

Untersuchung von elektromagnetischen Wellenphänomenen mittels der Methode der finiten Elemente

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der technischen Wissenschaften
(Dr.techn.)

eingereicht an der
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der
Technischen Universität Graz

vorgelegt von

Gernot Matzenauer

Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik,
Technische Universität Graz
8010 Graz

12. Februar 2007

1. Begutachter und Betreuer: Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.tech Kurt Preis
2. Begutachter: Prof. Dr. Igor Tičar

Kurzfassung

Untersuchung von elektromagnetischen Wellenphänomenen mittels der Methode der finiten Elemente - Die in modernen Geräten eingesetzte Elektronik muss immer leistungsstärker und kleiner werden. So werden beispielsweise für den Entwurf und die Herstellung von Leiterplatten neue Verfahren nötig, um die physikalischen Gegebenheiten berücksichtigen zu können. Ziel dieser Arbeit war es, Wellenphänomene vor allem auf gedruckten Leiterplatten (Printed Circuit Boards, PCB's) numerisch und analytisch zu untersuchen, wobei die größte Herausforderung die Komplexität der heute eingesetzten Leiterplatten darstellt. Die Analyse der verschiedenen Hardwarestrukturen wurde mit Hilfe der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Mit den heute zur Verfügung stehenden PC-Arbeitsstationen sind der Modellierung kaum mehr Grenzen gesetzt. Will man aber das Simulationsergebnis in einer relativ kurzen Zeit zur Verfügung haben, muss man die Modelle vereinfachen, wobei das Ergebnis möglichst wenig verfälscht werden soll.

Im ersten Schritt werden die möglichen Vereinfachungen der Modellierung und deren Auswirkungen auf die Exaktheit der Simulationsergebnisse untersucht. Hierbei hat sich herausgestellt, dass eine Vielzahl von Wellenproblemen auf gedruckten Schaltungen durch zweidimensionale finite Elementberechnungen (2D-FEM) untersucht werden können. Eine 3D-FEM-Berechnung ist nur in Fällen notwendig, in denen die Hardwarestrukturen auf einer Leiterplatte nicht auf ein ebenes Problem zurückgeführt werden können oder die Abstrahlung eine vorrangige Rolle spielt.

Im nächsten Abschnitt wird eine Methode untersucht, bei der komplexe Hardwarestrukturen in einzelne einfachere Teilstrukturen zerlegt und deren Simulationsergebnisse in einem anschließenden Schritt wieder zur Gesamtstruktur zusammengefügt werden.

Für die Untersuchung von gedruckten Schaltungen wurde in die FEM-Software die Möglichkeit eingebaut, auch Strukturen mit relativen Dielektrizitätszahlen und Permeabilitätszahlen ungleich eins mit Perfectly Matched Layers (PML's) abschließen zu können.

Die Untersuchungen wurden in einem Frequenzbereich von 1 MHz bis 10 GHz durchgeführt.

Abstract

Investigation of electromagnetic wave problems by the finite element method - Electronic components in up-to-date devices are continuously shrinking in size and getting more powerful. As a consequence, new methods capable of taking account of physical reality are required for the design and production of printed circuit boards (PCBs). The aim of this work has been to apply numerical and analytical techniques to investigate wave phenomena on PCBs with the greatest challenge constituted by the complexity of contemporary PCBs. The method of finite elements (FEM) has been employed to analyze the various hardware structures. The powerful PC work stations at disposal hardly limit simulations. However, to get answers in reasonable time, the models have to be simplified without substantially distorting the results.

In the first step, various methods to simplify the models and their effect on the accuracy of the simulation results are presented. It has turned out that most wave problems on PCBs can be studied by two-dimensional FEM investigations. A three-dimensional FEM simulation is only required if the problem cannot be represented by a planar model or if radiation plays an important role.

Second, a method is presented to decompose complex hardware structures into smaller parts. Each part can be simulated separately and the results of the complex structure are found by summarizing the results of the different parts. In order to analyze PCB structures, the FEM method has been extended to allow truncating any lossless medium by perfectly matched layers. The simulations have been carried out in a frequency range from 1 MHz to 10 GHz.

Ich versichere hiermit, diese Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

I hereby certify that the work presented in this thesis is my own and that work performed by others is appropriately cited.

Gernot Matzenauer
Graz, Austria, February 12, 2007

“ ... the path that leads to the truth is littered with the bodies of the ignorant ”

[Miyamoto Musashi]

Inhaltsverzeichnis

Häufig benutzte Abkürzungen und Symbole	viii
1 Einleitung	1
2 Methode der finiten Elemente	3
2.1 \mathbf{A}, V Formulierung	4
2.2 \mathbf{T}, Φ Formulierung	5
2.3 Realisierung mit finiten Elementen	6
2.3.1 Resultierendes Gleichungssystem für die \mathbf{A}, V Formulierung	10
2.3.2 Resultierendes Gleichungssystem für die \mathbf{T}, Φ Formulierung	11
3 Absorbierende Randbedingungen	12
3.1 Ebene Wellen	12
3.2 Wellenausbreitung in anisotropen Materialien	14
3.3 Reflexionsfaktor	17
3.4 Bestimmung der Materialparameter aus dem PML's Tensor	21
3.5 Abschätzung der PML-Parameter	22
3.6 Modellierung der PML-Schichten	26
3.7 Anpassung von Leitungen mit Hilfe von PML's	27
3.8 Einfluss der PML's auf die Energieberechnungen	28
4 Untersuchung von Wellenphänomenen	31
4.1 Modellierung von Wellenproblemen	31
4.1.1 Größe des Problemgebietes	31
4.1.2 Berücksichtigung der Eindringtiefe	32
4.1.3 Modellierung der Verluste im Medium	32
4.2 Vereinfachungen zur Reduzierung des Simulationsaufwandes	34
4.2.1 Verwendung von 2D-FEM oder 3D-FEM	34
4.2.2 Elimination des Leiters	35
4.3 Anregungsarten bei der \mathbf{A}, V Formulierung	36

4.3.1	Anregung durch Vorgabe des elektrischen Feldes	36
4.3.2	Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmten Magnetfeldes	37
4.4	Anregungsarten bei Verwendung der \mathbf{T}, Φ Formulierung	38
4.4.1	Anregung durch Vorgabe des magnetischen Feldes	38
4.4.2	Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmtes Magnetfeldes	39
4.5	Abschätzung der Verluste unter Zuhilfenahme einer 2D-FEM-Berechnung .	39
4.6	Unterschiedliche Arten der Auswertung der Berechnungsergebnisse	40
4.6.1	Auswertung über die Energie	40
4.6.2	Auswertung mittels des Poyntingschen Vektors	41
4.6.3	Bestimmung des Leitungsstromes	41
4.7	Bestimmung der Vierpolparameter aus den Feldgrößen	42
4.8	Frequenzeinfluß auf die Simulation	42
5	Berechnungsbeispiele	46
5.1	Leiterbahn mit Stichleitung	46
5.1.1	Simulationsbeispiel	46
5.1.2	Modellierung	48
5.1.3	Messung	49
5.1.4	Vergleich des Simulationsaufwandes und der Rechenzeiten	49
5.1.5	Schlußfolgerungen	51
5.2	Magic-T	52
5.2.1	Modellierung eines Magic-T	52
5.2.2	Ergebnisse	53
5.3	X-Band Hohlleiter bei höheren Moden	55
5.3.1	Schlußfolgerungen	55
5.4	Bluetooth - Planar Inverted F Antenna	58
5.4.1	Konstruktion der PIFA	58
5.4.2	Modellierung einer PIFA	59
5.4.3	Das vektorielle Huygenssche Prinzip	59
5.4.4	Simulationsergebnisse	60
5.5	Übersprechen zwischen zwei parallel geführten Leitungen	63
5.5.1	3D-FEM-Berechnung zweier parallel geführter Leiterbahnen	63
5.5.2	2D-FEM-Berechnung	65
5.5.3	Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Messung	65
5.5.4	Vergleich der Simulationsergebnisse bei Anpassung	66

6	Auftrennung von Feldproblemen	68
6.1	Untersuchung von Knicken in Leiterbahnen	68
6.1.1	Beschreibung des Problems Leitungsknick	68
6.1.2	Analytische Untersuchungen	70
6.1.3	Dreidimensionale Untersuchung mittels FEM	71
6.1.4	Zerlegung des Problemgebietes in 3D-FEM und 2D-FEM-Modelle	75
7	Schlussbemerkungen	78
A	Leitungsparameter aus 2D-FEM-Berechnungen	80
A.1	Modellierung der Struktur	80
A.1.1	Ermittlung des Widerstandsbelags und des Induktivitätsbelags aus der Wirbelstromberechnung	81
A.1.2	Ermittlung des Kapazitätsbelags aus der elektrostatischen Simulation	81
A.1.3	Ermittlung des Leitwertbelags aus der Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes	82
A.2	Auswertung der Rechenergebnisse	83
A.2.1	Induktivitätsbelag	83
A.2.2	Widerstandsbelag	83
A.2.3	Kapazitätsbelag	84
A.2.4	Leitwertbelag	84
A.3	Berechnung der Vierpolparameter	84
A.3.1	Kettenmatrix	85
A.3.2	Impedanzmatrix	85
A.3.3	Admittanzmatrix	86
A.3.4	Streuparameter	86
B	Übersprechen	88
B.1	Netzwerkmodell	88
B.2	Kettenmatrix	90
B.3	Impedanzmatrix	91
C	Vierpole	93
C.1	Z-Parameter	93
C.1.1	Bestimmung der Z-Parameter aus 2D-FEM-Feldproblemen	93
C.1.2	Z-Parameter aus 3D-FEM-Feldproblemen	95
C.2	A-Parameter	96
C.2.1	Bestimmung der A-Parameter aus 2D-FEM-Feldproblemen	97
C.2.2	A-Parameter aus 3D-FEM-Feldproblemen	97
C.3	S-Parameter	98
C.3.1	Berechnung der S-Parameter aus den Z-Parametern	99
C.3.2	S - Kettenparameter oder T - Parameter	100
	Bibliography	102

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kantenelement mit 20 Knoten und 36 Kanten	7
3.1	Eine ebene Welle trifft auf die Grenzschicht zwischen homogenen Medium und PML.	18
3.2	Reflexionskoeffizient in Abhängigkeit von der Schichtdicke, dargestellt für verschiedene Anzahlen von Schichten bei der \mathbf{A}, V Formulierung.	23
3.3	Reflexionskoeffizient in Abhängigkeit von der Schichtdicke, dargestellt für verschiedene Anzahlen von Schichten bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung	24
3.4	Einfluß des PML-Parameters e auf die benötigten CG-Iterationen für unterschiedliche Anzahlen von PML-Schichten für die \mathbf{A}, V Formulierung.	25
3.5	Einfluß des PML-Parameters e auf die benötigten CG-Iterationen für unterschiedliche Anzahlen von PML-Schichten für die \mathbf{T}, Φ Formulierung	25
3.6	Zwei PML-Schichten, die aneinander grenzen, können auf zwei verschiedene Arten modelliert werden	27
3.7	Abschluss von Leitungen mit Hilfe von PML's	29
4.1	Vergleich der Stromverteilung in einer 1 mm breiten Leiterbahn mit einer Kupferstärke von $35 \mu\text{m}$ bei 10 MHz, 100 MHz, 1 GHz und 10 GHz	33
4.2	Änderung der Leitungsbeläge für eine Leitung über einer Massefläche.	35
4.3	Anregung durch Vorgabe des elektrischen Feldes am Anfang einer $b = 1.08$ mm breiten Leiterbahn	37
4.4	Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmten Magnetfeldes am Anfang einer 1.08 mm breiten Leiterbahn.	38
4.5	Grenzfrequenz des ersten Grundmodes TE_{10} in Abhängigkeit von der Leiterbahnbreite	44
4.6	Feldbild der elektrischen Feldstärke im Trägermaterial unter einer 2 mm breiten Leiterbahn für einen TE_{10} Mode	45
5.1	3D-FEM-Modell einer Leitung mit Stichleitung angeordnet über einer Massefläche.	47
5.2	Dielektrizitätszahl in Abhängigkeit von f	48
5.3	Impedanz am Eingang der Leiterstruktur	50

5.4	3D-FEM-Simulationsmodell eines Magic-T's mit PML-Schichten	52
5.5	Wellenausbreitung im Magic-T mit optimal eingestellten und schlecht eingestellten PML's.	54
5.6	Reflexionsfreier Abschluss eines X-Band-Hohlleiters mit PML's bei einer Anregung mit höheren Moden	56
5.7	Schema einer Planar Inverted F Antenne	58
5.8	Die Richtcharakteristik bei Freiraumausbreitung zeigt eine ähnliche Richtcharakteristik wie ein $\lambda/2$ Dipol. Die Antenne befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.	61
5.9	Die Richtcharakteristik bei Anwesenheit von biologischem Gewebe auf der linken Seite der Antenne. Die Antenne befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.	62
5.10	Berechnungsmodell für das Übersprechen zwischen zwei Leiterbahnen . . .	64
5.11	Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messergebnissen beim Übersprechen zwischen zwei leerlaufenden Leitungen	66
5.12	Vergleich der Rechenergebnisse bei Übersprechen zwischen zwei Leitungen. Dargestellt sind der Reflexionsfaktor S_{11} , der Near-End-Crosstalk S_{13} und der Far-End-Crosstalk S_{14}	67
6.1	Zerlegung eines Knicks auf einer Leitung in ein 3D-FEM-Modell und in zwei 2D-FEM-Modelle	69
6.2	3D-FEM-Modell für den Leitungsknick und Feldbild der elektrischen Feldstärke auf der Leitung	72
B.1	Netzwerkmodell einer Leitung	88
B.2	Netzwerkmodell zum Übersprechen zwischen zwei Leiterbahnen	89

Tabellenverzeichnis

3.1	Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten von den Verlusten im Medium . .	26
4.1	Frequenzabhängigkeit der Eindringtiefe in Kupfer	33
5.1	Frequenzabhängigkeit der Eingangsimpedanz für die verschiedenen Berechnungsmodelle. Z_S ...Rechnung, Z_M ...Messung	49
5.2	Gegenüberstellung Modellierungsaufwand und Rechenaufwand	50
5.3	Frequenzabhängigkeit der Leitungsparameter aus der 2D-FEM-Berechnung	65
6.1	Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante und Reflexionsfaktor ermittelt aus drei Simulationen.	74
6.2	Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante aus 2D-FEM und Reflexionsfaktor aus 3D-FEM.	75
6.3	Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante und Reflexionsfaktor ermittelt aus einer Simulation des gesamten Problemgebietes.	75
6.4	Vergleich der vollständigen 3D-FEM-Berechnung und der Auftrennung des Leitungsknicks in 2D- und 3D-FEM-Bereiche	77

Häufig benutzte Abkürzungen und Symbole

A	magnetisches Vektorpotential
B	magnetische Induktion
D	elektrische Verschiebung
E	elektrische Feldstärke
H	magnetische Erregung
J	elektrische Stromdichte
T	elektrisches Strömungsvektorpotential
V	elektrisches Skalarpotential
Φ	magnetisches Skalarpotential
U	elektrische Spannung
I	elektrische Stromstärke
Z	Impedanz
Y	Admittanz
R	ohmscher Widerstand
L	Induktivität
C	Kapazität
G	Leitwert
Q	Ladung

P_{Joule}	Verlustleistung
W_e	elektrische Energie
W_m	magnetische Energie
ϵ	Dielektrizitätszahl
μ	Permeabilität
ν	magnetische Reluktivität
σ	spezifische Leitfähigkeit
Γ	Fläche
Ω	Volumen
ω	Kreisfrequenz
ρ	Raumladungsdichte
γ	Ausbreitungskonstante
α	Dämpfungsfaktor
β	Phasenfaktor
δ	Eindringtiefe
$\tan \delta$	Tangens des Verlustwinkel
∇	Nablaoperator
Δ	Laplaceoperator
j	imaginäre Einheit $j := \sqrt{-1}$
\Re	Realteil
\Im	Imaginärteil

Kapitel 1

Einleitung

“ Begin at the beginning and go on till you come to the end; then stop. ”

[Lewis Carroll, Alice in Wonderland]

Die heute verwendeten elektronischen Geräte werden immer kleiner und immer leistungsfähiger. Das führt dazu, dass die benötigten Taktfrequenzen immer höher werden. Dazu kommt noch, dass die in den gedruckten Schaltungen (Printed Circuit Boards, PCB's) verwendeten Materialien frequenzabhängige Eigenschaften besitzen, die sich bei steigender Frequenz immer stärker auswirken. Die verwendeten Strukturen auf den PCB's besitzen immer kleinere Abmessungen, wobei die Anzahl der Leiterbahnen zunimmt. Um einen störungsfreien Betrieb bzw. überhaupt einen Betrieb des Gerätes gewährleisten zu können, sind neue Designvorschriften nötig, die diesen neuen Anforderungen entsprechen. Der Bau von Prototypen ist sehr kosten- und zeitintensiv und durch den Zeitdruck (Time to Market) ist die Anzahl der Entwicklungsgenerationen eines elektronischen Gerätes auf ein Minimum zu reduzieren. Mit der Methode der finiten Elemente (FEM) gibt es ein numerisches Werkzeug, Probleme beim Bau von Geräten bereits in der Konstruktionsphase zu beheben und Fehler frühzeitig zu erkennen.

Der für die Simulation mittels PC-Arbeitsstationen zur Verfügung stehende physikalische Arbeitsspeicher (RAM) und die benötigte Rechenzeit limitieren die Komplexität der verwendeten Rechenmodelle. In dieser Arbeit werden Methoden beschrieben, um Simulationen mit dem geringsten möglichen Speicheraufwand und Rechenaufwand durchführen zu können. Das zu berechnende Modell wird bei der Methode der finiten Elemente in Gebiete mit gleichen Eigenschaften (z.B. gleiches Material) unterteilt, die wiederum feiner in finite Elemente unterteilt werden. Diese finiten Elemente werden mittels Kanten und Knoten im Problemgebiet realisiert (Kapitel 2).

Bei der Simulation von Wellenausbreitungsproblemen ist der Rand des Problemgebietes von besonderer Bedeutung. Die sich ausbreitende Welle wird am fernen Rand reflektiert und wieder in das Problemgebiet eingestrahlt, wenn nicht entsprechende Maßnahmen getroffen werden. Ist dies nicht erwünscht, wird das Problemgebiet mit einem Material umgeben, das

die ankommende elektromagnetische Welle ohne Reflexion eindringen lässt und im Inneren dämpft, bis sie verschwunden ist. Diese sogenannten Perfectly Matched Layers (PML's) schließen also das Problemgebiet reflexionsfrei ab. Die PML's werden durch komplexe, anisotrope Materialien realisiert. Allerdings wird die Rechenzeit durch den zusätzlichen Modellierungsaufwand und durch die speziellen Materialeigenschaften der PML's erheblich verlängert (Kapitel 3).

Im Kapitel 4 wird die Erstellung der FEM-Modelle, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, beschrieben. Die Auswirkung der Vereinfachungen auf die Genauigkeit des Rechenresultates in den unterschiedlichen Rechenmodellen wird in Kapitel 5 untersucht. Ziel ist es, ein Rechenmodell zu finden, das mit dem geringst möglichen Aufwand die höchste Genauigkeit des Simulationsergebnisses aufweist. Die Art der Leiterbahnführung, die verwendeten Bauelemente und die Materialeigenschaften des Systems beeinflussen das Frequenzverhalten der gesamten Schaltung. Die Änderung der Lichtgeschwindigkeit im Medium hat dabei die größten Auswirkungen bei steigender Frequenz. Hingegen wirken sich Verluste im Kupfer und im Leiterplattenmaterial (z.B. Epoxy) viel weniger auf das Simulationsergebnis aus.

Viele Problemstellungen lassen sich in mehrere kleinere Probleme aufteilen, die vom Simulations- und Rechenaufwand erheblich geringer sind. Nach erfolgter Simulation lassen sich dann diese Teilprobleme wieder zum eigentlichen Problem zusammenfassen. Diese Vorgangsweise wird im Kapitel 6 ausführlich untersucht.

Zum Vergleich der Rechenergebnisse wird oft die Lösung aus einer 2D-FEM-Wirbelstromberechnung herangezogen. Die 2D-FEM-Simulationen und die Ermittlung der Ergebnisse werden in Anhang A beschrieben. Um das Übersprechen zwischen zwei parallel geführten Leitungen auch mittels der 2D-FEM bestimmen zu können, wird ein Netzwerkmodell erstellt (siehe Anhang B). Die am häufigsten verwendeten Vierpolparameter und deren Umrechnung in Streuparameter sind im Anhang C erläutert.

Für die Simulationen in dieser Arbeit wurden immer mehrere Rechner in Form von PC's verwendet. Die verwendeten Betriebssysteme waren Microsoft Windows XP® und für größere Problemstellungen Microsoft Windows XP 64-Bit für EMT64®. Die Probleme wurden immer im Frequenzbereich untersucht, sodass für jeden Frequenzpunkt eine Simulation notwendig war. Die Simulationsabläufe wurden so weit wie möglich mittels Matlab® automatisiert. Jedes Rechenmodell konnte so für jeden Frequenzpunkt separat angepasst werden, wobei die Auswertung danach ebenfalls mit Matlab® erfolgte. Die verwendeten Herleitungen wurden mit Hilfe der Mathematiksoftware Maple® überprüft.

Kapitel 2

Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente basiert auf der Idee, ein zu berechnendes Problem, welches durch eine Differentialgleichung zusammen mit entsprechenden Bedingungen am Rand des Problems (Randwertproblem) beschrieben wird, in eine große Anzahl einfacher kleiner Bereiche zu zerlegen und die Lösung in den einzelnen Elementen durch Polynome niedriger Ordnung zu approximieren [6], [5] und [17]. Das Wort 'finit' steht hier für die endlichen Abmessungen der Elemente, welche durch die Diskretisierung des Kontinuums, in welchem die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen gelten, entstehen. Die Methode der finiten Elemente ist heute sicher das am meisten benutzte Verfahren, um naturwissenschaftliche und technische Probleme mit Hilfe von Computern zu lösen. Es gibt kaum ein Problem aus der Elektrotechnik, Festigkeitslehre, Strömungsmechanik, Thermodynamik, Gezeiten-theorie, Wettervorhersage und aus vielen anderen Gebieten, das nicht mit der Methode der finiten Elemente gelöst werden kann. Der Aufwand kann jedoch abhängig vom Problem enorm sein. Aber ein Formalisierungsgrad wie bei kaum einem anderen Verfahren gestattet es, den Aufwand weitgehend dem Computer zu übertragen.

Für diese Arbeit werden Wellenprobleme mit Hilfe von Potentialen, nämlich dem magnetischen Vektorpotential \mathbf{A} , dem elektrischen Skalarpotential V (\mathbf{A}, V -Formulierung) bzw. dem elektrischen Strömungspotential \mathbf{T} , dem magnetischen Skalarpotential Φ (\mathbf{T}, Φ -Formulierung) untersucht (siehe Kapitel 5). Im zeitharmonischen Fall und für Wellenausbreitung lauten die Maxwellschen Gleichungen [23]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen wird durch die Materialgleichungen beschrieben. Im allgemeinen Fall stellen die Materialkonstanten Tensoren dar. Auf diese Weise

können etwaige Anisotropien in den Medien beschrieben oder Materialien modelliert werden, die ganz spezielle Eigenschaften besitzen. Die Materialgleichungen für anisotrope Medien lauten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= [\boldsymbol{\mu}] \cdot \mathbf{H} \\
 \mathbf{H} &= [\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{B} \\
 \mathbf{D} &= [\boldsymbol{\epsilon}] \cdot \mathbf{E} \\
 \mathbf{J} &= [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{E} \\
 \mathbf{E} &= [\boldsymbol{\rho}] \cdot \mathbf{J}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Spezielle Tensoren der Materialkonstanten werden in Abschnitt 3 verwendet, um PML's zu realisieren.

2.1 \mathbf{A}, V Formulierung

Der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen und dem magnetischen Vektorpotential \mathbf{A} bzw. dem elektrischen Skalarpotential V [3], [6] ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
 \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{A} - j\omega \nabla v.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aus Symmetriegründen wird das elektrische Skalarpotential V als Zeitableitung eines modifizierten Skalarpotentials v eingeführt:

$$V = \frac{\partial v}{\partial t} \implies j\omega v, \quad v(t=0) = 0. \tag{2.4}$$

Durch die Einführung der Potentiale sind die Quellenfreiheit der magnetischen Induktion und das Induktionsgesetz automatisch erfüllt. Der Durchflutungssatz und die Materialgleichungen sind zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times ([\boldsymbol{\nu}] \nabla \times \mathbf{A}_l) + j\omega ([\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{A}_l + [\boldsymbol{\sigma}] \nabla v) - \omega^2 ([\boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{A}_l + [\boldsymbol{\epsilon}] \nabla v) &= \mathbf{0} \\
 -j\omega \nabla \cdot ([\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{A}_l + [\boldsymbol{\sigma}] \nabla v) - \omega^2 \nabla \cdot ([\boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{A}_l + [\boldsymbol{\epsilon}] \nabla v) &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei der Index l im leitfähigen Gebiet verwendet wird. Man hat nun eine skalare und eine vektorielle Differentialgleichung für das magnetische Vektorpotential und das elektrische Skalarpotential. Führt man eine komplexe Leitfähigkeit

$$[\boldsymbol{\sigma}_e] = [\boldsymbol{\sigma}] + j\omega [\boldsymbol{\epsilon}] \tag{2.6}$$

ein, können die skalare und die vektorielle Differentialgleichung vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}\nabla \times ([\nu] \nabla \times \mathbf{A}_1) + j\omega ([\sigma_c] \mathbf{A}_1 + [\sigma_c] \nabla v) &= \mathbf{0} \\ -j\omega \nabla \cdot ([\sigma_c] \mathbf{A}_1 + [\sigma_c] \nabla v) &= 0.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Die magnetischen Randbedingungen (Neumannsche Randbedingungen) für die \mathbf{A}, V Formulierung lauten:

$$\begin{aligned}[\nu] \nabla \times \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} \\ \text{und} \\ -j\omega \mathbf{n} \cdot ([\sigma_c] \mathbf{A}_1 + [\sigma_c] \nabla v) &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Die elektrischen Randbedingungen (Dirichletsche Randbedingungen) sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{A}_1 &= \mathbf{0} \\ \text{und} \\ v &= \text{konstant}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Die skalare und die vektorielle Differentialgleichung für Wellenausbreitung unterscheidet sich von den Differentialgleichungen für Wirbelstromprobleme nur durch die Einführung einer komplexen Leitfähigkeit $[\sigma_c] = [\sigma] + j\omega[\epsilon]$.

2.2 \mathbf{T}, Φ Formulierung

Der Zusammenhang zwischen den Feldgrößen, dem Strömungsvektorpotential \mathbf{T} und dem magnetischen Skalarpotential Φ ist gegeben durch [6], [3]:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} &= \nabla \times \mathbf{T} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{T} - \nabla \Phi.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Der Durchflutungssatz ist damit überall erfüllt, aus dem Induktionsgesetz und der Divergenzfreiheit der magnetischen Induktion erhält man die Differentialgleichungen für die Potentiale.

$$\begin{aligned}\nabla \times ([\rho_c] \nabla \times \mathbf{T}) + j\omega ([\mu] \mathbf{T}) - j\omega ([\mu] \nabla \Phi) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot ([\mu] \mathbf{T} - [\mu] \nabla \Phi) &= 0.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Der komplexe spezifische Widerstand ist durch

$$[\rho_c] = [[\sigma] + j\omega[\epsilon]]^{-1} \quad (2.12)$$

definiert. Die magnetischen Randbedingungen (Dirichletsche Randbedingungen) für die \mathbf{T} , Φ Formulierung lauten:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

und

$$\Phi = \Phi_0. \quad (2.13)$$

Die elektrischen Randbedingungen (Neumannsche Randbedingungen) sind gegeben durch:

$$[\rho_c] \nabla \times \mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{n} \cdot ([\mu] \mathbf{T} - [\mu] \nabla \Phi) = 0. \quad (2.14)$$

Die skalare und die vektorielle Differentialgleichung für Wellenausbreitung ist mit der Einführung des komplexen Widerstandes gleich wie die Differentialgleichungen für Wirbelstromprobleme.

2.3 Realisierung mit finiten Elementen

Eine Möglichkeit der Realisierung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [5] ist, das Problem in Bereiche in der Form von Hexaedern zu unterteilen. Jeder Hexaeder wird durch 20 Knoten und 36 Kanten an der Oberfläche definiert [6], [5] (siehe Abbildung 2.1). Die Transformation zwischen den lokalen Koordinaten ξ, η, ζ und den globalen Koordinaten x, y, z ist definiert durch:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^{20} x_k N_k^{(20)}(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^{20} y_k N_k^{(20)}(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^{20} z_k N_k^{(20)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

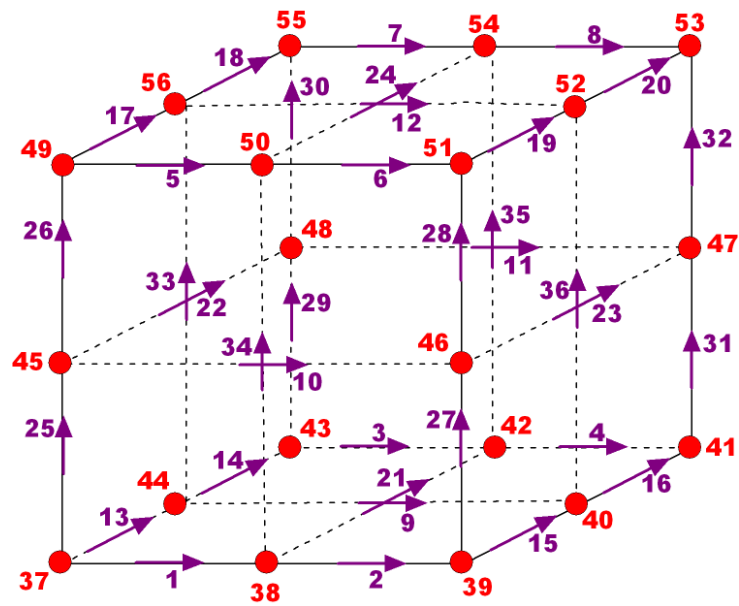


Abbildung 2.1: Kantenelement mit 20 Knoten und 36 Kanten.

