

**Analytische Lösungen für das
Vorwärtsproblem der Elektrischen
Impedanztomographie auf einem Zylinder**

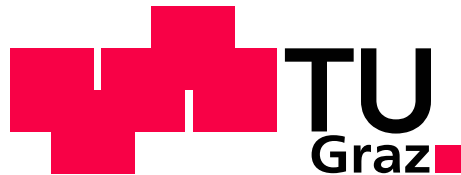
Daniel Krenn

Diplomarbeit

**Analytische Lösungen für das
Vorwärtsproblem der Elektrischen
Impedanztomographie auf einem Zylinder**

Daniel Krenn

28. September 2009



Institut für Medizintechnik
Technische Universität Graz
Kronesgasse 5, A - 8010 Graz
<http://www.imt.tugraz.at>

Betreuer: Dipl.-Ing. Manuel Freiberger

Begutachter: Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hermann Scharfetter

Diploma Thesis

Analytic Solutions for the Forward Problem in Electrical Impedance Tomography on a Cylinder

Daniel Krenn

September 28, 2009



Institute of Medical Engineering
Graz University of Technology
Kronesgasse 5, A - 8010 Graz
<http://www.imt.tugraz.at>

Supervisor: Dipl.-Ing. Manuel Freiberger

Evaluator: Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hermann Scharfetter

Kurzfassung

In der elektrischen Impedanztomographie ist für das Vorwärtsproblem eine partielle Differentialgleichung, nämlich die Potential- oder Laplacegleichung zu lösen. Als Geometrie kommt ein Zylinder zum Einsatz, wobei Boden- und Deckfläche als isolierend angenommen und am Zylindermantel nicht-gemischte oder gemischte Randbedingungen vorgegeben werden. Ein Beispiel für gemischte Randbedingungen wäre das Anbringen von zwei Elektroden, auf denen das Potential vorgegeben wird, und die restliche Mantelfläche bleibt unkontaktiert. Der Materialparameter (Leitfähigkeit) soll dabei vom Ort abhängig sein. Dieser kann für den gesamten Zylinder vorgegeben oder für jede Schicht eines mehrschichtigen Zylinders extra gegeben sein.

In dieser Arbeit sollen analytische Lösungen für solche Randwertprobleme gefunden werden. Für den nicht-gemischten Fall wurde eine solche bereits publiziert. Diese scheint jedoch teilweise fehlerhaft zu sein und ist nicht für komplexwertige Leitfähigkeiten und komplexwertige Randbedingungen ausgelegt. Diese Fehler und Einschränkungen werden hier behoben. Für das gemischte Randwertproblem wird die Theorie der Fourierreihen auf multiple Reihengleichungen erweitert. Damit kann die Lösung auf den gemischten Fall erweitert werden. Die Behandlung von Punktelektroden wird ebenfalls erläutert.

Im Zuge der Diplomarbeit ist eine Implementierung der Lösung in *GNU Octave* beziehungsweise *Matlab*[®] programmiert worden. Dafür wird aus der analytischen Lösung, welche aus einer unendlichen Summe besteht, eine Näherungslösung hergeleitet. Für diese wird auch der Fehler ermittelt und eine Aufwandsberechnung durchgeführt. Weiters sind einige Bemerkungen zur Implementierung und Grenzen von dieser zu finden. Eine Vergleichsrechnung mit einem Finite-Elemente-Modell ist ebenfalls durchgeführt worden.

Schlüsselwörter: elektrische Impedanztomographie, Vorwärtsproblem, analytische Lösung, Zylinder, gemischte Randbedingungen

Kontakt:

Daniel Krenn

E-Mail: mail@danielkrenn.at

Web: <http://www.danielkrenn.at>

Abstract

For the forward problem in electrical impedance tomography a partial differential equation, the potential or Laplace equation, has to be solved. As shape a cylinder is used. Its top and bottom surfaces are assumed to be insulating, and on the shell either non-mixed or mixed boundary conditions will be applied. An example of a mixed boundary value problem would be, when two electrodes, whose potential is given, are attached to the shell, while the remaining surface is not contacted. The material parameter (conductivity) should be dependent on the position. It can be specified for the whole cylinder or in case of a layered cylinder for each layer separately.

The aim of this thesis is to derive analytic solutions for the above mentioned boundary value problems. For the non-mixed case a result has already been published. However, it seems to be partially incorrect, and it is not appropriate for complex-valued conductivities and complex-valued boundary conditions. These errors and restrictions will be eliminated. For the mixed boundary conditions the theory of Fourier series will be extended to multiple series equations, in order to solve the problem. Additionally, point electrodes will be treated separately.

In the course of this thesis an implementation of the solution has been programmed in *GNU Octave* and *Matlab*[®]. Therefore, an approximation will be derived out of the infinite sum of the analytic solution. Furthermore, the error of this solution and the complexity will be calculated. There will also be some remarks on the implementation and its limits. Finally, the approximation for the analytic model will be compared to a finite elements model.

keywords: electrical impedance tomography, forward problem, analytic solution, cylinder, mixed boundary conditions

Contact:

Daniel Krenn

e-mail: mail@danielkrenn.at

web: <http://www.danielkrenn.at>

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ort

Datum

Unterschrift

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Place

Date

Signature

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	xii
Abbildungsverzeichnis	xiii
1 Einleitung	1
2 Bisherige Lösungen	3
2.1 Überblick	3
2.2 Bemerkungen zur Lösung von Pidcock et al 1995	3
3 Analytische Lösung für den Zylinder	13
3.1 Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung und Eindeutigkeit der Lösung	14
3.2 Allgemeine Lösung	16
3.2.1 Produktansatz	16
3.2.2 Lösung der vom Winkel θ abhängigen Differentialgleichung	17
3.2.3 Lösung der Differentialgleichung in axialer Richtung	19
3.2.4 Lösung der Differentialgleichung in radialer Richtung	25
3.2.5 Zusammensetzen der Lösung	27
3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel	29
3.3.1 Allgemeine Vorgangsweise	29
3.3.2 Fourierentwicklung ausgewählter Elektrodenkonfigurationen	30
3.3.3 Lösung für einen einschichtigen Zylinder	32
3.3.4 Lösung für einen mehrschichtigen Zylinder	34
3.4 Verallgemeinerung von Fourierreihen	38
3.5 Gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel	41
3.5.1 Lösung für einschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen	42
3.5.2 Lösung für mehrschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen	44
3.5.3 Das Problem mit Punktelektroden	47
	xi

4	Näherungslösung für den Zylinder	49
4.1	Beschreibung der Gleichungssysteme und Konvergenzbetrachtungen . . .	49
4.1.1	Nicht-gemischte Randbedingungen	50
4.1.2	Gemischte Randbedingungen	51
4.1.3	Behandlung von Punktelektroden bei gemischten Randbedingungen	54
4.2	Berechnung des Fehlers	56
4.3	Aufwandsberechnung	60
5	Bemerkungen zur Implementierung	63
5.1	Kurzbeschreibung ausgewählter Funktionen	63
5.2	Implementierung der Lösung in radialer Richtung	64
5.3	Numerische Grenzen der Implementierung	64
6	Vergleich der analytischen Lösung mit anderen Lösungen	67
6.1	Effektivwertberechnung für einen allgemeinen Simplex	67
6.2	Vergleich mit Finite-Elemente-Modell	69
7	Ergebnisse, Diskussion und Ausblick	73
A	Mathematischer Anhang	77
A.1	Gradient, Divergenz und Laplace in Zylinderkoordinaten	78
A.2	Innere Produkte	79
A.3	Sturm-Liouville-Probleme	79
A.4	Besselfunktionen	80
A.5	Blockmatrix Inversion	82
B	Berechnete Integrale, Ableitungen und Matrizen	83
B.1	Integrale für die Berechnung der Fourierkoeffizienten bei Rechteckelektroden	83
B.2	Integrale der Massematrix bei gemischten Randwertproblemen	84
B.3	Ableitungen der Lösungen in radialer Richtung	85
B.4	Matrizen für den Fall von nicht-gemischten Randbedingungen	86
C	Simulationsdaten und Ergebnisse beim Vergleich	89
	Symbolverzeichnis	91
	Literaturverzeichnis	95

Abbildungsverzeichnis

3.1	Gleichungssysteme $\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = \mathcal{F}_{nm}$ für mehrschichtigen Zylinder und nicht-gemischten Randbedingungen	37
3.2	Gleichungssysteme $\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = 0$ für mehrschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen	47
5.1	Wertebereich der Funktionen <code>besseli</code> und <code>besselk</code> in <i>GNU Octave</i> beziehungsweise <i>Matlab</i> [®]	66
6.1	Einschichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden symmetrisch	71
6.2	Dreischichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden im rechten Winkel . . .	71
6.3	Dreischichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden	71
B.1	Gleichungssysteme für den mehrschichtigen Zylinder und nicht-gemischten Randbedingungen	86

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit behandelt die partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0 \tag{1.0.1}$$

in einem Zylinder im dreidimensionalen Raum, wobei σ ein vom Ort abhängiger Materialparameter ist. Auf dem Zylindermantel werden dabei sowohl nicht-gemischte Randbedingungen, wie zum Beispiel reine Dirichlet-Randdaten als auch gemischte Randbedingungen vorgegeben. Letztere sind dabei unter anderem für das Vorwärtsproblem der elektrischen Impedanztomographie interessant. Als Beispiel kann man sich einen Zylinder denken, auf dem zwei Elektroden angebracht werden. Gibt man auf diesen das Potential vor, so sind sie als Dirichlet-Randbedingungen zu modellieren, die nichtkontaktierten Stellen als Neumann-Randbedingungen.

