

Dipl.-Ing. Johannes Sebastian Hölzl

Simulation des dynamischen Verhaltens von gekoppelten
elastischen Strukturen mit ausgedehnten rauen Fügstellen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der technischen Wissenschaften“
(Dr.techn.)

eingereicht an der
Technischen Universität Graz
Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften

1. Begutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Sextro
2. Begutachter: Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Dietmaier

Graz, 2009

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Graz.

Ich möchte mich besonders bei Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Sestro für die fachliche Betreuung und die gute Zusammenarbeit bedanken. Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Dietmaier vom Institut für Baumechanik danke ich für die fachliche Betreuung und die Übernahme des Korreferates.

Ein recht herzlicher Dank gilt auch allen meinen Mitarbeitern am Institut für Mechanik der Technischen Universität Graz. Besonders danke ich Herrn Dipl.-Ing Steffen Bernhard und Herrn Dipl.-Ing Dipl.-Ing Gerald Kelz mit denen ich viele Stunden nicht nur in fachlicher Diskussion verbracht habe. Herrn Dipl.-Ing Gerhard Tieber danke ich für die gute Unterstützung bei der Durchführung der experimentellen Arbeiten. Ausgezeichnet unterstützt wurde ich auch von unserem Studienassistenten Matthias Mair.

Im Entstehen dieser Arbeit wurde ein Projekt mit der Firma WFL Millturn Technologies GmbH&Co.KG durchgeführt. Ich danke Herrn Dipl.Ing. Dr.techn. Friedrich Pernkopf für die ausgezeichnete Zusammenarbeit und Unterstützung.

Der größte Dank geht an meine Freundin und Lebensgefährtin Anita Mayr, die mir im Entstehen dieser Arbeit viel Geduld entgegengebracht hat.

Johannes Hölzl

im September 2009

Abstract

For many technical applications it is necessary to avoid or to reduce vibrations. The reasons are various e. g. increase of durability, decrease of cost by material reduction or noise reduction. Rough, bolted interfaces exist in almost every machine and can be used as damping advices with moderate effort. However, it is difficult to predict the effect of changing contact interface parameters on the dynamical behavior of the entire mechanical system.

A method is developed to calculate the steady state behavior of elastic multi-body systems with bolted, rough contact interfaces. The basis of this method is a finite element model of each contacting part. On each model a modal reduction is applied in order to reduce the degrees of freedom. The method of Ritz and Galerkin is used to calculate the frequency response functions of the reduced system including contact.

With the pretension of the bolts as well as the roughness and the friction coefficient of the contacting surfaces as parameters this method enables the calculation of the steady state behavior of elastic multi-body systems with bolted, rough contact interfaces. In order to verify calculated results a test stand was built. The comparison of calculation and experiment shows good correlation.

Kurzfassung

In vielen technischen Anwendungen ist es notwendig Schwingungen zu vermeiden oder zu reduzieren. Die Gründe dafür sind vielfältig, z.B.: Erhöhung der Lebensdauer, Kostenersparnis durch Materialeinsparung oder die Reduktion von Geräuschen. In beinahe allen technischen Anwendungen kommen raue, miteinander verschraubte Fügestellen vor. Diese Kontaktflächen können gezielt und mit wenig Aufwand zur Schwingungsdämpfung verwendet werden. Es ist jedoch nicht einfach die Änderung des dynamischen Verhaltens solcher mechanischer Systeme bei Änderung einzelner Kontaktparameter vorauszusagen.

Es wurde eine Methode entwickelt um den eingeschwungenen Zustand elastischer Mehrkörpersysteme mit verschraubten, ebenen und rauen Kontaktflächen bei harmonischer Anregung zu berechnen. Die Grundlage bilden Finite Elemente Modelle der einzelnen Teile, deren Freiheitsgrade durch modale Kondensation reduziert werden. Mit Hilfe des Verfahrens von Ritz und Galerkin wird eine Näherungslösung für den eingeschwungenen Zustand des nichtlinearen, gekoppelten Systems ermittelt.

Abhängig von den Schraubenvorspannkräften, sowie den Kontaktparametern Rautiefe der Kontaktflächen und Reibungskoeffizient kann der eingeschwungene Zustand von Mehrkörpersystemen mit verschraubten, ebenen und rauen Kontaktflächen bei harmonischer Anregung berechnet werden. Um die berechneten Ergebnisse zu verifizieren wurde ein Experiment durchgeführt. Der Vergleich zwischen Messung und Rechnung zeigt eine gute Übereinstimmung.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Begriffe	vii
Abbildungsverzeichnis	x
Tabellenverzeichnis	xii
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Stand des Wissens	2
1.3 Ziel dieser Arbeit	4
2 Modellbildung	8
2.1 Dynamik elastischer Körper	8
2.1.1 Kinematik eines Körperpunktes	9
2.1.2 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen	10
2.1.3 Spannungsvektor, Spannungstensor	12
2.1.4 Materialgesetz	13
2.1.5 Massenmittelpunktsatz am infinitesimalen Volumenteilchen	14
2.1.6 FEM Formulierung der Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers	15
2.1.7 Modale Reduktion der Bewegungsgleichung	17
2.2 Kontaktmodell	20
2.2.1 Dreidimensionales Punktkontaktelement	20
2.2.2 Reibung	22
2.2.3 Normalkraftverhalten	23
2.2.4 Tangentiale Kontaktsteifigkeit	30
2.2.5 Nominale Kontaktsteifigkeiten	31
2.3 Berechnungsverfahren	34
2.3.1 Verfahren von Ritz und Galerkin	35
2.3.2 Systemgleichungen	36
2.3.3 Statische Gleichgewichtslage	39
2.3.4 Hybride Berechnung im Frequenz- und Zeitbereich	41

2.3.5	Zeitliche Integration des Kontaktmodells	44
2.3.6	Vorabberechnung der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte	49
3	Numerische und programmtechnische Umsetzung	61
3.1	FEM-Modellierung	64
3.1.1	Modellierung der Einzelteile	64
3.1.2	Kontaktberechnung	68
3.1.3	Modellierung des verschraubten Systems - Annahme: alle Kontaktknotenpaare haften	69
3.2	Matlab® Programm	71
3.2.1	Aufbereitung der FEM-Daten und Definition der Parameter	71
3.2.2	Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems	74
3.3	Parameterstudien	75
3.3.1	Diskretisierung der Kontaktfläche	75
3.3.2	Variation der Schraubenvorspannkraft	77
3.3.3	Variation der Erregerkraft	78
3.3.4	Variation des Reibungskoeffizienten	79
3.3.5	Variation der Rautiefe	80
3.3.6	Einfluss der höherfrequenten Kraftanteile	81
4	Experimentelle Validierung	83
4.1	Schwingungsanalyse der Einzelteile	84
4.2	Schraubenvorspannkraft	86
4.3	Flächenpressung im Kontakt	87
4.4	Schwingungsanalyse der beiden verschraubten kreisringförmigen Probekörper	88
5	Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement	95
6	Zusammenfassung	100
	Literaturverzeichnis	103

Formelzeichen und Begriffe

E	Elastizitätsmodul	[N/m ²]
G	Schubmodul	[N/m ²]
ν	Querkontraktionszahl, Poissonzahl	[1]
ρ	Dichte	[kg/m ³]
ω_0	Eigenfrequenz	[rad/s]
n	Anzahl der Knoten des finiten Elemente Modells	[1]
m	Anzahl der modalen Freiheitsgrade	[1]
m_P	Masse des Punktkontaktelements	[kg]
F_N	Normalkraft	[N]
F_R	Reibkraft	[N]
F_F	Federkraft	[N]
μ_0	Haftreibungskoeffizient	[1]
μ	Gleitreibungskoeffizient	[1]
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit im Kontakt	[m/s]
c_{Rx}, c_{Ry}	Kontaktsteifigkeiten in Tangentialrichtung	[N/m]
c_N	Kontaktsteifigkeit in Normalenrichtung	[N/m]
c_{R0x}, c_{R0y}	Nominale Kontaktsteifigkeiten in Tangentialrichtung	[N/m]
c_{N0}	Nominale Kontaktsteifigkeit in Normalenrichtung	[N/m]
R_a	Mittenrauwert	[m]
R_q	Quadratischer Mittenrauwert, Standardabweichung	[m]
R_Z	Rautiefe	[m]
ϕ	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	[–]
Φ	Kumulierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Abbott-Kurve	[–]
N	Anzahl der Rauheitsspitzen	[1]
R	Radius der Rauheitsspitzen	[m]
A	Tatsächliche Kontaktfläche	[m ²]
A_0	Nominale Kontaktfläche	[m ²]
l_0	Dicke der Kontaktschicht	[m]
Ω	Erregerfrequenz	[rad/s]
τ	Eigenzeit	[1]

Formelzeichen und Begriffe

ϵ	Defekt	[–]
W_i	Wichtungsfunktion	[–]
x, y, z	Knotenkoordinatensystem in Ausgangslage (FE-Modell)	
η, ζ, z	Knotenkoordinatensystem in Ellipsenhauptachsenlage	

Vektoren und Matrizen

\mathbf{X}	Koordinaten in Referenzkonfiguration	[m]
\mathbf{x}	Koordinaten in der aktuellen Konfiguration	[m]
\mathbf{u}	Verschiebungen	[m]
\mathbf{u}_S	Anteil der Verschiebungen aus Starrkörperbewegungen	[m]
\mathbf{u}_D	Anteil der Verschiebungen aus Deformation	[m]
${}^I\mathbf{v}$	Absolute Geschwindigkeit	[m/s]
${}^I\mathbf{a}$	Absolute Beschleunigung	[m/s ²]
\mathbf{F}	Deformationsgradient	[1]
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient	[1]
\mathbf{G}	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor	[1]
\mathbf{E}	Einheitsmatrix	[–]
$\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_N$	Differentialoperatoren für Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen	[1]
\mathbf{t}	Cauchy'scher Spannungsvektor	[N/m ²]
$\mathbf{\Sigma}$	Cauchy'scher Spannungstensor	[N/m ²]
\mathbf{C}	Elastizitätsmatrix	[N/m ²]
\mathbf{f}_s	Flächenlast	[N/m ²]
\mathbf{f}_b	Volumenkraft	[N/m ³]
\mathbf{N}	Ansatzfunktionen für Verschiebungen	[m]
\mathbf{B}	Ansatzfunktionen für Verzerrungen	[1]
\mathbf{M}	Massenmatrix	[kg]
\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix	[Ns/m]
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix	[N/m]
\mathbf{F}_{ex}	Äußere Kräfte	[N]
\mathbf{T}	Modalmatrix	[m]
\mathbf{w}	Modale Koordinaten	[m]
\mathbf{F}_E	Erregerkräfte	[N]
\mathbf{F}_C	Kontaktkräfte	[N]
\mathbf{F}_S	Schraubenvorspannkräfte	[N]
\mathbf{K}_C	Kontaktsteifigkeitsmatrix	[N/m]
\mathbf{V}	Verstärkungsfunktion, Übertragungsfunktion	[–]

Indizes

$[\]^*$	Normiert
$[\]$	Knoten des FE-Modells
$[\]_M$	Modal reduziert
$\tilde{[\]}$	Ansatzfunktion
$\hat{[\]}_{Ci, Si}$	Sin-, Cos- Fourierkoeffizient <i>i</i> ter Ordnung

Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe werden im laufenden Text definiert.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Flussdiagramm des Modells	6
2.1	Räumliche Kinematik eines elastischen Körpers	9
2.2	Deformation eines infinitesimalen Volumenteilchen	10
2.3	Vorzeichenkonvention für Spannungen	13
2.4	Kräfte an einem infinitesimalen Volumenteilchen	14
2.5	Eigenformen eines eingespannten Balken	18
2.6	Verstärkungsfunktionen eines eingespannten Balkens	19
2.7	Relativbewegung zweier Kontaktknoten	20
2.8	Dreidimensionales Punktkontaktelement	21
2.9	Freikörperbild des Massepunkt P	21
2.11	Oberflächenkennwerte	24
2.12	Kontaktfläche A unter der Last F_N	27
2.13	Kontaktmodell rauher elastischer Oberflächen	28
2.14	Normalkraftverhalten und tangentielle Kontaktsteifigkeit	29
2.15	Zusammenhang zwischen der normierten Normalkraft und der Tangentialsteifigkeit	30
2.16	FE-Modell zur Berechnung der Schraubenvorspannung	40
2.17	Hybrides Frequenz- Zeitbereich- Berechnungsverfahren	43
2.18	Einfluss der Kontaktpunkt-Masse	44
2.19	Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gleitgeschwindigkeit	45
2.20	Kontaktmodell mit masselosem Kontaktpunkt	45
2.21	Transformation der Erregerbewegung in Ellipsenhauptachse	52
2.22	Einfluss des Drehsinns der Erregerpunktbeugung	56
2.23	Approximation der Reibungskräfte durch eine Fourierreihe	57
2.24	Einfluss der Fourierkoeffizienten höherer Ordnung	58
2.25	Kennfelder der Fourierkoeffizienten der Reibungskräfte	59
3.1	Finite Elemente Simulationen und Struktur der Ausgabe-Dateien	61
3.2	Programm Module in Matlab®	62
3.3	Explosionszeichnung der Testanordnung	63

Abbildungsverzeichnis

3.4	Erste Biege-Eigenform der Einzelteile der Testanordnung	65
3.5	Löungsverhalten des Newton-Algorithmus bei verschiedenen Ausführungen der Schraubverbindungen	66
3.6	Verformung aufgrund der Schraubenvorspannkraften	68
3.7	Berechnete Normalkraftverteilung in der Kontaktfläche	69
3.8	Verstärkungsfunktion V und Phasenlage ψ der beiden kreisringförmigen Körper	70
3.9	Resonanzkurven des Referenzmodells und Resonanzkurven der beiden Ein- zelteile verbunden über Federn bei variierender Modenanzahl m	72
3.10	Einfluss der Rautiefe R_Z auf den Zusammenhang zwischen statischer Ver- schiebung der Kontaktknoten \hat{u}_{z0} in Normalenrichtung und statischer Nor- malkraft \hat{F}_{N0}	74
3.11	Normalkraftverteilung im Kontakt für verschiedene Schraubenvorspannkraften	76
3.12	Einfluss der Diskretisierung	76
3.13	Variation der Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0}	77
3.14	Variation der Erregerkraftamplitude \hat{F}_E	78
3.15	Variation des Reibungskoeffizienten μ	79
3.16	Variation der Rautiefe R_Z	80
3.17	FRFs bei Variation der Ordnung der berücksichtigten höherfrequenten An- teile der Kontaktkräfte	81
4.1	Resonanzkurven Einzelteil eins	85
4.2	Resonanzkurven Einzelteil zwei	86
4.3	Applikation der Dehnmessstreifen im Schraubenschaft	87
4.4	Gemessene Flächenpressung im Kontakt	88
4.5	Prüfanordnung	89
4.6	Prüfstands Aufbau	90
4.7	Vergleich der gemessenen und berechneten Resonanzkurven der Testanord- nung (20-550Hz)	91
4.8	Vergleich der gemessenen und berechneten Resonanzkurven der Testanord- nung (27-30Hz)	92
4.9	Unberücksichtigte Kontaktknotenpaare	94
5.1	Regenerativ effekt	96
5.2	Rattermarken	96
5.3	Werkzeughalter mit integriertem Reibungsdämpfungselement	97
5.4	Nachgiebigkeit Werkzeugwechselkopf	98

Tabellenverzeichnis

2.1	Techniken des Verfahrens der Gewichteten Residuen	36
3.1	Punkte an der Testanordnung zur Ermittlung von FRFs	64
3.2	node_coords.dat - Formatierung der Datei mit Knotenkoordinaten	67
3.3	eigenvectors.dat - Formatierung der Datei mit Eigenvektoren	67
3.4	eigenfrequencies.dat - Formatierung der Datei mit Eigenfrequenzen	67
3.5	modal_stiffness.dat - Formatierung der Datei mit modaler Steifigkeitsmatrix	67
3.6	Einfluss der Anzahl der Moden	73
4.1	Typen drucksensitiver Folien von FUJIFILM	88
4.2	Vergleich gemessene und berechnete Eigenfrequenzen.	92

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Bei vielen technischen Aufgabenstellungen ist es wünschenswert das dynamische Verhalten eines Objektes (z.B.: Maschine, Motor, Turbine) zu kennen und gezielt zu beeinflussen. Durch periodische oder stochastische Anregung der Bauteile durch Kräfte, Momente, Drücke, etc. reagieren diese entsprechend ihrer dynamischen Eigenschaften. Das dynamische Verhalten des zu untersuchenden Objektes reagiert entsprechend der Dynamik der einzelnen Bauteile und aufgrund der Beschaffenheit der Koppelstellen zwischen diesen. Fallen Eigenfrequenz des Objektes und Anregungsfrequenz zusammen, kommt es zu Resonanzüberhöhungen und dadurch oftmals zum Versagen der Bauteile oder zumindest zur eingeschränkten Funktion des Objektes durch die dynamischen Belastungen. Um ein Versagen der Bauteile aufgrund dynamischer Belastungen zu vermeiden und die einwandfreie Funktionsweise des Objektes zu gewährleisten muss das dynamische Verhalten des zu untersuchenden Objektes zunächst ermittelt werden, um dann die Dynamik beurteilen und gezielt beeinflussen zu können. Die Bestimmung des dynamischen Verhaltens kann auf zwei Wegen erfolgen. Zum einen kann ein Prototyp der Bauteile bzw. des Objektes gefertigt und durch Messung das dynamische Verhalten ermittelt werden. Zum anderen kann durch Simulation des Objektes auf seine Dynamik geschlossen werden. Meist werden beide Wege kombiniert. Um Kosten bei der Entwicklung neuer Maschinen, Motoren, etc. zu reduzieren wird versucht das Objekt von Interesse möglichst gut durch Simulationen vor dem Bau eines ersten Prototypen zu analysieren und zu optimieren.

Um Schwingungsamplituden von Maschinen zu reduzieren, können verschiedene Möglichkeiten genutzt werden. Es können die erregenden Mechanismen vermieden oder verändert werden. Ist dies nicht möglich, können durch eine Veränderung der Geometrie und damit der Massen- und Steifigkeitsverteilung der Bauteile deren Eigenfrequenzen verändert werden. Damit kann verhindert werden, dass eine Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz des Objektes zusammenfällt und dadurch unerwünschte Resonanzüberhöhungen im Betrieb auftreten. Ist eine Änderung der Geometrie der Bauteile nicht möglich, können Resonanzüberhöhungen durch den Einbau von Dämpfern oder durch eine aktive Schwingungsreduktion,

z.B. mittels Piezoelementen, gering gehalten werden. Derartige Maßnahmen sind jedoch mit zusätzlichen Kosten für Dämpfungselemente und eine etwaig notwendige Regelung verbunden.

In beinahe allen Maschinen existieren Koppelstellen und im Speziellen auch verschraubte Fügstellen. Diese Fügstellen haben aufgrund der Reibung zwischen den einzelnen Bauteilen eine dämpfende Wirkung auf die gesamte Maschine. Durch gezielte Beeinflussung der Dämpfungswirkung der verschraubten Fügstellen können ebenfalls unerwünschte Resonanzüberhöhungen gemindert und damit das dynamische Verhalten von Maschinen und somit ihre Funktionsweise positiv verändert werden. So kann ohne Veränderung der Geometrie und ohne Verwendung zusätzlicher Komponenten oder Bauteile die Dynamik von Maschinen beeinflusst und optimiert werden:

- Durch Minimierung der Schwingungsamplituden werden auch die Spannungsausschläge in den Bauteilen minimiert. Es kann die Lebensdauer von Maschinen erhöht oder bei gleich bleibender Lebensdauer können Material und damit Kosten reduziert werden.
- Minimale Schwingungsamplituden bedeuten im eingeschwungenen Zustand auch minimale Amplituden der Schwinggeschwindigkeit und damit minimale Schallintensität des abgestrahlten Geräusches.

Eine optimale Dämpfungswirkung durch verschraubte Fügstellen systematisch im Versuch zu ermitteln ist aufgrund der Vielzahl der Einflussgrößen kaum machbar. Bei gegebener Oberflächengüte und gegebenem Reibungskoeffizient können die Schraubenvorspannkraft in jeder einzelnen Schraube variiert werden. Allein dadurch ergibt sich eine Vielzahl notwendigerweise durchzuführender Versuche. Durch die Berechnung der Dämpfungswirkung in ausgedehnten, miteinander verschraubten Fügstellen können die Entwicklungskosten von Maschinen reduziert werden.

1.2 Stand des Wissens

Das Schwingungsverhalten vieler dynamischer Systeme wird von der Reibungsdämpfung in den Gelenken und Koppelstellen stark beeinflusst. Dem entsprechend groß ist die Vielzahl der Studien und Veröffentlichungen. GAUL und NITSCHKE (2001) geben einen umfassenden Überblick über die Fortschritte, Erkenntnisse und die Literatur bezüglich der Simulation und Berechnung des Einflusses von Reibung in Systemen mit mechanischen Verbindungen, wie Schrauben, Nieten oder Pressverbänden, für die letzten fünf Jahrzehnte bis 2001. Sie beschreiben verschiedene Kontaktgesetze. Dabei wird zwischen phänomenologischen und

1 Einleitung

konstitutiven Kontaktformulierungen unterschieden. Phänomenologische Kontaktbeschreibungen basieren auf experimentellen Beobachtungen und stellen einen globalen Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der Tangentialkraft im Kontakt her. Ein Beispiel dafür ist das Coulomb'sche Reibungsmodell. Konstitutive Kontaktgesetze basieren auf physikalischen Modellen und beschreiben das Kontaktverhalten sehr lokal. Viele der konstitutiven Formulierungen stellen einen Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung her. Des Weiteren beschreiben GAUL und NITSCHKE verschiedene Techniken zum Lösen der mathematischen Modelle von mechanischen Systemen mit Reibung. Eine Möglichkeit zur Lösung der erstellten mathematischen Modelle ist die Integration im Zeitbereich mit dem Computer. Der zeitliche Aufwand einer derartigen Berechnung kann mehrere Stunden bis Tage betragen. Für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden und Reibung kann eine exakte Lösung für den eingeschwungenen Zustand bei harmonischer Erregung des Systems berechnet werden. Steigt die Anzahl der Freiheitsgrade kann keine exakte Lösung mehr bestimmt werden. Mittels dem Verfahren der Harmonischen Balance kann jedoch eine Näherungslösung im Frequenzbereich ermittelt werden.

Das Verfahren der Harmonischen Balance wurde auch vielfach bei der Berechnung des Schwingungsverhaltens von Schaufelkränzen im Turbomaschinenbau angewendet. Im Turbomaschinenbau werden zur Schwingungsdämpfung Reibelemente unterhalb der Fußplatten benachbarter Schaufeln angeordnet. Veröffentlichungen von SEXTRO (1997), GÖTTING (2005) und PANNING (2005) sind nur eine kleine Auswahl der Arbeiten zur Berechnung der Dynamik von Schaufelkränzen, in denen das Verfahren der Harmonischen Balance angewendet wird. Um die Dynamik von elastischen Bauteilen mit komplexer Geometrie, wie zum Beispiel Turbinenschaufeln, zu beschreiben wird die Methode der Finiten Elemente angewendet. Zur Berechnung der nichtlinearen Kontaktkräfte verwenden GÖTTING und PANNING ein von SEXTRO (2007) entwickeltes Punktkontaktmodell. Durch dieses Punktkontaktmodell wird ein Zusammenhang zwischen den Relativverschiebungen zwei einander zugeordneter Punkte auf den beiden Kontaktflächen und den nichtlinearen Kontaktkräften hergestellt. Mit dem Verfahren der Harmonischen Balance kann das Kontaktgesetz linearisiert werden. Es können, abhängig von den Verschiebungsamplituden, Ersatzsteifigkeiten für das Kontaktmodell berechnet und in Kennfeldern abgelegt werden. Mit Hilfe dieser Ersatzsteifigkeiten kann so im Frequenzbereich rasch eine Näherungslösung für den eingeschwungenen Zustand des Systems bei harmonischer Anregung ermittelt werden. Durch die Finite Elemente Diskretisierung entstehen mathematische Modelle mit meist vielen Freiheitsgraden. Daraus resultiert eine große Rechenzeit, die zum Berechnen der Näherungslösung erforderlich ist. Um die Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern findet die modale Kondensation Anwendung. GENZO, SEXTRO und L.PANNING (2006, 2007) wenden die zur Berechnung der Dynamik von Schaufelkränzen vorgestellte Methode bei der Berechnung des Systemverhaltens von

Objekten mit ausgedehnten Fügestellen bei harmonischer Erregung an.

Bei Anwendung des Verfahrens der Harmonischen Balance wird die Annahme getroffen, dass eine harmonische Relativbewegung zweier einander zugeordneter Kontaktpunkte ebenfalls harmonische Kontaktkräfte verursacht. Aufgrund nichtlinearer Kontaktgesetze enthalten die tatsächlichen Kontaktkräfte aber auch höherfrequente Anteile. Diese werden bei Anwendung des Verfahrens der Harmonischen Balance zur Berechnung der Schwingungsantwort mechanischer Systeme mit Reibung in den Kontakten bei harmonischer Erregung vernachlässigt. [POUDOU und PIERRE \(2003\)](#) verwenden eine kombinierte Berechnungsmethode, sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich, eine so genannte „hybrid frequency-time domain method“ (HFT-Methode). Mit Hilfe der HFT-Methode können auch die höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte berücksichtigt werden. Es wird ein nichtlineares Gleichungssystem mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens zum Berechnen einer Näherungslösung der Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich aufgestellt. Die beim Galerkin-Verfahren verwendeten Ansatzfunktionen für die Näherungslösung sind Glieder von Fourierreihen. Je nach Anzahl der verwendeten Glieder der Fourierreihen kann die Genauigkeit mit der die Näherungslösung die exakte Lösung wiedergibt gesteigert werden. Die zur Lösung des erhaltenen Gleichungssystems im Frequenzbereich benötigten Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte werden über die zeitliche Integration des Kontaktmodells ermittelt. Mit der HFT-Methode lässt sich die Genauigkeit der berechneten Näherungslösung beliebig steigern. Nachteil ist der hohe zeitliche Rechenaufwand für die Integration der Kontakte im Zeitbereich.

1.3 Ziel dieser Arbeit

Es soll ein Programm zur Berechnung der eingeschwingenen Systemantwort von elastischen, mechanischen Systemen mit ausgedehnten, miteinander gekoppelten und rauen Fügestellen bei harmonischer Anregung erstellt werden. Die Berechnung soll mit Kenntnis einfach messbarer Parameter, bzw. durch Parameter die durch Angaben in der Konstruktion weitgehend definiert werden können, eindeutig durchführbar sein. Der Anwender dieses Programms soll damit in der Lage sein,

- zum einen den Einfluss der geometrischen Gestaltung der Fügestelle auf die Systemantwort zu erkennen,
- des Weiteren die Wirkung unterschiedlicher Verteilungen der Schrauben innerhalb einer Kontaktfläche auf das Schwingungsverhalten zu beurteilen,
- die optimale Dämpfungswirkung aufgrund einer Variation der einzelnen Schraubenvorspannkkräfte zu berechnen,

1 Einleitung

- und den Einfluss der verschiedenen Oberflächenparameter auf die Systemantwort zu ermitteln.

Um diese Berechnungen zu ermöglichen und für den Anwender leicht durchführbar zu machen müssen an das Modell einige Anforderungen gestellt werden:

- Für die Berechnung sollen Finite Elemente Modelle der Einzelteile genutzt werden. So kann der Anwender relativ einfach dynamische Modelle aus Konstruktionszeichnungen der Teile generieren.
- Die Parameter, die das Kontaktverhalten der Fügestelle festlegen seien die Rautiefe R_Z und der Reibungskoeffizient μ . Die Rautiefe R_Z kann aus einer Konstruktionszeichnung entnommen werden. Für den Reibungskoeffizienten μ gibt es Erfahrungswerte für verschiedene Werkstoffpaarungen.
- Der Kontakt soll lokal detailliert abgebildet werden. Damit wird es möglich auch den Einfluss einer ungleichmäßigen Normalkraftverteilung, aufgrund inhomogener Anordnung der Schrauben und unterschiedlichen Schraubenvorspannkraften, in der Fügestelle zu berücksichtigen.
- Um Parametervariationen und so eine Optimierung des Systems mit zeitlich erträglichem Aufwand durchführen zu können soll ein möglichst schneller Berechnungsalgorithmus entwickelt und umgesetzt werden. Es sollen die Vorteile der Methode der Harmonischen Balance und die Vorteile der HFT-Methode kombiniert werden. Vorteil des Verfahrens der Harmonischen Balance ist, dass das Kontaktverhalten abhängig von den Verschiebungsamplituden vor dem eigentlichen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems zur Berechnung der Systemantwort ermittelt und Ersatzsteifigkeiten und -dämpfungen in Kennfeldern abgelegt werden können. Damit ist in Folge eine sehr rasche Berechnung der Systemantwort im Frequenzbereich möglich. Vorteil der HFT-Methode ist eine, von der Anzahl der Glieder der Fourierreihe abhängige, theoretisch beliebig genaue Annäherung der Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems an dessen exakte Lösung.

Die aus der Simulation einer Testanordnung gewonnen Ergebnisse sollen messtechnisch überprüft werden.

Abbildung 1.1 zeigt das Flussdiagramm des in dieser Arbeit entwickelten Programmsystems zur Berechnung der eingeschwungenen Systemantwort von mechanischen Systemen, bestehend aus miteinander gekoppelten, elastischen Einzelteilen mit rauen Fügstellen mit periodischer Anregung. Eingang in das Modell sind monofrequente Erregerkräfte. Abhängig

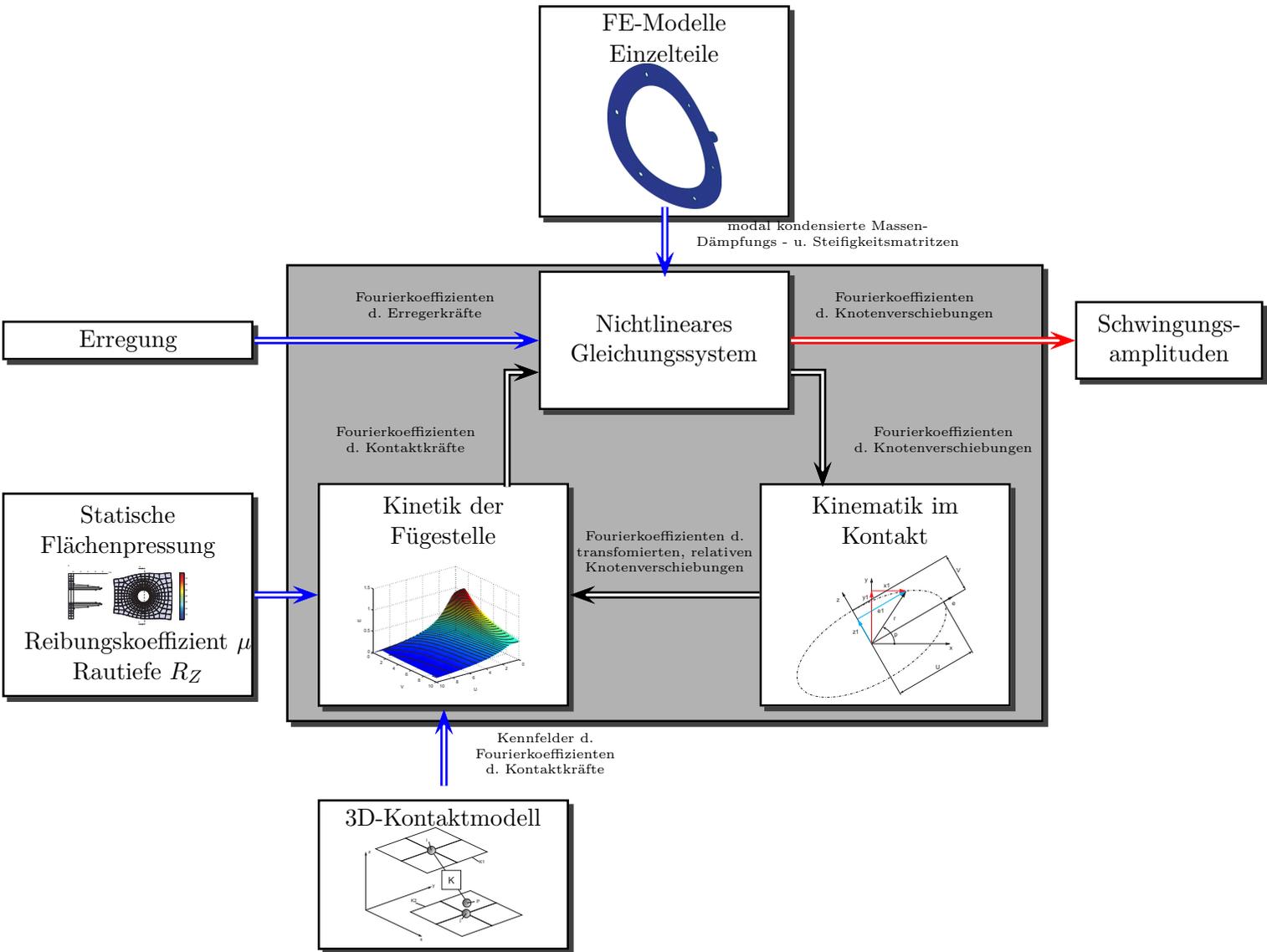


Abbildung 1.1: Flussdiagramm des Modells zur Berechnung der Schwingungen eines elastischen, mechanischen Systems mit ausgedehnten, rauen, miteinander gekoppelten Fügestellen mit periodischer Anregung.

1 Einleitung

von den dynamischen Eigenschaften der Einzelkörper (Masse, Dämpfung und Steifigkeit), von der Flächenpressung bzw. Normalkraftverteilung in der Fügestelle und von den Parametern Rautiefe R_Z und Reibungskoeffizient μ werden die Schwingungsamplituden des Systems berechnet.

2 Modellbildung

In diesem Kapitel wird die physikalische Modellierung zweier elastischer, verschraubter Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen, sowie die Lösung der mathematischen Gleichungen dieses Systems dargestellt.

In [Abschnitt 2.1](#) werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen und die Grundlagen der Finite Elemente Diskretisierung beschrieben. Wesentliche Grundlagen dazu bilden Ausführungen von [MANG und HOFSTÄTTER \(2000\)](#), [WITTENBURG und PESTEL \(2001\)](#) und [BATHE \(2002\)](#). Des Weiteren wird eine Reduktion der Freiheitsgrade von Finite Elemente Modellen mittels modaler Transformation beschrieben.

[Abschnitt 2.2](#) behandelt die Modellierung eines dreidimensionalen Kontaktelements. Es wird auf die Modellierung des Kontaktverhaltens rauer Oberflächen in Normalenrichtung, sowie auf das Kontaktverhalten in Tangentialrichtung eingegangen.

In [Abschnitt 2.3](#) wird das Verfahren von Ritz und Galerkin auf die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems elastischer, miteinander verschraubter Körper mit ausgedehnten, ebenen und rauen Fügestellen bei monofrequenter Anregung angewendet und die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Näherungslösung des eingeschwungenen Zustands des Systems gezeigt.

2.1 Dynamik elastischer Körper

Laut [SCHWERTASSEK und WALLRAPP \(1999\)](#) ist in der Modellvorstellung ein elastischer Körper eine zusammenhängende und abgeschlossene Menge von materiellen Punkten, die bei einer allgemeinen Bewegung folgende Eigenschaften besitzen:

- Unzerstörbarkeit: Zusammenhängende Punkte werden im Zuge der Bewegung nicht getrennt.
- Undurchdringbarkeit: Zwei Punkte eines Körpers können nicht den selben Ort zur gleichen Zeit einnehmen.

- Erhaltung: Es können während der Bewegung keine neuen Punkte zum Körper hinzukommen, noch können materielle Punkte wegfallen.

2.1.1 Kinematik eines Körperpunktes

Um die Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers formulieren zu können ist es notwendig die Kinematik eines einzelnen Punktes des Körpers im Raum zu beschreiben (siehe [Abbildung 2.1](#)). Ein materieller Punkt P_0 eines Körpers in der Referenzkonfiguration zum

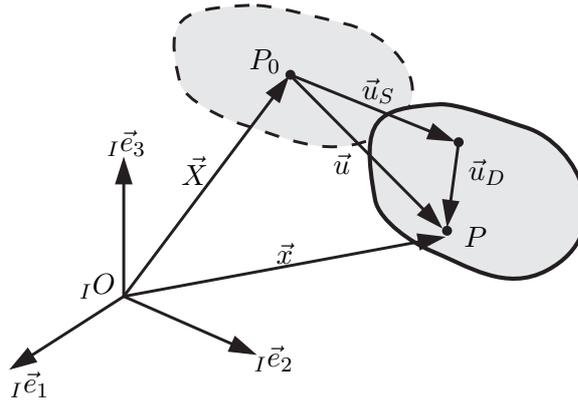


Abbildung 2.1: Räumliche Kinematik eines elastischen Körpers

Zeitpunkt $t = 0$ sei durch den Vektor \vec{X} , die aktuelle Lage des Punktes P durch den Vektor \vec{x} beschrieben. Durch den Verschiebungsvektor \vec{u} sei der additive Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Referenzlage und der aktuellen Position gegeben¹

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

Der Verschiebungsvektor \vec{u} setzt sich zusammen aus einer Verschiebung, verursacht durch die Starrkörperbewegung \vec{u}_S des Körpers, und einer Verschiebung \vec{u}_D durch die Deformation des elastischen Körpers

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_D. \quad (2.2)$$

Durch die absolute zeitliche Ableitung des Ortsvektors \vec{x} erhält man die Koordinaten der Absolutgeschwindigkeit

$${}^I \mathbf{v} = {}^I \dot{\mathbf{x}}, \quad (2.3)$$

und durch weiteres zeitliches Ableiten die Absolutbeschleunigung

$${}^I \mathbf{a} = {}^I \ddot{\mathbf{x}}. \quad (2.4)$$

¹In diesem Kapitel sind alle Vektoren und Tensoren im Inertialsystem I dargestellt. Korrekter Weise müsste Gleichung 2.1 ${}_I \mathbf{x} = {}_I \mathbf{X} + {}_I \mathbf{u}$ lauten. Der Übersicht wegen wird der Index I im Weiteren weggelassen.

