

## B<sub>2</sub>

# Le flambage des poutres comprimées par des forces axiales et des forces excentrées

Par G. Pigeaud, Paris

*Préliminaires.* — Il ne sera question ici que de poutres droites supposées parfaites à tous les points de vue sauf un. Leur axe est supposé parfaitement rectiligne, leur section rigoureusement constante, leur matière parfaitement homogène, etc. Seule interviendra la considération d'une certaine excentricité de la force de compression  $F$ , dont la ligne d'action ne sera pas supposée en parfaite coïncidence avec l'axe.

Lorsque l'excentricité  $b$  a une valeur notable, déterminée par des conditions de construction (par exemple lorsque l'on admet des barres de treillis dissymétriques par rapport au plan moyen d'une ferme composée), la force excentrée  $F$  est équivalente à une force égale agissant suivant l'axe et à un couple complémentaire  $Fb$ . A la fatigue primaire  $\frac{F}{S}$  se superpose une fatigue secondaire due à la flexion provoquée par le couple, et dans les fibres extrêmes de la section cette fatigue secondaire est fréquemment prépondérante. Mais tant que les déplacements transversaux dûs à la flexion demeurent petits par rapport à l'excentricité  $b$ , les règles ordinaires de la Résistance des Matériaux peuvent à la rigueur suffire, les équations d'équilibre à faire intervenir pour l'étude de la pièce déformée pouvant être remplacées, avec un degré d'exactitude suffisant, par les équations similaires applicables à la pièce initiale, avant déformation.

Mais dans une construction très soignée, ou mieux encore dans des expériences de laboratoire, on s'efforce de réduire l'excentricité à d'aussi faibles valeurs que possible. Elle est alors du même ordre de grandeur que les déplacements transversaux. Il faut donc écrire les équations complètes en tenant compte de ces déplacements possibles.

Ce que l'on appelle force axiale, ou rigoureusement centrée, n'est d'ailleurs qu'une force dont l'excentricité est devenue suffisamment petite pour n'être pas décelable par une observation directe. Cette excentricité, si petite qu'elle soit, doit toujours être considérée comme existante et comme constituant, dans chaque cas concret et expérimental, un paramètre qui demeure déterminé et fixe, alors que d'autres quantités, comme l'intensité de la force appliquée, sont regardées comme des variables, au sens mathématique du mot, et restent à la disposition de l'expérimentateur.

Dans le présent travail on supposera d'abord une barre libre à ses deux extrémités, qui serait formée d'une matière hypothétique se comportant élastiquement jusqu'à sa rupture et on y appliquera les principes de l'analyse d'EULER. Puis on confrontera les résultats de cette analyse avec les résultats d'expériences et on

passera en revue quelques unes des formules de correction qui ont été proposées pour passer des premiers résultats aux seconds, et pour tenir compte en somme du domaine de semi-plasticité, qui succède généralement, pour les matériaux métalliques, tout au moins, au domaine d'élasticité presque parfaite.

On fera ensuite une application de l'analyse aux barres qui sont partiellement encastées à leurs extrémités et qui se rapprochent davantage des conditions ordinaires des constructions. On ne pourra certes jamais connaître d'une manière certaine le degré d'encastement obtenu dans un cas concret, mais l'établissement d'une théorie générale facilite l'accord à réaliser sur des appréciations raisonnables.

Enfin on dira quelques mots de la recherche des charges critiques pour des pièces comprimées et entourées d'un milieu élastique dans les deux cas simples d'extrémités libres, ou parfaitement encastées.

*Chapitre I. Pièces parfaitement élastiques jusqu'à rupture*

Représentons schématiquement la barre comprimée par sa section longitudinale  $AA'BB'$ , correspondant à un plan moyen, ou de symétrie (Fig. 1).

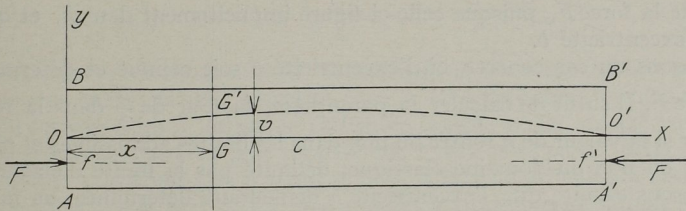


Fig. 1

Appelons  $l$  sa longueur  $oo'$ ,  $S$  l'aire de sa section transversale,  $I$  son moment d'inertie,  $r^2$  son rayon de giration,  $h$  la distance à l'axe de la fibre extrême la plus comprimée.

Soit d'autre part  $ff'$  la ligne d'action des forces appliquées  $F$ , située à une distance  $of = b$  au-dessous de l'axe  $oo'$ , dont les extrémités sont supposées maintenues sur  $ox$ .