Boden- und Deckfläche werden bei beiden Problemen als isolierend, also Neumann-Randbedingungen mit Funktionswert überall Null angenommen. Die Leitfähigkeit (Materialparameter σ) wird dabei auf radialsymmetrische Verteilungen und in axialer Richtung auf exponentiellen Verlauf eingeschränkt. In radialer Richtung kann prinzipiell eine beliebige Funktion vorgegeben werden. Diese Arbeit beschränkt sich auf Potenzen, was insbesondere den Fall von konstanten Leitfähigkeiten einschließt. Weiters ist es möglich den Zylinder geschichtet auszuführen. Dabei kann in jeder Schicht eine eigene Leitfähigkeitsverteilung angenommen werden.

Ziel der Diplomarbeit ist es ein analytisches Modell zu implementieren, welches die Potentialverteilung des oben angegebenen Randwertproblems an beliebig vielen Punkten berechnet. Das Modell soll mit geeigneten Testdaten verifiziert werden.

Für das nicht-gemischte Randwertproblem wurde eine analytische Lösung bereits 1995 von Pidcock et al [7] publiziert. Offensichtlich ist diese teilweise fehlerhaft, vergleiche Kapitel 2. Weiters eignet sich die Lösung nicht für komplexwertige Leitfähigkeiten beziehungsweise komplexwertige Elektrodenfunktionen. Diese Fehler und Einschränkungen werden in Kapitel 3 behoben.

Für das gemischte Randwertproblem wird die Theorie der Fourierreihen auf *multiple Reihengleichungen* erweitert. Dabei kommt für jeden unterschiedlichen Teil der gemischten Randbedingungen eine eigene unendliche Summe zum Einsatz. Damit kann dann

1 Einleitung

die bereits vorhandene analytische Lösung für das nicht-gemischte Problem auf den gemischten Fall übertragen werden. Die Behandlung von Punktelektroden wird ebenfalls erläutert. Dies alles ist in Kapitel 3 ausgearbeitet.

Im Zuge der Diplomarbeit ist eine Implementierung der Lösung in *GNU Octave* beziehungsweise *Matlab*[®] programmiert worden. Da die analytische Lösung die Gestalt einer unendlichen Summe hat, wird in Kapitel 4 eine Näherungslösung hergeleitet. Dort ist auch eine Ermittlung des Fehlers dieser und eine Aufwandsberechnung zu finden. Einige Bemerkungen zur Implementierung selbst und Grenzen von dieser sind in Kapitel 5 angeführt. Weiters ist noch ein Vergleich der Näherungslösung mit einem Finite-Elemente-Modell durchgeführt worden. Für Details hierzu siehe Kapitel 6.

Im Anhang werden zuerst einige mathematische Notationen und Symbole erklärt, und es werden für die Arbeit wichtige mathematische Grundlagen erläutert. Weiters sind für die Implementierung wichtige Ergebnisse durchgerechnet worden und dort zu finden. Im Anhang sind auch die Simulationsparameter für den bereits oben erwähnten Vergleich angegeben.

Kapitel 2

Bisherige Lösungen

2.1 Überblick

Die Problemstellung ist ein Φ für die partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (2.1.1)$$

zu finden, welches diese in einem Gebiet erfüllt und vorgegebenen Randbedingungen genügt. Für zweidimensionale Probleme sind für viele Geometrien (zum Beispiel Kreis und Rechteck), nicht-gemischten Randbedingungen und konstantem σ Lösungen bekannt. Für spezielle Leitfähigkeitsverteilungen σ sind Lösungen für diverse Geometrien beispielsweise in Pidcock et al [8] zu finden.

Für dreidimensionale Probleme gibt es ebenfalls für einfach Geometrien Lösungen von Pidcock et al [7]. Im nächsten Abschnitt sind dazu einige Bemerkungen zu finden.

Die beschriebenen Lösungen behandeln im Wesentlichen alle nicht-gemischte Randbedingungen. Wenn gemischte Randbedingungen vorkommen, dann auf verschiedenen Flächen, das heißt zum Beispiel beim Zylinder Deck- und Grundfläche homogene *Neumann-Randbedingungen* und auf der Mantelfläche eine andere Randbedingung. Ein Ansatz für echte gemischte Randwertprobleme ist in Sneddon [10] beschrieben. Dabei werden *dual Integralgleichungen* gelöst, beziehungsweise mit *dualen Reihengleichungen* gearbeitet. Weitere Ansätze sind in den Büchern von Duffy [4] und Fabrikant [5] zu finden, wobei da unter Anderem die gemischten Randbedingungen auf der Grundfläche des Zylinders vorgeben werden.

2.2 Bemerkungen zur Lösung von Pidcock et al 1995

Die folgenden Aussagen und Gegenbeispiele beziehen sich auf Pidcock et al [7], Abschnitt "4. Cylindrical polar coordinates". Als Lösung des Problems sind dort unter anderem die nachfolgenden Formeln zu finden. Diese gelten für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

Sei H die Höhe und R der Radius des Zylinders, und sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Wird für die Leitfähigkeit

$$\sigma(r, \theta, z) = \hat{\sigma}(r) e^{\gamma z} \quad (2.2.1)$$

2 Bisherige Lösungen

angenommen, gilt für die Lösung in axialer Richtung (z-Richtung)

$$W_n(\gamma, z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\cos(\lambda_n z) + \frac{\gamma}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n z) \right), \quad (2.2.2)$$

wobei $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$ ist. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung am Rand (Zylindermantel) lassen sich mit

$$f_{nm}(\gamma) = \frac{2}{\pi H} \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} W_n(\gamma, z) f(\theta, z) e^{im\theta} d\theta dz \quad (2.2.3)$$

berechnen, wobei f eine vorgegebene Funktion ist. Das Verhalten der Randbedingungen selbst wird für Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ durch

$$f(\theta, z) = \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) \quad (2.2.4)$$

festgelegt, wobei in dem Paper bei dieser Formel der Faktor $e^{\gamma z}$ ignoriert beziehungsweise vergessen wurde, siehe auch Gegenbeispiel 2.2.4. Im Allgemeinen führt dies zu Problemen bei der Berechnung der Koeffizienten A_{nm} , B_{nm} und C_{nm} der Lösung aus den f_{nm} . Der Grund ist die eventuell eintretende Zerstörung der Orthogonalität der W_n (wenn diese überhaupt vorhanden ist, siehe Gegenbeispiel 2.2.3).

Die allgemeine Lösung lautet

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_n(\gamma, z) (S_{nm}(r) + C_{nm} T_{nm}(r)) (A_{nm} \cos(m\theta) + B_{nm} \sin(m\theta)), \quad (2.2.5)$$

wobei $S_{nm}(r)$ und $T_{nm}(r)$ die Lösungen der Differentialgleichung in radialer Richtung (r-Richtung) sind. T_{nm} ist dabei die Lösung, die für $r \rightarrow 0$ divergiert. Für einen einschichtigen Zylinder gilt für alle n und m , dass $C_{nm} = 0$ ist, und es berechnen sich die Koeffizienten mit

$$A_{nm} + iB_{nm} = \frac{1}{\alpha S_{nm}(R) + \beta \sigma(R) \zeta_{nm}(R)} f_{nm}, \quad (2.2.6)$$

wobei $\zeta_{nm}(r) = \frac{d}{dr} S_{nm}(r)$ ist.