2.1.2 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

Durch die relative Bewegung einzelner Körperpunkte zueinander wird der Körper deformiert. Die Verzerrung ist für verschiedene Punkte des elastischen Körpers unterschiedlich. Deshalb benötigt man für jeden Punkt des Körpers lokale Verzerrungsmaße. Der Deformationsgradient \vec{F} beschreibt die Änderung der aktuellen Lage \vec{x} bezüglich der Referenzkonfiguration \vec{X}

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.5)$$

Zur späteren Beschreibung der Verformung wird nicht die Lage \vec{x} sondern die Verschiebung \vec{u} verwendet. Deshalb wird der Verschiebungsgradient \vec{H} eingeführt

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.6)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Deformations- und dem Verschiebungsgradienten ist durch

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{E} \quad (2.7)$$

gegeben. Bei Ableitung nach dem Ortsvektor \vec{X} der Referenzkonfiguration spricht man von materiellen Gradienten (Lagrange'sche Formulierung). Wird als Bezug die aktuelle Konfiguration \vec{x} herangezogen so spricht man von lokalen Gradienten (Euler'sche Formulierung). Bei den hier betrachteten festen Kontinua wird üblicherweise die Lagrange'sche Formulierung verwendet. Mittels des Deformationsgradienten \vec{F} kann die Bewegung in der Umgebung

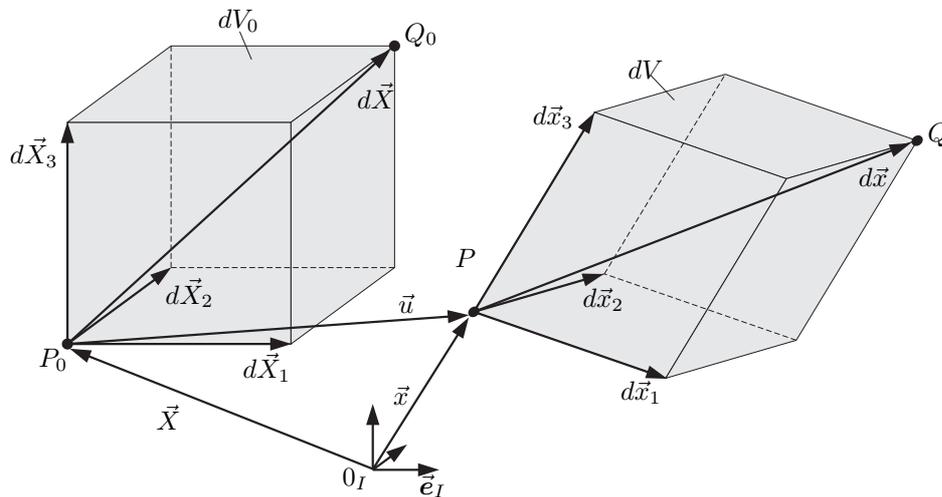


Abbildung 2.2: Deformation eines infinitesimalen Volumeneilchen

eines materiellen Punktes linear approximiert werden. Durch \vec{F} wird ein Linienelement $d\vec{X}$

2 Modellbildung

der Referenzkonfiguration in ein Linienelement $d\vec{x}$ der aktuellen Konfiguration transformiert

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Als Maß für die Verformung eines infinitesimalen Teilchens kann die Differenz der Quadrate der Raumdiagonalen des Teilchens herangezogen werden (siehe [Abbildung 2.2](#))

$$d\mathbf{x}d\mathbf{x} - d\mathbf{X}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{E})d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X}\mathbf{G}d\mathbf{X}. \quad (2.9)$$

\vec{G} ist der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor. Dargestellt durch den Verschiebungsgradienten ist

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}). \quad (2.10)$$

Fasst man die sechs unabhängigen Elemente des symmetrischen Verzerrungstensors \vec{G} in

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [G_{11} \ G_{22} \ G_{33} \ G_{12} \ G_{23} \ G_{31}]. \quad (2.11)$$

zusammen, so kann das Verzerrungs-Verschiebungsgesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_N(\mathbf{u}))\mathbf{u} \quad (2.12)$$

in einer bequemerem Matrizendarstellung formuliert werden, mit den Differentialoperatoren

$$\mathcal{L}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

und

$$\mathcal{L}_N(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_1 \partial X_1} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_1 \partial X_1} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_1 \partial X_1} \\ \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_2 \partial X_2} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_2 \partial X_2} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_2 \partial X_2} \\ \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_3 \partial X_3} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_3 \partial X_3} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_3 \partial X_3} \\ \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_2 \partial X_1} \\ \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_3 \partial X_2} \\ \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_3 \partial X_1} + \frac{\partial u_1 \partial}{\partial X_1 \partial X_3} & \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_3 \partial X_1} + \frac{\partial u_2 \partial}{\partial X_1 \partial X_3} & \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_3 \partial X_1} + \frac{\partial u_3 \partial}{\partial X_1 \partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2 Modellbildung

Bei geometrischer Linearisierung werden die Ableitungen der Verschiebungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

betrachtet. Damit können die Produkte der Verschiebungsableitungen vernachlässigt werden und das Verzerrungs-Verschiebungsgesetz vereinfacht sich zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}_L \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

2.1.3 Spannungsvektor, Spannungstensor

Spannungen sind auf Flächen bezogene Kräfte. Der Cauchysche Spannungsvektor \vec{t} wird als der wahre Spannungsvektor in einem Punkt bezeichnet. Sowohl Kraft \mathbf{f} , als auch die Fläche \mathbf{a} beziehen sich auf die aktuelle Konfiguration

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}}. \quad (2.17)$$

Der Spannungszustand beschreibt die Menge aller möglichen Spannungsvektoren in einem materiellen Punkt. Je nach Bezug der Kräfte und Flächen auf die Referenzkonfiguration oder auf die aktuelle Konfiguration können verschiedene Spannungstensoren definiert werden. Das Cauchy'sche Fundamentaltheorem stellt über den Cauchy'schen Spannungstensor $\vec{\Sigma}$ einen Zusammenhang zwischen dem Normaleneinheitsvektor \vec{n} einer betrachteten Schnittfläche und dem zugehörigen Spannungsvektor \vec{t} her

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}, \quad (2.18)$$

mit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Für die hier betrachteten klassischen Kontinua ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht, dass der Spannungstensor $\vec{\Sigma}$ symmetrisch ist (siehe [Abbildung 2.3](#))

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}. \quad (2.20)$$

Die sechs unabhängigen des Spannungstensors können zusammengefasst werden in

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]. \quad (2.21)$$

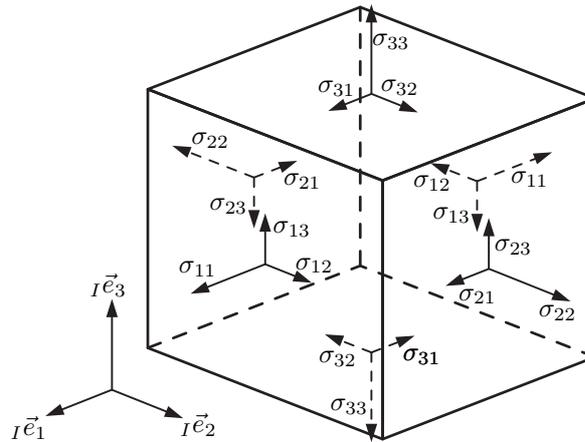


Abbildung 2.3: Vorzeichenkonvention für Spannungen

2.1.4 Materialgesetz

In den vorangegangenen Unterkapiteln wurden der Verzerrungszustand und der Spannungszustand an einem infinitesimalen Volumenelement erläutert. Verzerrungen und Spannungen sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern werden über das Materialgesetz miteinander verknüpft. Materialgesetze finden ihre Rechtfertigung erst durch Experimente. Das hier verwendete Hook'sche Gesetz gilt für lineare, elastische und isotrope Werkstoffe, unter der Annahme kleiner Verzerrungen. Nimmt man kleine Verzerrungen an, so spricht man von physikalischer Linearisierung. Es gilt der lineare Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

zwischen Verzerrungen und Spannungen. Dieser lineare Zusammenhang wird über die Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

hergestellt, wobei E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktions- oder Poissonzahl ist.

2.1.5 Massenmittelpunktsatz am infinitesimalen Volumenteilchen

Aus einem bewegten Körper wird in der aktuellen Konfiguration ein infinitesimales Teilchen herausgeschnitten. Der Massenmittelpunktsatz für das in [Abbildung 2.4](#) dargestellte

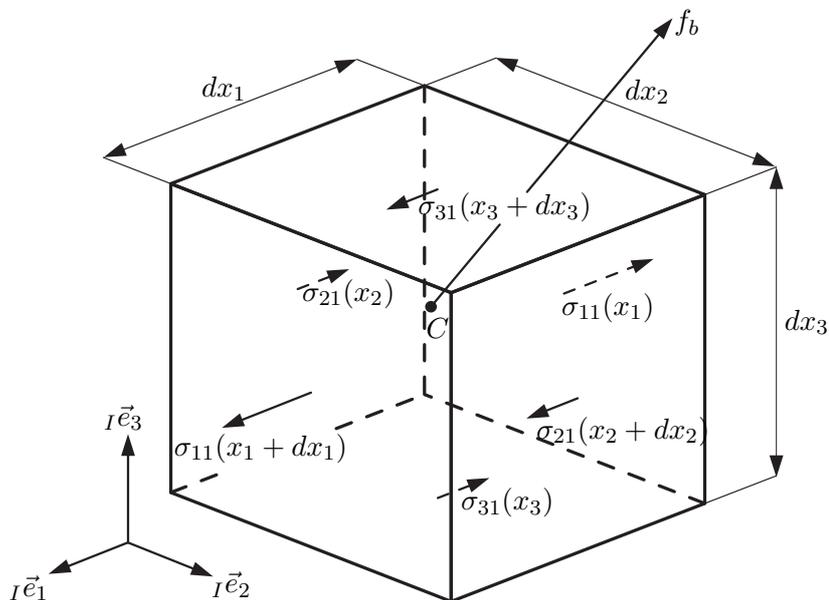


Abbildung 2.4: Kräfte an einem infinitesimalen Volumen dV in 1-Richtung ($C :=$ Schwerpunkt)

infinitesimale Volumenteilchen in 1-Richtung ist

$$\begin{aligned}
 {}^I a_1 dm = & \sigma_{11}(x_1 + dx_1) dx_2 dx_3 - \sigma_{11}(x_1) dx_2 dx_3 + \\
 & + \sigma_{21}(x_2 + dx_2) dx_3 dx_1 - \sigma_{21}(x_2) dx_3 dx_1 + \\
 & + \sigma_{31}(x_3 + dx_3) dx_1 dx_2 - \sigma_{31}(x_3) dx_1 dx_2 + f_{b1} dV,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

mit der äußeren auf das Volumen bezogene Kraft \vec{f}_b . Durch Taylorreihenentwicklung

$$\begin{aligned}
 {}^I a_1 \rho dV = & \left(\sigma_{11}(x_1) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial dx_1} dx_1 + O(2) \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11}(x_1) dx_2 dx_3 + \\
 & + \left(\sigma_{21}(x_2) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial dx_2} dx_2 + O(2) \right) dx_3 dx_1 - \sigma_{21}(x_2) dx_3 dx_1 + \\
 & + \left(\sigma_{31}(x_3) + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial dx_3} dx_3 + O(2) \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31}(x_3) dx_1 dx_2 + f_{b1} dV
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

und dem Grenzübergang $dx_1, dx_2, dx_3 \rightarrow 0$ ergibt sich

$${}^I a_1 \rho = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial dx_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial dx_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial dx_3} + f_{b1}. \tag{2.26}$$

2 Modellbildung

Analog kann der Massenmittelpunktsatz auch für die anderen beiden Richtungen aufgestellt werden. Die drei so erhaltenen Cauchy'schen Bewegungsgleichungen können zu

$${}^I \mathbf{a} \rho = \operatorname{div} \Sigma + \mathbf{f}_b \quad (2.27)$$

zusammengefasst werden. Aufgrund der Massenerhaltung für das infinitesimale Teilchen und unter der Annahme kleiner Verformungen

$$V \rho = V_0 \rho_0 \quad (2.28)$$

kann angenommen werden, dass die Dichte ρ der aktuellen Konfiguration gleich der Dichte ρ_0 der Referenzkonfiguration ist.

2.1.6 FEM Formulierung der Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers

Ein elastischer Körper sei durch die Volumenkraft \vec{f}_b und an seiner Oberfläche durch die Flächenlast \vec{f}_s belastet. Die Spannungen an der Oberfläche eines Körpers sind gleich der eingepprägten Flächenlast

$$\mathbf{f}_s = \Sigma \mathbf{n}_0. \quad (2.29)$$

Mit \vec{n}_0 wird der Normalenvektor der Körperoberfläche A_0 bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper können mit Hilfe der Prinzipien der Mechanik aufgestellt werden. Eine Möglichkeit ist die Verwendung des D'Alembert'schen Prinzips. Es besagt, dass die reaktiven Kräfte keine virtuelle Arbeit verrichten

$$\underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{f}_b + \operatorname{div} \Sigma - \rho_0 {}^I \mathbf{a}) dV}_{\text{virtuelle Arbeit im Inneren}} + \underbrace{\int_A \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{f}_s - \Sigma \mathbf{n}_0) dA}_{\text{virtuelle Arbeit an der Oberfläche}} = 0. \quad (2.30)$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz und unter Berücksichtigung der Dualität der Schubspannungen (Gleichung 2.20) und des Hook'schen Gesetzes (Gleichung 2.22) folgt

$$\underbrace{- \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV}_{\delta W_{int}} + \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_b dV + \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s dA}_{\delta W_{ext}} + \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho_0 (-{}^I \ddot{\mathbf{u}}) dV}_{\delta W_{inertia}} = 0. \quad (2.31)$$

Die Gleichung 2.31 kann im Allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Eine Näherung kann durch Finite Elemente Methoden berechnet werden:

- Der Körper wird durch eine diskrete Anzahl N_{el} von Finiten Elementen angenähert.

2 Modellbildung

Das zum i -ten Element gehörende Volumen wird mit V_i und die zugehörige Oberfläche mit A_i bezeichnet.

- Mit den finiten Elementen werden n Knotenpunkte verbunden. Die Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ der Knotenpunkte aller Elemente sind die Unbekannten des FE-Modells. Kräfte zwischen einzelnen Elementen werden im Modell nur über Knotenpunkte übertragen.
- Äußere Kräfte werden konzentriert an Knotenpunkten eingeleitet.
- Das Verschiebungsfeld im Inneren des Elements i wird durch Ansatzfunktionen \mathbf{N}_i und durch die Verschiebung der Knotenpunkte $\bar{\mathbf{u}}_i$ genähert

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i(t). \quad (2.32)$$

Die Ansatzfunktionen \mathbf{B}_i für die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ergeben sich mit [Gleichung 2.16](#) und [Gleichung 2.32](#).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i(t) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{L}}_L \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

Für die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ und Verzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ gelten analoge Beziehungen.

$$\delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\delta \bar{\mathbf{u}}_i \quad (2.35)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_i(\mathbf{x})\delta \bar{\mathbf{u}}_i \quad (2.36)$$

Mit Hilfe dieser Diskretisierung kann die Bewegungsgleichung ([Gleichung 2.31](#)) in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{ex} \quad (2.37)$$

geschrieben werden, mit der globalen, symmetrischen, positiv-definiten Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N_{el}} \int_{V_i} \mathbf{N}_i^T \rho_0 \mathbf{N}_i dV, \quad (2.38)$$

der globalen, symmetrischen, positiv-semidefiniten Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_{el}} \int_{V_i} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i dV \quad (2.39)$$

und den äußern Kräften

$$\mathbf{F}_{ex} = \sum_{i=1}^{N_{el}} \left(\int_{V_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{f}_b dV + \int_{A_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{f}_s dA \right). \quad (2.40)$$

2.1.7 Modale Reduktion der Bewegungsgleichung

Im Allgemeinen hat ein elastischer Körper unendlich viele Freiheitsgrade. Durch die Finite Elemente Diskretisierung wird die Bewegung eines Körper durch eine endliche Anzahl an Freiheitsgraden näherungsweise beschrieben. Für dynamische Probleme kann die Anzahl der Freiheitsgrade durch die Anwendung modaler Kondensation weiter vermindert werden. Die Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper, mit viskoser Materialdämpfung sind durch

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ex} \quad (2.41)$$

beschrieben, mit der symmetrischen Massenmatrix \mathbf{M} , der symmetrischen Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und der symmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Mit \mathbf{u} werden die Knotenpunktverschiebungen und durch \mathbf{F}_{ex} die äußeren Kräfte auf die Knoten bezeichnet. Nimmt man Rayleigh-Dämpfung

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2.42)$$

an, so kann das lineare Differentialgleichungssystem der Bewegungsgleichungen diagonalisiert werden. Des Weiteren werden nur die ersten m , für den betrachteten Frequenzbereich maßgeblichen, Gleichungen für die weiteren Berechnungen herangezogen.

Das ungedämpfte, lineare Differentialgleichungssystem der Bewegungsgleichungen für den elastischen Körper ist

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Wählt man den Ansatz für die Knotenverschiebungen

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}e^{i\omega_0 t}, \quad (2.44)$$

so erhält man das Eigenwertproblem

$$(-\mathbf{M}\omega_0^2 + \mathbf{K})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$

mit den Eigenfrequenzen ω_0 und Eigenvektoren $\hat{\mathbf{u}}$ des ungedämpften, elastischen Körpers. Durch die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{u}}$ werden die Eigenformen, genannt Moden, des elastischen Körpers beschrieben (Abbildung 2.5). Die Eigenvektoren können in der so genannten Modal-Matrix

2 Modellbildung

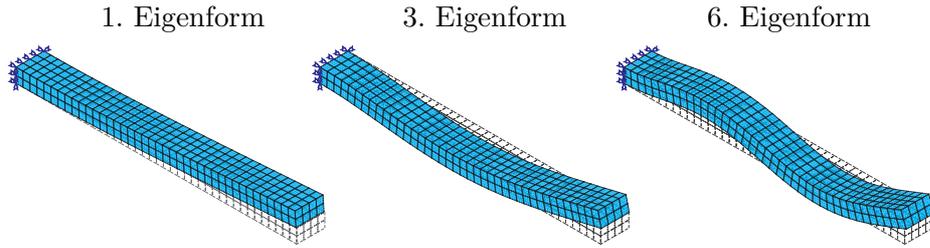


Abbildung 2.5: Eigenformen eines eingespannten Balken

$$\mathbf{T} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_m] \quad (2.46)$$

zusammengefasst werden, wobei m die Anzahl der berücksichtigten Moden ist. Mit steigender Anzahl der Moden m kann die Genauigkeit des dynamischen Modells des Körpers verbessert werden. Die Anzahl der Moden m kann maximal gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des Finiten Elemente Modells sein

$$m \leq 3n. \quad (2.47)$$

Die modale Transformation wird durch

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{w}} \quad (2.48)$$

beschrieben, wobei $\bar{\mathbf{w}}$ die modalen Koordinaten des elastischen Körpers sind. Sind die Eigenvektoren massenormiert, so wird die modal reduzierte Massenmatrix zu

$$\mathbf{M}_M = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{E} \quad (2.49)$$

und die modal reduzierte Steifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \text{diag}(\omega_{0i}^2). \quad (2.50)$$

Die modale Dämpfungsmatrix wird mit angenommener Rayleigh-Dämpfung ([Gleichung 2.42](#)) zu

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} = \text{diag}(2\omega_{0i} D_i). \quad (2.51)$$

[Gleichung 2.48](#) eingesetzt in [Gleichung 2.41](#) ergibt somit die modal reduzierten Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper.

$$\ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{D}_M \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{K}_M \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_{ex} \quad (2.52)$$

Wie viele Moden m zur Beschreibung der Dynamik des elastischen Körpers notwendig sind hängt von der jeweiligen Aufgaben- und Problemstellung ab. Für ein lineares System bestimmt bei periodischer Anregung der betrachtete Frequenzbereich die Anzahl der benötigten Moden. Im Allgemeinen gilt dies nicht mehr für nichtlineare Systeme. Die Anzahl der berücksichtigten Moden m bestimmt also maßgeblich die Genauigkeit der Näherung. Eine Möglichkeit zur ersten Abschätzung der minimal benötigten Moden wird in [STELTER \(1990\)](#) vorgestellt. Es wird ein Vergleich der modalen Steifigkeit bei der Erregerfrequenz Null mit der statischen Steifigkeit vorgeschlagen. Eine andere Möglichkeit zur ingenieurmäßigen Abschätzung der minimal benötigten Anzahl der Moden m ist die Beobachtung der Verstärkungsfunktion V des modal reduzierten Körpers. Der Begriff der Verstärkungsfunktion ist grundsätzlich für lineare Systeme definiert. Die Verstärkungsfunktion V gibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal, in diesem Fall der Erregerkraft, und dem Ausgangssignal, hier der Beschleunigungsamplitude als vielfaches der Erdbeschleunigung, an ([Abbildung 2.6](#)). Man erhöht die Anzahl der Moden m bis die Änderung der Verstärkungsfunktion im betrachteten Frequenzbereich ausreichend klein ist.

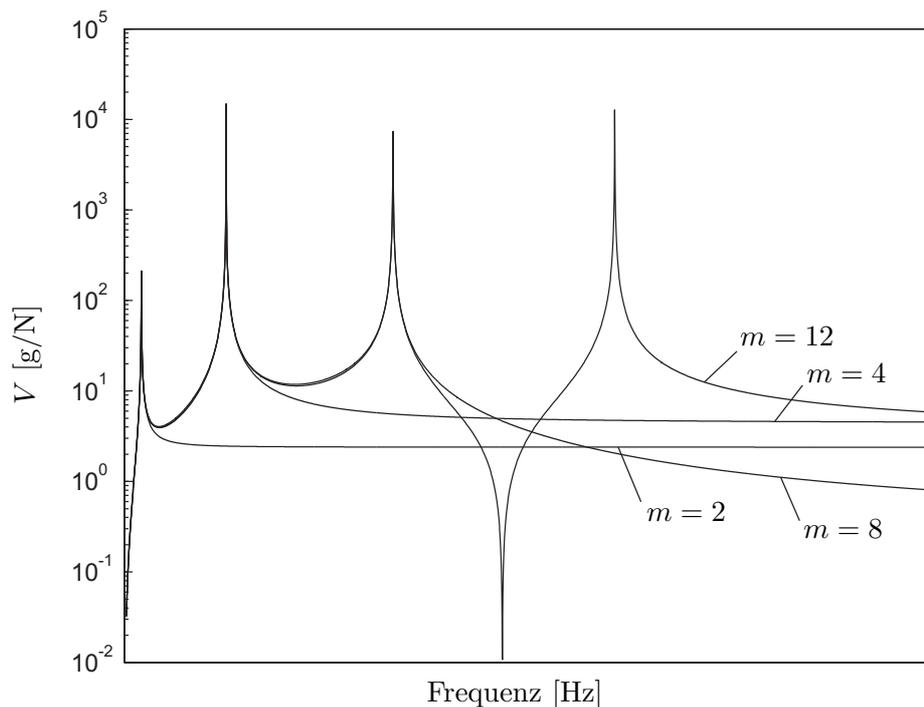


Abbildung 2.6: Verstärkung V eines eingespannten Balkens mit verschiedener Anzahl berücksichtigter Moden m

2.2 Kontaktmodell

Zwischen zwei elastischen Körpern soll ein Kontakt formuliert werden. Aus der vorangegangenen modalen Beschreibung der Dynamik eines elastischen Körpers ([Gleichung 2.52](#) und [Gleichung 2.48](#)) ist ersichtlich, dass es zielführend ist diesen Kontakt über einen Zusammenhang der relativen Knotenverschiebungen der Finiten Elemente Modelle der Einzelteile und den Kontaktkräften in diesen Knoten herzustellen.

Die beiden Kontaktflächen werden durch die Finite Elemente Diskretisierung in einzelne Elemente mit den zugehörigen Knoten unterteilt. In der Referenzkonfiguration seien je zwei Knoten der beiden sich berührenden Flächen koinzident. Bei reiner Translation der beiden Körper beschreiben alle in der Referenzkonfiguration koinzidenten Körperpunkte die gleiche Trajektorie relativ zu einander. Werden die Körper jedoch relativ zueinander verdreht, oder werden die Körper elastisch verformt, so beschreiben diese Knotenpaare verschiedene Bahnen (siehe [Abbildung 2.7](#)). Um diese lokalen Effekte zu beschreiben wird ein punktuell Kontaktgesetz formuliert.

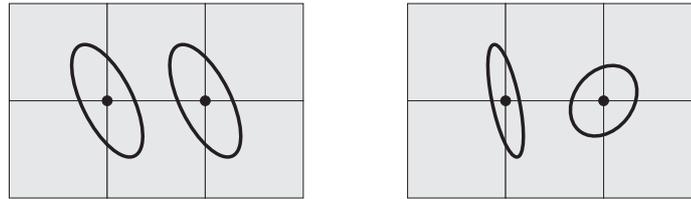


Abbildung 2.7: Relativbewegung zweier in der Referenzkonfiguration koinzidenter Knoten

Lokale Kontaktgesetzte werden unter anderem in den Arbeiten von [SANLITURK und EWINS \(1996\)](#), [SEXTRO und POPP \(1996\)](#), [SEXTRO \(1997\)](#), [POUDOU und PIERRE \(2003\)](#), [GENZO, SEXTRO und L.PANNING \(2006\)](#) und [POUDOU \(2007\)](#) dargestellt und verwendet. Diese Arbeit bezieht sich vor allem auf die Kontaktformulierung von [SEXTRO \(2007\)](#). [SEXTRO](#) formuliert ein dreidimensionales Punktkontaktelement.

2.2.1 Dreidimensionales Punktkontaktelement

Der Punkt P mit der Masse m_P in [Abbildung 2.8](#) ist über eine nichtlineare Feder, die eine gedachte elastische Kontaktschicht mit den Kontaktsteifigkeiten

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} c_{Rx} & 0 & 0 \\ 0 & c_{Ry} & 0 \\ 0 & 0 & c_N \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2 Modellbildung

repräsentiert, mit dem Knotenpunkt a der ersten Kontaktfläche verbunden. Zwischen dem Massepunkt P und dem Knotenpunkt b der zweiten Kontaktfläche wirkt Reibung.

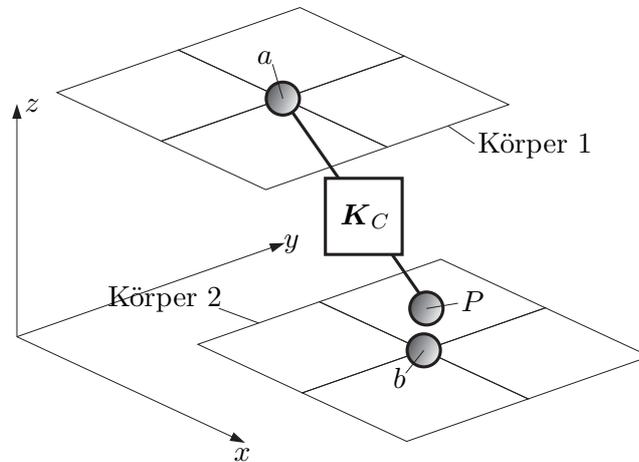


Abbildung 2.8: Dreidimensionales Punktkontaktelement

Abbildung 2.9 zeigt das Freikörperbild für den Massepunkt P . Es wirken die Federkräfte F_{Fx} , F_{Fy} und F_{Fz} , sowie die Kontaktkräfte F_R und F_N für den Fall, dass tatsächlich Kontakt stattfindet.

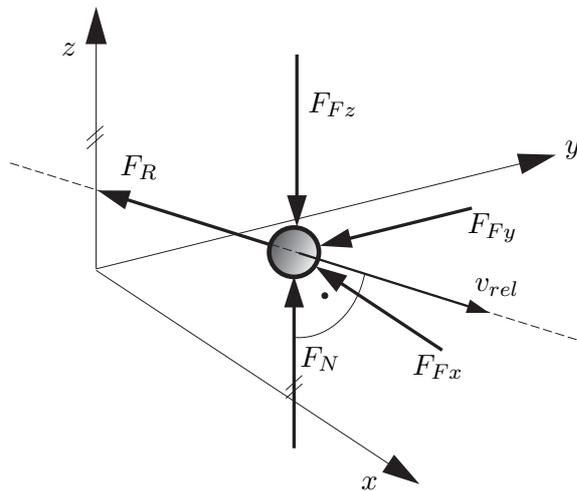


Abbildung 2.9: Freikörperbild des Massepunkt P

Die Bewegungsgleichungen für die Punktmasse P bei Kontakt lauten

$$m_P \ddot{u}_{Px} = -F_{Fx} - F_{Rx} = \quad (2.54)$$

$$= -c_{Rx}(u_{Px} - \bar{u}_{ax}) - F_N \mu \frac{\dot{u}_{Px} - \dot{u}_{bx}}{v_{rel}}$$

$$m_P \ddot{u}_{Py} = -F_{Fy} - F_{Ry} = \quad (2.55)$$

$$= -c_{Ry}(u_{Py} - \bar{u}_{ay}) - F_N \mu \frac{\dot{u}_{Py} - \dot{u}_{by}}{v_{rel}}$$

$$m_P \ddot{u}_{Pz} = -F_{Fz} + F_N = 0. \quad (2.56)$$

Es gelte das Coulomb'sche Reibungsgesetz. Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft und wirkt gegen die relative Bewegungsrichtung zwischen dem Punktkontaktelement und dem Knoten b des zweiten Körpers. Der Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen dem Kontaktpunkt P und dem Knotenpunkt b des zweiten Körpers ist

$$v_{rel} = \sqrt{(\dot{u}_{Px} - \dot{u}_{bx})^2 + (\dot{u}_{Py} - \dot{u}_{by})^2}. \quad (2.57)$$

2.2.2 Reibung

Beim Kontakt zweier Medien treten immer Wechselwirkungen zwischen diesen auf. Bei Kontakt zweier Festkörper ohne Schmierung spricht man von trockener Festkörperreibung.

In [DOWSON \(1979\)](#) ist die geschichtliche Entwicklung der Modellierung der Reibung zusammengefasst. Leonardo da Vinci machte Versuche an der schiefen Ebene und entdeckte den proportionalen Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der Reibungskraft, wobei er aus seinen Versuchen schloss, dass die Reibkraft unabhängig von der Kontaktfläche ist. [AMONTONS \(1699\)](#) und [EULER \(1748a, 1748b\)](#) unterschieden zwischen statischer und kinetischer Reibung. [COULOMB \(1779\)](#) untersuchte den Einfluss verschiedener Parameter auf die Reibung. Er unterschied zwischen statischer und kinetischer Reibung und zeigte, dass die Gleitreibung viel kleiner als die statische Haftreibung sein kann. Seinen Beobachtungen zu Folge sei die Gleitreibung jedoch unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit. [BOWDEN und TABOR \(1956\)](#) differenzieren zwischen scheinbarer und wahrer Berührfläche im Kontakt rauer Oberflächen. Sie bestätigen die intuitive Annahme, dass die Reibkraft proportional zur tatsächlichen Kontaktfläche ist. Derzeit deuten alle Experimente darauf hin, dass die Reibkraft der tatsächlichen Kontaktfläche proportional ist. Nach heutigem Stand der Forschung ist bekannt, dass der Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der Reibkraft von vielen Parametern, wie z.B. der Relativgeschwindigkeit im Kontakt, der Temperatur, etc. beeinflusst wird und die oben genannten Gesetzmäßigkeiten vereinfachte Betrachtungen sind. Die Vielzahl der Parameter beeinflussen grundlegende Reibmechanismen, wie die

2 Modellbildung

Adhäsion zwischen den Kontaktflächen, die Deformation der Rauheitsspitzen, die Furchung der härteren Oberfläche in der weicheren, sowie Energiedissipation. Wie in CZICHOS und HABIG (1992) beschrieben, setzt sich die Reibung aus diesen grundlegenden Mechanismen zusammen.

In dieser Arbeit wird Coulomb'sche Reibung (siehe Abbildung 2.10) angenommen

$$\begin{aligned} |\vec{F}_R| &\leq \mu_0 |\vec{F}_N| && \text{für } |\vec{v}_{rel}| = 0 \\ \vec{F}_R &= \mu |\vec{F}_N| \frac{\vec{v}_{rel}}{|\vec{v}_{rel}|} && \text{für } |\vec{v}_{rel}| \neq 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Diese Annahme wurde getroffen, um eine möglichst effiziente und schnelle Berechnung der Dynamik der zusammengebauten Körper zu ermöglichen. Zudem sind die Relativgeschwindigkeiten im Kontakt zweier elastischer Körper, die miteinander verschraubt sind und monofrequent angeregt werden gering. Mit dieser Rechtfertigung kann ein konstanter Reibungskoeffizient μ angenommen werden.

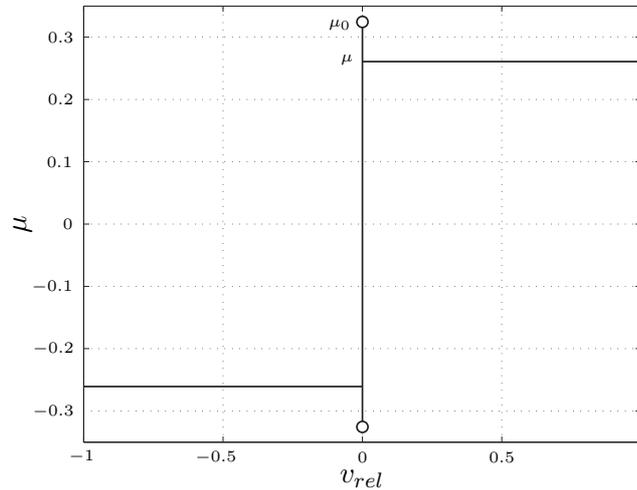


Abbildung 2.10: Coulomb'sche Reibung

2.2.3 Normalkraftverhalten

Die Oberflächenrauheit hat einen großen Einfluss auf das Normalkraftverhalten beim Kontakt zweier Körper. In SEXTRO (2007) wird ausführlich auf den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit auf das Kontaktverhalten eingegangen. Um den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit für den Kontakt zu beschreiben können verschiedene Oberflächenkennwerte verwendet werden.

Oberflächenkennwerte

In den Normen [DIN EN ISO 4287](#) und [ASME B46.1](#) werden Oberflächenkennwerte behandelt. Mittels Profilometer kann ein Oberflächenprofil (siehe [Abbildung 2.11](#)) entlang einer definierten Bezugsstrecke L gemessen werden. Aus dem gemessenen Oberflächenprofil wird eine Bezugslinie ermittelt, von der aus die mittlere quadratische Abweichung des Profils ein Minimum ist. Die so ermittelte Bezugslinie unterteilt das Oberflächenprofil in zwei betragsmäßig gleich große Flächen. Durch z wird das Profil entlang der Bezugsstrecke L von dieser Bezugslinie aus beschrieben. Der Mittenrauwert R_a ist definiert durch

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |z| dx. \quad (2.59)$$

Eine weitere Kenngröße ist die Standardabweichung, der quadratische Mittenrauwert

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L z^2 dx}. \quad (2.60)$$

Der Mittenrauwert R_a und der quadratische Mittenrauwert R_q für sich alleine machen jedoch keine Aussage über die Form des Oberflächenprofils. Die von [ABBOTT und FIRESTONE \(1933\)](#) eingeführte Materialanteilskurve (siehe [Abbildung 2.11](#)) gibt Auskunft über die Form des Oberflächenprofils. Diese so genannte Abbott-Kurve $\Phi(z)$ beschreibt in kumulierter Form den Materialanteil der Oberfläche in Abhängigkeit von z . Das Oberflächenprofil hängt stark vom Herstellungsverfahren ab. Für geschliffene Oberflächen kann zum Beispiel für die Rauheitsverteilung eine Gauss'sche Normalverteilung angenommen werden.

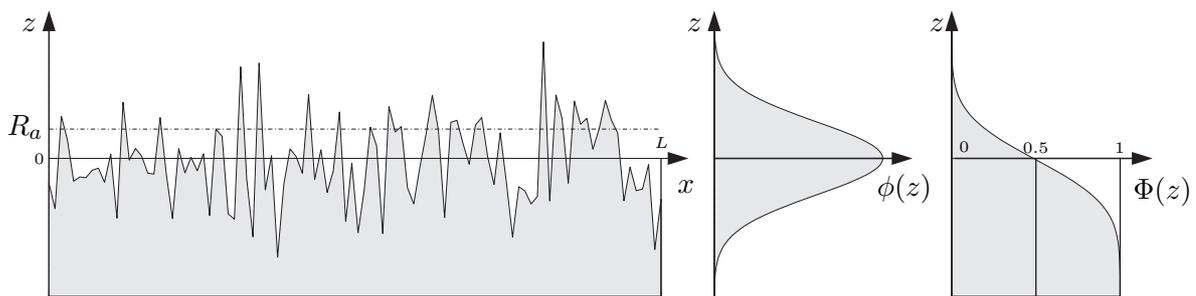


Abbildung 2.11: Gemessenes Oberflächenprofil, Dichtefunktion der Verteilung der Rauheitsspitzen $\phi(z)$ und kumulierte Höhenverteilung der rauen Oberfläche $\Phi(z)$

Normalkraft-Verschiebungsgesetz

In GREENWOOD und WILLIAMSON (1966), GREENWOOD (1984) und JOHNSON (1989) sind Kontaktgesetze dargestellt, die die Rauheit berücksichtigen. Dabei wird die Dichtefunktion der Verteilung der Rauheitsspitzen $\phi(z)$ verwendet und die Theorie von HERTZ (1881) für jeden Kontakt angenommen.

HERTZ formuliert den Kontakt zweier elastischer Körper unter der Annahme des elastischen Halbraums. Diese Annahme ist zulässig, wenn der Kontakt lokal begrenzt ist und die Spannungen außerhalb der Kontaktzone rasch abfallen. Die Kontaktzone soll außerdem sehr klein in Relation zur Dimension der beiden Kontaktkörper sein. So hat weder die Form dieser Körper, noch deren Einspannung einen Einfluss auf die Spannungen die durch den Kontakt verursacht werden. Die beiden Körper können in der Kontaktzone durch Flächen zweiter Ordnung beschrieben oder durch solche approximiert werden. Für den speziellen Fall des Kontakts zweier linear elastischer Kugeln ergibt sich, abhängig von der Relativverschiebung u_z der beiden Kugeln, für die Kontaktfläche

$$a = \pi R u_z, \quad (2.61)$$

und für die, zum Erzielen der Verschiebung u_z benötigten Last

$$f_N = \frac{4}{3} E' R^{\frac{1}{2}} u_z^{\frac{3}{2}}, \quad (2.62)$$

wobei

$$E' = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2.63)$$

und

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.64)$$

ist. $E_{1,2}$ sind die Elastizitätsmodi, $\nu_{1,2}$ die Querkontraktionszahlen und $R_{1,2}$ die Radien der beiden Kugeln. Wie man aus Gleichung 2.61 und Gleichung 2.62 sieht, besteht zwischen der Last f_N und der durch sie verursachten Kontaktfläche a keine lineare Abhängigkeit.

GREENWOOD und WILLIAMSON (1966) beschreiben den Kontakt ebener, rauer Flächen. Die Dichtefunktion der Verteilung der Rauheitsspitzen $\phi(z)_{1,2}$ der beiden Kontaktflächen seien gegeben. Mit

$$\phi(z) = \sqrt{\phi_1(z)^2 + \phi_2(z)^2} \quad (2.65)$$

kann der Kontakt zweier rauer Oberflächen auf den Kontakt einer ebenen, glatten Fläche mit einer rauen, elastischen Oberfläche reduziert werden. Die Verteilung der Rauheits-

2 Modellbildung

spitzen dieser rauhen Oberfläche ist durch $\phi(z)$ beschrieben. Alle Rauheitsspitzen sollen als Kugeloberflächen mit jeweils gleichem Radius R angenommen werden. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass sich alle Einzelkontakte der Rauheitsspitzen unabhängig voneinander verhalten. Sind durch N alle Rauheitsspitzen der Oberfläche bezeichnet, dann befinden sich im Intervall zwischen z und $z + dz$ $N\phi(z)$ Rauheitsspitzen. Der Abstand u'_z der ebenen zur rauhen Oberfläche wird von der Bezugslinie des Oberflächenprofils aus angegeben. Damit ist die Überdeckung der Rauheitsspitzen mit der ebenen Fläche

$$u_z = z - u'_z. \quad (2.66)$$

Die tatsächlich im Kontakt befindliche Oberfläche ist somit

$$A = \pi N R \int_{u'_z}^{\infty} (z - u'_z) \phi(z) dz, \quad (2.67)$$

und die, um den Abstand u'_z zu erreichen, notwendige Last

$$F_N = \frac{4}{3} N E' R^{\frac{1}{2}} \int_{u'_z}^{\infty} (z - u'_z)^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz. \quad (2.68)$$

GREENWOOD und WILLIAMSON zeigen, dass für eine exponentielle Dichtefunktion der Verteilung der Rauheitsspitzen $\phi(z) = e^{-\frac{z}{R_q}}$ ein proportionaler Zusammenhang zwischen der realen Kontaktfläche A und der Last F_N existiert (vergleiche mit Hertz'schem Kontakt)

$$F_N = E' \sqrt{\frac{R_q}{\pi R}} A. \quad (2.69)$$

Der Zusammenhang zwischen der Verschiebung u'_z und der Last F_N ist durch

$$F_N = \frac{4}{3} N E' R R_q^2 e^{\frac{u'_z}{R_q}} \quad (2.70)$$

gegeben. **GREENWOOD und WILLIAMSON** zeigen numerisch, dass für eine Gauss'sche Normalverteilung der Rauheitsspitzen mit der Dichtefunktion

$$\phi(z) = \frac{1}{R_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{R_q} \right)^2} \quad (2.71)$$

auch hier ein linearer Zusammenhang zwischen der Last F_N und der tatsächlichen Kontaktfläche A existiert (siehe [Abbildung 2.12](#)).

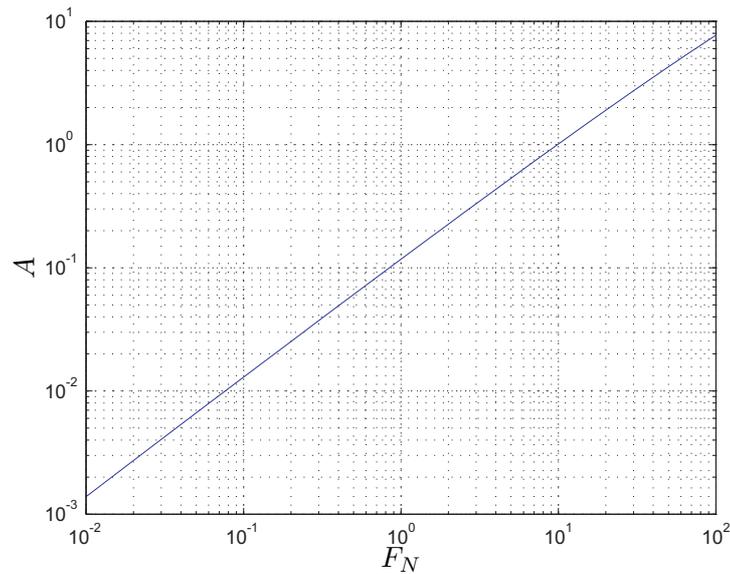


Abbildung 2.12: Zusammenhang zwischen tatsächlicher Kontaktfläche A und der aufgebracht Last F_N ($N = 3000$, $\frac{E'\sigma}{R} = 25 \text{ kg/mm}^2$, $R\sigma = 10^{-4} \text{ mm}^2$)

Das Normalkraft-Verschiebungsgesetz mit angenommener exponentieller Dichtefunktion stellt für eine Abplattung von bis zu 25% der Rauheitsspitzen eine gute Näherung für eine Oberfläche mit Normalverteilung der Rauheitsspitzen dar. Ein Lösen des Kontakts lässt sich jedoch nicht beschreiben.