L'analyse d'EULER peut s'exposer rapidement de la manière suivante. Sous l'action du couple  $-Fc$  la pièce fléchit et un point  $G$  de son axe, situé à l'abscisse  $x$  à compter du point  $o$ , subit un déplacement transversal  $v(x)$ . Le moment fléchissant dans la section correspondante est  $M(x) = -F(b + v)$ . Par suite la fonction  $v$  doit satisfaire à l'équation différentielle bien connue:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{F}{EI} (b + v).$$

Posant pour simplifier  $k^2 = \frac{F}{EI}$  elle s'écrit:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v + k^2 b = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Compte tenu de la symétrie nécessaire par rapport au milieu de la barre, son intégrale générale se présente sous la forme:

$$v = A \cos k \left( x - \frac{l}{2} \right) - b$$

et la condition  $v = 0$  pour  $x = 0$  s'exprime pour la relation:

$$A = \frac{b}{\cos \frac{k l}{2}}$$

Finalement on trouve les formules suivantes:

$$v = b \left[ \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$M(x) = -F(b + v) = -Fb \frac{\cos k \left( x - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} \dots\dots\dots (3)$$

La fatigue  $n$  dans la fibre extrême la plus comprimée atteint sa valeur maximum dans la section médiane et cette valeur est

$$n = \frac{F}{S} \left[ 1 + \frac{bh}{r^2 \cos \frac{kl}{2}} \right] \dots\dots\dots (4)$$

La fatigue primaire  $\frac{F}{S}$  se trouve multipliée par un facteur, qui dépend de la grandeur de la force  $F$ , puisque celle-ci figure implicitement dans  $k$ , et qui dépend aussi de l'excentricité  $b$ .

Supposons un cas concret, où l'excentricité  $b$  soit connue et déterminée, ainsi que la force  $F$ . Il suffit de calculer la parenthèse, facteur de  $\frac{F}{S}$  dans la relation (4) pour savoir si la valeur de  $n$  rentre ou non dans les limites admissibles et notamment si elle sort ou non du domaine élastique, délimité par la limite d'élasticité  $N$ .

Supposons ensuite que, l'excentricité  $b$  demeurant déterminée, on fasse croître  $F$  à partir de zéro et suivons les valeurs successives prises par la parenthèse.

Elle part de la valeur  $1 + \frac{bh}{r^2}$ , pour  $F = 0$ , ou  $k = 0$  et va en croissant d'abord lentement, puis plus vite, et atteint de très grandes valeurs lorsque la valeur de  $\frac{kl}{2}$  se rapproche de  $\frac{\pi}{2}$ . Elle tend vers l'infini lorsque  $\frac{kl}{2}$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , ou, autrement dit, lorsque la force  $F$  tend vers la valeur:

$$F = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{S} = \pi^2 E \frac{r^2}{l^2}.$$

Ce sont là les valeurs critiques d'EULER, se rapportant l'une à la force de compression, l'autre à la fatigue primaire de compression.

Ce qu'elles offrent de remarquable c'est d'abord qu'on ne saurait les atteindre sans avoir auparavant mis la pièce dans une situation dangereuse, la valeur de la fatigue  $n$  étant devenue forcément supérieure à la limite de rupture  $R$  (que théoriquement nous supposons coïncider ici avec la limite d'élasticité  $N$ ).

Ensuite, ce sont des limites qui ne dépendent pas de l'excentricité  $b$ , mais seulement des dimensions de la pièce, le seul paramètre effectif étant d'ailleurs le rapport  $\frac{r^2}{l^2}$ , en ce qui concerne la fatigue primaire.

Cela ne veut pas dire évidemment que l'excentricité  $b$  ne jouera aucun rôle dans la rupture de la pièce et ne contribuera pas à la déterminer, ou à la hâter. Cela veut dire simplement que si petite que soit  $b$ , qu'elle soit mesurable, ou qu'elle soit d'un ordre de petitesse comparable aux erreurs de mesure, la rupture ne peut manquer de survenir avant que la force de compression ait atteint la valeur critique.

Au surplus il est très intéressant de suivre par des exemples le mécanisme des augmentations de fatigue qui se produiraient dans une pièce comprimée, lorsque sa

fatigue primaire va en croissant, et de mettre en évidence l'influence de l'excentricité  $b$ .

Supposons que l'on ait  $\frac{\gamma^2}{I^2} = 10^{-4}$ , et que l'excentricité prenne dans trois pièces identiques des valeurs telles que  $\frac{bh}{\gamma^2}$  ait les valeurs 0,1 — 0,05 — 0,01 respectivement. On dressera aisément le tableau suivant, la limite d'EULER étant  $19^k,7$  par  $\text{mm}^2$ .