Für einen mehrschichten Zylinder wird für jede Schicht eine Lösung angesetzt und an den Grenzflächen geeignete Bedingungen (Potential stetig, Stromdichte stetig) vorgegeben. Für einen zweischichtigen Zylinder können die Koeffizienten durch Lösen von

$$\mathbf{A}_{nm}^2 \mathbf{X}_{nm}^2 = \mathbf{B}_{nm}^2 \quad (2.2.7)$$

berechnet werden, wobei

$$\mathbf{A}_{nm}^2 = \begin{pmatrix} S_{nm}^1(R_1) & -S_{nm}^2(R_1) & -T_{nm}^2(R_1) \\ \hat{\sigma}_1(R_1) \zeta_{nm}^1(R_1) & -\hat{\sigma}_2(R_1) \zeta_{nm}^2(R_1) & -\hat{\sigma}_2(R_1) \tau_{nm}^2(R_1) \\ 0 & \alpha S_{nm}^2(R_2) + \beta \hat{\sigma}_2(R_2) \zeta_{nm}^2(R_2) & \alpha T_{nm}^2(R_2) + \beta \hat{\sigma}_2(R_2) \tau_{nm}^2(R_2) \end{pmatrix}, \quad (2.2.8a)$$

2.2 Bemerkungen zur Lösung von Pidcock et al 1995

$$\mathbf{B}_{nm}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{nm}(\gamma) \end{pmatrix} \quad (2.2.8b)$$

und

$$\mathbf{X}_{nm}^2 = \begin{pmatrix} A_{nm}^1 + iB_{nm}^1 \\ A_{nm}^2 + iB_{nm}^2 \\ (A_{nm}^2 + iB_{nm}^2)C_{nm}^2 \end{pmatrix} \quad (2.2.8c)$$

ist.

Gegenbeispiel 2.2.1 (Falscher Normierungsfaktor). Sei $\gamma = 0$, die Leitfähigkeit

$$\sigma(r, \theta, z) = \sigma_{const} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.2.9)$$

konstant und

$$f(\theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (2.2.10)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f_{nm}(0) &= \frac{2}{\pi H} \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) W_n(0, z) e^{im\theta} d\theta dz \\ &= \frac{2}{\pi H} \underbrace{\int_{z=0}^H \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{H}z\right) dz}_{=\frac{H}{2}[n=1]} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{im\theta} d\theta}_{=2\pi[m=0]} \\ &= 2[n=1][m=0], \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

also $f_{10} = 2$ und die restlichen f_{nm} sind 0. Für die Koeffizienten gilt

$$A_{nm} + iB_{nm} = \frac{2[n=1][m=0]}{\alpha S_{nm}(R) + \beta \sigma_{const} \zeta_{nm}(R)}, \quad (2.2.12)$$

also alle bis auf A_{10} sind 0.

Für die Lösung ergibt sich somit

$$\Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2 S_{10}(r)}{\alpha S_{10}(R) + \beta \sigma_{const} \zeta_{10}(R)}, \quad (2.2.13)$$

und für die Ableitung in Normalrichtung auf der Mantelfläche

$$\frac{d}{d\vec{n}} \Phi(r, \theta, z) = \frac{d}{dr} \Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2 \zeta_{10}(r)}{\alpha S_{10}(R) + \beta \sigma_{const} \zeta_{10}(R)}, \quad (2.2.14)$$

da $W_1(0, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ ist. Es folgt

$$\alpha \Phi(R, \theta, z) + \sigma(R, \theta, z) \beta \frac{d}{d\vec{n}} \Phi(R, \theta, z) = 2 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad (2.2.15)$$

was sich also genau um den Faktor 2 vom gewünschten Ergebnis unterscheidet.

2 Bisherige Lösungen

Gegenbeispiel 2.2.2 (Nichtvorhandene Vollständigkeit der Lösung). Sei $\gamma = 0$, und damit

$$W_n(\gamma, z) = \cos(\lambda_n z) \quad (2.2.16)$$

Sei weiters

$$f(\theta, z) = 1. \quad (2.2.17)$$

f erfüllt $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ auf der Boden- und Deckfläche.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} f_{nm}(0) &= \frac{2}{\pi H} \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} W_n(0, z) f(\theta, z) e^{im\theta} d\theta dz \\ &= \frac{2}{\pi H} \int_{z=0}^H \cos\left(\frac{n\pi}{H} z\right) dz \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{im\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi H} \frac{H}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(0)) 2\pi [m = 0] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Nehmen wir zum Beispiel einen einschichtigen Zylinder mit radialsymmetrischer Leitfähigkeitsverteilung, $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, so folgt für alle n und m , dass $A_{nm} = 0$ und $B_{nm} = 0$ ist. Damit ist natürlich auch $\Phi(r, \theta, z) = 0$ überall, was im Widerspruch zu

$$\alpha \Phi(R, \theta, z) = f(\theta, z) = 1 \quad (2.2.19)$$

steht.

Hier ist das Problem, dass die Lösung für $n = 0$ fehlt und somit die Lösungsfunktionen nicht vollständig sind. Siehe Abschnitt 3.2.3 für eine korrigierte Variante.

Das eben gezeigte Gegenbeispiel funktioniert immer, wenn die Funktion f nur von θ abhängt, zum Beispiel auch für

$$f(\theta, z) = \sin(M\theta) \quad (2.2.20)$$

mit $M \in \mathbb{Z}$. Besitzt der von z abhängige Teil von f einen von Null verschiedenen „Mittelwert“, so lässt sich ebenfalls ein Gegenbeispiel konstruieren. Für allgemeine Werte von γ , α und β können ebenfalls nicht alle f richtig entwickelt werden.

Gegenbeispiel 2.2.3 (Fehlende Orthogonalität für $\gamma \neq 0$). Sei $\gamma \neq 0$, $\alpha = 1$ und $\beta = 0$,

dann gilt

$$\begin{aligned}
 f_{\tilde{n}\tilde{m}}(\gamma) &= \frac{2}{\pi H} \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{f(\theta, z)}_{=\alpha \Phi(R, \theta, z)} W_{\tilde{n}}(\gamma, z) e^{i\tilde{m}\theta} d\theta dz \\
 &= \frac{2\alpha}{\pi H} \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_n(\gamma, z) (S_{nm}(R) + C_{nm} T_{nm}(R)) \cdot \\
 &\quad \cdot (A_{nm} \cos(m\theta) + B_{nm} \sin(m\theta)) W_{\tilde{n}}(\gamma, z) e^{i\tilde{m}\theta} d\theta dz \\
 &= \frac{2\alpha}{\pi H} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (S_{nm}(R) + C_{nm} T_{nm}(R)) \cdot \\
 &\quad \cdot \underbrace{\int_{z=0}^H W_n(\gamma, z) W_{\tilde{n}}(\gamma, z) dz}_{=: I_W(n, \tilde{n})} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(A_{nm} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\tilde{m}\theta} \cos(m\theta) d\theta}_{=\pi[m=\tilde{m}]} + B_{nm} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\tilde{m}\theta} \sin(m\theta) d\theta}_{=i\pi[m=\tilde{m}]} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Für $n = \tilde{n}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_W(n, n) &= \int_{z=0}^H W_n(\gamma, z) W_n(\gamma, z) dz \\
 &= \frac{e^{-H\gamma} (-1 + e^{H\gamma}) (4\pi^2 n^2 + 5H^2 \gamma^2)}{2(H^2 \gamma^3 + 4n^2 \pi^2 \gamma)},
 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

also ein Ergebnis ungleich $\frac{H}{2}$, wie dies bei $\gamma = 0$ der Fall ist. Die W_n sind also nicht mehr normiert. Es muss für jedes einzelne W_n ein eigener Normierungsfaktor mit dem Wert $\sqrt{I_W(n, \tilde{n})}$ verwendet werden.

Für $n \neq \tilde{n}$ gilt

$$\begin{aligned}
 I_W(n, \tilde{n}) &= \int_{z=0}^H W_n(\gamma, z) W_{\tilde{n}}(\gamma, z) dz \\
 &= \frac{e^{-H\gamma} (-(-1)^{\tilde{n}+n} + e^{H\gamma}) H^2 \gamma (5H^2 \gamma^2 + 2(\tilde{n}^2 + n^2) \pi^2)}{2(H^4 \gamma^4 + 2H^2(\tilde{n}^2 + n^2) \pi^2 \gamma^2 + (\tilde{n}^2 - n^2)^2 \pi^4)},
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

was für $H \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ immer ungleich 0 ist. Somit können die einzelnen $f_{\tilde{n}\tilde{m}}$ nicht direkt aus den zugehörigen $A_{\tilde{n}\tilde{m}}$ und $B_{\tilde{n}\tilde{m}}$ berechnet werden, sondern es müsste zumindest für jedes \tilde{m} ein Gleichungssystem mit Einträgen die von allen n abhängen gelöst werden.