Die 20 Knotenformfunktionen $N_i^{(20)}(x, y, z)$ werden mit der folgenden Eigenschaft generiert:

$$N_i^{(20)}(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{im Knoten } i \\ 0 & \text{in allen anderen Knoten} \end{cases} \quad (2.16)$$

Die Knoten erhalten eine globale Knotennummerierung $1, 2, \dots, n^{node}$. Dem globalen Knoten i wird die globale Formfunktion $N_i(x, y, z)$ zugeordnet:

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} N_k^{(20)}(x, y, z) & \text{in den Elementen, welche die globalen Knoten } i \\ & \text{beinhalten. Dieser globale Knoten entspricht dem lokalen} \\ & \text{Knoten } k, \\ 0 & \text{in allen anderen Elementen.} \end{cases}$$

Die globalen Formfunktionen $N_i(x, y, z)$ haben die Eigenschaft:

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{im globalen Knoten } i \\ 0 & \text{in allen anderen globalen Knoten.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Die 36 vektoriellen Kantenformfunktionen $\mathbf{N}_i^{(36)}(x, y, z)$ werden mit der folgenden Eigenschaft generiert:

$$\int_{Kante_j} \mathbf{N}_i^{(36)}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases} \quad (2.18)$$

Die Kanten erhalten die globalen Kantennummern $1, 2, \dots, n^{(edge)}$. Jeder globalen Kante i wird eine globale Formfunktion $\mathbf{N}_i(x, y, z)$ wie folgt zugeordnet:

$$\mathbf{N}_i(x, y, z) = \begin{cases} \mathbf{N}_k^{(36)}(x, y, z) \text{ in den Elementen, welche die globale Kante } i \\ \text{beinhalten. Diese globale Kante entspricht der lokalen} \\ \text{Kante } k, \\ 0 \text{ in allen anderen Elementen.} \end{cases}$$

Die globalen Kantenformfunktionen haben die Eigenschaft:

$$\int_{globaleKante_j} \mathbf{N}_i(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases} \quad (2.19)$$

Sind die Integrale der Vektorpotentialfunktion von $\mathbf{T} t_i$, $i = 1, 2, \dots, n^{(edge)}$ bzw. von \mathbf{A} gleich a_i , $i = 1, 2, \dots, n^{(edge)}$, dann gilt folgende Näherung:

$$\mathbf{A}(x, y, z) \approx \mathbf{A}_n = \sum_{i=1}^{n^{(edge)}} a_i \mathbf{N}_i(x, y, z) = \mathbf{A}_D + \sum_{i=1}^{n_2} a_i \mathbf{N}_i(x, y, z)$$

$$a_i = \int_{globaleKante_i} \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}$$

$$v(x, y, z) \approx v_n = \sum_{i=1}^{n^{(node)}} v_i N_i(x, y, z) = v_D + \sum_{i=1}^{n_1} v_i N_i(x, y, z) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(x, y, z) &\approx \mathbf{T}_n = \sum_{i=1}^{n^{(edge)}} t_i \mathbf{N}_i(x, y, z) = \mathbf{T}_D + \sum_{i=1}^{n_2} t_i \mathbf{N}_i(x, y, z) \\
 t_i &= \int_{\text{globaleKante}_i} \mathbf{T}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \\
 \Phi(x, y, z) &\approx \Phi_n = \sum_{i=1}^{n^{(node)}} v_i N_i(x, y, z) = \Phi_D + \sum_{i=1}^{n_1} v_i N_i(x, y, z). \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Die unbekannten Knoten erhalten die Knotennummern $i = 1, 2, \dots, n_1$ und die unbekannten Kanten die Kantenummern $i = 1, 2, \dots, n_2$. Erhalten die Knoten, bei denen das Skalarpotential bekannt ist die Nummern $i = (n_1 + 1), \dots, n^{(node)}$ und die Kanten, bei denen die Tangentialkomponente des Vektorpotentials bekannt ist die Nummern $i = (n_2 + 1), \dots, n^{(edge)}$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_D &= \sum_{i=n_2+1}^{n^{(edge)}} a_i \mathbf{N}_i(x, y, z) \\
 v_D &= \sum_{i=n_1+1}^{n^{(node)}} v_i N_i(x, y, z) \\
 \mathbf{T}_D &= \sum_{i=n_2+1}^{n^{(edge)}} t_i \mathbf{N}_i(x, y, z) \\
 \Phi_D &= \sum_{i=n_1+1}^{n^{(node)}} v_i N_i(x, y, z). \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

2.3.1 Resultierendes Gleichungssystem für die \mathbf{A}, V Formulierung

Die Galerkinschen Gleichungen für das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} und das elektrische Skalarpotential V lauten [6], [3]:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot [\boldsymbol{\nu}] \nabla \times \mathbf{A}_n d\Omega + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot [\boldsymbol{\sigma}_e] (\mathbf{A}_n + \nabla v_n) d\Omega = 0, \quad (2.23)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_1),$$

$$j\omega \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot [\boldsymbol{\sigma}_e] (\mathbf{A}_n + \nabla v_n) d\Omega = 0, \quad (2.24)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_2).$$

Die Gradienten der Knotenformfunktionen sind Linearkombinationen der Kantenformfunktionen:

$$\nabla N_i = \sum_{k=1}^{n(\text{edge})} c_{ik} \mathbf{N}_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n(\text{node})).$$
(2.25)

Da

$$\nabla \times \nabla N_i \equiv \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

ergeben die Linearkombinationen der Gleichungen (2.23) genau die Gleichungen (2.24). Die Matrix des Gleichungssystem ist somit singular, da die Gleichungen (2.23) die diskrete Form des Durchflutungssatzes und die Gleichungen (2.24) die diskrete Form des Kontinuitätsgesetzes darstellen. Das Kontinuitätsgesetz ist aber bekanntlich eine Folge des Durchflutungssatzes:

$$\nabla \times \mathbf{H}_l = \mathbf{J}_l \implies \nabla \cdot \mathbf{J}_l = 0. \quad (2.27)$$

Die exakte Singularität der Systemmatrix stellt für die Anwendung der Methode der konjugierten Gradienten zur Lösung des bei der Diskretisierung des Problems entstehenden Gleichungssystem keinen Nachteil dar.

2.3.2 Resultierendes Gleichungssystem für die \mathbf{T}, Φ Formulierung

Die Galerkinschen Gleichungen für das elektrische Strömungspotential \mathbf{T} und das magnetische Skalarpotential Φ lauten [3], [6]:

$$\int_{\Omega_l} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot [\boldsymbol{\rho}_c] \nabla \times \mathbf{T}_n d\Omega + j\omega \int_{\Omega_l} \mathbf{N}_i \cdot ([\boldsymbol{\mu}] \mathbf{T}_n) - ([\boldsymbol{\mu}] \nabla \Phi_n) d\Omega = 0, \quad (2.28)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_1),$$

$$j\omega \int_{\Omega_l + \Omega_i} \nabla N_i \cdot [\boldsymbol{\mu}] \nabla \Phi_n d\Omega - j\omega \int_{\Omega_l} \nabla N_i \cdot ([\boldsymbol{\mu}] \mathbf{T}_n) = 0, \quad (2.29)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_2).$$

Die Linearkombinationen der Gleichungen (2.28) ergeben genau die Gleichungen (2.29). Die Matrix des Gleichungssystem ist somit singulär und die rechte Seite ist konsistent.

Kapitel 3

Absorbierende Randbedingungen (Perfectly Matched Layers)

Bei der numerischen Behandlung von elektrischen und magnetischen Feldproblemen ist es häufig notwendig, den Rand des Simulationsgebietes so weit wie möglich vom eigentlichen Problem zu entfernen, um einen Einfluss des fernen Rands auf das Simulationsergebnis zu verhindern. Bei Wellenproblemen genügt das nicht. Es muss hier vermieden werden, dass am Rand die Wellen reflektiert werden. Eine Möglichkeit das Problemgebiet einzugrenzen ist, einen quasi unendlich weit entfernten Rand des Simulationsgebietes durch absorbierende Randbedingungen zu ersetzen. Dies kann z.B. mit sogenannten Perfectly Matched Layers (PML's) erreicht werden. PML's haben die Eigenschaft elektromagnetische Wellen ohne Reflexionen eindringen zu lassen und die Wellen in den PML's zu dämpfen bis sie verschwunden sind [7], [30]. Ein Material mit diesen Eigenschaften existiert in der Realität nicht. Bei der numerischen Simulation ist es aber möglich, durch künstliche Materialwerte diese Materialeigenschaften zu modellieren und somit eine PML zu realisieren.

3.1 Ebene Wellen

Für die Untersuchung der PML's werden ebene Wellen betrachtet. Der gesamte Raum ist mit einem idealen homogenen Dielektrikum ausgefüllt, das strom- und ladungsfrei ist. Die Maxwell'schen Gleichungen [23] lauten für diese Annahme:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Bildet man die Rotation beider Seiten des Durchflutungssatzes und des Induktionsgesetzes so erhält man

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Setzt man nun in diese Gleichung den Ausdruck für $\nabla \times \mathbf{E}$ aus dem Induktionsgesetz und den Ausdruck für $\nabla \times \mathbf{H}$ aus dem Durchflutungssatz ein und berücksichtigt die Quellenfreiheit der magnetischen Erregung $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ und das Gaußsche Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, ergeben sich folgende Gleichungen, die sogenannten Wellengleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{H} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ \Delta \mathbf{E} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Jede bliebig Funktion

$$\mathbf{E} \left(t \mp \frac{|\mathbf{r}|}{v} \right) \quad (3.4)$$

bzw.

$$\mathbf{H} \left(t \mp \frac{|\mathbf{r}|}{v} \right) \quad (3.5)$$

ist Lösung dieser Wellengleichung. \mathbf{E} bzw. \mathbf{H} stellen eine sich in positiver bzw. negativer Ausbreitungsrichtung \mathbf{r} mit der Geschwindigkeit v fortpflanzende elektromagnetische Welle dar:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}. \quad (3.6)$$

Die Wellengleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} sind voneinander unabhängig. Durch Einsetzen der Lösung in die Maxwell'schen Gleichungen kann festgestellt werden, welche Lösungen zueinander gehören:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_z \times \mathbf{H} &= \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} &= \pm \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Die Vektoren \mathbf{e}_z , \mathbf{E} , \mathbf{H} bilden ein orthogonales Rechtssystem. Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} stehen senkrecht aufeinander und ebenfalls senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Diese Eigenschaften sind typisch für ebene Wellen.

Mehrere ebene Wellen können in eine resultierende sich ausbreitende Welle $\mathbf{E}(x, y, z, t)$

durch Superposition der einzelnen ebenen Wellen zusammengefasst werden. Der Wellenausbreitungsvektor $|\mathbf{k}|$ für die ebene Welle im Raum wird dargestellt durch:

$$|\mathbf{k}| = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.8)$$

mit

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

3.2 Wellenausbreitung in anisotropen Materialien

Für die ebene Welle in den PML's ist eine gesonderte Betrachtung notwendig [19], [21] und [30], da der Raum nun mit einem anisotropen Dielektrikum ausgefüllt ist. Die Maxwell'schen Gleichungen für ein anisotropes, verlustbehaftetes Medium lauten im allgemeinen:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= [\boldsymbol{\sigma}_E] \mathbf{E} + j\omega[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -[\boldsymbol{\sigma}_M] \mathbf{H} - j\omega[\bar{\boldsymbol{\mu}}] \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Permeabilität $\boldsymbol{\mu}$ und die Dielektrizitätszahl $\boldsymbol{\epsilon}$ werden für die Betrachtung von PML's als komplex angesetzt:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\epsilon}] &= [\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] + \frac{1}{j\omega}[\boldsymbol{\sigma}_E] = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x + \frac{\sigma_E^x}{j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_y + \frac{\sigma_E^y}{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_z + \frac{\sigma_E^z}{j\omega} \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{\mu}] &= [\bar{\boldsymbol{\mu}}] + \frac{1}{j\omega}[\boldsymbol{\sigma}_M] = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_x + \frac{\sigma_M^x}{j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_y + \frac{\sigma_M^y}{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_z + \frac{\sigma_M^z}{j\omega} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Um eine Reflexion an der Grenzschicht ausschließen zu können, müssen die Permeabilität $\boldsymbol{\mu}$ und die Dielektrizitätszahl $\boldsymbol{\epsilon}$ folgende Eigenschaften zum Medium außerhalb der PML aufweisen [30]:

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_0}[\mathbf{1}] = [\boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{\epsilon}]^{-1}. \quad (3.11)$$

Aus dieser Bedingung lassen sich die Permeabilität $\boldsymbol{\mu}$ und die Dielektrizitätszahl $\boldsymbol{\epsilon}$ umschreiben als:

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\epsilon}] &= \epsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \epsilon_0[\boldsymbol{\Lambda}] \\
 [\boldsymbol{\mu}] &= \mu_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \mu_0[\boldsymbol{\Lambda}].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen für ein symmetrisches anisotropes verlustbehaftetes Material lauten nun:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon_0[\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{E} \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0[\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{H} \\
 \nabla \cdot [\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{E} &= 0 \\
 \nabla \cdot [\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{H} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen kann man die Feldgrößen auf der rechten Seite explizit ausdrücken und in die andere Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\nabla \times \mathbf{E} - \omega^2\mu_0\epsilon_0[\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{E} &= \mathbf{0} \\
 \nabla \times [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\nabla \times \mathbf{H} - \omega^2\mu_0\epsilon_0[\boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{H} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wird eine Lösung der Form $e^{j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ angestrebt, dann lassen sich die Gleichungen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k} \times [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbf{E} &= \mathbf{0} \\
 [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k} \times [\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbf{H} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nach dem Entwicklungssatz [11]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{3.16}$$

erhält man für die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}
 (([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k})\mathbf{E})([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k}) - ([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k})^2\mathbf{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbf{E} &= \mathbf{0} \\
 (([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k})\mathbf{H})([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k}) - ([\boldsymbol{\Lambda}]^{-1}\mathbf{k})^2\mathbf{H} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\mathbf{H} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Um die Dispersionsgleichung zu erhalten ist es einfacher, vorher eine Variablentransformation durchzuführen:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \sqrt{[\Lambda]}\mathbf{E} \\ \mathbf{H}' &= \sqrt{[\Lambda]}\mathbf{H} \\ \mathbf{k}' &= \frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{[\Lambda]}\mathbf{H}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Mit Hilfe dieser Variablentransformation sehen die Wellengleichungen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}' \times \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}' &= \mathbf{0} \\ \mathbf{k}' \times \mathbf{k}' \times \mathbf{H}' + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{H}' &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Wendet man den Entwicklungssatz an und berücksichtigt, dass \mathbf{E}' , \mathbf{H}' und \mathbf{k}' orthogonal aufeinander stehen, erhält man für $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'$ den Wellenausbreitungsvektor für das Vakuum k_0 :

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = k_0^2. \quad (3.20)$$

Führt man die inverse Variablentransformation durch, ergibt sich die Dispersionsgleichung für die Wellenausbreitung in den PML's zu:

$$\frac{k_x^2}{bc} + \frac{k_y^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab} = k_0^2. \quad (3.21)$$

Die Dispersionsgleichung stellt ein Ellipsoid mit folgenden Lösungen in Kugelkoordinaten dar:

$$\begin{aligned}k_x &= k_0 \sqrt{bc} \sin \theta \cos \phi \\ k_y &= k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \sin \phi \\ k_z &= k_0 \sqrt{ab} \cos \theta.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, dass die einzelnen Ausbreitungskoeffizienten durch die Wahl von a , b und c festgelegt werden können. Ausgehend von einer allgemeinen Lösung für die Wellengleichung

$$\mathbf{E} = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z) \cdot e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (3.23)$$

erhält man die Zusammengehörigkeit der Lösungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} , für die Wellengleichungen in den PML's. Für die Ausbreitungskoeffizienten k_x , k_y und k_z werden die Lösungen aus der Dispersionsgleichung (3.22) in das Induktionsgesetz eingesetzt:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = -j\omega\mu_0[\Lambda]\mathbf{H} \\ H_x &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(E_z \sqrt{\frac{c}{a}} \sin \theta \sin \phi - E_y \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta \right) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(E_x \sqrt{\frac{a}{b}} \cos \theta - E_z \sqrt{\frac{c}{b}} \sin \theta \cos \phi \right) \\ H_z &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(E_y \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \theta \cos \phi - E_x \sqrt{\frac{a}{c}} \sin \theta \sin \phi \right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Aus dem Durchflutungssatz ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = j\omega\epsilon_0[\Lambda]\mathbf{E} \\ E_x &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(H_y \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta - H_z \sqrt{\frac{c}{a}} \sin \theta \sin \phi \right) \\ E_y &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(H_z \sqrt{\frac{c}{b}} \sin \theta \cos \phi - H_x \sqrt{\frac{a}{b}} \cos \theta \right) \\ E_z &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(H_x \sqrt{\frac{a}{c}} \sin \theta \sin \phi - H_y \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \theta \cos \phi \right).\end{aligned}\quad (3.25)$$

3.3 Reflexionsfaktor

Um den Reflexionsfaktor an der PML-Schicht bestimmen zu können wird ein Problem untersucht, bei dem eine ebene Welle schräg auf die PML-Schicht auftrifft (siehe Abbildung 3.1). Jede beliebig polarisierte ebene Welle kann in eine transversal elektrische Welle (TE) und in eine transversal magnetische Welle (TM) zerlegt werden. Für die Berechnung des Reflexionsfaktors wird ein verlustfreies, lineares und isotropes Medium angenommen. Weiters wird eine relative Dielektrizitätszahl ϵ_r^* und eine relative Permeabilitätszahl μ_r^* im Medium eingeführt. Aus Gleichung (3.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}[\epsilon] &= \epsilon_0 \epsilon_r^*[\Lambda], \\ [\mu] &= \mu_0 \mu_r^*[\Lambda].\end{aligned}\quad (3.26)$$

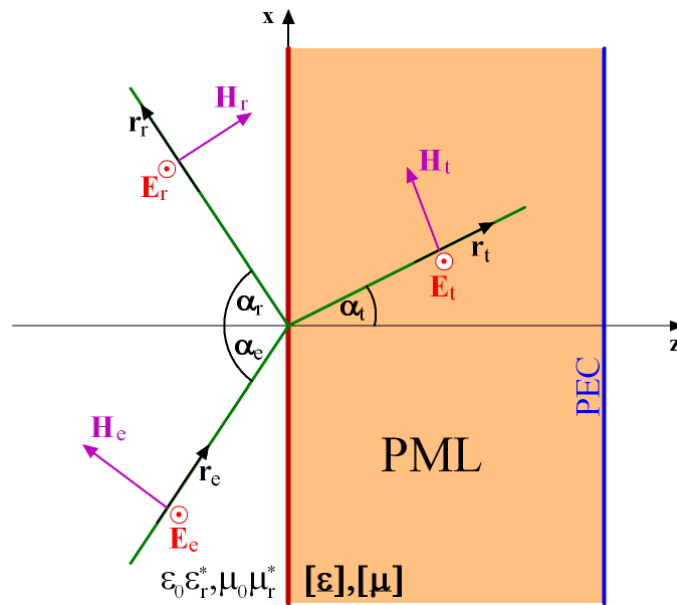


Abbildung 3.1: Eine ebene Welle trifft auf die Grenzschicht zwischen homogenen Medium und PML.

Die Wellenimpedanz im Medium ist definiert durch:

$$Z_0^* = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r^*}{\epsilon_0 \epsilon_r^*}}. \quad (3.27)$$

Weiters wird angenommen, dass sich eine TE-Welle in der xz-Ebene ausbreitet. Die Dispersionsgleichung vereinfacht sich dadurch zu:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{0P} \sqrt{bc} \sin \theta \\ k_y &= 0 \\ k_z &= k_{0P} \sqrt{ab} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$k_{0P}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r. \quad (3.29)$$

Die einzelnen Komponenten für die einfallende TE-Welle können wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 E_{y_e} &= E_e e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_e)} \\
 H_{x_e} &= -\frac{1}{Z_0^*} E_e \cos \alpha_e e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_e)} \\
 H_{z_e} &= \frac{1}{Z_0^*} E_e \sin \alpha_e e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_e)} \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_e &= (x \sin \alpha_e + z \cos \alpha_e) k_0^*
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Für die reflektierte Welle gilt:

$$\begin{aligned}
 E_{y_r} &= E_r e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_r)} \\
 H_{x_r} &= \frac{1}{Z_0^*} E_r \cos \alpha_r e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_r)} \\
 H_{z_r} &= \frac{1}{Z_0^*} E_r \sin \alpha_r e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_r)} \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_r &= (x \sin \alpha_r - z \cos \alpha_r) k_0^*
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

mit

$$k_0^{*2} = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r^* \mu_0 \mu_r^* \tag{3.32}$$

Der in die PML's eintretende Wellenanteil kann durch

$$\begin{aligned}
 E_{y_d} &= E_d e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d)} \\
 H_{x_d} &= \frac{1}{Z_{0P}} E_d \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \alpha_d e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d)} \\
 H_{z_d} &= \frac{1}{Z_{0P}} E_d \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \alpha_d e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d)} \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d &= (x \sqrt{bc} \sin \alpha_d - z \sqrt{ab} \cos \alpha_d) k_{0P}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

dargestellt werden. Z_{0P} ist die Wellenimpedanz für die PML's:

$$Z_{0P} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \tag{3.34}$$

An der Grenzfläche $z = 0$ zwischen Luft und PML's müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke stetig sein. Als Grenzflächenbedingung für die elektrische Feldstärke erhält man:

$$E_e e^{-jk_0 x \sin \alpha_e} + E_r e^{-jk_0 x \sin \alpha_r} = E_d e^{-jk_0 \sqrt{bc} x \sin \alpha_d}. \quad (3.35)$$

Weiters müssen die Phasen an der Grenzfläche übereinstimmen. Damit ergibt sich für die Winkel das Brechungsgesetz

$$k_0^* \sin \alpha_e = k_0^* \sin \alpha_r = k_{0P} \sqrt{bc} \sin \alpha_d. \quad (3.36)$$

Daraus ergeben sich, um Reflexionsfreiheit an der Grenzfläche zu erhalten, die Bedingungen:

$$\sqrt{bc} = 1, \quad (3.37)$$

$$\mu_r \epsilon_r = \mu_r^* \epsilon_r^*, \quad (3.38)$$

$$\alpha_e = \alpha_r = \alpha_t. \quad (3.39)$$

Mit dieser Festlegung erhält man für die Grenzflächenbedingungen der Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke:

$$E_e + E_r = E_d$$

$$E_e - E_r = \frac{Z_0}{Z_{0P}} \sqrt{\frac{b}{a}} E_d. \quad (3.40)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich der Reflexionsfaktor für eine TE-Welle für die PML:

$$r_{TE} = \frac{E_r}{E_e} = \frac{1 - \frac{Z_0}{Z_{0P}} \sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + \frac{Z_0}{Z_{0P}} \sqrt{\frac{b}{a}}}. \quad (3.41)$$

Analog dazu kann man für eine TM-Welle den Reflexionsfaktor bestimmen:

$$r_{TM} = \frac{E_r}{E_e} = \frac{\frac{Z_0}{Z_{0P}} \sqrt{\frac{b}{a}} - 1}{\frac{Z_0}{Z_{0P}} \sqrt{\frac{b}{a}} + 1}. \quad (3.42)$$

Damit an den PML's nichts reflektiert wird, muss der Reflexionsfaktor Null sein. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = 1$$

$$Z_0 = Z_{0P}. \quad (3.43)$$

Für die PML Parameter muss also gelten:

$$a = b = \frac{1}{c}, \quad (3.44)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_r^*, \quad (3.45)$$

$$\mu_r = \mu_r^*. \quad (3.46)$$

Damit ist gewährleistet, dass die PML's unabhängig vom Einfallswinkel der Welle keine Reflexion aufweisen.

3.4 Bestimmung der Materialparameter aus dem PML's Tensor

Für die Materialeigenschaften wird für die PML's folgender Ansatz verwendet [30]:

$$a = (1 - j) e, \quad (3.47)$$

wobei e für eine reelle Zahl steht. Der Materialtensor $[\mathbf{\Lambda}]$ für die PML's, kann unter Berücksichtigung von (3.44) ausgedrückt werden als:

$$[\mathbf{\Lambda}] = \begin{bmatrix} e - je & 0 & 0 \\ 0 & e - je & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e + je}{2e^2} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Die komplexen Materialwerte für die Dielektrizitätszahl, die Permeabilitätszahl und den spezifischen Widerstand können durch

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma_E]}{j\omega} + [\epsilon]$$

$$[\mu] = \frac{[\sigma_M]}{j\omega} + [\mu] \quad (3.49)$$

$$[\rho] = [[\sigma_E] + j\omega[\epsilon]]^{-1}$$

beschrieben werden. Aus (3.45), (3.46) und dem Materialtensor für die PML's $[\Lambda]$ (3.48) erhält man hernach:

$$\begin{aligned} [\sigma_E] &= -\text{Im} \{[\Lambda]\} \epsilon_0 \epsilon_r^* \omega \\ [\epsilon] &= \text{Re} \{[\Lambda]\} \epsilon_0 \epsilon_r^* \\ [\sigma_M] &= -\text{Im} \{[\Lambda]\} \mu_0 \mu_r^* \omega \\ [\mu] &= \text{Re} \{[\Lambda]\} \mu_0 \mu_r^*. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die relative Permeabilität μ_r^* und die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r^* beziehen sich auf das Medium, das an die PML's grenzt. Mit dieser Erweiterung können die PML's alle linearen, isotropen Materialien reflexionsfrei abschließen.

3.5 Abschätzung der PML-Parameter

Die Wahl der Parameter spielt für die Konvergenz der Methode der konjugierten Gradienten (CG) eine wichtige Rolle [7]. Sie beeinflussen sowohl die Rechenzeit, als auch die Genauigkeit der Lösung. Die komplexe PML-Konstante e wird auf folgende Weise ermittelt:

$$\frac{-\ln \rho}{\left(\frac{1}{r_{max}} + \beta_{min}\right) 2nh} \leq e \leq \frac{-\ln d}{\left(\frac{1}{r_{min}} + \beta_{max}\right) 2h}, \quad (3.51)$$

wobei n die Anzahl der Finite-Elemente-Schichten, h die Dicke einer Schicht, ρ der maximale Reflexionskoeffizient, β die Ausbreitungskonstante und d die maximale Dämpfung in einem Element sind. Mit r_{max} und r_{min} wird der maximale und der minimale Abstand zwischen PML-Schicht und der Quelle im Problemgebiet angegeben [7].

Durch die Geometrie des Problems ist bereits die Unterteilung durch die finiten Elemente gegeben. Die Dicke h einer PML-Schicht sollte etwa der Dicke der letzten Schicht vor den PML's entsprechen. Die gewählte Anzahl der PML-Schichten und die gewählte Schichtdicke einer PML-Schicht haben einen großen Einfluss auf den Reflexionsfaktor und auf die Konvergenz des Problems.

Die PML's werden anhand eines Magic-T's untersucht (siehe Kapitel 5.2). Die Abbildungen 3.2 und 3.3 zeigen die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors von der gewählten Schichtdicke für verschiedene Anzahlen von PML-Schichten, bezogen auf die minimale Schichtdicke h_{min} :

$$h_{min} = \frac{-\ln \rho}{\left(\frac{1}{r_{max}} + \beta_{min}\right) 2ne}. \quad (3.52)$$

Alle Werte kleiner -40 dB liegen unter dem Wert des geforderten Reflexionskoeffizienten von $\rho = 10^{-4}$.

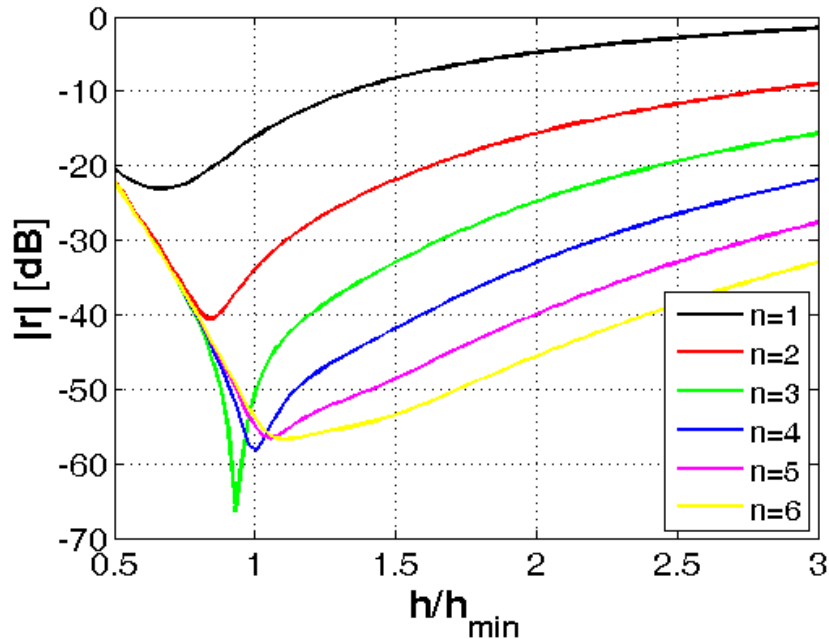


Abbildung 3.2: Reflexionskoeffizient in Abhängigkeit von der Schichtdicke, dargestellt für verschiedene Anzahlen von Schichten bei der \mathbf{A}, V Formulierung.

Für die \mathbf{A}, V Formulierung arbeiten die PML's ab einer Anzahl von 2 PML-Schichten (siehe Abbildung 3.2). Bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung ist es möglich, nur eine PML-Schicht zu verwenden (siehe Abbildung 3.3). Je mehr PML-Schichten modelliert werden, desto breiter wird das Frequenzspektrum, das mit Hilfe der PML's gedämpft werden kann. Wie aus den Abbildungen 3.2 und 3.3 ersichtlich ist, sollte man für die Berechnung der PML-Parameter den unteren Wert aus Gleichung (3.51) verwenden. Weiters kann man die untere Grenze für die verschiedenen Anzahlen der PML's Schichten optimieren:

$$\rho_{\mathbf{A},V} = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-4} & n \geq 4 \\ 2 \cdot 10^{-4} & n = 3 \\ 3 \cdot 10^{-3} & n = 2 \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\rho_{\mathbf{T},\Phi} = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4} & n \geq 3 \\ 5,5 \cdot 10^{-3} & n = 2 \\ 4,5 \cdot 10^{-3} & n = 1 \end{cases} \quad (3.54)$$

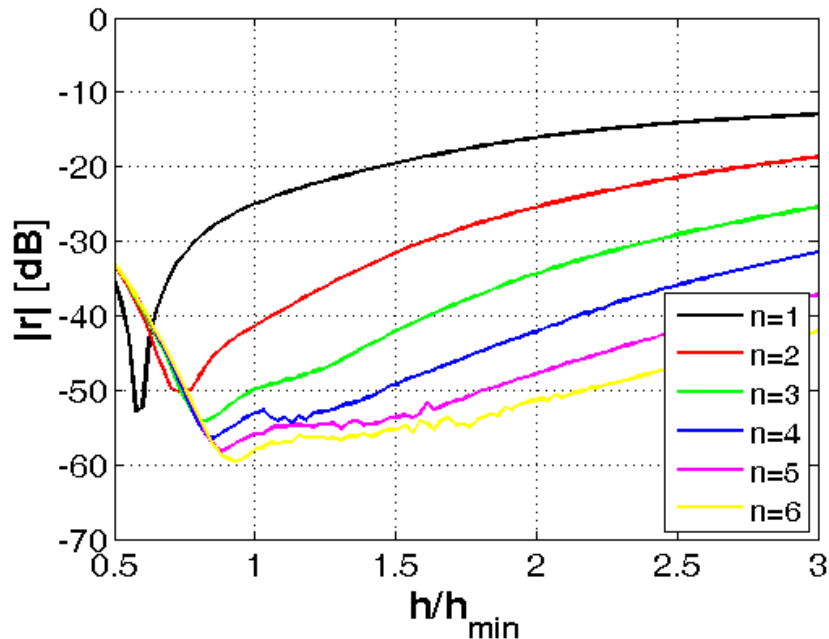


Abbildung 3.3: Reflexionskoeffizient in Abhängigkeit von der Schichtdicke, dargestellt für verschiedene Anzahlen von Schichten bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung.

Die maximale Dämpfung ist mit $d = 3 \cdot 10^{-3}$ für die hier verwendeten isoparametrischen Elemente gegeben [7]. Um die Rechenzeit so gering wie möglich zu halten, sollte die Anzahl der PML-Schichten minimal gewählt werden. Abbildung 3.4 zeigt die Abhängigkeit der Rechenzeit von der Wahl des PML-Parameters für die \mathbf{A}, V Formulierung, Abbildung 3.5 für die \mathbf{T}, Φ Formulierung .