In [KRAGELSKY, KOMBALOV und DOGYCHIN \(1982\)](#) und [WRIGGERS \(1995\)](#) wird das Normalkraft -Verschiebungsgesetz durch

$$F_N = F_{NS} \left(\frac{u_z - u_{z0}}{u_{zS}} \right)^k \quad (2.72)$$

beschrieben. [KIKUCHI und ODEN \(1988\)](#) haben gezeigt, dass für eine Potenz zwischen 2 und 3,3 dieses Gesetz gut mit experimentellen Untersuchungen übereinstimmt. Dieser Ansatz wird oft in Finite-Elemente Programmen verwendet, mit dem Nachteil, dass die Kontaktparameter aus Experimenten zu bestimmen sind.

[SEXTRO \(2007\)](#) führt ein Kontaktgesetz ein, dass mit definierten Oberflächenparametern auskommt und mit dem ein Lösen des Kontakts wiedergegeben werden kann. Die beiden rauen Oberflächen werden durch die kumulierten Oberflächenprofile $\Phi_{1,2}(z)$ dargestellt. Der Kontakt wird auf eine glatte, starre Oberfläche und eine rauhe, elastische Oberfläche reduziert (siehe [Abbildung 2.13](#)). Die kumulierte Verteilung der Rauheitsspitzen der reduzierten

2 Modellbildung

rauen Oberfläche ist

$$\Phi(z) = \sqrt{\Phi_1(z)^2 + \Phi_2(z)^2}, \quad (2.73)$$

und die mittlere Rautiefe

$$R_Z = \sqrt{R_{Z1}^2 + R_{Z2}^2}. \quad (2.74)$$

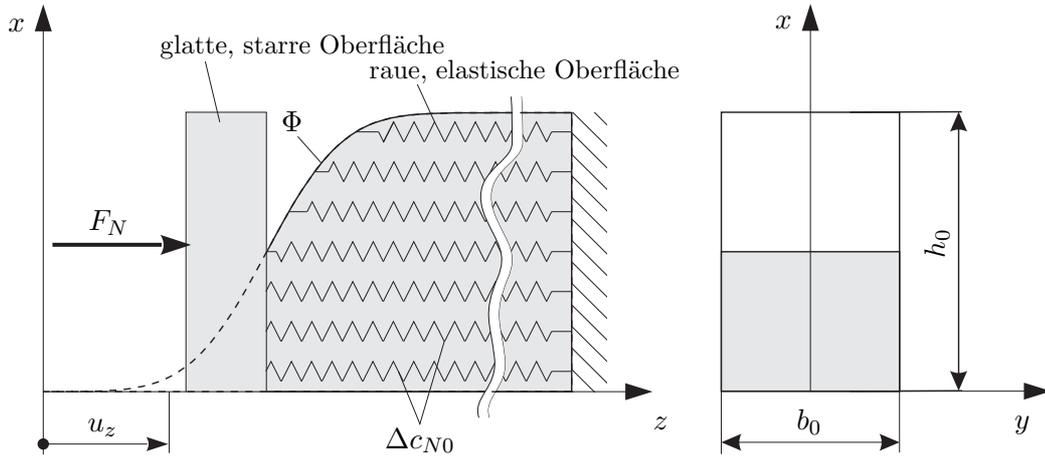


Abbildung 2.13: Kontaktmodell rauer elastischer Oberflächen

Bei Relativverschiebung des glatten, starren Körpers gegenüber dem elastischen, rauhen Körper werden abhängig von der kumulierten Verteilung der Rauheitsspitzen Φ , gedachte Federn mit einer Federsteifigkeit Δc_{N0} gestaucht. Durch eine einzelne gedachte Feder wirkt ein Druck

$$p_N = \frac{c_{N0}}{A_0}(u_z - \Phi(x)) \quad (2.75)$$

bezogen auf die Fläche

$$A_0 = h_0 b_0. \quad (2.76)$$

Zum Erzielen der Verschiebung u_z ist damit die Kraft

$$F_N = b_0 \int_0^{\Phi(u_z)} p_N dx = \frac{c_{N0} b_0}{A_0} \int_0^{\Phi(u_z)} (u_z - \Phi(x)) dx = \frac{c_{N0} b_0}{A_0} \int_{-\infty}^{u_z} \Phi(z) dz \quad (2.77)$$

erforderlich. **SEXTRO** approximiert die, auf die Breite h_0 des betrachteten Blocks normierte, kumulierte Verteilung der Rauheitsspitzen

$$\Phi^* = \frac{\Phi}{h_0}, \quad (2.78)$$

2 Modellbildung

abhängig von der auf die Rautiefe R_Z normierten Koordinate

$$z^* = \frac{z}{R_Z} \quad (2.79)$$

durch

$$\Phi^*(z^*) = \begin{cases} 0 & \text{für } z^* < 0 \\ 3z^{*2} - 2z^{*3} & \text{für } 0 \leq z^* \leq 1 \\ 1 & \text{für } z^* > 1 \end{cases} \quad (2.80)$$

Mit Gleichung 2.78 und Gleichung 2.79 wird die zum Erzielen einer Verschiebung u_z benötigte Kraft

$$F_N = \frac{c_{N0} b_0 h_0 R_Z}{A_0} \int_{-\infty}^{u_z^*} \Phi^*(z^*) dz^* = c_{N0} R_Z \int_{-\infty}^{u_z^*} \Phi^*(z^*) dz^*, \quad (2.81)$$

und damit

$$F_N^* = \begin{cases} 0 & \text{für } u_z^* < 0 \\ u_z^{*3} - \frac{1}{2}u_z^{*4} & \text{für } 0 \leq u_z^* \leq 1 \\ u_z^* - \frac{1}{2} & \text{für } u_z^* > 1 \end{cases} \quad (2.82)$$

mit den normierten Größen

$$F_N^* = \frac{F_N}{c_{N0} R_Z}, \quad u_z^* = \frac{u_z}{R_Z}. \quad (2.83)$$

Abbildung 2.14 zeigt den Zusammenhang zwischen der normierten Normalkraft F_N^* und den normierten Relativverschiebungen u_z^* .

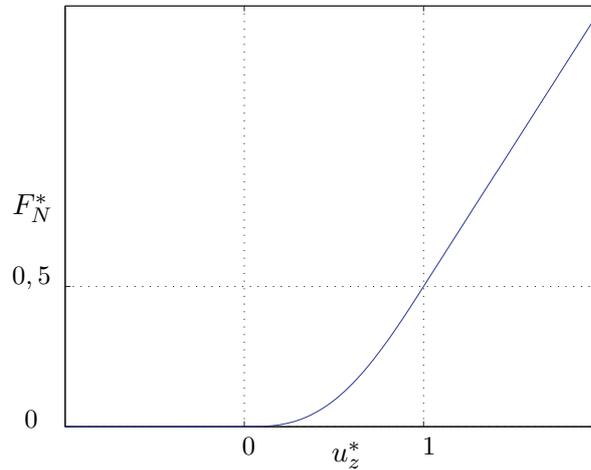


Abbildung 2.14: Zusammenhang zwischen der normierten Normalkraft und der Relativverschiebung

In [SEXTRO \(2007\)](#) wird ausgeführt, dass mit dieser Modellierung auch das zuvor genannte exponentielle Kraft-Verschiebungs Gesetz und das Potenzgesetz für das Normalkraftverhalten wiedergegeben werden können. Es müssen entsprechende kumulierte Verteilungen der Rauheitsspitzen verwendet werden.

2.2.4 Tangentiale Kontaktsteifigkeit

[SEXTRO \(2007\)](#) zeigt, dass die tangentielle Kontaktsteifigkeit proportional zum im Kontakt befindlichen Materialanteil der rauen Oberfläche ist. Durch die normierte, kumulierte Verteilung der Rauheitsspitzen $\Phi^*(z^*)$ ist der tatsächliche im Kontakt befindliche Anteil der nominalen Kontaktfläche, abhängig von der normierten Verschiebung u_z^* , und damit auch die auf die nominale Kontaktsteifigkeit c_{R0} normierte, tangentielle Kontaktsteifigkeit c_R^* gegeben

$$c_R^*(z^*) = \begin{cases} 0 & \text{für } u_z^* < 0 \\ 3u_z^{*2} - 2u_z^{*3} & \text{für } 0 \geq u_z^* \leq 1, \\ 1 & \text{für } u_z^* > 1 \end{cases} \quad (2.84)$$

mit

$$c_R^* = \frac{c_R}{c_{R0}}. \quad (2.85)$$

Ein Vergleich des Normalkraftverhaltens (siehe [Abbildung 2.14](#)) und des Zusammenhangs zwischen der Normalkraft und der Tangentialsteifigkeit (siehe [Abbildung 2.15](#)) mit Messungen in [TREYDE \(1995\)](#) zeigt eine gute Übereinstimmung.

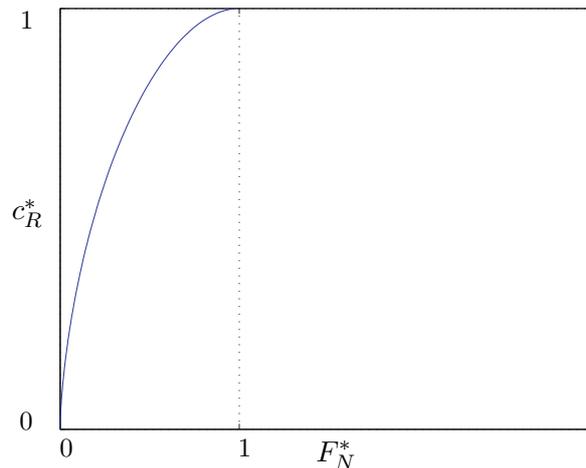


Abbildung 2.15: Zusammenhang zwischen der normierten Normalkraft und der Tangentialsteifigkeit

2.2.5 Nominale Kontaktsteifigkeiten

SEXTRO (2007) führt eine gedachte elastische Kontaktschicht mit der Dicke l_0 ein, diskretisiert diese in Flächen A_0 und leitet für ein Element die nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{N0} in Normalenrichtung und c_{R0} in tangentialer Richtung her. Für den Fall des ebenen Spannungszustandes und unter der Annahme, dass alle Querschnitte eben bleiben, lassen sich die nominalen Kontaktsteifigkeiten mit

$$c_{N0} = \frac{EA_0}{l_0} \text{ und } c_{R0} = \frac{GA_0}{l_0} \quad (2.86)$$

berechnen. E ist der Elastizitätsmodul und G der Schubmodul der elastischen Kontaktschicht. Eine unbekannte Größe bei dieser Modellierung ist die Dicke l_0 der elastischen Kontaktschicht.

In dieser Arbeit werden die nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{N0} in Normalenrichtung und c_{R0} in tangentialer Richtung über einen Abgleich eines Finiten Elemente Referenz-Modells mit dem modal reduzierten Modell der beiden verschraubten Körper ermittelt.

Beim Erstellen des Finiten Elemente Modells wird angenommen, dass alle in der Ausgangskonfiguration koinzidenten Kontaktpunkte der beiden Einzelkörper haften. Sie werden bei der Modellierung fest miteinander verbunden. Die Dynamik des so modellierten, zusammengebauten, fremderregten Körpers, ohne Materialdämpfung wird durch

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_E \quad (2.87)$$

beschrieben.

Die Kontaktknotenpaare der beiden modal reduzierten Finite Elemente Modelle der Einzelkörper werden über Federn miteinander verbunden. Diese Federn repräsentieren eine elastische Kontaktschicht. Die Federn in Normalenrichtung haben die Kontaktsteifigkeiten c_{N0} und die Federn in Tangentialrichtung die Kontaktsteifigkeiten c_{R0x} und c_{R0y} . Diese Federn sollen den Steifigkeitsverlust der modal reduzierten Modelle gegenüber den ursprünglichen Finiten Elemente Modellen der Körper ausgleichen. Die Dynamik des modal reduzierten, zusammengebauten, fremderregten Systems ohne Materialdämpfung wird durch

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_1 \\ \ddot{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{M2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \bar{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{C01} \\ \mathbf{F}_{C02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{E1} \\ \mathbf{F}_{E2} \end{bmatrix} \right) \quad (2.88)$$

wiedergegeben. $\mathbf{F}_{C01,2}$ sind die Federkräfte aufgrund der gedachten elastischen Kontaktschicht. Die Federkräfte zwischen dem Knoten a der ersten Kontaktfläche und dem Knoten

2 Modellbildung

b der zweiten Kontaktfläche sind

$$\mathbf{F}_{C0a} = - \underbrace{\begin{bmatrix} c_{R0x} & 0 & 0 \\ 0 & c_{R0y} & 0 \\ 0 & 0 & c_{N0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{C0ab}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_{xa} \\ \bar{u}_{ya} \\ \bar{u}_{za} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_a} - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_{xb} \\ \bar{u}_{yb} \\ \bar{u}_{zb} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_b} \right) \quad (2.89)$$

auf die erste Kontaktfläche, und

$$\mathbf{F}_{C0b} = +\mathbf{K}_{C0ab} (\bar{\mathbf{u}}_a - \bar{\mathbf{u}}_b) \quad (2.90)$$

auf die zweite Kontaktfläche. Unter Anwendung der modalen Transformation $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{w}}$ können die modal reduzierten Bewegungsgleichungen für das zusammengebaute System damit durch

$$\ddot{\bar{\mathbf{w}}} + (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_{C0M}) \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_E \quad (2.91)$$

beschrieben werden, mit den gesammelten modalen Koordinaten der beiden Körper

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \bar{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

der gesamten modalen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{M2} \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

der modalen Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

und der Erregerkraft

$$\mathbf{F}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{E1} \\ \mathbf{F}_{E2} \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Die modal beschriebene Kontaktsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{C0M} ergibt sich aus der Summe der modal transformierten Einzelsteifigkeitsmatrizen aller Kontaktknotenpaare (a, b) zu

$$\mathbf{K}_{C0M} = \sum_{(a,b)} \left(\mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_{C0ab} \mathbf{T}_a - \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_{C0ab} \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_b^T \mathbf{K}_{C0ab} \mathbf{T}_a - \mathbf{T}_b^T \mathbf{K}_{C0ab} \mathbf{T}_b \right). \quad (2.96)$$

Die modalen Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_{a,b}$ der einander zugeordneten Kontaktknoten ha-

2 Modellbildung

ben jeweils die Dimension $3 \times m$.

Die Übertragungsfunktion des FE-Modells (Gleichung 2.87) ist

$$\mathbf{V}_{FE} = \Omega^2(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})^{-1}. \quad (2.97)$$

Die Übertragungsfunktion des modal reduzierten, assemblierten Systems (Gleichung 2.91) ist durch

$$\mathbf{V}_M = \Omega^2\mathbf{T}(\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_{C0M} - \Omega^2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{T}^T \quad (2.98)$$

gegeben. Wären die beiden Übertragungsfunktionen \mathbf{V}_M und \mathbf{V}_{FE} identisch, würde die Dynamik des FE-Modells durch das modal reduzierte System exakt wiedergegeben werden. Diese Forderung kann aber mit den drei unabhängigen Parametern c_{N0} , c_{R0x} und c_{R0y} nicht erfüllt werden. Für die weiteren Berechnungen muss das dynamische Verhalten nur im zu untersuchenden Frequenzbereich gut wiedergegeben werden. Um den Fehler im betrachteten Frequenzbereich durch die modal reduzierte Beschreibung zu minimieren kann gefordert werden, dass die Summe der Frobeniusnormen

$$\sum_k \|\mathbf{V}_{FE}(\Omega_k) - \mathbf{V}_M(\Omega_k)\|_F = \sum_k \sqrt{\sum_{i,j} (\mathbf{V}_{FE}(\Omega_k)_{ij} - \mathbf{V}_M(\Omega_k)_{ij})^2} \quad (2.99)$$

für diskrete Erregerfrequenzen Ω_k im gewünschten Frequenzspektrum ein Minimum wird. Diese Optimierungsaufgabe ist mit großem Rechenaufwand verbunden, da die Übertragungsfunktionen \mathbf{V}_M und \mathbf{V}_{FE} die Dimension $3n \times 3n$ haben, wobei n die Anzahl der Knoten des Finiten Elemente Modells ist.

Zum Bestimmen der Kontaktsteifigkeiten c_{N0} , c_{R0x} und c_{R0y} kann auch die Forderung gestellt werden, dass die Eigenfrequenzen des modal reduzierten Systems mit denen des FE-Modells im betrachteten Frequenzbereich übereinstimmen. Die Eigenfrequenzen des Finiten Elemente Modells ω_{0FE} können aus der Bestimmungsgleichung

$$\det(\mathbf{K} - \omega_{0FE}^2\mathbf{M}) = 0 \quad (2.100)$$

und die Eigenfrequenzen ω_{0M} des modal reduzierten Systems aus der Gleichung

$$\det(\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_{C0M} - \omega_{0M}^2\mathbf{E}) = 0 \quad (2.101)$$

berechnet werden. Die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_i (\omega_{0FEi} - \omega_{0Mi})^2 \quad (2.102)$$

soll minimal sein.

Werden die Kontaktsteifigkeiten durch Minimierung von [Gleichung 2.99](#) ermittelt, werden auch die Eigenformen des zusammengebauten Systems mit berücksichtigt. Dies ist bei Minimierung von [Gleichung 2.102](#) nicht der Fall. Ausschlaggebend, dass die Dynamik des FE-Modells durch das modal reduzierte System gut wiedergegeben wird, ist aber in beiden Fällen eine ausreichende Anzahl berücksichtigter Moden der Einzelkörper.

2.3 Berechnungsverfahren

Die modal reduzierten Bewegungsgleichungen für verschraubte, elastische Mehrkörpersysteme mit ebenen, rauen Kontaktflächen lassen sich in der Form

$$\ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{D}_M \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{K}_M \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{T}^T \left(\mathbf{F}_C(\dot{\bar{\mathbf{w}}}, \bar{\mathbf{w}}) + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E \right) \quad (2.103)$$

darstellen, mit den nichtlinearen Kontaktkräften \mathbf{F}_C , den Schraubenvorspannkräften \mathbf{F}_S und den periodischen Erregerkräften \mathbf{F}_E . [Gleichung 2.103](#) beschreibt eine erzwungene Schwingung eines nichtlinearen Systems. Abhängig von den Schraubenvorspannkräften \mathbf{F}_S sollen die Resonanzkurven (FRFs = Frequency Response Functions), durch die der eingeschwungene Zustand für die verschraubten Körper beschrieben wird, bestimmt werden. Eine geschlossene analytische Lösung des Differentialgleichungssystems ([Gleichung 2.103](#)) lässt sich nicht finden. Um numerisch eine Lösung zu erhalten können verschiedene Wege beschritten werden.

Eine dieser Möglichkeiten ist die numerische Integration von [Gleichung 2.103](#) bis zum Erreichen des eingeschwungenen Zustands für diskrete Erregerfrequenzen Ω_i des zu untersuchenden Spektrums. In den einzelnen Kontaktpunkten sind die Zustände Haften und Gleiten möglich. Durch den Übergang von Haften zu Gleiten wird das System sehr steif. Zur numerischen Lösung müssen stabile Integratoren, z.B. mit variabler Schrittweite², verwendet werden. Durch die Vielzahl der Kontaktpunkte, in denen die Übergänge von Haften zu Gleiten und umgekehrt auftreten, steigt der Rechenaufwand enorm. Es ist derzeit nicht möglich, mit vertretbarem zeitlichen Aufwand die Resonanzkurven durch numerische Inte-

²z.B. ode15s in Matlab®

gration zu berechnen.

In [MAGNUS, POPP und SEXTRO \(2008\)](#) werden Näherungsverfahren zur Bestimmung der stationären Antwort nichtlinearer Systeme dargestellt. [SEXTRO \(1997\)](#) und [PANNING \(2005\)](#) wenden das Verfahren der Harmonischen Balance an. Grundannahmen dabei sind elliptische Relativbewegung zugeordneter Kontaktpunkte, und dass die aus dieser Relativbewegung resultierenden Kontaktkräfte ebenfalls harmonisch sind. Die höherfrequenten Anteile der nichtlinearen Kontaktkräfte werden vernachlässigt.

Um die höherfrequenten Anteile der Kräfte im Kontakt zu berücksichtigen wird das Verfahren von Ritz und Galerkin verwendet. Dieses Verfahren wird in [MAGNUS, POPP und SEXTRO \(2008\)](#) und [GAUL und FIEDLER \(1997\)](#) beschrieben.

2.3.1 Verfahren von Ritz und Galerkin

Das Verfahren von Ritz und Galerkin leitet sich vom Verfahren der „Gewichteten Residuen“ ab. Eine Differentialgleichung

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0 \quad (2.104)$$

wird von ihrer strengen Lösung exakt erfüllt. Es soll eine Näherungsfunktion

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \quad (2.105)$$

für diese Lösung im Intervall $0 \leq t \leq T$ gefunden werden. φ_i sind N linear unabhängige Basisfunktionen. Wird die Ansatzfunktion \tilde{x} in die Differentialgleichung eingesetzt, so wird diese nicht mehr exakt erfüllt. Der Fehler

$$\epsilon(t) = f(\ddot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{x}) \neq 0 \quad (2.106)$$

wird als Residuum oder auch als Defekt bezeichnet. Zur Bestimmung der Näherungslösung wird gefordert, dass der mit den Wichtungsfunktionen $W_i(t)$ gewichtete Fehler im betrachteten Intervall verschwindet. Die Anzahl der Wichtungsfunktionen ist gleich der Anzahl der gewählten linear unabhängigen Basisfunktionen N . Man erhält ein nichtlineares Gleichungssystem mit N Gleichungen für die N Unbekannten a_i

$$\int_0^T \epsilon(t) W_i(t) dt \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.107)$$

Aus der Wahl verschiedener Wichtungsfunktionen ergeben sich verschiedene Techniken. Beim Kollokationsverfahren zum Beispiel werden als Wichtungsfunktionen Dirac-Impulse verwendet. Damit wird gefordert, dass der Fehler an diskreten Stellen des betrachteten Intervalls, und zwar an so vielen wie die Ansatzfunktion Koeffizienten enthält, Null wird. Der Fehler im restlichen Intervall wird nicht beachtet. Bei Verwendung von Heaviside Funktionen als Wichtungsfunktionen spricht man von Teilgebietsverfahren. Hier wird gefordert, dass die Summe der Fehler in einzelnen Teilgebieten, und zwar in so vielen wie die Ansatzfunktion Koeffizienten enthält, Null ist. Beim Galerkin-Verfahren werden die Ansatzfunktionen selbst als Wichtungsfunktionen verwendet. Einen Überblick der verschiedenen Unterverfahren des Verfahrens der Gewichteten Residuen ist in [Tabelle 2.1](#) gegeben. Das von Ritz angegebene und von Galerkin erweiterte Verfahren wird im Weiteren zur Bestimmung einer Näherungslösung von [Gleichung 2.103](#) angewendet.

Verfahren	Wichtungsfunktionen $W_i(t)$
Kollokationsverfahren ¹	$\delta(t - t_i)$
Methode der Momente	t^i
Galerkin-Verfahren	$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i}$
Teilgebietsverfahren ³	$H(t - t_i) - H(t - t_{i+1})$
Fehlerquadratminimierung	$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_i}$

Tabelle 2.1: Techniken des Verfahrens der Gewichteten Residuen: Wichtungsfunktionen

2.3.2 Systemgleichungen

Aufgrund der periodischen Erregerkräfte \mathbf{F}_E lässt sich auch eine periodische Antwort der Knotenpunktsverschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ und damit auch für die modalen Koordinaten $\bar{\mathbf{w}}$ erwarten. Für die modalen Koordinaten wird deshalb als Ansatzfunktion eine Fourierreihe

$$\bar{\mathbf{w}} \approx \tilde{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{w}}_{C_i} \cos i\Omega t + \hat{\mathbf{w}}_{S_i} \sin i\Omega t \quad (2.108)$$

gewählt. Durch die Substitution

$$\tau = \Omega t \quad (2.109)$$

¹ δ ist die Dirac-Distribution. In [GAUL und FIEDLER \(1997\)](#) wird definiert: „Es ist $\delta(t - t_i) = 0$, außer an der Stelle $t = t_i$ wo $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i) dt = 1$ “. Die Dirac-Verteilung besitzt die Filtereigenschaft, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_i) dt = f(t_i)$.

²In [GAUL und FIEDLER \(1997\)](#) wird folgendes definiert: „Die Heaviside-Funktion, auch Einschaltfunktion oder Einheitssprungfunktion genannt, ist diejenige Funktion $H(t)$, einer Variablen t , die für negative Argumente den Wert Null und für positive Argumente den Wert Eins besitzt. (Für $t = 0$ findet man unterschiedliche Definitionen, dieser Wert ist jedoch i. a. nicht von Interesse)“

2 Modellbildung

wird die Periodendauer T der Schwingung auf 2π normiert. Der Ansatz für die modalen Koordinaten, sowie deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist damit

$$\tilde{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{w}}_{Ci} \cos i\tau + \hat{\mathbf{w}}_{Si} \sin i\tau, \quad (2.110)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \sum_{i=1}^N -i\Omega \hat{\mathbf{w}}_{Ci} \sin i\tau + i\Omega \hat{\mathbf{w}}_{Si} \cos i\tau, \quad (2.111)$$

und

$$\ddot{\tilde{\mathbf{w}}} = \sum_{i=1}^N -(i\Omega)^2 \hat{\mathbf{w}}_{Ci} \cos i\tau - (i\Omega)^2 \hat{\mathbf{w}}_{Si} \sin i\tau. \quad (2.112)$$

Die Wichtungsfunktionen sind damit nach Galerkin

$$W_j = 1, \cos i\tau, \sin i\tau. \quad i = 1 \dots N \quad (2.113)$$

Der Defekt der Differentialgleichung (Gleichung 2.103) ist

$$\boldsymbol{\epsilon}(\tau) = \ddot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{D}_M \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \mathbf{K}_M \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{T}^T \left(\mathbf{F}_C(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}, \tilde{\mathbf{w}}) + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E \right). \quad (2.114)$$

Es wird gefordert, dass der gewichtete Fehler

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\epsilon}(\tau) W_j(t) d\tau \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (2.115)$$

betrachtet über eine Schwingungsperiode, verschwindet. Es resultiert das nichtlineare Gleichungssystem mit den Unbekannten $\hat{\mathbf{w}}_0$ und $\hat{\mathbf{w}}$

$$\mathbf{K}_M \hat{\mathbf{w}}_0 - \mathbf{T}^T \left(\hat{\mathbf{F}}_{C0}(\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{\mathbf{w}}) + \hat{\mathbf{F}}_{S0} + \hat{\mathbf{F}}_{E0} \right) = \mathbf{0} \quad (2.116)$$

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{w}} - \mathbf{\Gamma} \left(\hat{\mathbf{F}}_C(\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{\mathbf{w}}) + \hat{\mathbf{F}}_S + \hat{\mathbf{F}}_E \right) = \mathbf{0}. \quad (2.117)$$

Mit der modalen Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N), \quad (2.118)$$

wobei

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_M - (i\Omega)^2 \mathbf{E} & -i\Omega \mathbf{D}_M \\ i\Omega \mathbf{D}_M & \mathbf{K}_M - (i\Omega)^2 \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

2 Modellbildung

ist, mit den Fourierkoeffizienten der Ansatzfunktionen für die modalen Verschiebungen

$$\hat{\boldsymbol{w}}_0 \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{w}}_{C1} \\ \hat{\boldsymbol{w}}_{S1} \\ \hat{\boldsymbol{w}}_{C2} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{w}}_{CN} \\ \hat{\boldsymbol{w}}_{SN} \end{bmatrix}, \quad (2.120)$$

der modalen Transformationsmatrix

$$\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\underbrace{\boldsymbol{T}^T, \dots, \boldsymbol{T}^T}_{N\text{-mal}}), \quad (2.121)$$

den Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{C0} \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{F}}_C = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_{CC1}(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{\boldsymbol{w}}) \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{CS1}(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{\boldsymbol{w}}) \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{CC2}(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{\boldsymbol{w}}) \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{CCN}(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{\boldsymbol{w}}) \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{CSN}(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{\boldsymbol{w}}) \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

den Fourierkoeffizienten der Schraubenvorspannkkräfte $\hat{\boldsymbol{F}}_{S0}$, $\hat{\boldsymbol{F}}_S$ und den Fourierkoeffizienten der Erregerkräfte

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{E0} \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{F}}_E = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}_{EC1} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{ES1} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{EC2} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{ECN} \\ \hat{\boldsymbol{F}}_{ESN} \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Gleichung 2.116 und Gleichung 2.117 können vorerst nicht unabhängig voneinander gelöst werden, da die statischen Fourierkoeffizienten $\hat{\boldsymbol{F}}_C$ sowohl von den statischen Fourierkoeffizienten $\hat{\boldsymbol{w}}_0$ der modalen Verschiebungen, wie auch von deren restlichen Fourierkoeffizienten $\hat{\boldsymbol{w}}$ abhängig sind.

2.3.3 Statische Gleichgewichtslage

Gleichung 2.116 ist, abgesehen von den konstanten Fourierkoeffizienten $\hat{\mathbf{F}}_C$ der Kontaktkräfte, nur durch die statischen Fourierkoeffizienten $\hat{\mathbf{w}}_0$ der modalen Verschiebungen bestimmt. Diese Gleichung entspricht im Wesentlichen einer Bestimmungsgleichung für die statische Gleichgewichtslage der beiden elastischen, miteinander verschraubten Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen.

Die konstanten Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte $\hat{\mathbf{F}}_{C0}$ sind von den Koeffizienten $\hat{\mathbf{w}}_0$ und $\hat{\mathbf{w}}$ der modalen Verschiebungen abhängig. Durch die Abhängigkeit von den Koeffizienten $\hat{\mathbf{w}}$ der modalen Verschiebungen wird beschrieben, dass einzelne Kontaktpunkte während der Bewegung außerhalb der Referenzkonfiguration haften können. Vereinfachend wird zum Lösen von Gleichung 2.116 angenommen, dass der Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = 0$ ist und damit die statischen Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte nur mehr von den statischen Fourierkoeffizienten der modalen Verschiebungen abhängig sind. Des weiteren wirken damit die statischen Kontaktkräfte normal zur Kontaktfläche:

$$\hat{\mathbf{F}}_{C0} \approx \hat{\mathbf{F}}_{C0}(\hat{\mathbf{w}}_0) = \mathbf{F}_{N0}. \quad (2.124)$$

Die Erregerkräfte \mathbf{F}_E sollen monofrequent, also rein harmonisch, angenommen werden. Damit werden die konstanten Fourierkoeffizienten der Erregerkräfte

$$\hat{\mathbf{F}}_{E0} = \mathbf{0}. \quad (2.125)$$

Die Schraubenvorspannkräfte \mathbf{F}_S sind konstant. Damit sind die konstanten Fourierkoeffizienten

$$\hat{\mathbf{F}}_{S0} = \mathbf{F}_S \quad (2.126)$$

und alle restlichen Fourierkoeffizienten der Schraubenvorspannkräfte

$$\hat{\mathbf{F}}_S = \mathbf{0}. \quad (2.127)$$

Die Schraubenvorspannkräfte \mathbf{F}_S werden mit Hilfe eines Finiten Elemente Programms berechnet. Eine Schraubenvorspannung kann im Finiten Elemente Programm durch Abkühlung der Schraubenschaftelemente erreicht werden (siehe Abbildung 2.16a). Durch die Ab-

2 Modellbildung

kühlung der Elemente des Schraubenschaftes ziehen sich diese zusammen und verspannen die beiden zu verschraubenden Körper. In einem weiteren Schritt können die, durch die Abkühlung verursachten, Knotenpunktverschiebungen ausgelesen und durch Einspannung der Schraubenschaftknoten auf das Finite Elemente Modell ohne der thermischen Belastung aufgeprägt werden. Auf diese Weise wird der gleiche Verspannungszustand wie durch die Abkühlung der Schaftelemente modelliert (siehe [Abbildung 2.16b](#)). Es können jedoch die Reaktionskräfte auf die Einspannstellen ausgelesen werden. Diese, mit umgekehrten Vorzeichen, entsprechen den Vorspannkräften \mathbf{F}_S die auf die Schraubenschaftknoten wirken. In der modal reduzierten Beschreibung der Bewegungsgleichung ([Gleichung 2.103](#)) werden

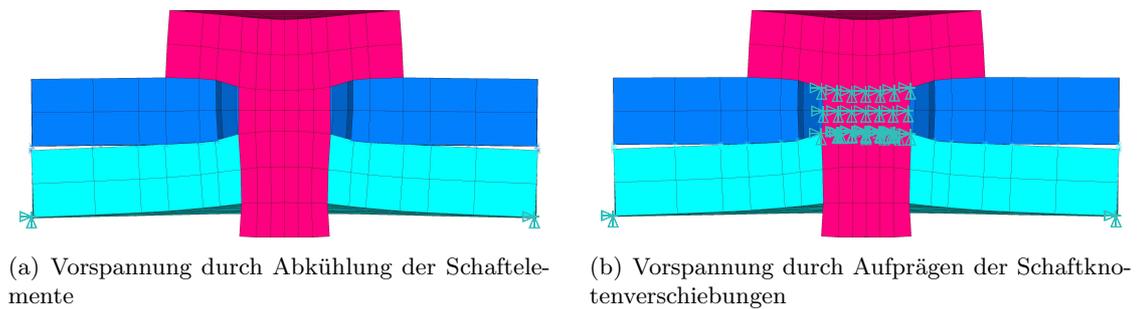


Abbildung 2.16: FE-Modell zur Berechnung der Schraubenvorspannung (erstellt mit ANSYS)

die Schraubenvorspannkräfte durch $\mathbf{T}^T \mathbf{F}_S$ aufgeprägt. Im algebraischen Gleichungssystem ([Gleichung 2.116](#)) spiegelt sich dies im Term $\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{F}}_{S0}$ wieder. Durch die modale Kondensation können die statischen Schraubenvorspannkräfte nicht zufriedenstellend genau berücksichtigt werden. Deshalb wird [Gleichung 2.116](#) zur Bestimmung der statischen Gleichgewichtslage bzw. zum bestimmen der statischen Normalkraftverteilung im Kontakt mit einem Finite Elemente Programm gelöst.

Die Bestimmungsgleichung des Finite Elemente Modells der beiden elastischen, miteinander verschraubten Körper mit ebenen, glatten Kontaktflächen wird mit obigen Annahmen und unter Berücksichtigung der modalen Transformation $\bar{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{T}\hat{\mathbf{w}}_0$ zu

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{F}_{N0} - \mathbf{F}_S = \mathbf{0}. \quad (2.128)$$

Damit lässt sich die statische Normal-Kontaktkraft-Verteilung \mathbf{F}_{N0} durch die Finite Elemente Modellierung unter Wirkung der Schraubenvorspannkräfte \mathbf{F}_S berechnen.

2.3.4 Hybride Berechnung im Frequenz- und Zeitbereich

Wird die statische Normalkraftverteilung \mathbf{F}_{N0} mit Hilfe eines Finiten Elemente Programms berechnet, kann die Gleichung 2.117, die die Dynamik des Systems beschreibt, zu

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{\Gamma} \left(\hat{\mathbf{F}}_C(\mathbf{F}_{N0}, \hat{\mathbf{w}}) + \hat{\mathbf{F}}_E \right) = \mathbf{0} \quad (2.129)$$

vereinfacht werden.

In POWELL (1970), GARBOW, HILLSTROM und MORE (1980) und PODOU (2007) wird die so genannte „Hybrid Frequency-Time Domain Method“ (HFT-Methode) zum Lösen von nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystemen vorgeschlagen. Anhand des Systems verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen wird die HFT-Methode exemplarisch dargestellt (siehe Abbildung 2.17):

1. Eingang in die Hybride Frequenz- Zeitbereich- Berechnung sind die Koeffizienten der modalen Ansatzfunktionen $\hat{\mathbf{w}}^{(k)}$ für den k -ten Iterationsschritt. Zu Beginn des Iterationsverfahrens muss ein Startvektor $\hat{\mathbf{w}}^{(0)}$ vorgegeben werden.
2. Zu den modalen Ansatzfunktionen $\hat{\mathbf{w}}^{(k)}$ müssen die Bewegungen der Kontaktknoten $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\tau)$ und deren Geschwindigkeiten $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{(k)}(\tau)$ im Zeitbereich berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\tau) &= \mathbf{T} \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{w}}_{Ci}^{(k)} \cos i\tau + \hat{\mathbf{w}}_{Si}^{(k)} \sin i\tau \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{(k)}(\tau) &= \mathbf{T} \sum_{i=1}^n -i\Omega \hat{\mathbf{w}}_{Ci}^{(k)} \sin i\tau + i\Omega \hat{\mathbf{w}}_{Si}^{(k)} \cos i\tau \end{aligned} \quad (2.130)$$

3. Die berechneten Kontaktknotenbewegungen $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\tau), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{(k)}(\tau)$ sind die Eingangsgrößen in das Kontaktmodell (siehe Abbildung 2.8). Durch zeitliche Integration müssen die Bewegungsgleichungen des Kontaktmodells gelöst werden. Damit sind die Kontaktkräfte $\mathbf{F}_C^{(k)}(\tau)$ bekannt.
4. Bestimmen der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte $\hat{\mathbf{F}}_C^{(k)}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{Ci}^{(k)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \mathbf{F}_C^{(k)}(\tau) \cos(i\tau) d\tau \\ \hat{\mathbf{F}}_{Si}^{(k)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \mathbf{F}_C^{(k)}(\tau) \sin(i\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.131)$$

2 Modellbildung

5. Bestimmen von $\hat{\mathbf{w}}^{(k+1)}$ mittels Newton-Verfahren mit numerischen Ableitungen:

$$\hat{\mathbf{w}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{w}}^{(k)} - \mathbf{J}^{(k)-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}^{(k)}) \quad (2.132)$$

$$\mathbf{J}_{ij}^{(k)} \approx \frac{\mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{w}}^{(k)} + \mathbf{E}_j \mathbf{h}_j) - \mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{w}}^{(k)})}{\mathbf{h}_j} \quad (2.133)$$

\mathbf{J} ... Jaccobi-Matrix

\mathbf{h}_j ... Schrittweite zum j -ten Freiheitsgrad

$$\mathbf{E}_j = \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{Eintrag } j}, 0, \dots, 0)$$

Die Schritte 1. bis 5. müssen solange wiederholt werden, bis das Abbruchkriterium erfüllt wird. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die relative Änderung der 2-Norm der Koeffizienten der modalen Ansatzfunktionen $\hat{\mathbf{w}}$ kleiner einer Toleranzgrenze ε_{err} ist

$$\frac{|\hat{\mathbf{w}}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{w}}^{(k)}|}{|\hat{\mathbf{w}}^{(k)}|} < \varepsilon_{err}. \quad (2.134)$$

Die Genauigkeit des Verfahrens lässt sich mit steigender Anzahl der gewählten Ansatzfunktionen beliebig steigern. Durch ein Paar zusätzlicher Ansatzfunktionen $\cos i\tau$ und $\sin i\tau$ steigt jedoch die Anzahl der nichtlinearen Gleichungen des Gleichungssystems um $2m$, wobei m die Anzahl der berücksichtigten Moden ist. Im gleichen Ausmaß erhöht sich damit auch die Dimension der Jaccobi-Matrix. Beim Erstellen der Jaccobi-Matrix muss für jeden Eintrag das Kontaktmodell für jedes einzelne Kontaktknotenpaar durch zeitliche Integration gelöst werden. Der Rechenaufwand steigt damit enorm. Die zeitliche Integration des Kontaktmodells ([Punkt 3](#)) soll im folgenden Unterkapitel noch genauer betrachtet werden.

