charge en bout P s'écrit:

$$E \cdot I \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = - P \cdot y$$

La discussion de cette équation conduit à la formule bien connue qui porte le nom d'EULER

$$\frac{P}{S} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

et qui donne la charge unitaire critique $\frac{P}{S}$ que peut porter une pièce articulée aux deux bouts, de longueur L et de section S dont le rayon de giration est r .

On sait que cette formule, qui convient numériquement pour les pièces de grande longueur relative devient totalement inexacte pour des élancements inférieurs à une certaine valeur de $\frac{L}{r}$, d'ailleurs différente pour chaque matière.

De nombreux auteurs ont traité cette question depuis EULER et se sont efforcés d'établir et d'étendre aux petits élancements, une formule qui cadrerait avec les résultats de l'expérience pris comme point de départ.

Flexion dynamique

Ces formules ne peuvent être que des formules empiriques plus ou moins réussies, puisqu'elles ne sont pas l'expression ni l'aboutissement mathématique d'une hypothèse physique établie.

Considérant le flambage comme le résultat d'une vibration transversale, subséquente à la vibration longitudinale que provoque la variation de charge en bout, l'étude de l'équilibre dynamique de la pièce conduit à une équation générale connue, qui s'écrit, abstraction faite du sens des signes,

$$\frac{\delta^2 M}{\delta x^2} + m \cdot I \cdot \frac{\delta^4 y}{\delta x^2 \delta t^2} + m \cdot S \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = 0$$

dans laquelle M est le moment des forces extérieures; m la masse de l'unité de volume; I le moment d'inertie de la section S .

Une première discussion de cette équation conduit à la connaissance de la période d'oscillation T , ou de son inverse, la fréquence N_1 , laquelle, pour une pièce articulée à ses extrémités, a pour expression du son fondamental, en fonction de la vitesse V des vibrations longitudinales:

$$N_1 = \frac{\pi V}{2L \sqrt{\pi^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2}}$$

En reprenant la discussion de cette même équation, après y avoir remplacé le moment M en fonction de la charge en bout P et en y introduisant la notion de la vitesse de propagation v des vibrations transversales, tirée de l'équation différentielle

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = v^2 \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$

on arrive, après transformations, à la formule finale

$$\frac{P}{S} = \frac{m \cdot v^2}{1 + \frac{m \cdot v^2}{E'}}$$

Cette formule est l'expression unique et générale pour tous les élançements et pour tous les modes de fixation; elle donne la charge critique unitaire $\frac{P}{S}$ applicable en bout suivant l'axe de la pièce.

En y remplaçant la vitesse v par sa valeur en fonction des dimensions géométriques de la pièce, telle qu'elle résulte des lois des fréquences, on trouve pour une barre articulée

$$\frac{P}{S} = \frac{\pi^2 E'}{\pi^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

Nous signifions par E' le coefficient *instantané* de proportionnalité sans désignation de valeur absolue, celle-ci variant avec l'état de tension de la pièce.

Ainsi pour les grandes longueurs, où les charges unitaires possibles sont faibles, les valeurs de E' restent voisines de la valeur constante qu'on attribue habituellement au coefficient d'élasticité E ; autrement dit le coefficient E n'est en réalité que la moyenne des valeurs *supérieures* de E' .

Quand l'élançement $\frac{L}{r}$ tend vers zéro, la formule d'EULER conduit vers l'infini, tandis que notre formule renseigne la valeur *inférieure* de E' , puisque dans ce cas $\frac{P}{S} = E' =$ charge d'écrasement.

Il s'ensuit que l'application de notre formule générale exige la connaissance préalable de la loi de variation de E' , en fonction de l'état de tension, ainsi que les vitesses de propagation v pour chaque mode de fixation de la pièce et pour chaque matériau.

Coefficient E'

Quand on bute une verge cylindrique axialement entre deux pointes, juste avec la pression de contact, et qu'on la fait vibrer transversalement, on obtient un son fondamental qu'on mesure et dont l'expression est

$$N_1 = \frac{\pi \cdot V \cdot r}{2 L^2}$$

d'où l'on tire la vitesse du son dans la barre

$$V = \frac{2 \cdot N_1 L^2}{\pi \cdot r}$$

et ensuite, par l'application de la formule de NEWTON,

$$E' = m \cdot V^2$$

Dès qu'on augmente la pression axiale, c'est-à-dire qu'on ajoute des charges en bout successives, on constate que pour chaque nouvel état de fatigue, on obtient une note différente, qui, à mesure que la pression croît, va en s'abaissant pour les barres longues, et en s'élevant pour les barres courtes; chacune de ces notes donne une valeur de E' .

On pourra ainsi, moyennant une série convenablement choisie de barres d'élançement décroissant, construire point par point la loi de variation de E' , en fonction de la tension, pour une matière quelconque, depuis son état de repos jusqu'à sa charge d'écrasement.

Notons ici que les équations générales de l'équilibre dynamique sont écrites en dehors de la condition d'une valeur absolue de E et qu'elles conviennent donc aussi bien pour une verge d'acier que pour une verge en laiton, en verre ou en bois; que d'autre part, même pour un état de tension qui dépasse la limite d'élasticité, la valeur instantanée de E' est suffisamment constante et les courbures vibratoires suffisamment faibles, pour que là encore ces équations restent valables.

Vitesse de propagation v

La vitesse de propagation se déduit directement de la connaissance expérimentale de la fréquence N_1 .

Ainsi, pour une barre articulée, la distance spatiale étant $\lambda = 2L$, la vitesse sera

$$v = 2 \cdot N_1 \cdot L.$$

Elle se détermine de la même manière pour tous les modes de fixation en leur appliquant les lois des fréquences.

Influence des fixations terminales

a) *Barre articulée aux deux bouts:*

Nous avons indiqué plus haut comme formule générale

$$\frac{P}{S} = \frac{m \cdot v^2}{1 + \frac{m \cdot v^2}{E'}}$$

où v est la vitesse de propagation propre à cette fixation.

Si nous désignons par v_1 les vitesses de propagation propres aux autres modes de fixation, on calculera les rapports $\frac{v_1^2}{v^2} = K$ qu'il faudra faire intervenir dans la formule pour chacun d'eux, et qui, du moins pour les grands élancements, serviront de multiplicateurs à la charge trouvée pour la barre articulée de même longueur totale.

b) *Barre encastrée-libre:*

$$K = \frac{1}{8}$$

L'enseignement actuel propose $K = \frac{1}{4}$.

c) *Barre encastrée aux deux bouts:*

$$K = 2,95$$

Ce coefficient est confirmé par l'expérience; la barre L , encastrée aux deux bouts, peut donc être assimilée à une barre articulée de longueur $0,582 \times L$, laissant de part et d'autre un bout encastré libre de $0,2075 \times L$. En appliquant à ces deux petits bouts le coefficient habituel $K = \frac{1}{4}$ on trouverait que ces extrémités ont une section deux fois trop forte; seul notre coefficient $K = \frac{1}{8}$ élimine cette contradiction.

d) *Barre encastrée-guidée:*

$$K = 1,82$$

Cette barre L peut être assimilée à une barre articulée de $0,738 \times L$, ou encore à une barre encastrée-libre de $0,262 \times L$ avec le coefficient $K = \frac{1}{8}$.

Élancement fondamental

D'après notre théorie et l'observation expérimentale à laquelle elle a donné lieu, l'élancement critique (environ 105 pour l'acier doux) en dessous duquel la formule d'EULER devient inexacte, serait la longueur proportionnelle $\frac{L}{\nu}$, à partir de laquelle la pièce ne donne plus que le son fondamental; pour des pièces plus grandes au contraire, apparaissent en dehors du fondamental, des harmoniques de plus en plus élevées, jusqu'à un maximum déterminé.

Nous pouvons d'ailleurs déterminer l'élancement critique de n'importe quel matériau moyennant la connaissance préalable de sa résistance à l'écrasement.

Colonnes en treillis.

Le flambage étant un phénomène de flexion vibratoire, on peut en conclure que dans ces conditions une colonne composée doit être conçue de manière à pouvoir résister convenablement à la charge fictive latérale qui donnerait la même courbure que celle qu'engendre la vibration.

La charge fictive qui répond à ce desideratum est une charge Σp répartie suivant une loi de parabole cubique et égale à la charge en bout P . Mais comme il s'agit en fait de petites déformations, nous remplaçons cette distribution parabolique par une répartition triangulaire, maximum au milieu et nulle aux points d'appui.