Die PML's sind nicht für den Abschluss eines mit Verlusten behafteten Mediums realisiert worden. Die zusätzlichen Reflexionen durch die Verluste im Medium können durch den Reflexionsfaktor zwischen einem verlustlosen Material und einem verlustbehafteten Material ausgedrückt werden.

$$r = \frac{1 - \sqrt{\frac{j\omega\epsilon}{\sigma + j\omega\epsilon}}}{1 + \sqrt{\frac{j\omega\epsilon}{\sigma + j\omega\epsilon}}} \quad (3.55)$$

Die Reflexion an der PML-Schicht wird aber kaum durch die in der Praxis auftretenden Verluste beeinflusst. Leitwerte kleiner als 1 mS/m haben so gut wie keine Auswirkung auf den Reflexionsfaktor. Leitwerte über 100 mS/m lassen durch die starke Dämpfung Wellenausbreitung nur über kurze Entfernungen zu. In diesem Fall ist es einfacher, statt einer PML's das Problemgebiet so zu erweitern, dass die Welle vollständig durch die Verluste im Medium

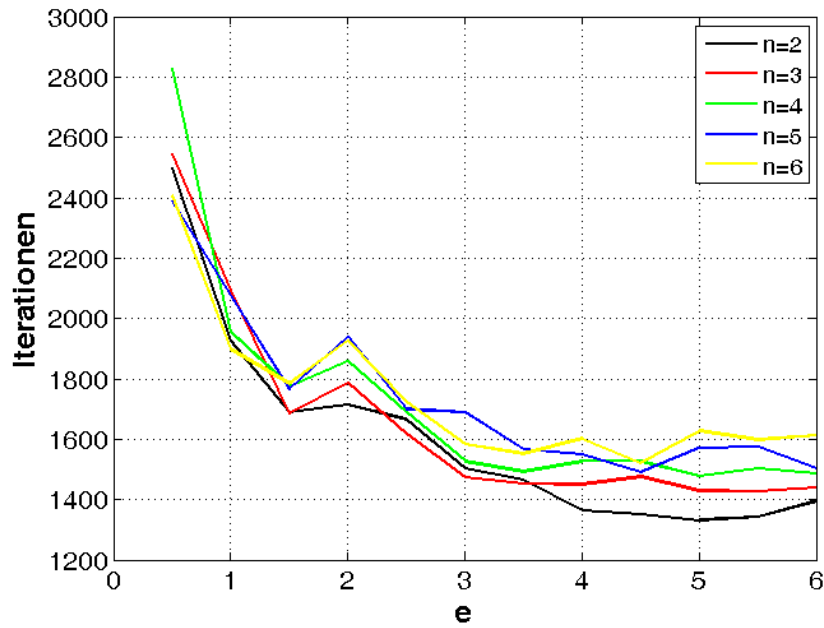


Abbildung 3.4: Einfluß des PML-Parameters e auf die benötigten CG-Iterationen für unterschiedliche Anzahlen von PML-Schichten für die \mathbf{A}, V Formulierung.

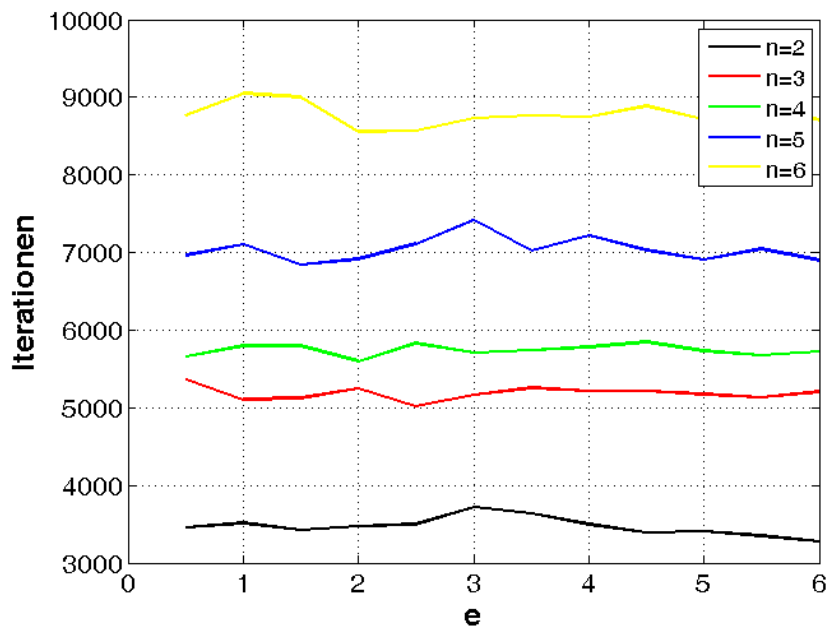


Abbildung 3.5: Einfluß des PML-Parameters e auf die benötigten CG-Iterationen für unterschiedliche Anzahlen von PML-Schichten für die \mathbf{T}, Φ Formulierung:

gedämpft wird.

Tabelle 3.1 zeigt die Abhängigkeit der Reflexion von den Verlusten im Medium an der PML-Schicht. Der Reflexionsfaktor wurde für die \mathbf{A}, V Formulierung zu $r_T(\mathbf{A}, V)$ und für die \mathbf{T}, Φ Formulierung zu $r_T(\mathbf{T}, \Phi)$ für verschiedene Anzahlen von PML-Schichten n bestimmt.

n	σ [S/m]	$r_T(\mathbf{A}, V)$	$r_T(\mathbf{T}, \Phi)$
3	0	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$7.01 \cdot 10^{-6}$
	0.001	$2.73 \cdot 10^{-6}$	$4.15 \cdot 10^{-6}$
	0.01	$2.98 \cdot 10^{-5}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$
	0.1	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$3.53 \cdot 10^{-7}$
2	0	$2.30 \cdot 10^{-5}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$
	0.001	$2.85 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$
	0.01	$6.40 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-5}$
	0.1	$5.74 \cdot 10^{-7}$	$3.19 \cdot 10^{-7}$
1	0	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$8.48 \cdot 10^{-5}$
	0.001	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$6.30 \cdot 10^{-5}$
	0.01	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$1.90 \cdot 10^{-5}$
	0.1	$1.84 \cdot 10^{-8}$	$2.34 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 3.1: Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten von den Verlusten im Medium für die \mathbf{A}, V Formulierung und für die \mathbf{T}, Φ Formulierung

3.6 Modellierung der PML-Schichten

Ein weiteres Augenmerk ist auf das Grenzgebiet zwischen zwei PML-Schichten mit unterschiedlichen Hauptdämpfungsrichtungen zu richten [7]. Im Bereich, in dem sich die PML's überlappen würden, ist in der Modellierung eine PML-Schicht (PML1) bis zum Rand zu führen und die zweite PML-Schicht (PML2) endet an PML1 (siehe Abbildung 3.6(a)). In diesem Fall werden die einfallenden Wellen auf jeden Fall gedämpft. Die Wahl der Hauptdämpfungsrichtung ist im überlappenden Bereich beliebig zu wählen.

Ist der Bereich mehrere Wellenlängen vom Problemgebiet entfernt, kann man den sich überlappenden Bereich auch eliminieren und die Stirnseiten der PML's mit elektrischen Randbedingungen abschließen (siehe Abbildung 3.6(b)). In diesem Fall stellt aber die Kante zwischen den PML's einen Kurzschluss dar, an dem die Welle reflektiert wird.

Die Wahl der Modellierung hängt vom Abstand zwischen der PML-Kante und der Quelle

ab. Wird ein Gebiet kleiner als die Wellenlänge λ modelliert, sollten sich die PML-Schichten überlappen (siehe Abbildung 3.6(a)).

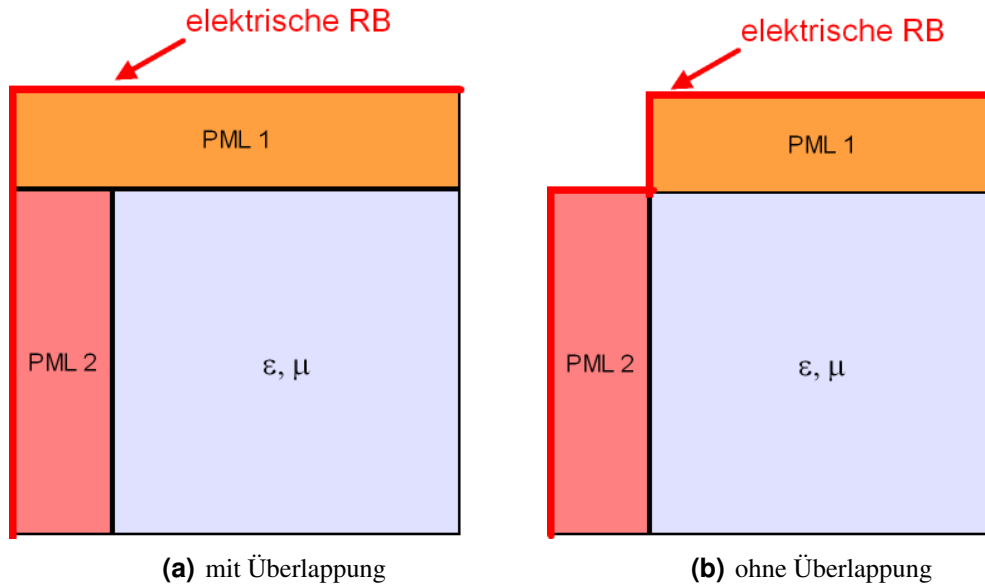


Abbildung 3.6: Zwei PML-Schichten, die aneinander grenzen, können auf zwei verschiedene Arten modelliert werden.

3.7 Anpassung von Leitungen mit Hilfe von PML's

Mit der Hilfe von PML's ist es möglich, eine Leitung auf einer Leiterplatte fast perfekt abzuschließen (siehe Abbildung 3.7). Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c im Trägermaterial der Leiterplatte geringer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$ in der umgebenden Luft:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \tag{3.56}$$

Für den Abschluss einer Leiterbahn werden zwei unterschiedliche PML's benötigt. Ein Beispiel für den Abschluss einer Leiterbahn, bestehend aus Hin- und Rückleiter ist in Abbildung 3.7(a) dargestellt. Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit wurde nur ein Ausschnitt abgebildet. Die Umgebung des Leiters muss natürlich auch modelliert werden. Die Leiter sind in der Darstellung blau gekennzeichnet und das Trägermaterial der Leiterplatte grün. Die Leiter werden auch in den PML's selbst weitergehend modelliert und am Ende am besten kurzgeschlossen. Die PML's für die Luft (PML 1) sind gelb dargestellt und die PML's für die Anpassung an die relative Dielektrizitätszahl des Trägermaterials der Leiterplatte (PML 2) sind rot gefärbt.

Für die PML's, die die Leiterplatte abschließen (Abbildung 3.7(a) PML 2) setzt man die Ausbreitungskonstante

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

in (3.51) ein, wählt einen Wert für die komplexe PML's Konstante e_2 und bestimmt die Schichtdicke der PML's h aus:

$$\frac{-\ln \rho}{\left(\frac{1}{r_{max}} + \beta_2\right) 2n e_2} \leq h \leq \frac{-\ln d}{\left(\frac{1}{r_{min}} + \beta_2\right) 2 e_2}.$$

Aus der Schichtdicke h der PML's in der Leiterplatte und der Ausbreitungskonstanten

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

bestimmt man die neue komplexe PML's Konstante e_1 für die PML's außerhalb der Leiterplatte:

$$\frac{-\ln \rho}{\left(\frac{1}{r_{max}} + \beta_1\right) 2nh} \leq e_1 \leq \frac{-\ln d}{\left(\frac{1}{r_{min}} + \beta_1\right) 2h}.$$

Die PML's dämpfen das Feld außerhalb des Leiters, damit verschwindet der Strom im Leiter (siehe Abbildung 3.7(b)). Eine so abgeschlossene Leitung verhält sich damit wie eine unendlich lange Leitung, also so als ob die Leitung perfekt angepasst wäre. In Abbildung 3.7(b) ist eine Halbperiode der sich auf der Leitung ausbreitenden elektrischen Welle und eine Halbperiode der durch die PML's gedämpften elektrischen Welle zu erkennen. Der Zeitpunkt der Abbildung wurde so gewählt, dass die PML's genau im Minimum zwischen den beiden Halbwellen beginnen. Es ist zu erkennen, dass am Ende der Leitung die Welle verschwunden ist und damit gibt es keine Energieübertragung entlang des Leiters mehr.

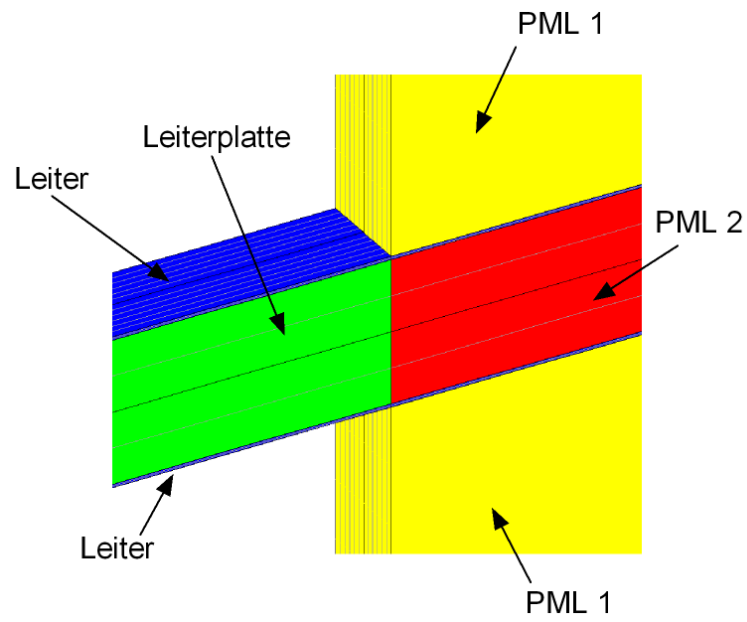
3.8 Einfluss der PML's auf die Energieberechnungen

Das Material, das zur Modellierung der PML's verwendet wird, kann man sich als komplexes anisotropes Material mit negativem Leitwert vorstellen. Der negative Leitwert kann als von der in die PML's eingestrahltene Energie abhängige Quelle im Material betrachtet werden. Die Bestimmung der Scheinleistung im Feldgebiet [31] liefert somit die Summe der Scheinleistungen der Quellen und der PML's:

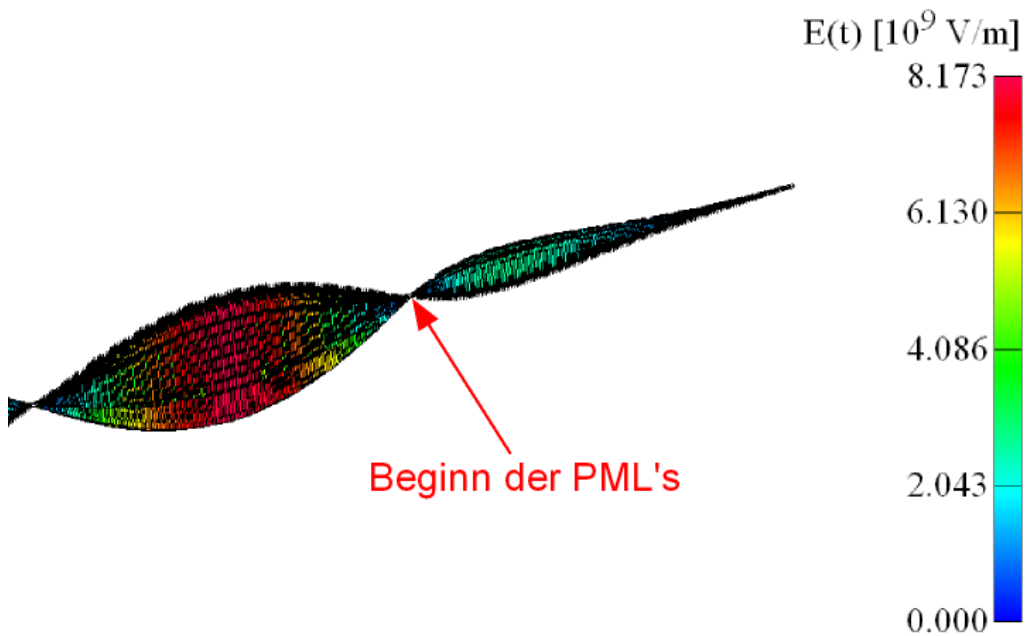
$$S = P + jQ = P_{Joule} + 2j\omega(W_m - W_e) + P_{PML} + jQ_{PML}. \quad (3.57)$$

Die von der PML's absorbierte Leistung lässt sich über das Oberflächenintegral des Poynting'schen Vektors bestimmen:

$$S_{PML} = P_{PML} + jQ_{PML} = \int_{\Gamma_{PML}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (3.58)$$



(a) Geometrie der Modellierung



(b) Feldbild der elektrischen Feldstärke

Abbildung 3.7: Abschluss einer Leiterbahn bestehend aus Hin- und Rückleiter auf einer Leiterplatte mit einer relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 4.2$ mit Hilfe von PML's.

Mit Hilfe des Poyntingschen Vektors kann auf die Scheinleistung im Problemgebiet zurückgerechnet werden, wenn für die Bestimmung der thermischen Verluste P_{Joule} , der magnetischen Energie W_m und der elektrischen Energie W_e die PML's bei der Integration ausspart.

Kapitel 4

Untersuchung von Wellenphänomenen

Für die Modellierung von dreidimensionalen Wellenproblemen sind im allgemeinen Fall auch die gesamte Umgebung und die Ränder des Problemgebietes zu berücksichtigen. In diesem Kapitel werden die verschiedenen Möglichkeiten erläutert, wie der Aufwand für die Simulation so gering wie möglich gehalten wird und welche Möglichkeiten es gibt, das Problem anzuregen.

4.1 Modellierung von Wellenproblemen

Bei der Modellierung von Wellenproblemen kommt dem Rand des Problems (ferner Rand) eine besondere Bedeutung zu. Es ist nicht möglich, den fernen Rand unendlich weit weg anzuordnen, da dadurch auch der Diskretisierungsaufwand unendlich groß werden würde. Eine große Anzahl von Wellenproblemen findet man heute in gedruckten Schaltungen. Die Leiterbahnen sind aus Kupfer mit einer Leitfähigkeit von $5.7 \cdot 10^7$ S/m [9], [10] und [18]. Es ist nicht immer erforderlich, den Leiter mit zu modellieren, insbesondere wenn die Verluste im Kupfer vernachlässigt werden können.

4.1.1 Größe des Problemgebietes

Damit der Rand keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis hat ist es für die Modellierung von Leiterstrukturen auf gedruckten Schaltungen ausreichend, die fernen Ränder gleich weit weg zu legen, wie es bei einer elektrostatischen oder magnetostatischen Simulation nötig wäre.

Zur Simulation von Antennen- oder Wellenausbreitungsproblemen bei gedruckten Schaltungen ist es nötig, die fernen Ränder mit PML's abzuschließen. Dabei hat sich vom Speicher- und Rechenaufwand her ein Abstand von 0.5 bis 3λ als ideal erwiesen. Die Anzahl der PML-Schichten sollte dabei so gering wie möglich gehalten werden.

Aus den durchgeführten Untersuchungen haben sich folgende Erfahrungswerte ergeben: Für die A, V Formulierung sind drei PML-Schichten ausreichend. Falls der geringste Abstand zur Quelle aber kleiner als 0.5λ ist, sollte man 3 – 5 PML-Schichten verwenden. Bei der

Verwendung der \mathbf{T}, Φ Formulierung sind 1 – 2 PML-Schichten ausreichend und bei Unterschreitung des minimalen Abstandes von 0.5λ reichen 2 – 4 PML-Schichten aus. Sollen Leiterbahnen mit Hilfe von PML's angepasst bzw. abgeschlossen werden, so sind, unabhängig davon ob man die \mathbf{A}, V Formulierung oder die \mathbf{T}, Φ Formulierung verwendet, 3 – 5 PML-Schichten zu modellieren. Der Leiter selbst wird durch die PML-Schichten hindurchgeführt und am Ende kurzgeschlossen. Die PML's werden um den Leiter herum modelliert. Die Anzahl und Dicke der PML-Schichten in transversaler Richtung zum Leiter sollte etwa gleich sein wie in Ausbreitungsrichtung.

4.1.2 Berücksichtigung der Eindringtiefe

Die Stromdichteverteilung im Leiter ist von der Frequenz, der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätszahl abhängig. Die bekannte Formel für die Eindringtiefe δ gilt nur für die Halbebene:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}. \quad (4.1)$$

Die Stromdichte im Leiter nimmt exponentiell mit dem Abstand r zur Oberfläche ab:

$$J(r) = J_0 \cdot (e^{-r/\delta}). \quad (4.2)$$

Für die Simulation ist der Bereich von $0 < r < 3 - 5\delta$ wichtig. In diesem Bereich fließt der größte Teil des Stromes. Für Kupfer ist die Eindringtiefe in Tabelle 4.1 im für die Simulationen interessanten Frequenzbereich dargestellt.

Als 2D-FEM-Rechenbeispiel wurde eine Leiterplatte mit einer Substratdicke von 1.5 mm gewählt. Die Leiterbahnbreite beträgt 1 mm und die Kupferstärke $35 \mu\text{m}$. Die Stromverteilung ist für einen Strom von 1 A und für die Frequenzen 10 Mhz, 100 MHz, 1 GHz und 10 GHz in Abbildung 4.1 gegenübergestellt. In den Feldbildern ist der linke Rand der Leiterbahn abgebildet.

Es ist zu erkennen, dass die Formel für die Eindringtiefe (4.1) hier nicht stimmt. Die Stromdichteverteilung ist nicht gleichmäßig.

4.1.3 Modellierung der Verluste im Medium

Die Verluste in den Medien werden durch einen Verlustwinkel $\tan \delta$ angegeben. Bei der FEM kann dieser Verlustwinkel nicht direkt verwendet werden. Ausgehend vom verallgemeinerten Durchflutungssatz [23]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \implies \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} \quad (4.3)$$

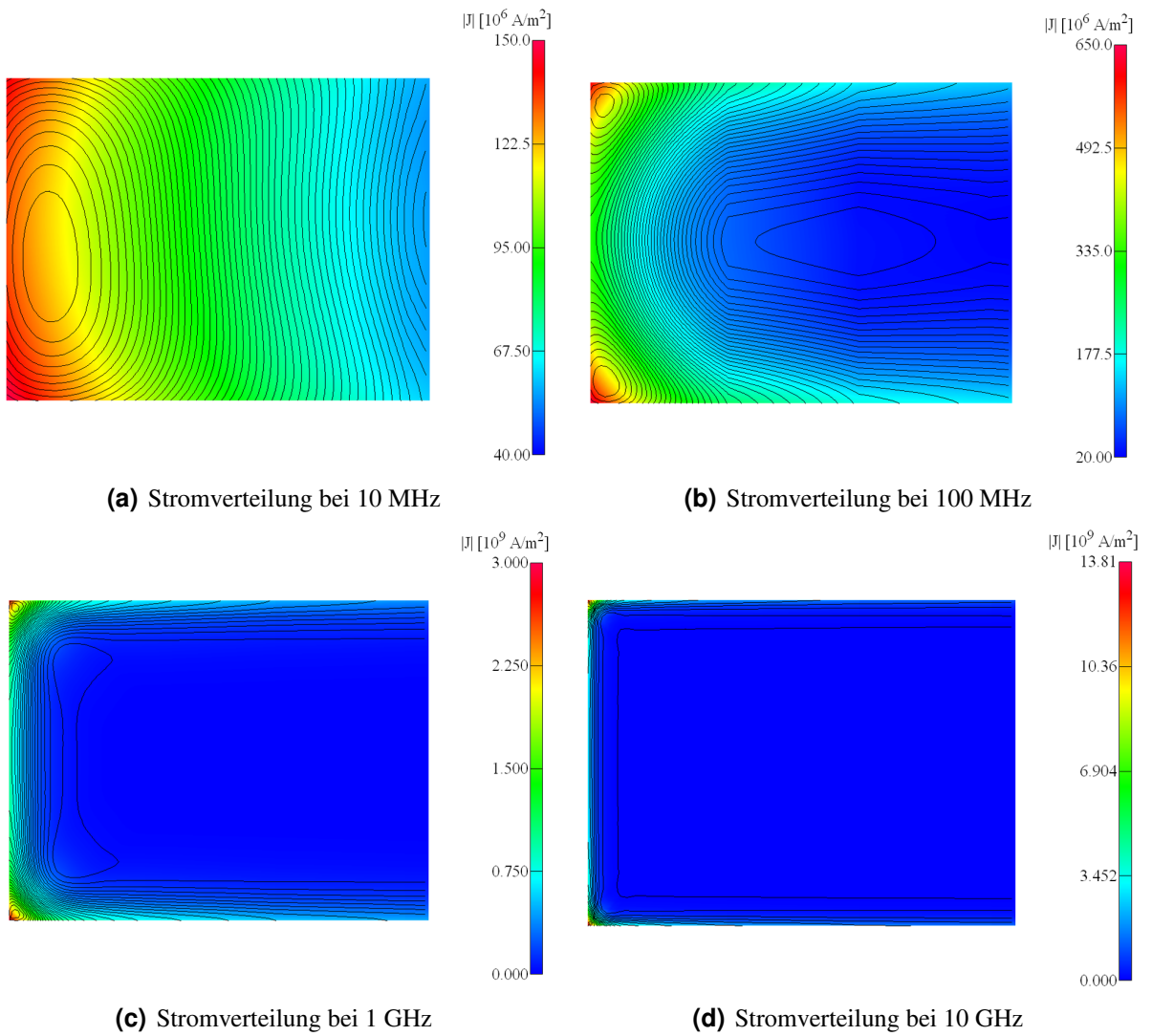


Abbildung 4.1: Vergleich der Stromverteilung in einer 1 mm breiten Leiterbahn mit einer Kupferstärke von 35 μm bei 10 MHz, 100 MHz, 1 GHz und 10 GHz

f	δ
MHz	m
1	$66.6627 \cdot 10^{-6}$
10^1	$21.0806 \cdot 10^{-6}$
10^2	$6.6663 \cdot 10^{-6}$
10^3	$2.1081 \cdot 10^{-6}$
10^4	$666.6267 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 4.1: Frequenzabhängigkeit der Eindringtiefe in Kupfer

kann man durch die Einführung einer komplexen Dielektrizitätskonstante ϵ_c den Verlustwinkel $\tan \delta$ wie folgt im Medium berücksichtigen [16]:

$$\begin{aligned}\sigma + j\omega\epsilon &= j\omega\epsilon_c = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'') \\ \sigma + j\omega\epsilon &= \omega\epsilon'' + j\omega\epsilon' \\ \epsilon' &= \epsilon \\ \epsilon'' &= \frac{\sigma}{\omega} \\ \tan \delta &= \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Die Frequenz f , die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r und der Verlustfaktor $\tan \delta$ sind durch die Aufgabenstellung vorgegeben. Die Verluste im Medium werden als zusätzliche Leitfähigkeit σ berücksichtigt. Aus Gleichung (4.4) ist ersichtlich, dass die Verluste stark von der Frequenz abhängig sind. Bei Simulation eines großen Frequenzbereiches sind daher die Verluste für die jeweiligen Frequenzen anzupassen.

4.2 Vereinfachungen zur Reduzierung des Simulationsaufwandes

In den meisten Fällen ist es nicht erforderlich, ein Modell zu entwerfen, das ganz genau der Realität entspricht oder zumindest möglichst Realitätsgetreu ist. Entsprechend der Leiterstruktur und dem Umstand, welche physikalischen Größen ausgewertet werden sollen, kann man die Modelle vereinfachen. Manchmal ist es auch vom Rechen- und/oder Speicheraufwand her erforderlich, Rechenmodelle zu entwerfen, die auf der vorhandenen Hardware in einer vernünftigen Zeit simulierbar sind.

Stehen Messergebnisse zur Verfügung, sollte man vom einfachsten Modell ausgehend den Aufwand so weit erhöhen bis die Ergebnisse zufriedenstellend sind.

4.2.1 Verwendung von 2D-FEM oder 3D-FEM

Als erstes muss festgestellt werden, ob es sich bei dem zu simulierenden Problem um ein ebenes oder um ein 3D-Feldproblem handelt. Im ersten Fall ist es ausreichend, aus einem 2D-FEM-Modell die Leitungsbeläge $R'(\omega)$, $L'(\omega)$, $G'(\omega)$ und $C'(\omega)$ zu berechnen und in die Leitungsgleichungen einzusetzen (siehe Anhang A). Mit Hilfe eines Netzwerkmodells kann auch das Übersprechen auf einfachen geraden Leitungsanordnungen ermittelt werden, wie in Anhang B ausgeführt ist.

In den Simulationen hat sich gezeigt, dass für die Bestimmung der Leitungsbeläge 5 – 10

Stützpunkte pro Frequenzdekade, für ein Beispiel das in Kapitel 5.5 untersucht wird, ausreichend sind. Im Frequenzbereich zwischen 10 MHz und 1 GHz wurden alle 100 MHz und im Frequenzbereich zwischen 1 GHz und 10 GHz wurden alle 500 MHz die Leitungsbeläge aus einer 2D-FEM-Wirbelstromberechnung bestimmt (siehe Abbildung 4.2).

Lässt sich ein Problem überhaupt nicht oder nur teilweise auf ein ebenes Problem zurückführen, so kommt man um eine 3D-FEM-Berechnung nicht herum. In diesem Fall ist für jeden benötigten Frequenzpunkt eine eigene Simulation notwendig. Spiegelung ist in der Feld-

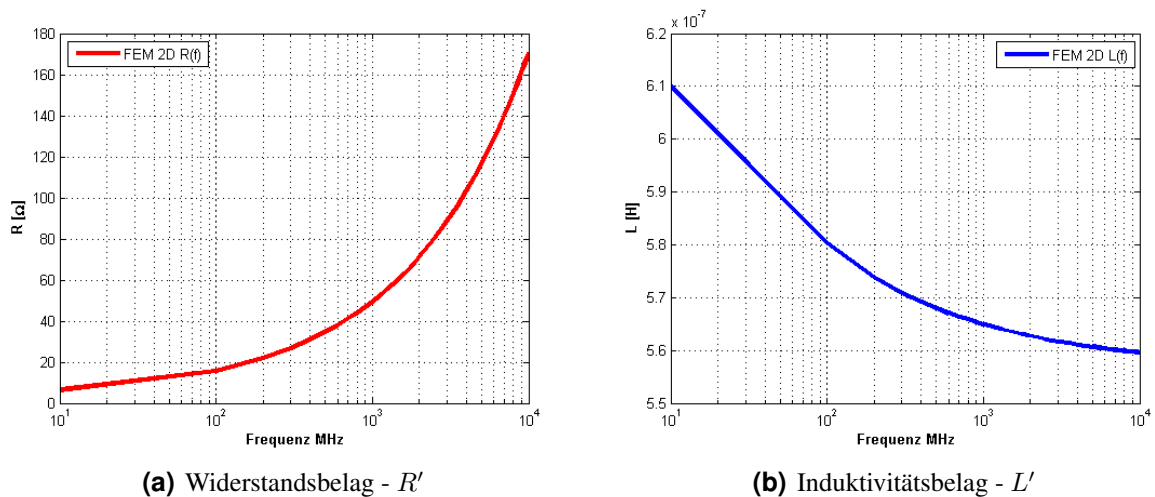


Abbildung 4.2: Änderung der Leitungsbeläge für eine Leitung über einer Massefläche.

numerik eine sehr gute Methode, die Problemgröße zu reduzieren. Man nutzt Symmetrieeigenschaften des Problems aus, um nur einen Teil modellieren zu müssen. Bei gedruckten Schaltungen liegt häufig eine Leiteranordnung über einer Massefläche vor. Im Abschnitt 5.1 wird gezeigt, dass es möglich ist, die Spiegelfläche statt der Massefläche zu modellieren, ohne dass das Simulationsergebnis verfälscht wird. Der Simulationsaufwand reduziert sich dadurch erheblich, da die Modellierung der Massefläche inklusive Modellierung der Eindringtiefe erspart wird.