Fatigue primaire	Fatigue maxima 1 <sup>re</sup> pièce	Fatigue maxima 2 <sup>me</sup> pièce	Fatigue maxima 3 <sup>me</sup> pièce
$10^k$	$12,2^k$	$11,1^k$	$10,2^k$
$12^k$	$15,2^k$	$13,6^k$	$12,3^k$
$15^k$	$21,8^k$	$18,4^k$	$15,7^k$
$18^k$	$38,8^k$	$28,2^k$	$20,1^k$
$19^k$	$60,0^k$	$39,5^k$	$23,1^k$
$19,7^k$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Les majorations de fatigue sont naturellement d'autant moins accusées au début, pour une même fatigue primaire, que  $b$  est plus petit et le moment de la rupture, qui correspondra à un même chiffre de fatigue réelle, de  $44^k$  par  $\text{mm}^2$  par exemple, se trouvera d'autant plus retardé que  $b$  sera plus petit. Mais ce moment arrivera toujours avant que l'on n'atteigne pour la fatigue primaire la limite critique d'EULER, de sorte que la période des très grandes majorations de fatigue se trouvera d'autant plus brusque et d'autant plus resserrée au voisinage de cette limite critique que la force agissante sera plus parfaitement centrée. Pour une pièce *parfaitement* centrée, non pas au sens mathématique, mais au sens expérimental de ce mot, le phénomène deviendra extrêmement brusque et c'est en cela que consiste essentiellement ce que l'on peut appeler le « flambage » des pièces comprimées parfaites.

Ainsi, en se bornant maintenant aux pièces *présumées parfaites*, il y a pour la fatigue primaire  $\frac{F}{S}$  deux valeurs dangereuses, qui l'une et l'autre ne peuvent être atteintes sans entraîner la rupture. L'une est la limite de rupture  $R$  telle qu'elle est connue expérimentalement d'après des essais sur barres courtes; l'autre est la limite critique d'EULER. Si l'on désigne par  $\varepsilon$  un coefficient de sécurité convenable,  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{3}$  par exemple, il est logique de dire que la fatigue primaire doit satisfaire à la fois aux deux conditions suivantes, également impératives:

$$\frac{F}{S} \leq \varepsilon R \text{ et } \frac{F}{S} \leq \varepsilon \pi^2 E \frac{\gamma^2}{I^2}.$$

Si dans un plan on construit un diagramme, relatif à une pièce comprimée parfaite, en portant en abscisse la rapport  $X = \frac{\gamma^2}{I^2}$  et en ordonnée  $Y = \frac{F}{S}$ , le point figuratif  $M$  devra, pour que la pièce ne se rompe pas inévitablement, se tenir d'une part au-dessous de l'horizontale  $RR'$ , d'ordonnée égale à  $R$  et d'autre part au-dessous de la droite  $OE'$ , d'équation  $Y = \pi^2 EX$ , qui représente la limite d'EULER. Ces deux droites se rencontrent en un point  $E$ , dont l'abscisse est  $oe = \frac{R}{\pi^2 E}$ .

Si la pièce considérée est telle que  $X = \frac{\gamma^2}{I^2} = \overline{om} > \overline{oe}$ , lorsqu'on la soumettra à des charges croissantes, son point figuratif  $M$  rencontrera la droite  $RR'$  en  $r$  avant

de rencontrer la droite  $OE$ . C'est alors la résistance  $R$  de la matière qui constituera la limite admissible pour  $\frac{F}{S}$  avant rupture. Ce serait le cas des pièces relativement courtes.

Si au contraire on avait  $X = \frac{r^2}{f^2} = \overline{om}' < \overline{oe}$ , c'est la limite d'EULER qui deviendrait la vraie limite de rupture. Ce serait le cas des pièces relativement longues.

Quant à l'abscisse  $\overline{oe}$  qui sépare les deux catégories elle dépend du matériau envisagé. Si l'on suppose que celui-ci soit de l'acier courant tel que  $R = 44^k \times 10^6$  et que  $E = 2 \times 10^{10}$ , on a  $\overline{oe} = \frac{R}{\pi^2 E} = 0,000,223$ , ce qui correspond à  $\frac{r}{l} = \frac{1}{67}$  environ. C'est donc seulement pour les pièces telles que  $\frac{l}{r} > 67$  que la limite d'EULER aurait à intervenir.

## Chapitre II. — Pièces réelles ou imparfaitement élastiques. Résultats d'expériences. Formules pratiques

Assurément l'analyse d'EULER, telle qu'elle a été développée ci-dessus, prête à certaines critiques pour les pièces comprimées parfaitement centrées, car elle suppose que l'on ne sorte pas du domaine des faits élastiques. Pour les corps naturels et non plus théoriques, elle appelle des réserves évidentes dès que la formale de la flexion cesse d'être elle-même rigoureuse et surtout dès que certaines fibres de la

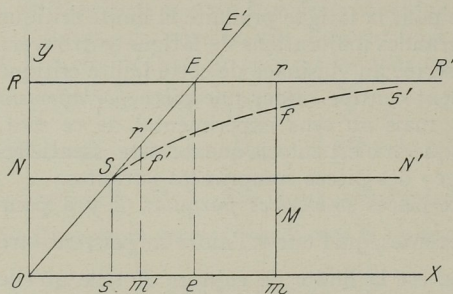


Fig. 2

pièce sont comprimées au delà de la limite élastique  $N$  (Fig. 2). La fatigue limite d'EULER ne peut donc être considérée que comme un maximum théorique et il faut s'attendre à ce qu'en pratique la rupture se produise non pas pour les points tels que  $r$  ou  $r'$  du diagramme ci-dessus, mais se produise prématurément pour des points tels que  $f$  ou  $f'$ . C'est ce que l'expérience a mis en évidence.