2 Modellbildung

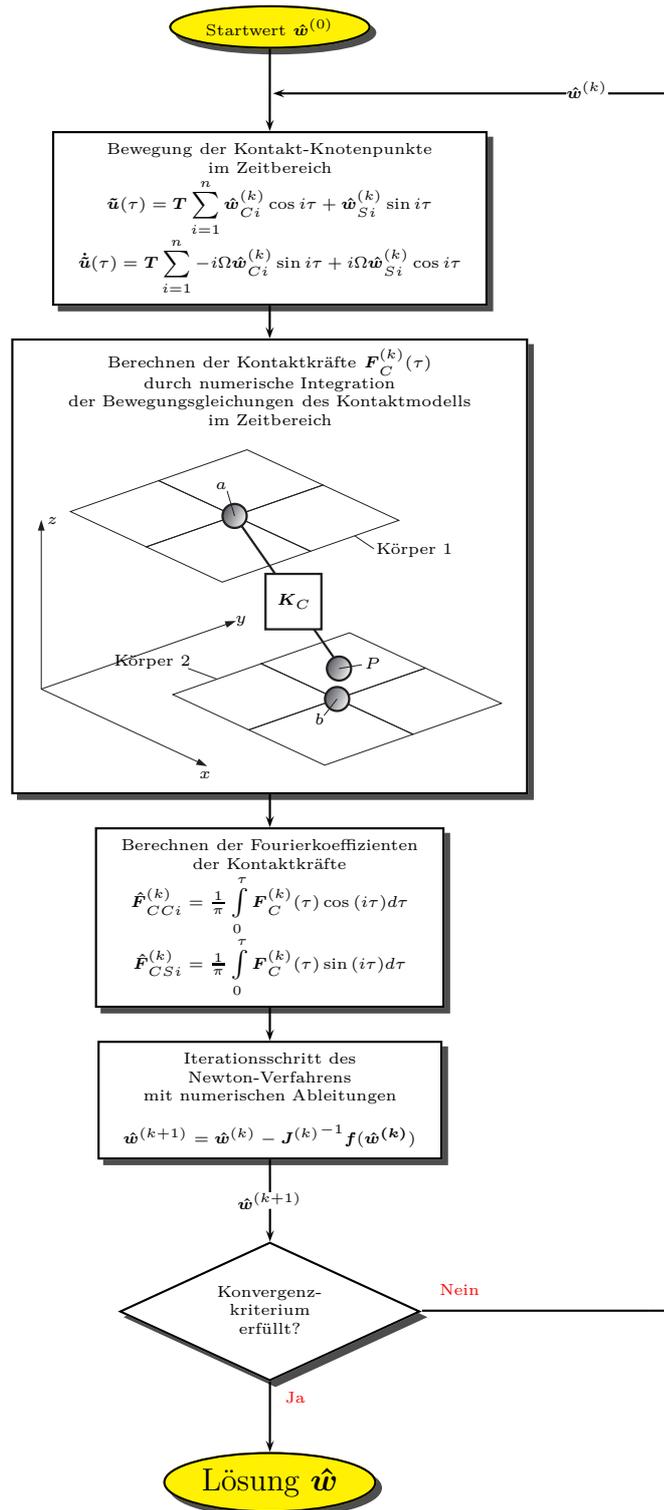
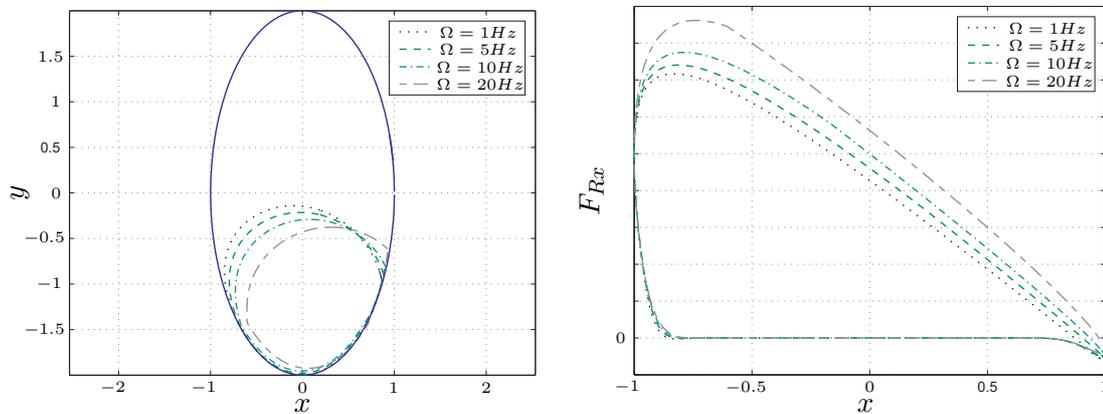


Abbildung 2.17: Hybrides Frequenz- Zeitbereich- Berechnungsverfahren

2.3.5 Zeitliche Integration des Kontaktmodells

SEXTRO (2007) verwendet einen massebehafteten Kontaktpunkt und eine kontinuierliche Reibkennlinie. Durch die Verwendung eines massebehafteten Kontaktpunktes lassen sich dessen Bewegungsgleichungen explizit darstellen. Bei Verwendung einer kontinuierlichen Reibkennlinie werden Unstetigkeiten, bei der Bewegungsumkehr des Kontaktpunktes vermieden. Damit wird die zeitliche Integration der Bewegungsgleichungen des Kontaktpunktes erleichtert.

Der Einfluss der Masse und damit der Trägheitskräfte auf die Bewegung des Kontaktelements hängt von der Frequenz Ω der Erregerbewegung ab (siehe [Abbildung 2.18](#)). Bei hohen Erregerfrequenzen steigt der Einfluss der Trägheitskräfte auf die Bewegung des Kontaktpunktes und damit auch auf die Kontaktkräfte.



(a) Einfluss auf die Bewegung des Kontaktpunktes. Die durchgezogene, blaue Linie beschreibt die Bahn der relativen Verschiebung der beiden Erregerknoten.

(b) Einfluss der Trägheitskräfte auf die Kontaktkräfte

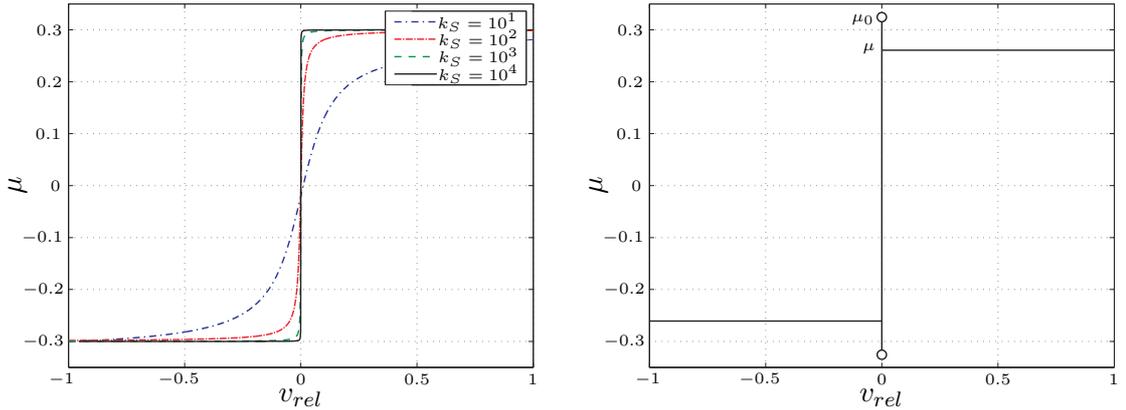
Abbildung 2.18: Mit zunehmender Erregerfrequenz Ω steigt der Einfluss der Trägheitskräfte auf die Bewegung des Kontaktpunktes und damit auch auf die Kontaktkräfte.

Ein stetiger Verlauf der Reibkennlinie (siehe [Abbildung 2.19a](#))

$$\mu = \mu_{max} \frac{2}{\pi} \arctan(k_s v_{rel}) \quad (2.135)$$

erleichtert die numerische, zeitliche Integration des Kontaktmodells. Ist der Bewegungszustand des Kontaktpunktes in der Nähe des Haftens wird das System jedoch sehr steif und die Schrittweite des Integrators kann nicht ausreichend genug reduziert werden um Haften tatsächlich wiederzugeben.

2 Modellbildung



(a) Stetige Kennlinie des Reibungskoeffizienten

(b) Unstetige Kennlinie des Reibungskoeffizienten

Abbildung 2.19: Kennlinien des Reibungskoeffizienten abhängig von der Gleitgeschwindigkeit

Im Folgenden ist die Masse des Kontaktpunktes P Null (siehe [Abbildung 2.20](#)). Der

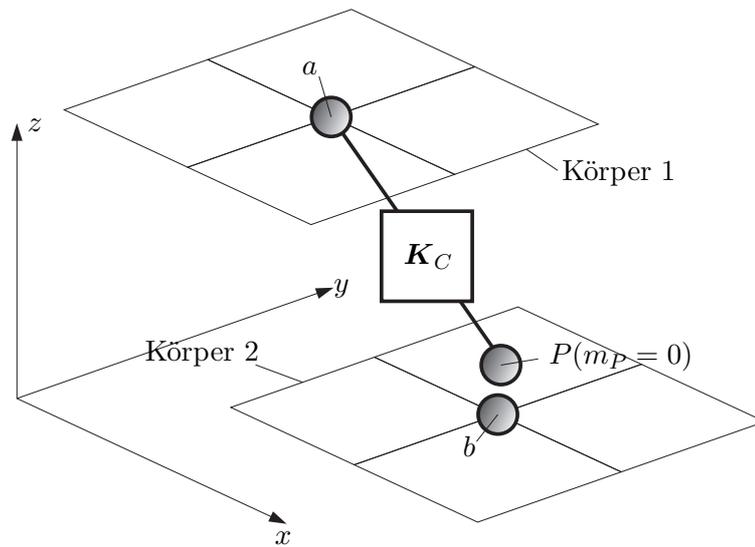


Abbildung 2.20: Kontaktmodell mit masselosem Kontaktpunkt P

Kontaktpunkt P ist über eine nichtlineare Feder mit der Kontaktsteifigkeit

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} c_{Rx} & 0 & 0 \\ 0 & c_{Ry} & 0 \\ 0 & 0 & c_N \end{bmatrix}, \quad (2.136)$$

die eine elastische Kontaktschicht repräsentiert, mit dem Knoten a an der Oberfläche des einen Körpers verbunden. Zwischen dem Kontaktpunkt P und dem Knoten b der Ober-

fläche des zweiten Körpers wirkt Coulomb'sche Reibung. Es wird eine unstetige Kennlinie des Reibungskoeffizienten, abhängig von der Relativgeschwindigkeit im Kontakt (siehe [Abbildung 2.19b](#)) verwendet. Es wird zwischen einem Haftungskoeffizienten μ_0 bei Relativgeschwindigkeit Null und einem Gleitreibungskoeffizienten μ unterschieden.

Es ergeben sich damit drei verschiedenen Bewegungszustände, die der Kontaktpunkt P einnehmen kann:

- **Seperation**

Der Kontaktpunkt P und der elastische Körper 2 berühren sich nicht. Da der Kontaktpunkt masselos ist und daher keine Trägheit besitzt, bewegt dieser sich synchron mit dem Erregerknoten a am elastischen Körper 1 mit

$$\begin{aligned} u_{Px} &= \tilde{u}_{ax}(\tau) \\ u_{Py} &= \tilde{u}_{ay}(\tau). \end{aligned} \tag{2.137}$$

Die Kontaktkräfte sind damit:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= 0 \\ F_{Ry} &= 0 \\ F_N &= 0 \end{aligned} \tag{2.138}$$

- **Haften**

Der Kontaktpunkt P und der elastische Körper 2 berühren sich. Da der Kontaktpunkt haftet, bleibt seine Position relativ zum Körper 2 unverändert:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{Px} &= \dot{\tilde{u}}_{bx}(\tau) \\ \dot{u}_{Py} &= \dot{\tilde{u}}_{by}(\tau). \end{aligned} \tag{2.139}$$

Die Kontaktkräfte in tangentialer Richtung sind die Federkräfte der elastischen Kontaktschicht

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= -c_{Rx}(\tilde{u}_{bx}(\tau) - \tilde{u}_{ax}(\tau)), \\ F_{Ry} &= -c_{Ry}(\tilde{u}_{by}(\tau) - \tilde{u}_{ay}(\tau)), \end{aligned} \tag{2.140}$$

und die Normalkraft ist, wie in [Unterabschnitt 2.2.3](#) beschrieben,

$$F_N = F_N(\tilde{u}_{bz}(\tau) - \tilde{u}_{az}(\tau)). \tag{2.141}$$

- **Gleiten**

Der Kontaktpunkt P und der elastische Körper 2 berühren sich. Der Knotenpunkt b am Körper 2 und der Kontaktknotenpunkt P bewegen sich jedoch relativ zueinander.

2 Modellbildung

Das Gleichgewicht für den Kontaktpunkt P lautet damit:

$$\begin{aligned}
 -c_{Rx}(u_{Px} - \tilde{u}_{ax}(\tau)) - F_N \mu \frac{\dot{u}_{Px} - \dot{\tilde{u}}_{bx}(\tau)}{\sqrt{(\dot{u}_{Px} - \dot{\tilde{u}}_{bx}(\tau))^2 + (\dot{u}_{Py} - \dot{\tilde{u}}_{by}(\tau))^2}} &= 0 \\
 -c_{Ry}(u_{Py} - \tilde{u}_{ay}(\tau)) - F_N \mu \frac{\dot{u}_{Py} - \dot{\tilde{u}}_{by}(\tau)}{\sqrt{(\dot{u}_{Px} - \dot{\tilde{u}}_{bx}(\tau))^2 + (\dot{u}_{Py} - \dot{\tilde{u}}_{by}(\tau))^2}} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.142}$$

Die tangentialen Kontaktkräfte sind wiederum im Gleichgewicht mit den Federkräften der gedachten elastischen Kontaktschicht

$$\begin{aligned}
 F_{Rx} &= -c_{Rx}(u_{Px} - \tilde{u}_{ax}(\tau)), \\
 F_{Ry} &= -c_{Ry}(u_{Py} - \tilde{u}_{ay}(\tau)),
 \end{aligned} \tag{2.143}$$

und die Normalkraft ist

$$F_N = F_N(\tilde{u}_{bz}(\tau) - \tilde{u}_{az}(\tau)). \tag{2.144}$$

Um die Bewegung des Punktes zu ermitteln, ist es wichtig die Übergänge zwischen diesen einzelnen Zuständen exakt zu bestimmen und die Anfangsbedingungen des neuen Zustands richtig zu setzen. Für die anschließende Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte ist es zudem notwendig, den eingeschwungenen Zustand für den Kontaktpunkt zu erreichen. Um den eingeschwungenen Zustand zu erreichen, muss die numerische Integration über mehrere Perioden erfolgen. Die Übergänge der einzelnen Zustände sind festgelegt durch:

- **Übergang Separation - Haften**

Die Bedingungen, dass die beiden elastischen Körper in Kontakt kommen lauten

$$\tilde{u}_{bz} - \tilde{u}_{az} = 0 \tag{2.145}$$

und

$$\dot{\tilde{u}}_{bz} - \dot{\tilde{u}}_{az} > 0. \tag{2.146}$$

Diese beiden Bedingungen sind notwendig um den Übergang von Separation auf Haften zu detektieren, aber nicht hinreichend. Zusätzlich ist es notwendig die Änderung der Kontaktkräfte in tangentialer und normaler Richtung zum Zeitpunkt des Auftreffens zu überprüfen. Um in den Zustand des Haftens zu kommen muss die Bedingung

$$\mu_0 \frac{d}{dt} |F_N| > \frac{d}{dt} |F_R| \tag{2.147}$$

erfüllt sein.

- **Übergang Seperation - Gleiten**

Die Bedingungen, dass die beiden elastischen Körper in Kontakt kommen lauten

$$\tilde{u}_{bz} - \tilde{u}_{az} = 0 \quad (2.148)$$

und

$$\dot{\tilde{u}}_{bz} - \dot{\tilde{u}}_{az} > 0. \quad (2.149)$$

Damit der Kontaktpunkt tatsächlich gleitet, muss zusätzlich die Bedingung

$$\mu_0 \frac{d}{dt} |F_N| \leq \frac{d}{dt} |F_R| \quad (2.150)$$

erfüllt sein.

- **Übergang Haften - Gleiten**

Um vom Haften ins Gleiten zu kommen muss die Grenzbedingung

$$\mu_0 F_N = |F_R| \quad (2.151)$$

erreicht werden. Damit der Kontaktpunkt tatsächlich gleitet muss

$$\mu_0 \frac{d}{dt} |F_N| < \frac{d}{dt} |F_R| \quad (2.152)$$

sein.

- **Übergang Haften - Seperation**

Die Bedingungen für den Übergang des Kontaktpunktes von Haften auf Seperation lauten

$$\tilde{u}_{bz} - \tilde{u}_{az} = 0 \quad (2.153)$$

und

$$\dot{\tilde{u}}_{bz} - \dot{\tilde{u}}_{az} < 0. \quad (2.154)$$

- **Übergang Gleiten - Haften**

Damit ein Übergang von Gleiten auf Haften stattfindet, muss die Relativgeschwindigkeit des Kontaktpunktes zur Geschwindigkeit des Knotens b des Körpers 2

$$v_{rel} = 0 \quad (2.155)$$

sein, wobei

$$v_{rel} = \sqrt{(u_{Px} - \tilde{u}_{bx}(t))^2 + (u_{Py} - \tilde{u}_{by}(t))^2} \quad (2.156)$$

der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist. Um im Zustand des Haftens zu verharren muss zusätzlich

$$\mu_0 \frac{d}{dt} |F_N| > \frac{d}{dt} |F_R| \quad (2.157)$$

erfüllt werden.

- **Übergang Gleiten - Separation**

Die Bedingungen für den Übergang des Kontaktpunktes von Gleiten auf Separation lauten

$$\tilde{u}_{bz} - \tilde{u}_{az} = 0 \quad (2.158)$$

und

$$\dot{\tilde{u}}_{bz} - \dot{\tilde{u}}_{az} < 0. \quad (2.159)$$

2.3.6 Vorabberechnung der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte

Die numerische Integration im Zeitbereich nimmt einen wesentlichen Anteil an der Zeit zur Berechnung der Systemantwort zweier verschraubter, elastischer Körper mit ebenen Kontaktflächen in Anspruch. Die Zeit zum Lösen des nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystems lässt sich drastisch reduzieren, wenn die Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte nicht während der Ausführung des Newton-Algorithmus, sondern vorab berechnet werden. Um eine derartige Vorkalkulation durchzuführen müssen weitere Annahmen getroffen werden. Durch diese Vereinfachungen wird die Genauigkeit des Ergebnisses reduziert. Annahmen, die getroffen werden müssen damit die Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte sinnvoll vorab berechnet und in Kennfeldern (siehe [Abbildung 2.25](#)) abgelegt werden können, sind:

1. Elliptische Relativbewegung zweier zugeordneter Kontaktknoten a und b .

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ax}(\tau) &= \hat{u}_{axC1} \cos \tau + \hat{u}_{axS1} \sin \tau \\ \tilde{u}_{ay}(\tau) &= \hat{u}_{ayC1} \cos \tau + \hat{u}_{ayS1} \sin \tau \\ \tilde{u}_{bx}(\tau) &= \hat{u}_{bxC1} \cos \tau + \hat{u}_{bxS1} \sin \tau \\ \tilde{u}_{by}(\tau) &= \hat{u}_{byC1} \cos \tau + \hat{u}_{byS1} \sin \tau \end{aligned} \quad (2.160)$$

2. Während einer Periode wirkt, jedoch nur für die Berechnung der Reibkräfte im Kontakt, eine mittlere, konstante Normalkraft \hat{F}_{N0} zwischen den beiden einander zugeordneten Kontaktknoten a und b .
3. Isotropes tangenciales Kontaktverhalten. D.h.: Die konstanten tangentialen Kontaktsteifigkeiten c_{Rx} und c_{Ry} , die sich abhängig von der mittleren, konstanten Normalkraft \hat{F}_{N0} berechnen lassen, sind gleich groß.

4. Der Haftreibungskoeffizient μ_0 und der Gleitreibungskoeffizient μ sind ebenfalls gleich groß.

Bestimmen der Fourierkoeffizienten \hat{F}_{NCi} , \hat{F}_{NSi} und des konstanten Anteils der Normalkraft \hat{F}_{N0}

In der Finiten Elemente Rechnung wurde eine konstante Normalkraftverteilung \mathbf{F}_{N0} aus dem statischen Gleichgewicht ermittelt. Zu der normierten, konstanten Normalkraft zwischen den beiden Kontaktknoten a und b

$$F_{N0}^* = \frac{F_{N0}}{c_{N0}R_Z} \quad (2.161)$$

wird durch Lösen der nichtlinearen Gleichung 2.82 die zugehörige, normierte, statische Verschiebung in Normalenrichtung

$$u_{z0}^* = \frac{u_{z0}}{R_Z} \quad (2.162)$$

iterativ berechnet. Die normierte Erregerbewegung in Normalenrichtung für elliptische Relativbewegung von zwei einander zugeordneten Kontaktpunkten ist

$$\tilde{u}_z^*(\tau) = u_{z0}^* - \hat{u}_z^* \cos(\tau - \varphi), \quad (2.163)$$

mit der normierten, relativen Verschiebungsamplitude

$$\hat{u}_z^* = \frac{\sqrt{(u_{azC1} - u_{bzC1})^2 + (u_{azS1} - u_{bzS1})^2}}{R_Z} \quad (2.164)$$

und dem Phasenwinkel

$$\varphi = \arctan \frac{u_{azS1} - u_{bzS1}}{u_{azC1} - u_{bzC1}}. \quad (2.165)$$

Die Fourierkoeffizienten der normierten Normalkraft F_N^* zur Erregerbewegung $\tilde{u}_z^*(\tau)$, abhängig von der normierten statischen Relativverschiebung u_{z0}^* und der Erregeramplitude \hat{u}_z^* , jedoch einer Phasenverschiebung von $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{N0}^* \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N^* d\tau, \\ \hat{F}_{NCi}^* \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_N^* \cos(i\tau) d\tau, \\ \hat{F}_{NSi}^* \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_N^* \sin(i\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.166)$$

2 Modellbildung

werden in Kennfeldern abgelegt. Die Fourierkoeffizienten der Sinus-Anteile $\hat{F}_{NSi}^* \Big|_{\varphi=0}$ sind identisch Null. Die normierten Fourierkoeffizienten der Normalkraft zur tatsächlichen Phasenverschiebung φ berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\hat{F}_{N0}^* &= \hat{F}_{N0}^* \Big|_{\varphi=0}, \\ \hat{F}_{NCi}^* &= \hat{F}_{NCi}^* \Big|_{\varphi=0} \cos i\varphi, \\ \hat{F}_{NSi}^* &= \hat{F}_{NCi}^* \Big|_{\varphi=0} \sin i\varphi,\end{aligned}\tag{2.167}$$

mit den normierten Fourierkoeffizienten der Normalkraft

$$\begin{aligned}\hat{F}_{NCi}^* &= \frac{\hat{F}_{NCi}}{c_{N0}R_Z}, \\ \hat{F}_{NSi}^* &= \frac{\hat{F}_{NSi}}{c_{N0}R_Z}.\end{aligned}\tag{2.168}$$

Der konstante Fourierkoeffizient entspricht einer mittleren, konstanten Normalkraft

$$\hat{F}_{N0} = \hat{F}_{N0}^* c_{N0} R_Z,\tag{2.169}$$

die während einer Periode wirkt.

Normierung der Bewegungsgleichungen des Kontaktmodells und Transformation dieser in den Erregerpunkt b des zweiten Körpers

Um die Anzahl der Eingangsparameter der Fourierkoeffizientenkennfelder bezüglich der Reibungskräfte zu reduzieren, werden die normierten Bewegungsgleichungen des Kontaktpunktes relativ zum Knotenpunkt b des zweiten Körpers beschrieben. Für Gleiten lauten die normierten Bewegungsgleichungen relativ zum Knoten b

$$\begin{aligned}- (u_{Px}^* - \tilde{u}_x^*(\tau)) - \frac{\dot{u}_{Px}^*}{\sqrt{\dot{u}_{Px}^{*2} + \dot{u}_{Py}^{*2}}} &= 0 \\ - (u_{Py}^* - \tilde{u}_y^*(\tau)) - \frac{\dot{u}_{Py}^*}{\sqrt{\dot{u}_{Px}^{*2} + \dot{u}_{Py}^{*2}}} &= 0,\end{aligned}\tag{2.170}$$

mit den normierten Relativverschiebungen des Kontaktpunktes

$$\begin{aligned}u_{Px}^* &= (u_{Px} - \tilde{u}_{bx}) \frac{c_R}{\hat{F}_{N0}\mu} \\ u_{Py}^* &= (u_{Py} - \tilde{u}_{by}) \frac{c_R}{\hat{F}_{N0}\mu}.\end{aligned}\tag{2.171}$$

2 Modellbildung

Die elliptische Relativbewegung der beiden Erregerpunkte a und b ist

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x^*(\tau) &= \hat{u}_{xC1}^* \cos \tau + \hat{u}_{xS1}^* \sin \tau \\ \tilde{u}_y^*(\tau) &= \hat{u}_{yC1}^* \cos \tau + \hat{u}_{yS1}^* \sin \tau,\end{aligned}\tag{2.172}$$

mit den normierten Fourierkoeffizienten der relativen Erregerbewegung

$$\begin{aligned}\hat{u}_{xC1}^* &= (\hat{u}_{axC1} - \hat{u}_{bxC1}) \frac{cR}{\hat{F}_{N0}\mu}, & \hat{u}_{xS1}^* &= (\hat{u}_{axS1} - \hat{u}_{bxS1}) \frac{cR}{\hat{F}_{N0}\mu}, \\ \hat{u}_{yC1}^* &= (\hat{u}_{ayC1} - \hat{u}_{byC1}) \frac{cR}{\hat{F}_{N0}\mu}, & \hat{u}_{yS1}^* &= (\hat{u}_{ayS1} - \hat{u}_{byS1}) \frac{cR}{\hat{F}_{N0}\mu}.\end{aligned}\tag{2.173}$$

Transformation der Bewegungsgleichungen des Kontaktmodells in die Hauptachsen der elliptischen Erregerbewegung

Die elliptische Erregerbewegung kann in Hauptachsenlage transformiert und damit können die Eingangsgrößen für die Kennfelder der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte um weitere zwei reduziert werden (siehe [Abbildung 2.21](#)).

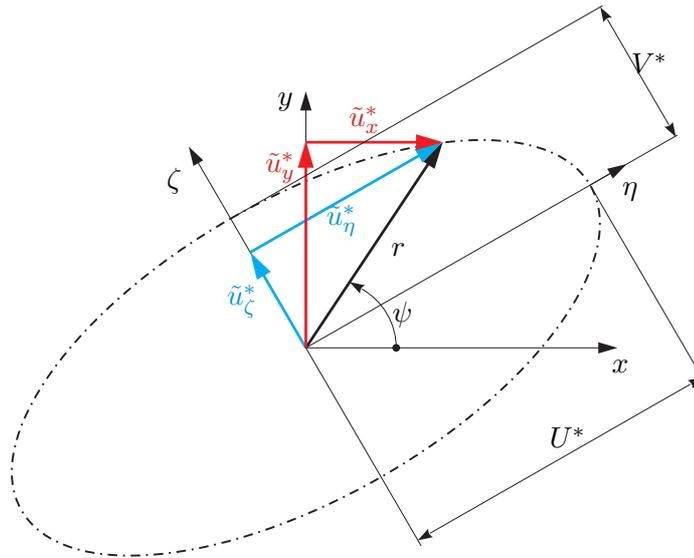


Abbildung 2.21: Transformation der Erregerbewegung in Ellipsenhauptachse

Die Ellipse der Erregerbewegung kann in Polarkoordinaten durch den Radius

$$r(\tau) = \sqrt{\tilde{u}_x^{*2}(\tau) + \tilde{u}_y^{*2}(\tau)}\tag{2.174}$$

und den Winkel

$$\psi(\tau) = \arctan \frac{\tilde{u}_y^*(\tau)}{\tilde{u}_x^*(\tau)}\tag{2.175}$$

2 Modellbildung

beschrieben werden. Der maximale Radius, und damit die Hauptachse der Ellipse ergibt sich aus den Forderungen

$$\frac{dr}{d\tau} = 0 \text{ und } \frac{d^2r}{d\tau^2} < 0. \quad (2.176)$$

Damit ist die zeitliche Lage der Hauptachsen der Ellipse durch

$$\tau_m = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2(\hat{u}_{xC1}^* \hat{u}_{xS1}^* + \hat{u}_{yC1}^* \hat{u}_{yS1}^*)}{\hat{u}_{xC1}^{*2} - \hat{u}_{xS1}^{*2} + \hat{u}_{yC1}^{*2} - \hat{u}_{yS1}^{*2}} \right) \quad (2.177)$$

bestimmt. Die Länge der großen Halbachse der Erreger-Ellipsenbahn ist damit

$$U^* = \sqrt{\tilde{u}_x^{*2}(\tau_m) + \tilde{u}_y^{*2}(\tau_m)} \quad (2.178)$$

und die der kleinen Halbachse

$$V^* = \sqrt{\tilde{u}_x^{*2}(\tau_m + \frac{\pi}{2}) + \tilde{u}_y^{*2}(\tau_m + \frac{\pi}{2})}. \quad (2.179)$$

Des Weiteren muss die richtige Drehrichtung, mit der der Erregerpunkt die Ellipse durchläuft, bestimmt werden (vergleiche [Abbildung 2.22](#)). Die Winkelgeschwindigkeit mit der die Erregerellipse durchlaufen wird ist

$$\dot{\psi}(\tau) = \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tilde{u}_y^*}{\tilde{u}_x^*}\right)^2} \cdot \frac{\dot{\tilde{u}}_y^* \tilde{u}_x^* - \tilde{u}_y^* \dot{\tilde{u}}_x^*}{\tilde{u}_y^{*2}}. \quad (2.180)$$

Da sich der Drehsinn während eines Iterationsschrittes des Newton-Algorithmus nicht ändert ist es ausreichend diesen zu einem beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen. Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\psi}(\tau = 0) = \frac{(\hat{u}_{xS1}^* \hat{u}_{yC1}^* - \hat{u}_{xC1}^* \hat{u}_{yS1}^*) \Omega}{\hat{u}_{xC1}^{*2} + \hat{u}_{yC1}^{*2}}. \quad (2.181)$$

Der Drehsinn $\dot{\psi}$ ist somit genau dann positiv, wenn

$$\hat{u}_{xS1}^* \hat{u}_{yC1}^* - \hat{u}_{xC1}^* \hat{u}_{yS1}^* > 0 \quad (2.182)$$

ist. Die normierten Bewegungsgleichungen für den Kontaktpunkt in Lage der Hauptachsen der elliptischen Erreger-Relativbewegung für einen positiven Drehsinn, d.h. für $\dot{\psi} > 0$, lauten nun für:

• **Haften**

$$\begin{aligned}\dot{u}_{P\eta}^* &= 0 \\ \dot{u}_{P\zeta}^* &= 0\end{aligned}\tag{2.183}$$

Die normierten, tangentialen Kontaktkräfte sind im Gleichgewicht mit den normierten Federkräften

$$\begin{aligned}F_{R\eta}^* &= U^* \cos \tau, \\ F_{R\zeta}^* &= V^* \sin \tau.\end{aligned}\tag{2.184}$$

• **Gleiten**

$$\begin{aligned}- (u_{P\eta}^* - U^* \cos \tau) - \frac{\dot{u}_{P\eta}^*}{\sqrt{\dot{u}_{P\eta}^{*2} + \dot{u}_{P\zeta}^{*2}}} &= 0 \\ - (u_{P\zeta}^* - V^* \sin \tau) - \frac{\dot{u}_{P\zeta}^*}{\sqrt{\dot{u}_{P\eta}^{*2} + \dot{u}_{P\zeta}^{*2}}} &= 0\end{aligned}\tag{2.185}$$

Die normierten, tangentialen Kontaktkräfte sind wiederum im Gleichgewicht mit den normierten Federkräften

$$\begin{aligned}F_{R\eta}^* &= -(u_{P\eta}^* - U^* \cos \tau), \\ F_{R\zeta}^* &= -(u_{P\zeta}^* - V^* \sin \tau).\end{aligned}\tag{2.186}$$

Die Übergänge zwischen den Bewegungszuständen Haften und Gleiten sind definiert durch:

• **Übergang Haften - Gleiten**

$$F_F^* > 1\tag{2.187}$$

• **Übergang Gleiten - Haften**

$$\sqrt{\dot{u}_{P\eta}^{*2} + \dot{u}_{P\zeta}^{*2}} = 0 \text{ und } F_F^* \leq 1\tag{2.188}$$

Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte

Die normierten Reibungs- bzw. Kontaktkräfte $F_{R\eta}^*$ und $F_{R\zeta}^*$ werden aus der numerischen Integration des Kontaktmodells bis zum eingeschwungenen Zustand bestimmt. Die normierten Fourierkoeffizienten der Reibungskräfte in Hauptachsenlage berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\hat{F}_{R\eta C i}^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{R\eta}^* \cos(i\tau) d\tau, & \hat{F}_{R\eta S i}^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{R\eta}^* \sin(i\tau) d\tau, \\ \hat{F}_{R\zeta C i}^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{R\zeta}^* \cos(i\tau) d\tau, & \hat{F}_{R\zeta S i}^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{R\zeta}^* \sin(i\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{2.189}$$

2 Modellbildung

BALMER (1993) zeigt, dass für bestimmte Bewegungszustände die Fourierkoeffizienten der normierten Reibungskräfte analytisch bestimmt werden können. Die analytische Berechnung ist dann möglich, wenn der Kontaktpunkt haftet. Beschreibt die Trajektorie des Erregerpunktes eine Kreisbahn, kann für die Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte ebenfalls eine geschlossene Lösung ermittelt werden. Der Kontaktpunkt haftet während der gesamten Periode, wenn

$$U^* < 1 \text{ und } V^* < 1 \quad (2.190)$$

sind. Die Fourierkoeffizienten der Grundharmonischen der normierten Kontaktkräfte ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \hat{F}_{R\eta C1}^* &= U^* \\ \hat{F}_{R\eta S1}^* &= 0 \\ \hat{F}_{R\zeta C1}^* &= 0 \\ \hat{F}_{R\zeta S1}^* &= V^* \end{aligned} \quad (2.191)$$

und die Fourierkoeffizienten der höherfrequenten Anteile der normierten Reibungskräfte zu

$$\begin{aligned} \hat{F}_{R\eta C i}^* &= 0 \\ \hat{F}_{R\eta S i}^* &= 0 \\ \hat{F}_{R\zeta C i}^* &= 0 \\ \hat{F}_{R\zeta S i}^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.192)$$

für $i > 1$. Die Fourierkoeffizienten der höherfrequenten Anteile sollen des Weiteren auch als Fourierkoeffizienten höherer Ordnung bezeichnet werden. Für eine kreisförmige Erregerbewegung der Erregerknoten, wobei

$$U^* = V^* \stackrel{!}{=} W^* \quad (2.193)$$

ist, ergibt sich für die Trajektorie des Kontaktpunktes ebenfalls eine Kreisbahn. Die analytische Lösung der Fourierkoeffizienten der normierten Kontaktkräfte der Grundharmonischen ergibt damit

$$\begin{aligned} \hat{F}_{R\eta C1}^* &= \frac{1}{W^*} \\ \hat{F}_{R\eta S1}^* &= -\frac{\sqrt{W^{*2} - 1}}{W^*} \\ \hat{F}_{R\zeta C1}^* &= \frac{\sqrt{W^{*2} - 1}}{W^*} \\ \hat{F}_{R\zeta S1}^* &= \frac{1}{W^*} \end{aligned} \quad (2.194)$$

2 Modellbildung

und die geschlossene Lösung für die Fourierkoeffizienten der höherfrequenten Anteile der normierten Reibungskräften

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_{R\eta C i}^* &= 0 \\
 \hat{F}_{R\eta S i}^* &= 0 \\
 \hat{F}_{R\zeta C i}^* &= 0 \\
 \hat{F}_{R\zeta S i}^* &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.195}$$

für $i > 1$.

Besonderes Augenmerk muss auf den Drehsinn der Erregerbewegung gelegt werden (siehe [Abbildung 2.22](#)). Bei gleichen Amplituden der normierten Erregerbewegung U^* und V^* , je-

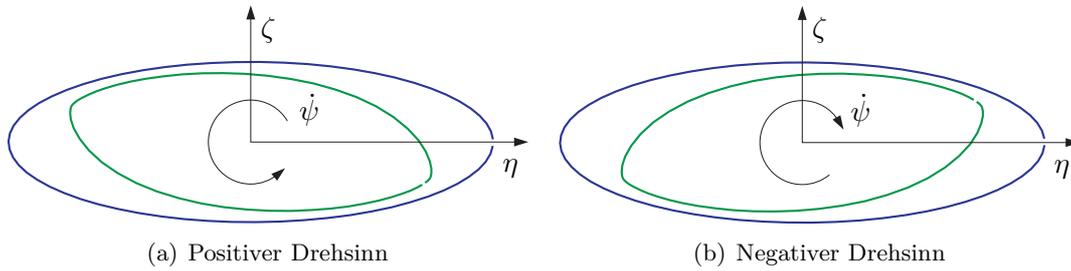


Abbildung 2.22: Einfluss des Drehsinns der Erregerpunktbewegung auf die Bahn des Kontaktpunktes

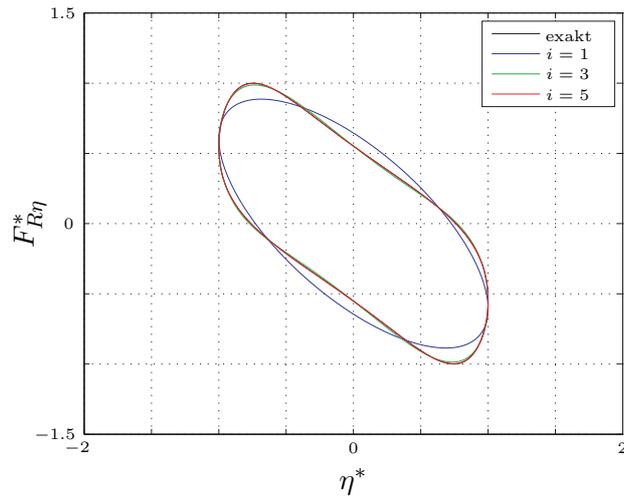
doch umgekehrtem Drehsinn ergeben sich zwei zueinander spiegelbildliche Trajektorien der Kontaktpunkte. Der tatsächliche Drehsinn der Erregerbewegung muss auch in den Fourierkoeffizienten der tangentialen Kontaktkräfte berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_{R\eta C i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} < 0 &= \hat{F}_{R\eta C i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} > 0 \\
 \hat{F}_{R\eta S i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} < 0 &= \hat{F}_{R\eta S i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} > 0 \\
 \hat{F}_{R\zeta C i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} < 0 &= -\hat{F}_{R\zeta C i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} > 0 \\
 \hat{F}_{R\zeta S i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} < 0 &= -\hat{F}_{R\zeta S i}^*(U^*, V^*) \quad \forall \quad \dot{\psi} > 0
 \end{aligned}
 \tag{2.196}$$

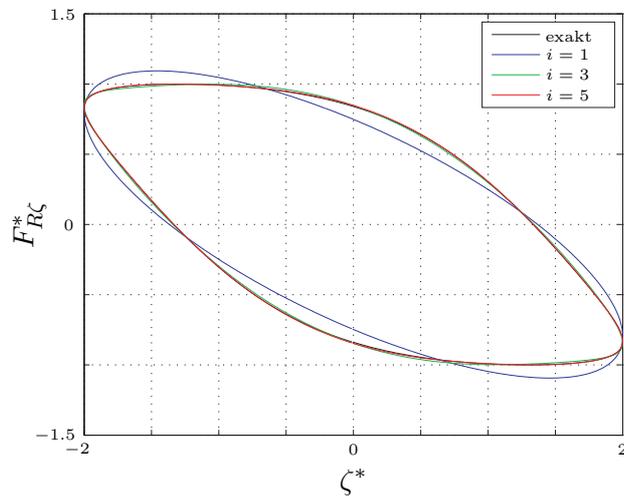
In [SEXTRO \(1997\)](#) wird auf den Einfluss der Fourierkoeffizienten höherer Ordnung auf die Approximation der Reibkräfte durch eine Fourierreihe eingegangen. [Abbildung 2.23](#) zeigt an einem ausgewählten Beispiel die normierten, tangentialen Kontaktkräfte aufgetragen über den normierten, relativen Verschiebungsamplituden der Erregerbewegung. Man sieht die numerisch „exakte“ Lösung, sowie Näherungen der tangentialen Kontaktkräfte mittels Fourierreihen mit unterschiedlicher Anzahl berücksichtigter Glieder.

[SEXTRO](#) zeigt, dass bei konstanter Normalkraft kein Einfluss auf die Näherung der tangentialen Kontaktkräfte durch die Fourierkoeffizienten mit gerader Ordnungszahl i besteht, da diese identisch Null sind. Die Berücksichtigung von Termen dritter Ordnung bringt eine

2 Modellbildung



(a) η^* -Richtung



(b) ζ^* -Richtung

Abbildung 2.23: Approximation der Reibungskräfte durch eine Fourierreihe. Gewählte normierte Erregeramplituden $U^* = 1$ und $V^* = 2$.

erhebliche Verbesserung der Näherungslösung, gegenüber der Annahme rein harmonischer Kontaktkräfte (siehe [Abbildung 2.23](#)). Der Faktor

$$E_\eta = \frac{\hat{F}_{R\eta C3}^2 + \hat{F}_{R\eta S3}^2 + \hat{F}_{R\eta C5}^2 + \hat{F}_{R\eta S5}^2 + \dots}{\hat{F}_{R\eta C1}^2 + \hat{F}_{R\eta S1}^2 + \hat{F}_{R\eta C3}^2 + \hat{F}_{R\eta S3}^2 + \dots} \quad (2.197)$$

stellt ein Maß für den Einfluss der Fourierkoeffizienten $\hat{F}_{R\eta C_i}$ und $\hat{F}_{R\eta S_i}$ höherer Ordnung auf die Näherung der Reibkraft in η -Richtung dar. [Abbildung 2.24](#) zeigt den Faktor E_η

2 Modellbildung

aufgetragen über den normierten Erregeramplituden U^* und V^* . Für eine rein kreisförmige Erregung mit $U^* = V^*$ ist der Faktor E_η identisch Null, da die Reibungskräfte keine höherfrequenten Anteile besitzen. Der Faktor E_η ist ebenfalls identisch Null, wenn der Kontaktpunkt während der gesamten Periode haftet. Dies ist der Fall wenn $U^* \leq 1$ und $V^* \leq 1$ sind.