4.2.2 Elimination des Leiters

Die Verluste im Kupfer sind in den meisten Fällen zu vernachlässigen. Es genügt, die Oberfläche des Leiters als elektrische Randbedingung zu modellieren und die finiten Elemente im Inneren des Leiters zu eliminieren. Die finiten Elemente im Inneren des Leiters müssen nicht unbedingt gelöscht werden, jedoch verkleinert sich dadurch das zu lösende Gleichungssystem.

Die elektrischen Feldstärken weisen an Kanten und Ecken die größten Änderungen auf. Man benötigt mehr finite Elemente im Bereich von Ecken und Kanten, um den Simulationsfehler

möglichst gering zu halten. Der Mehraufwand für die Modellierung der Ecken und Kanten ist aber viel geringer als die Modellierung der sehr kleinen Eindringtiefe im Leiter.

4.3 Anregungsarten bei der \mathbf{A}, V Formulierung

Bei der Simulation ist es notwendig, im Problemgebiet eine Quelle vorzugeben. Diese Quelle stellt die Anregung für das zu simulierende Problem dar. Die Anregung ist so zu wählen, dass die Quelle möglichst wenig Einfluss auf das Ergebnis der Simulation hat. In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Möglichkeiten der Anregung bei der Simulation von 3D-Feldproblemen mit der \mathbf{A}, V Formulierung vorgestellt werden. Es wird untersucht, wie die Art der Anregung den Feldverlauf verändert oder stört und welche Gegenmaßnahmen zu treffen sind, damit das Simulationsergebnis nicht durch die Art der Anregung verfälscht wird.

4.3.1 Anregung durch Vorgabe des elektrischen Feldes

Bei der \mathbf{A}, V Formulierung kann die Tangentialkomponente des magnetischen Vektorpotentials entlang einer Seite oder einer Kante vorgegeben werden (siehe Abbildung 4.3). Die Tangentialkomponente des magnetischen Vektorpotentials erhält man aus der angelegten Spannung U , der Frequenz ω und dem Abstand s :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -j\omega\nabla v - j\omega\mathbf{A} \\ V &= 0 \\ \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} .\end{aligned}\tag{4.5}$$

Aus dem Zusammenhang

$$\int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}\tag{4.6}$$

erhält man einen Ausdruck für die Spannung. Für die Anregung wird die Spannung U zwischen den Leitern angegeben. Vom Vektor der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} wird nur eine Richtung verwendet:

$$\mathbf{E} \implies E_{tan} .\tag{4.7}$$

Daraus ergibt sich für die tangentielle Komponente des magnetischen Vektorpotentials:

$$A_{tan} = \frac{U}{\omega s}.\tag{4.8}$$

Die Länge s ist in diesem Fall der Abstand zwischen den Punkten, zwischen denen die Spannung angelegt wird. Der so ermittelte A_{tan} Wert wird als Anregung in allen in dieser Arbeit untersuchten Beispielen verwendet.

Viele der in dieser Arbeit untersuchten Beispiele sind Probleme in gedruckten Schaltungen

auf Leiterplatten. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird mit einer Spannung von 1 V und einer Leiterplattendicke $s = 1.5$ mm der Wert von

$$A_{tan} = \frac{106.1032954}{f} \left[\frac{Vs}{m} \right] \quad (4.9)$$

für die weiteren Berechnungen verwendet. Durch diese Art der Anregung wird eine ideale Spannungsquelle realisiert. Ist eine Anpassung der Quelle erforderlich, so ist ein Vorwiderstand zu modellieren. Für die Realisierung einer hochohmigen Quelle (ideale Stromquelle) besteht die Möglichkeit einer Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmten Magnetfeldes.

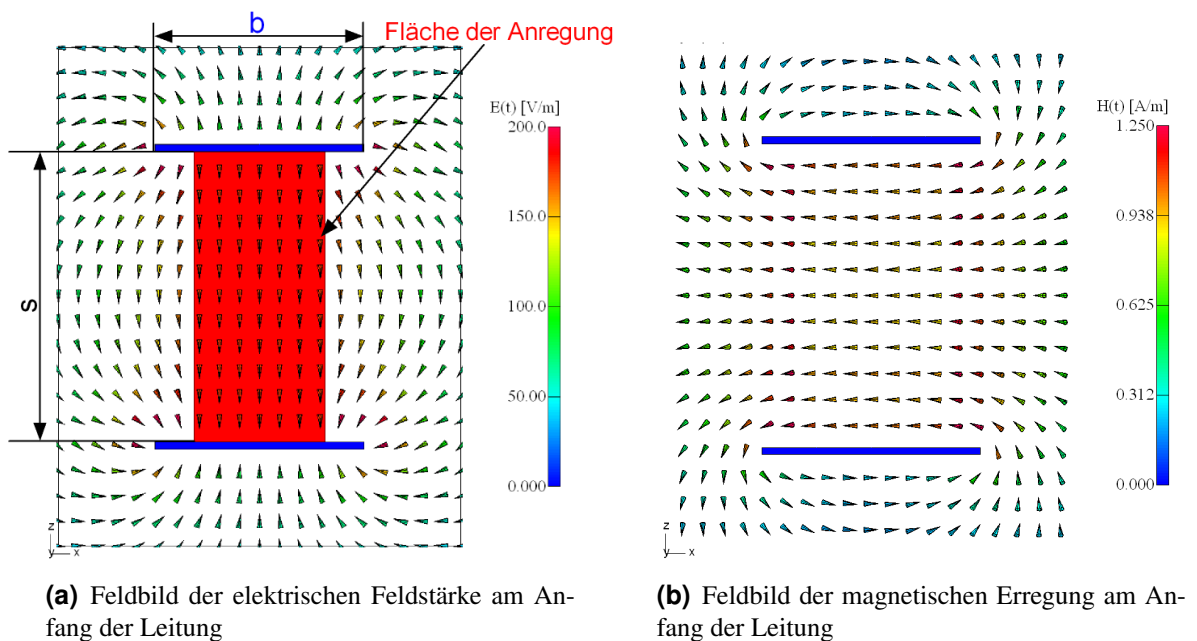


Abbildung 4.3: Anregung durch Vorgabe des elektrischen Feldes am Anfang einer $b = 1.08$ mm breiten Leiterbahn.

4.3.2 Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmten Magnetfeldes

Um ein elektromagnetisches Wellenproblem anzuregen genügt es, ein magnetisches Feld, das am Leiteranfang orthogonal zur Ausbreitungsrichtung steht, vorzugeben. In der Software EleFAnT3D besteht die Möglichkeit, das Biot-Savart Feld einer kleinen Leiterschleife zu modellieren (siehe Abbildung 4.4). Bei dieser Methode ist es möglich, den Innenwiderstand der Stromquelle durch die Parallelschaltung eines Widerstandes zu realisieren.

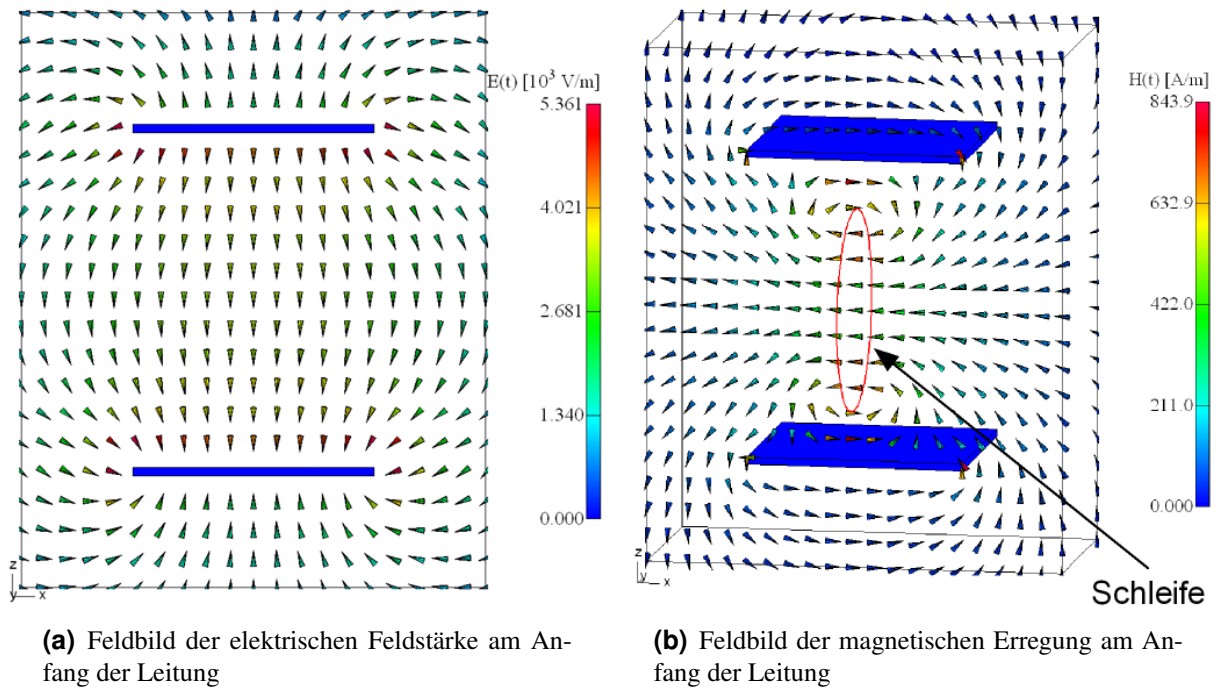


Abbildung 4.4: Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmten Magnetfeldes am Anfang einer 1.08 mm breiten Leiterbahn.

4.4 Anregungsarten bei Verwendung der \mathbf{T}, Φ Formulierung

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Anregungsmöglichkeiten bei der Simulation von 3D-Feldproblemen mittels der \mathbf{T}, Φ Formulierung beschrieben werden.

4.4.1 Anregung durch Vorgabe des magnetischen Feldes

Analog zur Vorgabe des elektrischen Feldes bei der \mathbf{A}, V Formulierung kann bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung das magnetische Feld vorgeben werden:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla\Phi$$

$$\Phi = 0$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}. \tag{4.10}$$

4.4.2 Anregung durch Einprägung eines durch das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmtes Magnetfeldes

Eine weitere Möglichkeit, ein elektromagnetisches Wellenproblem bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung anzuregen, ist die Vorgabe eines Stromfadens in der Mitte des Leiters. Dabei ist zu beachten, dass der Stromfaden einen geschlossenen Stromkreis darstellen muss. Für die FEM stellt das Biot-Savart Feld des Stromfadens die Anregung dar.

4.5 Abschätzung der Verluste unter Zuhilfenahme einer 2D-FEM-Berechnung

Für die meisten Leiterstrukturen kann man zur Abschätzung der Verluste P_{Cu} im Leiter und zur Abschätzung der Verluste P_ϵ im Medium auf ein Leitungsmodell zurückgreifen. Die Leiterstruktur wird dann so betrachtet, als ob es sich um eine gerade Anordnung, bestehend aus Hin- und Rückleiter handelt. Die Verluste im Kupfer und in der Leiterplatte lassen sich aus folgender Überlegung abschätzen:

$$\begin{aligned} P_\epsilon &= U^2 \cdot G \\ P_{Cu} &= I^2 \cdot R. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der Spannungsverlauf und der Stromverlauf auf der Leitung sind durch

$$\begin{aligned} U(z) &= U^+ (e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(2l-z)}) \\ I(z) &= \frac{U^+}{Z_0} (e^{-\gamma z} - r_2 e^{-\gamma(2l-z)}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

gegeben. Für die in positive Richtung sich ausbreitende Spannungswelle setzt man

$$U^+ = \frac{U_0}{1 + r_2 e^{-2\gamma l}} \quad (4.13)$$

ein. Die Ausbreitungskonstante γ und die Wellenimpedanz Z_0 erhält man aus den Leitungsbelägen zu:

$$\gamma = \sqrt{[R' + j\omega L'] \cdot [G' + j\omega C']} \quad (4.14)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}. \quad (4.15)$$

Der Reflexionsfaktor r_2 am Ende der Leitung ist definiert durch:

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}. \quad (4.16)$$

Führt man die komplexe Multiplikation aus, so erhält man für die Verluste P_{Cu} im Leiter und für die Verluste P_ϵ im Medium :

$$\begin{aligned}
 P_\epsilon &= G \cdot U(z) \cdot U^*(z) = G'l \cdot \left| \frac{U_0^2 (e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(2l-z)})^2}{(1 + r_2 e^{-2\gamma l})^2} \right| \\
 P_{Cu} &= R \cdot I(z) \cdot I^*(z) = R'l \cdot \left| \frac{U_0^2 (-e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(2l-z)})^2}{(1 + r_2 e^{-2\gamma l})^2 Z_0^2} \right|. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Es ist einfacher, zuerst die vorher ermittelten Werte in die Gleichungen 4.17 einzusetzen und erst danach den Betrag zu bilden. Aus diesen Zusammenhängen lassen sich die Verluste P_{Cu} im Leiter und die Verluste P_ϵ im Medium gut abschätzen. Die Verluste sind jedoch frequenzabhängig. Für jeden Frequenzpunkt sind die Leitungsparameter und damit die Verluste neu zu bestimmen.

4.6 Unterschiedliche Arten der Auswertung der Berechnungsergebnisse

Die Art der Auswertung ist von der Art der Modellierung abhängig. Diese wiederum hängt von den gesuchten Feldgrößen ab. Werden bei der Modellierung PML's verwendet, so ist es nicht möglich, die Energie auszuwerten. Dafür müsste die Energie im System konstant bleiben und das ist bei PML's nicht der Fall.

4.6.1 Auswertung über die Energie

Sind keine PML's im Problemgebiet vorhanden, so kann man die Impedanzmatrix aus der Energie und den Strömen am Anfang und am Ende der Leitung bestimmen. Die Verlustleistung P_{Joule} , die Energie im magnetischen Feld W_m und die Energie im elektrischen Feld W_e bestimmen sich aus:

$$\begin{aligned}
 P_{Joule} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*}{\sigma} d\Omega \\
 W_m &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* d\Omega \\
 W_e &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* d\Omega. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Im zeitharmonischen Fall gibt es keine nichtlinearen Materialien. Die komplexe Leistung S lässt sich aus den elektrischen Verlusten P_{Joule} , der Energie im magnetischen Feld W_m und der Energie im elektrischen Feld W_e bestimmen [31]:

$$S = P_{Gen} + jQ_{Gen} = P_{Joule} + 2j\omega (W_m - W_e). \quad (4.19)$$

Die Impedanz errechnet sich dann aus dem Effektivwert des Stromes und der komplexen Leistung S :

$$Z = \frac{2 S}{I I^*} = \frac{S}{I_{eff} I_{eff}^*}. \quad (4.20)$$

Diese Art der Berechnung ist die genaueste, da die Mittelung der Energie über das gesamte Problemgebiet erfolgt.

4.6.2 Auswertung mittels des Poyntingschen Vektors

Wurden bei der Modellierung PML's verwendet oder will man den Energiefluss durch eine bestimmte Fläche (Port) bestimmen, so bildet man den Poyntingschen Vektor \mathbf{S} und integriert über die dazugehörige Fläche:

$$P_{Gen} + jQ_{Gen} = \int_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (4.21)$$

Die Genauigkeit dieser Methode hängt von der Modellierung der Portfläche ab.

4.6.3 Bestimmung des Leitungsstromes

Die dritte Möglichkeit die Impedanzmatrix zu bestimmen ist die Auswertung über den Leitungsstrom. Dazu benutzt man die integrale Form des Durchflutungssatzes [23]:

$$\int_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \underbrace{\int_{\Gamma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_I$$

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I. \quad (4.22)$$

Voraussetzung für diese Art der Auswertung ist, dass der Leiter modelliert ist. Eine Auswertung, bei der die Leiterstruktur durch elektrischen Randbedingungen modelliert wurde, kann nicht auf diese Weise erfolgen.

4.7 Bestimmung der Vierpolparameter aus den Feldgrößen

Für den Vergleich von Simulationsergebnissen, die mit verschiedenen Methoden berechnet wurden oder zum Vergleich von Simulationsergebnissen und Messergebnissen werden in den meisten Fällen die Streuparameter verwendet. Bis auf die Lösungsmethode mit transfiniten Elementen [8], [32] sind die Streuparameter nicht direkt aus der FEM-Lösung extrahierbar. Man wählt den Umweg über die Impedanzmatrix, Admittanzmatrix oder Kettenmatrix. Die Bestimmung der Impedanzmatrix, Admittanzmatrix oder Kettenmatrix und daraus die Ermittlung der Streuparameter ist im Anhang C angeführt.

Für den Vergleich der Streuparameter ist es wichtig, dass für jeden Frequenzpunkt immer die gleiche Referenzimpedanz verwendet wird.

Für die Bestimmung von Vierpolparametern eines symmetrischen Problems wird nur eine Berechnung pro Frequenzpunkt benötigt. Der Ausgang des Vierpols darf dann aber nicht kurzgeschlossen werden oder leerlaufend sein.

Am besten schließt man den Vierpol mit einem Widerstand ab oder man passt den Ausgang mit PML's an. Der Abschluss mit einem Widerstand hat Vorteile in Bezug auf die Rechenzeit und die Konvergenz des Problems. Für die Anpassung des Leiters ist es notwendig, die Wellenimpedanz Z_0 zu kennen. Die Wellenimpedanz $Z_0(\omega)$ kann für jeden Frequenzpunkt aus einer 2D-FEM-Wirbelstromberechnung ermittelt werden. In der 3D-FEM-Modellierung ist es aber nicht möglich, die Wellenimpedanz Z_0 exakt zu modellieren, da man nur einem reellen Abschlußwiderstand nachbilden kann.

Ist die Struktur des Problems nicht symmetrisch, so sind pro Frequenzpunkt zwei Berechnungen notwendig. Der Grund liegt im Unterschied der Hauptdiagonaleinträge der Impedanz-, Admittanz- oder Kettenmatrix.

4.8 Frequenzeinfluß auf die Simulation

Wird die Arbeitsfrequenz immer weiter erhöht, können sich auch höhere Moden entlang der Leitung ausbreiten. Diese Moden verursachen hohe Verluste im Dielektrikum und die Abstrahlung der Leitung muss berücksichtigt werden [18]. Für die weitere Betrachtung werden die Wellen im Trägermaterial (Leitungswellen) und die Wellen außerhalb des Trägermaterials (Oberflächenwellen und Abstrahlung) getrennt betrachtet.

Ein signifikanter Energietransport zwischen der Leitungswelle und der Oberflächenwelle findet immer dann statt, wenn die Phasengeschwindigkeiten beider Wellen nahezu ident sind.

In [18] wird die kleinste Synchronisationsfrequenz f_s angegeben, bei der ein Energietransfer von der Leitungswelle zur Oberflächenwelle stattfindet:

$$f_s = \frac{c_0 \arctan(\epsilon_r)}{\sqrt{2}\pi h \sqrt{\epsilon_r - 1}}. \quad (4.23)$$

Dabei ist h die Dicke und ϵ_r die relative Dielektrizitätszahl des Trägermaterials und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.24)$$

Für die in dieser Arbeit untersuchten Leiterplatten mit Trägermaterialdicken von 1.5 mm und 300 μm und einer relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 4.2$ liegen die Synchronfrequenzen bei:

$$\begin{aligned} f_s(h = 1.5 \text{ mm}) &= 33.62 \text{ GHz} \\ f_s(h = 300 \mu\text{m}) &= 168.11 \text{ GHz}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Weiters wird in [18] die untere Grenzfrequenz f_c für den TE_{10} Mode angegeben:

$$f_c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}(2w + 0.8h)}. \quad (4.26)$$

Hier ist w die Leiterbahnbreite, h die Dicke des Trägermaterials und ϵ_r die relative Dielektrizitätszahl des Trägermaterials. Für die gegenständlichen Leiterplatten mit Trägermaterialdicken von 1.5 mm und 300 μm und einer relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 4.2$ liegen die Grenzfrequenzen bei:

$$\begin{aligned} f_c(w = 1 \text{ mm}, h = 1.5 \text{ mm}) &= 45.71 \text{ GHz} \\ f_c(w = 100 \mu\text{m}, h = 300 \mu\text{m}) &= 332.46 \text{ GHz}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aus den Gleichungen (4.23) und (4.26) ist sofort zu sehen, dass die Abstrahlung und die Ausprägung höherer Moden erst bei höheren Frequenzen eine Rolle spielt. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Simulationen bis 5 GHz durchgeführt. Bei dieser Frequenz kommt es weder zur Ausprägung höherer Moden noch zu verstärkter Abstrahlung der Leiterbahnen. Für die Abstrahlung ist aber auch die Leiterbahnführung zu berücksichtigen. Wenn diese beispielsweise eine Schleife bildet, kommt es auch bei niedrigeren Frequenzen zu verstärkter Abstrahlung.

Abbildung 4.5 zeigt den Zusammenhang zwischen der Leiterbahnbreite und der Grenzfrequenz des Grundmodes TE_{10} für Trägermaterialdicken von 1.5 mm und 300 μm mit einer relativen Dielektrizitätszahl des Trägermaterials von $\epsilon_r = 4.2$. Die Synchronfrequenz f_s ist als strichpunktierte Linie dargestellt. Für dünne Leiterbahnen beginnt die Leitung abzustrahlen, bevor sich ein höherer Mode ausbreiten kann.

Die Feldverteilung der elektrischen Feldstärke ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Für die Si-

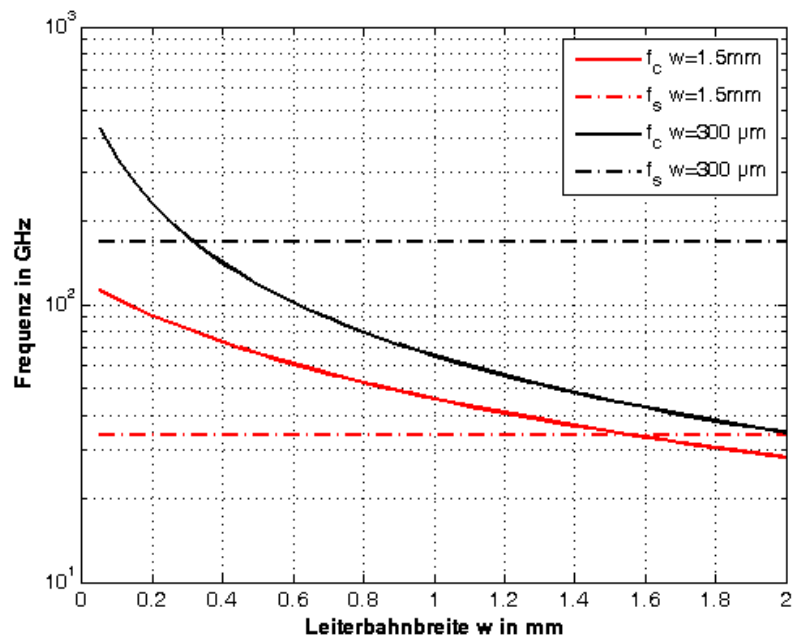


Abbildung 4.5: Grenzfrequenz des ersten Grundmodes TE_{10} in Abhängigkeit von der Leiterbahnbreite

mulation wurde eine 2 mm breite Leiterbahn mit einer Trägermaterialdicke von 1.5 mm und einer relativen Dielektrizitätszahl des Trägermaterials von $\epsilon_r = 4.2$ verwendet. Abbildung 4.6 zeigt die Draufsicht auf die Mitte des Trägermaterials.

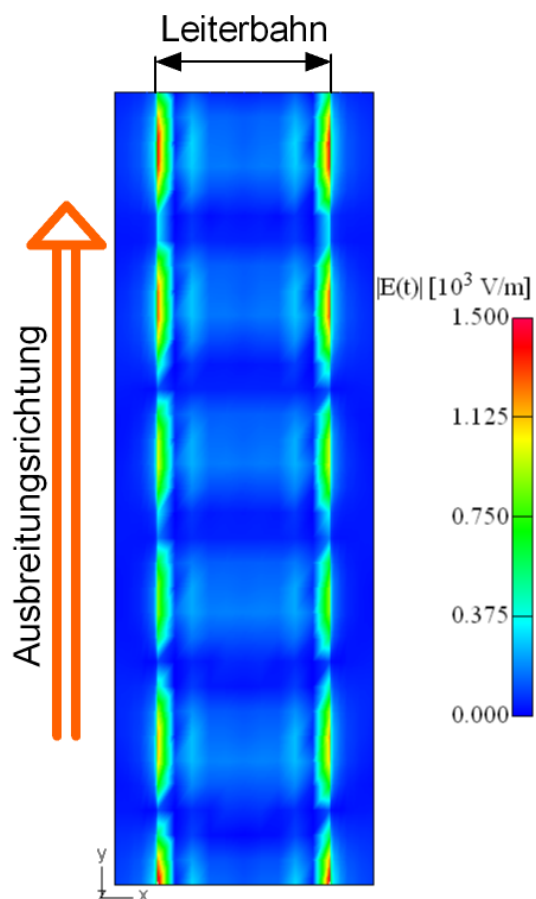


Abbildung 4.6: Feldbild der elektrischen Feldstärke im Trägermaterial unter einer 2 mm breiten Leiterbahn für einen TE_{10} Mode.

Kapitel 5

Berechnungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden jene elektromagnetischen Wellenprobleme beschrieben, die in dieser Arbeit behandelt werden.

5.1 Leiterbahn mit Stichleitung

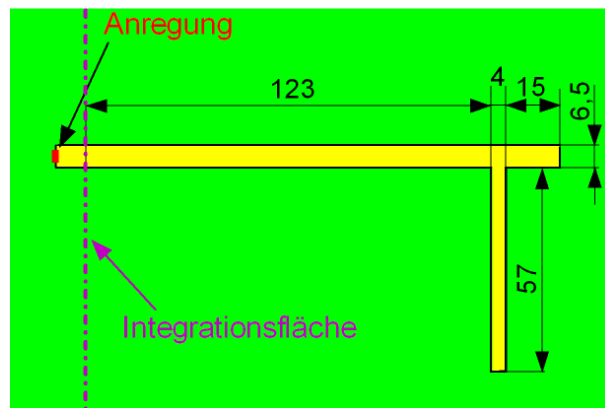
In diesem Abschnitt wird untersucht, auf welche Weise sich die verschiedenen Arten von Vereinfachungen in der Modellierung auf das Ergebnis auswirken [14], [15]. Weiters wird der Aufwand für die Simulation der Genauigkeit des Ergebnisses gegenübergestellt. Als typisches Problem wurde eine Leiteranordnung auf einer gedruckten Schaltung gewählt, für die auch Meßergebnisse zur Verfügung stehen. Untersucht wird der Frequenzbereich um die erste Resonanzfrequenz.

5.1.1 Simulationsbeispiel

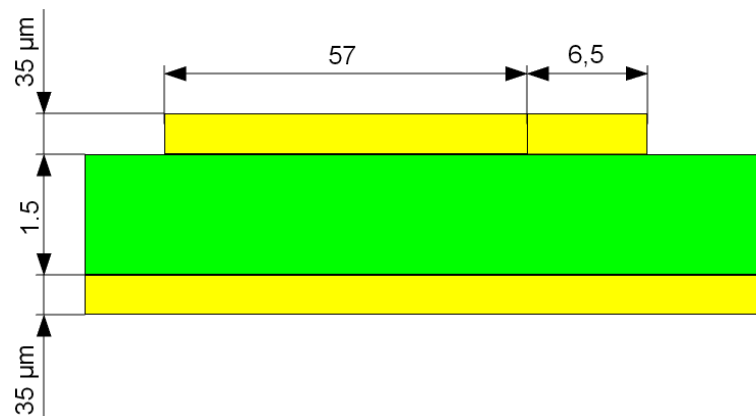
Die untersuchte Leiterbahn hat eine Abzweigung (Stichleitung) und ist über einer Massefläche angeordnet. Das Ende der Leiterbahn und das Ende der Stichleitung sind offen (siehe Abbildung 5.1). Die Leiterplatte hat eine Kupferdicke von $35 \mu\text{m}$, ein frequenzabhängiges Dielektrikum mit einem Verlustwinkel $\tan \delta = 0.0195 \pm 0.005$ und der Harzgehalt in der Leiterplatte beträgt 50% (siehe Abbildung 5.2):

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}. \quad (5.1)$$

Die Leitfähigkeit des Dielektrikums ist somit von der Frequenz und der Dielektrizitätszahl abhängig. Für die Simulationen wurde der Verlustwinkel auf $\tan \delta = 0.02$ gerundet. Die fernen Ränder sind als perfekte elektrische Leiter modelliert. Der Abstand zu den Rändern beträgt 100 mm. Die Anregung erfolgt wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben über die Vorgabe der Tangentialkomponente des magnetischen Vektorpotentials. Als Spannung ist $\hat{U} = 1 \text{ V}$



(a) 3D-FEM-Modell Ansicht 1



(b) 3D-FEM-Modell Ansicht 2

Abbildung 5.1: 3D-FEM-Modell einer Leitung mit Stichleitung angeordnet über einer Massefläche.

Dielektrizitätszahl in Abhängigkeit von der Frequenz und Harzgehalt
 Verlustfaktor von 1 MHz bis 10 GHz = $0,0195 \pm 0,005$

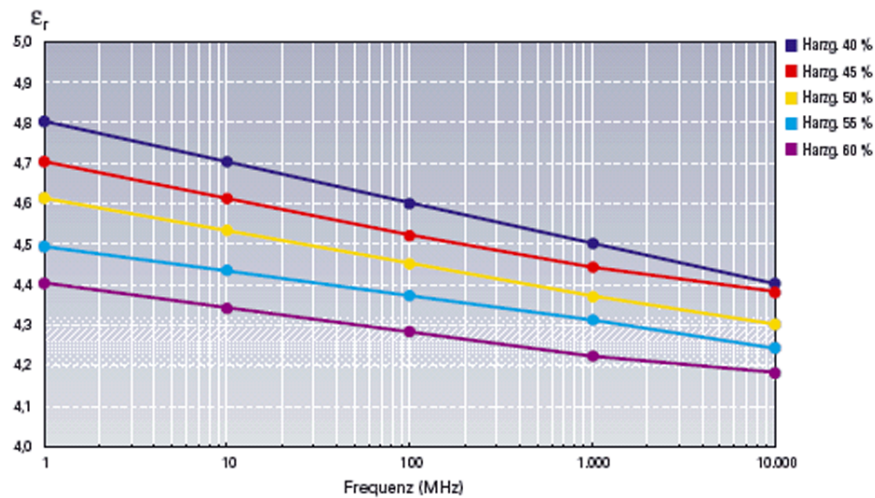


Abbildung 5.2: Dielektrizitätszahl in Abhängigkeit von von der Frequenz f

gewählt. Die Dielektrizitätszahl ergibt sich für jeden Frequenzpunkt zwischen 100 MHz und 1 GHz aus folgender Formel berechnet:

$$\epsilon_r = 4.6 - 0.075 * \log\left(\frac{f}{10^6}\right). \quad (5.2)$$

5.1.2 Modellierung

Der Modellierung der Eindringtiefe liegt eine Frequenz f von 450 MHz zu Grunde. Das Dielektrikum wird für jede Simulation als frequenzabhängig und verlustbehaftet angenommen.