Parmi les expérimentateurs qui se sont occupés de la question, on doit citer HODGKINSON en Angleterre, BAUSCHINGER et TETMAYER en Allemagne; mais je crois qu'une attention particulière doit être réservée aux expériences de CONSIDÈRE en France, en raison des précautions minutieuses que ce dernier avait prises pour réaliser des barres aussi parfaites que possible au point de vue du centrage des charges agissantes. Des couteaux disposés à angle droit définissaient exactement leur ligne d'action et d'ailleurs le centrage était reconnu aussi exact que possible par des expériences préliminaires, dans lesquelles on constatait qu'aucune flexion, ni aucun déplacement transversal observable ne se produisait même pour d'assez fortes valeurs de la charge. La précision avec laquelle CONSIDÈRE pouvait mesurer les déplacements transversaux était de l'ordre du quart de micron. C'est dire qu'il avait affaire à des forces parfaitement centrées au sens expérimental du mot.

Il a en premier lieu mis en évidence la grande brusquerie du phénomène de flambage des pièces éprouvées. Quand la charge augmentait progressivement on restait longtemps sans observer la moindre flèche, puis brusquement on constatait presque simultanément une première flèche perceptible, commencement d'une flexion observable, et l'effondrement en grand de la pièce.

En second lieu, pour différentes pièces faites avec un même métal, mais classées

d'après la valeur du paramètre  $X = \frac{\gamma^2}{l^2}$ , CONSIDÈRE a donné des mesures de la fatigue primaire  $Y = \overline{mf}$  sous laquelle s'opèrait la rupture et il a trouvé des résultats qu'on peut interpréter ainsi qu'il suit, en se référant au diagramme ci-dessus.

1° Tant qu'il s'agit d'une pièce relativement longue, telle que  $\overline{om} = \frac{\gamma^2}{l^2}$  soit inférieur à une certaine valeur, plus petite que  $\overline{oe}$ , et très voisine de la valeur  $\overline{os} = \frac{N}{\pi^2 E}$  ( $N$  étant la limite d'élasticité du métal), le point  $f$  se place très exactement, c'est à dire au degré d'approximation des expériences, sur la droite d'EULER  $O E'$ .

2° Lorsque  $\overline{om} = \frac{\gamma^2}{l^2}$  est supérieur à  $\overline{os}$ , la courbe décrite par les points  $f$ , affecte la forme indiquée en  $S f S'$ . Elle serait concave vers le bas et située au-dessous du contour polygonal  $S E R'$ . Elle se raccorderait plus ou moins loin avec  $R R'$  (cas des pièces très courtes).

Il ne peut être question bien entendu que de l'allure générale de la courbe, qui ne représente elle-même qu'une distribution moyenne des points  $f$  obtenus expérimentalement.

Ces résultats semblent confirmer la théorie, compte tenu des réserves qu'il convenait de faire dès que l'on sort du domaine élastique et en même temps ils fournissent une base précieuse pour l'appréciation des corrections nécessaires dans le domaine non élastique (au delà du point marqué  $S$ ) quand la fatigue primaire peut dépasser  $N$ .

Voici un résumé succinct des principales propositions qui ont été faites ou qui peuvent l'être pour corriger le contour brisé théorique  $O E R'$ , en tenant compte des résultats d'expériences et en observant les règles de la prudence.

CONSIDÈRE et presque simultanément TETMAYER, envisageant non pas la courbe  $S f S'$  elle-même, mais sa transformée par le changement de  $X$  en  $\frac{1}{X}$ , ont proposé de remplacer l'arc le plus utile de cette courbe transformée, et expérimentalement définie pour divers matériaux, par une simple droite épousant du mieux possible la dite courbe transformée au voisinage du point transformé de  $S$ . Dans le système de coordonnées employé ici cette droite correspondrait à une hyperbole dont l'équation serait de la forme :

$$Y = A + \frac{B}{X}$$

Les coefficients  $A$  et  $B$ , définis comme on vient de le dire, n'assurent pas à cette hyperbole, comme asymptote horizontale, la droite  $R R'$ , ainsi que cela paraîtrait désirable.