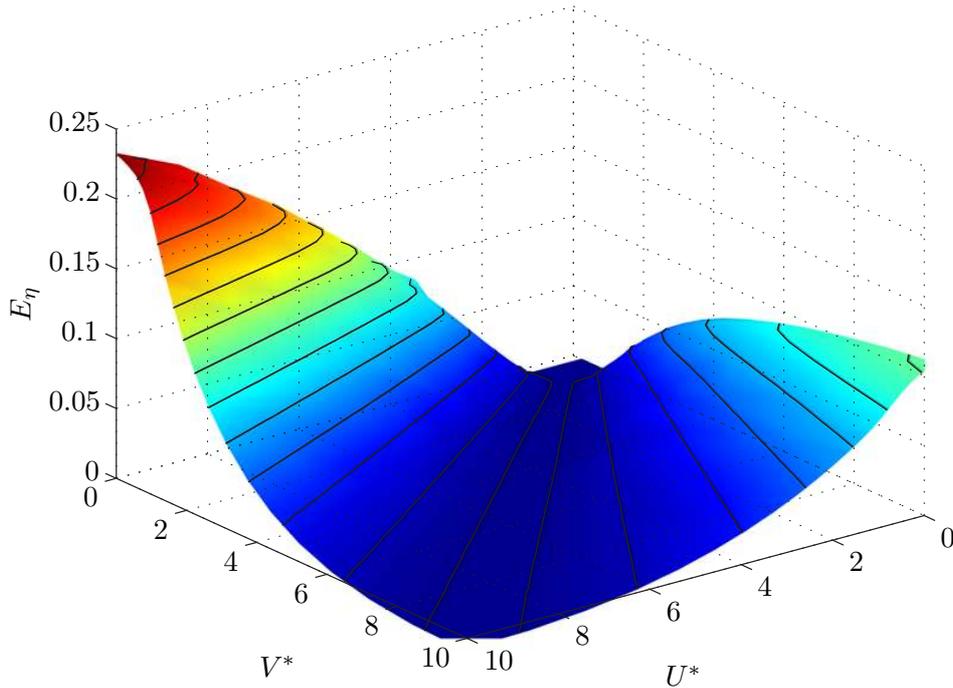


Abbildung 2.24: Einfluss der Fourierkoeffizienten höherer Ordnung

Analog zur Definition des Faktors E_η kann auch ein Faktor E_ζ , der ein Maß für den Einfluss der Fourierkoeffizienten $\hat{F}_{R\zeta Ci}$ und $\hat{F}_{R\zeta Si}$ höherer Ordnung der Reibkräfte in ζ -Richtung darstellt, eingeführt werden. Das Verhalten in tangentialer Richtung wurde isotrop, mit $c_{R\eta} = c_{R\zeta} = c_R$ angenommen. Deshalb ist die Fläche $E_\zeta(U^*, V^*)$ spiegelbildlich zur Fläche $E_\eta(U^*, V^*)$, mit einer Spiegelebene normal zur U^* - V^* -Ebene, geneigt unter 45° zur U^* -Achse bzw. zur V^* -Achse.

Abbildung 2.25 zeigt Kennfelder der Fourierkoeffizienten der normierten, tangentialen Kontaktkräfte.

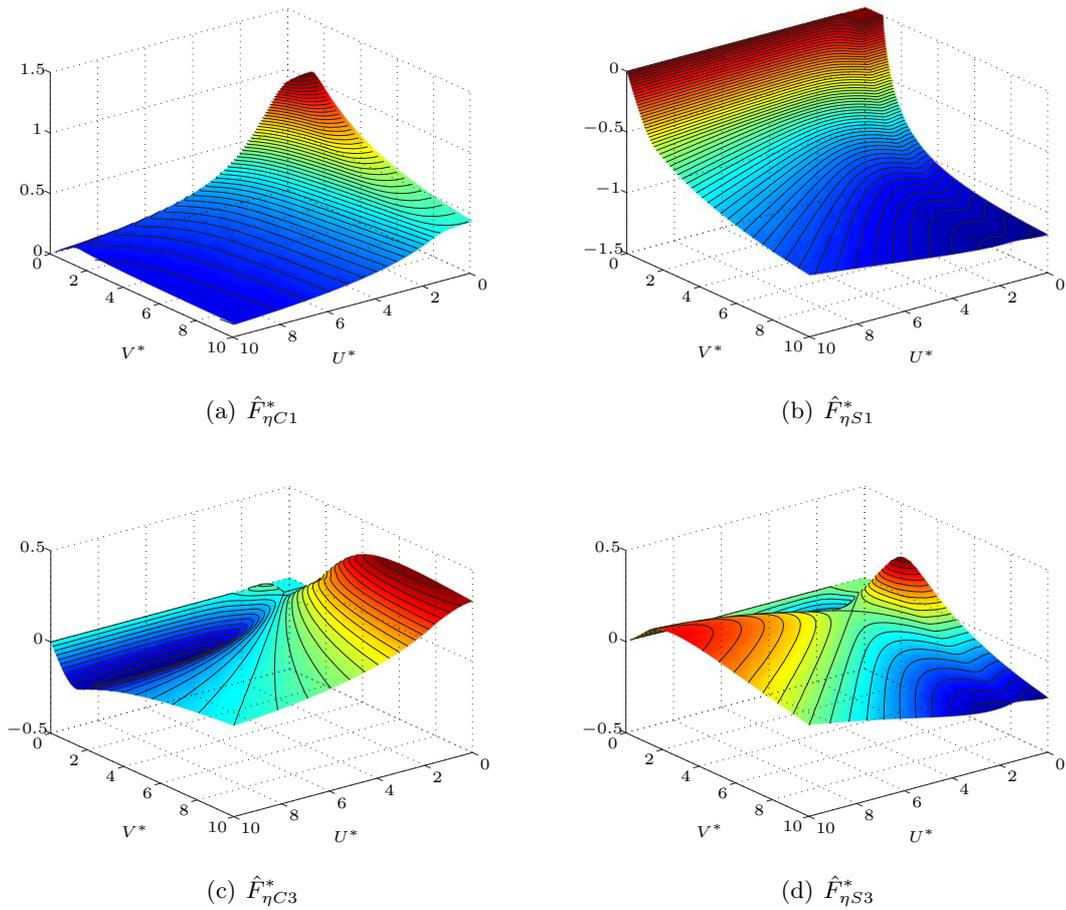


Abbildung 2.25: Kennfelder der Fourierkoeffizienten erster und dritter Ordnung der normierten Reibkräfte dargestellt im Ellipsen-Hauptachsen Koordinatensystem, aufgetragen über den normierten Erregeramplituden U^* und V^* .

Rücktransformation der Fourierkoeffizienten der Reibkräfte in die Ausgangslage

Das η, ζ -Koordinatensystem in den Hauptachsen der Erregerellipse wird durch eine Elementardrehung um die z -Achse in das ursprüngliche x, y -Knotenkoordinatensystem transformiert. Der Drehwinkel der Elementardrehung ist mit [Gleichung 2.175](#) und [Gleichung 2.177](#) (vergleiche [Abbildung 2.21](#))

$$\psi_m = -\psi(\tau_m). \quad (2.198)$$

Zu beachten ist auch, dass die zeitliche Lage der Erregerbewegung im Hauptachsenkoordinatensystem gegenüber der Erregerbewegung in der Ausgangslage um den Phasenwinkel τ_m verschoben ist. Damit ist auch die zeitliche Lage der normierten, tangentialen Kontaktkräfte in Hauptachsenlage gegenüber dem ursprünglichen Koordinatensystem um den Phasenwin-

2 Modellbildung

kel τ_m verschoben. Die normierten Reibungskräfte im x, y -Koordinatensystem sind

$$\begin{bmatrix} F_{Rx}^*(\tau) \\ F_{Ry}^*(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_m & -\sin \psi_m & 0 \\ \sin \psi_m & \cos \psi_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{R\eta}^*(\tau - \tau_m) \\ F_{R\zeta}^*(\tau - \tau_m) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.199)$$

Durch Fourierreihenentwicklung der normierten Reibungskräfte und anschließendem Koeffizientenvergleich ergibt sich damit der Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten der normierten Reibungskräfte im η, ζ -Koordinatensystem und im x, y -Koordinatensystem

$$\hat{\mathbf{F}}_{Rxyi} = {}^{0H}\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{F}}_{R\eta\zeta i}, \quad (2.200)$$

mit den Fourierkoeffizienten der normierten Reibungskräfte im Knotenkoordinatensystem in Ausgangslage

$$\hat{\mathbf{F}}_{Rxyi} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{RxCi} \\ \hat{F}_{RySi} \\ \hat{F}_{RyCi} \\ \hat{F}_{RySi} \end{bmatrix}, \quad (2.201)$$

der Transformationsmatrix der Fourierkoeffizienten

$${}^{0H}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos i\tau_m \cos \psi_m & -\sin i\tau_m \cos \psi_m & -\cos i\tau_m \sin \psi_m & \sin i\tau_m \sin \psi_m \\ \sin i\tau_m \cos \psi_m & \cos i\tau_m \cos \psi_m & -\sin i\tau_m \sin \psi_m & -\cos i\tau_m \sin \psi_m \\ \cos i\tau_m \sin \psi_m & -\sin i\tau_m \sin \psi_m & \cos i\tau_m \cos \psi_m & -\sin i\tau_m \cos \psi_m \\ \cos i\tau_m \sin \psi_m & \sin i\tau_m \sin \psi_m & \sin i\tau_m \cos \psi_m & \cos i\tau_m \cos \psi_m \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

und den Fourierkoeffizienten der normierten Reibungskräfte in Hauptachsenlage

$$\hat{\mathbf{F}}_{R\eta\zeta i} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{R\eta Ci} \\ \hat{F}_{R\eta Si} \\ \hat{F}_{R\zeta Ci} \\ \hat{F}_{R\zeta Si} \end{bmatrix}. \quad (2.203)$$

Die Umrechnung zwischen den normierten und den Fourierkoeffizienten der tatsächlichen Reibkräfte im Ausgangskordinatensystem erfolgt mit [Gleichung 2.142](#) und [Gleichung 2.170](#) durch

$$\begin{aligned} \hat{F}_{RxCi} &= \hat{F}_{RxCi}^* \hat{F}_{N0}\mu, & \hat{F}_{RySi} &= \hat{F}_{RySi}^* \hat{F}_{N0}\mu, \\ \hat{F}_{RyCi} &= \hat{F}_{RyCi}^* \hat{F}_{N0}\mu, & \hat{F}_{RySi} &= \hat{F}_{RySi}^* \hat{F}_{N0}\mu. \end{aligned} \quad (2.204)$$

3 Numerische und programmtechnische Umsetzung

Die programmiertechnische Umsetzung der Berechnung der Frequenzkennlinien verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen bei harmonischer Erregung wurde mit Matlab® durchgeführt. Für die Berechnungen sind einige Eingangsdaten und -parameter erforderlich. Diese lassen sich u. a. mit Hilfe von Finiten Elemente Programmen ermitteln. In dieser Arbeit wurde die Finite Elemente Software ANSYS® verwendet. Die zur Berechnung der Frequenzkennlinien notwendigen Eingangsdaten können aber ebenso mit einem anderen Finiten Elemente Programm ermittelt werden.

Im [Abschnitt 3.1](#) werden die einzelnen benötigten Finite Elemente Simulationen beschrieben (siehe [Abbildung 3.1](#)). Es müssen die modalen Daten der Einzelkörper ermittelt werden. Des Weiteren muss die Flächenpressung in der Kontaktfläche, beziehungsweise die Normalkraftverteilung auf die Kontaktknoten, aufgrund der Schraubenvorspannung berechnet werden. Die modalen Daten des zusammengebauten Systems, unter der Annahme, dass alle Kontaktpunkte Haften, müssen ebenfalls berechnet werden. Zudem wird in diesem Unterkapitel die für die Berechnung in Matlab® notwendige Struktur (siehe [Abbildung 3.1](#)) der von ANSYS® berechneten Daten dargestellt.

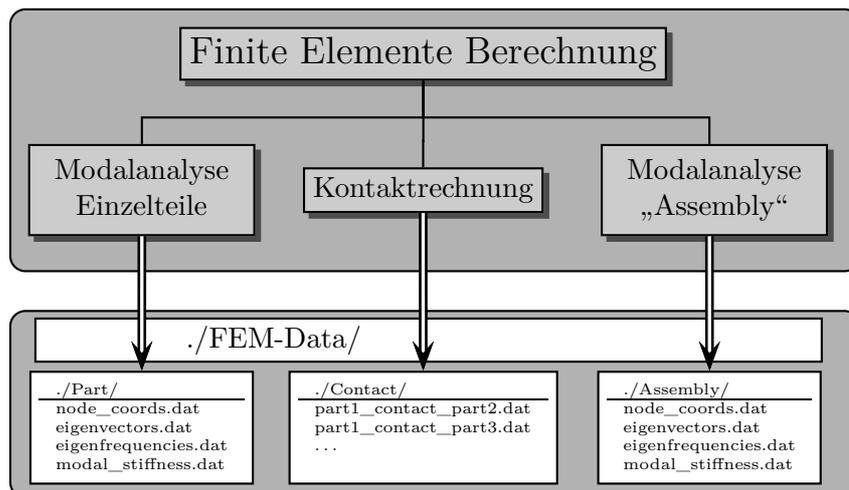


Abbildung 3.1: Finite Elemente Simulationen und Struktur der Ausgabe-Dateien

Im [Abschnitt 3.2](#) werden die einzelnen Module beschrieben, die zur Berechnung der Frequenzkennlinien in Matlab® programmiert wurden. Ein Modul berechnet die Kennfelder der Fourierkoeffizienten der Kontaktkräfte. Ein weiteres Modul bereitet die Daten aus der Finiten Elemente Berechnung auf und speichert diese in einem geeigneten Format zur weiteren Berechnung. Im Haupt-Modul wird das nichtlineare Gleichungssystem ([Gleichung 2.117](#)) zur Berechnung der Frequenzkennlinien gelöst.

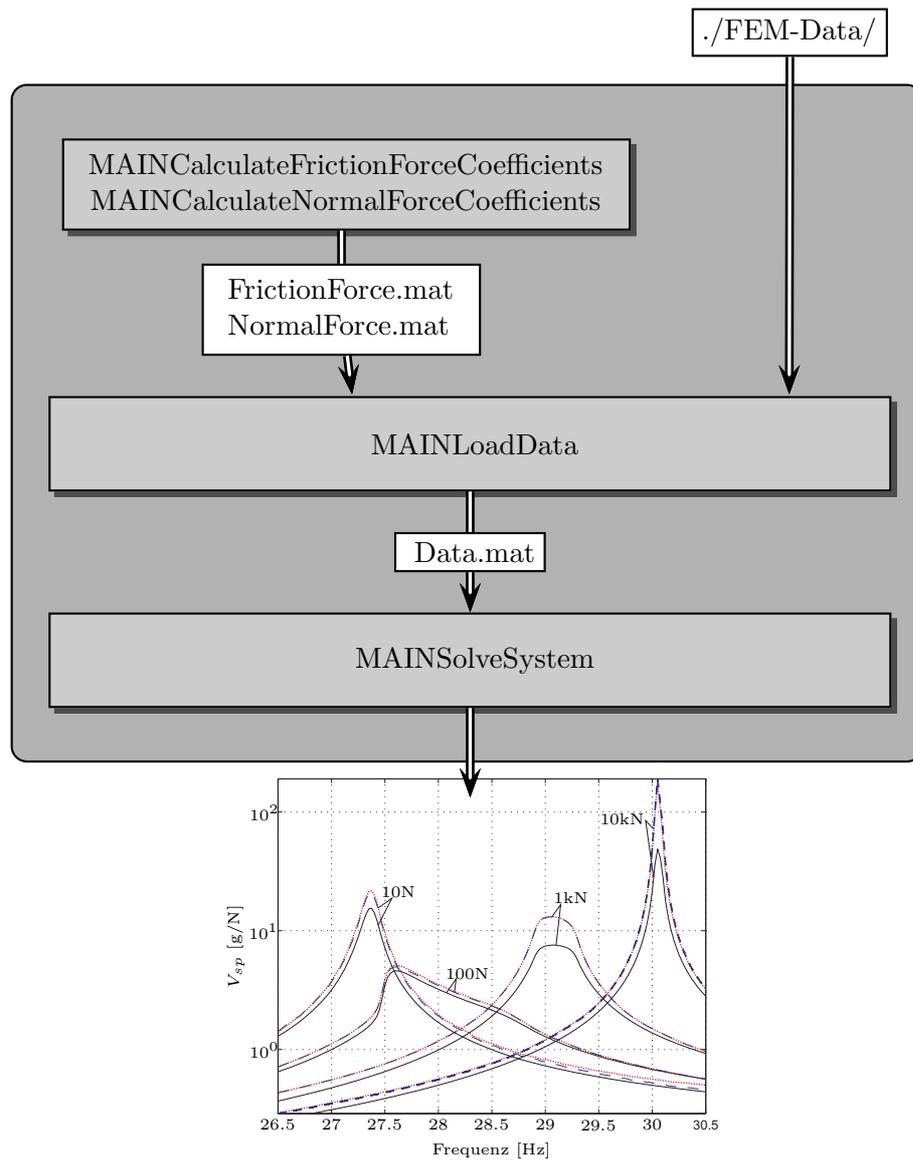


Abbildung 3.2: Programm Module in Matlab®

In [Abschnitt 3.3](#) wird der Einfluss verschiedener Parameter auf das Schwingungsverhalten zweier elastischer, miteinander verschraubter Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen bei harmonischer Anregung untersucht. Betrachtet wird der Einfluss der Höhe der Schraubenvorspannkräfte und der Erregerkraftamplitude. Zudem wird dargestellt, wie sich die Antwort der gekoppelten Struktur bei Änderung der Oberflächen, charakterisiert durch die Rautiefe und den Reibungskoeffizienten, verändert. Außerdem wird der Einfluss der Berücksichtigung der höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte auf das Ergebnis des berechneten stationären Schwingungsverhaltens der gekoppelten Struktur dargestellt.

Die Erläuterungen in [Abschnitt 3.1](#) und [Abschnitt 3.2](#), wie auch die Berechnungen in [Abschnitt 3.3](#) sollen gemäß der in [Abbildung 3.3](#) dargestellten Testanordnung gemacht werden. Die gezeigte Anordnung besteht aus zwei kreisringähnlichen Körpern aus Stahl, mit geschliffenen Oberflächen im Kontakt. Die beiden Körper haben einen Innendurchmesser von 200mm und einem Außendurchmesser von 280mm. Die Dicke des unteren Körpers (Testkörper eins) beträgt 5mm und die des oberen Körpers (Testkörper zwei) 3mm. Die beiden Körper werden mit sechs M8-Schrauben, die ebenfalls aus Stahl gefertigt sind, miteinander verbunden. Der untere der beiden Körper ist fest am Untergrund fixiert. Der obere Testkörper wird an einer Lasche harmonisch erregt. Die rot und grün eingezeichneten Mar-

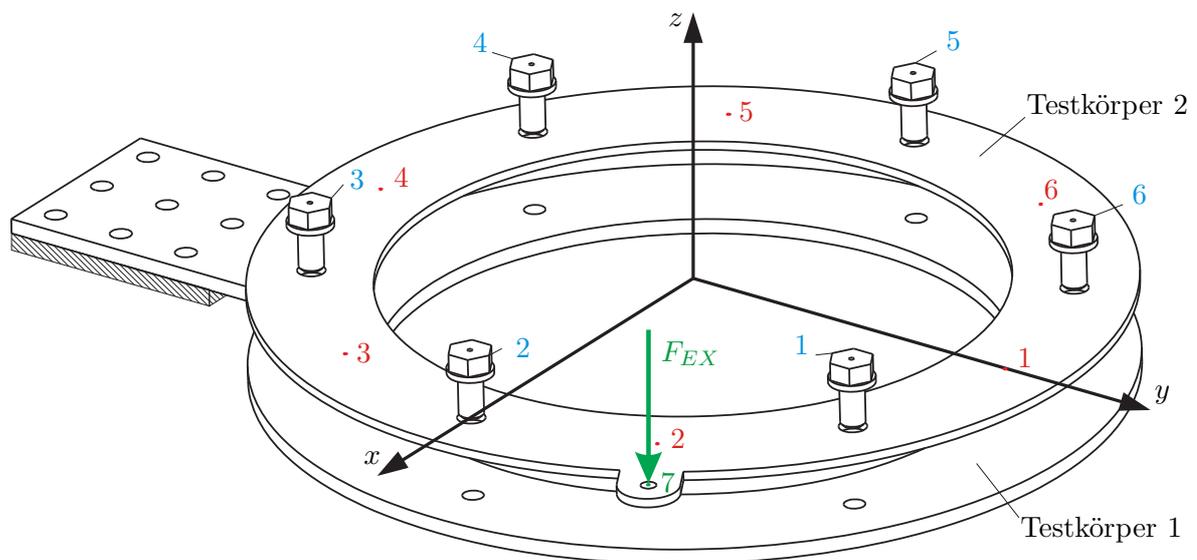


Abbildung 3.3: Explosionszeichnung der Testanordnung, bestehend aus zwei kreisringähnlichen Körpern aus Stahl, die über sechs Stahl-Schrauben miteinander verbunden werden.

kierungen kennzeichnen definierte Punkte, zwischen welchen Übertragungsfunktionen bzw. Frequenzkennlinien berechnet und später auch gemessen werden sollen. Die Koordinaten der Messpunkte im eingezeichneten Koordinatensystem sind in [Tabelle 3.1](#) aufgelistet. Die

Nr.	x -Koordinate [mm]	y -Koordinate [mm]
1	0.0	120.0
2	103.9	60.0
3	103.9	-60.0
4	0.0	-120.0
5	-103.9	-60.0
6	-103.9	60.0
7	129.9	75.0

Tabelle 3.1: Definierte Punkte an der Testanordnung zur Ermittlung von Übertragungsfunktionen

z -Koordinate der definierten Punkte an der Testanordnung wurde nicht festgelegt. Die Frequenzkennlinien weichen nur geringfügig voneinander ab, werden diese zu einem Punkt an der Ober- oder zu einem Punkt der Unterseite des einen oder des anderen Testkörpers, jedoch mit der selben Position in der x - y -Ebene ermittelt. Aus diesem Grund wurden nur sieben und nicht noch weitere Testpunkte festgelegt.

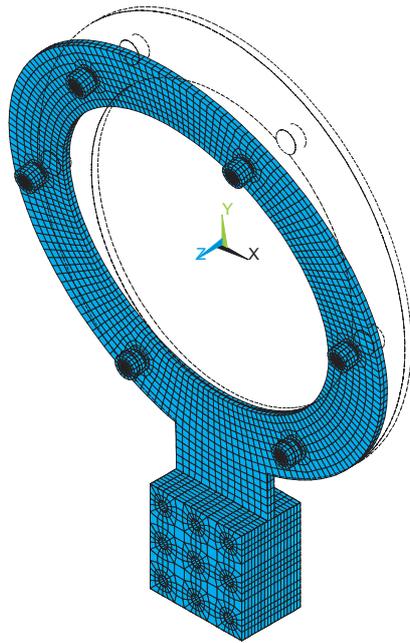
3.1 FEM-Modellierung

In dieser Arbeit wurden die Finite Elemente Simulationen mit der Software ANSYS® durchgeführt. In ANSYS® besteht die Möglichkeit, mit der eigenen Programmiersprache APDL (ANSYS Parametric Design Language) Macros zu erstellen und so komfortabel Ausgabe-Daten in gewünschter Form zu generieren. In diesem Unterkapitel soll auf die einzelnen Finite Elemente Simulationen eingegangen werden, die zur Erlangung der Eingangsdaten für die weitere Berechnung der FRFs verschraubter, elastischer Körper mit ebenen Kontaktflächen bei harmonischer Erregung durchzuführen sind.

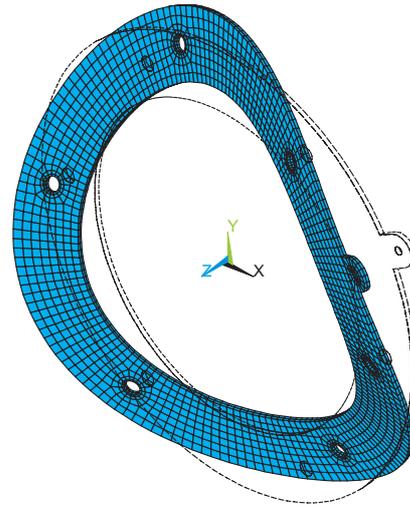
3.1.1 Modellierung der Einzelteile

In einem ersten Schritt ist es notwendig ausreichend fein diskretisierte Finite Elemente Modelle der einzelnen Teile, sowie der Schrauben zu erstellen. Es ist darauf zu achten, dass die später im Kontakt befindlichen Flächen gleich diskretisiert werden. In der weiteren Berechnung in Matlab wird vorausgesetzt, dass einander zugeordnete Kontaktknoten in der Ausgangslage koinzident sind. Anschließend muss eine Modalanalyse der Einzelteile durchgeführt werden, um die Eigenvektoren beziehungsweise die Eigenformen und die modalen Steifigkeitsmatritzen der Einzelteile zu berechnen. In [Abbildung 3.4](#) ist jeweils die erste Biegeeigenform der beiden kreisringförmigen Einzelteile der Testanordnung dargestellt.

Ist ein Körper nicht eingespannt, so beschreiben die ersten sechs Eigenvektoren die Starr-



(a) Erste Biege-Eigenform des unteren kreisringförmigen Bauteils bei der ersten Eigenfrequenz von 30.4Hz



(b) Erste Biege-Eigenform des oberen kreisringförmigen Bauteils bei der siebten Eigenfrequenz von 126.6Hz

Abbildung 3.4: Erste Biege-Eigenform der Einzelteile der Testanordnung

körpermoden mit jeweils einer Eigenfrequenz von Null Hertz. Durch diese Moden werden die sechs Freiheitsgrade der möglichen Starrkörperbewegungen beschrieben. Die Starrkörperbewegungen verursachen Probleme beim Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems (Gleichung 2.117), weil viele gleichwertige Lösungen für den eingeschwungenen Zustand der beiden verschraubten Körper, die knapp nebeneinander liegen, existieren. Es ergibt sich ein schlechtes Konvergenzverhalten, da der Newton-Algorithmus in den einzelnen Iterationsschritten zu verschiedenen Lösungen tendiert, jedoch keine der Lösungen mit ausreichender Genauigkeit ermitteln kann. Aus dieser Tatsache ergibt sich eine wesentliche Einschränkung. Es können keine Schrauben-Mutter-Verbindungen (siehe [Abbildung 3.5a](#)) berechnet werden, da die Paarung Schraube-Mutter innerhalb der Bohrung verschiedene Mittellagen einnehmen kann, um welche die Schwingung stattfindet. Es können nur Schraubenverbindungen berechnet werden, wenn die Schrauben direkt in einen der Teile eingeschraubt werden (siehe [Abbildung 3.5b](#)), und damit die Annahme getroffen wird, dass der Teil mit den eingeschraubten Schrauben als ein Einzelstück betrachtet, und auch als solches im Finiten Elemente Modell abgebildet wird.

Eine weitere Einschränkung die gemacht werden sollte um die Starrkörper-Freiheitsgrade

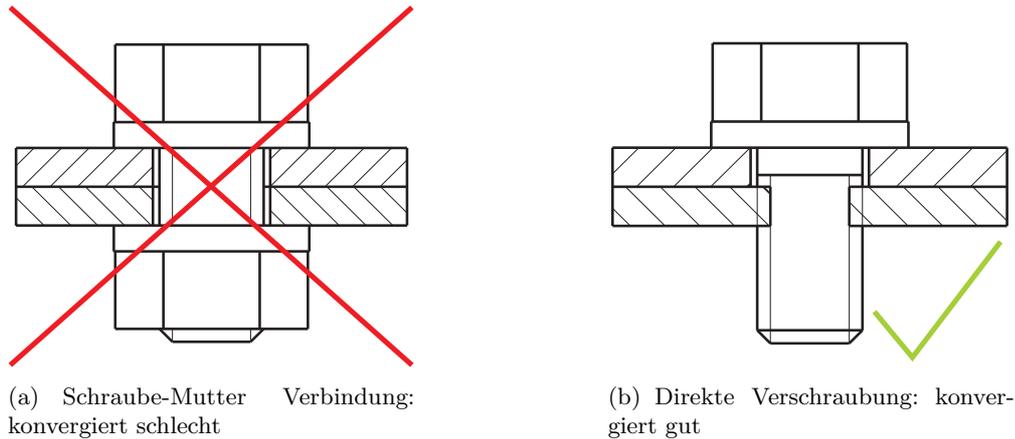


Abbildung 3.5: Lösungsverhalten des Newton-Algorithmus bei verschiedenen Ausführungen der Schraubverbindungen

zu eliminieren und damit das Konvergenzverhalten beim Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems zu verbessern ist, dass mindestens eine Schraube derart fest angezogen wird, so dass im Kontakt zwischen dem Schraubenkopf und dem Teil alle Kontaktpunktpaare permanent haften. Diese Einschränkung erscheint auf den ersten Blick eklatant. Betrachtet man jedoch verschiedene technische Aufgabenstellungen so ist die Forderung, dass mindestens eine Schraube so fest vorgespannt ist, dass keine Relativbewegung auftritt, meist aus rein konstruktiven Gründen erforderlich. Durch zusätzliche Schrauben kann dann aber die Dämpfungswirkung der Fügestelle mit Reibung optimal eingestellt werden um etwaige Resonanzfrequenzen gezielt zu dämpfen.

Somit werden die Einzelteile modelliert und anschließend an entsprechenden Stellen miteinander verschmolzen. Es ergibt sich ein einziger Körper mit Fügstellen in denen Relativbewegung einander zugeordneter Kontaktknoten möglich ist. Dieses Einzelteil ist mit der Umgebung verbunden und kann keine Starrkörperbewegungen ausführen.

Für diesen Körper muss eine Modalanalyse durchgeführt werden. Es müssen Dateien mit verschiedenen Informationen erstellt werden:

- `node_coords.dat` - In dieser Datei sind die Koordinaten der einzelnen Knoten gespeichert. Diese Information wird nur für Visualisierungszwecke weiter verwendet.
- `eigenvectors.dat` - In dieser Datei sind die einzelnen Eigenvektoren gespeichert.
- `eigenfrequencies.dat` - Datei in der die Eigenfrequenzen abgelegt sind. Diese Datei dient nur der Information und wird in der weiteren Berechnung nicht verwendet.

3 Numerische und programmtechnische Umsetzung

Knotennr.	x-Koordinate[m]	y-Koordinate[m]	z-Koordinate[m]
1	-0.1490937000E-04	-0.1400000000E+00	+0.0000000000E+00
2	+0.5000007000E-01	-0.8660250000E-01	+0.0000000000E+00
3	+0.7000010000E-01	-0.1212435000E+00	+0.0000000000E+00
4	+0.6534384000E-01	-0.1131786000E+00	+0.0000000000E+00
5	+0.5442586000E-01	-0.9426818000E-01	+0.0000000000E+00
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 3.2: node_coords.dat - Formatierung der Datei mit Knotenkoordinaten

		1. Eigenvektor	2. Eigenvektor	...
1. Knoten	x-Wert	-0.9959638747E-01	-0.2516870303E+00	...
	y-Wert	-0.1085726938E+00	-0.7272731848E-02	...
	z-Wert	+0.1780558497E+01	+0.1185721005E+01	...
2. Knoten	x-Wert	-0.1052076377E+00	-0.1980191043E+00	...
	y-Wert	-0.1033168941E+00	-0.5754100681E-01	...
	z-Wert	+0.9120577132E+00	+0.1514335388E+01	...
3. Knoten	x-Wert	-0.1015674051E+00	-0.2328355400E+00	...
	y-Wert	-0.1012152008E+00	-0.7764232485E-01	...
	z-Wert	+0.1040734627E+01	+0.1833862501E+01	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 3.3: eigenvectors.dat - Formatierung der Datei mit Eigenvektoren

Mode-Nr.	Wert[Hz]
1	26.07
2	58.05
3	144.57
⋮	⋮

Tabelle 3.4: eigenfrequencies.dat - Formatierung der Datei mit Eigenfrequenzen

- modal_stiffness.dat - Datei in der die modale Steifigkeitsmatrix abgelegt ist.

0.2683043638E+05
0.1330145424E+06
0.8251532278E+06
⋮

Tabelle 3.5: modal_stiffness.dat - Formatierung der Datei mit modaler Steifigkeitsmatrix

3.1.2 Kontaktberechnung

Mit Hilfe des Finiten Elemente Programms muss die statische Flächenpressung beziehungsweise die statische Normalkraftverteilung, die sich aufgrund der Schraubenvorspannung im Kontakt einstellt, berechnet werden. Die Schraubenvorspannung wird, wie bereits im [Unterabschnitt 2.3.3](#) erwähnt, durch Abkühlung der Elemente im Schraubenschaft erreicht. Um eine gezielte Vorspannkraft zu erzielen sind im Regelfall mehrere Iterationsschritte nötig. Um eine Verformung der Schaftelemente durch eine thermische Belastung zu erzielen, muss dem Material des Schraubenschaftes ein thermischer Ausdehnungskoeffizient zugewiesen werden. Es ist darauf zu achten, dass der Ausdehnungskoeffizient nicht isotrop, sondern nur in Schraubenlängsrichtung definiert wird. Ansonsten werden durch die thermische Belastung Verformungen beziehungsweise Spannungen quer zur Schraubenlängsrichtung in den Schrauben und des Weiteren auch in dem Teil, in dem diese eingeschraubt sind, verursacht.

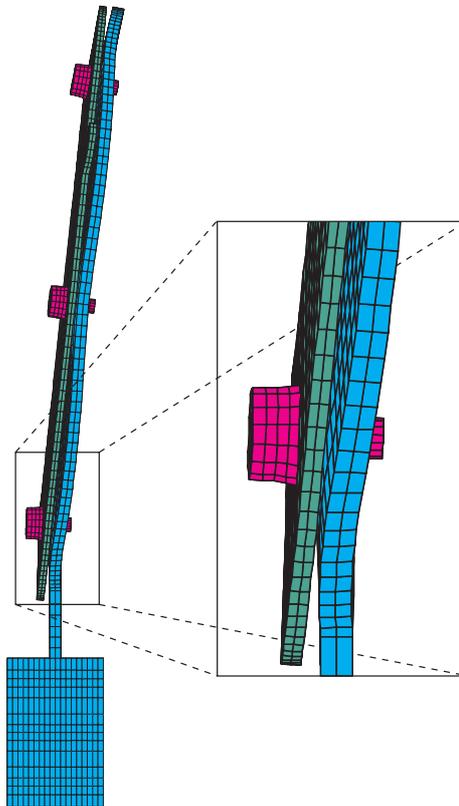


Abbildung 3.6: Verformung des Finiten Elemente Modells der Testanordnung aufgrund einer Schraubenvorspannkraft von 10kN.

Abbildung 3.6 zeigt das verformte, maßstäblich überzeichnete, Finite Elemente Modell der Testanordnung aufgrund einer jeweiligen Schraubenvorspannkraft von 10kN. Zu erken-

nen ist, dass aufgrund der Vorspannung bereits knapp neben der Verschraubung die beiden kreisringförmigen Körper klaffen und somit der Kontakt sehr lokal begrenzt ist.

Abbildung 3.7 zeigt die Diskretisierung der Kontaktfläche in der Umgebung der Bohrung. In den Knoten ist durch farbliche Markierung die jeweilig wirkende Normalkraft, bei einer Schraubenvorspannkraft von 10kN, eingezeichnet. Zusätzlich ist ein Schnitt durch die Bohrung dargestellt. Über den Knoten sind maßstäblich die Normalkräfte F_N aufgrund der Schraubenvorspannkraft von 10kN eingezeichnet. Auch in dieser Abbildung ist klar ersichtlich, dass die Flächenpressung rund um die Verschraubung lokal sehr begrenzt ist. Die Flächenpressung rund um die Bohrung der Verschraubung ist relativ hoch ist, nimmt mit zunehmender Entfernung rasch ab und ist dann Null.

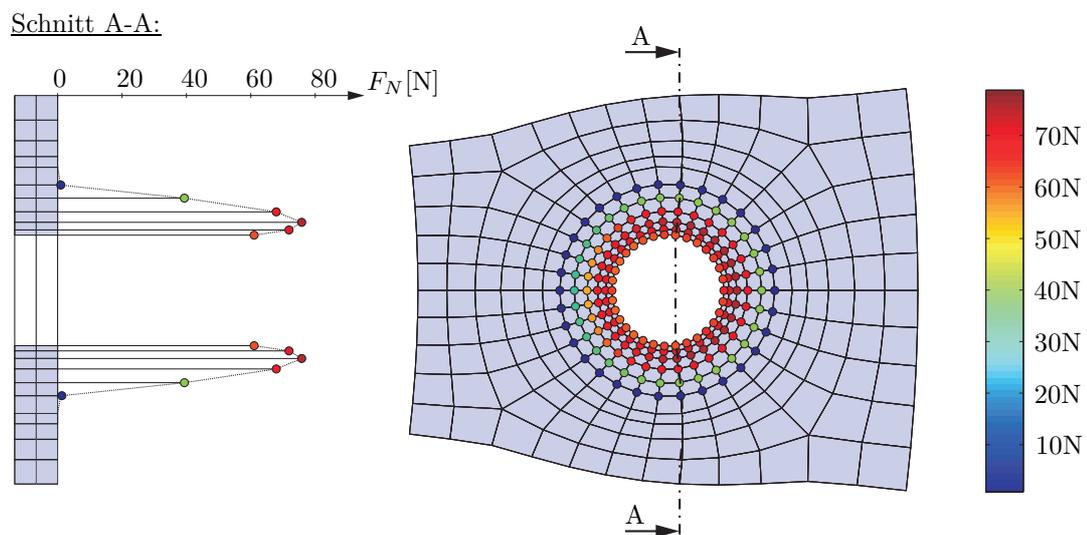


Abbildung 3.7: Berechnete Normalkraftverteilung in der Kontaktfläche in der Umgebung der Bohrung bei einer Schraubenvorspannkraft von 10kN.

3.1.3 Modellierung des verschraubten Systems - Annahme: alle Kontaktknotenpaare haften

Zur Bestimmung der nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{R0} und c_{N0} muss ein Finite Elemente Referenzmodell erstellt werden. Bei diesem Modell wird angenommen, dass alle sich tatsächlich aufgrund einer bestimmten Schraubenvorspannkraft in Kontakt befindlichen Kontaktknotenpaare haften (vgl. Unterabschnitt 2.2.5). In der vorausgegangenen Kontaktrechnung werden diese Kontaktknotenpaare ermittelt und im Finiten Elemente Referenzmodell miteinander verschmolzen. Es muss wiederum eine Modalanalyse durchgeführt werden. Auch für diese Simulation müssen Export-Dateien für die weiteren Berechnungen in Matlab®

erstellt werden. Die Formatierung dieser Dateien erfolgt analog der Formatierung der Files, wie sie im [Unterabschnitt 3.1.1](#) beschrieben wurden. In [Abbildung 3.8](#) sind die Graphen der Verstärkung und der Phasenverschiebung für die Testanordnung, abhängig von der Erregerfrequenz, dargestellt. Die roten, gestrichelten Kurven sind die Resonanzkurven für das gemeinsame Finite Elemente Modell der beiden Körper 1 und 2, ohne Berücksichtigung des Kontakts zwischen den beiden Einzelteilen. Die blauen, durchgezogenen Kurven sind die Resonanzkurven für das gemeinsame Finite Elemente Referenzmodell der beiden zusammengesetzten Einzelteile, unter der Annahme, dass alle sich tatsächlich aufgrund einer Schraubenvorspannkraft von 10kN in Kontakt befindlichen Knotenpaare haften. Die Kurven geben das eingeschwungene Übertragungsverhalten zwischen den definierten Punkten 6 und 7 der Testanordnung wieder (vgl. Seite 63).