5.1.2.1 Durchgeführte Simulationen

1. **Simulation 1:** Volle Modellierung der Leiteranordnung und der Schirmfläche mit Kupfer und Berücksichtigung der Eindringtiefe in Abhängigkeit von der Frequenz in den Leitern.
2. **Simulation 2:** Spiegelung des Problems an der Schirmfläche. Volle Modellierung der Leiteranordnung mit Kupfer und Berücksichtigung der Eindringtiefe in Abhängigkeit von der Frequenz im Leiter.
3. **Simulation 3:** Spiegelung des Problems an der Schirmfläche. Modellierung der Leiteranordnung als ideale Randbedingung unter Berücksichtigung der Leiterdicke. Die finiten Elemente im Leiterinneren sind nicht berücksichtigt.

Für den Vergleich der Simulationsergebnisse wird die Impedanz am Anfang der Leitung (Integrationsfläche) herangezogen (Tabelle 5.1). Abbildung 5.3 zeigt den Absolutbetrag der

f	Z_{S_1}	Z_{S_2}	Z_{S_3}	Z_{M_1}	Z_{M_1}
MHz	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω
420	323.1	317.5	307.9	105.2	457.3
430	540.6	526.1	504.5	167.5	438.9
440	1287.5	1266.9	1213.2	316.6	152.6
450	1010.5	1084.2	1253.4	646.9	92.5
460	466.3	483.1	512.5	319.0	66.8
470	293.5	300.2	311.1	182.2	51.9

Tabelle 5.1: Frequenzabhängigkeit der Eingangsimpedanz für die verschiedenen Berechnungsmodelle. Z_S ...Rechnung, Z_M ...Messung

Eingangsimpedanz. Wird bei der Modellierung das frequenzabhängige Verhalten des Leiterplattenmaterials vernachlässigt, tritt keine Ersparnis der Rechenzeit auf. Die Resonanzfrequenz ist jedoch von der gewählten Dielektrizitätszahl abhängig.

5.1.3 Messung

Die Messungen erfolgten mit zwei verschiedenen Messgeräten. Die Abweichung der Resonanzfrequenz zwischen den Messungen und der Unterschied der Impedanzwerte zwischen der Simulation und den Messungen liegt zum Teil an der Kalibrierung vor der Messung und daran, dass für die Simulation die Steckverbindungen nicht berücksichtigt werden können. Des weiteren ist der genaue Harzgehalt der Leiterplatte nicht feststellbar und die Verluste im Medium sind auch von der Luftfeuchtigkeit abhängig.

5.1.4 Vergleich des Simulationsaufwandes und der Rechenzeiten

Die verwendeten Materialien sind alle linear und isotrop. Die Rechenzeit ist somit in erster Linie von der Problemgröße abhängig. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Berechnungen wurden auf einem Desktop Computer mit einer Intel® Pentium 4 ® CPU 541, mit 1 MB L2 cache, 3.20 GHz, 800 MHz FSB und 2 GB Memory durchgeführt.

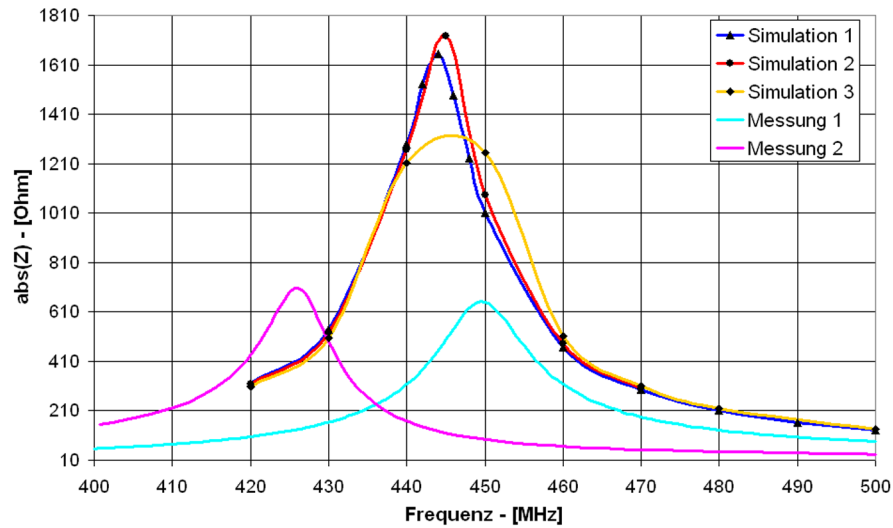


Abbildung 5.3: Impedanz am Eingang der Leiterstruktur

Aufwand	FE ¹	DOF ²	NOI ³	CT ⁴
S_1	122118	1902262	16771	84357
S_2	104118	1594094	13366	56068
S_4	95606	1441510	10359	38954

¹Anzahl der finiten Elemente; ²Anzahl der Freiheitsgrade im Gleichungssystem;
³Anzahl der CG Iterationen; ⁴Rechenzeit in Sekunden

Tabelle 5.2: Gegenüberstellung des Modellierungsaufwandes und des Rechenaufwandes

5.1.5 Schlußfolgerungen

Für alle Simulation von Wellenproblemen auf gedruckten Schaltungen ist es wichtig, den Rechenaufwand so gering wie möglich zu halten. Die Rechenzeit nimmt mit dem Modellierungsaufwand zu.

5.1.5.1 Ausnützung von Symmetrien

Die Spiegelung zur Ausnützung von Symmetrien ist der erste große Schritt in der Vereinfachung. In den meisten Fällen befindet sich ein Leiter über einer Massefläche. In diesem Fall kann man die Spiegelebene statt der Massefläche modellieren. Sind Hin- und Rückleiter gleich, dann kann das System in der Mitte zwischen beiden Leitern gespiegelt werden.

5.1.5.2 Modellierung von Leitern

Benötigt man die Verluste im Kupfer nicht so genügt es, die 3D-Leiterstruktur als idealen Leiter zu modellieren und die finiten Elemente im Inneren des Leiters zu eliminieren. Die Aussenkanten des Leiters sind besser zu unterteilen, um den Fehler bei sehr großen Feldstärkeänderungen möglichst gering zu halten.

5.1.5.3 Frequenzabhängige Materialien und Verluste

Die Dielektrizitätszahl wirkt sich direkt auf die Resonanzfrequenz der Leiteranordnung aus. Die Verluste sind in der Nähe der Resonanzfrequenz am höchsten. Eine Vernachlässigung oder Vereinfachung der frequenzabhängigen Verluste im Modell führt zu weniger Abweichungen im Simulationsergebnis, als ein Fehler bei der Bestimmung der Dielektrizitätszahl.

5.2 Magic-T

Es wurde nach einem Problem gesucht, bei dem es möglich ist, die Reflexion an den PML's mit Hilfe des Poyntingschen Satzes [31] auszuwerten. Die Wahl ist auf ein in der Mikrowellentechnik benutztes Magic-T [10] (siehe Abbildung 5.4) gefallen.

Die Haupteigenschaft des Magic-T ist, dass Port 1 vom Port 4 entkoppelt ist. Es findet keine direkte Signalübertragung zwischen Port 1 und Port 4 statt. In dieser Anwendung wird ein Signal am Port 1 eingeprägt. Das Signal wird auf Port 2 und Port 3 aufgeteilt. Port 2 und Port 3 sind mit PML's abgeschlossen. Findet an diesen Ports eine Reflexion statt, so wird ein Signal in Port 4 eingespeist. Das Signal am Port 4 wird maximal, wenn sich die Längen von Port 2 und Port 3 um $\frac{\lambda}{4}$ unterscheiden.

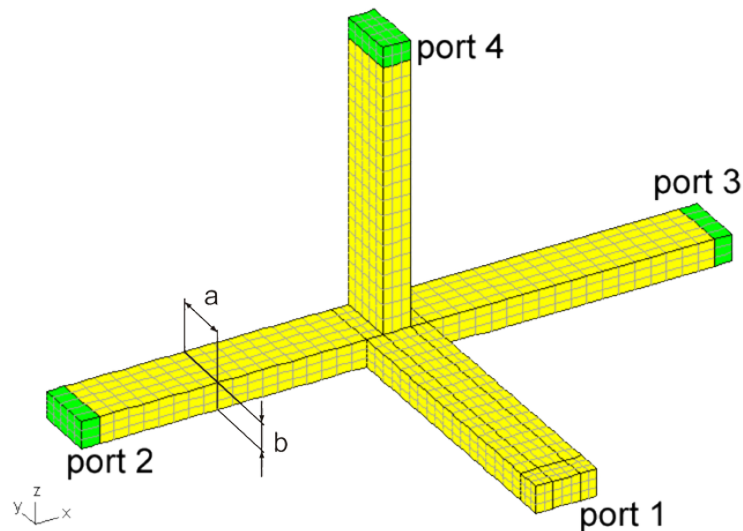


Abbildung 5.4: 3D-FEM-Simulationsmodell eines Magic-T's mit PML-Schichten.

5.2.1 Modellierung eines Magic-T

Für die Untersuchung wurde ein X-Band Hohlleiter gewählt. Die Abmessungen für das X-Band sind: $a = 22.86$ mm und $b = 10.16$ mm. Der Frequenzbereich des Hohlleiters liegt zwischen 8.2 GHz und 12.4 GHz [19], [21].

Die verwendete Frequenz ist 10 GHz. Die Parameter für die PML-Berechnungen wurden für die \mathbf{A}, V Formulierung und für die \mathbf{T}, Φ Formulierung mit folgenden Werten ermittelt:

$a = b = e = 2$, $r_{min} = r_{max} = 0.2$ m, $\beta = 209.44$, $\rho = 10^{-4}$ und $d = 3 \cdot 10^{-3}$. Gleichung (3.51) kann für die Berechnung der Höhe umgeformt werden zu:

$$h_{min} \geq \frac{-\ln \rho}{k_n \left(\frac{1}{r_{max}} + \beta \right) 2ne} = \frac{10.74 \cdot 10^{-3}}{k_n n} [\text{m}]$$

$$h_{max} \leq \frac{-\ln d}{k_n \left(\frac{1}{r_{max}} + \beta \right) 2e} = \frac{6.77 \cdot 10^{-3}}{k_n} [\text{m}]. \quad (5.3)$$

Der Reflexionsfaktor ist als Verhältnis der komplexen Leistung am Port 4 zur komplexen Leistung am Port 2 definiert. Die komplexe Leistung wird mit Hilfe des Poyntingschen Satzes berechnet [31]:

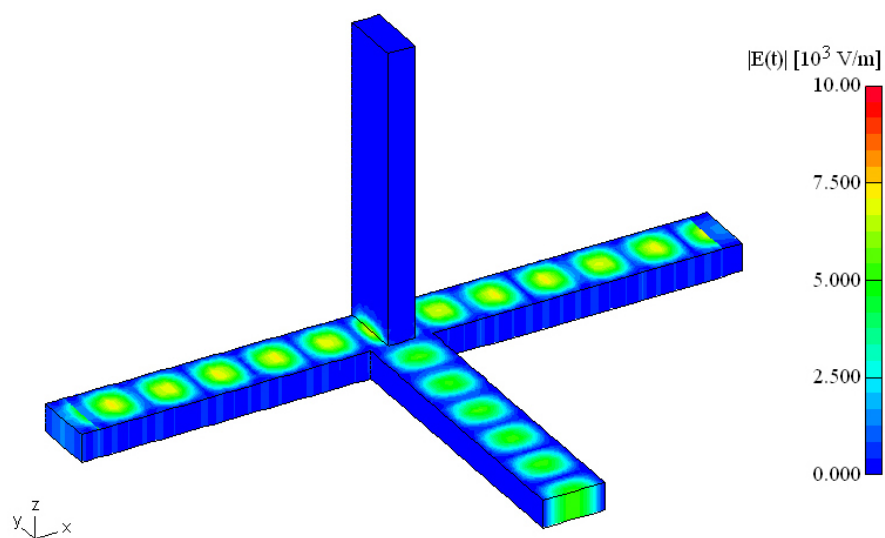
$$P + jQ = \int_{port} \underline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{port} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (5.4)$$

Für die Auswertung war ein maximaler Reflexionskoeffizient kleiner als 10^{-4} gefordert. Bei dieser Untersuchung zeigte sich auch, dass es bei PML's mit der \mathbf{T} , Φ Formulierung ausreichend ist, nur eine PML-Schicht zu modellieren.

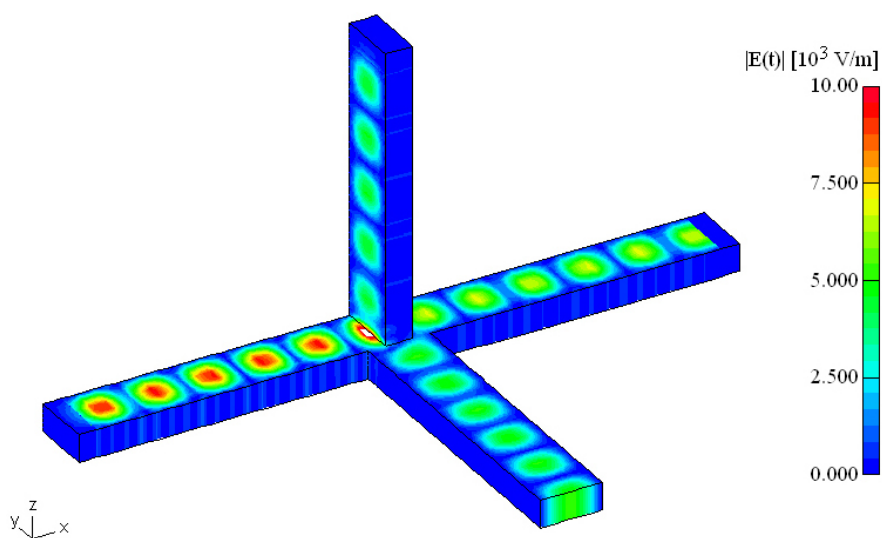
5.2.2 Ergebnisse

Die Dicke h einer PML-Schicht sollte etwa der Dicke der letzten finiten Elementschicht vor der PML entsprechen. Die gewählte Anzahl der PML-Schichten und die gewählte Schichtdicke einer PML-Schicht haben einen großen Einfluss auf den Reflexionsfaktor der PML's und auf die Konvergenz des Problems (Ergebnisse siehe Kapitel 3).

Abbildung 5.5 zeigt die Wellenausbreitung im Magic-T bei optimal eingestellten PML's und bei sehr schlecht eingestellten PML's. Im Normalfall ist die Reflexion am Port 4 auch bei schlechtem Reflexionskoeffizienten nicht so ausgeprägt.



(a) Magic-T mit optimal eingestellten PML's



(b) Magic-T mit schlecht eingestellten PML's

Abbildung 5.5: Wellenausbreitung im Magic-T mit optimal eingestellten und schlecht eingestellten PML's.

5.3 X-Band Hohlleiter bei höheren Moden

Eine Verifizierung der PML's für höhere Moden ist mittels eines Magic-T nicht möglich. Die geforderten Eigenschaften besitzt das Magic-T nur für den Grundmode. Aus diesem Grund sind höhere Moden nur mittels eines einfachen X-Band Hohlleiters untersucht worden. Dabei wurde der Hohlleiter immer nur mit einem Mode angeregt und am Ende mit einer PML abgeschlossen.

Um nur den gewünschten Mode anregen zu können, wurde die Feldverteilung des gewünschten Modes direkt am Hohlleitereingang vorgegeben, wobei die Feldverteilung aus der analytischen Lösung verwendet wurde [4] und [31]. Für die \mathbf{A}, V Formulierung wird die elektrische Feldstärke vorgegeben:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{C}{\epsilon} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\ E_y &= \frac{C}{\epsilon} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung wird die magnetische Erregung vorgegeben:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{C}{\mu} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\ H_y &= -\frac{C}{\mu} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bei Auftreten von Reflexionen an den PML's ändert sich der sich ausbreitende Mode in einen Mischmode aus dem Grundmode und höhere Moden. Die Abbildungen 5.6 zeigen die elektrische Feldstärke im Hohlleiter bei einer Anregung mit verschiedenen Moden.

5.3.1 Schlußfolgerungen

Die maximale Anzahl der PML-Schichten hängt stark von der Problemstellung ab. Für die meisten Fälle reichen aber drei PML-Schichten aus. Der Reflexionsfaktor wird für $n > 3$ natürlich noch besser, aber der Rechen- und Speicheraufwand für die Simulation von 3D-FEM-Modellen steigt mit jeder PML-Schicht.

Die Konvergenz der Lösung mit der Methode der vorkonditionierten Konjugierten Gradienten wird auch mit steigender Anzahl der PML-Schichten schlechter. Grundsätzlich lässt sich für die Abschätzung der PML-Parameter feststellen, dass man für die Wahl der Parameter die untere Grenze aus Gleichung (3.51) verwenden sollte.

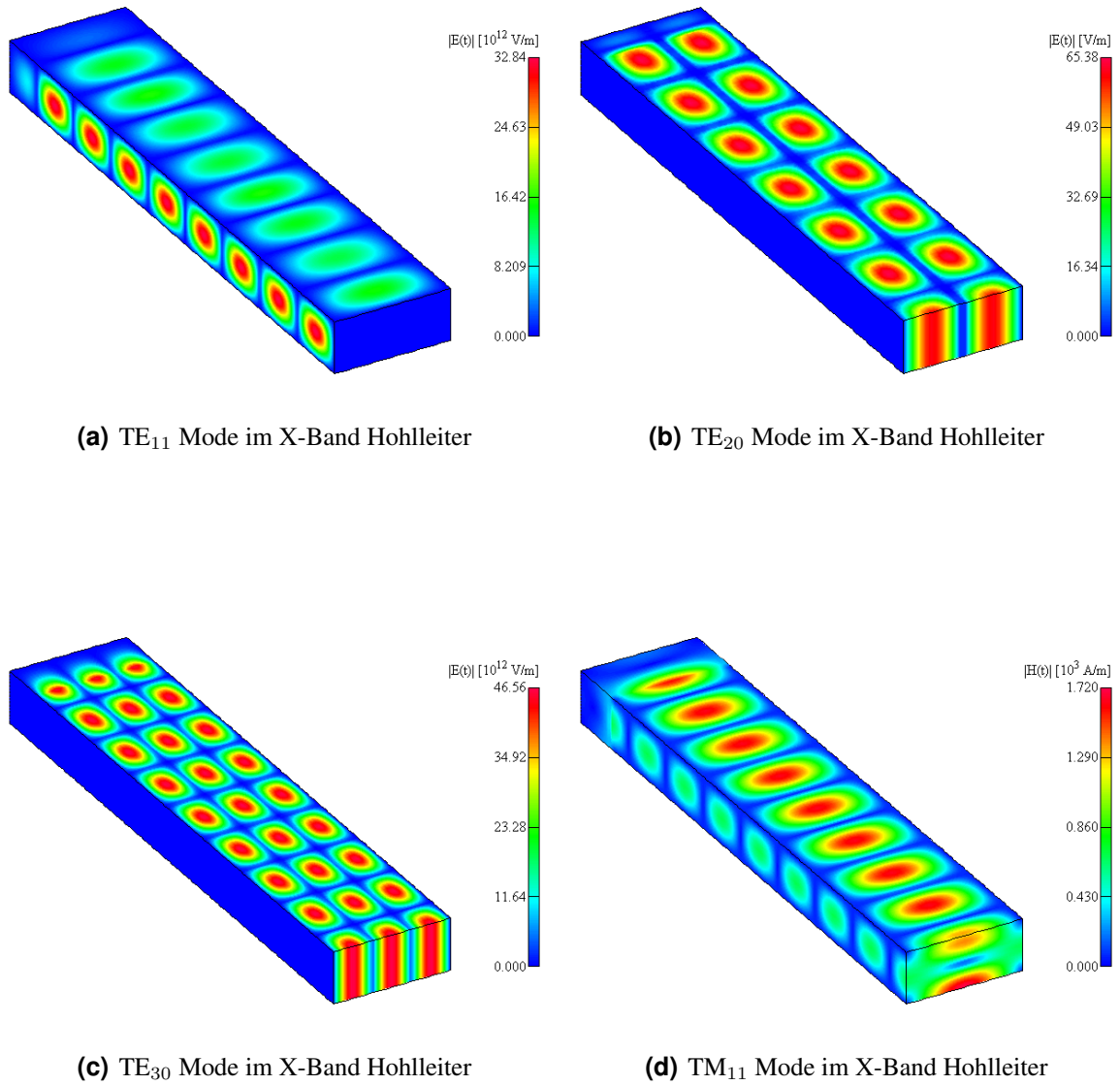


Abbildung 5.6: Reflexionsfreier Abschluss eines X-Band-Hohlleiters mit PML's bei einer Anregung mit höheren Moden.

Die Konvergenz bei gleichem Modellierungsaufwand ist bei der Verwendung von PML's bei der \mathbf{A}, V Formulierung besser als bei der \mathbf{T}, Φ Formulierung. Der Vorteil der \mathbf{T}, Φ Formulierung liegt darin, dass es genügt, eine PML-Schicht mit der Dicke $h = h_{max}$ zu verwenden.

5.4 Bluetooth - Planar Inverted F Antenna

Bestimmte Leiterstrukturen werden dafür verwendet, Informationen zwischen elektromagnetischen Systemen auszutauschen [12], [29]. Eines der heute am häufigsten verwendeten Systeme ist Bluetooth. Bluetooth arbeitet im ISM-Band (Industrial, Scientific and Medical Band) von 2,402 GHz bis 2,480 GHz. Die Bandbreite beträgt 1 MHz. Für die Übertragung werden meistens PIFAs (Planar Inverted F Antennas) verwendet. Der Vorteil liegt in der kompakten Bauweise der Antennen und in den günstigen Herstellungskosten. Die Übertragungstrecke beträgt maximal 10 m.

5.4.1 Konstruktion der PIFA

Abbildung 5.7 zeigt die Bauweise einer PIFA. Die Länge der Antenne wird durch die verwendete Mittenfrequenz und das verwendete Dielektrikum in der Antenne vorgegeben. Um die Abmessungen der Planar Inverted F Antenne möglichst gering zu halten, verwendet man ein Dielektrikum mit $\epsilon_r > 1$. Im Falle von Leiterplattenmaterial ist die Dielektrizitätskonstante für den Frequenzbereich $\epsilon_r \approx 4$. Damit reduziert sich die Baugröße um etwa die Hälfte im Vergleich zum leeren Raum.

Mit der Höhe h kann man die Bandbreite der Antenne einstellen. Je kleiner die Höhe h gewählt wird, desto geringer wird die verwendbare Bandbreite der Antenne. Für die typische Bluetooth Antenne wird als Höhe $h = 5$ mm verwendet. Mit der Wahl des Feedingpoints d verändert sich die Eingangsimpedanz der Antenne. In den meisten Fällen wird ein Feedingpoint von $d = 5$ mm verwendet, um die typischen Verstärkerendstufen anzupassen.

Die Größe der Massefläche unter der Antenne und die Platzierung der Antenne sind für das Abstrahlverhalten verantwortlich. In den meisten Fällen kann man die Position der Antenne nicht frei wählen. Das Abstrahlverhalten der PIFA ist am einfachsten mit einer 3D-FEM-Simulation zu bestimmen.

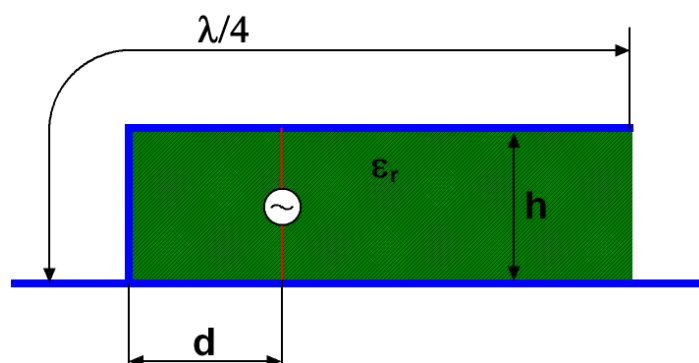


Abbildung 5.7: Schema einer Planar Inverted F Antenne

5.4.2 Modellierung einer PIFA

Für die meisten Anwendungen genügt es, die leitenden Bereiche der PIFA als idealen Leiter zu modellieren. Die Verluste im Leiter sind für Antennenanwendungen meistens uninteressant. Es ist für die Abstrahlcharakteristik [27] viel wichtiger, die unmittelbare Umgebung der Antenne zu modellieren. In Luft hat das ISM-Band eine Wellenlänge von 12 cm.

Für die Wellenausbreitung wurde das Problemgebiet so groß gewählt, dass der Rand 1.5λ von der Antenne entfernt ist. Es wurden drei PML-Schichten bei der \mathbf{A}, V Formulierung verwendet. Die PML-Parameter ergeben sich aus (3.51) mit folgenden Kenngrößen: $r_{min} = 0.18$ m, $r_{max} = 0.3$ m, $e = 2$, $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ und $n = 3$.

5.4.3 Das vektorielle Huygenssche Prinzip

Für die Abstrahlcharakteristik der Antenne wurde die Berechnung des Fernfeldes über das vektorielle Huygenssche Prinzip durchgeführt [31]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_p}}{\mathbf{r}_p} \int_{\Omega} \mathbf{r}_0 \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}_q) \times \mathbf{r}_0] e^{-jk \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_q} d\Omega \quad (5.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_p) = \frac{j\omega\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jk r_p}}{\mathbf{r}_p} \int_{\Omega} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{J}(\mathbf{r}_q) \times \mathbf{r}_0] e^{-jk \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_q} d\Omega. \quad (5.8)$$

Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Erregung \mathbf{H} in einem Punkt \mathbf{r}_p lassen sich nach diesem Prinzip aus der Stromdichteverteilung einer weit entfernten Quelle mit Quellpunkt \mathbf{r}_q , bestimmen. Der Vektor \mathbf{r}_0 ist definiert durch:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}$$

$$k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0. \quad (5.9)$$

Die so ermittelten elektrischen Feldstärken können mit Hilfe von Matlab® zu einem 3D-Feldbild zusammengefasst werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p) = (E_x, E_y, E_z)$$

$$E_\phi = \arctan \frac{E_y}{E_x}$$

$$E_\theta = \arctan \frac{E_x}{E_z}$$

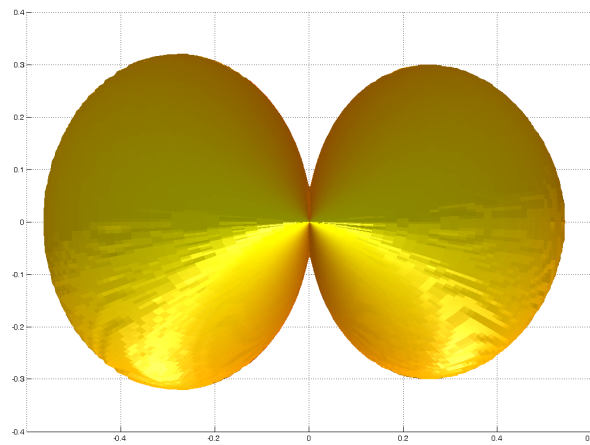
$$r(\phi, \theta) = 20 * \log_{10} \left(1 - \left| \frac{E_\phi}{E_0} \right| \right) [\text{dB}], \quad (5.10)$$

wobei $r(\phi, \theta)$ die Abstrahlung der Antenne normiert auf E_0 in dB darstellt. Variiert man $\phi : 0 \leq \phi < 2\pi$ und $\theta : 0 \leq \theta < \pi$, so erhält man die Abstrahlcharakteristik der Antenne.

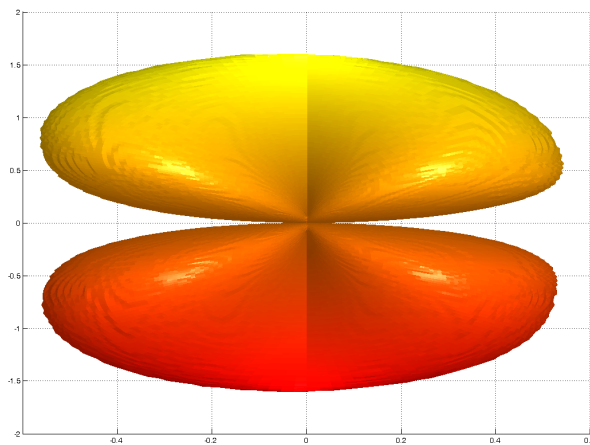
5.4.4 Simulationsergebnisse

Für die PIFA sind zwei unterschiedliche Betriebsfälle untersucht worden. Als erstes wurde die Freiraumabstrahlung untersucht (siehe Abb. 5.8). Die Welle kann sich in alle Richtungen gleichmäßig ausbreiten und die PML's verhindern, dass es zu Reflexionen kommt. In der Praxis befinden sich aber immer sogenannte Störer in der Umgebung der Antenne. Wie sich die Abstrahlcharakteristik ändert, wenn sich menschliches Gewebe an einer Seite der Antenne befindet, wurde im zweiten Beispiel untersucht (siehe Abb. 5.9).

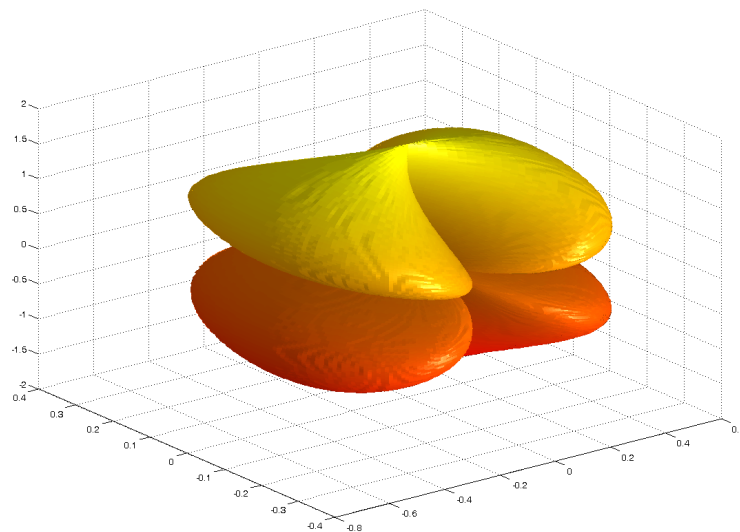
Im Bereich des Gewebes teilt sich die Welle in eine eindringende und eine reflektierte Welle auf. Die in das Gewebe eindringende Welle wird durch die Verluste im Gewebe so weit gedämpft, dass sie keinen Einfluß mehr auf die weiteren Betrachtungen hat. Die vom Gewebe reflektierte Welle überlagert sich mit der von der Antenne abgestrahlten Welle und ändert somit die Richtcharakteristik der PIFA. Bei den meisten Geräten wird aber zur Zeit nicht auf die Anwesenheit des Anwenders Rücksicht genommen, der die Abstrahlungscharakteristik der Antenne jedoch sehr stark beeinflusst.