On pourrait évidemment faire quelque chose d'analogue sur les courbes  $S f S'$  tracées dans le système de coordonnées actuel. Par exemple on pourrait remplacer une courbe  $S f S'$  par un élément de droite aboutissant à un point tel que  $r$ , convenablement choisi à droite de  $E$ , et le faire suivre par la droite  $R R'$ . On pourrait encore remplacer l'élément de droite intermédiaire, entre  $S$  et  $r$ , par une courbe du second degré se raccordant avec  $R R'$ .

Une autre forme de courbe ultra-prudente pourrait consister à substituer au contour mixtiligne entier  $O S f S'$  l'hyperbole du second degré tangente à  $O E'$  au point  $o$ , et se raccordant asymptotiquement avec  $R R'$ . Son équation serait :

$$Y = R \frac{1}{1 + \frac{R}{\pi^2 E X}} = R \frac{1}{1 + \frac{R}{\pi^2 E} \frac{1}{\gamma^2}}$$

Mais jamais personne n'est allé jusque là.

Toutefois c'est à une hyperbole de même famille que se rattache la formule dite de NAVIER, ou de Rankine. Cette formule est identique à la précédente sauf qu'au dénominateur on remplace  $R$  par la quantité plus petite  $N$ . Elle s'écrit comme on sait :

$$Y = R \frac{1}{1 + \frac{N}{\pi^2 E X}} = R \frac{1}{1 + \frac{N}{\pi^2 E} \frac{l^2}{r^2}}$$

Pour  $X = \overline{os} = \frac{N}{\pi^2 E}$  elle donne  $Y = \frac{R}{2}$ . Le point correspondant s'écarte plus ou moins du point  $S$ . Cependant il s'en rapproche beaucoup lorsque la limite d'élasticité  $N$  est voisine de  $\frac{R}{2}$ , et c'est le cas des aciers de construction les plus courants.

Une autre hyperbole de même famille, qui aurait comme la précédente l'inconvénient de couper la droite d'EULER  $O E'$ , mais qui aurait l'avantage de passer par le point  $S$ , s'obtiendrait en remplaçant  $N$  par  $R - N$  dans la formule de RANKINE. Son équation serait :

$$Y = R \frac{1}{1 + \frac{R-N}{\pi^2 E X}} = R \frac{1}{1 + \frac{R-N}{\pi^2 E} \frac{l^2}{r^2}}$$

Elle permettrait alors de conserver à gauche du point  $S$  le segment  $OS$  de la droite d'EULER et on pourrait limiter son utilisation pour remplacer seulement la courbe  $S f S'$  à droite de  $S$ . Son emploi, ainsi limité, cadrerait aussi bien que possible avec l'ensemble des résultats expérimentaux.

Il convient d'ajouter que cette formule se déduirait logiquement de la formule d'EULER, si l'on admettait que le coefficient d'élasticité qui y figure n'est constant que sous la condition  $\frac{F}{S} \leq N$  et qu'au delà il doit être remplacé par un coefficient

$E'$  variable avec  $\frac{F}{S}$  et représenté par la relation  $E' = E \frac{R - \frac{F}{S}}{R - N}$ , laquelle est assez rationnelle puisqu'elle donne  $E' = E$  pour  $\frac{F}{S} = N$  et qu'elle donne  $E' = 0$  pour  $\frac{F}{S} = R$ .

Il serait, semble-t-il, équitable d'attacher à cette formule le nom de M. VIERENDEEL, professeur à l'Université de Louvain.

### Chapitre III. — Pièces partiellement encastrées à leurs extrémités

Les résultats qui précèdent supposent que les pièces comprimées sont libres de prendre à leurs extrémités les déformations angulaires correspondant aux moments de flexion qu'elles subissent. Mais la plupart du temps dans les constructions métalliques il n'en est pas ainsi. La pièce à considérer est généralement solidaire des autres pièces qui lui transmettent les charges et leur est attachée d'une manière rigide, de sorte que ses déformations angulaires sont limitées par celles que peuvent prendre élastiquement ces autres pièces d'après leur constitution propre. Il est nécessaire dans ce cas de prendre en considération les couples de réaction qui s'exercent entre elles.

Ces couples seront proportionnels à la charge  $F$  et on peut, tant que l'on ne sort pas du domaine élastique, tout au moins, les représenter par une expression de la forme  $F \cdot c$ ;  $c$  désignant une constante, représentant un bras de levier, qui est une inconnue du problème.

D'autre part on peut imaginer que l'on ait fait une étude préalable de la pièce élastique qui transmet la charge et que l'on ait déterminé un coefficient  $\lambda$  tel que l'on ait la relation

$$Fc = \lambda \left( \frac{dv}{dx} \right)_0 \quad (\lambda > 0)$$

laquelle établit la proportionnalité entre le couple  $Fc$  et la déformation angulaire  $\left( \frac{dv}{dx} \right)_0$  commune aux deux pièces, à l'extrémité qui est choisie comme origine. Cette relation devient une nouvelle condition du problème.