Gegenbeispiel 2.2.4 (Nichterfüllen der Randbedingungen für $\gamma \neq 0$). Sei $\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und die Leitfähigkeit

$$\sigma(r, \theta, z) = \sigma_{const} e^{\gamma z} \tag{2.2.24}$$

2 Bisherige Lösungen

mit $\sigma_{const} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gelte

$$f(\theta, z) = W_1(\gamma, z) \quad (2.2.25)$$

und angenommen die W_n wären orthogonal (was nicht der Fall ist, siehe Gegenbeispiel 2.2.3).

Damit folgt

$$\begin{aligned} f_{nm}(\gamma) &= \frac{2}{\pi H} \underbrace{\int_{z=0}^H W_1(\gamma, z) W_n(\gamma, z) dz}_{=\frac{H}{2}[n=1]} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{im\theta} d\theta}_{=2\pi[m=0]} \\ &= 2[n=1][m=0], \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

also $f_{10} = 2$ und die restlichen f_{nm} sind 0. Für die Koeffizienten gilt

$$A_{nm} + iB_{nm} = \frac{2[n=1][m=0]}{\sigma_{const} \zeta_{nm}(R)}, \quad (2.2.27)$$

also alle bis auf A_{10} sind 0.

Für die Lösung ergibt sich somit

$$\Phi(r, \theta, z) = W_1(\gamma, z) \frac{2S_{10}(r)}{\sigma_{const} \zeta_{10}(R)}, \quad (2.2.28)$$

und für die Ableitung in Normalrichtung auf der Mantelfläche

$$\frac{d}{d\vec{n}} \Phi(r, \theta, z) = W_1(\gamma, z) \frac{2\zeta_{10}(r)}{\sigma_{const} \zeta_{10}(R)}. \quad (2.2.29)$$

Für den Rand gilt damit

$$\beta \sigma(R, \theta, z) \frac{d}{d\vec{n}} \Phi(R, \theta, z) = 2W_1(\gamma, z) e^{\gamma z} \quad (2.2.30)$$

was sich also, abgesehen vom störenden Faktor 2 um $e^{\gamma z}$ unterscheidet. Das ist genau der fehlende Term von Gleichung (2.2.4).

Gegenbeispiel 2.2.5 (Falsche Lösung in axialer Richtung). Sei $\gamma = 0$ und σ konstant. Es muss

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (2.2.31)$$

gelöst werden. Dies ist in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0, \quad (2.2.32)$$

vergleiche Anhang A.1. Nach einem Produktansatz $\Phi(r, \theta, z) = R(r)P(\theta)Z(z)$ ergibt sich

$$\frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{P''}{P} + \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (2.2.33)$$

Durch Festlegen der Separationskonstanten folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{r}R' + R'' + \left(\Gamma_n - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0, \quad (2.2.34a)$$

$$P'' + m^2P = 0, \quad (2.2.34b)$$

$$Z'' - \Gamma_n Z = 0. \quad (2.2.34c)$$

(2.2.34a) ist in [7] zu finden, damit sind die Separationskonstanten so festgelegt.

Für die angegebene Lösung

$$W_n(0, z) = \cos(\lambda_n z) \quad (2.2.35)$$

der Gleichung (2.2.34c) folgt

$$0 = \frac{d^2}{dz^2} W_n(0, z) - \Gamma_n W_n(0, z) = (-\lambda_n^2 - \Gamma_n) \cos(\lambda_n z), \quad (2.2.36)$$

also $\Gamma_n = -\lambda_n^2$. Das steht aber im Widerspruch zu $\Gamma_n = \lambda_n^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 = \lambda_n^2$ steht.

Für den allgemeinen Fall $\gamma \neq 0$ führt dieser „Vorzeichenfehler“ nun dazu, dass bei der Lösung der Differentialgleichung in radialer Richtung eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von Γ_n durchgeführt werden muss. Es treten dann sowohl die „normalen“ Besselfunktionen sowie die modifizierten Besselfunktionen auf. Durch die Korrektur, bleiben dann nur letztere übrig.

Gegenbeispiel 2.2.6. Sei $\gamma = 0$ und ein zweischichtiger Zylinder mit konstanten Leitfähigkeiten

$$\sigma_\ell(r, \theta, z) = \sigma_\ell, \quad (2.2.37)$$

$\ell \in \{1, 2\}$, $\sigma_\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben. Weiters sei

$$f(\theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (2.2.38)$$

Wie in Gegenbeispiel 2.2.1 folgt damit

$$f_{nm}(0) = 2[n = 1][m = 0], \quad (2.2.39)$$

also $f_{10} = 2$ und die restlichen f_{nm} sind 0.

Zum Bestimmen der Koeffizienten ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{10}^2 \mathbf{X}_{10}^2 = \mathbf{B}_{10}^2 \quad (2.2.40)$$

zu lösen. Für alle anderen (n, m) verschwinden die Koeffizienten, da die zugehörigen $f_{nm} = 0$ sind. Die im Gleichungssystem vorkommenden Matrizen und Vektoren lauten

$$\mathbf{A}_{10}^2 = \begin{pmatrix} S_{10}^1(R_1) & -S_{10}^2(R_1) & -T_{10}^2(R_1) \\ \sigma_1 \zeta_{10}^1(R_1) & -\sigma_2 \zeta_{10}^2(R_1) & -\sigma_2 \tau_{10}^2(R_1) \\ 0 & \alpha S_{10}^2(R_2) + \beta \sigma_2 \zeta_{10}^2(R_2) & \alpha T_{10}^2(R_2) + \beta \sigma_2 \tau_{10}^2(R_2) \end{pmatrix}, \quad (2.2.41a)$$

2 Bisherige Lösungen

$$\mathbf{B}_{10}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.2.41b)$$

und

$$\mathbf{X}_{10}^2 = \begin{pmatrix} A_{10}^1 + iB_{10}^1 \\ A_{10}^2 + iB_{10}^2 \\ (A_{10}^2 + iB_{10}^2) C_{10}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.41c)$$

vergleiche Gleichungen (2.2.8).

Sei ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.42)$$

gegeben, dann lautet die allgemeine Lösung dafür

$$x = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix} \quad (2.2.43)$$

mit

$$D = (cd - af)g + (ae - bd)h. \quad (2.2.44)$$

Damit in obigem Gleichungssystem bei der Lösung die zweite Komponente Null wird, muss also

$$T_{10}^2(R_1) \sigma_1 \zeta_{10}^1(R_1) = S_{10}^1(R_1) \sigma_2 \tau_{10}^2(R_1) \quad (2.2.45a)$$

gelten, damit die dritte ungleich Null wird

$$S_{10}^1(R_1) \sigma_2 \zeta_{10}^2(R_1) \neq S_{10}^2(R_1) \sigma_1 \zeta_{10}^1(R_1). \quad (2.2.45b)$$

Umgeformt gilt

$$\frac{S_{10}^1(R_1) \tau_{10}^2(R_1)}{T_{10}^2(R_1) \zeta_{10}^1(R_1)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq \frac{S_{10}^1(R_1) \zeta_{10}^2(R_1)}{S_{10}^2(R_1) \zeta_{10}^1(R_1)}. \quad (2.2.46)$$

Da in jeder Schicht eine konstant Leitfähigkeit angenommen wurde, gilt

$$S_{10} = S_{10}^1 = S_{10}^2 \quad (2.2.47a)$$

und

$$T_{10} = T_{10}^1 = T_{10}^2. \quad (2.2.47b)$$

Damit vereinfacht sich die Bedingung zu

$$\frac{S_{10}(R_1) \tau_{10}(R_1)}{T_{10}(R_1) \zeta_{10}(R_1)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1 \quad (2.2.48)$$

Die linke Seite ist ungleich 1 durch entsprechende Wahl von R_1 . Damit ist eine Wahl von σ_1 und σ_2 , welche diese Bedingungen erfüllt, möglich.

Somit ergibt sich bei Betrachtung der dritten Komponente der Lösung

$$0 \neq \underbrace{(A_{10}^2 + iB_{10}^2)}_{=0} C_{10}^2 = 0, \quad (2.2.49)$$

was ein Widerspruch ist.