(a) x-y Ebene

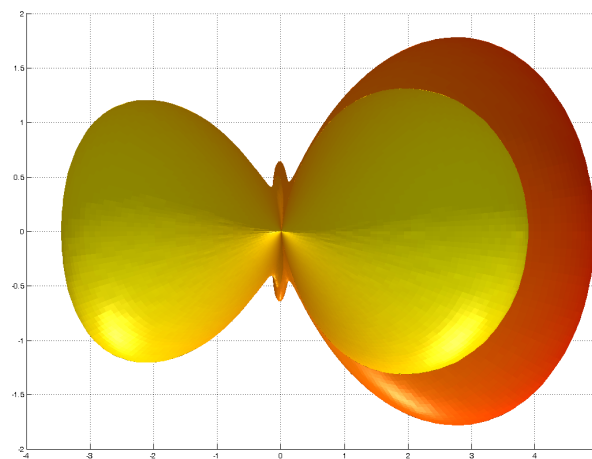


(b) x-z Ebene

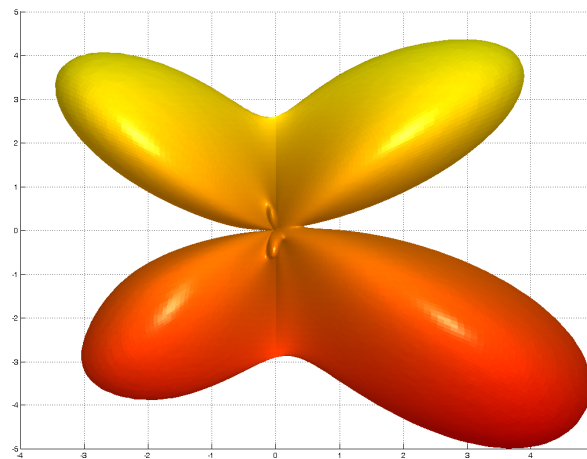


(c) 3D-Ansicht

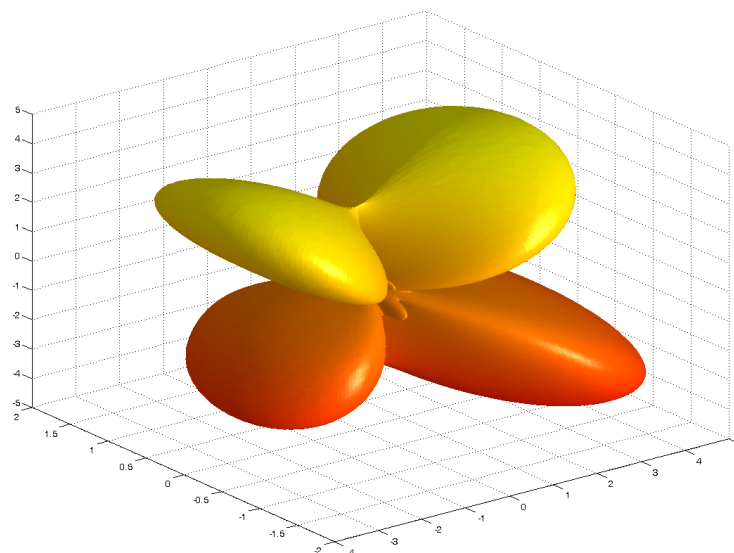
Abbildung 5.8: Die Richtcharakteristik bei Freiraumausbreitung zeigt eine ähnliche Richtcharakteristik wie ein $\lambda/2$ Dipol. Die Antenne befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.



(a) x-y Ebene



(b) x-z Ebene



(c) 3D-Ansicht

Abbildung 5.9: Die Richtcharakteristik bei Anwesenheit von biologischem Gewebe auf der linken Seite der Antenne. Die Antenne befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.

5.5 Übersprechen zwischen zwei parallel geführten Leitungen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten von parallel geführten Leiterbahnen untersucht. Bei dieser Art der Leitungsführung wird eine Signalübertragung zwischen den beiden Leitungen beobachtet, die als Übersprechen (Crosstalk) bezeichnet wird. Als Modell werden zwei parallel geführte Leiterbahnen gewählt, die einen gemeinsamen Rückleiter besitzen (siehe Abbildung 5.10).

5.5.1 3D-FEM-Berechnung zweier parallel geführter Leiterbahnen

Als Rechenbeispiel wurde eine Leiterplatte mit einer Substratdicke von 0.3 mm gewählt. Die Länge beider Leiter beträgt 30 mm. Die Leiterbahnbreiten b_1 und b_2 betragen $100 \mu\text{m}$ und der Abstand d zwischen den Leitern ist $350 \mu\text{m}$. Das Trägermaterial hat eine Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_r = 4$ und einen Verlustfaktor $\tan \delta = 0.018$. Für die Berechnungen wurden die spezifische Leitfähigkeit im Medium als konstant angenommen $\sigma_\epsilon = 2 \text{ mS/m}$. Die Leiter sind am Anfang und am Ende um 20 mm verlängert, um Einflüsse der Anregung und des Leitungsabschlusses ausschließen zu können (siehe Abbildung 5.10). Die Auswertung erfolgt an den angegebenen Ports.

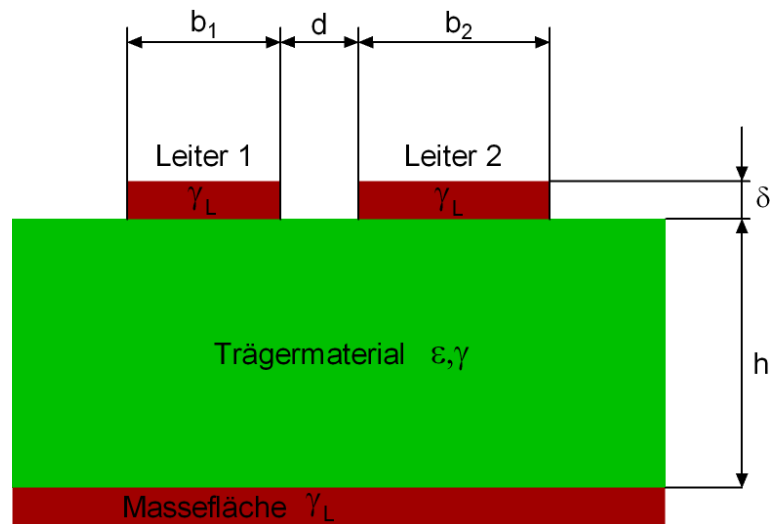
Die Z-Parameter ergeben sich aus den Spannungen und den Strömen an den Ports. Im allgemeinen Fall würde man für die Bestimmung der Impedanzmatrix zwei Berechnungen benötigen. In diesem Fall ist das Problem symmetrisch und es reicht eine Berechnung für die Ermittlung der Z-Parameter aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12} & Z_{11} & Z_{14} & Z_{13} \\ Z_{13} & Z_{14} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{14} & Z_{13} & Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_4 & I_3 \\ I_3 & I_4 & I_1 & I_2 \\ I_4 & I_3 & I_2 & I_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{13} \\ Z_{14} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

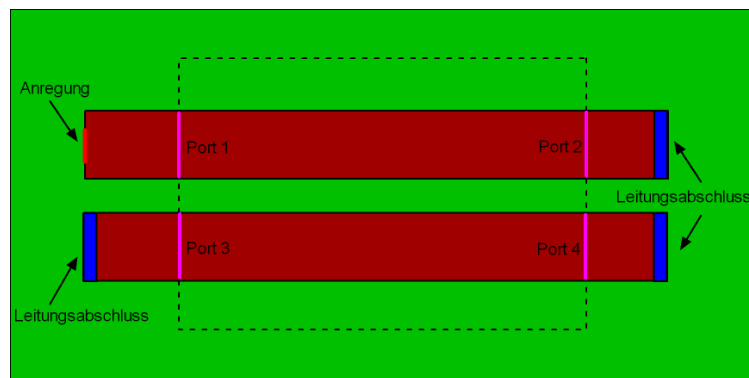
Formt man das Gleichungssystem um, dann ergeben sich die Z-Parameter aus:

$$\begin{Bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{13} \\ Z_{14} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_4 & I_3 \\ I_3 & I_4 & I_1 & I_2 \\ I_4 & I_3 & I_2 & I_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}. \quad (5.12)$$

Die Streuparameter erhält man von den Impedanzparametern aus Gleichung (C.21) mit den charakteristischen Wellenimpedanzen (C.2) der beiden Leitungen.



(a) 2D und 3D-FEM Modell - Ansicht 1



(b) 3D-FEM Modell - Ansicht 2

Abbildung 5.10: Berechnungsmodell für das Übersprechen zwischen zwei Leiterbahnen

5.5.2 2D-FEM-Berechnung

Für die Berechnung der Viertorparameter aus der 2D-FEM-Berechnung wurde das in Anhang B beschriebene Modell verwendet. Die Bauteilwerte in Abhängigkeit von der Frequenz sind in Tabelle 5.3 ersichtlich. Für die Simulation wurden mehr Stützstellen verwendet als in Tabelle 5.3 dargestellt.

f	R'_1	L'_1	G'_1	C'_1	M'	G'_{12}	C'_{12}
MHz	Ω/m	H/m	S/m	F/m	H/m	S/m	F/m
10	6.311	$6.099 \cdot 10^{-7}$	$2.333 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-11}$	$1.153 \cdot 10^{-7}$	$8.736 \cdot 10^{-4}$	$6.099 \cdot 10^{-12}$
100	15.782	$5.803 \cdot 10^{-7}$	$2.333 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-11}$	$1.117 \cdot 10^{-7}$	$8.736 \cdot 10^{-4}$	$6.099 \cdot 10^{-12}$
1000	49.377	$5.649 \cdot 10^{-7}$	$2.333 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-11}$	$1.109 \cdot 10^{-7}$	$8.736 \cdot 10^{-4}$	$6.099 \cdot 10^{-12}$
10000	170.282	$5.595 \cdot 10^{-7}$	$2.333 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-11}$	$1.106 \cdot 10^{-7}$	$8.736 \cdot 10^{-4}$	$6.099 \cdot 10^{-12}$

Tabelle 5.3: Frequenzabhängigkeit der Leitungsparameter aus der 2D-FEM-Berechnung

5.5.3 Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Messung

Für den Vergleich der Simulationsergebnisse waren Port 1 und Port 3 mit 50Ω abgeschlossen und Port 2 und Port 4 waren leerlaufend. Bei der 2D-FEM-Berechnung wird wie in Anhang B beschrieben, aus dem Leitungsmodell (Abbildung B.2) die Kettenmatrix erstellt und danach wird die Schaltung entsprechend oft hintereinander in Kette geschaltet:

$$[\mathbf{A}_{res}] = \underbrace{[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}] \cdots [\mathbf{A}]}_n. \tag{5.13}$$

Die Anzahl n der in Kette geschalteten Glieder beträgt für den gesamten Frequenzbereich $n = 32$, wobei die Anzahl der Glieder dabei konstant und nicht abhängig von der Frequenz sind.

Bei allen Simulationsergebnissen wurden die Streuparameter aus der Impedanzmatrix bestimmt (C.21) und (C.22). Als Ergebnis erhält man das Übersprechen zwischen den benachbarten Ports S_{13} (Near End Crosstalk) und der Parameter S_{11} entspricht dem Reflexionsfaktor am Eingang (siehe Abbildungen 5.11). Für die Messung I wurde in Port 1 eingespeist und das Übersprechen auf Port 3 gemessen. Für die Messung II wurde im Port 3 eingespeist und auf Port 1 gemessen. Wie zu ersehen ist, weisen die Messungen zueinander eine starke Abweichung auf. Der Grund dafür ist in der Empfindlichkeit der Messanordnung zu suchen.

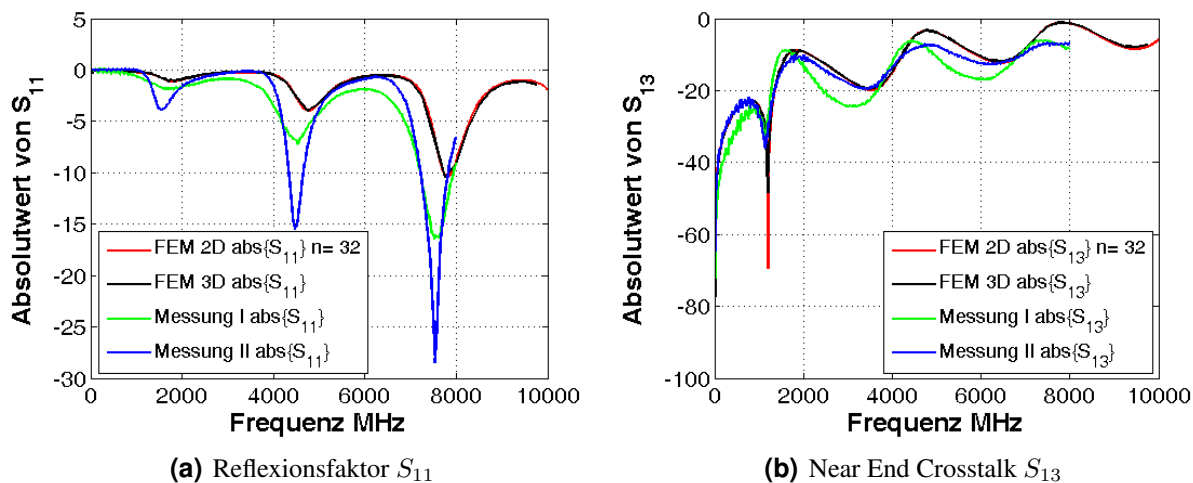


Abbildung 5.11: Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messergebnissen beim Übersprechen zwischen zwei leerlaufenden Leitungen.

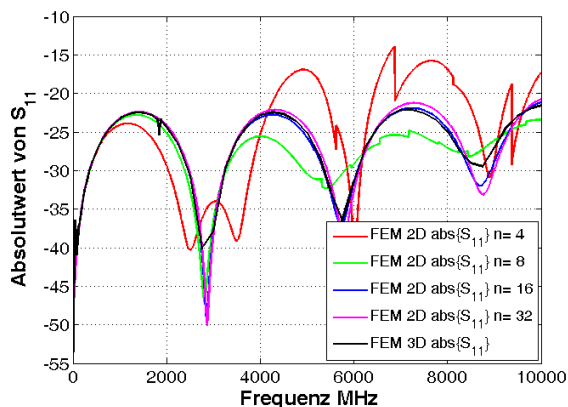
5.5.4 Vergleich der Simulationsergebnisse bei Anpassung

Für den Vergleich des 3D-FEM-Modells mit dem 2D-FEM-Netzwerkmodell werden alle Viertorparameter herangezogen. Die Anzahl der in Kette geschalteten Glieder wird hierzu variiert. Es soll festgestellt werden, wie sich die Anzahl n der verwendeten Kettenglieder auf das Ergebnis auswirkt. Um den Strom auch am Ende der Leitungen auswerten zu können, sind alle Tore mit einem Widerstand von $R = 95\Omega$ abgeschlossen. Die Anzahl der in Kette geschalteten Glieder ist auf die Unterteilung pro Wellenlänge festgelegt worden:

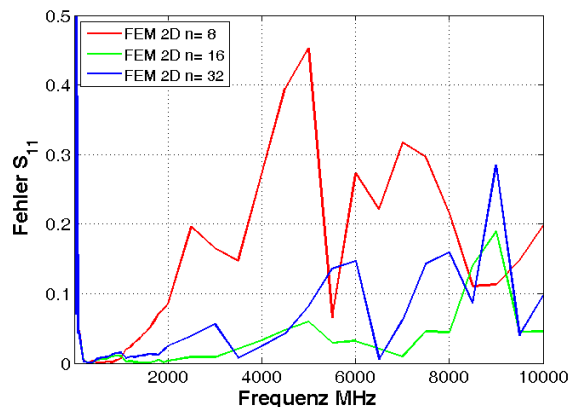
$$n = \begin{cases} n & \text{für } \lambda < l \\ n \frac{l}{\lambda} & \text{für } \lambda \geq l \end{cases} \quad (5.14)$$

Dabei ist l die Leiterlänge und λ die Wellenlänge im Medium. Untersucht wurden Unterteilungen zwischen $n = 4$ und $n = 32$ (siehe Abbildung 5.12).

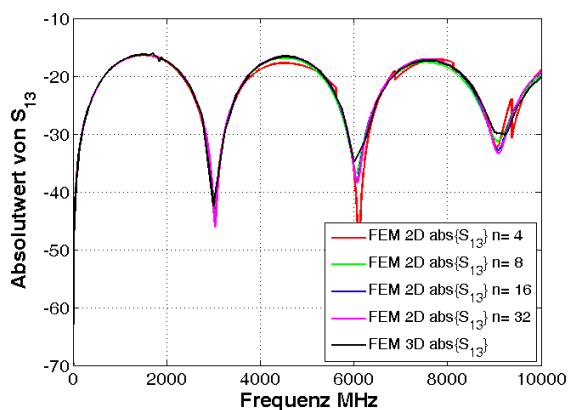
In der linken Spalte sind der Reflexionsfaktor S_{11} , das Übersprechen am benachbarten Port S_{13} und das Übersprechen am weiter entfernten Ende der Leiterbahn S_{14} dargestellt. Die rechte Spalte zeigt den Fehler der Kettenschaltung bezogen auf die 3D-FEM-Simulation.



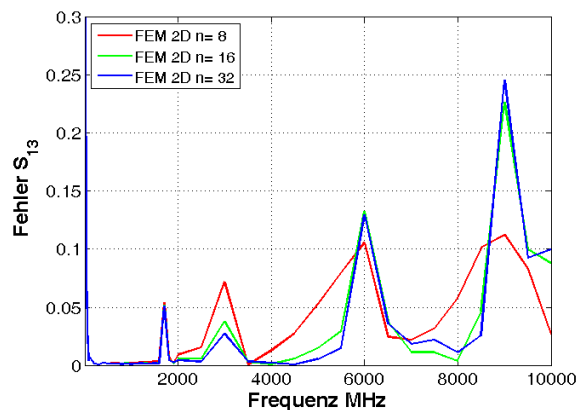
(a) Reflexionsfaktor S_{11}



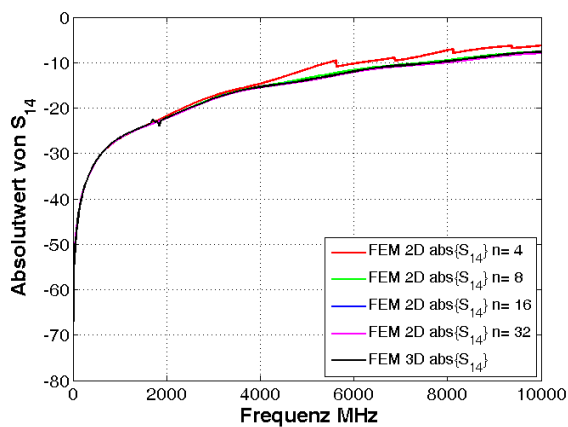
(b) Fehler S_{11}



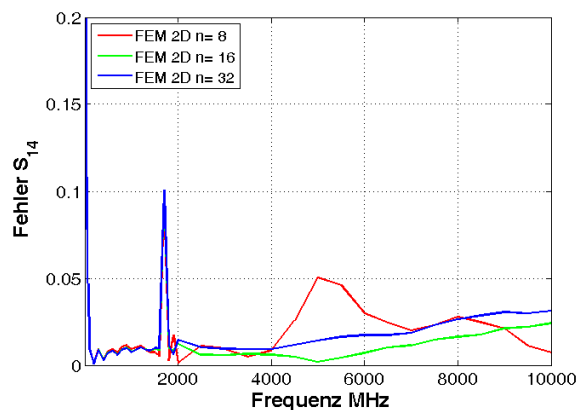
(c) Near End Crosstalk S_{13}



(d) Fehler S_{13}



(e) Far End Crosstalk S_{14}



(f) Fehler S_{14}

Abbildung 5.12: Vergleich der Rechenergebnisse bei Übersprechen zwischen zwei Leitungen. Dargestellt sind der Reflexionsfaktor S_{11} , der Near-End-Crosstalk S_{13} und der Far-End-Crosstalk S_{14} .

Kapitel 6

Auftrennung von Feldproblemen

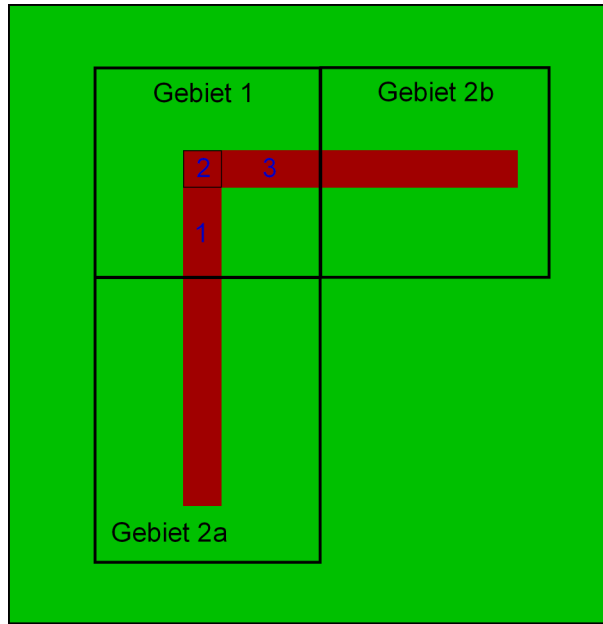
Die Probleme sind in vielen Fällen zu aufwendig, um sie in einem Modell untersuchen zu können. Die benötigten Modelle sind sehr komplex und ihre Lösung dauert zu lange. Es ist aber möglich, eine komplexe Schaltung in einfachere Strukturen zu zerlegen und diese getrennt zu simulieren. Bei der Zerlegung der Hardwarestruktur wird im ersten Schritt eine Zerlegung in 3D-FEM-Gebiete und 2D-FEM-Gebiete durchgeführt. Nach erfolgter Simulation wird das Ergebnis aus den Einzelsimulationen berechnet.

6.1 Untersuchung von Knicken in Leiterbahnen

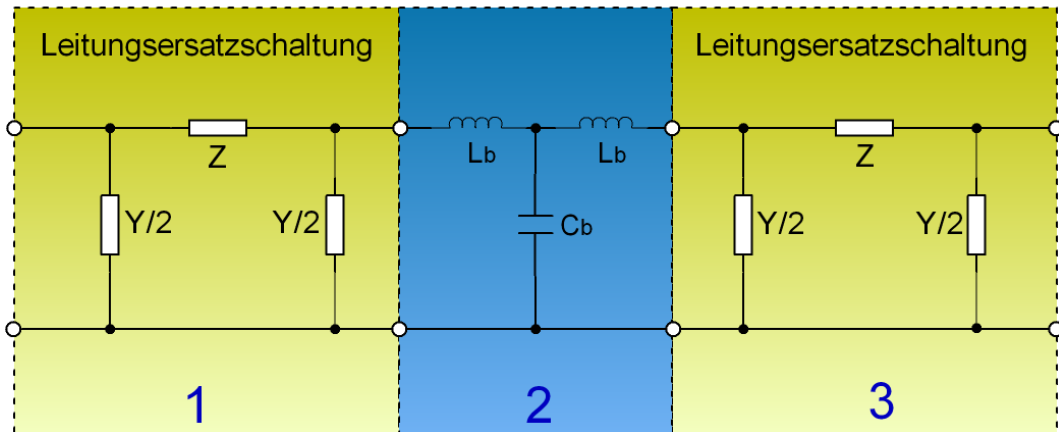
Für eine Leiterstruktur, die einen Knick aufweist (Abbildung 6.1(a)) wird untersucht, wie sich die Zerlegung der Struktur auf das Rechenergebnis auswirkt. Die Werte für den Leitungsknick selbst wurden mittels einer 3D-FEM-Berechnung und für die Leitungen selbst mittels einer 2D-FEM-Berechnung ermittelt (siehe Abbildung 6.1(a)). Die Länge der Leitungen zum und vom Leitungsknick wurden variiert um festzustellen, wie weit man vom Leitungsknick weg sein muss, um eine 2D-FEM-Simulation der Zuleitungen durchführen zu können. Für den Knick kann man ein Netzwerkmodell [18] erstellen, das diesen nachbildet. Es besteht aus zwei Längsinduktivitäten L_b und einer Querkapazität C_b (siehe Abbildung 6.1(b)).

6.1.1 Beschreibung des Problems Leitungsknick

Als Problem wird eine 110 mm lange, 1.08 mm breite Kupferleitung über einer Massefläche untersucht. Das Trägermaterial ist 1.5 mm dick, hat eine relative Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 4.2$ und besitzt keine Verluste ($\tan \delta = 0$) (siehe Abbildung 6.2(a)). Der Leitungsknick befindet sich genau in der Mitte der Leitung $l_1 = l_2 = 55$ mm. Der Abstand der Leiteranordnung zum Rand der Leiterplatte beträgt 45 mm. Die Untersuchungen wurden in einem Frequenzbereich von 1 MHz bis 5 GHz durchgeführt.



(a) Einteilung in die verschiedenen FEM Gebiete



(b) Netzwerkmodell für das Gebiet 1

Abbildung 6.1: Zerlegung eines Knicks auf einer Leitung in ein 3D-FEM-Modell und in zwei 2D-FEM-Modelle.

6.1.2 Analytische Untersuchungen

In [18] werden Näherungsformeln für die Längsinduktivitäten L_b und die Querkapazität C_b angegeben, die folgendermaßen lauten:

$$\frac{C_b}{w} = \begin{cases} \underbrace{[(14\epsilon_r + 12.5)w/h - (1.83\epsilon_r - 2.25)] \sqrt{h/w} + 0.02\epsilon_r h/w}_{\text{für } w/h < 1} & \text{pF/m} \\ \underbrace{(9.5\epsilon_r + 1.25)w/h + 5.2\epsilon_r + 7}_{\text{für } w/h \geq 1} & \text{pF/m} \end{cases}$$

$$\frac{2L_b}{h} = 100(4\sqrt{w/h} - 4.21) \text{ nH/m.} \quad (6.1)$$

Dabei steht w für die Leiterbahnbreite und h ist die Dicke des Trägermaterials. Die Gleichungen für C_b sind laut [18] mit einem Fehler kleiner 5% im Bereich $0.1 < w/h < 5$ und $2.5 < \epsilon_r < 15$ gültig. L_b ist mit einem maximalen Fehler von 3% in einem Bereich von $0.5 < w/h < 2$ gültig.

Die Kettenmatrix für das Netzwerkmodell ergibt sich aus:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_1] \cdot [\mathbf{A}_2] \cdot [\mathbf{A}_3]. \quad (6.2)$$

Die Kettenmatrix für eine Leitung mit der Länge l_1 lautet wie in Anhang C beschrieben:

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l_1 & Z_0 \sinh \gamma l_1 \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l_1 & \cosh \gamma l_1 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Die Wellenimpedanz Z_0 und die Ausbreitungskonstante γ werden aus den Leitungsbelägen wie folgt ermittelt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}. \quad (6.4)$$

Das zusätzliche T-Glied für den Leitungsknick besitzt folgende Kettenmatrix:

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L_b C_b & j(2\omega L_b - \omega^3 L_b^2 C_b) \\ j\omega C_b & 1 - \omega^2 L_b C_b \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Die Kettenmatrix der gesamten Schaltung ergibt sich aus der Matrixmultiplikation der einzelnen Kettenmatrizen. Für dieses Beispiel wurde die Multiplikation erst nach dem Einsetzen der Bauteilwerte durchgeführt.

Laut Auskunft der Autoren beinhalten die in [18] gegebenen Näherungsformeln (6.1) noch einen Fehler, der einen Vergleich des 3D-Simulationsergebnisses mit dem Netzwerkmodell bis zum jetzigen Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit unmöglich macht.

6.1.3 Dreidimensionale Untersuchung mittels FEM

Als Referenzmodell wird bei diesem Beispiel die 3D-FEM-Simulation des gesamten Problems gewählt. Der Leiter ist am Anfang und am Ende verlängert und am Ende mit Hilfe von PML's angepasst, um die Reflexionen, die durch den Knick der Leitung entstehen, erfassen zu können. Die PML's wurden z.B. für eine Frequenz von 1 GHz aus (3.51) mit folgenden Werten ermittelt: Anzahl der PML-Schichten $n = 5$. Für die PML's, die das Trägermaterial abschließen wurde der Bereich für h mit $\beta = 42.95$, $r = 0.111$ m und $e = 6$ festgelegt:

$$2.9542 \text{ mm} \leq h \leq 9.3165 \text{ mm}. \quad (6.6)$$

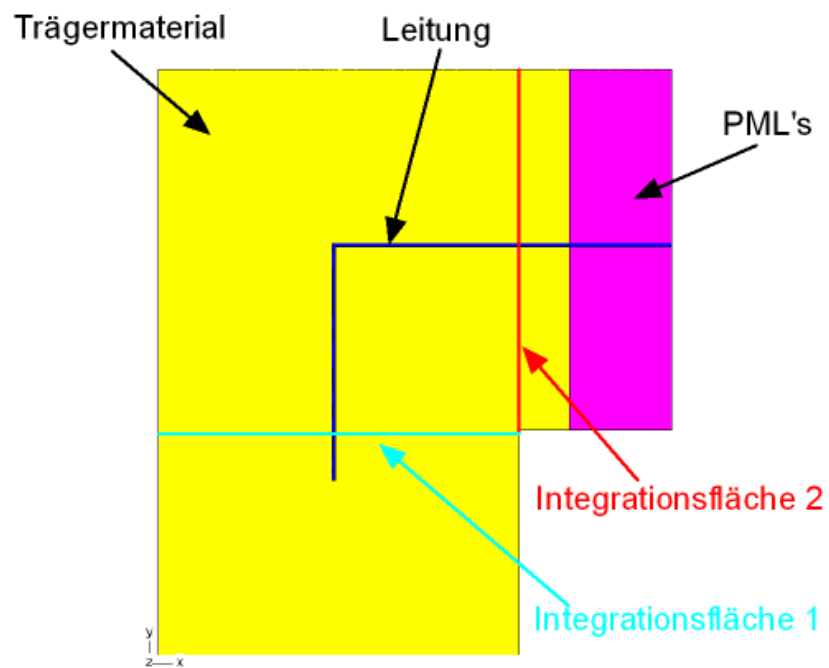
Die gewählte PML-Dicke ist $n \cdot h = 9.252$ mm. Ausgehend von dieser Schichtdicke ergibt sich für die PML's, die die Luftseite der Leitung abschließen, mit $\beta = 20.95$, $r = 0.111$ m und $h = 2.9542$ mm ein Bereich für die PML-Konstante von:

$$10.403 \leq e \leq 32.808. \quad (6.7)$$

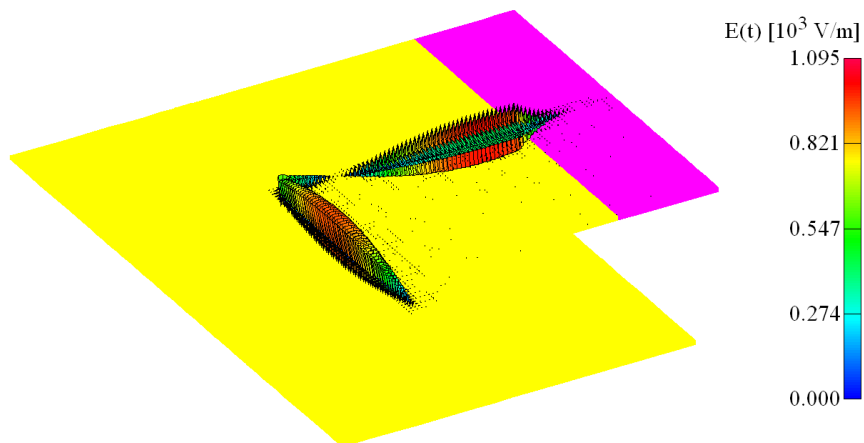
Wie für alle PML-Berechnungen wird auch bei der komplexen PML-Konstante ein Wert nahe der unteren Grenze gewählt. Hier ist die PML-Konstante mit $e = 10.5$ festgelegt. Der Grundriss des 3D-FEM-Modells ist in Abbildung 6.2(a) dargestellt. Das Trägermaterial ist in Gelb, die PML's in Magenta und der Leiter in Blau dargestellt. Die finiten Elemente in der linken unteren Ecke sind eliminiert, um Speicher und Rechenzeit zu sparen.