Si, pour une colonne articulée aux deux bouts, nous écrivons que, pour une même flèche f au centre, les moments sont égaux pour les deux sollicitations prises séparément, nous posons

$$P \cdot f = \frac{\Sigma p \times L}{6} = \frac{P \cdot L}{6}$$

Or la flèche résultant de la charge triangulaire = $\frac{P \cdot L^3}{60 \cdot E \cdot I}$

$$\text{D'où} \quad P \cdot \frac{P \cdot L^3}{60 \cdot E \cdot I} = \frac{P \cdot L}{6}$$

$$P = \frac{10 \cdot E \cdot I}{L^2} = \frac{10 \cdot E \cdot S \cdot r^2}{L^2}$$

et finalement

$$\frac{P}{S} = \frac{10 E}{\left(\frac{L}{\nu}\right)^2}$$

Une valeur en parabole aurait donné sensiblement la valeur d'EULER.

Faisant le même calcul pour les autres modes de fixation en s'imposant une répartition de la charge fictive de telle manière que son maximum coïncide en position avec la flèche maximum de son élastique, on retrouve les mêmes coefficients K que détermine la théorie vibratoire.

On peut donc conclure de là, que cette méthode permet de calculer exactement l'entretoisement d'une colonne en treillis en l'assimilant à une poutre appuyée qui supporterait une charge en triangle égale à la charge que la colonne doit porter en bout.

Conclusions

Nous croyons pouvoir résumer cette étude en disant qu'elle présente comme points essentiels:

- a) l'explication physique du processus du flambage;
- b) l'interprétation mathématique du phénomène;

- c) la détermination de la loi de variation du coefficient de proportionnalité;
 d) la signification de l'élanement critique;
 e) la méthode de calcul de l'entretoisement des colonnes en treillis.

Prof. Ing. Dr. P. FILLUNGER, Wien:

Zu den obigen Ausführungen Prof. BROZSKO hat Prof. Ing. Dr. P. FILLUNGER, Wien, schriftlich wie folgt Stellung genommen:

To the above statements of Prof. BROZSKO, Prof. FILLUNGER, Vienna in writing responded as follows:

Monsieur le Professeur FILLUNGER a exprimé comme suit son point de vue concernant les opinions ci-dessus rapportées de Monsieur le Prof. BROZSKO:

Die Kritik des Herrn BROZSKO an der ENGESSER-V. KÁRMÁNSchen Knickformel ist nicht begründet. Allerdings muß eingeräumt werden, daß die von Herrn BROZSKO beanständete Formel 2 richtig wie 3 lauten müßte. Da aber Herr v. KÁRMÁN, wie auch Herr BROZSKO bemerkt, die Knicklast nicht aus 2, sondern aus 4 ableitet, wo σ_z die der mittleren Spannung σ_m überlagerte Biegespannung bedeutet, bleibt das Endergebnis, die Form des Knickmoduls, hievon unbeeinflußt. Das Kraftsystem σ_z

besitzt keine Resultierende $\left(\int_F \sigma_z dF = 0 \right)$. Daher ist sein resultierendes Moment in

bezug auf jede zur Schwerachse parallele Achse gleich groß und es ist somit ohne weiters erlaubt, das Moment der inneren Kräfte σ_z in bezug auf die für die Rechnung bequemste Achse, nämlich die „neutrale“ Achse aufzustellen. Der Arm y der äußeren Kraft P hingegen ist der Abstand ihrer Wirkungsgeraden vom Angriffspunkt der Resultierenden der mittleren Spannung σ_m , d. h. von $\int_F \sigma_m dF = P = \int_F \sigma dF$, (wenn σ dieselbe Bedeutung hat wie in 1), also vom Schwerpunkt des

Querschnittes.

Herr BROZSKO stellt der ENGESSER-V. KÁRMÁNSchen Knickformel seine in den Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 186, p. 1041 mitgeteilte Formel entgegen. Nach Herrn BROZSKO lautet die Momentengleichung

$$\begin{aligned} P_{cr} \cdot y &= \int_F \eta \sigma dF = \int_F \tilde{E} \varepsilon \eta dF = \\ &= \left[\varepsilon_{cr} + \frac{m}{\varrho} (1 - \varepsilon_{cr}) \right] \int_F \tilde{E} \eta dF + \frac{1 - \varepsilon_{cr}}{\varrho} \int_F \tilde{E} \eta^2 dF, \end{aligned}$$

und zwar zunächst für eine endliche Ausbiegung. Hier bedeuten

P_{cr} die kritische Last,

ε_{cr} die spezifische Verkürzung des Stabes unter dieser Last, wenn er gerade bleibt,

y den Arm der Kraft wie oben,

σ die Spannung in dF wie oben,

ε die dem σ entsprechende spezifische Verkürzung,

m den Abstand der „neutralen“ Achse vom Schwerpunkt,

η den Abstand der Spannung σ vom Schwerpunkt,

ϱ den Krümmungshalbmesser der elastische Linie,

$\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$. den „Modul“.

Die zweite Zeile der obigen Gleichung folgt aus der ersten durch die mit KÁRMÁN übereinstimmende Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte.

Herr BROZSKO zieht nun die Schlußfolgerung: Wenn die Ausbiegung nicht endlich, sondern unendlich klein ist, strebt \tilde{E} in der Grenze einem für den ganzen Querschnitt konstanten Wert $\tilde{E}_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\epsilon_{cr}}$ zu. Indem Herr BROZSKO diesen Grenzübergang in der zweiten obigen Zeile statt in der ersten durchführt und berücksichtigt,

daß $\int_{\tilde{r}} \eta dF = 0$, ergibt sich

$$P_{cr} \cdot y = \frac{(1 - \epsilon_{cr}) \tilde{E}_{cr}}{\rho} \cdot J$$

und demzufolge

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (1 - \epsilon_{cr}) \tilde{E}_{cr} J}{l^2}$$

Herr BROZSKO übersieht, daß dieser Grenzübergang, wenn er überhaupt vorgenommen wird, schon in der ersten obigen Zeile durchgeführt werden kann und dann ergibt

$$P_{cr} \cdot y = \tilde{E}_{cr} \epsilon_{cr} \int_{\tilde{r}} \eta dF = 0,$$

d. h. $y = 0$.

Der von Herrn BROZSKO gewählte Grenzübergang führt somit unmittelbar zu dem sogenannten trivialen Falle, in welchem der Stab gerade bleibt, und nur zu diesem Falle. Es ist leicht einzusehen, weshalb dieses Ergebnis erscheinen muß. Weil $P_{cr} \cdot y$ ein Moment von erster Kleinheitsordnung bedeutet, müssen unter dem Integralzeichen Größen von zweiter Kleinheitsordnung berücksichtigt werden. Dies ist der Grund, weshalb Herr v. KÁRMÁN die unendlich kleinen Zusatzspannungen σ_z einführt.

Aus der Knickformel des Herrn BROZSKO würde übrigens auch folgen, daß ein Stab, welcher in einem Zuge bis zum Knicken im plastischen Bereich belastet wird, eine wesentlich kleinere Knicklast aufweisen müßte, als derselbe Stab, wenn er zunächst mit einer knapp unter jener Knicklast liegenden Last gedrückt, wobei er noch gerade bliebe, sodann entlastet und neuerlich bis zum Knicken belastet würde. Denn im zweiten Falle wäre offenbar als Ursprung des Koordinatensystems (σ, ϵ) ein Punkt der ϵ -Achse anzusehen, welcher um die nach der Entlastung zurückgebliebene plastische Verkürzung nach rechts verschoben wäre. Ein ganz unmögliches Resultat!

Prof. BROZSKO, Warschau:

Prof. BROZSKO hat obige Stellungnahme wie folgt beantwortet:

Prof. BROZSKO answered to the above response as follows:

M. le Prof. BROZSKO a répondu comme suit aux remarques présentés par

M. le Prof. FILLUNGER:

In seinen polemischen Ausführungen sucht Herr FILLUNGER zu beweisen,

a) daß meine Kritik an der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie nicht begründet ist,

b) daß die von mir aufgestellte Knickungstheorie nur zu der sogenannten trivialen Lösung führt.

Obwohl diese beiden Einwände unhaltbar sind, so bin ich dennoch Herrn FILLUNGER für seine Bereitwilligkeit zur Übernahme der Rolle eines Opponenten sehr zu Dank verpflichtet. Denn die von Herrn FILLUNGER angeregte Polemik gibt

mir erst die erwünschte Gelegenheit zum Vorbringen derjenigen Beweisgründe für die Richtigkeit meiner Auffassung, die ich wegen der Knappheit des vorgeschriebenen Notenumfanges in meine Akademienote, und wegen der Kürze der festgesetzten Sprechzeit in meinen Diskussionsvortrag nicht aufnehmen konnte.