Prenons d'abord le cas d'une pièce comprimée par une force  $F$  ayant une excentricité connue et déterminée  $b$ . En reprenant l'analyse du chapitre I, on aura à l'abscisse  $x$  un moment fléchissant de la forme:

$$M(x) = -F(b + v) + Fc = -F(v + b - c)$$

de sorte que, en posant toujours  $k^2 = \frac{F}{EI}$ , l'équation différentielle de flexion s'écrira

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v + k^2(b - c) = 0$$

En tenant compte de la symétrie par rapport au milieu de la pièce, son intégrale générale sera de la forme:

$$v = A \cos k \left( x - \frac{l}{2} \right) - (b - c)$$

On a cette fois deux constantes à déterminer  $A$  et  $c$ . Pour les déterminer on aura recours aux deux conditions suivantes:

1° Pour  $x = 0$ , on a  $v = 0$  d'où

$$A \cos \frac{kl}{2} + c = b.$$

2° Pour  $x = 0$  on doit avoir  $\frac{dv}{dx} = \left( \frac{dv}{dx} \right)_0 = \frac{Fc}{\lambda}$  ce qui donne:

$$A k \sin \frac{kl}{2} = \frac{Fc}{\lambda}.$$

On en déduit facilement:

$$A = \frac{b}{\cos \frac{kl}{2} + \frac{\lambda k}{F} \sin \frac{kl}{2}}.$$

Le maximum de  $M(x)$  a lieu évidemment au milieu de la pièce et a pour valeur:

$$M(\max) = -F(v + b - c)_{\frac{l}{2}} = -FA = -\frac{Fb}{\cos \frac{kl}{2} + \frac{\lambda k}{F} \sin \frac{kl}{2}}.$$

Posons  $\delta = \frac{\lambda k}{2EI}$ , nous aurons  $\frac{\lambda k}{F} = \frac{\lambda k}{EI k^2} = \delta \times \frac{1}{\frac{kl}{2}}$

et par suite:

$$M(\max) = \frac{-Fb}{\cos \frac{kl}{2} + \delta \frac{kl}{2}} = \frac{-Fb}{\cos u + \delta \frac{\sin u}{u}} \dots \dots \dots (5)$$

en posant pour abrégé  $u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}$ .



La quantité représentée par  $\delta$  ne dépend que des formes et des dimensions des pièces assemblées. Elle doit être considérée comme connue. La charge  $F$  figure implicitement dans  $u$ .

Dans un cas concret donné cette expression de  $M$  (max) serait donc calculable et on en pourrait déduire la fatigue  $n$  de la fibre la plus comprimée.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque,  $b$  demeurant déterminé, on fait croître  $F$  à partir de zéro et par suite aussi  $u$ . Le dénominateur va constamment en décroissant. Il part de la valeur  $1 + \delta$  pour  $u = 0$ , il passe par la valeur  $\frac{2\delta}{\pi}$  pour  $u = \frac{\pi}{2}$ , et enfin il s'annule pour une valeur de  $u$ , comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , et satisfaisant à la relation :

$$\frac{u}{\operatorname{tg} u} = -\delta$$

C'est à cette valeur de  $u$  que correspondrait la charge critique de la pièce considérée.

Les cas particuliers suivants sont spécialement intéressants.

1<sup>o</sup> Cas extrême où l'on aurait  $\delta = 0$ . — Cela suppose aussi  $\lambda = 0$ . On a affaire à une pièce articulée et on retombe sur le cas déjà étudié. La charge critique correspond à  $u = \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

2<sup>o</sup> Second cas extrême où l'on aurait  $\delta = \infty$ . — Cela suppose aussi  $\lambda = \infty$ . On a alors affaire à une pièce dite parfaitement encastree. La charge critique correspondrait à  $u = \frac{kl}{2} = \pi$ . Elle aurait pour expression  $F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ .

3<sup>o</sup> Supposons que  $\delta = \frac{3\pi}{4}$ , ou  $\lambda = \frac{3\pi}{2} \times \frac{EI}{l}$ , la charge critique correspondra à la valeur  $u = \frac{3\pi}{4}$ , car alors  $\operatorname{tg} u = -1$ . Elle aura pour expression  $F = \frac{9}{4} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  soit approximativement :  $F = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$ .

On pourra conventionnellement dire que l'on a affaire à un demi-encastrement.

Partant de là on pourrait développer pour les deux derniers cas et pour tous autres que l'on voudrait, des considérations analogues à celles qui ont été exposées pour le premier et notamment construire des formules pratiques analogues à celles de RANKINE ou de M. VIERENDEEL pour corriger les valeurs théoriques des charges critiques correspondantes, ce qui résoudrait le problème des pièces dites parfaitement centrées.