Die Auswertung erfolgt jeweils in einem Abstand von 55 mm vom Leitungsknick, wobei der Strom I_1 und die komplexe Leistung S_1 am Anfang der Leitung über die Integrationsfläche 1 und der Strom I_2 und die komplexe Leistung S_2 am Ende der Leitung über Integrationsfläche 2 ermittelt werden (siehe Abbildung 6.2(a)).

Ein Simulationsergebnis für die elektrische Feldstärke bei 1 GHz ist in Abbildung 6.2(b) dargestellt. Aus dem Feldbild ist gegenüber den Erwartungen vorerst kein Einfluß des Leitungsknicks auf die Feldverteilung zu erkennen. Der Leitungsknick sollte Reflexionen am Anfang der Leitung hervorrufen. Der Reflexionsfaktor am Anfang der Leitung kann durch Auswer-



(a) 3D-FEM-Modell der Leitung. Dargestellt sind Trägermaterial, Leitung und die PML's



(b) Feldbild der elektrischen Feldstärke (Pfeile) auf der Leitung bei 1GHz

Abbildung 6.2: 3D-FEM-Modell für den Leitungsknick und Feldbild der elektrischen Feldstärke auf der Leitung.

ung an verschiedenen Stellen der Leitung ermittelt werden. Ausgehend von der Spannung $U(z)$ und dem Strom $I(z)$ auf einer Leitung

$$\begin{aligned} U(z) &= U^+ e^{-\gamma l} (e^{\gamma(l-z)} + r_2 e^{-\gamma(l-z)}) \\ I(z) &= \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} (e^{\gamma(l-z)} - r_2 e^{-\gamma(l-z)}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

kann man am Anfang der Leitung für $z = 0$ die Gleichungen für die Spannung $U(0)$ und für den Strom $I(0)$ vereinfachen:

$$\begin{aligned} U(0) &= U^+ (1 + r_2 e^{-2\gamma l}) \\ I(0) &= \frac{U^+}{Z_0} (1 - r_2 e^{-2\gamma l}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die komplexe Leistung S ist definiert durch:

$$S = \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} I I^* Z. \quad (6.10)$$

Die Eingangsimpedanz der Leitung ist gegeben durch:

$$Z = \frac{U(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{(1 + r_2 e^{-2\gamma l})}{(1 - r_2 e^{-2\gamma l})} = \frac{2S}{I I^*}. \quad (6.11)$$

In gegenständlichen Fall sind die Wellenimpedanz Z_0 , die Ausbreitungskonstante γ und der Reflexionsfaktor r_2 unbekannt. Wertet man den Strom I und die komplexe Leistung S an drei verschiedenen Stellen vor dem Knick aus, kann man alle drei Unbekannten bestimmen. Dafür muss ein Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{2S_1}{I_1 I_1^*} &= Z_0 \frac{(1 + r_2 e^{-2\gamma l_1})}{(1 - r_2 e^{-2\gamma l_1})} \\ \frac{2S_2}{I_2 I_2^*} &= Z_0 \frac{(1 + r_2 e^{-2\gamma l_2})}{(1 - r_2 e^{-2\gamma l_2})} \\ \frac{2S_3}{I_3 I_3^*} &= Z_0 \frac{(1 + r_2 e^{-2\gamma l_3})}{(1 - r_2 e^{-2\gamma l_3})}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch Separation der Wellenimpedanz Z_0 in der ersten Gleichung mit Hilfe der Symbolic Toolbox von Matlab®. In die zweite Gleichung wird der Ausdruck für die Wellenimpedanz Z_0 der ersten Gleichung eingesetzt und der Reflexionsfaktor r_2 ausgerechnet. In die dritte Gleichung wird der Ausdruck für die Wellenimpedanz Z_0 und danach der Ausdruck für den Reflexionsfaktor r_2 eingesetzt. Die resultierende Gleichung wird mit Hilfe eines numerischen Näherungsverfahrens gelöst.

Ist es zeitlich möglich drei Simulationen pro Frequenzpunkt durchzuführen, kann man die Wellenimpedanz Z_0 und die Ausbreitungskonstante γ aus einer Kurzschluss- und einer Leerlaufsimulation ermitteln:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{Z_k Z_l} \\ \tanh(\gamma l) &= \sqrt{\frac{Z_k}{Z_l}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die Eingangsimpedanz der Leitung für den Kurzschlußfall ist hier mit Z_k und die Eingangsimpedanz für den Leerlauf mit Z_l bezeichnet. In diesem Fall kann der Reflexionsfaktor r_2 durch direktes Lösen von Gleichung (6.11) ermittelt werden:

$$r_2 = \frac{2S_1 - Z_0 I_1 I_1^*}{2S_1 + Z_0 I_1 I_1^*} e^{2\gamma l_1}. \quad (6.14)$$

Die Längen l_1 , l_2 und l_3 sind jeweils von der Integrationsfläche bis zum Leitungsknick gemessen.

6.1.3.1 Simulationsergebnisse

Für die folgenden Frequenzpunkte $f = 1$ MHz, 50 MHz, 100 MHz, 500 MHz und 1 GHz wurden jeweils drei unterschiedliche Simulationen durchgeführt. Aus der Simulation der kurzgeschlossenen und der leerlaufenden Leitung können die Wellenimpedanz Z_0 und die Ausbreitungskonstante γ bestimmt werden. Für die Bestimmung des Reflexionsfaktors r_2 am Leitungsknick wird das gesamte Problemgebiet modelliert. Tabelle 6.1 zeigt den Reflexionsfaktor des Leitungsknicks für die einzelnen Frequenzen.

Zum Vergleich wurden die Wellenimpedanz Z_0 und die Ausbreitungskonstante γ aus ei-

Frequenz	Z_0	γ	$ r_2 $
MHz	Ω		
1	$86.7506 - 8.2744j$	$0.0029 + 0.0370j$	0.0835
50	$85.1767 - 0.4281j$	$0.0091 + 1.8039j$	0.0214
100	$85.0555 - 0.3110j$	$0.0132 + 3.6028j$	0.0723
500	$84.5740 - 0.1373j$	$0.0298 - 10.3214j$	0.0260
1000	$83.9325 - 0.0960j$	$0.0428 + 7.6646j$	0.0253

Tabelle 6.1: Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante und Reflexionsfaktor ermittelt aus drei Simulationen.

ner 2D-FEM-Simulation ermittelt und für die Ermittlung des Reflexionsfaktors r_2 aus der 3D-FEM-Simulation verwendet (siehe Tabelle 6.2). Die Ermittlung des Reflexionsfaktors r_2 , der Wellenimpedanz Z_0 und der Ausbreitungskonstante γ aus einer einzigen Simulation

Frequenz	Z_0	γ	$ r_2 $
MHz	Ω		
1	$85.0938 - 6.5117j$	$0.0029 + 0.0377j$	0.0756
50	$83.4111 - 0.4123j$	$0.0091 + 1.8483j$	0.0123
100	$83.2902 - 0.2962j$	$0.0131 + 3.6913j$	0.0041
500	$83.1269 - 0.1325j$	$0.0294 + 18.4202j$	0.0113
1000	$83.0880 - 0.0940j$	$0.0417 + 36.8232j$	0.0322

Tabelle 6.2: Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante aus 2D-FEM und Reflexionsfaktor aus 3D-FEM.

erfolgt für die gleichen Frequenzpunkte aus der Simulation des gesamten Problemgebietes. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.3 dargestellt.

Frequenz	Z_0	γ	$ r_2 $
MHz	Ω		
1	$86.6205 - 1.1062j$	$3.0814 + 19.1017j$	0.06477
50	$87.7256 - 1.1917j$	$3.7634 + 10.7990j$	0.04987
100	$85.2124 - 13.6956j$	$4.7775 + 0.9274j$	0.08917
500	$87.3768 - 1.27060j$	$2.9002 + 12.7733j$	0.05425
1000	$85.1675 - 2.1688j$	$13.6992 + 29.7762j$	0.15523

Tabelle 6.3: Wellenimpedanz, Ausbreitungskonstante und Reflexionsfaktor ermittelt aus einer Simulation des gesamten Problemgebietes.

6.1.4 Zerlegung des Problemgebietes in 3D-FEM und 2D-FEM-Modelle

Um Simulationszeit zu sparen, sollen die Leitungen so weit wie möglich als Netzwerkmodell realisiert werden, wobei die Leitungsbeläge aus einer 2D-FEM-Wirbelstromsimulation ermittelt werden können. Es ist festzustellen, wie weit man vom Leitungsknick entfernt sein muss, um ein mit der 3D-FEM-Simulation des gesamten Problemgebietes identes Rechenergebnis zu erhalten. Dafür wurden die Integrationsfläche 1 und 2 aus Abbildung 6.2(a) zum Leitungsknick hin verschoben. Die verbleibenden Leitungslängen werden durch Kettenschaltung der 2D-FEM-Leitungsmodelle (6.3) im Ergebnis berücksichtigt:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_{11}] \cdot [\mathbf{A}_{3D}] \cdot [\mathbf{A}_{12}]. \quad (6.15)$$

Die Kettenparameter für das 3D-FEM-Gebiet $[A_{3D}]$ werden aus den Strömen, bei denen auch der Verschiebungsstrom berücksichtigt ist und den komplexen Leistungen über das Flächenintegral des Poyntingschen Vektors ermittelt, indem man die Spannungen auf der Leitung wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{2 S_1}{I_1 I_1^*} \\ U_2 &= \frac{2 S_2}{I_2 I_2^*}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Für die Kettenparameter muß die Reziprozitätsbedingung und für dieses Beispiel auch die Symmetriebedingung gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \\ A_{11} &= A_{22}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Kettenparameter aus den 3D-FEM-Feldberechnung können durch die Ströme und die komplexen Leistungen ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{S_2 I_1 - S_1 I_2}{S_1 I_2^3 - S_2 I_1^3} I_1 I_2 \\ A_{12} &= \frac{-2(S_1^2 I_2^4 - S_2^2 I_1^4)}{S_1 I_2^3 - S_2 I_1^3} \frac{1}{I_1^2 I_2^2} \\ A_{21} &= \frac{-I_1^2 + I_2^2}{S_1 I_2^3 - S_2 I_1^3} I_1^2 I_2^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die Zählrichtung des Stromes I_2 ist identisch mit der Zählrichtung für die S-Parameter. Die Auswertungen und die Berechnungen der Matrizen werden mit Hilfe von Matlab [®] durchgeführt.

6.1.4.1 Simulationsergebnisse

Die Zuleitung zum Leitungsknick wird von 1 mm bis zu 40 mm in 1 mm Schritten variiert. Untersucht wird bei den Frequenzpunkten $f = 100$ MHz, 500 MHz und 1 GHz. Es soll festgestellt werden, wie weit man das 3D-FEM-Simulationsergebnis vereinfachen kann, wenn man die Schaltung in eine Kettenschaltung von 2D-FEM und 3D-FEM-Elementen zerlegt. In Tabelle 6.4 sind die Rechenergebnisse für die unterschiedlichen Frequenzen präsentiert. Die Ergebnisse aus der 3D-FEM sind in Spalte 1 $|Z_{11}|$ (3D), die Ergebnisse mit den aufgetrennten Gebieten sind in Spalte 2 $|Z_{11}|$ (3D & 2D) und die Impedanz einer 111 mm langen geraden Leitung sind in Spalte 3 $|Z_{11}|$ (2D) präsentiert. Der Abstand vom Leitungsknick bei der Kettenschaltung ist als Länge l_1 angegeben. Ab diesem Abstand bleibt die

Frequenz	$ Z_{11} $ (3D)	$ Z_{11} $ (3D & 2D)	$ Z_{11} $ (2D)	l_1
MHz	Ω	Ω	Ω	<i>mm</i>
100	202.85975	197.8003	191.7747	> 10.1
500	36.604118	38.56361	42.62990	> 5.1
1000	80.092271	83.04472	59.94886	> 5.1

Tabelle 6.4: Vergleich der vollständigen 3D-FEM-Berechnung und der Auftrennung des Leitungsknicks in 2D- und 3D-FEM-Bereiche. Dargestellt ist die Leitungslänge l_1 bei der die Berechnungen übereinstimmen.

Eingangslaufimpedanz $|Z_{11}|$ gleich. Es konnte keine Position gefunden werden, an dem die Kettenschaltung identisch mit der vollständigen 3D-FEM-Simulation ist.

Kapitel 7

Schlussbemerkungen

Die Aufgabenstellungen werden in der Zukunft weiter an Komplexität zunehmen. Die zur Verfügung stehenden Rechenleistungen nehmen nach dem Moore'schen Gesetz zu, aber die zu untersuchenden Probleme nehmen schneller an Komplexität zu. In Zukunft wird es nicht mehr reichen, die Modellierungen so einfach wie möglich zu halten sondern man wird Wege finden müssen, komplexe Probleme effizient als Teilprobleme zu behandeln.

Kommerzielle Softwarepakete zur Untersuchung von elektromagnetischen Feldproblemen bieten nicht die Möglichkeit, selbstständig Modifizierungen an der Software durchzuführen. Daher ist in dieser Arbeit bei der Modellierung der einzelnen Probleme auf die Stärken der am Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik bestehenden Softwarepakete EleFAnT3D und EleFAnT2D eingegangen worden. Für die Untersuchung von Wellenphänomenen standen einerseits das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} , das elektrische Skalarpotential V (\mathbf{A}, V -Formulierung) bzw. das elektrische Strömungspotential \mathbf{T} , das magnetischen Skalarpotential Φ (\mathbf{T}, Φ -Formulierung) zur Verfügung. Verwendet man PML's in der Simulation, hat sich die \mathbf{A}, V -Formulierung als besser erwiesen. Bei Frequenzen unter 50 MHz spielt die Wellenausbreitung eine geringere Rolle und die \mathbf{T}, Φ -Formulierung konvergiert schneller als die \mathbf{A}, V -Formulierung. Es stand in der Arbeit die Untersuchung von möglichst unterschiedlichen Problemen im Vordergrund.

Eine große Anzahl der Probleme sind Untersuchungen von gedruckten Schaltungen in einem Frequenzbereich zwischen 1 MHz und 10 GHz. Die Leitung auf der Leiterplatte verhält sich im unteren Frequenzbereich wie eine verlustfreie Leitung, erhöht man die Frequenz weiter, spielt die Stromverdrängung eine immer grössere Rolle [16]. Wird die Frequenz noch weiter erhöht, wird der Einfluss des Dielektrikums auf die Wellenausbreitung merkbar. Im oberen Frequenzbereich ist die Abstrahlung für das elektrische Verhalten der Leitung vorrangig.

Für die Anpassung von Leitungen ist die Methode der PML's für den Abschluss von beliebigen verlustfreien Medien erweitert worden. Weiters wurden die PML's auch für das elektrische Strömungspotential \mathbf{T} und das magnetische Skalarpotential Φ (\mathbf{T}, Φ -Formulierung) implementiert. Die Formeln zur Ermittlung der PML-Parameter sind für das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} , das elektrische Skalarpotential V (\mathbf{A}, V -Formulierung) bzw. das elek-

trische Strömungspotential \mathbf{T} , das magnetischen Skalapotentiale Φ (\mathbf{T} , Φ -Formulierung) auf ihren Einfluß auf den Reflexionsfaktor der PML's überprüft worden.

Für diese Arbeit sind 5000 Einzelsimulationen mit einem Rechenaufwand von zwischen wenigen Sekunden bis zu 8 Wochen für eine einzelne Simulation nötig gewesen. Die meisten Probleme konnten auf 32-Bit Arbeitsstationen, die unter Windows XP Professional laufen, simuliert werden. Für die größeren Modelle standen 64-Bit Opteron Arbeitsstationen zur Verfügung, hierfür kam Windows XP 64-Bit zum Einsatz.

Anhang A

Leitungsparameter aus 2D-FEM-Berechnungen

Für viele 3D-FEM-Feldsimulationen sind die Ergebnisse aus der 2D-FEM-Berechnung eine gute Referenz. Die Leitungsparameter $R'(\omega)$, $L'(\omega)$, $G'(\omega)$ und $C'(\omega)$ aus der 2D-FEM-Rechnung werden aus einer Wirbelstromsimulation, aus einer elektrostatischen Berechnung und aus einer Berechnung des Strömungsfeldes ermittelt. Man erhält die Leitungsbeläge pro Längeneinheit. Entsprechend der Frequenzabhängigkeit der Materialparameter sind für jeden Frequenzpunkt Simulationen notwendig. Aus den Leitungsbelägen $R'(\omega)$, $L'(\omega)$, $G'(\omega)$ und $C'(\omega)$ lassen sich der Wellenwiderstand $Z_0(\omega)$ und die Ausbreitungskonstante $\gamma(\omega)$ bestimmen:

$$\gamma(\omega) = \sqrt{[R'(\omega) + j\omega L'(\omega)] \cdot [G'(\omega) + j\omega C'(\omega)]} \quad (\text{A.1})$$

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{R'(\omega) + j\omega L'(\omega)}{G'(\omega) + j\omega C'(\omega)}} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Modellierung der Struktur

Bei der Modellierung der Struktur ist auf die Art der Simulation Rücksicht zu nehmen. Die größtmögliche Unterteilung lässt sich auf folgende Weise ermitteln: Man verfeinert die finite Elemente-Unterteilung so lange, bis sich das Ergebnis nicht mehr oder kaum mehr ändert. Auf diese Weise lassen sich auch schlechte Unterteilungen verbessern.

A.1.1 Ermittlung des Widerstandsbelags und des Induktivitätsbelags aus der Wirbelstromberechnung

Bei der Wirbelstromberechnung ist die Eindringtiefe in den Leiter zu berücksichtigen und zu modellieren. Für die leitende Halbebene ist die Eindringtiefe:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}. \quad (\text{A.3})$$

Für die Bestimmung des Induktivitätsbelags ist es wichtig, die Bereiche, in denen im Problemgebiet höhere magnetische Feldstärken auftreten, besser zu unterteilen:

$$W_m = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* d\Omega$$

$$L' = \frac{4 W_m}{I^2} = \frac{2 W_m}{I_{eff}^2}. \quad (\text{A.4})$$

Für die Ermittlung des Widerstandsbelags ist die Eindringtiefe ausschlaggebend. Für die leitende Halbebene nimmt der Betrag der Stromdichte exponentiell mit dem Abstand zur Leiteroberfläche ab. Im Bereich der einfachen Eindringtiefe δ fließt 63.21 % $((1 - e^{-1}) \cdot 100\%)$ des Stromes. Für die Simulation der Eindringtiefe werden 5δ (das entspricht 99.32 % des Stromes) verwendet. Dieser Bereich wird auch noch durch einen Anziehungsfaktor von 0.3 in Richtung Leiteroberfläche modelliert [4] und [25]. Die nächste Makroelementschicht wird mit etwa 50δ realisiert und ein Anziehungsfaktor von 0.4 in Richtung Leiteroberfläche wird verwendet. Die Unterteilung kann bei beiden Schichten gleich sein:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{Leiter}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\Omega_{Leiter}$$

$$R' = \frac{2 P}{I^2} = \frac{P}{I_{eff}^2}. \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Ermittlung des Kapazitätsbelags aus der elektrostatischen Simulation

Die Bestimmung des Kapazitätsbelags kann über die Ladung oder über die elektrische Energie erfolgen. Die Leiteroberfläche wird als Randbedingung mit dem entsprechenden Potential formuliert, wobei das Leiterinnere keinen Einfluss auf die Simulationsgenauigkeit hat. Das beste Ergebnis erzielt man, wenn man die Leiterkanten mit einem Radius ungleich Null simuliert, um die Unstetigkeiten, die an den Ecken entstehen, möglichst gering zu halten.

Bei der Bestimmung des Kapazitätsbelags über die Ladung beeinflusst die finite Elemente-Unterteilung auf der Leiteroberfläche die Genauigkeit:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \underbrace{\oint_{\Gamma} \sigma \, d\Gamma}_Q$$

$$C' = \frac{Q}{U}. \quad (\text{A.6})$$

Die zweite Möglichkeit zur Bestimmung des Kapazitätsbelags ist über die Berechnung der elektrischen Energie. Die finite Elementeunterteilung auf der Leiteroberfläche geht hier kaum in die Genauigkeit des Rechenergebnisses ein. Hier ist es wichtiger, die Bereiche in denen eine höhere Feldstärke vorhanden ist, besser zu unterteilen:

$$W_e = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \, d\Omega$$

$$C' = \frac{4 W_e}{U^2} = \frac{2 W_e}{U_{eff}^2}. \quad (\text{A.7})$$

Die Ermittlung des Kapazitätsbelags über die elektrische Energie ist genauer als über das Oberflächenintegral.

A.1.3 Ermittlung des Leitwertbelags aus der Berechnung des elektrischen Strömungsfeldes

Die Verluste im Dielektrikum werden als Leitfähigkeit zwischen den Leitern modelliert. Bei der Vorgabe des Verlustwinkels erhält man die Leitfähigkeit aus (4.4):

$$\sigma + j\omega\epsilon = j\omega\epsilon_c = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'') = \omega\epsilon'' + j\omega\epsilon'$$

$$\epsilon' = \epsilon$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

$$\sigma = \omega\epsilon \tan \delta. \quad (\text{A.8})$$

Die finite Elementeunterteilung ist der elektrischen Feldstärke im Problemgebiet anzupassen. Regionen mit höheren elektrischen Feldstärken wie zum Beispiel Leiterkanten sind besser zu unterteilen. Um die Unstetigkeiten an den Ecken zu vermeiden, kann man die Ecken abrunden.

den. Die Leiteroberfläche wird als elektrische Randbedingung modelliert. Das Leiterinnere hat keinen Einfluss auf das Ergebnis:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{Medium}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\Omega_{Medium}$$

$$R' = \frac{2P}{U^2} = \frac{P}{U_{eff}^2}. \quad (\text{A.9})$$

Die Eindringtiefe spielt bei der geringen Leitfähigkeit keine Rolle und wird auch nicht bei der Simulation des Strömungsfeldes berücksichtigt.

A.2 Auswertung der Rechenergebnisse

Bei der Auswertung der Simulationsergebnisse erhält man die größte Genauigkeit wenn man integrale Größen verwendet. Flächenintegrale sind Linienintegralen vorzuziehen.

A.2.1 Induktivitätsbelag

Der Induktivitätsbelag $L'(\omega)$ wird aus der Wirbelstromberechnung ermittelt. Bestimmt wird der Induktivitätsbelag $L'(\omega)$ aus der magnetischen Energie, integriert über das gesamte Problemgebiet:

$$L'(\omega) = \frac{4 \cdot W_m(\omega)}{I^2} = \frac{2 \cdot W_m(\omega)}{I_{eff}^2}. \quad (\text{A.10})$$

Zu beachten ist hier, dass der gewählte Strom bei der FEM dem Scheitelwert entspricht, hingegen in die Formel für die magnetische Energie der Effektivwert eingesetzt wird.

A.2.2 Widerstandsbelag

Der Widerstandsbelag $R'(\omega)$ wird aus der Wirbelstromberechnung ermittelt. Ausgewertet wird die Verlustleistung im Leiter:

$$R'(\omega) = \frac{2 P_{Cu}}{I^2} = \frac{P_{Cu}}{I_{eff}^2}. \quad (\text{A.11})$$

A.2.3 Kapazitätsbelag

Der Kapazitätsbelag $C'(\omega)$ wird aus einer elektrostatischen Berechnung ermittelt. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten den Kapazitätsbelag zu ermitteln. Die erste Möglichkeit ist über die Ladung:

$$C'(\omega) = \frac{Q}{U}. \quad (\text{A.12})$$

Die zweite Möglichkeit ist die Berechnung über die elektrische Energie:

$$C'(\omega) = \frac{4 \cdot W_e}{U^2} = \frac{42 \cdot W_e}{U_{eff}^2}. \quad (\text{A.13})$$

Die Berechnung des Kapazitätsbelags über die elektrische Energie ist genauer.

A.2.4 Leitwertbelag

Der Leitwertbelag $G'(\omega)$ wird aus der Berechnung des Strömungsfelds ermittelt. Ausgewertet wird die Verlustleistung zwischen den Leitern:

$$G'(\omega) = \frac{2 P_{tan\delta}}{U^2} = \frac{P_{tan\delta}}{U_{eff}^2}. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Berechnung der Vierpolparameter

Ausgehend von den Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned} U(z) &= U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z} \\ I(z) &= \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} + \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

erhält man für die Spannung am Anfang der Leitung ($z = 0$):

$$\begin{aligned} U_1 &= U^+ + U^- \\ I_1 &= \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Die Spannung am Ende der Leitung mit der Leitungslänge $z = l$ ist:

$$\begin{aligned} U_2 &= U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l} \\ I_2 &= \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Eliminiert man die Spannungen U^+ und U^- , ergeben sich die Zusammenhänge zwischen den Spannungen und den Strömen am Anfang und am Ende der Leitung zu

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2}(U_1 + I_1 Z_0)e^{-\gamma l} + \frac{1}{2}(U_1 - I_1 Z_0)e^{\gamma l} \\ I_2 &= \frac{1}{2Z_0}(U_1 + I_1 Z_0)e^{-\gamma l} - \frac{1}{2Z_0}(U_1 - I_1 Z_0)e^{\gamma l}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Aus diesem Zusammenhang werden alle weiteren Vierpolparameter durch Umformung der Gleichungen (A.18) bestimmt.

A.3.1 Kettenmatrix

Aus (A.18) erhält man für die Kettenmatrix nach der Umformung folgende Ausdrücke für die Spannung U_1 am Anfang der Leitung, den Strom I_1 am Anfang der Leitung, der Spannung U_2 am Ende der Leitung und dem Strom I_2 am Ende der Leitung mit der Leitungslänge l :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cosh \gamma l + I_2 Z_0 \sinh \gamma l \\ I_1 &= \frac{U_2}{Z_0} \sinh \gamma l + I_2 \cosh \gamma l. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Die Kettenmatrix lautet in Matrizenschreibweise:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

A.3.2 Impedanzmatrix

Die Impedanzmatrix $[Z]$ erhält man aus der Kettenmatrix im allgemeinen aus folgendem Zusammenhang:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det[A]}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Für Leitungen ist die Kettenmatrix symmetrisch und es ergibt sich für die Impedanzmatrix:

$$[Z] = \frac{Z_0}{\sinh \gamma l} \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & 1 \\ 1 & \cosh \gamma l \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

A.3.3 Admittanzmatrix

Die Admittanzmatrix $[Y]$ erhält man aus der Kettenmatrix im allgemeinen aus folgendem Zusammenhang:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det[A]}{A_{12}} \\ -\frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Für Leitungen ist die Kettenmatrix symmetrisch und es ergibt sich für die Admittanzmatrix:

$$[Y] = \frac{1}{Z_0 \sinh \gamma l} \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -1 \\ -1 & \cosh \gamma l \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

A.3.4 Streuparameter

Die Streuparameter werden immer auf Referenzimpedanzen bezogen. Das bedeutet einen Abschluss des Vierpols am Eingang mit einer Referenzimpedanz $Z_{01}(\omega)$ und am Ausgang mit einer Referenzimpedanz $Z_{02}(\omega)$. Für den allgemeinen Fall erhält man die Streuparameter aus der Impedanzmatrix für beliebige Referenzimpedanzen aus:

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1(\omega)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R_2(\omega)}} \end{bmatrix} \cdot \left([Z(\omega)] - [\hat{Z}^*(\omega)] \right) \cdot \left([Z(\omega)] - [\hat{Z}(\omega)] \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{R_1(\omega)} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_2(\omega)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

mit

$$\begin{aligned} [\widehat{Z}(\omega)] &= \begin{bmatrix} Z_{01}(\omega) & 0 \\ 0 & Z_{02}(\omega) \end{bmatrix} \\ R_1(\omega) &= \Re\{Z_{01}(\omega)\} \\ R_2(\omega) &= \Re\{Z_{02}(\omega)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Die S-Parameter lassen sich aus der Impedanzmatrix für den Fall, dass die Referenzwiderstände reell und gleich sind wie folgt bestimmen:

$$[S(\omega)] = \left([Z] - \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \right) \cdot \left([Z] + \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (\text{A.27})$$

Die einzelnen Streuparameter erhält man aus:

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) &= \frac{1}{sum_{ZS}} (R_0 Z_{11} - R_0 Z_{22} - R_0 R_0 + det[Z]) \\ S_{12}(\omega) &= \frac{2}{sum_{ZS}} (R_0 Z_{12}) \\ S_{21}(\omega) &= \frac{2}{sum_{ZS}} (R_0 Z_{21}) \\ S_{22}(\omega) &= \frac{1}{sum_{ZS}} (R_0 Z_{22} - R_0 Z_{11} - R_0 R_0 + det[Z]) \\ sum_{ZS} &= R_0 R_0 + R_0 Z_{11} + R_0 Z_{22} + Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} \\ det[Z] &= Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Anhang B

Übersprechen

Als Referenz zu den 3D-FEM-Berechnungen wurde ein Netzwerkmodell aufgestellt, welches das Übersprechen zwischen zwei Leiterbahnen nachbilden soll.

B.1 Netzwerkmodell

Ausgehend vom Ersatzschaltbild einer Leitung (Abbildung B.1) fügt man, um die Kopplung der Leitungen simulieren zu können, die Bauteile C_{12} , M , G_{12} dazu. Weiters wird das Ersatzschaltbild der Leitung aus Symmetriegründen erweitert (Abbildung B.2).

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden für die weitere Berechnung Bauteile in Admit-

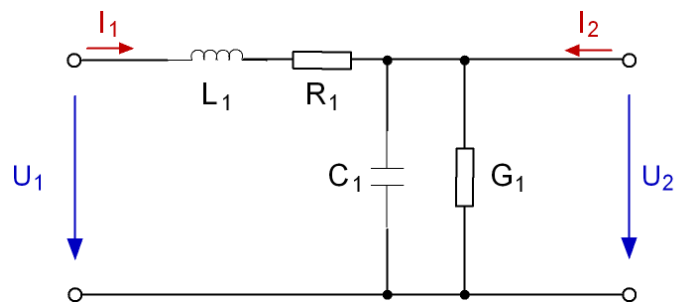


Abbildung B.1: Netzwerkmodell einer Leitung.