Es kommen jetzt noch zwei weitere Gegenbeispiele. Diese demonstrieren aber, entgegen den oben stehenden keine Fehler im Paper [7]. Der Grund für das Auflisten hier ist, dass die angegebene analytische Lösung nicht für komplexwertige Leitfähigkeiten und komplexwertige Elektrodenfunktionen ausgelegt ist. Im Paper selbst ist diese Einschränkung zwar nicht ersichtlich, es wird aber auch nichts Gegenteiliges behauptet.

Gegenbeispiel 2.2.7 (komplexe Leitfähigkeiten). Sei $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und

$$\sigma(r, \theta, z) = \sigma_C \quad (2.2.50)$$

mit $\sigma_C \in \mathbb{C}$, $\sigma_C = \sigma_R + i\sigma_I$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|\sigma_C| = 1$. Weiters sei

$$f(\theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (2.2.51)$$

Wie in Gegenbeispiel 2.2.1 folgt damit

$$f_{nm}(0) = 2[n = 1][m = 0], \quad (2.2.52)$$

also $f_{10} = 2$ und die restlichen f_{nm} sind 0.

Für die Koeffizienten gilt damit

$$A_{nm} + iB_{nm} = \frac{1}{\beta\sigma_C \zeta_{nm}(R)} 2[n = 1][m = 0] \quad (2.2.53)$$

$$= \frac{2}{\zeta_{nm}(R)} (\sigma_R - i\sigma_I) [n = 1][m = 0], \quad (2.2.54)$$

also $A_{10} = \frac{2\sigma_R}{\zeta_{10}(R)}$, $B_{10} = -\frac{2\sigma_I}{\zeta_{10}(R)}$ und die restlichen A_{nm} und B_{nm} sind 0. Somit ergibt sich für die Lösung

$$\Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2S_{10}(r)}{\zeta_{10}(R)} (\sigma_R \cdot 1 - \sigma_I \cdot 0), \quad (2.2.55)$$

und für die Ableitung in Normalrichtung auf der Mantelfläche

$$\frac{d}{d\vec{n}} \Phi(r, \theta, z) = \frac{d}{dr} \Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2\zeta_{10}(r)}{\zeta_{10}(R)} (\sigma_R \cdot 1 - \sigma_I \cdot 0), \quad (2.2.56)$$

2 Bisherige Lösungen

da $W_1(0, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ ist.

Wird σ_C rein imaginär angenommen (in unserem Fall also $\pm i$ wegen der Normierung), folgt

$$\Phi(r, \theta, z) = 0 \quad (2.2.57)$$

und ebenfalls

$$\frac{d}{d\bar{n}} \Phi(r, \theta, z) = 0, \quad (2.2.58)$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wird Gleichung (2.2.51) mit Gleichung (2.2.56) verglichen, so ist auch in diesem Gegenbeispiel wieder der fehlerhafte Faktor 2 aus Gegenbeispiel 2.2.1 zu erkennen.

Gegenbeispiel 2.2.8 (komplexwertige Elektrodenfunktionen). Sei $\gamma = 0$, Leitfähigkeit $\sigma(r, \theta, z) = 1$ und

$$f(\theta, z) = \rho_C \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad (2.2.59)$$

mit $\rho_C \in \mathbb{C}$. Analog zu Gegenbeispiel 2.2.1 folgt wegen der Linearität des Integrals

$$f_{nm}(0) = 2\rho_C [n = 1] [m = 0], \quad (2.2.60)$$

also $f_{10} = 2\rho_C$ und die restlichen f_{nm} sind 0. Für die Koeffizienten gilt

$$A_{nm} + iB_{nm} = \frac{2 [n = 1] [m = 0]}{\alpha S_{nm}(R) + \beta \zeta_{nm}(R)} (\rho_R + i\rho_I), \quad (2.2.61)$$

also alle bis auf A_{10} und B_{10} sind jedenfalls 0.

Für die Lösung ergibt sich somit

$$\Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2 S_{10}(r)}{\alpha S_{10}(R) + \beta \zeta_{10}(R)}, (\rho_R \cdot 1 + \rho_I \cdot 0) \quad (2.2.62)$$

und für die Ableitung in Normalrichtung auf der Mantelfläche

$$\frac{d}{dr} \Phi(r, \theta, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \frac{2 \zeta_{10}(r)}{\alpha S_{10}(R) + \beta \sigma_{const} \zeta_{10}(R)}, (\rho_R \cdot 1 + \rho_I \cdot 0) \quad (2.2.63)$$

da $W_1(0, z) = \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ ist. Es folgt

$$\alpha \Phi(R, \theta, z) + \sigma(R, \theta, z) \beta \frac{d}{d\bar{n}} \Phi(R, \theta, z) = 2\rho_R \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad (2.2.64)$$

was sich erstens wieder um den Faktor 2 unterscheidet und zweitens von der möglichen komplexen Amplitude der Elektrodenfunktion nur den Realteil verwendet.

Kapitel 3

Analytische Lösung für den Zylinder

Zu lösen ist die partielle Differentialgleichung (*Potentialgleichung, Laplacegleichung*)

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (3.0.1)$$

nach dem Potential Φ im dreidimensionalen Raum auf einem Zylinder. Der Radius von diesem wird mit R , die Höhe mit H bezeichnet. Diese Größen sollen positiv sein, also $R > 0$ und $H > 0$. Der Materialparameter σ wird im Allgemeinen eine Funktion der Raumkoordinaten sein. Diese soll überall größer einer positiven Konstante σ_0 sein, also insbesondere als ungleich 0 vorausgesetzt werden. Im anisotropen Fall ist die Erweiterung auf einen Tensor möglich.

Auf der Grund- und Deckfläche sollen jeweils die Randbedingungen

$$\frac{d\Phi}{d\vec{n}} = 0 \quad (3.0.2)$$

gelten. Die Randbedingungen der Mantelfläche M werden extra behandelt. Es können *Dirichlet*-, *Neumann*- und *Robin-Randbedingungen* verwendet werden. Allgemein wird also eine Funktion f mit

$$f = \alpha\Phi + \beta\sigma \frac{d\Phi}{d\vec{n}}, \quad (3.0.3)$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind, vorgegeben. Weiters können auch gemischte Randbedingungen, das heißt verschiedene Randbedingungen auf verschiedenen Teilen des Zylindermantels verwendet werden. Siehe Abschnitt 3.3 und 3.5 für Weiteres.

Bemerkung 3.0.1 (Physikalische Interpretation der Randbedingungen). Im Falle der *elektrischen Impedanztomographie* ist mit Φ das elektrische Potential in *Volt* (V) und mit σ die elektrische Leitfähigkeit in *Ampere pro Volt und Meter* (A/Vm) gemeint. Das elektrische Feld E ist als negativer Gradient von Φ definiert, also

$$E = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (3.0.4)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

Damit folgt für die Stromdichte J in *Ampere pro Quadratmeter* (A/m^2) die Formel

$$J = -\sigma \cdot \text{grad } \Phi. \quad (3.0.5)$$

Durch das vorkommende Minus wäre Gleichung (3.0.3) auf

$$f = \alpha\Phi - \beta\sigma \frac{d\Phi}{d\vec{n}} \quad (3.0.6)$$

zu ändern, um den Strom in die richtige (definierte) Richtung fließen zu lassen. Mathematische gesehen ist aber kein Unterschied zu dem Plus (und negativem β), und daher wird dieses im Folgenden beibehalten.

Die Randbedingungen können nun wie folgt interpretiert werden. Auf der Grund- und Deckfläche ist der Strom Null. Diese sind also isolierend. Ist $\beta = 0$ wird das elektrische Potential vorgegeben, ist $\alpha = 0$ die elektrische Stromdichte in Normalrichtung.

3.1 Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung und Eindeutigkeit der Lösung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d = 2$ oder $d = 3$, Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und L ein *linearer Differentialoperator zweiter Ordnung*, der für jedes $x \in \Omega$ durch

$$(Lu)(x) := \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) \quad (3.1.1)$$

definiert ist. Dieser Operator heißt *elliptisch*, falls die Eigenwerte $\lambda_k(x)$ der Matrix mit den Einträgen a_{ji} alle positiv sind. L heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls $\lambda_k(x) \geq \lambda_0 > 0$ gilt. In diesem Abschnitt werden Lösbarkeitsbedingungen für die zu diesem Operator gehörenden Randwertprobleme und die Eindeutigkeit dieser Lösungen beschrieben. Vergleiche hierfür Steinbach [11], Kapitel 1 und 4. Dort finden sich auch Beschreibungen der hier nicht näher definierten Funktionenräume.