Seine Kritik an der von mir aufgestellten Knickungstheorie stützt Herr FILLUNGER auf die Tatsache, daß die Ausgangsgleichung dieser Theorie

$$P_k y = \int_{(F)} \tilde{E} \varepsilon \eta dF \quad \dots \dots \dots (9)$$

nach ausgeführtem Grenzübergang

$$\lim_{y_{\max} = 0} (P_k y) = \tilde{E}_k \varepsilon_k \int_{(F)} \eta dF$$

naturgemäß zu der trivialen Lösung

$$y = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

führt. Aus dieser Tatsache zieht Herr FILLUNGER die unrichtige Folgerung, daß die Ausgangsgleichung (9) *nur* zu dem Ergebnis (10) führen kann. Die Irrtümlichkeit dieser Folgerung liegt auf der Hand. Denn die Ausgangsgleichung der EULERSchen Theorie der elastischen Knickung

$$P_k y = \int_{(F)} E \varepsilon \eta dF$$

führt ja nach ausgeführtem Grenzübergang

$$\lim_{y_{\max} = 0} (P_k y) = E \lim_{y_{\max} = 0} \left(\int_{(F)} \varepsilon \eta dF \right) = 0$$

ebenfalls zu der trivialen Lösung (10), und dieses Ergebnis berechtigt noch lange nicht zu der Folgerung, daß aus der Ausgangsgleichung der EULERSchen Knickungstheorie *nur* die triviale Lösung gewonnen werden könnte.

Der erste Einwand des Herrn FILLUNGER erweist sich somit als unhaltbar; dieser Einwand ist aber außerdem auch gegenstandslos. Denn weder in meiner Akademienote, noch in meinen Bemerkungen zum Referat des Herrn ROŠ ist von einem „Grenzübergang“ die Rede. Bei der Ableitung der Formel für die theoretische Knicklast lege ich meinen Betrachtungen stets den Fall einer unendlich kleinen virtuellen Ausbiegung des Stabes zugrunde, wobei die Ordinaten der ausgebogenen Stabachse zwar unendlich klein, aber *von Null verschieden* sind. Von den mathematischen Hilfsmitteln wird dabei einzig und allein die unbestreitbar richtige Regel benutzt, daß man in einer algebraischen Summe unendlich kleine Summanden gegenüber solchen von endlicher Größe vernachlässigen darf. Die Anwendung dieser elementaren Regel auf die Gleichung

$$P_k y = \left\{ \varepsilon_k + \frac{q}{\varrho} (1 - \varepsilon_k) \right\} \int_{(F)} \tilde{E} \eta dF + \frac{1 - \varepsilon_k}{\varrho} \int_{(F)} \tilde{E} \eta^2 dF \quad \dots \dots (11)$$

die aus der Ausgangsgleichung (9) nach Einsetzung des Wertes

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \frac{\eta + q}{\varrho} (1 - \varepsilon_k)$$

hervorgeht, führt aber unmittelbar zu der Differentialgleichung

$$P_k y = \frac{(1 - \varepsilon_k) \tilde{E}_k}{\varrho} J, \quad \dots \dots \dots (12)$$

deren Integration meine Knickformel liefert. Denn im Falle einer unendlich kleinen Ausbiegung eines durch die Knicklast zentrisch zusammengedrückten Stabes sind die Werte der für verschiedene Querschnittspunkte berechneten Verhältnisse $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \tilde{E}$ nur um unendlich kleine additive Glieder \tilde{E}_z von demjenigen endlichen, konstanten Wert $\frac{\sigma_k}{\varepsilon_k} = \tilde{E}_k$ verschieden, der vor der Ausbiegung, d. h. bei alleiniger Zusammendrückung durch die Knicklast, sämtlichen Fasern gemeinsam war. Dementsprechend ist es zulässig, in der Gleichung

$$\tilde{E} = \tilde{E}_k + \tilde{E}_z \dots \dots \dots (13)$$

den bei einer unendlich schwachen Ausbiegung unendlich kleinen Summanden \tilde{E}_z gegenüber dem endlichen \tilde{E}_k gemäß der vorangeführten Regel zu vernachlässigen. Diese im strengsten mathematischen Sinne zulässige Vernachlässigung führt aber unmittelbar von der Gleichung (11) zur Gleichung (12), wenn man außerdem noch berücksichtigt, daß

$$\int_{(\tilde{r})} \eta dF = 0 \dots \dots \dots (14)$$

ist. Aus den vorstehenden Ausführungen geht deutlich genug hervor, daß die Ableitung meiner Knickformel den Anforderungen mathematischer Exaktheit voll genügt, und daß dementsprechend der Einwand mathematischer Natur, den Herr FILLUNGER gegen die von mir aufgestellte Theorie vorbringt, jeder Berechtigung entbehrt. Interessant an der durch die vorstehenden Ausführungen erledigten Streitfrage dürfte eigentlich nur der Umstand sein, daß die Anwendung der vorerwähnten elementaren mathematischen Regel auf den Modul \tilde{E} einen Widerspruch hervorgerufen hat, obwohl die aus der analogen Regel abgeleitete und im gleichen Grade berechnete Gleichsetzung des Krümmungshalbmessers ϱ für alle Fasern eines unendlich schwach ausgebogenen Stabes von der Kritik weder in der Ableitung der EULERSchen Knickformeln noch in der Abhandlung v. KÁRMÁNS beanstandet worden ist.

Obschon die erörterte Streitfrage nach meinen vorstehenden Ausführungen als erschöpft betrachtet werden könnte, glaube ich doch auf noch eine, allerdings nicht ganz klar ausgesprochene, polemische Bemerkung eingehen zu müssen, die Herr FILLUNGER im Zusammenhang mit dem soeben erörterten Einwand, gegen die mathematische Ableitung meiner Knickformel zu richten scheint. In dem vorletzten Abschnitt seiner Zuschrift sagt nämlich Herr FILLUNGER, die angebliche Inkorrektheit der mathematischen Ableitung meiner Knickformel bestehe darin, daß ich in meiner Akademienote (wohl bei dem Übergang von der Gleichung 11 zur Gleichung 12) unter dem Integralzeichen Größen von zweiter Kleinheitsordnung nicht berücksichtigt habe. Da nun in der durch Einführung des Wertes von \tilde{E} aus (13) in (11) erhaltenen Gleichung

$$P_k y = \left\{ \varepsilon_k + \frac{\varrho}{\varepsilon_k} (1 - \varepsilon_k) \right\} \left[\tilde{E}_k \int_{(\tilde{r})} \eta dF + \int_{(\tilde{r})} \eta (\tilde{E}_z dF) \right] + \frac{1 - \varepsilon_k}{\varrho} \left[\tilde{E}_k \int_{(\tilde{r})} \eta^2 dF + \int_{(\tilde{r})} \eta^2 (\tilde{E}_z dF) \right] \dots \dots \dots (15)$$

das zweite Glied in der zweiten eckigen Klammer gegen das erste, gemäß der vorangeführten elementaren Regel, vernachlässigbar ist, so kann der Einwand des

Herrn FILLUNGER sich wohl nur auf das zweite Glied in der ersten eckigen Klammer beziehen, welch letzteres bei oberflächlicher Betrachtung unendlich klein von der ersten Ordnung zu sein scheint, wogegen das in derselben Klammer auftretende erste Glied, gemäß der Gleichung (14), exakt gleich Null ist. Es ist aber nicht schwer zu beweisen, daß — entgegen dieser oberflächlichen Einschätzung — auch das zweite Glied in der ersten eckigen Klammer exakt gleich Null sein muß. Zum Zwecke der Beweisführung denke man sich im Querschnitt eine Gerade geführt, die in einer unendlich kleinen Entfernung parallel zu derjenigen Schwerpunktsachse verläuft, von der die Abstände η gemessen werden. Bezeichnet man nun die Abstände der unendlich schmalen Flächenstreifen dF von dieser neuen Achse mit ζ und bildet die Momente

$$\int_{(F)} \zeta dF \quad \text{und} \quad \int_{(F)} \zeta (\tilde{E}_z dF),$$

so ist leicht einzusehen, daß die erste dieser unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung, die zweite dagegen, wegen der unendlichen Kleinheit des Faktors \tilde{E}_z , von der zweiten Ordnung ist. Verschiebt man nun die neue Momentenachse parallel zu der unbeweglichen Schwerpunktsachse derart, daß die Differenz $\zeta - \eta$ dem Werte Null zustrebt, so ist während dieses Grenzüberganges die Ordnung der unendlich kleinen Größe $\int_{(F)} \zeta dF$ stets um eins niedriger, als die Ordnung der Größe

$\int_{(F)} \zeta (\tilde{E}_z dF)$. Infolgedessen muß

$$\lim_{(\zeta - \eta) = 0} \left[\int_{(F)} \zeta (\tilde{E}_z dF) \right] = \int_{(F)} \eta (\tilde{E}_z dF) = 0$$

sein, da ja

$$\lim_{(\zeta - \eta) = 0} \left[\int_{(F)} \zeta dF \right] = \int_{(F)} \eta dF = 0$$

ist. Die soeben erörterte Behauptung des Herrn FILLUNGER entbehrt daher jeder Begründung.