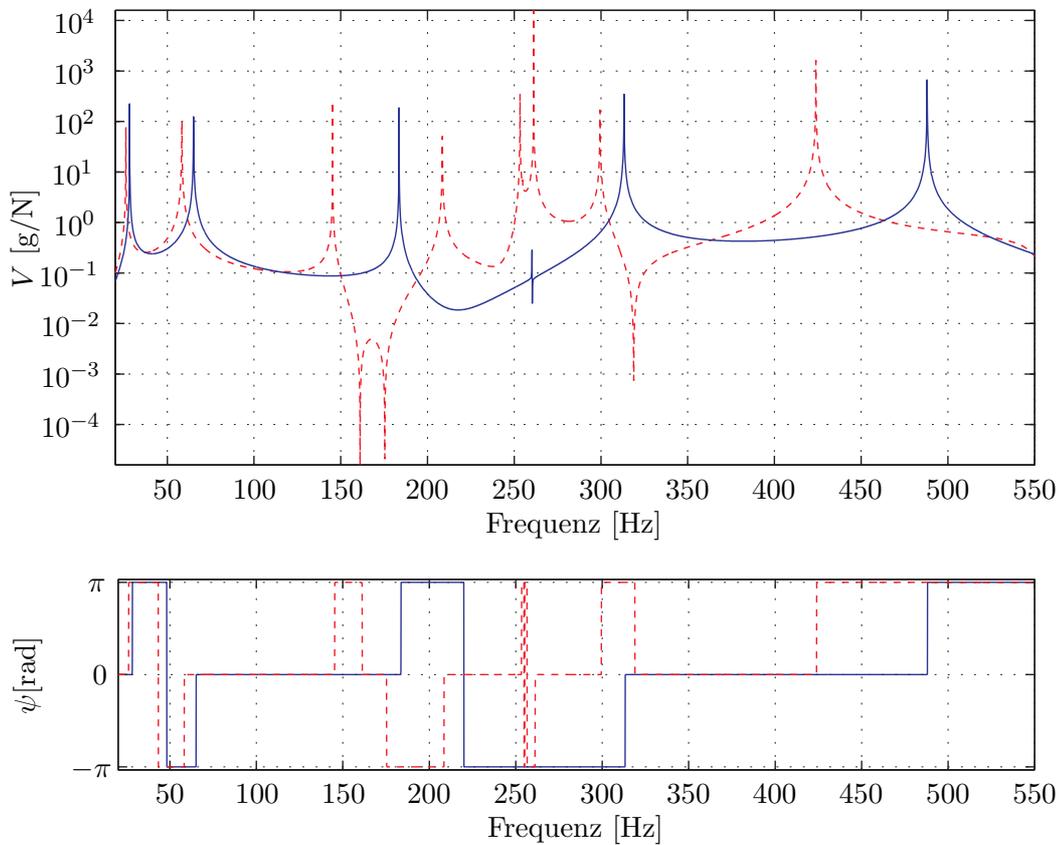


Abbildung 3.8: Verstärkungsfunktion V und Phasenlage ψ der beiden kreisringförmigen Körper zwischen den definierten Punkten 6 und 7. Die roten, gestrichelten Graphen sind die Resonanzkurven für das gemeinsame Finite Elemente Modell der beiden Einzelteile, ohne Kontakt. Die blauen, durchgezogenen Graphen sind die Resonanzkurven für das Finite Elemente Referenzmodell zur Bestimmung der nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{R0} und c_{N0} unter der Annahme, dass alle Kontaktknotenpaare haften. Die Strukturdämpfung ist nicht berücksichtigt.

3.2 Matlab® Programm

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt in Matlab®. Zur Erstellung des nichtlinearen Gleichungssystems ([Gleichung 2.117](#)) müssen zum einen die aus den, im vorigen Kapitel beschriebenen, Finiten Elemente Simulationen ermittelten Daten geladen und aufbereitet werden. Zum anderen müssen die Parameter, die das Verhalten des Kontaktes beeinflussen, definiert werden. Dies erfolgt im Modul „MAINLoadData“. Das Lösen der nichtlinearen Gleichungen, die das dynamische Verhalten verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen bei harmonischer Anregung wiedergeben, wird im Modul „MAINSolveSystem“ durchgeführt.

3.2.1 Aufbereitung der FEM-Daten und Definition der Parameter

Für die nachfolgenden Berechnungen werden die Finite Elemente Daten in Matlab® mit dem Modul „MAINLoadData“ geladen und aufbereitet.

- Die notwendige Anzahl der in der Berechnung zu berücksichtigenden Moden m und die nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{N0} und c_{R0} müssen ermittelt werden.
- Es müssen die Kontaktparameter Rautiefe R_z und Reibungskoeffizient μ festgelegt werden. Zu der statischen Normalkraftverteilung und der definierten Rautiefe R_z müssen die statischen, normierten Relativverschiebungen der Kontaktknotenpunkte in Normalenrichtung berechnet werden.
- Die Ordnung, bis zu der die höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte berücksichtigt werden, wird ebenfalls im Modul „MAINLoadData“ festgelegt.

Bestimmung der Anzahl der Moden m und der nominalen Kontaktsteifigkeiten in Normalenrichtung c_{N0} und in Tangentialrichtung c_{R0}

Es müssen die Anzahl der tatsächlich zur Berechnung verwendeten Moden m und die nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{N0} und c_{R0} , wie in [Unterabschnitt 2.2.5](#) beschrieben, ermittelt werden. Die Ermittlung der benötigten Moden m und der nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{N0} und c_{R0} erfolgt über den Abgleich der Resonanzkurven des Finiten Elemente Referenzmodells, in dem die Kontaktknotenpaare fest miteinander verschmolzen sind ([Unterabschnitt 3.1.3](#)) mit den Resonanzkurven des Finiten Elemente Modells der beiden Einzelkörper ohne Kontakt ([Unterabschnitt 3.1.1](#)). In dem Modell der beiden Einzelkörper werden die einander zugeordneten Kontaktknoten über Federn mit den konstanten, nominalen Federsteifigkeiten c_{N0} in Normalenrichtung und c_{R0} in tangentialer Richtung, die eine elastische Kontaktschicht repräsentieren, miteinander verbunden. Für eine gewählte Anzahl an Moden

m werden die nominalen Kontaktsteifigkeiten ermittelt und die Resonanzkurven der beiden Modelle miteinander verglichen. **Abbildung 3.9** zeigt die Resonanzkurven des Referenzmodells und die Resonanzkurven der beiden Einzelteile, die über Federn miteinander verbunden wurden, bei verschiedener Anzahl berücksichtigter Moden m . Bis zu der Reduktion der Anzahl der Moden auf dreißig wird das Referenzmodell gut abgebildet. Bei weiterer Reduktion auf fünfundzwanzig Moden ist eine deutliche Abweichung der beiden Resonanzkurven im Frequenzbereich zwischen 200 und 300 Hz erkennbar.

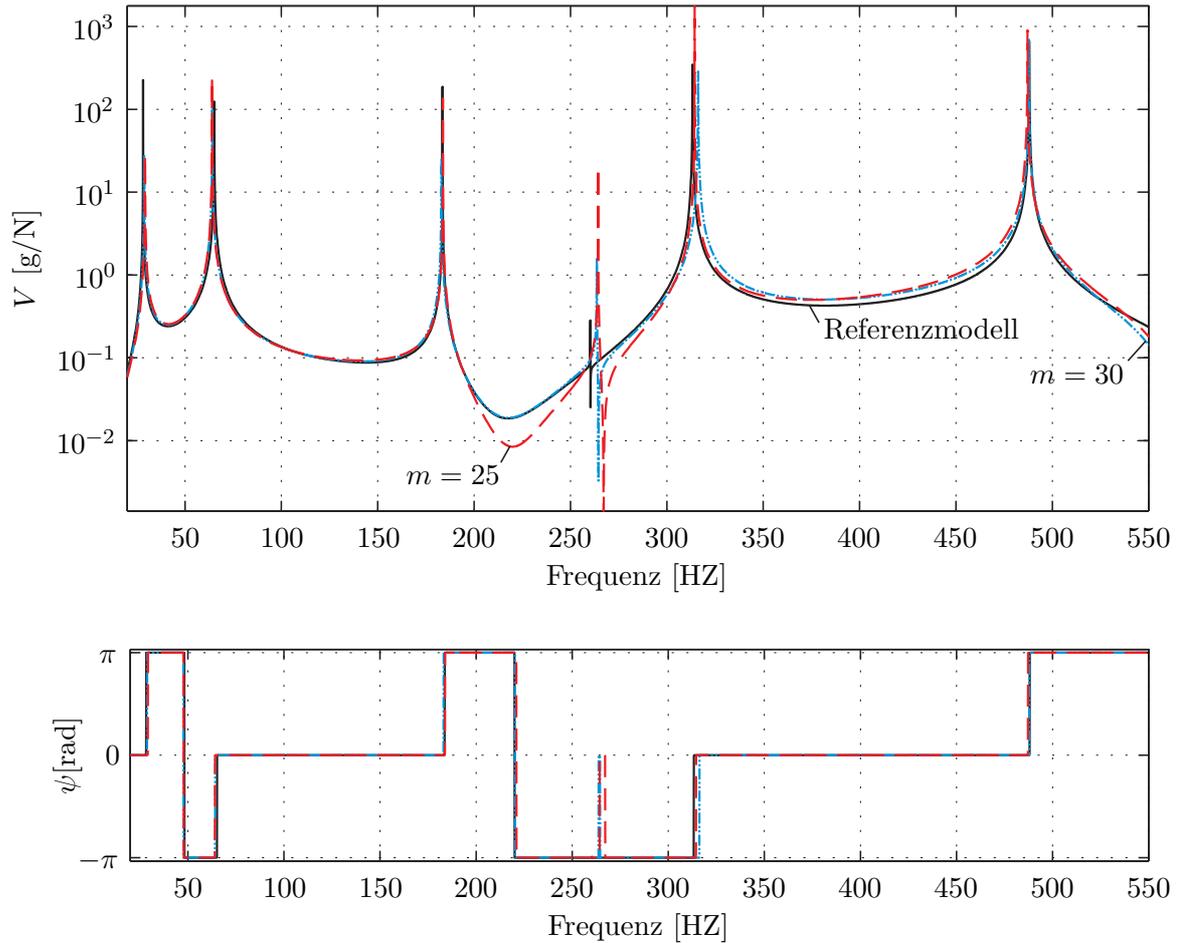


Abbildung 3.9: Resonanzkurven des Referenzmodells und Resonanzkurven der beiden Einzelteile verbunden über Federn für eine Anzahl berücksichtigter Moden von $m = 25$ und $m = 30$ zwischen den definierten Punkten 6 und 7 der Testanordnung

Im Folgenden soll eine Kennzahl für die Qualität mit der das Modell der Einzelkörper das Referenzmodell wiedergibt definiert werden. Der Wert Δ stellt ein Maß für die Abweichung der Verstärkungsfunktion V_m der beiden modal reduzierten Einzelteile mit einer gedachten

elastischen Kontaktschicht von der Verstärkungsfunktion des Referenzmodells V_{ref} dar:

$$\Delta = \frac{1}{k} \sum_{f_k} \frac{|V_{ref}(f_k) - V_m(f_k)|}{|V_{ref}(f_k)|} \cdot 100[\%]. \quad (3.1)$$

An diskreten Frequenzen f_k wird die relative Abweichung der Resonanzkurven zueinander berechnet. Diese Abweichungen werden über alle Frequenzen f_k aufsummiert. Mit steigender Anzahl der berücksichtigten Moden kann das Referenzmodell besser durch das Modell der Einzelkörper mit der elastischen Kontaktschicht wiedergegeben werden. Jedoch steigt mit der zunehmenden Anzahl der Moden m auch der Rechenaufwand beim anschließenden Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems im Matlab®-Modul „MAINSolveSystem“. Es muss ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit, mit der das Modell der Einzelkörper die Dynamik des Referenzmodell wiedergibt, und der zu erwartenden, erhöhten Rechenzeit beim Lösen des Systems verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen, bei steigender Anzahl der berücksichtigten Moden m gemacht werden. Aus [Tabelle 3.6](#)

m	$c_{R0}[\frac{N}{m}]$	$c_{N0}[\frac{N}{m}]$	$\Delta[\%]$	$t[\%]$
50	4.7309e+005	1.2122e+005	15.81	100
40	4.7566e+005	5.1068e+004	16.34	81
30	4.0790e+005	6.5565e+004	23.41	59
25	3.3318e+005	6.8118e+004	36.41	50

Tabelle 3.6: Nominale Steifigkeiten in Tangentialrichtung c_{R0} und in Normalenrichtung c_{N0} , Abweichung Δ der Verstärkungsfunktionen der beiden Einzelteile verbunden über Federn, von der Verstärkungsfunktion des Referenzmodells (betrachtete Punkte 6 und 7 der Testanordnung) und zu erwartende Rechenzeit t der Kontaktrechnung prozentual zur benötigten Rechenzeit bei fünfzig berücksichtigten Moden.

ist ersichtlich, dass die nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{R0} und c_{N0} mit zunehmender Anzahl der Moden m tendenziell größer werden. Mit steigender Anzahl der berücksichtigten Moden wird im modal reduzierten Modell der Einzelteile immer mehr Elastizität berücksichtigt. Um die Steifigkeit des Referenzmodells zu erreichen, muss die gedachte elastische Kontaktschicht zunehmend weniger Elastizität abbilden. Ist die Anzahl der berücksichtigten modalen Freiheitsgrade gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des Finiten Elemente Modells werden die Kontaktsteifigkeiten unendlich groß.

Bestimmung der statischen, normierten Relativverschiebung der Kontaktknotenpunkte in Normalenrichtung

In der Finiten Elemente Kontaktrechnung wurden die statischen Kontaktkräfte in Normalenrichtung zwischen den einander zugeordneten Kontaktknoten ermittelt. Zu dieser statischen Normalkraftverteilung müssen die statischen Verschiebungen der Kontaktknoten entspre-

chend dem verwendeten Kontaktgesetz (Gleichung 2.82) berechnet werden. Je nach definierter Rautiefe R_z ergibt sich eine zugehörige, statische Normalverschiebung der einander zugeordneten Kontaktknoten. Der Einfluss der Rautiefe R_z ist in **Abbildung 3.10** dargestellt. Es sei eine bestimmte statische Normalkraft \hat{F}_{N0} gegeben. Bei einer Oberfläche mit einer kleineren Rautiefe R_z sind gegenüber einer Oberfläche mit einer größeren Rautiefe R_z alle Rauheitsspitzen bereits bei einer geringeren Normalkraft abgeplattet. Damit ergibt sich für die Oberfläche mit der geringeren Rautiefe ein steiferes Kontaktverhalten, als bei der raueren Oberfläche. Durch eine bestimmte statische Normalkraft \hat{F}_{N0} wird damit bei der raueren Oberfläche eine größere statische Verschiebung der Kontaktknoten zueinander verursacht, als bei einer glatteren Oberfläche.

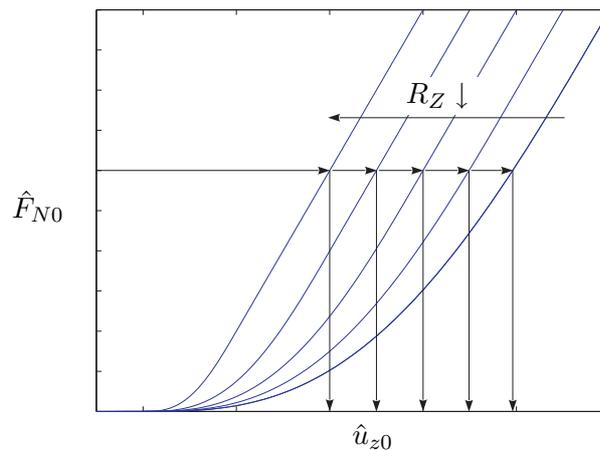


Abbildung 3.10: Einfluss der Rautiefe R_z auf den Zusammenhang zwischen statischer Verschiebung der Kontaktknoten \hat{u}_{z0} in Normalenrichtung und statischer Normalkraft \hat{F}_{N0}

3.2.2 Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

Im Matlab® Modul „MAINSolveSystem“ wird das nichtlineare Gleichungssystem, das die Dynamik verschraubter, elastischer Körper mit rauen, ebenen Kontaktflächen beschreibt, gelöst. Die nichtlinearen Gleichungen werden für diskrete Erregerfrequenzen mit dem Newton-Verfahren mit numerischen Ableitungen berechnet. Für die Rechnung müssen das gewünschte Frequenzspektrum und die Freiheitsgrade des Modells, deren Übertragungsverhalten ermittelt werden soll, festgelegt werden. Das Frequenzspektrum wird über eine minimale Frequenz, eine maximale Frequenz und der Frequenzschrittweite, mit der die Resonanzkurven aufgelöst werden sollen, festgelegt. Zur Definition der Freiheitsgrade, zwischen denen das Übertragungsverhalten ermittelt werden soll, müssen die Knotenindizes des Erregerknotens und des Knotens, an dem die Antwort ermittelt werden soll, festgelegt werden. Für jeden der beiden Punkte muss noch die gewünschte Richtung, x , y oder z angegeben werden.

3.3 Parameterstudien

Es soll das Antwortverhalten verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen, bei harmonischer Erregung, abhängig von der Schraubenvorspannkraft und der Erregerkraft für verschiedene Erregerfrequenzen berechnet werden. Sowohl die Höhe der Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} wie auch die Höhe der Erregerkraft \hat{F}_{E0} haben einen Einfluss auf die Form der Resonanzkurven, da das Gleichungssystem nichtlinear ist.

Einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis des nichtlinearen Gleichungssystems der Dynamik, verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen, haben die Oberflächenkennwerte der Kontaktflächen. Die wesentlichen Parameter durch die die Eigenschaften der Kontaktflächen bestimmt werden, sind die Rauigkeit der Oberfläche, klassifiziert durch die Rautiefe R_Z , und der Reibungskoeffizient μ .

Ein weiterer Einflussfaktor auf die Systemantwort ist die Diskretisierung der Kontaktfläche. Die Anzahl der berücksichtigten, höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte kann für die Berechnung der Resonanzkurven variiert werden.

Im Folgenden werden die einzelnen Einflussgrößen und die Wirkung ihrer Änderung auf das Systemverhalten untersucht und dargestellt.

3.3.1 Diskretisierung der Kontaktfläche

Durch die Diskretisierung der Kontaktflächen wird festgelegt wie fein die statische Normalkraftverteilung aufgelöst wird. Wird die Diskretisierung rund um die Bohrung zu grob gewählt, kann der radiale Verlauf der Normalkraftverteilung sprunghaft sein. [Abbildung 3.11](#) zeigt für eine modellierte Diskretisierung der Kontaktflächen die Normalkraftverteilungen. [Abbildung 3.11a](#) zeigt die Normalkraftverteilung für eine Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} von 10kN und [Abbildung 3.11b](#) für eine Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} von 5kN. Bei einer Schraubenvorspannkraft von $\hat{F}_{S0}=10\text{kN}$ wirken auf die Knoten der äußersten noch belasteten Knotenreihe Normalkräfte von ca. 1N. Die selbe Knotenreihe ist bei einer Schraubenvorspannkraft von $\hat{F}_{S0}=5\text{kN}$ bereits unbelastet. In [Abbildung 3.12](#) sind die Resonanzkurven für verschiedene Schraubenvorspannkraften \hat{F}_{S0} der beiden verschraubten, kreisringförmigen Körper für die obige Diskretisierung der Kontaktflächen dargestellt. Bei hoher Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} haften beinahe alle Kontaktpunkte. Es ist kaum eine Dämpfungswirkung durch die Reibung im Kontakt ersichtlich. Bei Verminderung der Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} wird in der äußersten Knotenreihe, aufgrund der geringeren Normalkräfte, eine Relativbewegung der einander zugeordneten Kontaktknoten möglich. Die Reibungsdämpfung wird aktiv und die Verstärkung in der Resonanzfrequenz kleiner. Vermindert man die Schraubenvorspannkraft weiter, wirken in der äußersten Knotenreihe keine Normalkräfte. In diesen Knoten wirkt daher auch keine Reibungsdämpfung. In den restlichen Knoten der Kontakt-

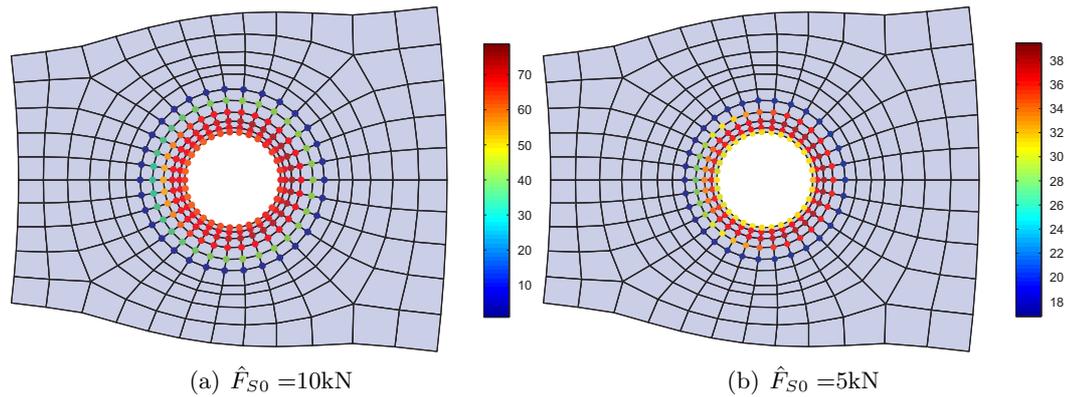


Abbildung 3.11: Normalkraftverteilung im Kontakt für verschiedene Schraubenvorspannkkräfte

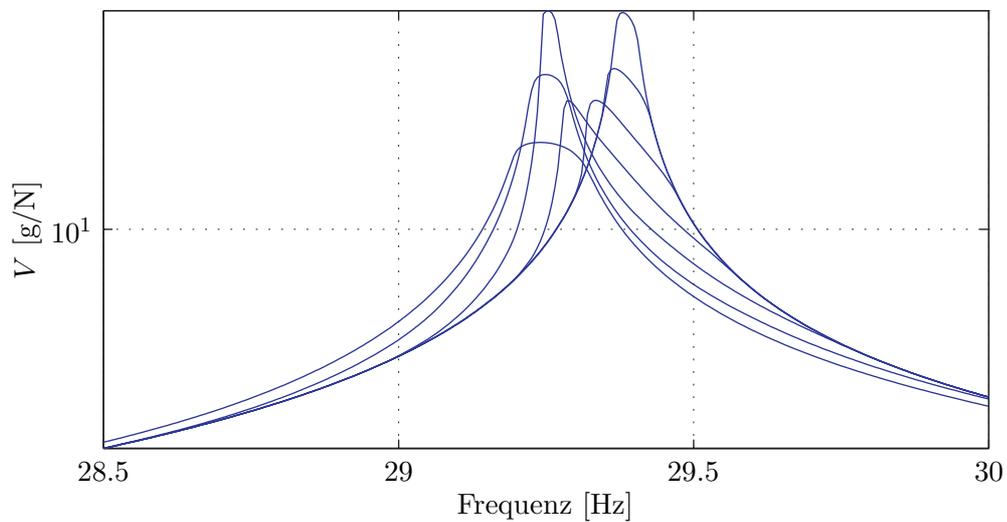


Abbildung 3.12: Verstärkungsfunktion zwischen den Punkten 6 und 7 der Testanordnung bei einer bestimmten Erregerkraftamplitude und für verschiedene Schraubenvorspannkkräfte bei zu grober Diskretisierung der Kontaktfläche

fläche sind die Normalkräfte jedoch immer noch so hoch, dass diese beinahe permanent haften und ebenfalls kaum eine Dämpfung durch Reibung verursacht wird. Die Verstärkung in der Resonanzfrequenz wird wieder größer. Die Resonanzfrequenz selbst wird niedriger, da durch das Lösen des Kontakts in der äußersten Knotenreihe das System weicher wird. Erst bei weiterer Minderung der Schraubenvorspannkkräfte wird auch eine Relativverschiebung in den restlichen Kontaktknotenpaaren möglich und die Reibungsdämpfung wirkt wieder stärker. Dieses Phänomen lässt sich in der Realität nicht beobachten, da die Kontaktfläche bei stetiger Minderung der Schraubenvorspannkkräfte ebenfalls stetig abnimmt. Durch eine feinere Diskretisierung der Kontaktfläche im Bereich der Verschraubung wird Abhilfe geschaffen.

3.3.2 Variation der Schraubenvorspannkraft

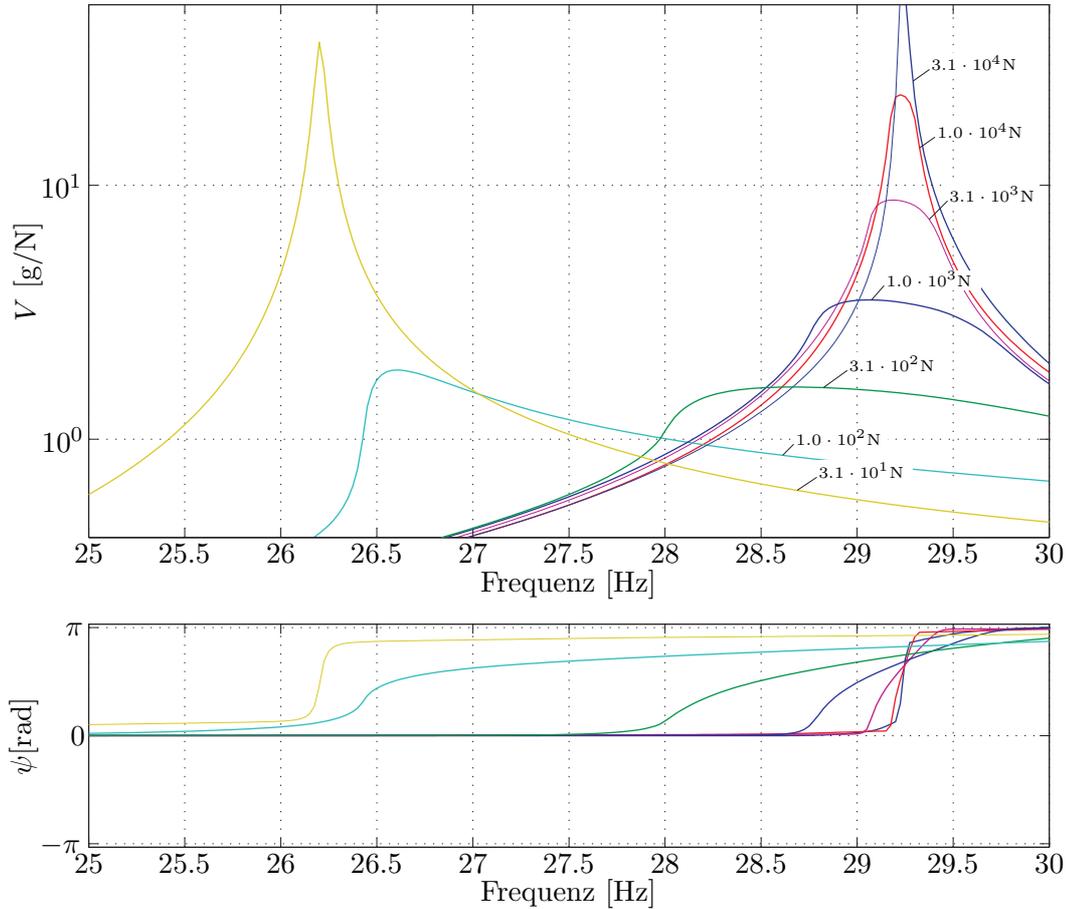


Abbildung 3.13: Variation der Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} : Verstärkungsfunktionen V zwischen den Punkten 6 und 7 der Testanordnung und Phasenlage ψ . Variiert wurden die Vorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ der Schrauben 2, 4 und 6. Die Vorspannkraft $\hat{F}_{S01,3,5}$ der Schrauben 1, 3 und 5 wurden auf 10kN eingestellt. Angenommen wurde ein Reibungskoeffizient von $\mu = 0.3$, eine Rautiefe von $R_Z = 4\mu\text{m}$ und eine Erregerkraftamplitude von $\hat{F}_E = 100\text{N}$.

In [Abbildung 3.13](#) wurden die Vorspannkraft $\hat{F}_{S01,3,5}$ der Schrauben 1, 3 und 5 der Testanordnung konstant auf 10kN eingestellt und die Schraubenvorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ der Schrauben 2, 4 und 6 variiert. Bei hohen Schraubenvorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ sind die Normalkraft in den einander zugeordneten Kontaktknoten sehr groß. Bei einer bestimmten Erregerkraftamplitude \hat{F}_E ist daher beinahe keine Relativbewegung zwischen diesen Knoten möglich. Die einander zugeordneten Kontaktknoten haften beinahe permanent und es wird kaum Energie dissipiert. In den Resonanzkurven ist kaum eine Auswirkung aufgrund der Reibungsdämpfung erkennbar. Die Resonanzfrequenz deckt sich beinahe mit der Resonanzfrequenz des Referenzmodells, mit der Annahme, dass alle einander zugeordneten

Kontaktknoten haften. Nehmen die Schraubenvorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ bei gleich bleibender Erregerkraft \hat{F}_E ab, werden die Normalkräfte zwischen den Kontaktknoten kleiner und die Punkte haften nicht mehr. Aufgrund der Relativbewegung der einander zugeordneten Kontaktknoten und der damit verbundenen Reibungskräfte wird Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Die Verstärkung V wird geringer. Das System wird weicher und die Resonanzfrequenz verschiebt sich immer mehr in die Richtung der Resonanzfrequenz der beiden Einzelteile mit reiner Kopplung normal zur Kontaktfläche. Bei weiterer Reduktion der Schraubenvorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ werden die Normalkräfte in den Kontaktflächen in der Umgebung der Schrauben 2, 4 und 6 immer kleiner, bis dort kaum mehr Energie dissipiert wird. Die Verstärkung V nimmt wieder zu. Betrachtet man in [Abbildung 3.13](#) die Resonanzkurven, so ist ersichtlich, dass die optimalen Schraubenvorspannkraft $\hat{F}_{S02,4,6}$ für die Schrauben 2, 4 und 6, damit die Verstärkungsfunktion bei der Resonanzfrequenz minimal und die Dämpfungswirkung damit am größten wird, zwischen $1,0 \cdot 10^2 \text{N}$ und $3,1 \cdot 10^2 \text{N}$ liegen.

3.3.3 Variation der Erregerkraft

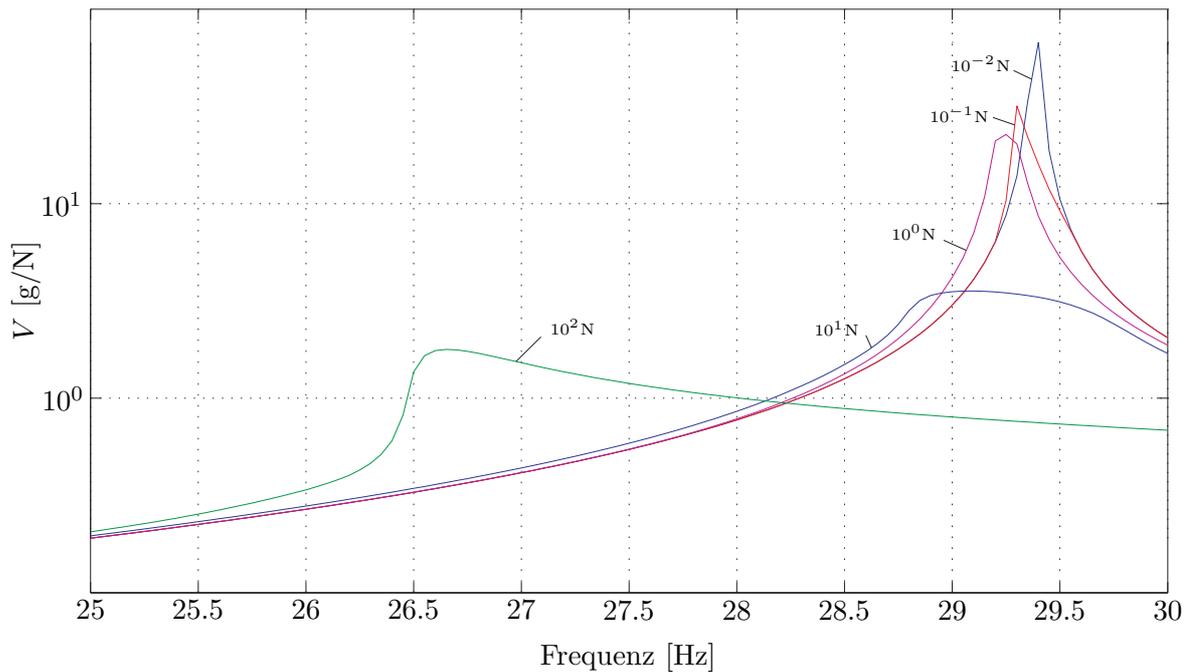


Abbildung 3.14: Variation der Erregerkraftamplitude \hat{F}_E : Verstärkungsfunktionen V zwischen den Punkten 6 und 7 der Testanordnung bei Variation der Erregerkraftamplitude \hat{F}_E . Angenommen wurde ein Reibungskoeffizient von $\mu = 0.3$ und eine Rautiefe $R_Z = 4 \mu\text{m}$. Für die Schrauben 1, 3 und 5 wurden Vorspannkraft von $\hat{F}_{S01,3,5} = 10 \text{kN}$ und für die Schrauben 2, 4 und 6 Schraubenvorspannkraft von $\hat{F}_{S02,4,6} = 100 \text{N}$ eingestellt.

Bei linearen Systemen sind die Resonanzkurven unabhängig von der Höhe der Erregerkraftamplitude \hat{F}_E . Dies ist bei nichtlinearen Systemen, wie dem der beiden verschraubten, elastischen Körper mit rauen, ebenen Kontaktflächen nicht der Fall. In **Abbildung 3.14** sind die Resonanzkurven der Testanordnung für verschiedene Erregerkraftamplituden \hat{F}_E , bei konstanter Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} dargestellt. Bei einer kleinen Amplitude \hat{F}_E der harmonischen Erregerkraft können sich die einander zugeordneten Kontaktknoten nicht voneinander losreißen und haften permanent. Es ist kaum eine Wirkung der Reibungsdämpfung ersichtlich. Bei höherer Erregerkraftamplitude \hat{F}_E beginnen die Kontaktpunkte sich relativ zueinander zu bewegen. Durch die Reibung wird Energie dissipiert. Das Maximum der Verstärkungsfunktion V wird kleiner und damit die Reibungsdämpfung wirksam.

3.3.4 Variation des Reibungskoeffizienten

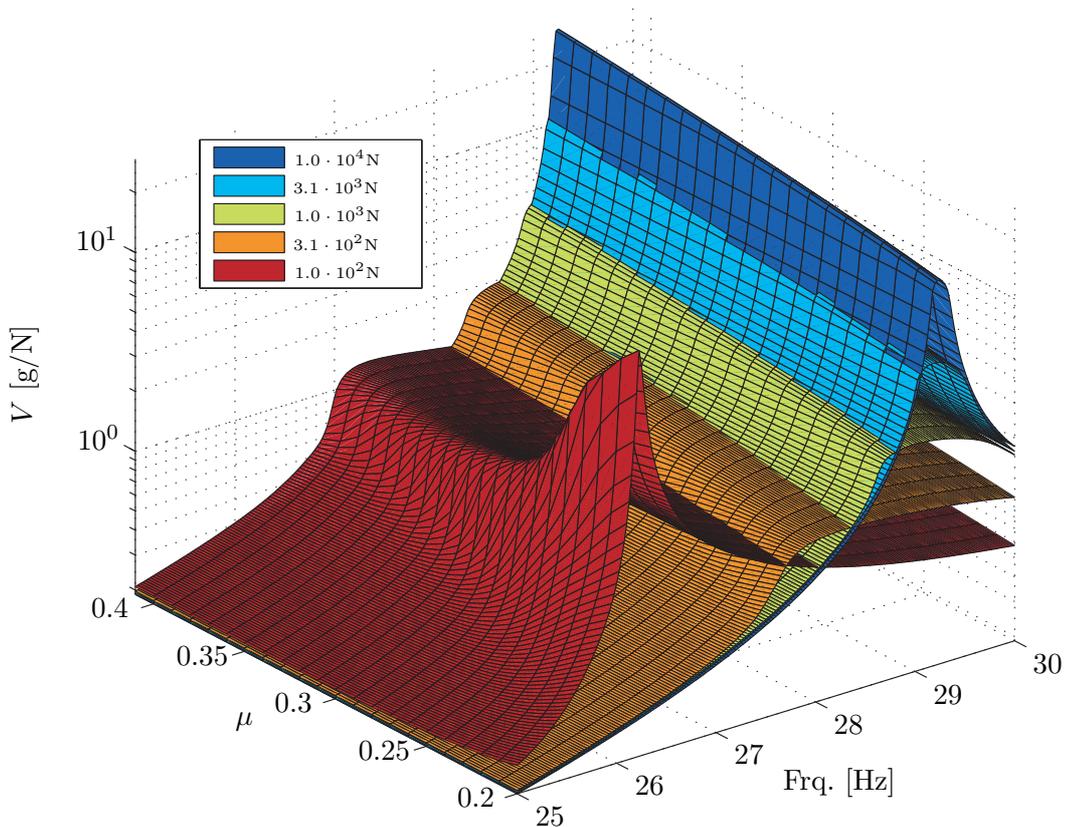


Abbildung 3.15: Variation des Reibungskoeffizienten μ : Verstärkungsfunktionen V der Testanordnung zwischen den Punkten 6 und 7 bei Variation des Reibungskoeffizient μ . Die einzelnen Flächen sind verschiedenen Schraubenvorspannkraften $\hat{F}_{S02,4,6}$ der Schrauben 2, 4 und 6 der Testanordnung zugeordnet. Die Vorspannkraften der Schrauben 1, 3 und 5 wurden auf $\hat{F}_{S01,3,5} = 10\text{kN}$ eingestellt. Für die Rautiefe wurde $R_Z = 4\mu\text{m}$ angenommen.

Der Reibungskoeffizient μ hat einen großen Einfluss auf die Dämpfungswirkung. Für die Berechnung wurde angenommen, dass der Haftreibungskoeffizient μ_0 und der Gleitreibungskoeffizient μ gleich groß sind. In [Abbildung 3.15](#) ist der Einfluss des Reibungskoeffizienten μ auf das Dämpfungsverhalten ersichtlich. Es werden die Verstärkungsfunktionen V für die Testanordnung zwischen den Punkten 6 und 7 bei einer konstanten Erregerkraftamplitude \hat{F}_E dargestellt. Die einzelnen Flächen stellen die Verstärkungsfunktionen V , für jeweils eine konstante Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} , bei variierenden Reibungskoeffizienten μ , in dem betrachteten Frequenzintervall dar. Die rote Fläche zeigt die Verstärkungsfunktionen für eine kleine Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} von $3 \cdot 10^2 \text{N}$. Während bei einem Reibungskoeffizienten von $\mu = 0.4$ die Dämpfung klar ersichtlich ist, ist die Dämpfungswirkung bei einem Reibungskoeffizienten von $\mu = 0.2$ kaum noch vorhanden.

3.3.5 Variation der Rautiefe

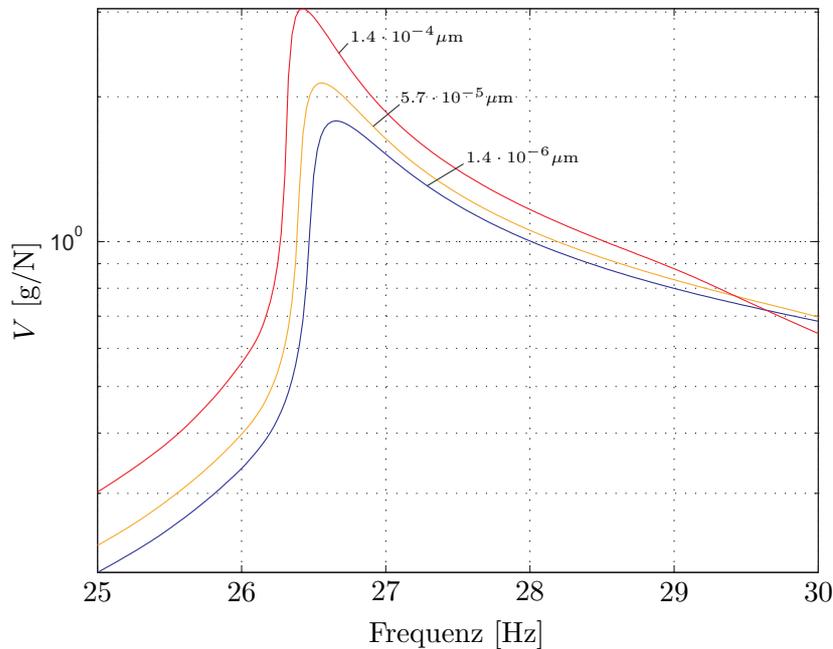


Abbildung 3.16: Variation der Rautiefe R_Z : Verstärkungsfunktionen V der Testanordnung zwischen den Punkten 6 und 7 bei Variation der Rautiefe R_Z . Angenommen wurde ein Reibungskoeffizient von $\mu = 0.3$. Für die Schrauben 1, 3 und 5 wurden Vorspannkraft von $\hat{F}_{S01,3,5} = 10 \text{kN}$ und für die Schrauben 2, 4 und 6 Schraubenvorspannkraft von $\hat{F}_{S02,4,6} = 100 \text{N}$ eingestellt.