Die *innere Spur* wird für $x \in \Gamma$ durch

$$\gamma_0^{int} f(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} f(\tilde{x}) \quad (3.1.2)$$

und die *innere Konormalenableitung* für $x \in \Gamma$ durch

$$\gamma_1^{int} g(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} \left(\sum_{i,j=1}^d n_j(x) a_{ji}(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} g(\tilde{x}) \right), \quad (3.1.3)$$

definiert, wobei n_j die Komponenten des Normalvektors am Rand sind. Damit lässt sich das Randwertproblem wie folgt formulieren. Sei $\Gamma = \Gamma_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_R$ eine disjunkte Zerlegung des Randes. Sei weiters für $x \in \Omega$ die *partielle Differentialgleichung*

$$(Lu)(x) = f(x), \quad (3.1.4a)$$

3.1 Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung und Eindeutigkeit der Lösung

für $x \in \Gamma_D$ die *Dirichlet-Randbedingung*

$$\gamma_0^{int} u(x) = g_D(x), \quad (3.1.4b)$$

für $x \in \Gamma_N$ die *Neumann-Randbedingung*

$$\gamma_1^{int} u(x) = g_N(x) \quad (3.1.4c)$$

und für $x \in \Gamma_R$ die *Robin-Randbedingung*

$$\gamma_0^{int} u(x) + \kappa(x) \gamma_1^{int} u(x) = g_R(x) \quad (3.1.4d)$$

gegeben. Gesucht ist eine Funktion u , welche diese Bedingungen erfüllt.

Es gelten nun die folgenden Aussagen für einen gleichmäßig elliptischen Differentialoperator. Vergleiche hierfür 4.1 aus Steinbach [11]. Dort sind auch noch entsprechende Abschätzungen für die Norm der Lösung zu finden.

Die äquivalente Variationsformulierung des *Dirichlet-Randwertproblems*, also $\Gamma_D = \Gamma$ besitzt für $f \in H^{-1}(\Omega)$ und $g_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ eine eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$.

Für das *Neumann-Randwertproblem*, also $\Gamma_N = \Gamma$ sei die *Lösbarkeitsbedingung*

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Gamma} g_N(x) ds_x = 0 \quad (3.1.5)$$

vorausgesetzt. Die Lösung ist dabei bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, welche durch Festlegen des Teilraums $H_*^1(\Omega)$ fixiert wird. Für $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ und $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma)$, welche die Lösbarkeitsbedingung erfüllen, besitzt das zugehörige Variationsproblem eine eindeutige Lösung $u \in H_*^1(\Omega)$.

Die äquivalente Variationsformulierung des *gemischten Randwertproblems* mit $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ besitzt für $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma)$ eine eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$.

Für das Variationsproblem mit *Robin-Randdaten*, also $\Gamma_R = \Gamma$ gilt für $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$, $g_R \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ ebenfalls wieder, dass eine eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$ existiert.

Um dies nun anzuwenden, muss gezeigt werden, dass der Differentialoperator gleichmäßig elliptisch ist. Dies beschreibt die folgende Proposition.

Proposition 3.1.1. *Sei $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, dann ist der Differentialoperator in Gleichung (3.0.1) gleichmäßig elliptisch.*

Beweis. Für eine skalare Materialfunktion σ gilt für $x \in \Omega$

$$a_{ji}(x) = [j = i] \sigma(x). \quad (3.1.6)$$

Wegen dieser Diagonalform entsprechen die Eigenwerte direkt der Materialfunktion. Da $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ vorausgesetzt wurde, folgt die gleichmäßige Elliptizität mit der Konstanten σ_0 . \square

3.2 Allgemeine Lösung

Der erste Schritt beim Lösen der partiellen Differentialgleichung ist das Umrechnen der partiellen Differentialgleichung (3.0.1) in Zylinderkoordinaten, vergleiche Anhang A.1. Es ergibt sich

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.2.1)$$

Das Koordinatensystem wurde dabei entsprechend dem Zylinder gewählt, das heißt, Ursprung ist der Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders, die z -Achse geht axial entlang der Symmetrieachse durch den Mittelpunkt der Deckfläche.

3.2.1 Produktansatz

Um nun (3.2.1) zu lösen, wird ein *Separationsansatz* in Form eines *Produktansatzes* der Form

$$\Phi(r, \theta, z) = R(r) \cdot P(\theta) \cdot Z(z) \quad (3.2.2)$$

verwendet. Eingesetzt in die Gleichung und dividiert durch Φ ergibt sich

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \sigma \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sigma \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d}{dz} \left(\sigma \frac{dZ}{dz} \right) = 0. \quad (3.2.3)$$

Die Leitfähigkeit wird ebenfalls als Produkt angesetzt. Die θ -Komponente ist dabei konstant, also die Leitfähigkeit radialsymmetrisch. In axialer Richtung wird ein exponentieller Verlauf mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ angenommen und eine zunächst beliebige Funktion für die r -Komponente, das heißt

$$\sigma(r, \theta, z) = \hat{\sigma}(r) \cdot e^{\gamma z}. \quad (3.2.4)$$

Wird dies weiter eingesetzt und durch σ dividiert folgt

$$\frac{1}{rR\hat{\sigma}} \frac{d}{dr} \left(r \hat{\sigma} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\theta^2} + \frac{1}{Ze^{\gamma z}} \frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} \right) = 0. \quad (3.2.5)$$

Nun werden die einzelnen Teile getrennt. Dafür definiere man

$$\Psi_m := -\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\theta^2} \quad (3.2.6)$$

und

$$\Gamma_n := -\frac{1}{Ze^{\gamma z}} \frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} \right), \quad (3.2.7)$$

mit Ψ_m und Γ_n zunächst beliebige komplexe Zahlen. Damit ergeben sich die drei *gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\frac{1}{r\hat{\sigma}} \frac{d}{dr} \left(r\hat{\sigma} \frac{dR}{dr} \right) - \left(\frac{\Psi_m}{r^2} + \Gamma_n \right) R = 0, \quad (3.2.8a)$$

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \Psi_m P = 0 \quad (3.2.8b)$$

und

$$\frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} \right) + \Gamma_n e^{\gamma z} Z = 0. \quad (3.2.8c)$$

Diese werden nun in den folgenden drei Abschnitten getrennt behandelt.

3.2.2 Lösung der vom Winkel θ abhängigen Differentialgleichung

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.2.8b) beschreibt der folgende Satz. Für Details zu *inneren Produkten* siehe Anhang A.2, für *Sturm-Liouville-Probleme* Anhang A.3.

Satz 3.2.1 (Lösung der von θ abhängigen Differentialgleichung). *Die 2π -periodische Lösung des regulären Sturm-Liouville-Problems*

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \Psi_m P = 0 \quad (3.2.9)$$

lautet

$$P(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m P_m(\theta) \quad (3.2.10)$$

mit den *Eigenfunktionen*

$$P_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}, \quad (3.2.11)$$

den *Eigenwerten* $\Psi_m = m^2$ für $m \in \mathbb{Z}$, also nur abzählbar viele und beliebigen Koeffizienten $A_m \in \mathbb{C}$.

Die *Eigenfunktionen* sind normiert und paarweise orthogonal bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle_P = \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta \quad (3.2.12)$$

Beweis. 1. Als Ansatz für die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \Psi_m P = 0 \quad (3.2.13)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

wird $e^{\mu_m \theta}$ gewählt. Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\mu_m^2 + \Psi_m = 0 \quad (3.2.14)$$

$$(3.2.15)$$

mit den Lösungen

$$\mu_m = \pm i \sqrt{\Psi_m}. \quad (3.2.16)$$

Die Teillösungen lauten damit

$$P_m = e^{\pm i \sqrt{\Psi_m} \theta}. \quad (3.2.17)$$

Damit diese Lösungen 2π periodisch und eindeutig sind, muss $\pm \sqrt{\Psi_m} \in \mathbb{Z}$ gelten, also $\sqrt{\Psi_m} = m \in \mathbb{Z}$. Das sind nur abzählbar viele Lösungen, was mit der allgemeinen Theorie von Sturm-Liouville-Problemen übereinstimmt.