Der zweite Einwand, den Herr FILLUNGER gegen die von mir aufgestellte Knickungstheorie richtet, betrifft die angebliche Unstimmigkeit einer aus dieser Theorie gezogenen Folgerung mit der Erfahrung. Herr FILLUNGER glaubt diese von ihm behauptete Unstimmigkeit mit der Tatsache begründen zu können, daß ein Stab, welcher in einem Zuge bis zum Knicken *im plastischen Bereich* belastet wird, nach meiner Theorie (im Gegensatz zu dem diesbezüglichen Ergebnis der Theorie von ENGESSER und v. KÁRMÁN) eine wesentlich kleinere Knicklast aufweisen müßte als derselbe Stab, wenn er zunächst mit einer knapp unter jener Knicklast liegenden Last gedrückt, sodann entlastet und neuerlich bis zum Knicken belastet würde. Es ist nun aber auf den ersten Blick ersichtlich, daß diese Begründung, die Herr FILLUNGER seinem zweiten Einwand gibt, nur als eine zwar von dem Herrn Opponenten unbeabsichtigte, aber für mich sehr willkommene Vermehrung einer Anzahl von Tatsachen gewertet werden kann, die ich im nächsten Abschnitt anführen werde, um die Richtigkeit meiner Knickungstheorie und die Irrtümlichkeit derjenigen von ENGESSER und v. KÁRMÁN auf Grund von Erfahrungstatsachen darzulegen. Denn es ist ohne weiteres klar, daß ein Stab, der infolge einer Zusammen-drückung eine *bleibende* Deformation erlitten hat, elastische Eigenschaften aufweisen muß, die ganz verschieden von denjenigen sind, die er vor seiner bleibenden Ver-

formung besessen hat. Es ist infolgedessen nicht zulässig — wie Herr FILLUNGER es tut —, den mit einer zurückgebliebenen plastischen Deformation behafteten Stab mit dem ursprünglichen, nicht deformierten Stab zu identifizieren. Außerdem ist leicht einzusehen, daß der Einfluß einer Verfestigung des Stabmaterials auf die Größe der Knicklast sich eben im Sinne der aus meiner Knickungstheorie gezogenen Folgerungen offenbaren muß, und daß die aus der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie gefolgerte angebliche Unabhängigkeit der Knicklast von den infolge der Verfestigung geänderten elastischen Eigenschaften des Stabmaterials einen Beweis mehr für die Irrtümlichkeit dieser Theorie abgibt.

In seinen auf die ENGESSER-v. KÁRMÁNSche Knickungstheorie sich beziehenden Ausführungen gibt Herr FILLUNGER zunächst die Unrichtigkeit der v. KÁRMÁNSchen Gleichung (5 b) zu, behauptet aber gleich hierauf, daß die Ausgangsgleichung, aus der v. KÁRMÁN seine Knickformel abgeleitet hat, einwandfrei sei. Demgegenüber muß bemerkt werden, daß die v. KÁRMÁNSche Ausgangsgleichung, infolge der unzulässigen Einführung der Zusatzspannungen σ_z an Stelle der wirklich wirkenden Spannungen σ , nicht einwandfrei ist, und daß durch diese unzulässige Maßnahme das Endergebnis der Rechnungen — entgegen der Behauptung des Herrn FILLUNGER — doch beeinflußt wird. Diese Beeinflussung des Endergebnisses offenbart sich eben darin, daß in der v. KÁRMÁNSchen Knickformel die in Wirklichkeit vorhandene Abhängigkeit der Knicklast von der Stabverkürzung nicht zum Ausdruck gelangt. Dementsprechend kann ich nur wiederholt unterstreichen, daß die v. KÁRMÁNSche Ausgangsgleichung mit der meinigen nicht identisch ist. Da außerdem die v. KÁRMÁNSchen physikalischen Ansätze evident unrichtig sind, und infolgedessen sämtliche aus seiner Ausgangsgleichung abgeleiteten Folgerungen mit den Erfahrungstatsachen nicht in Einklang gebracht werden können, so muß ich nach wie vor an der Behauptung festhalten, daß die ENGESSER-v. KÁRMÁNSche Knickungstheorie irrig ist.

Zwecks Darlegung der evidenten Unstimmigkeit der v. KÁRMÁNSchen Knickformel mit den Versuchsergebnissen wollen wir zunächst die Ergebnisse der eigenen Knickversuche v. KÁRMÁNS den aus seiner Theorie gezogenen Folgerungen gegenüberstellen. Diese Knickversuche wurden bekanntlich an Stäben von rechteckigem Querschnitt angestellt, deren Knickmodul nach der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie durch die Gleichung

$$T = \frac{4 E \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_k}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_k} \right)^2}$$

bestimmt ist. Das Material dieser Stäbe war dadurch ausgezeichnet, daß seine Druck-Stauchungs-Charakteristik nach Erreichung der Fließgrenze in ganz ausgeprägter Weise parallel zur ε -Achse verlief, wie das aus der v. KÁRMÁNSchen Figur 21 sehr deutlich zu ersehen ist.¹ Infolgedessen war an der Fließgrenze

$$\left[\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_k \right]_{Fl} = 0, \quad T_{Fl} = 0$$

¹ Über den normalen Verlauf der Druck-Stauchungs-Charakteristik im plastischen Druckbereich berichtet W. GEHLER in seiner sehr bemerkenswerten Arbeit „Die Spannungs-Dehnungslinie im plastischen Druckbereich und die Knickspannungslinie“. Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik. 1927. S. 364.

und dementsprechend müßte nach der ENGESSER-V. KÁRMÁNSchen Theorie die der Fließspannung $(\sigma_k)_{Fl}$ entsprechende Schlankheit

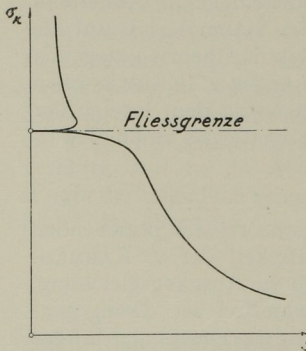


Abb. 41

$$s_{Fl} = \pi \sqrt{\frac{T_{Fl}}{(\sigma_k)_{Fl}}} = 0$$

sein. Wegen des kontinuierlichen Verlaufes der Druck-Stauchungs-Charakteristik müßte daher das Knickspannungs-Schlankheits-Diagramm ungefähr einen solchen Verlauf aufweisen, wie er in der nebenstehenden Skizze (s. Abb. 41) angedeutet ist. Infolgedessen müßten zentrisch zusammengedrückte Stäbe jeder Schlankheit bereits unter einer Achsiallast ausknicken, die kleiner als $P_{Fl} = F(\sigma_k)_{Fl}$ ist und eine unelastische Knickung könnte dementsprechend niemals zustande kommen. Diese aus der ENGESSER-V. KÁRMÁNSchen Theorie sich ergebende Folgerung wird aber von der Erfahrung nicht bestätigt.

Den Widerspruch zwischen der v. KÁRMÁNSchen Theorie und den Erfahrungstatsachen, der in dem soeben erörterten Fall so klar zu Tage tritt, kann man offenbar nicht durch unklare Auseinandersetzungen über die an der Fließgrenze auftretende Labilität beseitigen. Aber selbst dann, wenn man die übliche Überbrückung des entsprechenden Teiles der Knickspannungs-Schlankheitslinie mit Strichlinien als gleichbedeutend mit einer berechtigten Interpolation anerkennen wollte, würde man hiedurch doch nicht einen anderen Widerspruch beseitigen können, der zwischen dem tatsächlichen Verhalten der Knickstäbe an der Fließgrenze und den Ergebnissen der ENGESSER-V. KÁRMÁNSchen Theorie nach wie vor bestehen bliebe. Dieser Widerspruch ist an der Tatsache erkennbar, daß selbst die durch die vorerwähnte Interpolation geänderte v. KÁRMÁNSche Knickspannungslinie an der Fließgrenze einen Verlauf hat (s. Abb. 32), der mit dem im Materialprüfungsamt zu Berlin-Dahlem experimentell mit peinlichster Genauigkeit festgestellten¹ charakteristischen Eigenschaften jener Linie ganz unvereinbar ist.

Im Zusammenhang mit den vorstehenden Ausführungen darf wohl hervorgehoben werden, daß das aus der von mir aufgestellten Theorie abgeleitete Verhalten der Knickstäbe an der Fließgrenze im vollen Einklang mit der Erfahrung steht, und daß im besonderen die Ergebnisse der angeführten MEMMLERSchen Arbeit den besten Beweis für die Richtigkeit des Verlaufes meiner Knickspannungskurve liefern. Denn die letztere verläuft im Fließbereich, in Übereinstimmung mit den Endergebnissen der MEMMLERSchen Arbeit, parallel zu der s-Achse.