[Abbildung 3.16](#) zeigt Verstärkungsfunktionen V der Testanordnung bei konstanten Schraubenvorspannkraften \hat{F}_{S0} , einem konstanten Reibungskoeffizienten μ und einer konstanten Erregerkraftamplitude \hat{F}_E für verschiedene Rautiefen R_Z . Das nichtlineare Normalkraftverhalten ist abhängig von der Rautiefe R_Z . Ist die Oberflächenrauigkeit groß, sind bei der

gegebenen Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} noch nicht alle Rauheitsspitzen abgeplattet. Damit haben die Kontaktsteifigkeiten in Normalenrichtung c_N und auch in tangentialer Richtung c_R noch nicht ihre Maximalwerte erreicht. Bei einer geringeren Rautiefe R_Z sind bei der gleichen Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} die Rauheitsspitzen vollständig abgeplattet. Die Kontaktsteifigkeiten in Normalenrichtung c_N und in tangentialer Richtung c_R sind in diesem Fall gleich der nominalen Kontaktsteifigkeiten c_{R0} und c_{N0} . Das Gesamtsystem bei einer größeren Rautiefe R_Z ist gegenüber dem Gesamtsystem bei einer geringeren Rautiefe R_Z weicher. In **Abbildung 3.16** wurde die rote Verstärkungsfunktion V für eine Rautiefe von R_Z ist gleich $1,4 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}$ berechnet. Die zugehörige Resonanzfrequenz liegt bei circa 26,42Hz. Für die Berechnung der blauen Verstärkungsfunktion V wurde eine wesentlich geringere Rautiefe R_Z von $1,4 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}$ angenommen. Die Resonanzfrequenz für die blaue Kennlinie liegt gegenüber der roten höher, bei ungefähr 26,65Hz.

3.3.6 Einfluss der höherfrequenten Kraftanteile

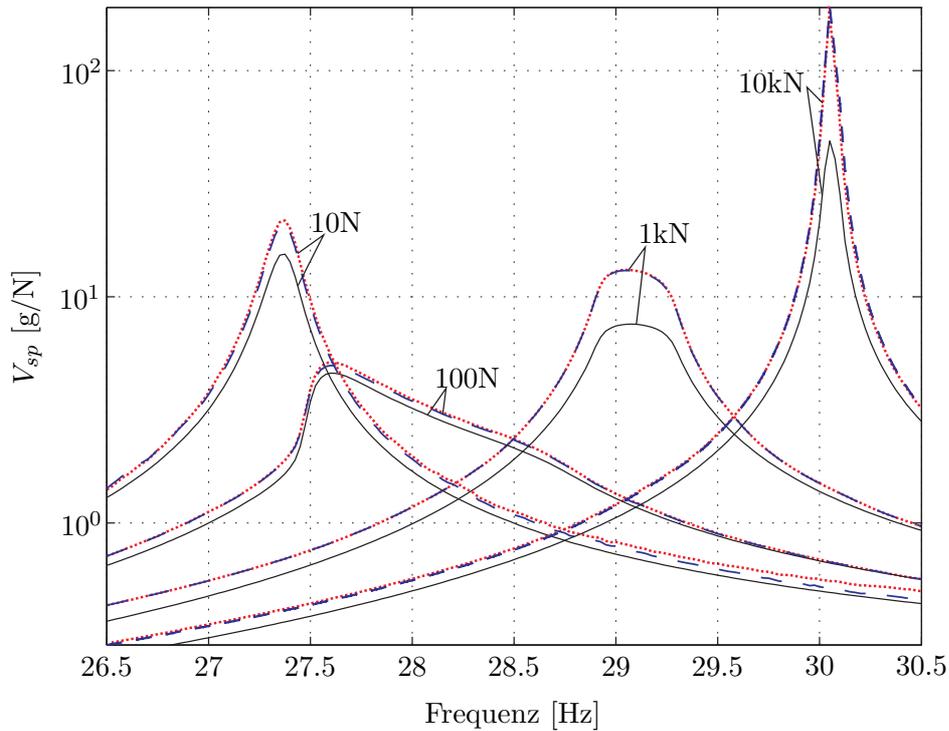


Abbildung 3.17: Verstärkungsfunktionen der Testanordnung zwischen den Punkten 6 und 7 bei Variation der Ordnung der berücksichtigten höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte. Für die Schrauben 1, 3 und 5 wurden Vorspannkräfte von $\hat{F}_{S01,3,5} = 10\text{kN}$ eingestellt. Die Vorspannkräfte der Schrauben 2, 4 und 6 wurden ebenfalls variiert. Gewählt wurden eine Rautiefe R_Z von $4 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}$ und ein Reibungskoeffizient μ von 0.3. Die Erregerkraftamplitude \hat{F}_{S0} beträgt 1N.

Abbildung 3.17 zeigt Verstärkungsfunktionen der Testanordnung bei Berücksichtigung höherfrequenter Anteile in den Kontaktkräften und folglich auch in der Schwingungsantwort. Der Begriff der Verstärkungsfunktion ist grundsätzlich für lineare Systeme definiert. Die Verstärkungsfunktion gibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal, in diesem Fall der Erregerkraft, und dem Ausgangssignal, hier der Beschleunigungsamplitude, an. In dieser speziellen Grafik soll die Verstärkungsfunktion der Zusammenhang zwischen einer Erregerkraftamplitude und der betragsmäßig maximalen auftretenden Beschleunigung während einer Schwingungsperiode sein. Zu einer bestimmten harmonischen Erregung werden mit der vorgestellten Berechnungsmethode die Fourierkoeffizienten der Beschleunigung bis zu einer bestimmten Ordnung ermittelt. Aus den berechneten Fourierkoeffizienten wird das Antwortsignal im Zeitbereich zusammengesetzt. Der betragsmäßig maximale Ausschlag dieses Antwortsignals in Relation zur Amplitude der erregenden Kraft sei die Verstärkungsfunktion V_{sp} .

Die schwarzen durchgezogenen Linien in [Abbildung 3.17](#) sind die Verstärkungsfunktionen der Testanordnung bei rein harmonischer Linearisierung des Systems. Die blau gestrichelten Linien zeigen die Verstärkungsfunktionen bei Berücksichtigung der höherfrequenten Anteile zweiter Ordnung $\hat{w}_{S2} \sin 2\tau$ und $\hat{w}_{C2} \cos 2\tau$. Die rot punktierten Graphen sind die Verstärkungsfunktionen der Testanordnung zwischen den Punkten 6 und 7, unter Berücksichtigung Terme dritter Ordnung $\hat{w}_{S3} \sin 3\tau$ und $\hat{w}_{C3} \cos 3\tau$. Man sieht, dass die Terme zweiter Ordnung eine maßgebliche Änderung der Verstärkungsfunktion bewirken. Vereinfachend wurde zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Reibungskräfte angenommen, dass während einer Periode eine konstante mittlere Normalkraft wirke (vergleiche [Unterabschnitt 2.3.6](#)). Unter dieser Annahme enthält das Frequenzspektrum der Reibungskräfte keine Anteile bei 2τ . Die Veränderung des maximalen Beschleunigungsausschlages resultiert folglich rein aus dem nichtlinearen Kontaktverhalten in Normalenrichtung. Eine Berücksichtigung der Terme $\hat{w}_{S3} \sin 3\tau$ und $\hat{w}_{C3} \cos 3\tau$ bewirkt kaum eine Änderung der maximalen Beschleunigungsantwort des Systems. Durch die Berücksichtigung noch weiterer höherer Frequenzanteile findet keine merkliche Veränderung der Verstärkungsfunktionen mehr statt.

4 Experimentelle Validierung

Zur Validierung der berechneten Ergebnisse wurden zwei kreisringförmige Probekörper gefertigt und an einem Prüfstand Resonanzkurven für die Testanordnung gemessen.

In [Abschnitt 4.1](#) wird gezeigt, dass durch die Finite Elemente Modellierung die Dynamik der Einzelteile der Testanordnung gut abgebildet wird. Dazu werden die Ergebnisse einer experimentellen Schwingungsanalyse mit der Rechnung verglichen, beziehungsweise die Materialeigenschaften der Finiten Elemente Modelle der Einzelteile so verändert, dass gemessene und berechnete Resonanzkurven gut übereinstimmen. In [EWINS \(2000\)](#) werden verschiedene Vorgehensweisen zur Durchführung einer experimentellen Schwingungsanalyse beschrieben. Für eine Prüfanordnung mit linearem Verhalten ist es möglich, die Resonanzkurven über Anregung mit einem so genannten Impulshammer zu bestimmen. Bei linearen Systemen ist die Verstärkung durch die Struktur unabhängig von der Höhe der erregenden Kraft. Des Weiteren reagiert ein lineares System bei harmonischer Anregung nur mit der gleichen Frequenz wie die des anregenden Signals. Das dynamische Verhalten der Einzelteile der Prüfanordnung kann als linear angesehen werden. Das System wird an dem gewünschten Erregerpunkt durch einen Schlag mit dem Impulshammer angeregt. Ein im Impulshammer integrierter Kraftsensor misst den anregenden Kraftstoß. Ein idealer Kraftstoß, der als Rechteckimpuls angesehen werden kann, enthält bei Zerlegung in eine Fourierreihe das gesamte Frequenzspektrum. Durch die Zerlegung des gemessenen Impulses in eine Fourierreihe kann die jeweilige Anregung der Struktur an diskreten Frequenzen ermittelt werden. An jenem Punkt der Testanordnung an dem die Antwort gemessen werden soll wird ein Beschleunigungssensor angebracht. Das gemessene Antwortsignal wird ebenfalls in eine Fourierreihe zerlegt. Damit kann jeder Erregerfrequenz die entsprechende Beschleunigungsantwort zugeordnet werden.

In [Abschnitt 4.2](#) wird dargestellt wie die Schraubenvorspannkräfte während der experimentellen Schwingungsanalyse gemessen werden.

In [Abschnitt 4.3](#) wird gezeigt, dass die berechnete statische Normalkraftverteilung qualitativ durch Messung der Druckverteilung mit drucksensitiven Folien bestätigt werden kann.

In [Abschnitt 4.4](#) werden die mit dem vorgestellten Näherungsverfahren berechneten Ergebnisse mit Resultaten einer experimentellen Schwingungsanalyse verglichen. Bei nichtlinearen Systemen, wie dem der betrachteten gekoppelten Strukturen, ist eine Messung mit dem Impulshammer nicht zulässig, da die Verstärkungsfunktion zwischen zwei Punkten unter anderem abhängig von der Höhe der Erregerkraft ist. Wird ein nichtlineares System harmonisch erregt, setzt sich das Antwortsignal bei Fourierzerlegung neben einem Anteil bei der erregenden Frequenz auch durch Anteile bei höherharmonischen Frequenzen zusammen. Um die Verstärkung für eine bestimmte Erregerkraft zu ermitteln, kann die Prüfanordnung durch einen Schwingererregter mit einer definierten Erregerkraft bei diskreten Erregerfrequenzen angeregt werden. Zu einer bestimmten Frequenz kann wiederum mit einem Beschleunigungssensor die Antwort an einem bestimmten Punkt der Prüfanordnung gemessen werden. Das gemessene Antwortsignal kann durch Fourierzerlegung wieder in einzelne Frequenzanteile zerlegt werden. Als Verstärkung wird nur das Verhältnis des Anteils der Beschleunigungsantwort bei der Erregerfrequenz zur Erregerkraftamplitude verstanden.

4.1 Schwingungsanalyse der Einzelteile

Um das gerechnete Schwingungsverhalten der beiden verschraubten, kreisringförmigen Probekörper mit der Messung vergleichen zu können, wurde vorab das dynamische Verhalten der beiden Einzelteile gemessen. Anschließend wurde das dynamische Verhalten der Finite Elemente Modelle an diese Messungen angepasst. Es wurden die Resonanzkurven der beiden Einzelkörper durch Anregung mit einem Impulshammer gemessen, und es wurden die Resonanzkurven der Finiten Elemente Modelle der beiden Einzelteile berechnet. Es erfolgte eine Anpassung der Eigenfrequenzen der Finiten Elemente Modelle der beiden Einzelkörper an die Messung durch Veränderung des Elastizitätsmoduls. Des Weiteren sind die Parameter α und β des Rayleigh-Ansatzes (siehe [Gleichung 2.42](#)), durch den die viskose Strukturdämpfung der Einzelteile angenähert wird, laut [BATHE \(2002\)](#) bestimmt worden. [Abbildung 4.1](#) und [Abbildung 4.2](#) zeigen die gemessenen und die berechneten Resonanzkurven der beiden einzelnen kreisringförmigen Prüfkörper. Für den oberen, frei beweglichen kreisringförmigen Teil wurde ein Elastizitätsmodul von $E = 1.95 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und für den unteren, fest eingespannten Teil ein Elastizitätsmodul von $E = 1.9 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ bei der Modellierung verwendet. Für die Dichte von Stahl ist ein Wert von $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ angenommen worden. Durch die Finiten Elemente Modelle wird das Schwingungsverhalten der beiden Einzelteile gut abgebildet. Die Abweichungen der berechneten zu den gemessenen Eigenfrequenzen liegen im betrachteten Bereich für den unteren, eingespannten Körper unter 0.81% und für den oberen, frei beweglichen Körper unter 1.78%. Zur Bestimmung der Koeffizienten α und β

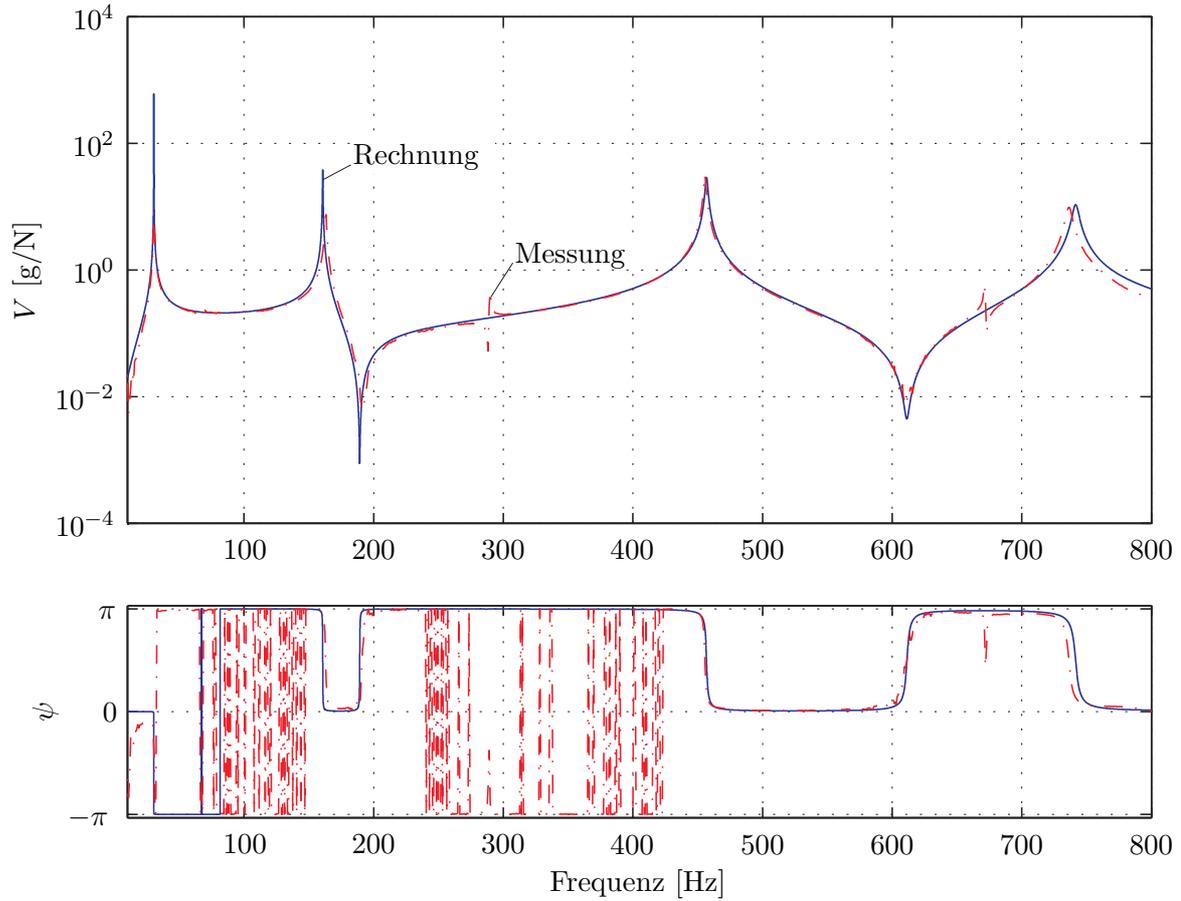


Abbildung 4.1: Vergleich der gemessenen und der berechneten Resonanzkurven des unteren kreisringförmigen, eingespannten Teils (Testkörper 1). Für das Finite Elemente Modell wurde ein Elastizitätsmodul von $E = 1.95 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und eine Dichte von $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ verwendet. Aus dem Abgleich der Messung mit der Berechnung im höherfrequenten Bereich ergaben sich für die Parameter der Rayleigh Dämpfung $\alpha = 20$ und $\beta = 7 \cdot 10^{-8}$.

des Rayleigh-Ansatzes wurden alle Übertragungsfunktionen zwischen den einzelnen definierten Messpunkten der Testanordnung verwendet. Für die Ermittlung der Koeffizienten α und β sind nur die Eigenfrequenzen größer 300Hz berücksichtigt worden, da die Verläufe der Resonanzkurven der darunter liegenden Eigenfrequenzen durch die Messung mit dem Impulshammer zu ungenau aufgelöst werden. Die Koeffizienten α und β für den fest eingespannten Einzelteil sind höher als die für den frei beweglichen Teil. Dies kommt daher, da in der Einspannstelle des unteren kreisringförmigen Teils bereits Fügstellendämpfung auftritt. Diese wird durch die Strukturdämpfung mitberücksichtigt, beziehungsweise angenähert.

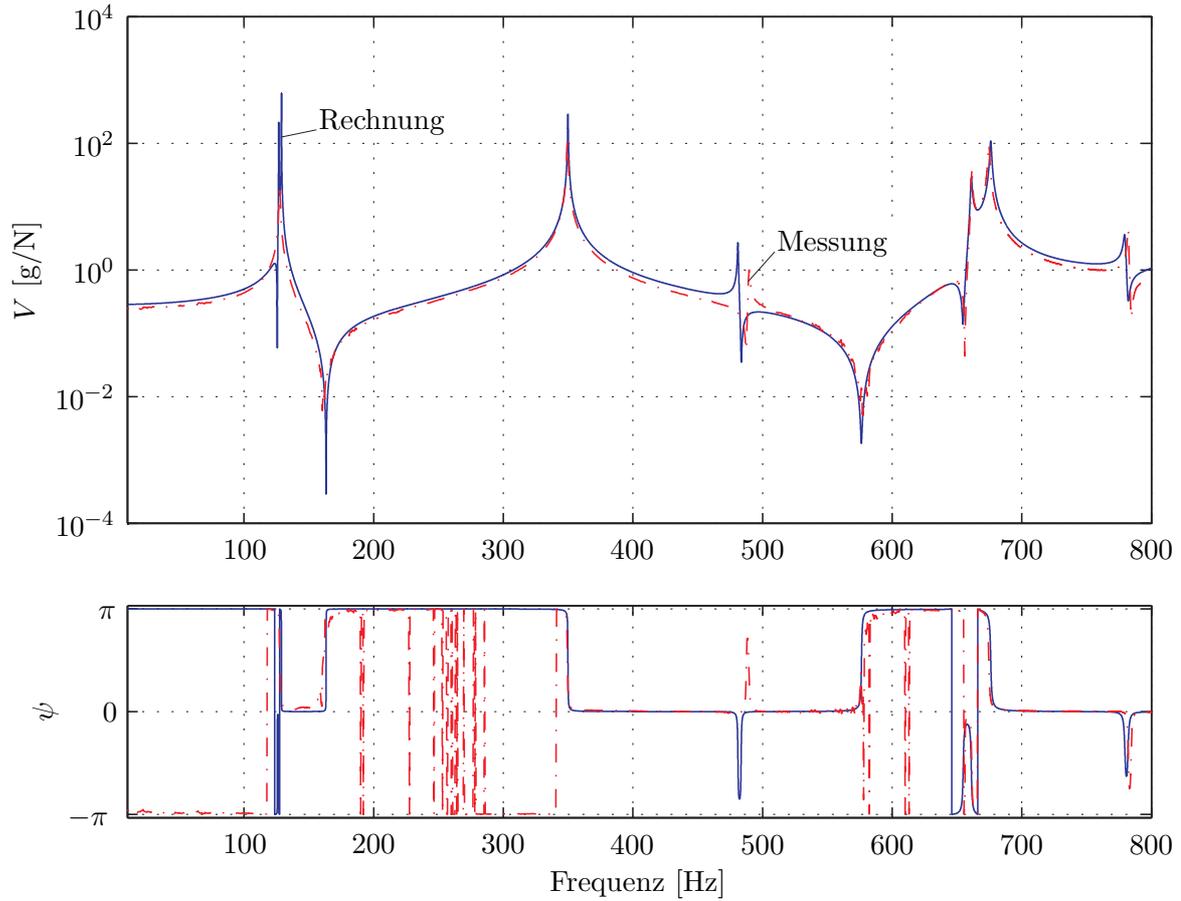


Abbildung 4.2: Vergleich der gemessenen und der berechneten Resonanzkurven des oberen, kreisringförmigen, frei beweglichen Teils (Testkörper 2). Für das Finite Elemente Modell wurde ein Elastizitätsmodul von $E = 1.9 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und eine Dichte von $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ verwendet. Aus dem Abgleich der Messung mit der Berechnung im höherfrequenten Bereich ergaben sich für die Parameter der Rayleigh Dämpfung $\alpha = 15$ und $\beta = 2 \cdot 10^{-8}$.

4.2 Schraubenvorspannkräfte

Es soll das Dämpfungsverhalten miteinander verschraubter, elastischer Körper mit ebenen, rauen Kontaktflächen aufgrund der Reibung im Kontakt bei bestimmten Schraubenvorspannkräften berechnet werden. Um die Rechnung zu validieren müssen auch während der Messung der Resonanzkurven der Probekörper die Schraubenvorspannkräfte gemessen werden. Um die Schraubenvorspannkräfte zu ermitteln wurden spezielle Messschrauben gefertigt (siehe [Abbildung 4.3](#)). Um eine definierte Kontaktfläche zwischen dem Schraubenkopf und der Testanordnung zu erzielen, wurden keine Standardschrauben, sondern eigens gefertigte Schrauben verwendet. Im Schraubenschaft dieser Messschrauben wurden Dehnmessstreifen zum Messen der Vorspannkräfte eingeklebt. Um eine definierte Auflagefläche zu

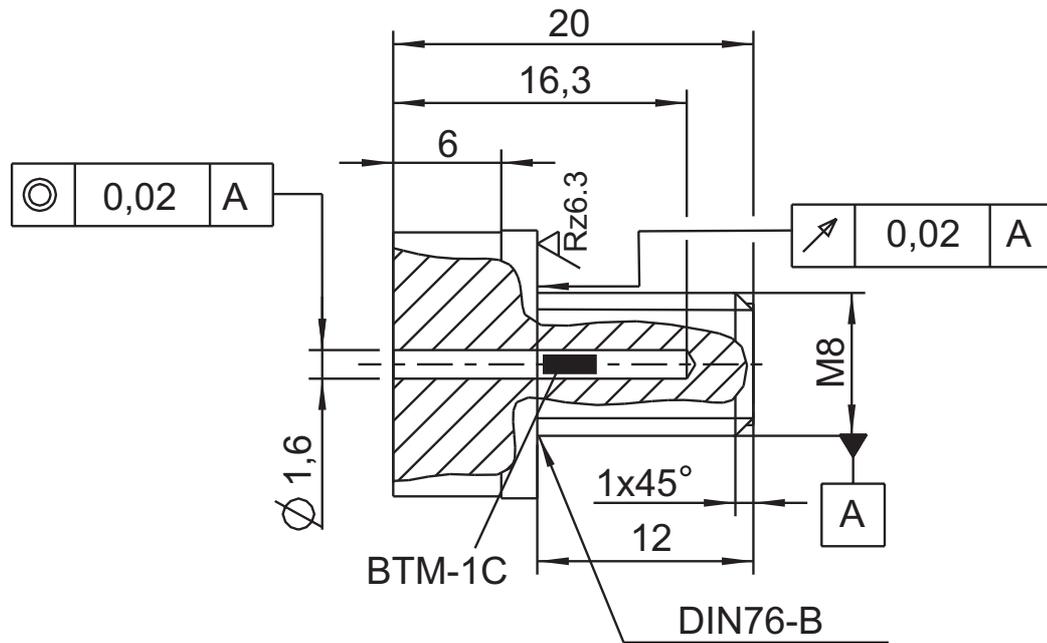


Abbildung 4.3: Applikation der Dehnmessstreifen im Schraubenschaft

erzielen, muss besonderes Augenmerk auf den Rundlauf dieser gelegt werden. Des Weiteren muss die Lage des Dehnmessstreifen zum Schraubenschaft möglichst genau festgelegt werden, um die Schraubenvorspannkraft so genau wie möglich messen zu können. Die Genauigkeit der Dehnmessstreifen beträgt 1% vom Messbereichsendwert und somit circa $\pm 100\text{N}$. Die Rautiefe R_z der Auflagefläche der Schraubenköpfe wurde mit Hilfe eines Oberflächenmessgerätes gemessen. Sie beträgt im Mittel für die sechs Schrauben $16\mu\text{m}$.

4.3 Flächenpressung im Kontakt

Um die berechnete Flächenpressung in der Kontaktfläche aus der Finite Elemente Simulation zu validieren wurde diese mit drucksensitiven Folien an der Prüfanordnung gemessen. Es wurden drucksensitive Folien der Firma FUJIFILM verwendet. Ab einem gewissen Druck zerplatzen in der Folie integrierte Farbpatronen und kennzeichnen somit die Stellen an denen dieser Schwellendruck überschritten wird. Um zumindest qualitativ die Flächenpressung zu verifizieren wurden für die Messung drei Folien mit einem unterschiedlichen Messbereich verwendet. In [Abbildung 4.4](#) sind die drucksensitiven Folien nach einer Belastung durch die Schraubenvorspannkraft \hat{F}_{S0} von 10kN dargestellt. Der gestrichelte Kreis markiert auf den Folien der drei Messungen die Auflagefläche des Schraubenkopfes. In [Abbildung 4.4c](#) wurde die Folie mit dem höchsten Messbereich von 10 Mega-Pascal bis 50 Mega-Pascal verwendet. Man sieht, dass auf die gesamte Auflagefläche unterhalb des Schraubenkopfes

Folientyp	Messbereich [MPa]
Super Low Pressure (LLW)	0.5-2.5
Low Pressure (LW)	2.5-10
Medium Pressure (MW)	10-50

Tabelle 4.1: Typen drucksensitiver Folien von FUJIFILM

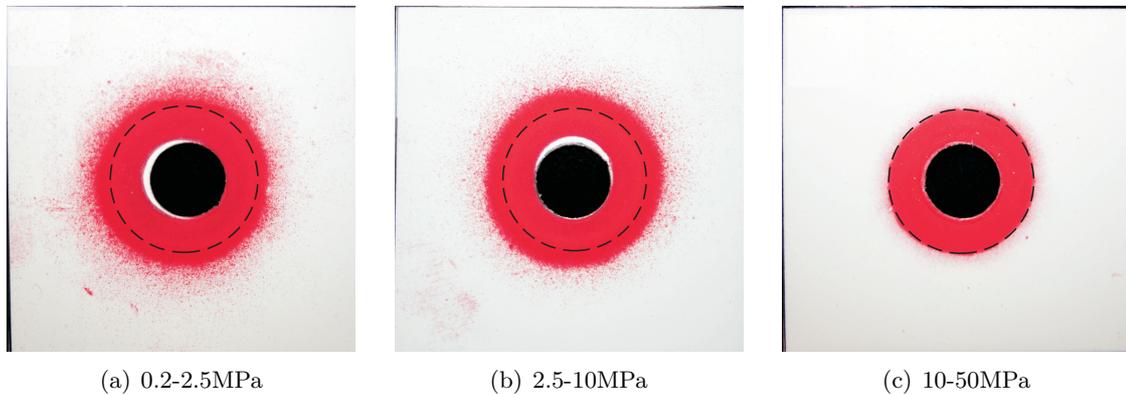


Abbildung 4.4: Mit drucksensitiven Folien gemessene Flächenpressung im Kontakt bei einer Schraubenvorspannkraft von $\hat{F}_{S0} = 10\text{kN}$. Es wurden Folien von FUJIFILM mit unterschiedlichen Messbereichen verwendet

ein größerer Druck, als der maximale Druck von 50 Mega-Pascal wirkt. In [Abbildung 4.4b](#) wurde eine Folie mit dem nächsten, kleineren, verfügbaren Messbereich verwendet. Es ist ersichtlich, dass auch außerhalb des Schraubenkopfes der Druck in einem Teil der Kontaktfläche zumindest 10 Mega-Pascal erreicht. Vergleicht man die gemessene Druckverteilung in [Abbildung 4.4b](#) mit der gemessenen Druckverteilung in [Abbildung 4.4a](#), wobei hier für die Messung eine drucksensitive Folie mit dem nächsten, noch kleineren, verfügbaren Messbereich verwendet wurde, so sieht man, dass in etwa der gleiche Bereich eingefärbt wird. Daraus lässt sich schließen, dass der Druck außerhalb der rot eingefärbten Zone rasch abfällt. Dieses Messergebnis bestätigt qualitativ die Resultate aus der Kontaktrechnung mit ANSYS®.

4.4 Schwingungsanalyse der beiden verschraubten kreisringförmigen Probekörper

Zur Validierung der Ergebnisse aus der Simulation wurde ein Prüfstand (siehe [Abbildung 4.5](#) und [Abbildung 4.6](#)) konzipiert. Die beiden miteinander verschraubten kreisringförmigen Probekörper werden mit einem Schwingerreger angeregt. Es muss sichergestellt werden, dass die Erregerkraft sinusförmig mit konstanter Amplitude ist. Um zu gewährleisten, dass die

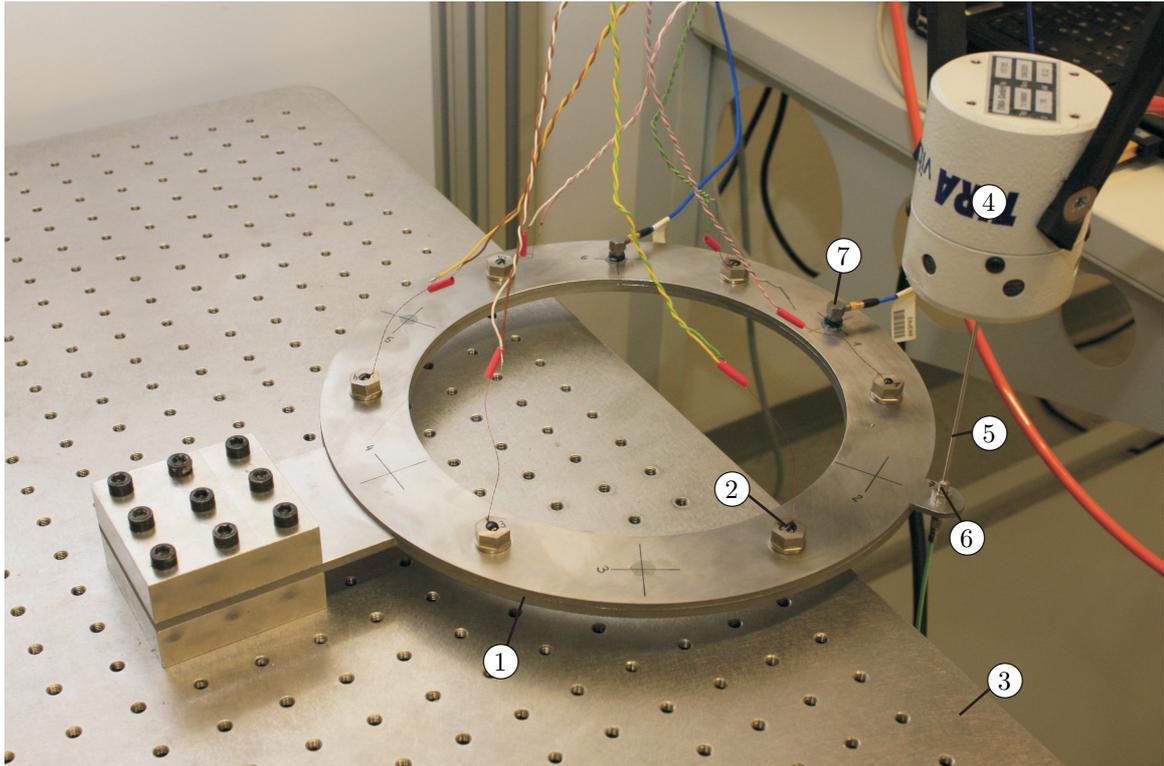


Abbildung 4.5: Prüfanordnung – ① Prüfkörper ② Messschrauben ③ Schwingungsfundament ④ Schwingerreger ⑤ Stinger ⑥ Kraftsensor ⑦ Beschleunigungssensor.

Erregerkraft nur in z -Richtung wirkt, wird diese über einen langen, biegeweichen Stab, einen so genannten Stinger eingeleitet. Direkt an der Einleitungstelle wird die Kraft mit einem piezoelektrischen Sensor gemessen. Das gemessene Ladungssignal wird verstärkt und das Spannungssignal zur Speisung des Shakers geregelt und mit einem Leistungsteil verstärkt. Die Beschleunigungsantwort an bestimmten Punkten der Testanordnung wird ebenfalls mit piezoelektrischen Sensoren gemessen. Der für die Schraubenvorspannkkräfte repräsentative Spannungsabfall an den Dehnmessstreifen der Messschrauben wird mit einem Spannungsverstärker verstärkt und die Schraubenvorspannkkräfte an einem PC visualisiert.

Abbildung 4.7 zeigt den Vergleich zwischen gemessener und berechneter Verstärkungsfunktion V und Phasenlage ψ der Prüfanordnung zwischen den Messpunkten 6 und 7. Es wurde ein Frequenzbereich zwischen 20 und 550 Hertz untersucht. Erregt wurde mit einer Erregerkraftamplitude \hat{F}_{E0} von 0,3N. Alle Schrauben wurden mit einer Kraft von $\hat{F}_{S01,2,3,4,5,6} = 4,5\text{kN}$ vorgespannt. Man sieht, dass die berechneten und die gemessenen Eigenfrequenzen der gekoppelten Struktur absolut betrachtet vor allem im niederfrequenten Bereich gut übereinstimmen (vergleiche auch Tabelle 4.2). Die relative Abweichung der

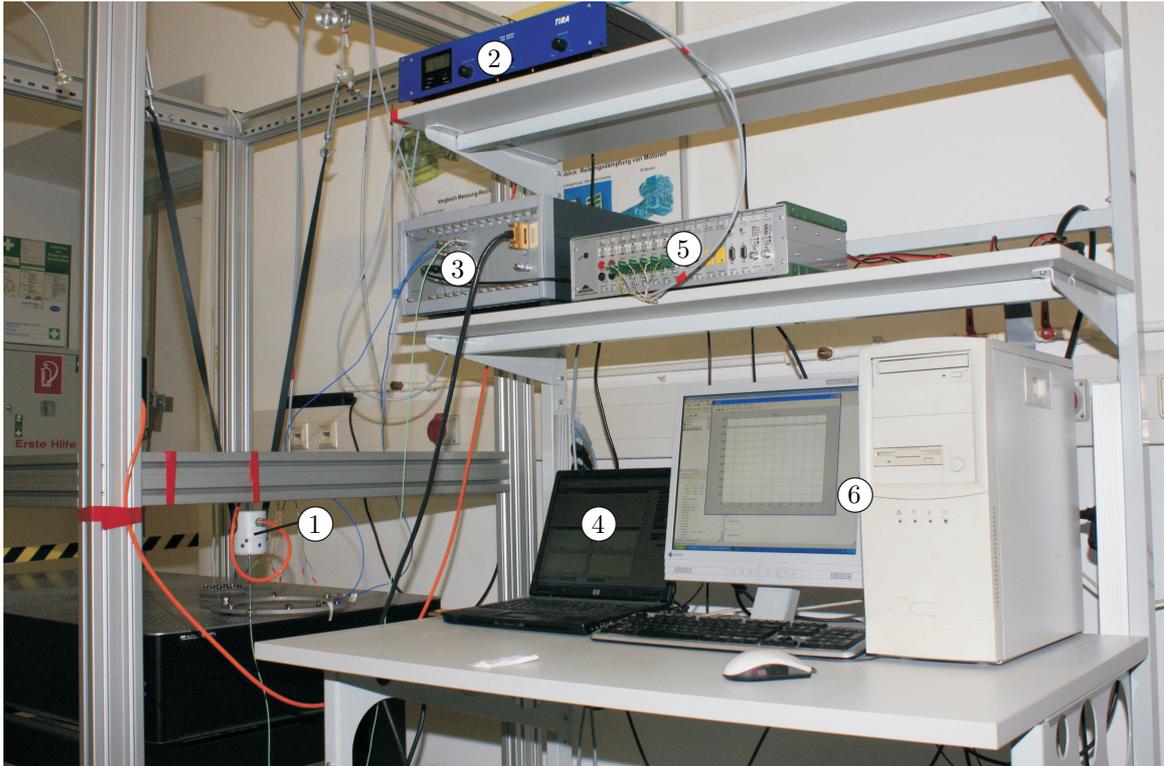


Abbildung 4.6: Prüfstands Aufbau – ① Schwingerreger ② Leistungsverstärker für den Schwingerreger ③ System zur Regelung der Erregerkraft und zur Aufzeichnung der Signale der Beschleunigungsaufnehmer ④ Laptop zur Auswertung der Erregerkraft- und Beschleunigungssignale ⑤ Spannungsverstärker für Signale der Messschrauben ⑥ PC mit Messkarte zur Visualisierung der Schraubenvorspannkraft.

einzelnen gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen ist größenordnungsmäßig über den gesamten Frequenzbereich circa gleich groß. Auch die Formen der gemessenen und die der berechneten Frequenzkennlinien stimmen gut überein. Sowohl die gemessenen, wie auch die berechneten Graphen sind in dieser Abbildung zu grob aufgelöst, so dass keine Aussage gemacht werden kann, wie gut die Höhe der gemessenen Amplituden durch die Simulation wiedergegeben werden. Um eine Aussage darüber machen zu können, wie gut die Höhe der Amplituden mit dem vorgestellten Verfahren berechnet werden kann, wurde die erste Eigenfrequenz der Testanordnung detaillierter betrachtet (siehe [Abbildung 4.8](#)). Die Testanordnung wurde mit einer Erregerkraftamplitude \hat{F}_{E0} von 0,2N in einem Frequenzbereich von 20Hz bis 30Hz im Punkt 7 angeregt. Drei der sechs Schrauben wurden mit 8kN vorgespannt. Die Vorspannkraft der restlichen drei Schrauben wurde variiert. Man kann erkennen, dass die Verschiebung der Eigenfrequenz durch die Erhöhung der Schraubenvorspannkraft gut wiedergegeben wird. Die Abnahme der Reibungsdämpfung bei Erhöhung der Schrau-

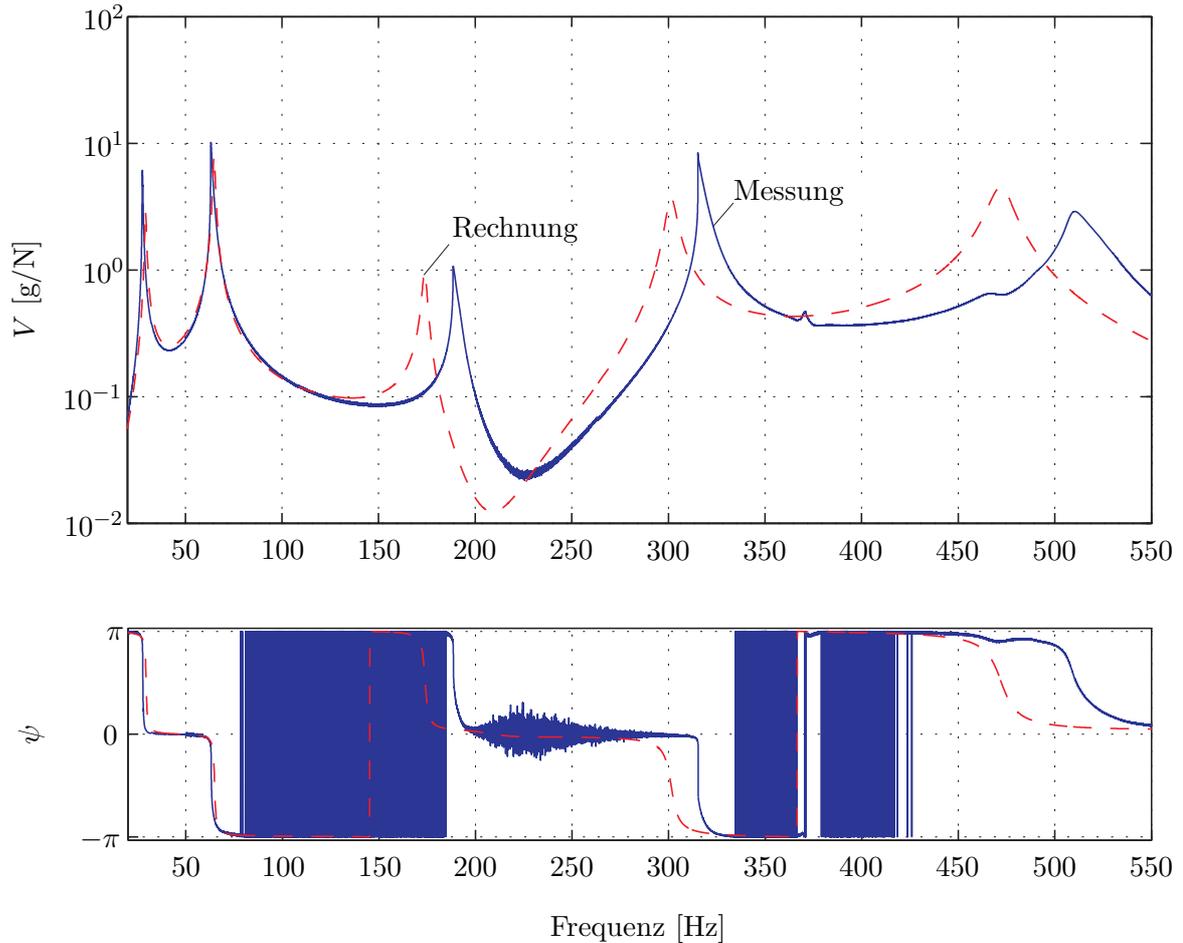


Abbildung 4.7: Gemessene und berechnete Verstärkungsfunktion V und Phasenverschiebung ψ der beiden miteinander verschraubten, kreisringförmigen Probekörper, bei einer Erregerkraftamplitude \hat{F}_{E0} von 0,3N und Schraubenvorspannkraften $\hat{F}_{S01,2,3,4,5,6}$ von 4,5kN. Für die Rechnung wurde eine gemessene, Rautiefe R_Z von $4\mu\text{m}$ verwendet und ein Reibungskoeffizienten μ von 0,1 angenommen.

benvorspannkraften ist in der Berechnung wesentlich höher als diese gemessen wurde. Der vermutliche Grund dafür liegt in der Vereinfachung, dass allein jene Kontaktknotenpaare die in der Berechnung der dynamischen Systemantwort Berücksichtigung finden, die sich bereits bei Berechnung der statischen Normalkraftverteilung in den Kontaktflächen berühren. Während der Schwingung des Systems können jedoch zusätzliche Bereiche in Kontakt treten, die bei rein statischer Betrachtung klaffen. In [Abbildung 4.9](#) sind die Verstärkungsfunktionen für verschiedene Schraubenvorspannkraften dargestellt. Weiters sind alle Kontaktknotenpaare, auch jene die sich laut der statischen Berechnung nicht berühren, dargestellt. Es wurde überprüft, ob durch die dynamische Anregung zusätzliche, einander zugeordnete Knoten in Kontakt treten. Die Frequenzbereiche in denen zusätzlicher Kontakt auftreten würde sind

4 Experimentelle Validierung

Messung [Hz]	Rechnung [Hz]	abs. Fehler [Hz]	rel. Fehler [%]
27.8	29.5	-1.7	6.1
63.2	64.9	-1.7	2.7
188.6	173.8	14.8	7.8
315.3	301.5	13.8	4.4
510.0	471.9	38.1	7.4

Tabelle 4.2: Vergleich gemessene und berechnete Eigenfrequenzen.