En se limitant au cas des pièces de construction courante il est fort intéressant de voir que pour une excentricité  $b$  donnée (treillis dissymétrique) la loi de croissance de  $M$  (max), exprimée par la relation (5) sera d'autant moins rapide que la quantité  $\delta$ , exprimant en définitive le degré d'encastrement de la pièce, sera plus grande. Le domaine, non dangereux, dans lequel  $F$  peut varier sans entraîner des fatigues inadmissibles, supérieures à  $N$  par exemple, croîtra avec  $\delta$ .

Supposons en particulier que  $\delta$  soit, non pas infini au sens mathématique, ce qui ne correspondrait pas à des conditions concrètes, mais simplement très grand, ce qui correspond à un encastrement pratiquement excellent. Tant que  $u = \frac{kl}{2}$  demeure sensiblement inférieur à la valeur particulière qui annule le dénominateur de (5) et qui est alors très voisine de  $\pi$ ,  $\cos u$  et  $\frac{\sin u}{u}$  sont des quantités finies et le

dénominateur  $\cos u + \delta \frac{\sin u}{u}$  exprime une quantité très grande, de sorte de  $M$  (max) demeure petit quel que soit le numérateur  $F b$ . Il n'y en aura pas moins une valeur critique pour  $F$ , mais c'est seulement à son voisinage le plus immédiat qu'il y aura des fatigues secondaires importantes et méritant considération. Autrement dit, pour une pièce parfaitement encastrée, au sens pratique du mot, il n'y aurait pas lieu de s'occuper de la fatigue secondaire due à une excentricité plus on moins grande de l'effort. Il suffirait que l'on vérifiât, comme pour une pièce bien centrée, que la charge réelle  $F$ , ou la fatigue unitaire  $\frac{F}{S}$ , sont inférieurs à une certaine fraction  $\left(\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{4}\right)$  des limites critiques, lesquelles sont dans ce cas  $F = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$ , ou  $\frac{F}{S} = 4\pi^2 E \frac{r^2}{l^2}$  respectivement.

Il y a donc un très grand intérêt, lorsque dans une construction on est conduit à admettre des pièces mal centrées, ou tout à fait dissymétriques, à prendre des dispositions de nature à les encastrer le plus parfaitement possible à leurs extrémités, c'est à dire à les relier rigidement aux pièces qui leur transmettent les charges et à rendre ces dernières aussi peu déformables que possible.

Lorsque l'on ne peut atteindre qu'imparfaitement ce résultat, ce sera toujours une affaire d'appréciation que de déterminer la valeur de  $\delta$  qui convient à un assemblage donné. Dans bien des cas il sera possible, sans imprudence, de compter sur un demi-encastrement, dans le sens du 3<sup>o</sup> ci-dessus, c'est à dire d'adopter la valeur  $\delta = \frac{3\pi}{h} = 2,35$  environ.

C'est dans cet esprit qu'a été rédigé l'article 8 des commentaires explicatifs du nouveau règlement français, du 10 mai 1927, sur les ponts métalliques, qui donne d'ailleurs des règles analogues pour ce qui concerne les fatigues secondaires des pièces tendues excentrées.

*Chapitre IV. — Pièces comprimées dans un milieu élastique*

Ce problème, bien qu'il apparaisse comme purement théorique, mérite une mention spéciale, car il fournit des indications intéressantes au sujet des charges critiques relatives aux membrures comprimées des poutres composées ou aux arcs lorsqu'ils comportent des liaisons élastiques limitant leurs déplacements latéraux.

La place étant ici limitée, l'auteur renvoie pour les détails au travail qu'il a publié en 1924 dans les Annales des Ponts et Chaussées. Les conclusions essentielles sont les suivantes.

La réaction élastique sur un élément de longueur  $dx$  étant supposée de la forme  $\epsilon v dx$ ,  $v$  étant le déplacement transversal du point d'abscisse  $x$  et  $\epsilon$  étant une constante, l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction  $v(x)$  pour une pièce parfaitement centrée est :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} + \epsilon v = 0 \dots\dots\dots (6)$$

C'est une équation différentielle à coefficients constants qui a pour équation adjointe, ou caractéristique, lorsqu'on l'intègre en sinus et cosinus :

$$EIS^4 - FS^2 + \epsilon = 0 \dots\dots\dots (7)$$

Celle-ci a deux racines réelles et positives  $k^2$  et  $k'^2$  si l'on a  $F > 2\sqrt{EI\epsilon}$ . Si l'on reste dans ce domaine, et si les conditions aux extrémités consistent dans la nullité de  $v$  et de quelqu'une de ses dérivées, on peut trouver les relations, transcendantes, auxquelles  $k$  ou  $k'$ , on ces deux quantités à la fois, doivent satisfaire

pour que l'on puisse obtenir une solution de l'équation (6) *non identiquement nulle*. A un groupe de semblables valeurs correspondra une valeur particulière  $f$  de la force  $F$ , qui constituera une valeur critique. Pratiquement, c'est la plus petite de ces valeurs critiques (généralement en nombre infini) qui importera seule.