Aber nicht nur an der Fließgrenze ist der Verlauf der v. KÁRMÁNSchen Knickspannungskurve mit der Erfahrung unvereinbar. Denn aus der v. KÁRMÁNSchen Figur 23 und aus meiner Abb. 32 ist ganz klar zu ersehen, daß mehrere Versuchspunkte *oberhalb* dieser Kurve liegen. Da nun aber die Knickspannungskurve, laut Theorie, die *obere Grenze* für die beobachteten Werte der Knickspannungen bildet, so ist ganz unverständlich, auf welchem Wege einzelne Verfasser² zu der Überzeugung gelangt sind, daß die ENGESSER-V. KÁRMÁNSche Knickungstheorie durch die v. KÁRMÁNSchen Versuche „in ausgezeichneter Weise“ bestätigt worden sei. Dieses unverständliche Urteil klingt um so sonderbarer, wenn man bedenkt, daß

¹ K. MEMMLER, Neuere experimentelle Beiträge zur Frage der Knickfestigkeit. Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik. 1927. S. 357. Siehe insbesondere die MEMMLERSche Abb. 40.

² R. MAYER, Die Knickfestigkeit. 1921. S. 66.

einerseits der in den v. KÁRMÁNSchen Knickversuchen erzielte Genauigkeitsgrad der Zentrierung nachgewiesenermaßen¹ in den vorerwähnten Dahlemer Versuchen weit übertroffen worden ist, und daß anderseits im unelastischen Bereich eine sehr unerhebliche Verringerung der praktisch unvermeidbaren Exzentrizität des Kraftangriffes schon eine sehr bedeutende Erhöhung der Knickspannung hervorruft. Denn in Anbetracht der letzt erwähnten Tatsache unterliegt es gar keinem Zweifel, daß bei einer genaueren Zentrierung der Versuchsstäbe die in den v. KÁRMÁNSchen Knickversuchen festgestellte Unstimmigkeit noch viel stärker in Erscheinung hätte treten müssen.

Im Zusammenhange mit den vorstehenden Ausführungen darf wohl wiederum hervorgehoben werden, daß die aus meiner Theorie abgeleitete Knickspannungslinie von keinem Versuchspunkte nach oben überschritten und daß dementsprechend das vorerwähnte Kriterium für die Richtigkeit der Knickformeln von meiner Theorie in vollkommener Weise befriedigt wird.

Wenn man nun nach der Ursache des Mangels an Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Knickungstheorie und der Erfahrung fragt, so muß in Beantwortung dieser Frage vor allem auf die physikalischen Ansätze dieser Theorie hingewiesen werden. Das Fehlerhafte der physikalischen Ansätze der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Knickungstheorie besteht nun in der Annahme, daß auf der Biegezugseite eines unelastisch ausknickenden Stabes der Zusammenhang der Druckspannungsabnahme $\Delta \sigma_m$ mit der zugehörigen Abnahme der spezifischen Verkürzung $\Delta \epsilon_m$ ganz *allgemein* durch das einfache Proportionalitätsgesetz $\Delta \sigma_m = E \Delta \epsilon_m$ gegeben sei, sofern nur das Stabmaterial eine Proportionalitätsgrenze besitzt. Es ist aber nicht schwierig, sich von der Irrtümlichkeit dieser Annahme zu überzeugen. Denn die angenäherte Gültigkeit des Proportionalitätsgesetzes in dem in Rede stehenden Fall ist offenbar nur auf solche *verhältnismäßig großen* Ausbiegungen beschränkt, bei denen die Hysteresisschleife des Stabmaterials im Druck-Stauchungs-Diagramm (s. Abb. 30) annähernd durch die zum geradlinigen Teil $O p$ der Diagrammlinie parallele Gerade $a_1 n$ abgebildet werden darf. Bei *sehr kleinen* (exakt gesprochen: bei unendlich kleinen) Ausbiegungen des Stabes, die allein bei der Ableitung der Formel für die theoretische Knicklast in Frage kommen, ist aber diese Annäherung unzulässig. Denn das unmittelbar an den Punkt n angrenzende Bogenelement des absteigenden Zweiges der Hysteresisschleife (s. Abb. 42) ist gegen die ϵ -Achse unter einem Winkel ψ geneigt, dessen trigonometrische Tangente von derjenigen des Neigungswinkels φ sehr verschieden sein kann, den der geradlinige Teil $O p$ der Diagrammlinie mit derselben Achse einschließt. Es kann daher von der Gültigkeit des einfachen Gesetzes $\Delta \sigma_m = E \Delta \epsilon_m$ im Falle einer unendlich kleinen Ausbiegung nicht die Rede sein. Mit der als unzutreffend sich erweisenden Anwendbarkeit dieses Gesetzes auf kleine Ausbiegungen fällt aber die ganze ENGESSER-v. KÁRMÁNSche Knickungstheorie.

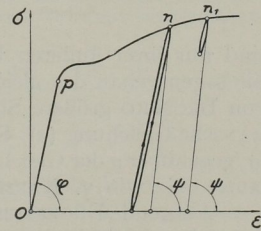


Abb. 42

Zusammenfassend kann somit über die ENGESSER-v. KÁRMÁNSche Knickungstheorie gesagt werden, daß sie unter der Last ganz entbehrlicher und nicht streng richtiger physikalischer Ansätze zusammenbricht, mit denen sie von ihren Urhebern *unnötigerweise* belastet worden ist. Denn aus den vorstehenden Ausführungen geht zur Genüge klar hervor, daß auch ohne irgendwelche spezielle Annahmen über die Art der Spannungsverteilung im Querschnitt eines unendlich schwach ausgebogenen

¹ Siehe die Abb. 2 und 3 in der vorangeführten Abhandlung K. MEMMLERS.

Stabes eine ganz allgemeine und überraschend einfache Lösung des Knickproblems erreichbar ist, die an Exaktheit der speziellen EULERSchen Lösung in keiner Hinsicht nachsteht.

Prof. Dr. M. Roš, Zürich:

Auf Grund des Studiums der verschiedenen in der Diskussion aufgeworfenen Fragen und Mitteilungen über das Knickproblem beehre ich mich, auch namens der wissenschaftlichen Mitarbeiter der E. M. P. A., Dr. Ing. J. BRUNNER und Dipl. Ing. A. EICHINGER, wie folgt zu antworten.

Die Voraussetzungen, welche den in Frage stehenden theoretischen Untersuchungen und Betrachtungen zugrunde liegen, lauten:

1. Vollwandige Stäbe, unveränderlichen rechteckigen Querschnittes.
2. Gelenkige Lagerung der Stabenden.
3. Ebenbleiben der Querschnitte.
4. Biegelinie gleich der Sinuslinie.
5. Druck-Stauchungs-Diagramm entsprechend der Abb. 3.
6. Entlastung der gedrückten Fasern, dem E-Gesetz folgend — Abb. 3.
7. Allmähliche stetige (doch nicht zu langsame) Steigerung der äußeren Druckkraft P bis zur Knicklast P_k — statische Knickversuche.

Auf den gleichen Voraussetzungen, mit teilweiser Ausnahme des Punktes 4 für exzentrisches Knicken, beruhen auch die Untersuchungen aller Diskussionsredner, so daß den nachfolgenden kritischen Betrachtungen die genau gleiche Basis zugrunde liegt.

* * *

Die grundlegenden Annahmen der Knickungstheorie von Prof. M. BROZKO (1928) sind genau die gleichen wie diejenigen von Prof. TH. v. KÁRMÁN (1910). Die Ausgangsgleichungen für zentrisches Knicken

$$P \cdot y = \int_{(F)} \sigma_z \cdot z \cdot dF \text{ (KÁRMÁN)} \dots\dots\dots (1)$$

und

$$P \cdot y = \int_{(F)} \sigma \cdot \eta \cdot dF \text{ (BROZKO)} \dots\dots\dots (2)$$

sind nur ihrer äußeren Form, nicht aber ihrem inneren Werte nach verschieden. Sie sagen genau das gleiche aus, jedoch bietet bei der Integration die Schreibweise von BROZKO größere Schwierigkeiten als diejenige von v. KÁRMÁN. — Die KÁRMÁNsche Gleichung (2), Seite 305, sollte bei σ einen Unterscheidungsindex tragen [σ_z gegenüber σ der Gleich. (1)], so daß sie analog der richtigen Gleichung (4), Seite 306, lautet, die von v. KÁRMÁN zu den Ableitungen allein benutzt wurde.