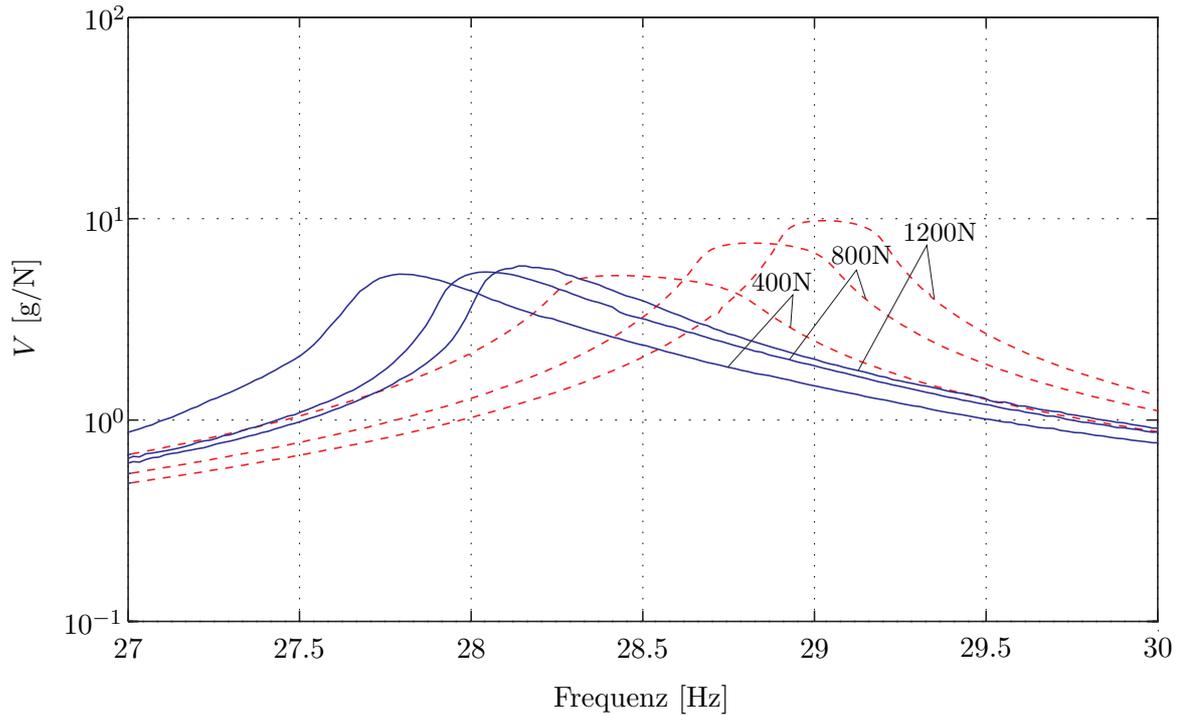


Abbildung 4.8: Gemessene (blau durchgezogen) und berechnete (rot gestrichelt) Verstärkungsfunktionen V der beiden miteinander verschraubten, kreisringförmigen Probekörper, bei einer Erregerkraftamplitude \hat{F}_{E0} von 0,2N. Die Schraubenvorspannkkräfte $\hat{F}_{S02,4,6}$ wurden variiert. Die Schraubenvorspannkkräfte $\hat{F}_{S01,3,5}$ waren bei allen Messungen und Rechnungen 8kN. Für die Rechnung wurde eine gemessene, Rautiefe R_Z von $4\mu\text{m}$ verwendet und ein Reibungskoeffizienten μ von 0,08 angenommen.

in den Verstärkungsfunktionen markiert. Es ist auch die Lage dieser zusätzlichen Kontaktknoten in der Kontaktfläche eingezeichnet. Es ist klar ersichtlich, dass zusätzlicher, aus der periodischen Anregung resultierender Kontakt vor allem in der Nähe der Resonanzfrequenz auftritt. Die geometrische Lage dieser Kontaktknotenpaare ist in der Nähe der Einspannstelle des unteren kreisringförmigen Körpers. Die dort auftretenden mittleren Normalkräfte sind relativ gering. Eine große Dämpfungswirkung in der Fügestelle ist jedoch vor allem in Bereichen mit niedrigen Normalkräften gegeben (vergleiche [Abbildung 3.13](#)). Somit liegt die

Vermutung nahe, dass bei Miteinbeziehen dieser zusätzlichen Kontakte in die Berechnung die Verstärkung V niedriger gegenüber der aktuellen Berechnung, ohne die Berücksichtigung dieser Kontakte, ist.

Aus [Tabelle 4.2](#) erkennt man des Weiteren, dass die berechneten Eigenfrequenzen tendenziell zu niedrig sind. Bei Berücksichtigung der zusätzlichen, durch die dynamische Beanspruchung verursachten Kontakte würde das berechnete System steifer sein.

An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass man durch die großen Gradienten der Normalkraftverteilung in der Kontaktfläche an die Grenzen des vorgestellten Berechnungsverfahrens stößt. In den Arbeiten von [SEXTRO \(1997\)](#), [PANNING \(2005\)](#) und [SEXTRO \(2007\)](#) wurde jedoch ausgeführt, dass bei gleichmäßigen, flächigem Kontakt mit dem Verfahren der harmonischen Balance eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung gegeben ist. Unter Vernachlässigung der höherfrequenten Anteile entspricht die vorgestellte Berechnungsmethode dem Verfahren der harmonischen Balance.

Für den Vergleich zwischen den gemessenen und den berechneten Resonanzkurven wurden die höherfrequenten Anteile der Kontaktkräfte und des Weiteren der Beschleunigungsantwort nicht berücksichtigt. Der Grund liegt darin, dass mit dem verwendeten Messsystem zur Ermittlung der Resonanzkurven ebenfalls die höherfrequenten Anteile der Schwingungsantwort keine Berücksichtigung finden.

4 Experimentelle Validierung

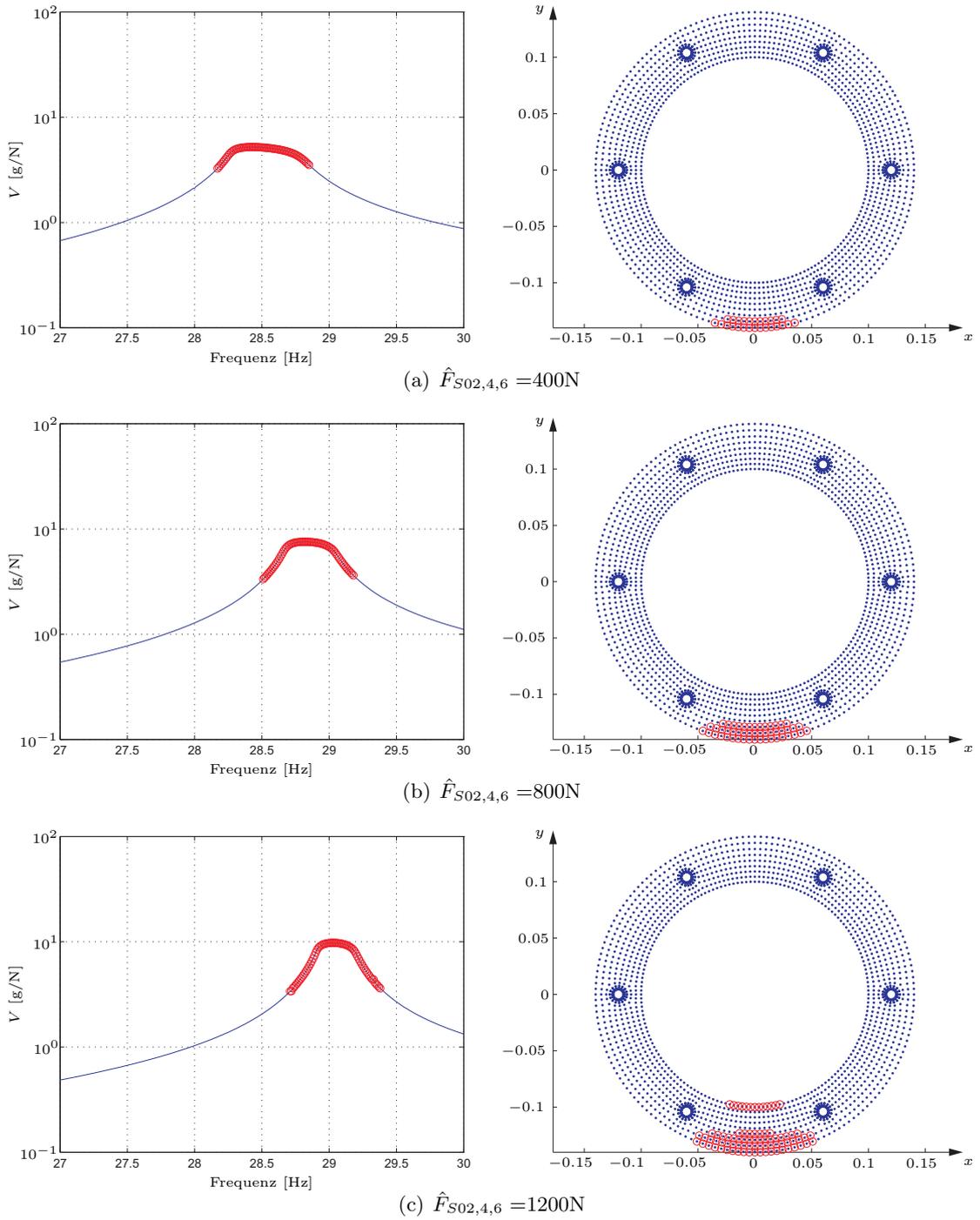


Abbildung 4.9: Einander zugeordnete Kontaktknotenpaare, die sich bei der statischen Kontaktrechnung nicht berühren, jedoch während der Schwingung in Kontakt treten. Für verschiedene Schraubenvorspannkraften ist jeweils der Frequenzbereich, sowie die Lage der Knotenpaare in denen der zusätzliche Kontakt, der aufgrund der dynamischen Belastung auftreten würde, markiert.

5 Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement

Um bei Werkzeugmaschinen zwischen verschiedenen Werkzeugen zur Bearbeitung eines Werkstücks rasch wechseln zu können, werden Werkzeughalter in der Art von Revolver-scheiben verwendet. Diese Revolverköpfe können am Umfang verteilt eine Vielzahl von Werkzeugen aufnehmen. Durch Rotation des Werkzeughalters kann je nach Bearbeitungsschritt ein anderes Werkzeug in Eingriff mit dem Werkstück gebracht werden. Ein Nachteil bei dieser Ausführung von Werkzeughaltern ist, dass diese vergleichsweise massiv und steif ausgeführt werden müssen. Die je nach Werkzeug und Bearbeitungsschritt auftretenden Bearbeitungskräfte müssen vom Werkzeughalter aufgenommen werden. Der Reduktion der Steifigkeit des Werkzeughalters steht die Forderung entgegen, das Werkzeug positionsgenau am Werkstück beziehungsweise gegenüber dem Werkstück zu halten, um damit eine hohe Bearbeitungsqualität und Oberflächenqualität des Werkstücks garantieren zu können. Derartige Werkzeughalter sind kostenintensiv zu fertigen und lassen aufgrund der großen Trägheit relativ kleine Vorschubgeschwindigkeiten zu¹.

Zu den oben genannten Anforderungen, die sich im Wesentlichen durch Erhöhung der statischen Steifigkeit realisieren lassen, ergeben sich noch weitere Forderungen an das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen. In [WECK und BRECHER \(2006\)](#) werden die verschiedenen Anregungsmechanismen von Werkzeugmaschinen erläutert. Im Wesentlichen wird zwischen Fremderregung und Selbsterregung unterschieden.

Fremderregte Schwingungen sind dadurch gekennzeichnet, dass Schwingungen mit der Erregerfrequenz bei periodischer Anregung und Schwingungen mit Eigenfrequenzen bei stoßartiger Anregung an der Werkzeugmaschine auftreten. Ursachen für Fremderregung können schadhafte oder ungenau gefertigte Maschinenelemente, wie Unwuchten, Lagerfehler und Zahneingriffsstöße sein. Wechselnde Schnittkräfte, zum Beispiel durch unterbrochenen Schnitt, verursachen ebenfalls erzwungene Schwingungen. Erzwungene Schwingungen lassen sich meist durch Beseitigung der Störquelle oder Veränderung der Anregungsfrequenz auf ein akzeptables Ausmaß reduzieren.

¹vgl. [PAT AT NR 2BA436/2009](#)

5 Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement

Selbsterregte Schwingungen sind dadurch charakterisiert, dass die Werkzeugmaschine mit einer Eigenfrequenz oder mit mehreren Eigenfrequenzen schwingt, wobei keine äußeren Kräfte auf das System Werkstück-Werkzeug wirken. Als eine der Ursachen wird in **WECK und BRECHER** der Regenerativeneffekt genannt. In **Abbildung 5.1** wird dieser Effekt anhand eines Drehvorgangs prinzipiell erklärt. Beim ersten Eingriff des Drehmeißels wird das System durch einen Kraftstoß zu Schwingungen mit zumindest einer Eigenfrequenz angeregt. Durch diese Schwingungen entstehen kleine Wellen auf der Werkstückoberfläche. Nach einer Umdrehung wird diese wellige Oberfläche vom Meißel abgespannt und durch die nun auftretende Varianz des Spanquerschnittes erneut zu Schwingungen in der Eigenfrequenz angeregt. Reicht die Systemdämpfung zur Beruhigung dieser Schwingungen nicht aus wird der Zerspanungsprozess instabil. Man spricht von regenerativem Rattern. Das Resultat ist eine wellenförmige Ausbildung der Oberfläche (siehe **Abbildung 5.2**).

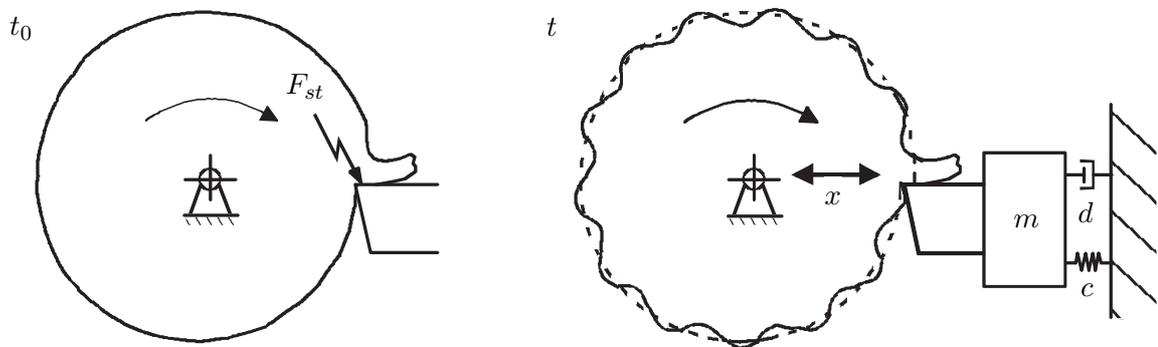


Abbildung 5.1: Selbsterregte Schwingungen verursacht durch den Regenerativeneffekt am Beispiel einer Drehmaschine.

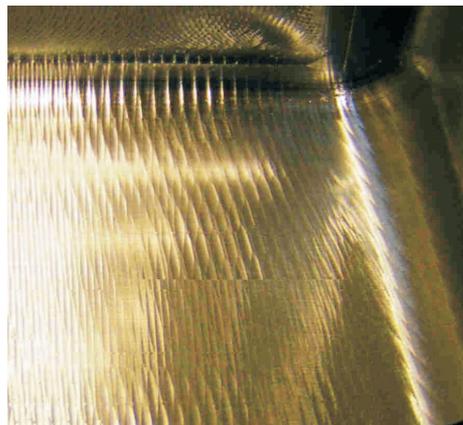


Abbildung 5.2: Rattermarken: wellenförmige Werkstückoberfläche¹

¹http://www.wzl.rwth-aachen.de/de/7580cb7d2442cb22c1256fb200470a45_projekte.htm (03.10.2009)

5 Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement

Ziel des Patentes [PAT AT NR 2BA436/2009](#) ist es, Werkzeughalter weniger massiv auszuführen, um höhere Schnittgeschwindigkeiten zu erzielen und größere Spanquerschnitte bei der Zerspanung ohne die Bildung von Rattermarken zu ermöglichen. Trotz der daraus resultierenden reduzierten Steifigkeit soll die Fertigungsgenauigkeit erhalten bleiben. Um die Qualität der gefertigten Oberflächen sicherzustellen sollen Schwingungsamplituden des Werkzeughalters in dessen Eigenfrequenzen so gering wie möglich gehalten werden. Durch Integration eines Reibungsdämpfungselements in die Revolverscheibe sollen die Schwingungsamplituden reduziert und damit die Entstehung von Rattermarken am Werkstück verhindert werden. In [Abbildung 5.3](#) ist ein Schnitt durch einen derartigen Revolverkopf dargestellt. Dieser besteht aus dem Werkzeughalter. Konzentrisch zur Drehachse des Werkzeughalters ist eine Platte angebracht. Diese liegt auf einer kreisringförmigen Fläche am Werkzeughalter auf. Es wird eine gleichmäßige Druckverteilung in dieser Kontaktfläche realisiert. Der Anpressdruck mit dem diese Dämpfungsplatte auf den Werkzeughalter gedrückt wird kann über Schrauben eingestellt werden. Der Druck kann so definiert eingestellt und damit etwaig auftretende Schwingungen gezielt reduziert werden.

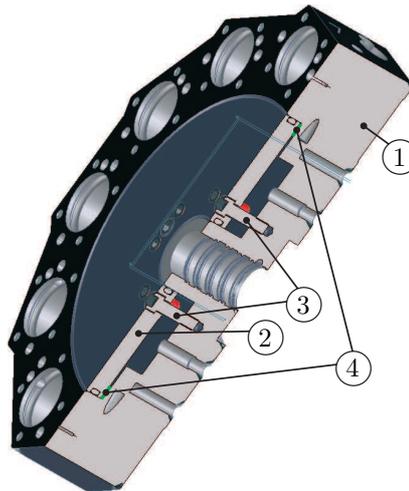


Abbildung 5.3: Werkzeughalter mit integriertem Reibungsdämpfungselement¹—① Werkzeughalter ② Reibungsdämpfer ③ Einstellschrauben ④ dämpfende Kontaktfläche

In einem speziellen Fall mussten Rattermarken auf der Werkstückoberfläche festgestellt werden. Aufgrund der Wellenlänge der Rattermarken konnte diagnostiziert werden, dass die Frequenz der für die schlechte Oberfläche verantwortlichen, an der Werkzeugmaschine auftretenden Schwingungen einer Eigenfrequenz des Revolverkopfes entspricht. Durch Applikation eines im Werkzeughalter integrierten Reibungsdämpfers sollten die Schwin-

¹[PAT AT NR 2BA436/2009](#)

5 Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement

gungsamplituden des Revolverkopfes reduziert und damit die Ausbildung einer wellenförmigen Werkstückoberfläche unterbunden werden. Eine Unbekannte bei der Integration des Reibungsdämpfers ist der optimale Anpressdruck der Dämpfungsplatte auf den Werkzeugwechselkopf. Dieser wurde mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsverfahrens ermittelt. Untersucht wurden die ersten beiden Biegeeigenformen des Werkzeughalters. Die-

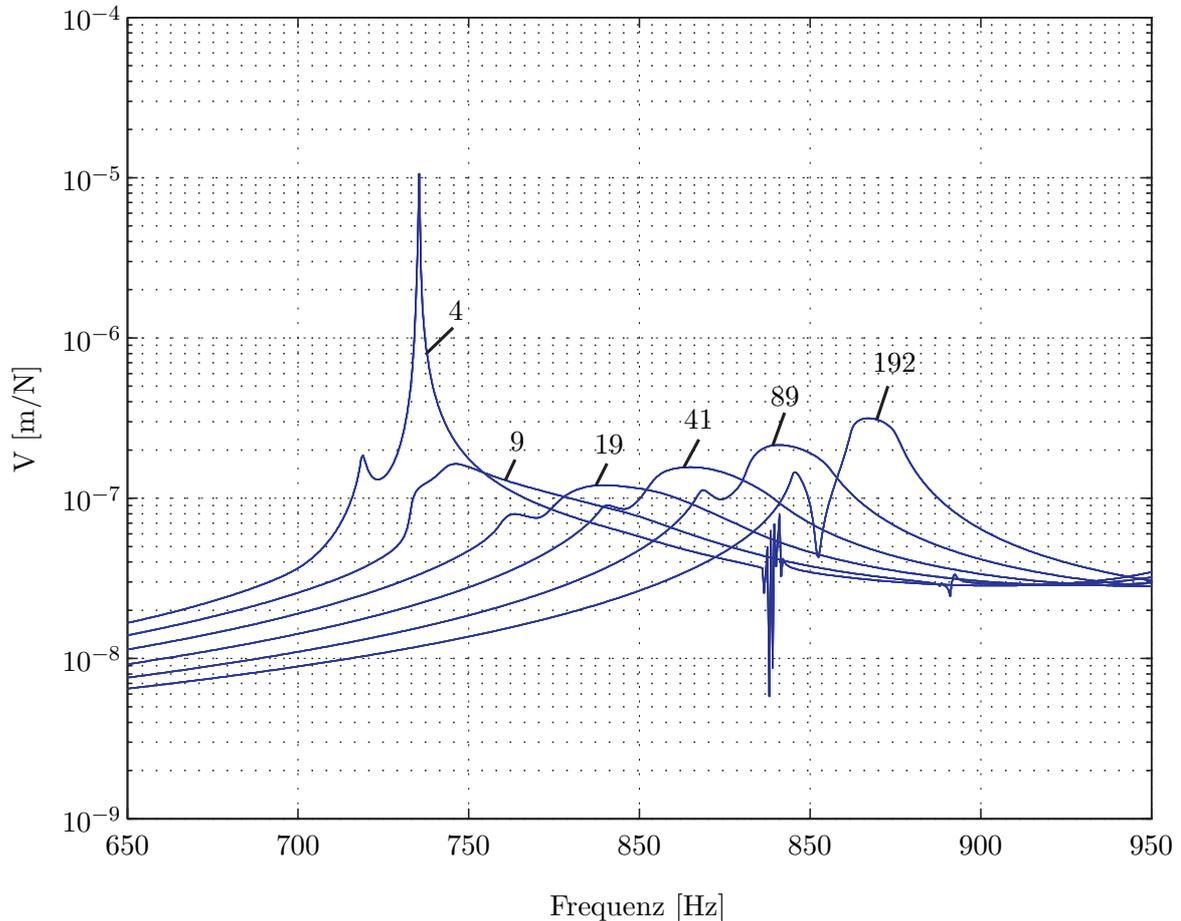


Abbildung 5.4: Nachgiebigkeit des Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfer, abhängig vom Anpressdruck [bar] der Dämpfungsplatte.

se beiden Schwingungsformen liegen aufgrund gewisser Symmetrien des Revolverkopfes im Frequenzspektrum knapp nebeneinander. In [Abbildung 5.4](#) ist die Nachgiebigkeit des Revolverkopfes in Vorschubrichtung im Frequenzbereich von 650 Hz bis 950 Hz dargestellt. Als Erregung wurde eine konstante Schnittkraft von 600N, sowie Schnittkraftschwankungen \hat{F}_e von 300N in dieser Richtung angenommen. Die Erregerkraft wurde an der Werkzeugspitze eingeleitet, wobei das Werkzeug selbst starr und der Werkzeughalter elastisch modelliert wurden. Die Schwingungsantwort wurde an einem Punkt an der um 180° versetzt liegenden Werkzeugaufnahme des Revolverkopfes ermittelt. Für die Berechnungen wurde ein Rei-

5 Schwingungsverhalten eines Werkzeughalters mit integriertem Reibungsdämpfungselement

bungskoeffizient μ von 0,15 und eine Rautiefe Rz von $4\mu\text{m}$ angenommen. Variiert wurden die Schraubenvorspannkräfte \hat{F}_S und damit die Flächenpressung in der kreisringförmigen Kontaktfläche. Aufgrund der Berechnungen konnte die Empfehlung gegeben werden, dass die Schwingungsamplituden bei einer Flächenpressung von circa 19bar am geringsten werden und damit der Reibungsdämpfer optimal wirkt. Versuche im konkreten Anwendungsfall haben gezeigt, dass mit diesem Richtwert für die Flächenpressung die Schwingungen ausreichend gering gehalten werden können und dass damit tatsächlich eine ausreichend gute Oberflächenqualität am Werkstück erzielt wird. Nachdem die Prototyp-Anordnung positiv bewertet wurde, wurden vier weitere derartige Revolverscheiben konzipiert und ausgeliefert. Diese sind beim Kunden erfolgreich im Einsatz.

6 Zusammenfassung

Die meisten technischen Systeme bestehen aus mehreren Einzelteilen, die miteinander gekoppelt sind. Unter anderem werden in Mehrkörpersystemen die einzelnen Teile durch Verschraubung miteinander verbunden. Reale Kontaktflächen haben immer eine gewisse Oberflächenrauheit. Bei dynamischer Belastung des Systems kommt es zu einer Relativverschiebung dieser Kontaktflächen gegeneinander und damit zu Energiedissipation im Kontakt. Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der eingeschwungenen Systemantwort elastischer, miteinander verschraubter Körper mit ebenen, jedoch rauen Kontaktflächen bei einer harmonischen Anregung.

Basis für die Berechnung der Systemantwort elastischer, miteinander verschraubter Körper mit ebenen und rauen Kontaktflächen sind Finite Elemente Modelle der Einzelteile. Finite Elemente Modelle sind durch eine große Anzahl von Freiheitsgraden, den Knotenverschiebungen, gekennzeichnet. Die große Anzahl dieser Freiheitsgrade hat lange Rechenzeiten, insbesondere bei nichtlinearen Einflüssen, zur Folge. Durch geeignete Reduktion der Freiheitsgrade der Einzelteile wird die Voraussetzung für einen schnellen Berechnungsalgorithmus zur Ermittlung der Systemantwort des gekoppelten Systems bei zunächst periodischer Anregung geschaffen. Die Reduktion der Freiheitsgrade erfolgt in dieser Arbeit durch modale Kondensation.

Die Koppelung der modal reduzierten Finiten Elemente Modelle der Einzelteile erfolgt über Kräfte die an den Knoten eingeleitet werden. Es wird ein Kontaktmodell verwendet, das einen Zusammenhang zwischen der Relativverschiebung zweier Kontaktpunkte und den daraus resultierenden Kontaktkräften herstellt. Parameter die dieses Kontaktverhalten beeinflussen sind der Reibungskoeffizient, die Rautiefen der beiden Kontaktflächen, die Verteilung der einzelnen Rauheitsspitzen, sowie eine Elastizität die dem Kontakt zugeordnet wird.

Die Bestimmung der Systemantwort des gekoppelten, nichtlinearen Systems im Zeitbereich benötigt relativ hohe Rechenzeiten. Parameterstudien, beziehungsweise die Optimierung des Systems hinsichtlich des dynamischen Verhaltens durch gezielte Veränderung einzelner Kontaktparameter sind auf diese Weise in vertretbarer Zeit nicht möglich. Mit

Hilfe des Verfahrens von Ritz und Galerkin gelingt es vergleichsweise schnell eine Näherungslösung der eingeschwungenen Systemantwort elastischer, miteinander verschraubter Körper mit eben, rauen Kontaktflächen bei harmonischer Anregung im Frequenzbereich zu ermitteln. Bei der Berechnung der Systemantwort können auch höherfrequente Anteile der Schwingungsantwort, resultierend aus den nichtlinearen Kontaktkräften berücksichtigt werden. Die Flächenpressung, beziehungsweise die Normalkraftverteilung in den Kontaktflächen, aufgrund der statischen Schraubenvorspannkraft wird mit Hilfe eines Finiten Elemente Programms berechnet und findet Eingang in die Ermittlung der dynamischen Systemantwort der gekoppelten, elastischen Strukturen. Aufgrund vereinfachender Annahmen wird es möglich, die bei der Berechnung des gekoppelten Systems benötigten Fourierkoeffizienten der nichtlinearen Kontaktkräfte, abhängig von den Verschiebungsamplituden der Kontaktknoten, vor der Lösung des Gesamtsystems zu berechnen und in Kennfeldern abzulegen. Damit wird es möglich, die eingeschwungene Systemantwort in einem weiten Frequenzbereich in kurzer Zeit zu berechnen.

An einem konkreten Beispiel wurde untersucht, wie sich Veränderungen der Schraubenvorspannung und der Erregerkraftamplitude auf das Schwingungsverhalten der nichtlinear gekoppelten, elastischen Struktur grundsätzlich auswirken. Des Weiteren wurde der Einfluss der Rautiefe und Reibungskoeffizienten, die im Wesentlichen die Kontaktfläche charakterisieren, untersucht. Es wurden die Resonanzkurven für ein konkretes Beispiel mit zunehmender Ordnung der berücksichtigten höherfrequenten Anteile der nichtlinearen Kontaktkräfte berechnet.

In einem Experiment wurde das Schwingungsverhalten zweier miteinander verschraubter Körper bei harmonischer Anregung gemessen. Bei diesen Messungen wurde die Vorspannkraft der Schrauben variiert. Aufgrund des Vergleichs der gemessenen und berechneten Resonanzkurven der Testanordnung kann gesagt werden, dass die Eigenfrequenzen, sowie die Verschiebungen der Eigenfrequenzen im Frequenzspektrum aufgrund der Veränderung der Schraubenvorspannkraft durch die Simulation gut wiedergegeben werden. Die gemessenen Amplituden in den Resonanzfrequenzen, sowie deren Veränderung aufgrund verschiedener Schraubenvorspannkraft weichen jedoch von den berechneten Amplituden ab. Als Ursache dafür werden die großen Gradienten der Flächenpressung in der Kontaktfläche angesehen. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Pressungen in der Kontaktfläche unterhalb der Schraubenköpfe sehr groß sind, daneben rasch abnehmen und die restliche Kontaktfläche über weite Bereiche klafft. In den dynamischen Berechnungen werden nur Bereiche der Kontaktfläche, in denen bereits durch die Vorspannung der Schrauben Kontakt auftritt, berücksichtigt. Jene Bereiche, die erst durch Schwingungen in Kontakt treten, werden nicht

in die Berechnung der dynamischen Systemantwort mit einbezogen. Die Berücksichtigung dieser zusätzlichen Kontaktbereiche stellt eine Herausforderung bei der Berechnung der Näherungslösung dar, da sich das ursprünglich betrachtete System während der Berechnung verändert und somit Unstetigkeiten auftreten. Arbeiten von [SEXTRO \(1997\)](#), [SEXTRO \(2007\)](#) und [PANNING \(2005\)](#) haben jedoch gezeigt, dass bei gleichmäßigem, flächigem Kontakt eine gute Berechnung des Schwingungsverhaltens der gekoppelten Strukturen mit dem Verfahren der harmonischen Balance möglich ist. Das Verfahren der Harmonischen Balance ist ein Spezialfall der vorgestellten Methode, unter der Annahme dass nur Schwingungsanteile der Grundharmonischen in der Systemantwort berücksichtigt werden.

In einem Projekt mit WFL Millturn Technologies GmbH&Co.KG wurde das vorgestellte Berechnungsverfahren zur Ermittlung der eingeschwungenen Systemantwort nichtlinearer gekoppelter Strukturen zur Auslegung eines in einen Werkzeughalters integrierten Reibungsdämpfers angewendet. Mit der aus der Berechnung ermittelten, zur Dämpfung von selbsterregten Schwingungen der Revolverscheibe optimalen, Flächenpressung konnten ursprünglich am Werkstück auftretende Rattermarken vermieden werden.

Literaturverzeichnis

- Abbott, E. J. und Firestone, F. A.:** Specifying surface quality. *Mechanical Engineering (ASME)*, Band 55, 1933, Nr. 7-12, S. 569–573.
- Amontons, G.:** Über den Widerstand in Maschinen. In *Memoires de l' Académie Royale*. 1699, S. 203–222.
- ASME B46.1:** Surface Texture, Surface Roughness, Waviness and Lay. ASME, 2002.
- Balmer, B.:** Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 197.
- Bathe, K.-J.:** Finite-Elemente-Methoden. 2. Auflage. Berlin , Heidelberg, New York: Springer, 2002, Aus dem englischen übersetzt von P. Zimmermann.
- Bowden, F. P. und Tabor, D.:** Friction and lubrication of solids. New York: John Wiley, 1956.
- Coulomb, C. A.:** Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et a la roideur des cordages. In *Mém. Math. Phys.* Paris, 1779, S. 161–342.
- Czichos, H. und Habig, K.-H.:** Tribologie-Handbuch Reibung und Verschleiß. Wiesbaden: Vieweg, 1992.
- DIN EN ISO 4287:** Geometrische Produktspezifikationen (GPS) - Oberflächenbeschaffenheit: Tastschnittverfahren - Benennungen, Definitionen und Kenngrößen der Oberflächenbeschaffenheit. DIN, 1997, 10.
- Dowson, D.:** History of Tribology. London: Longman, 1979.
- Euler, L.:** Sur la diminution de la resistance du frottement. In *Mém. Acad. Sci. Berl.* 1748a, Nr. 4, S. 133–148.
- Euler, L.:** Sur le frottement des corps solides. In *Mém. Acad. Sci. Berl.* 1748b, Nr. 4, S. 122–132.
- Ewins, D. J.:** Modal Testing: Theory, Practice and Application. Baldock, Hertfordshire, England: Research Studies Press Ltd., 2000.

- Garbow, B., Hillstrom, K. E. und More, J. J.:** User guide for minipack-1. National Argonne Laboratory, 1980 – Technischer Bericht.
- Gaul, L. und Fiedler, C.:** Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. Wiesbaden: Vieweg, 1997.
- Gaul, L. und Nitsche, R.:** The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, Band 54, 2001, S. 93–106.
- Genzo, A., Sextro, W. und L.Panning:** Dynamic Behaviour of Elastic Bodies Coupled by Extended Friction Contacts. *Proc. of the 12th International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*, 2006, S. 1303–1318.
- Genzo, A., Sextro, W. und Panning, L.:** Schwingungsverhalten elastischer Körper mit nichtlinearen Kopplungen in ausgedehnten Reibkontakten. *VDI-Tagung Nichtlineare Schwingungen - Reibung und Kontaktmechanik (VDI-Berichte 2022)*, 2007, S. 147–161.
- Greenwood, J. A.:** A Unified Theory of Surface Roughness. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, Band 393, 1984, Nr. 1804, S. 133–157.
- Greenwood, J. A. und Williamson, J. B. P.:** Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, Band 295, 1966, Nr. 1442, S. 300–319.
- Götting, F.:** Analyse des Schwingungsverhaltens von verstimmten Beschaufelungen mit Reibelementen. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2005, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 327.
- Hertz, H.:** Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 92, 1881, S. 156–171.
- Johnson, K. L.:** Contact Mechanics. Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1989.
- Kikuchi, N. und Oden, J. T.:** Contact Problems in Elasticity - A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: SIAM, 1988, Studies in Applied and Numerical Mathematics.
- Kragelsky, I. V., Kombalov, V. S. und Dogychin, M. N.:** Friction and Wear: Calculation Methods. Oxford: Pergamon Press, 1982, Translated from the Russian by N. Standen.

- Magnus, K., Popp, K. und Sextro, W.:** Schwingungen. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- Mang, H. und Hofstätter, G.:** Festigkeitslehre. Wien, NewYork: Springer, 2000.
- Panning, L.:** Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaukeln. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2005, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 328.
- PAT AT NR 2BA436/2009:** Werkzeugmaschine und Verfahren zum Bearbeiten wenigstens eines Werkstücks. *WFL Millturn Technologies GmbH&Co.KG* 2009.
- Poudou, O. und Pierre, C.:** Hybrid frequency-time domain method for the analyses of complex structural systems with dry friction damping. *Structural Dynamics and Materials Conference* 2003.
- Poudou, O. J.:** Modelling and analyses of the dynamics of dry-friction-damped structural systems. Dissertation, The University of Michigan, 2007.
- Powell, M. J. D.; Rabinowitz, P. (Hrsg.):** Kap. 6. A hybrid method for nonlinear equations In Numerical Methods for Nonlinear Equations. London: Gordon and Breach, 1970, S. 87–114.
- Sanliturk, K. und Ewins, D.:** Modelling Two-Dimensional Friction Contact and its Application Using Harmonic Balance Method. *Journal of Sound and Vibration*, Band 193(2), 1996, S. 511–523.
- Schwertassek, R. und Wallrapp, O.:** Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1999.
- Sextro, W.:** Schwingungsverhalten von Schaufelkränzen mit Reibelementen bei Frequenzverstimmung. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1997, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 245.
- Sextro, W. und Popp, K.:** Dynamical Behavior of a Bladed Disk with Friction Dampers. In Proc. of EUROMECH - 2nd European Nonlinear Oscillation Conference. Band 1, Prag, 1996, S. 391–394.
- Sextro, W.:** Dynamical Contact Problems with Friction. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- Stelter, P.:** Nichtlineare Schwingungen reibungserregter Strukturen. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1990, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 137.
- Treyde, T.:** Modellierung des Kontaktes zwischen den Deckplatten von Turbinenschaukeln. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 11 Nr. 224.

Literaturverzeichnis

Weck, M. und Brecher, C.: Werkzeugmaschinen - Messtechnische Untersuchungen und Beurteilung, dynamische Stabilität. Band 5, 7. Auflage. Springer, 2006.

Wittenburg, J. und Pestel, E.: Festigkeitslehre. Berlin , Heidelberg, New York: Springer, 2001.

Wriggers, P.: Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Band 2, 1995, Nr. 4, S. 1–49.