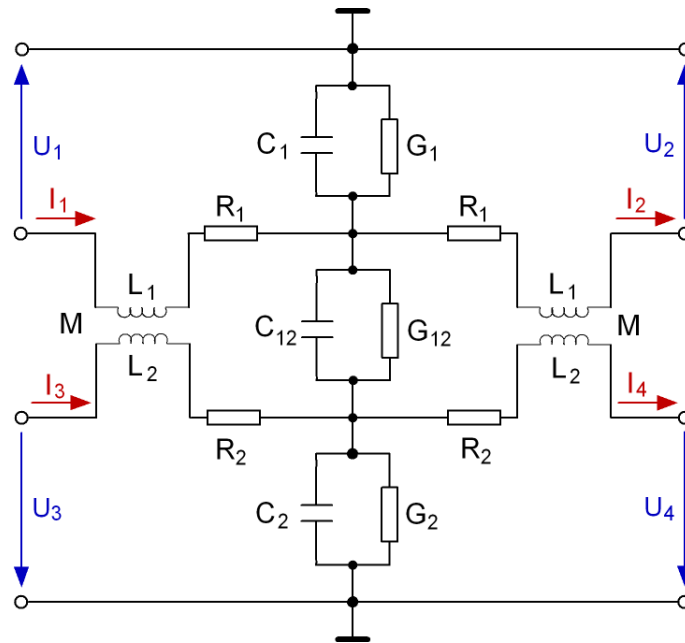


Abbildung B.2: Netzwerkmodell zum Übersprechen zwischen zwei Leiterbahnen.

tanzen und Impedanzen zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= R_1 + j\omega L_1 \\
 Z_2 &= R_2 + j\omega L_2 \\
 Z_M &= j\omega M \\
 Y_1 &= G_1 + j\omega C_1 \\
 Y_2 &= G_2 + j\omega C_2 \\
 Y_{12} &= G_{12} + j\omega C_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Die Maschengleichungen für die Eingangs- und Ausgangsspannungen lauten:

$$\begin{aligned}
 0 &= -U_1 + I_1 Z_1 + I_3 Z_M - \frac{I_{Y1}}{Y_1} \\
 0 &= -U_3 + I_3 Z_2 + I_1 Z_M + \frac{I_{Y2}}{Y_2} \\
 0 &= U_2 + I_2 Z_1 + I_4 Z_M + \frac{I_{Y1}}{Y_1} \\
 0 &= U_4 + I_4 Z_2 + I_2 Z_M - \frac{I_{Y2}}{Y_2}.
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

Die Ströme in den Quergliedern können durch eine weitere Maschengleichung und zwei Knotengleichungen eliminiert werden:

$$\begin{aligned}
 0 &= U_3 - U_1 + I_1 Z_1 + I_3 Z_M - I_3 Z_2 - I_1 Z_M + \frac{I_{Y12}}{Y_{12}} \\
 I_{Y1} &= I_2 - I_1 + I_{Y12} \\
 I_{Y2} &= I_3 - I_4 + I_{Y12}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2 Kettenmatrix

Die Koeffizienten der Kettenmatrix ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 1 - Y_{12} Z_M + Y_{12} Z_1 + Z_1 Y_1 \\
 A_{12} &= 2 Z_1 + Z_M^2 Y_2 - 2 Z_M Y_{12} Z_1 + Z_1^2 Y_1 + Z_M^2 Y_{12} + Y_{12} Z_1^2 \\
 A_{13} &= Y_{12} Z_M - Y_{12} Z_1 + Z_M Y_2 \\
 A_{14} &= 2 Z_M - Z_1 Y_{12} Z_2 + Z_1 Y_{12} Z_M + Z_1 Z_M Y_1 + Z_M Z_2 Y_2 + Z_M Y_{12} Z_2 - Y_{12} Z_M^2 \\
 A_{21} &= Y_{12} + Y_1 \\
 A_{22} &= Z_1 Y_1 + 1 + Y_{12} Z_1 - Y_{12} Z_M \\
 A_{23} &= -Y_{12} \\
 A_{24} &= Y_{12} Z_M - Y_{12} Z_2 + Z_M Y_1 \\
 A_{31} &= Z_M Y_1 + Y_{12} Z_M - Y_{12} Z_2 \\
 A_{32} &= 2 Z_M - Z_M^2 Y_{12} + Z_2 Y_2 Z_M + Z_M Y_{12} Z_1 + Z_M Z_1 Y_1 + Z_2 Y_{12} Z_M - Z_2 Y_{12} Z_1 \\
 A_{33} &= Z_2 Y_2 + 1 + Y_{12} Z_2 - Y_{12} Z_M \\
 A_{34} &= Y_{12} Z_M^2 + Y_{12} Z_2^2 + Z_2^2 Y_2 + 2 Z_2 - 2 Z_M Y_{12} Z_2 + Z_M^2 Y_1 \\
 A_{41} &= -Y_{12} \\
 A_{42} &= Z_M Y_2 - Y_{12} Z_1 + Y_{12} Z_M \\
 A_{43} &= Y_2 + Y_{12} \\
 A_{44} &= 1 + Z_2 Y_2 + Y_{12} Z_2 - Y_{12} Z_M.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Mit Hilfe der Kettenmatrix werden n Leitungsstücke hintereinander geschaltet. Es gilt:

$$[\mathbf{A}_{res}] = \underbrace{[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}] \cdots [\mathbf{A}]}_n. \tag{B.5}$$

Die Anzahl der in Kette geschalteten Glieder wird mit der Unterteilung pro Wellenlänge festgelegt:

$$n = \begin{cases} n & \text{für } \lambda < l \\ n \frac{l}{\lambda} & \text{für } \lambda \geq l \end{cases} . \quad (\text{B.6})$$

Der Grund dafür liegt darin, dass für kleine n die Abweichung zur 3D-FEM-Berechnung und zu den Messergebnissen zu groß wird.

B.3 Impedanzmatrix

Die Streuparameter erhält man aus den Impedanzparametern (Gleichung C.21) mit den charakteristischen Wellenimpedanzen (C.2) der beiden Leitungen.

Für ein Viertor ergeben sich die Z-Parameter aus den Kettenparametern aus folgenden Zusammenhängen:

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= -\frac{-A_{13} A_{41} + A_{11} A_{43}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{12} &= -\frac{A_{21} A_{13} A_{42} - A_{13} A_{41} A_{22} - A_{11} A_{23} A_{42} + A_{12} A_{41} A_{23} - A_{21} A_{12} A_{43} + A_{11} A_{22} A_{43}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{13} &= \frac{-A_{11} A_{23} + A_{13} A_{21}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{14} &= -\frac{A_{11} A_{23} A_{44} - A_{11} A_{24} A_{43} - A_{13} A_{21} A_{44} + A_{13} A_{41} A_{24} + A_{14} A_{21} A_{43} - A_{14} A_{41} A_{23}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{21} &= -\frac{A_{43}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{22} &= -\frac{-A_{23} A_{42} + A_{43} A_{22}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{23} &= -\frac{A_{23}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{24} &= -\frac{A_{23} A_{44} - A_{24} A_{43}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{31} &= \frac{A_{33} A_{41} - A_{43} A_{31}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{32} &= -\frac{A_{21} A_{33} A_{42} - A_{33} A_{41} A_{22} - A_{21} A_{43} A_{32} - A_{31} A_{23} A_{42} + A_{43} A_{31} A_{22} + A_{41} A_{23} A_{32}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{33} &= -\frac{A_{31} A_{23} - A_{33} A_{21}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{34} &= \frac{A_{21} A_{33} A_{44} - A_{33} A_{41} A_{24} - A_{31} A_{23} A_{44} - A_{21} A_{34} A_{43} + A_{34} A_{41} A_{23} + A_{31} A_{24} A_{43}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{41} &= -\frac{A_{43}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{42} &= \frac{-A_{21} A_{42} + A_{41} A_{22}}{A_{41} A_{23} - A_{21} A_{43}} \\
 Z_{43} &= \frac{A_{21}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}} \\
 Z_{44} &= \frac{A_{21} A_{44} - A_{41} A_{24}}{A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}}.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Anhang C

Vierpole

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung der Vierpolparameter aus den Feldgrößen erläutert. Entsprechend den verschiedenen Lösungswegen der Feldprobleme werden verschiedene Arten der Bestimmung der Vierpolparameter beschrieben. Die Bestimmung der Vierpolparameter ist auf sinusförmige Größen beschränkt.

C.1 Z-Parameter

Dieser Abschnitt behandelt verschiedene Möglichkeiten, die Parameter der Impedanzmatrix zu bestimmen.

C.1.1 Bestimmung der Z-Parameter aus 2D-FEM-Feldproblemen

Die Berechnung der frequenzabhängigen Leitungsbeläge $R'(\omega)$, $L'(\omega)$, $G'(\omega)$ und $C'(\omega)$ wird im Anhang A beschrieben. Aus den Leitungsbelägen $R'(\omega)$, $L'(\omega)$, $G'(\omega)$ und $C'(\omega)$ werden als erstes die Ausbreitungskonstante $\gamma(\omega)$ und die Wellenimpedanz $Z_0(\omega)$ bestimmt [31]:

$$\gamma(\omega) = \sqrt{[R'(\omega) + j\omega L'(\omega)] \cdot [G'(\omega) + j\omega C'(\omega)]} \quad (\text{C.1})$$

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{R'(\omega) + j\omega L'(\omega)}{G'(\omega) + j\omega C'(\omega)}}. \quad (\text{C.2})$$

Für verlustlose Leitungen vereinfachen sich die Beziehungen für die Ausbreitungskonstante $\gamma(\omega)$ und der Wellenwiderstand $Z_0(\omega)$ wie folgt:

$$\gamma(\omega) = j\omega \sqrt{L'(\omega) \cdot C'(\omega)} \quad (\text{C.3})$$

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{L'(\omega)}{C'(\omega)}}. \quad (\text{C.4})$$

Den Strom $I_1(\omega)$ und die Spannung $U_1(\omega)$ am Anfang der Leitung erhält man bei gegebenem Strom $I_2(\omega)$ und gegebener Spannung $U_2(\omega)$ und der Länge l der Leitung wie folgt:

$$U_1(\omega) = U_2(\omega) \cdot \cosh \gamma(\omega)l + I_2(\omega)Z_0 \cdot \sinh \gamma(\omega)l \quad (\text{C.5})$$

$$I_1(\omega) = I_2(\omega) \cdot \cosh \gamma(\omega)l + \frac{U_2(\omega)}{Z_0} \cdot \sinh \gamma(\omega)l . \quad (\text{C.6})$$

Für den Leerlauf und den Kurzschlussfall vereinfachen sich die Leitungsgleichungen zu:

$$U_{1l}(\omega) = U_{2l}(\omega) \cdot \cosh \gamma(\omega)l$$

$$I_{1l}(\omega) = \frac{U_{2l}(\omega)}{Z_0} \cdot \sinh \gamma(\omega)l$$

$$U_{1k}(\omega) = -I_{2k}(\omega)Z_0 \cdot \sinh \gamma(\omega)l$$

$$I_{1k}(\omega) = -I_{2k}(\omega) \cdot \cosh \gamma(\omega)l . \quad (\text{C.7})$$

Das Minus bei der Kurzschlussspannung $U_{1k}(\omega)$ und bei dem Kurzschlussstrom $I_{1k}(\omega)$ kommt von den unterschiedlichen Zählrichtungen bei den Leitungsgleichungen und bei den Vierpolparametern für die Impedanzmatrix. Ausgehend von der Definition der Z-Parameter

$$\begin{Bmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_1(\omega) \\ I_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

werden die einzelnen Parameter wie folgt berechnet:

$$Z_{11}(\omega) = \left. \frac{U_{1l}(\omega)}{I_{1l}(\omega)} \right|_{I_2 = 0}$$

$$Z_{21}(\omega) = \left. \frac{U_{2l}(\omega)}{I_{1l}(\omega)} \right|_{I_2 = 0}$$

$$Z_{12}(\omega) = \left. \frac{U_{1k}(\omega) - Z_{11}(\omega) \cdot I_{1k}(\omega)}{I_{2k}(\omega)} \right|_{U_2 = 0}$$

$$Z_{22}(\omega) = \left. \frac{-Z_{21}(\omega) \cdot I_{1k}(\omega)}{I_{2k}(\omega)} \right|_{U_2 = 0} .$$

Setzt man nun die Spannungen $U_{1k}(\omega)$, $U_{1l}(\omega)$ und die Ströme $I_{1k}(\omega), I_{1l}(\omega)$ in die Gleichungen ein, erhält man:

$$\begin{aligned} Z_{11}(\omega) &= Z_0(\omega) \coth \gamma(\omega)l \\ Z_{12}(\omega) &= \frac{Z_0(\omega)}{\sinh \gamma(\omega)l} \\ Z_{21}(\omega) &= \frac{Z_0(\omega)}{\sinh \gamma(\omega)l} \\ Z_{22}(\omega) &= Z_0(\omega) \coth \gamma(\omega)l. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aus dem Ergebnis erkennt man sofort, dass die Reziprozität $Z_{12} = Z_{21}$ und die Symmetriebedingung $Z_{11} = Z_{22}$ der Vierpolparameter eingehalten wird.

C.1.2 Z-Parameter aus 3D-FEM-Feldproblemen

Aus der Lösung der 3D-FEM-Feldprobleme erhält man die Spannungen $U_1(\omega)$ $U_2(\omega)$ und die Ströme $I_1(\omega)$ $I_2(\omega)$. Ist das Problem unsymmetrisch, dann benötigt man zwei Berechnungen für einen Frequenzpunkt.

C.1.2.1 Symmetrische Feldprobleme

Die Z-Matrix vereinfacht sich dann folgendermaßen:

$$\begin{Bmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{12}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_1(\omega) \\ I_2(\omega) \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Die Lösung der Gleichungen vereinfacht sich auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Im allgemeinen sieht die Lösung der Z-Parameter wie folgt aus:

$$\begin{aligned} Z_{11}(\omega) &= \frac{U_1(\omega) \cdot I_1(\omega) - U_2(\omega) \cdot I_2(\omega)}{I_1(\omega)^2 - I_2(\omega)^2} \\ Z_{12}(\omega) &= \frac{U_1(\omega) \cdot I_2(\omega) - U_2(\omega) \cdot I_1(\omega)}{I_2(\omega)^2 - I_1(\omega)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

C.1.2.2 Unsymmetrische Feldprobleme

Für die Berechnung der Z-Parameter werden zwei Berechnungen pro Frequenzpunkt benötigt. Das Gleichungssystem für die Spannungen $U_1(\omega)'$, $U_2(\omega)'$, $U_1(\omega)''$ und $U_2(\omega)''$ und die Ströme $I_1(\omega)'$, $I_2(\omega)'$, $I_1(\omega)''$ und $I_2(\omega)''$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} U_1(\omega)' \\ U_2(\omega)' \end{cases} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} I_1(\omega)' \\ I_2(\omega)' \end{cases} \\ \begin{cases} U_1(\omega)'' \\ U_2(\omega)'' \end{cases} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} I_1(\omega)'' \\ I_2(\omega)'' \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Die Lösung der Z-Parameter im allgemeinen Fall sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} Z_{11}(\omega) &= \frac{U_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'}{I_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - I_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ Z_{12}(\omega) &= \frac{U_1(\omega)'' \cdot I_1(\omega)' - U_1(\omega)' \cdot I_1(\omega)''}{I_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - I_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ Z_{21}(\omega) &= \frac{U_2(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_2(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'}{I_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - I_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ Z_{22}(\omega) &= \frac{U_2(\omega)'' \cdot I_1(\omega)' - U_2(\omega)' \cdot I_1(\omega)''}{I_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - I_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Die Reziprozitätsbedingung $Z_{12}(\omega) = Z_{21}(\omega)$ muß auch hier gelten. Eine Abweichung von den Werten ist ein Zeichen für die Ungenauigkeit der Berechnung. Der Fehler liegt meist in der Bestimmung der integralen Größen $U_1(\omega)'$, $U_2(\omega)'$, $U_1(\omega)''$ und $U_2(\omega)''$ und $I_1(\omega)'$, $I_2(\omega)'$, $I_1(\omega)''$ sowie $I_2(\omega)''$.

C.2 A-Parameter

Dieser Abschnitt behandelt die verschiedenen Wege, die Parameter der Kettenmatrix zu bestimmen. Die Kettenmatrix wird verwendet, um einzelne Strukturen, die unabhängig voneinander berechnet wurden, wieder zusammen zu schalten. Die Aufteilung komplexer Wellenprobleme auf einzelne einfache Probleme bedeutet einen erheblichen Gewinn in der Berechnung und reduziert den Speicherbedarf bei der FEM-Berechnung.

C.2.1 Bestimmung der A-Parameter aus 2D-FEM-Feldproblemen

Ausgehend von der Ausbreitungskonstanten und dem Wellenwiderstand (C.2), den Leitungsgleichungen (C.6) und der Definition der Kettenparameter

$$\begin{Bmatrix} U_1(\omega) \\ I_1(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2(\omega) \\ -I_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

erhält man

$$\begin{aligned} A_{11}(\omega) &= \left. \frac{U_1(\omega)}{U_2(\omega)} \right|_{I_2=0} = \cosh \gamma(\omega)l \\ A_{12}(\omega) &= \left. \frac{-U_1(\omega)}{I_2(\omega)} \right|_{U_2=0} = Z_0(\omega) \sinh \gamma(\omega)l \\ A_{21}(\omega) &= \left. \frac{I_1(\omega)}{U_2(\omega)} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_0(\omega)} \sinh \gamma(\omega)l \\ A_{22}(\omega) &= \left. \frac{-I_1(\omega)}{I_2(\omega)} \right|_{I_2=0} = \cosh \gamma(\omega)l. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Die Reziprozitätsbedingung $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ und die Symmetriebedingungen $A_{11} = A_{22}$ sind für die Kettenparameter erfüllt.

C.2.2 A-Parameter aus 3D-FEM-Feldproblemen

Die Bestimmung der Kettenparameter aus den 3D-Feldlösungen erfolgt aus den Spannungen $U_1(\omega)$ $U_2(\omega)$ und den Strömen $I_1(\omega)$ $I_2(\omega)$. Ist das Problem unsymmetrisch, werden zwei Berechnungen pro Frequenzpunkt benötigt.

C.2.2.1 Symmetrische Feldprobleme

Die Berechnung der Kettenparameter für den allgemeinen Betriebsfall erfordert die Bestimmung von drei Werten:

$$\begin{aligned} A_{11}(\omega) = A_{22}(\omega) &= -\frac{U_1(\omega) \cdot I_1(\omega) - I_2(\omega) \cdot U_2(\omega)}{U_1(\omega) \cdot I_2(\omega) - U_2(\omega) \cdot I_1(\omega)} \\ A_{12}(\omega) &= \frac{U_2(\omega)^2 - U_1(\omega)^2}{U_1(\omega) \cdot I_2(\omega) - U_2(\omega) \cdot I_1(\omega)} \\ A_{21}(\omega) &= \frac{I_2(\omega)^2 - I_1(\omega)^2}{U_1(\omega) \cdot I_2(\omega) - U_2(\omega) \cdot I_1(\omega)}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Die Reziprozitätsbedingung $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ und die Symmetriebedingungen $A_{11} = A_{22}$ sind für die Kettenparameter erfüllt.

C.2.2.2 Unsymmetrische Feldprobleme

Für die Bestimmung der Kettenparameter bei unsymmetrischen Feldproblemen sind für jeden Frequenzpunkt zwei Feldberechnungen notwendig. Das zu lösende Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_1(\omega)' \\ I_1(\omega)' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2(\omega)' \\ -I_2(\omega)' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1(\omega)'' \\ I_1(\omega)'' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2(\omega)'' \\ -I_2(\omega)'' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Die Lösung für den allgemeinen Fall erhält man dann aus:

$$\begin{aligned} A_{11}(\omega) &= \frac{U_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'}{U_2(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_2(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ A_{12}(\omega) &= \frac{U_1(\omega)' \cdot U_2(\omega)'' - U_1(\omega)'' \cdot U_2(\omega)'}{U_2(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_2(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ A_{21}(\omega) &= \frac{I_1(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - I_1(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'}{U_2(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_2(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \\ A_{22}(\omega) &= \frac{U_2(\omega)'' \cdot I_1(\omega)' - U_2(\omega)' \cdot I_1(\omega)''}{U_2(\omega)' \cdot I_2(\omega)'' - U_2(\omega)'' \cdot I_2(\omega)'} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Die Reziprozitätsbedingung $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ muss für die Kettenparameter erfüllt sein.

C.3 S-Parameter

In diesem Abschnitt wird die Ermittlung der S-Parameter aus anderen Vierpolparametern beschrieben [22]. Die direkte Ermittlung der Streuparameter aus der FEM-Lösung ist nur bei der Berechnung der Feldprobleme unter Verwendung transfiniter Elemente möglich [8], [32]. Die Ermittlung der S-Parameter aus der Impedanzmatrix erfordert die Angabe einer Referenzimpedanz. In den meisten Fällen entspricht die Referenzimpedanz der Wellenimpedanz der Zuleitung. Dies ist aber kein Erfordernis.

C.3.1 Berechnung der S-Parameter aus den Z-Parametern

Die komplexe Referenzimpedanz am Eingang und am Ausgang des Vierpols wird zu einer Impedanzmatrix zusammengefasst:

$$\begin{aligned} [\widehat{Z}(\omega)] &= \begin{bmatrix} \widehat{Z}_1(\omega) & 0 \\ 0 & \widehat{Z}_2(\omega) \end{bmatrix} \\ \widehat{R}_1(\omega) &= \Re \left\{ \widehat{Z}_1(\omega) \right\} \\ \widehat{R}_2(\omega) &= \Re \left\{ \widehat{Z}_2(\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Die Reflexionskoeffizienten $r_1(\omega)$ und $r_2(\omega)$ für die Referenzimpedanzen $\widehat{Z}_1(\omega)$ und $\widehat{Z}_2(\omega)$ bezogen auf die Wellenwiderstände $Z_{01}(\omega)$ und $Z_{02}(\omega)$ der Leitungen am Eingang und am Ausgang des Vierpols lauten:

$$\begin{aligned} r_1(\omega) &= \frac{\widehat{Z}_1(\omega) - Z_{01}(\omega)}{\widehat{Z}_1(\omega) + Z_{01}(\omega)} \\ r_2(\omega) &= \frac{\widehat{Z}_2(\omega) - Z_{02}(\omega)}{\widehat{Z}_2(\omega) + Z_{02}(\omega)}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Die S-Parameter für ein Mehrtor errechnen sich aus der Z-Matrix $[Z(\omega)]$ wie folgt:

$$[S(r_1(\omega), \dots, r_n(\omega))] = \left[\frac{1}{\sqrt{\widehat{R}}} \right] \cdot ([Z(\omega)] - [\widehat{Z}^*(\omega)]) \cdot ([Z(\omega)] + [\widehat{Z}(\omega)])^{-1} \cdot [\sqrt{\widehat{R}}]$$

mit

$$\begin{aligned} [\widehat{Z}(\omega)] &= \begin{bmatrix} \widehat{Z}_1(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{Z}_n(\omega) \end{bmatrix} \\ \left[\frac{1}{\sqrt{\widehat{R}}} \right] &= \sqrt{\Re \left\{ [\widehat{Z}(\omega)]^{-1} \right\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1(\omega)}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{R_n(\omega)}} \end{bmatrix} \\ [\sqrt{\widehat{R}}] &= \sqrt{\Re \left\{ [\widehat{Z}(\omega)] \right\}} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1(\omega)} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{R_n(\omega)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Die S-Parameter eines Vierpols für den allgemeinen Fall erhält man aus:

$$\begin{aligned}
 S_{11}(r_1(\omega), r_2(\omega)) &= \frac{1}{sum_{zs}} \left(\widehat{Z}_2(\omega) Z_{11}(\omega) - \widehat{Z}_1^*(\omega) Z_{22}(\omega) - \widehat{Z}_1^*(\omega) \widehat{Z}_2(\omega) + det[Z] \right) \\
 S_{12}(r_1(\omega), r_2(\omega)) &= \frac{2}{sum_{zs}} \sqrt{R_1(\omega) R_2(\omega)} \cdot Z_{12}(\omega) \\
 S_{21}(r_1(\omega), r_2(\omega)) &= \frac{2}{sum_{zs}} \sqrt{R_1(\omega) R_2(\omega)} \cdot Z_{21}(\omega) \\
 S_{22}(r_1(\omega), r_2(\omega)) &= \frac{1}{sum_{zs}} \left(\widehat{Z}_1(\omega) Z_{22}(\omega) - \widehat{Z}_2^*(\omega) Z_{11}(\omega) - \widehat{Z}_2^*(\omega) \widehat{Z}_1(\omega) + det[Z] \right) \\
 sum_{zs} &= \widehat{Z}_1(\omega) \widehat{Z}_2(\omega) + \widehat{Z}_2(\omega) Z_{11}(\omega) + \widehat{Z}_1(\omega) Z_{22}(\omega) + det[Z] \\
 det[Z] &= Z_{11}(\omega) Z_{22}(\omega) - Z_{12}(\omega) Z_{21}(\omega).
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

Sind die Z-Parameter symmetrisch und verwendet man am Eingang und am Ausgang die gleichen Referenzimpedanzen dann sind auch die S-Parameter aus den Gleichungen (C.22) symmetrisch. In den meisten Fällen wird eine reelle Referenzimpedanz verwendet, die entweder der Wellenimpedanz der Zuleitung entspricht oder eine andere häufig verwendete Referenzimpedanz wie 50 Ω , 75 Ω oder 100 Ω darstellt.

C.3.2 S - Kettenparameter oder T - Parameter

Will man mehrere Vierpole hintereinander schalten, so kann man anstatt der Kettenmatrix auch die S-Kettenparameter oder T - Parameter verwenden [22]:

$$\begin{aligned}
 T_{11}(\omega) &= \frac{1}{S_{21}(\omega)} \\
 T_{12}(\omega) &= -\frac{S_{22}(\omega)}{S_{21}(\omega)} \\
 T_{21}(\omega) &= \frac{S_{11}(\omega)}{S_{21}(\omega)} \\
 T_{22}(\omega) &= -\frac{det[S]}{S_{21}(\omega)} \\
 det[S] &= S_{11}(\omega) S_{22}(\omega) - S_{12}(\omega) S_{21}(\omega).
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

Die S-Parameter erhält man aus den T-Parametern :

$$S_{11}(\omega) = \frac{T_{21}(\omega)}{T_{11}(\omega)}$$

$$S_{12}(\omega) = \frac{\det[T]}{T_{11}(\omega)}$$

$$S_{21}(\omega) = \frac{1}{T_{11}(\omega)}$$

$$S_{22}(\omega) = -\frac{T_{12}(\omega)}{T_{11}(\omega)}$$

$$\det[T] = T_{11}(\omega)T_{22}(\omega) - T_{12}(\omega)T_{21}(\omega). \quad (\text{C.24})$$

Die Referenzwiderstände der einzelnen Vierpole müssen gleich sein!

Literaturverzeichnis

- [1] J.C. Adams, W.S. Brainerd, J.T. Martin, B.T. Smith, and J.L. Wagener. *Fortran 95 Handbook*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. (IEEE Press), 1st edition, 1997. ISBN-10: 0-262-51096-0.
- [2] B. Anderson, J.E. Bracken, J.B. Manges, Guanghua Peng, and Z. Cendes. Full-wave analysis in spice via model-order reduction. In *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, volume 52, pages 2314 – 2320, 2004.
- [3] O. Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. In *Computer methods in applied mechanics and engineering*, volume 169, pages 391–405, 1999. 4, 5, 10, 11
- [4] O. Bíró. *Theorie der Elektrotechnik 2*. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, 2001. Vorlesungsunterlagen. 55, 81
- [5] O. Bíró. *Variations- und Residuenmethoden in der Elektrotechnik*. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, 2002. Vorlesungsunterlagen. 3, 6
- [6] O. Bíró. *Simulation von quasistationären Vorgängen*. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, 2003. Vorlesungsunterlagen. 3, 4, 5, 6, 10, 11
- [7] I. Bárdi, O. Bíró, K. Preis, and W. Renhart. Parameter estimation for pmls used with 3d finite element codes. In *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 43, September 1998. 12, 22, 24, 26
- [8] Z.J. Cendes and Jin-Fa Lee. The transfinite element method for modeling mmic devices. In *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, volume 36, pages 1639 – 1649, 1988. 42, 98
- [9] R.E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. (IEEE Press), 2nd edition, 1991. ISBN-10: 0-87942-237-8. 31
- [10] R.E. Collin. *Foundations for Microwave Engineering*. McGraw-Hill International Editions, 2nd edition, 1992. ISBN-10: 0-07-112569-8. 31, 52
- [11] W Hackbusch, H.R. Schwarz, and E Zeidler. *Teubner - Taschenbuch der Mathematik*. Prof. Dr. E. Zeidler, 2nd edition, November 2003. ISBN-10: 3-519-20012-0, Seite 376. 15

- [12] R.C. Hansen. Fundamental limitations in antennas. In *Proceedings of the IEEE*, volume 69, pages 170 – 182, 1981. 58
- [13] K. Hollaus, O. Bíró, P. Caldera, G. Matzenauer, G. Paoli, G. Plieschenegger, K. Preis, C. Stockreiter, and B. Weiß. A simple benchmark problem for crosstalk. In *The 12th International IGTE Symposium*, 2006.
- [14] K. Hollaus, O. Bíró, P. Caldera, G. Matzenauer, G. Paoli, K. Preis, W. Renhart, C. Stockreiter, and B. Weiß. Simulation of microstrips on printed circuit boards. In *51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, 2006. ISBN 3-938843-16-0. 46
- [15] K. Hollaus, O. Bíró, P. Caldera, G. Matzenauer, G. Paoli, K. Preis, C. Stockreiter, and B. Weiss. Electromagnetic field computation of simple structures on printed circuit boards by the finite-element method. In *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 42, pages 815 – 818, 2006. 46
- [16] H.W. Johnson and M. Graham. *High-Speed Signal Propagation*. Pearson Education Ltd., 2003. ISBN-10: 0-13-084408-X. 34, 78
- [17] M. Jung and U. Langer. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. B. G. Teubner GmbH, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden, 1 st edition, 2001. 3
- [18] N. Kinayman and M.I. Aksun. *Modern Microwave Circuits*. Artech House, Inc., 2005. ISBN-10: 1-58053-725-1. 31, 42, 43, 68, 70, 71
- [19] G. Matzenauer, O. Bíró, K. Hollaus, K. Preis, and W. Renhart. Perfectly matched layers for t,phi formulation. In *The 12th International IGTE Symposium*. Verlag der Technischen Universität Graz, 2006. ISBN-10: 3-902465-56-5; ISBN-13: 978-3-902465-56-6. 14, 52
- [20] G. Matzenauer, O. Bíró, K. Hollaus, K. Preis, and W. Renhart. Perfectly matched layers for t,phi formulation. In *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical Engineering (COMPEL)*, volume 26, 2007. accepted for publication in COMPEL to be published in June 2007.
- [21] G. Matzenauer, O. Bíró, K. Hollaus, and W. Renhart. Anisotropic pml in a finite-element t, phi formulation. In *51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, 2006. ISBN 3-938843-16-0. 14, 52
- [22] R. Mavaddat. *Network Scattering Parameters*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1 st edition, 1996. ISBN-10: 981-02-2305-6. 98, 100
- [23] J.C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford University Press, London, 3rd edition, 1892. Nachdruck 1904, 1937, 1946, 1955. 3, 12, 32, 41
- [24] K. Preis. *Anwendung der Methode der Finiten Elemente zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder*. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, 1983. Habilitationsschrift.

- [25] K. Preis. *Theorie der Elektrotechnik 1*. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik, 2001. Vorlesungsunterlagen. 81
- [26] K. Preis, O. Bíró, P. Supancic, I. Ticar, and G. Matzenauer. Time-domain analysis of quasistatic electric fields in media with frequency-dependent permittivity. In *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 40, pages 1302 – 1305, 2004.
- [27] N.N. Rao. *Elements of Engineering Electromagnetics*. Pearson Education Ltd., 2004. ISBN-10: 0-13-124679-8. 59
- [28] W. Renhart, K. Hollaus, C. Magele, and G. Matzenauer. Computation of a bluetooth antenna using fem. In *51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, 2006. ISBN 3-938843-16-0.
- [29] W. Renhart, K. Hollaus, C. Magele, and G. Matzenauer. Radiation of usb-wlan antenna influenced by human tissue and by notebook enclosure. In *12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, page 379, 2006. 58
- [30] Z.S. Sacks, D.M. Kingsland, R. Lee, and Jin-Fa Lee. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. In *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 43, December 1995. 12, 14, 21
- [31] K. Simonyi. *Theoretische Elektrotechnik*. Johann Ambrosius Barth Leipzig, 10th edition, 1993. ISBN-10: 3-335-00375-6. 28, 41, 52, 53, 55, 59, 93
- [32] C. Stockreiter, G. Matzenauer, O. Bíró, K. Hollaus, K. Preis, and B. Weiss. Transfinite element method using the a, v potential formulation with edge elements in the frequency domain. In *12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, page 386, 2006. 42, 98