Während ENGESSER-v. KÁRMÁN für die Ausgangsgleichung eines zentrisch gedrückten Stabes die richtige Lösung in der Form

$$P_k = \pi^2 \cdot \frac{T_k \cdot J}{l_0^2} \dots\dots\dots (3)$$

geben, gelangt BROZKO durch unrichtige Integration seiner Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} P_{cr} \cdot y &= \int_{(F)} \sigma \cdot \eta \cdot dF = \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \varepsilon \cdot \eta \cdot dF = \\ &= \left[\varepsilon_{cr} + \frac{m}{\rho} (1 - \varepsilon_{cr}) \right] \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \eta \cdot dF + \frac{1 - \varepsilon_{cr}}{\rho} \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \eta^2 \cdot dF \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

zum unzutreffenden Werte von

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(1 - \epsilon_{cr}) \cdot \tilde{E}_{cr} \cdot J}{l^2} = P_k \dots \dots \dots (5)$$

bzw. bei der zulässigen Vernachlässigung der Stabverkürzung infolge Achsialkraft gegenüber 1 ($\epsilon_{cr} \sim 0$)

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{\tilde{E}_{cr} \cdot J}{l_0^2} = P_k \dots \dots \dots (6)$$

Beide Gleichungen, (3) und (6), für die Knicklast $P_k = P_{cr}$ weisen den gleichen Aufbau auf, nur besitzt bei KÁRMÁN der Knickmodul T_k den Wert

$$T_k = \frac{4 \cdot E \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_k}{\left[\sqrt{E} + \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_k}\right]^2} \dots \dots \dots (7)$$

also ist er ein Mittelwert zwischen $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$ (Tangente an das Druck-Stauchungs-Diagramm) und dem E-Modul, im Gegensatz zu BROZKO, bei welchem an Stelle von T

tritt.
$$\tilde{E}_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\epsilon_{cr}} \dots \dots \dots (8)$$

BROZKO gelangt zu dieser unrichtigen Lösung infolge unzutreffender Diskussion der an sich richtigen Gleichung (4), indem er, ohne den mathematischen Ausweis zu erbringen, von welcher Größenordnung die unendlich kleine Größe des ersten Summanden der Gleichung (4)

$$I = \left[\epsilon_{cr} + \frac{m}{\rho} (1 - \epsilon_{cr}) \right] \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \eta \cdot dF$$

für eine unendlich kleine Ausbiegung ist, dieselbe gleich Null setzt. Sie darf aber neben der Größe des zweiten Summanden der Gleichung (4)

$$II = \frac{1 - \epsilon_{cr}}{\rho} \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \eta^2 \cdot dF$$

welche für eine unendlich kleine Ausbiegung auch unendlich klein ist, nicht vernachlässigt werden. In der Abb. 46 sind die Werte dieser beiden Summanden eingetragen, woraus die für eine strenge Lösung unzulässige Vernachlässigung von BROZKO ersichtlich ist.

Der Beweis soll in anschaulicher Weise für die Annahme erbracht werden, daß sowohl die Belastung als auch die Entlastung des gedrückten und unendlich wenig seitlich ausgebogenen Stabes dem Druck-Stauchungs-Diagramm gehorcht, also so wie es ENGESSER ursprünglich für Stahl unrichtig annahm und später auf den Einwand von JASINSKY berichtigte. Es folgt aus der Abb. 43

$$\sigma = \sigma_k + T \cdot \frac{\Delta \cdot \eta}{h} \dots \dots \dots (9)$$

$$\epsilon = \epsilon_k + \frac{\Delta \cdot \eta}{h} \dots \dots \dots (10)$$

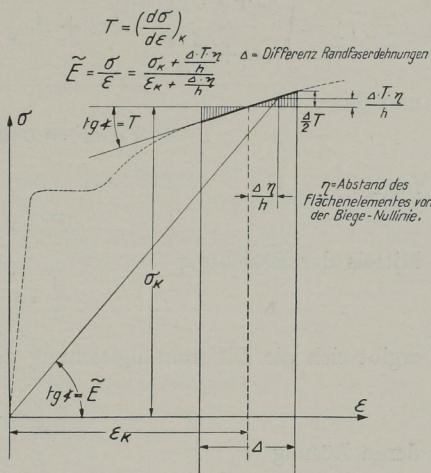


Abb. 43. Annahme über den σ - ϵ -Verlauf: Bei Belastung und Entlastung dem Druck-Stauchungs-Diagramm folgend

wenn $T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, $\Delta =$ Differenz der Randfaserdehnungen und $h =$ Höhe des rechteckigen Querschnittes bedeutet; des fernern ist

$$\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_k + T \cdot \frac{\Delta \cdot \eta}{h}}{\varepsilon_k + \frac{\Delta \cdot \eta}{h}}$$

Die BROSKOSCHE Gleichung (2) bzw. (4)

$$P_{cr} \cdot y = \int_{(F)} \sigma \cdot \eta \cdot dF = \int_{(F)} \tilde{E} \cdot \varepsilon \cdot \eta \cdot dF$$

nimmt die Form an

$$P_{cr} \cdot y = \int_{(F)} \frac{\sigma_k + T \cdot \frac{\Delta \cdot \eta}{h}}{\varepsilon_k + \frac{\Delta \cdot \eta}{h}} \cdot \left(\varepsilon_k + \Delta \frac{\eta}{h} \right) \cdot \eta \cdot dF = \sigma_k \int_{(F)} \eta \cdot dF + T \cdot \frac{\Delta}{h} \int_{(F)} \eta^2 \cdot dF$$

und da

$$\int_{(F)} \eta \cdot dF = 0 \quad \text{und} \quad \int_{(F)} \eta^2 \cdot dF = J \quad \text{ist}$$

folgt

$$P_{cr} \cdot y = T_k \frac{\Delta}{h} \cdot J$$

Mittels der Beziehung

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{1}{\varrho} = - \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ergibt sich die Differentialgleichung der Biegelinie zu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \cdot \frac{P_{cr}}{T \cdot J} = 0$$

deren Lösung

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{T_k J}{l_0^2}$$

in Übereinstimmung mit ENGESSER-V. KÁRMÁN ist und nicht mit BROSKO, welcher den Wert P_{cr} nach seiner Theorie zu

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{\tilde{E}_{cr} J}{l_0^2}$$

angibt.

Die richtige Integration der BROSKOSCHEN Ausgangsgleichung (2) oder in entwickelter Form (4) führt für die Knicklast P_k nicht zur von Prof. BROSKO aufgestellten und verfochtenen Gleichung (6)

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{\tilde{E}_{cr} \cdot J}{l_0^2} = P_k,$$

sondern zur Lösung von ENGESSER-V. KÁRMÁN, nämlich zu der Gleichung (3)

$$P_k = \pi^2 \cdot \frac{T_k J}{l_0^2}$$

womit der Beweis von der Unhaltbarkeit der Knickformel von BROSKO als einer exakten Lösung des Knickproblems und somit auch seiner Theorie erbracht ist.

Das Unzutreffende der Broszkoschen *Ableitung* geht auch nach folgender Überlegung aus seiner Abb. 30 und unserer Abb. 44 hervor:

Die Spannungsverteilung über dem Querschnitt ist, wie auch Broszko hervorhebt, eine eindeutig bestimmte und damit auch die Knickkraft.

Die Spannungsverteilung ist gegeben durch den Kurvenzweig $n a_2$ und durch die Entlastungsgerade. Der Kurvenzweig $O p n$ und damit auch der Koordinaten-

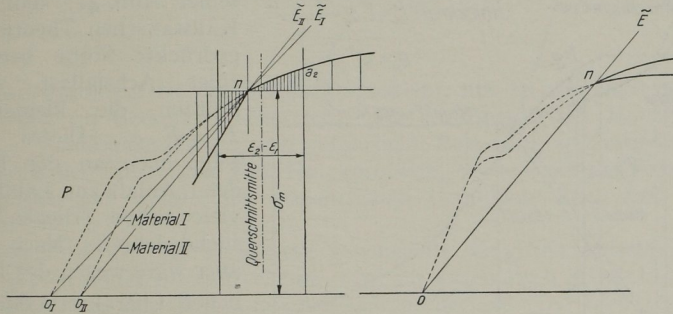


Abb. 44. Spannungs-Dehnungs-Diagramme und Moduli \tilde{E}

anfangspunkt O spielt hierbei gar keine Rolle mehr, denn es kommt nur die Differenz $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ in Frage, nicht aber deren absolute Werte. Nun ist aber für die Broszkosche Ableitung der Modul \tilde{E} und damit der Koordinatenanfangspunkt O von ausschlaggebender Bedeutung und je nachdem wir den Punkt O gegenüber dem Punkt n

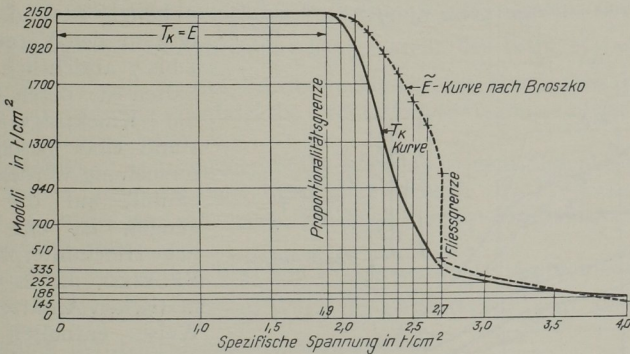


Abb. 45. Knickmoduli als Funktion der Spannung

anders annehmen, bekommen wir ganz verschiedene Knickwerte für ein und dieselbe Spannungsverteilung über dem Querschnitt (Abb. 44,1).