2. Da es sich um ein Sturm-Liouville-Problem handelt, folgt die Orthogonalität der Lösungen wieder aus der allgemeinen Theorie oder durch einfaches Nachrechnen.
3. Der Normierungsfaktor berechnet sich durch

$$\langle P_m, P_m \rangle_P = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-im\theta} d\theta = 2\pi. \quad (3.2.18)$$

4. Weil es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, ergibt sich die Gesamtlösung durch Superposition der einzelnen Teillösungen zu

$$P(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}. \quad (3.2.19)$$

□

Proposition 3.2.2 (Gleichmäßige Beschränktheit der P_m). *Sei $m \in \mathbb{Z}$, dann gilt für beliebiges θ*

$$|P_m(\theta)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.2.20)$$

Insbesondere sind die P_m gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Es gilt

$$|P_m(z)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.2.21)$$

Die gleichmäßige Beschränktheit gilt, da die rechte Seite nicht von m abhängt. □

Proposition 3.2.3 (Vollständigkeit der P_m). Jedes $f \in L^1_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ kann durch eine Reihe

$$P(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m P_m(\theta) \quad (3.2.22)$$

dargestellt werden.

Beweis. Dies entspricht der normalen Darstellung einer Funktion durch ihre Fourierreihe, vergleiche Rudin [9], 4.24 bis 4.26, 5.14 und 9.1 bis 9.17. \square

3.2.3 Lösung der Differentialgleichung in axialer Richtung

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.2.8c) beschreibt der folgende Satz. Für Details zu *inneren Produkten* siehe wieder Anhang A.2, für *Sturm-Liouville-Probleme* Anhang A.3.

Satz 3.2.4 (Lösung der von z abhängigen Differentialgleichung). Die Lösung des regulären Sturm-Liouville-Problems

$$\frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} \right) + \Gamma_n e^{\gamma z} Z = 0 \quad (3.2.23)$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{dZ}{dz}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dz}(H) = 0 \quad (3.2.24)$$

lautet

$$Z(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} B_n Z_n(z). \quad (3.2.25)$$

Die abzählbar vielen Eigenwerte sind reell und nicht-negativ, präziser

$$\Gamma_0 = 0 \quad (3.2.26a)$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n = \lambda_n^2 + \frac{1}{4}\gamma^2. \quad (3.2.26b)$$

Die Eigenfunktionen lauten

$$Z_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z_0}} \quad (3.2.27a)$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z_n}} e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\cos(\lambda_n z) + \frac{\gamma}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n z) \right) \quad (3.2.27b)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

mit $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$ und den Normierungsfaktoren

$$z_0 = \begin{cases} \frac{e^{\gamma H} - 1}{\gamma} & \text{für } \gamma \neq 0, \\ H & \text{für } \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.2.28a)$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = \frac{H}{2} \left(1 + \left(\frac{\gamma}{2\lambda_n} \right)^2 \right) \quad (3.2.28b)$$

Die $B_n \in \mathbb{C}$ sind beliebige Koeffizienten.

Die Eigenfunktionen sind normiert und paarweise orthogonal bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle_Z = \int_0^H e^{\gamma z} f(z) \overline{g(z)} dz \quad (3.2.29)$$

Beweis. 1. Fall $\Gamma_n = 0$. Für die zu lösende Differentialgleichung gilt die Äquivalenz

$$\frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ_0}{dz} \right) = 0 \iff e^{\gamma z} \frac{dZ_0}{dz} = C_1 \in \mathbb{C} \iff \frac{dZ_0}{dz} = C_1 e^{-\gamma z}. \quad (3.2.30)$$

Dies ist weiters äquivalent zu

$$Z_0(z) = \begin{cases} C_1 z + C_2 & \text{für } \gamma = 0, \\ -\frac{C_1}{\gamma} e^{-\gamma z} + C_2 & \text{für } \gamma \neq 0, \end{cases} \quad (3.2.31)$$

was bereits die allgemeine Lösung ist.

Einsetzen der ersten Randbedingung liefert

$$0 = \frac{dZ_0}{dz}(0) = C_1 e^{-\gamma \cdot 0} = C_1, \quad (3.2.32)$$

wodurch die zweite Randbedingung

$$\frac{dZ_0}{dz}(H) = 0 \quad (3.2.33)$$

auch erfüllt ist. Die Lösung ergibt sich somit zu

$$Z_0(z) = C_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.2.34)$$

2. Fall $\Gamma_n \neq 0$. Es gilt die Umformung

$$\frac{d}{dz} \left(e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} \right) + \Gamma_n e^{\gamma z} Z = 0 \iff e^{\gamma z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma e^{\gamma z} \frac{dZ}{dz} + \Gamma_n e^{\gamma z} Z = 0 \quad (3.2.35)$$

und weiter ergibt sich damit die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma \frac{dZ}{dz} + \Gamma_n Z = 0 \quad (3.2.36)$$

weil $e^{\gamma z} \neq 0$ ist.

Da es sich um eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt, wird der Ansatz $e^{\mu_n z}$ gewählt. Die charakteristische Gleichung lautet damit

$$\mu_n^2 + \gamma \mu_n + \Gamma_n = 0 \quad (3.2.37)$$

mit der Lösung

$$\mu_n = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Gamma_n} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\Gamma_n - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \quad (3.2.38)$$

wobei $\lambda_n^2 := \Gamma_n - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ definiert wurde, also $\Gamma_n = \lambda_n^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$.

Da es sich um ein Sturm-Liouville-Problem mit positiver Gewichtsfunktion $e^{\gamma z} > 0$ handelt, gilt $\Gamma_n \in \mathbb{R}$. Damit sind die λ_n reell ($\lambda_n \in \mathbb{R}$) oder imaginär ($\lambda_n \in i\mathbb{R}$) und es gilt $\Gamma_n - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \in \mathbb{R}$.

Ist $\lambda_n = 0$, so ist $\mu_n = -\frac{\gamma}{2}$ doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung, und somit ist

$$Z_n(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} (z + E_n) \quad (3.2.39)$$

Lösung mit einer Konstanten E_n . Die Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{dZ_n}{dz}(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(-\frac{\gamma}{2}z - \frac{\gamma}{2}E_n + 1\right). \quad (3.2.40)$$

Nun werden die Randbedingungen eingesetzt. Falls $\gamma \neq 0$ ist, gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dZ_n}{dz}(0) = -\frac{\gamma}{2}E_n + 1 \implies E_n = \frac{2}{\gamma} \quad (3.2.41)$$

und damit

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dZ_n}{dz}(H) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\gamma H}}_{\neq 0} \underbrace{\left(-\frac{\gamma}{2}H - 1 + 1\right)}_{\neq 0}, \quad (3.2.42)$$

also ein Widerspruch. Falls $\gamma = 0$ ist, gilt

$$\frac{dZ_n}{dz}(z) = 1 \neq 0, \quad (3.2.43)$$

damit ebenfalls ein Widerspruch. $\lambda_n = 0$ ist somit kein Eigenwert.

3 Analytische Lösung für den Zylinder

Sei nun also $\lambda_n \neq 0$. Für die allgemeine Lösung folgt

$$Z_n(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} (\cos(\lambda_n z) + D_n \sin(\lambda_n z)), \quad (3.2.44)$$

die zugehörige Ableitung lautet

$$\frac{dZ_n}{dz}(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\left(\lambda_n D_n - \frac{\gamma}{2} \right) \cos(\lambda_n z) - \left(\lambda_n + \frac{\gamma}{2} D_n \right) \sin(\lambda_n z) \right). \quad (3.2.45)$$

Durch Einsetzen der ersten Randbedingung ergibt sich

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dZ_n}{dz}(0) = \lambda_n D_n - \frac{\gamma}{2} = 0 \quad (3.2.46)$$

und damit

$$D_n = \frac{\gamma}{2\lambda_n}. \quad (3.2.47)$$

Durch die zweite Randbedingung folgt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dZ_n}{dz}(H) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\gamma H}}_{\neq 0} \left(0 - \left(\lambda_n + \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma}{2\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n H) \right) \quad (3.2.48)$$

Ist $\lambda_n^2 = \Gamma_n - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 < 0$, also $\lambda_n \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt mit $\cosh(x) = \cos(ix)$ und $\sinh(x) = -i \sin(ix)$ und durch die Definition von $\tilde{\lambda}_n$ durch $\lambda_n = i\tilde{\lambda}_n$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\lambda_n + \frac{\gamma^2}{4\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n H) = -i \left(\tilde{\lambda}_n - \frac{\gamma^2}{4\tilde{\lambda}_n} \right) \sinh(\tilde{\lambda}_n H). \quad (3.2.49)$$

Wegen $\tilde{\lambda}_n \neq 0$ ist $\sinh(\tilde{\lambda}_n H) \neq 0$ und somit muss

$$\left(\tilde{\lambda}_n - \frac{\gamma^2}{4\tilde{\lambda}_n} \right) = 0 \quad (3.2.50)$$

sein. Das heißt also $\tilde{\lambda}_n = \frac{\gamma^2}{4}$ womit sich

$$\Gamma_n = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4} = 0 \quad (3.2.51)$$

ergibt. Das ist ein Widerspruch, da $\Gamma_n \neq 0$ vorausgesetzt wurde. Würde man alternativ $\Gamma_n = 0$ zulassen, käme wieder die konstante Lösung raus.