Ajoutons immédiatement que si l'on sort du domaine réel, c'est à dire si  $F < 2\sqrt{EI\varepsilon}$ , il ne peut y avoir de solution, ce qui peut s'interpréter directement en disant que toute valeur critique satisfait à la condition générale

$$f \geq 2\sqrt{EI\varepsilon}.$$

Revenant au domaine réel, un groupe quelconque de valeurs  $k$  et  $k'$  correspondant à une valeur critique, ne cessera pas de satisfaire aux deux relations tirées de (7) savoir:

$$k^2 k'^2 = \frac{\varepsilon}{EI} \dots\dots\dots (8)$$

$$k^2 + k'^2 = \frac{F}{EI} \dots\dots\dots (9)$$

La première ne dépend que des dimensions de la pièce et s'adjoint à l'équation transcendante dont il est parlé plus haut.

Quant à la seconde elle fournit la relation qui lie la valeur critique au groupe  $k$  et  $k'$ . On peut l'écrire

$$f = EI(k^2 + k'^2) = 2\sqrt{EI\varepsilon} + EI(k - k')^2 \dots\dots\dots (9)'$$

Elle montre à nouveau que la plus petite valeur critique est égale ou supérieure à  $2\sqrt{EI\varepsilon}$ . Elle montre en outre que cette plus petite valeur critique correspond toujours au groupe de valeurs  $k$  et  $k'$  qui rend minimum la différence  $k - k'$ . Parmi tous les groupes possibles on devra donc choisir celui qui donne pour  $k$ , ou  $k'$ , et même pour les deux, la valeur la plus voisine de leur moyenne géométrique, laquelle,

en vertu de (8) est constante et connue et égale à  $\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}}$ .

Voici maintenant quelques résultats plus particuliers.

1° *Poutre libre à ses deux extrémités*. — L'équation transcendante à laquelle doit satisfaire soit  $k$ , soit  $k'$  est:

$$\sin kl = 0 \text{ ou } kl = m\pi \text{ (} m \text{ entier non nul).}$$

Toute charge critique est donc de la forme:

$$f = EI \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{l^2 \varepsilon}{m^2 \pi^2} \dots\dots\dots (9)$$

ou de la forme:

$$f = 2\sqrt{EI\varepsilon} + EI \left[ \frac{m\pi}{l} - \frac{l}{m\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{EI}} \right]^2 \dots\dots\dots (9)'$$

La plus petite d'entre elles s'obtiendra en cherchant le nombre entier  $m$  le plus voisin de  $\frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}}$ .

On peut construire un diagramme représentatif de la plus petite valeur critique. Si on porte en abscisses les valeurs de  $\varepsilon$  et en ordonnées les valeurs de  $f$  données par l'équation (9) et correspondant à une valeur fixe du nombre  $m$ , on obtient une droite. L'ensemble des droites correspondant aux différentes valeurs de  $m$  a pour enveloppe la parabole du second degré dont l'équation, facile à trouver, est:

$$f = 2\sqrt{EI\varepsilon}.$$

Les abscisses des points de contact rentrent dans la formule:

$$\frac{\varepsilon}{EI} = \frac{m^4 \pi^4}{l^4}$$

ce qui est évident d'après (9)'. .

2° *Poutre encastrée à ses deux extrémités.* — Cette fois les équations transcendantes auxquelles doivent satisfaire  $k$  et  $k'$  renferment ces deux quantités à la fois. Il faut que l'on ait:

soit 
$$k \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - k' \operatorname{tg} \frac{k'l}{2} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

soit 
$$k \operatorname{cotg} \frac{kl}{2} - k' \operatorname{cotg} \frac{k'l}{2} = 0 \dots\dots\dots (10)'$$

On peut en considérant soit l'une soit l'autre construire des tables ou des courbes représentant la plus petite valeur critique en fonction de  $\varepsilon$ , ou mieux de l'argument

$$a = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}}$$

On reconnaît que les deux courbes se recoupent pour toutes les valeurs de l'argument  $a$  correspondant à la formule  $a = \frac{\pi}{2} \sqrt{m(m+2)}$  et que leurs points communs ont des ordonnées rentrant dans la formule

$$f = \frac{\pi^2 EI}{l^2} [m^2 + (m+2)^2]$$

$m$  étant un nombre entier, zéro n'étant pas exclu.

Ces valeurs particulières ont une autre expression plus directe et plus simple qui est de la forme:

$$f = 2 \sqrt{EI\varepsilon} + 4 EI \frac{\pi^2}{l^2}$$

Pratiquement, cette dernière formule donne la plus petite valeur critique avec une approximation suffisante dès que  $\varepsilon$  n'est pas très petit par rapport à  $EI$ .