Dies steht aber im Widerspruch zur Grundlage der theoretischen Betrachtung. Nach der Knickformel von Broszko

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{\tilde{E}_{cr} \cdot J}{l_0^2}$$

ist die Knickkraft P_{cr} von

$$\tilde{E}_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\epsilon_{cr}},$$

also von der Sehne des Druck-Stauchungs-Diagrammes abhängig. Somit trägt der Wert von \tilde{E}_{cr} dem Verlauf des Druck-Stauchungs-Diagrammes an der ϵ_{cr} ent-

sprechenden Stelle in keiner Weise Rechnung (Abb. 44,2), was gleichfalls im Gegensatz zur eigenen Grundlage der BROZSKOSCHEN Theorie steht. Die Theorie von BROZKO ist daher unhaltbar.

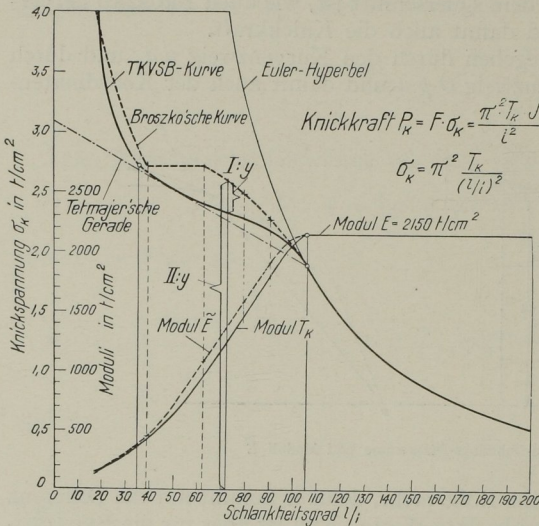


Abb. 46. Knickmoduli und Knickspannungen als Funktion des Schlankheitsgrades

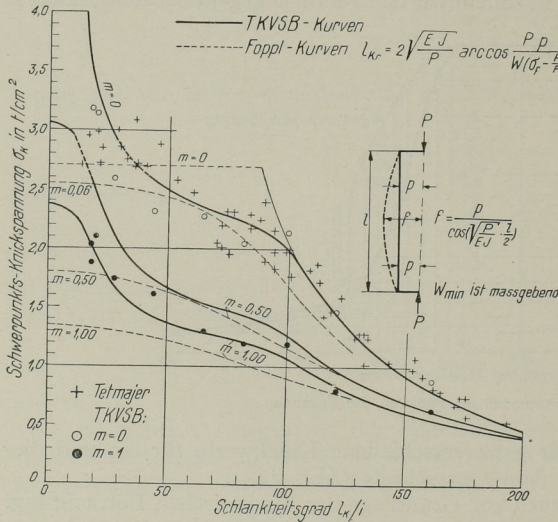


Abb. 47. Kurven nach A. FÖPPL für Exzentrizitätsmaße $m = 0, 0,06, 0,50, 1,00$ und TKVSB-Kurven für $m = 0, 0,50, 1,00$
Die angegebene Formel ist mit der HUBERSCHEN Formel 1)

$$\sigma_f \cdot F = P \left(1 + \frac{p \cdot F}{W} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{PE}} \right) \text{ identisch}$$

Wegen des Überwindens der Fließgrenze von Knickstäben schreibt Prof. BROZKO an Hand seiner Abb. 41, daß nach der KÁRMÁNSCHEN Theorie zentrisch gedrückte Stäbe bereits unter einer Achsiallast ausknicken müßten, die kleiner ist als $P = F \cdot \sigma_f$. Dieses Diagramm zeigt eben an der Fließgrenze den „Anlaß zur Labilität“, der viele Stäbe erliegen, wie Versuche lehren. Nach BROZKO aber wäre wegen des kontinuierlichen Charakters der \tilde{E} -Werte ein solcher Anlaß gar nicht vorhanden.

Die Berücksichtigung der Hysteresisschleife, deren Form insbesondere im Fließbereich sehr von der Geschwindigkeit der Belastung bzw. Entlastung abhängig ist und welche letztere in den Voraussetzungen 1 bis 7 absichtlich nicht enthalten ist, deren Einfluß auf die Knicktragkraft Gegenstand einer besonderen Untersuchung werden soll (Zeiteinfluß auf die Knickvorgänge), ist eine nachträgliche Hineininterpretation von BROZKO, die in den mathematischen Ansätzen in keiner Weise enthalten ist. Die physikalischen Ansätze der BROZKOSCHEN Ableitung sind genau dieselben wie die ENGESSER-KÁRMÁNSCHEN und die Nichtübereinstimmung mit KÁRMÁN beruht einzig auf dem angegebenen rein rechnerischen Fehler.

Die Ausgangsgleichung (1) (S. 338) der ENGESSER-V. KÁRMÁNSCHEN Theorie ist

nicht falsch, sie ist richtig. Die ENGESSER-V. KÁRMÁNSCHE Theorie für zentrisches Knicken ist nicht irrig, sie ist unter Beachtung der eingangs unter 1 bis 7 angeführten Voraussetzungen zutreffend, wie dies auch durch die Knickversuche von Göttingen

(1910), Berlin (1926) und Zürich (1926) ausgewiesen wurde. Alle Schlußfolgerungen, zu welchen Prof. BROZKO auf Grund seiner Knickungstheorie gelangt, sind prinzipiell unzutreffend, die Wertunterschiede der σ_k sind jedoch in den vorliegenden Fällen nicht sehr groß, weil die für einen bestimmten Bereich ganz bedeutenden Unterschiede der Werte der Knickmoduli (Abb. 45) sich in den Knickspannungen als Funktion von $\frac{l}{i}$ weit weniger auswirken (Abb. 46).

* * *

Das Knickproblem ist ein Stabilitätsproblem, nur so aufgefaßt wird es von einem einheitlichen Gedanken beherrscht. Die Einführung der Begriffe kritische Belastung — *Stabilitätsforderung* und gefährliche Belastung — *Festigkeitsforderung* dürfte, je nach der Einstellung zum Knickproblem, Vorteile für die Praxis mit sich bringen, jedoch auf Kosten der einheitlichen Grundlage über das Wesen des Knickens.

Der von Prof. Dr. M. T. HUBER gewünschte Vergleich zwischen den theoretischen Werten seiner Formel (1) bzw. (1a) für exzentrisch gedrückte Stäbe und den Ergebnissen von Zürich geht aus der Abb. 47 hervor. (Die FÖPPLSchen Kurven wurden schon im vorne erwähnten Bericht Nr. 13 der EMPA, Zürich 1926, angegeben.)

* * *

Zu dem Berechnungsverfahren von Prof. KAYSER, wie es ausführlicher in seiner Abhandlung „Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegezugfestigkeit“ dargelegt wird, ist zu bemerken:

Belasten wir mit einer Querkraft Q den Stab nur insoweit, daß nirgends die Proportionalitätsgrenze überschritten wird, so stellt der Wert $\frac{Q}{f_m}$ einen Festwert des Stabes dar und mit diesem Festwerte lassen sich Knickstäbe berechnen, bei denen die Knickspannung ebenfalls die Proportionalitätsgrenze nicht überschreitet, also nur sehr schlanke Stäbe.

Die Tragfähigkeit gedrungener Stäbe kann aber nach diesem Verfahren nicht berechnet werden, denn in dem Festwerte kommen die Proportionalitäts- und Fließgrenze gar nicht zum Ausdruck, die doch für die Tragfähigkeit gedrungener Stäbe maßgebend sind.

Belastet man aber mit Q über die Proportionalitätsgrenze hinaus, so hat der Ausdruck $\frac{Q}{f_m}$ einen ganz variablen Wert, der naturgemäß nicht als Grundlage für die Bestimmung der Knicktragkraft dienen kann.

* * *

Die scharfsinnigen Bemerkungen des Dr. Ing. E. CHWALLA verdienen volle Beachtung. Wir erlauben uns, zu denselben wie folgt uns zu äußern:

1. Zur Frage der Belastungs- und Entlastungszustände auf der Konvexseite eines zu knickenden Stabes wurde schon im Referate bemerkt, daß die Annahme des Entlastungsgesetzes zutrifft für den Fall des zentrischen Anwachsens der Knickkraft und nachträglichen Hinzutritts der Exzentrizität. Für das exzentrische Anwachsen der Last stellt dies eine Annäherung dar. (CHWALLA bezeichnet in seiner Schrift „Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl“, Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1928, den Fall des exzentrischen Anwachsens der Last mit Belastungsfall a, den des zentrischen Anwachsens mit nachträglichem Hinzutritt der Exzentrizität als Belastungsfall b.) Untersuchungen der

Spannungsbilder bei allmählich wachsender, exzentrischer Kraft, z. B. beim Fall Abb. 48, zeigen, daß aber auch hier zum Teil Entlastungszonen auftreten, so daß die restlose Annahme des Belastungsgesetzes ebenfalls nicht streng richtig ist.

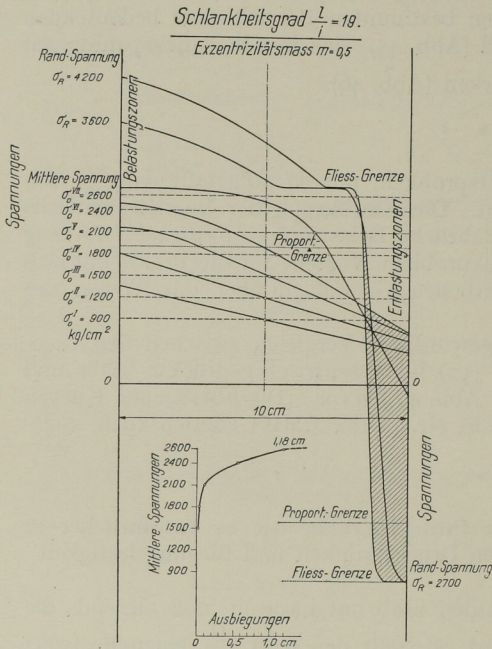


Abb. 48. Entwicklung der Spannungsbilder für exzentrisch wachsende Last

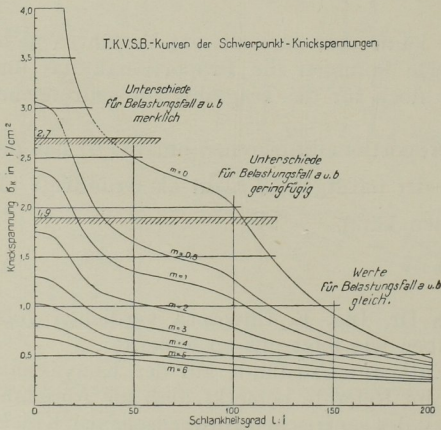


Abb. 49. Einfluß der Belastungsart

Die Unterschiede für die beiden Belastungsfälle sind in der Abb. 49 vermerkt; es ergeben sich:

Für Knickspannungen bis zur Proportionalitätsgrenze keine Unterschiede, bis zur Fließgrenze geringfügige Unterschiede und erst über der Fließgrenze merkliche Differenzen.

2. Bei der Ableitung der Knickkraft bei exzentrischem Angriff wurde nicht nur die Annahme ganzer Sinushalbwellen gemacht, sondern es wurde auch der Modul T für den ganzen Stab als von derselben Größe vorausgesetzt.

Nun wechselt aber der Modul T je nach dem Krümmungsradius des betreffenden Stabelementes, und zwar ist er in der Mitte am kleinsten und wird gegen die Enden hin größer. Dies bedingt gegenüber dem Sinuslinienabschnitt eine Kurve mit etwas gestreckteren Enden. Die ganze Sinuswelle hat nun diese Eigenschaft gegenüber dem Sinuswellenabschnitt, so daß sich diese beiden Näherungsannahmen gerade teilweise kompensieren.

In welcher Weise durch den Versuch der wirkliche Krümmungsradius der Stabmitte genauer berücksichtigt werden kann, ist im Referate durch die Gleichungen (17), (18) und (19) angegeben worden. Die Unterschiede der maßgebenden σ_k -Werte sind je nach Exzentrizitätsmaß m und Schlankheitsgrad $(\frac{l}{i})$ gegenüber den Werten von CHWALLA verschieden, aber wesentlich geringer als die entsprechenden Unterschiede der kritischen Schlankheiten. Beispielsweise entspricht einem Unterschied in der kritischen Schlankheit $(\frac{l}{i})_k$ von 40%, wie ihn Dr. Ing. CHWALLA anführt, ein solcher von $\approx 15\%$ in

bezug auf die Schwerpunkt-Knickspannungen, welche als Funktion von $(\frac{l}{i})$ dargestellt, gegenüber der $\frac{l}{i}$ -Achse einen flachen Verlauf aufweisen. Abb. 50 zeigt die noch geringeren Unterschiede der andern Werte.

Zum Vorschlag, als Exzentrizitätsmaß nicht die Kernweite, sondern den Trägheitsradius zu wählen, ist zu bemerken, daß dies für unsymmetrische Profile zu unzutreffenden Ergebnissen führen würde. Ein einfaches T-Profil z. B. ist für Exzentrizitäten nach der Seite des Steges oder nach der Seite des Flansches hin ganz verschieden empfindlich, was auch unsere Versuche bestätigen. (Siehe auch Referat von Prof. GRÜNING, Hannover, in vorliegender Schrift.) Der Trägheitsradius würde nach beiden Seiten hin gleichwertig messen, während die verschiedene Kernweite (verschränkt gemessen) ebenfalls verschiedene Empfindlichkeiten ergibt.

* * *

Den Ausführungen von Prof. MEMMLER stimmen wir bei. Den Versuchen von Zürich liegt das im Referat angegebene Druck-Stauchungs-Diagramm (Abb. 3) zugrunde. Zeigt das jeweilige Druck-Stauchungs-Diagramm einen wesentlich anderen Verlauf, so wird auch die Form der σ_k -Linien (Abb. 12) eine andere sein. Sieht man von einer besonderen Ableitung der σ_k -Linien für einen solchen abweichenden Fall ab, so gibt das unter Punkt 9 der „Zusammenfassung“ angegebene Näherungsverfahren für zentrisches Knicken praktisch recht zutreffende Ergebnisse.

Die Knickversuche von Zürich wurden mit sorgfältig ausgewählten, jedoch dem Handel entnommenen Stäben aus Baustahl vorgenommen.

* * *

Aus diesen Darlegungen geht hervor, daß die von ROß-BRUNNER abgeleiteten T. K. V. S. B.-Kurven der Knickspannungen σ_k für zentrisches und exzentrisches Knicken (Abb. 12) vom Standpunkte der Praxis aus recht brauchbare Werte darstellen. Sie wurden durch Versuche überprüft (Abb. 16).

Von den theoretischen Untersuchungen anderer Autoren (KÖCHLIN, FÖPPL, CHWALLA) weichen jene Werte in vermittelndem Sinne ab.

Die Untersuchungen von Zürich verfolgen in erster Linie den Zweck, das Wesen des Knickens klar hervorzuheben, das Knickproblem durch einen einheitlichen Gedanken zu erfassen und für die Konstruktionspraxis wichtige Fragen des Knickens durch Versuche grundsätzlich abzuklären.

Da, in Übereinstimmung mit Prof. GRÜNING, eine geschlossene mathematische Fassung des Knickproblems, einheitlich für alle Bereiche (elastischer, plastischer und Verfestigungsbereich) nicht möglich ist, legten wir größeren Wert auf grundsätzliche Abklärung als auf formelmäßige Genauigkeit, in voller Erkenntnis, daß nur die Ergebnisse sorgfältiger Versuche endgültigen Entscheid bringen können.

Die vorliegenden Ergebnisse beziehen sich nur auf eine allmähliche und nicht

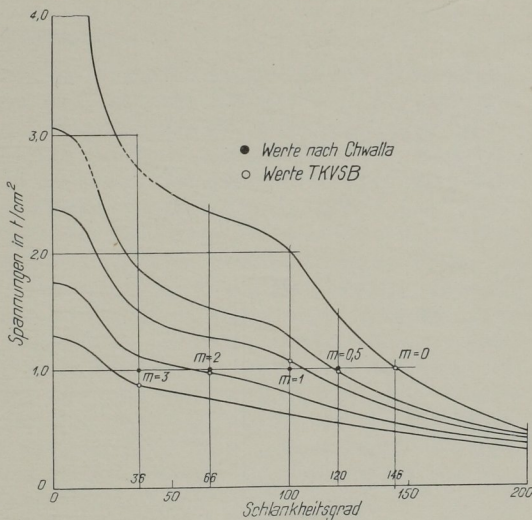


Abb. 50. Einfluß der Krümmungslinie

zu langsame Steigerung (Vermeidung des Zeiteinflusses) der äußeren Druckkraft P bis zur Knicklast $P_k = P_{cr}$, also auf statische Knickversuche.

Knickversuche unter dem Einflusse sehr langsamer und dauernd wirkender Belastungen (Zeiteinfluß), sowie von wiederholten Belastungen (Ermüdung) sind in Vorbereitung und werden den Gegenstand eines besonderen Berichtes bilden.

Ich danke verbindlichst allen Diskussionsrednern für die kritischen Betrachtungen und anregenden Äußerungen, die alle nur das gleiche Ziel zu erreichen suchen, nämlich eine Abklärung des für das Ingenieurwesen so wichtigen Knickproblems zu bringen. Eingehendes theoretisches Studium, sorgfältige Versuche, sachliche Kritik, gemeinsame Arbeit und Erfahrung sind die einzigen uns zur Verfügung stehenden Mittel, um uns dem so ersehnten Ziele, der Erkenntnis des Wahren, zu nähern.