Ist $\lambda_n^2 = \Gamma_n - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > 0$, also $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so gilt nach Einsetzen der zweiten Randbedingung

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\lambda_n + \frac{\gamma^2}{4\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n H) \quad (3.2.52)$$

Ist $\lambda_n + \frac{\gamma^2}{4\lambda_n} = 0$, so ist $\lambda_n^2 = -\frac{\gamma^2}{4}$, was im Widerspruch zu $\lambda_n^2 > 0$ steht.

Somit muss $\sin(\lambda_n H) = 0$ gelten, also

$$\lambda_n H = n\pi \quad (3.2.53)$$

mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ohne Einschränkungen ($-n$ liefert die gleiche Lösung wie $+n$) kann $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden.

Damit folgt, bis auf einen Normierungsfaktor die Lösung

$$Z_n(z) = e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\cos(\lambda_n z) + \frac{\gamma}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n z) \right). \quad (3.2.54)$$

mit $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$ und $n \in \mathbb{N}$.

3. Die Orthogonalität der Z_n folgt wieder aus der allgemeinen Theorie von Sturm-Liouville-Problemen.

4. Für den Normierungsfaktor gilt

$$z_n = \langle Z_n, Z_n \rangle_Z = \int_0^H e^{\gamma z} Z_n^2(z) dz = \frac{H}{2} \left(1 + \left(\frac{\gamma}{2\lambda_n} \right)^2 \right), \quad (3.2.55)$$

wenn $n \in \mathbb{N}$ ist. Falls $\gamma = 0$ gilt für die konstante Eigenfunktion

$$z_0 = \langle 1, 1 \rangle_Z = \int_0^H dz = H, \quad (3.2.56)$$

und für $\gamma \neq 0$ gilt

$$z_0 = \langle 1, 1 \rangle_Z = \int_0^H e^{\gamma z} dz = \frac{e^{\gamma H} - 1}{\gamma}. \quad (3.2.57)$$

□

Für Reihenentwicklungen der Randbedingungen müssen die Z_n gleichmäßig beschränkt bleiben, siehe Abschnitte 3.3 und 3.5. Die folgende Proposition gibt diese Schranken an.

Proposition 3.2.5 (Gleichmäßige Beschränktheit der Z_n). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für $z \in [0, H]$*

$$|Z_n(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{z_n}} \max \left\{ 1, e^{-\frac{\gamma}{2}H} \right\}, \quad (3.2.58)$$

und die Z_n sind gleichmäßig beschränkt.

3 Analytische Lösung für den Zylinder

Beweis. Für Z_0 ist nichts zu zeigen, also $n \geq 1$. Es gilt

$$(\sqrt{z_n} Z_n(z))' = \left(e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\cos(\lambda_n z) + \frac{\gamma}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n z) \right) \right)' \quad (3.2.59)$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\frac{\gamma^2}{4\lambda_n} + \lambda_n \right) \sin(\lambda_n z). \quad (3.2.60)$$

Die Nullstellen dieser Funktion (Extrema der ursprünglichen Funktion) sind bei $\lambda_n z_k = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, also bei $z_k = \frac{k}{n}H$. Dort gilt

$$Z_n(z_k) = e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{k}{n}H} (-1)^k, \quad (3.2.61)$$

das heißt also, es wechseln sich Minima und Maxima ab. Dies sind auch die alle Extrema, da die Funktion stetig differenzierbar ist. Insbesondere gibt es Extrema bei $z_0 = 0$ und $z_n = H$.

Falls $\gamma \geq 0$ ist, betrachten wir das Extremum bei 0. Der Betrag von diesem ist 1. Da die Exponentialfunktion in (3.2.61) in diesem Fall monoton fallend ist, ist der Betrag der anderen Extrema ($k \geq 0$) kleiner oder gleich 1. Falls $\gamma < 0$ ist, wird analog vorgegangen, allerdings das Extremum bei H betrachtet.

Die gleichmäßige Beschränktheit ergibt sich aus den Schranken der beiden Fälle $n = 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Für den ersten Fall siehe oben. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die z_n monoton fallend in n mit unterer Schranke $\frac{H}{2}$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} |Z_n(z)| &\leq \max \left\{ \max \left\{ \sqrt{\frac{1}{H}}, \sqrt{\frac{\gamma}{e^{\gamma H} - 1}} \right\}, \sqrt{\frac{2}{H}} \max \left\{ 1, e^{-\frac{\gamma}{2}H} \right\} \right\} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{H}} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{\gamma H}{e^{\gamma H} - 1}}, e^{-\frac{\gamma}{2}H} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

Da die rechte Seite nicht von n abhängt, sind die Z_n gleichmäßig beschränkt. \square

Proposition 3.2.6 (Vollständigkeit der Z_n). *Jedes $f \in L^1_{\mathbb{C}}([0, H])$ mit $\frac{df}{dz}(0) = 0$ und $\frac{df}{dz}(H) = 0$ kann durch eine Reihe*

$$Z(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} B_n Z_n(z) \quad (3.2.63)$$

dargestellt werden.

Ein Beweis dafür ist noch ausständig und wird hier in dieser Arbeit nicht behandelt. Im nachfolgenden sollen zwei Ideen gebracht werden, wie dies aussehen könnte.

Die erste Idee ist das Betrachten der Ableitung. Im Beweis von Satz 3.2.4 kam dafür

$$\frac{dZ_n}{dz}(z) = -e^{-\frac{\gamma}{2}z} \left(\lambda_n + \frac{\gamma^2}{4\lambda_n} \right) \sin(\lambda_n z) \quad (3.2.64)$$

heraus. Die Randbedingungen sind damit (durch den Sinus) automatisch erfüllt. Für $\gamma = 0$ ist dies wieder die Darstellung als Fourierreihe. Damit folgt aus der Theorie dieser, dass die Ableitung als solche Reihe dargestellt werden kann, vergleiche wieder Rudin [9], 4.24 bis 4.26, 5.14 und 9.1 bis 9.17.

Für $\gamma \neq 0$ muss die Vollständigkeit von Funktionen der Form $e^{c_n z}$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ gezeigt werden. Dies sollte in ähnlicher Weise wie die Vollständigkeit der e^{inz} funktionieren. Anschließend sind noch die Bedingungen zu überprüfen, welche den Übergang von der Ableitung auf die ursprüngliche Funktion ermöglichen.

Die andere Idee ist die Eigenschaften der Vollständigkeit – sofern möglich – aus der allgemeinen Theorie von *Sturm-Liouville-Systemen* zu folgern.

3.2.4 Lösung der Differentialgleichung in radialer Richtung

In diesem Abschnitt wird die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.2.8a) für verschiedene Leitfähigkeitsverteilungen $\hat{\sigma}(r)$ hergeleitet. Durch Umformen und Ausdifferenzieren wird aus

$$\frac{1}{r\hat{\sigma}} \frac{d}{dr} \left(r\hat{\sigma} \frac{dR}{dr} \right) - \left(\frac{\Psi_m}{r^2} + \Gamma_n \right) R = 0 \quad (3.2.65)$$

die Gleichung

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(r + r^2 \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dr} \right) \frac{dR}{dr} - (\Psi_m + \Gamma_n r^2) R = 0. \quad (3.2.66)$$

In diesem Abschnitt werden die Erkenntnisse für die Separationskonstanten aus den vorherigen beiden Abschnitten verwendet. Genauer, es wird $\Psi_m = m^2$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gebraucht.

Weiters sei in diesem Abschnitt S_{nm} die beschränkte Lösung der Differentialgleichung, T_{nm} in Null unbeschränkte Lösung.

Satz 3.2.7. *Sei*

$$\hat{\sigma}(r) = \sigma_1 r^\mu \quad (3.2.67)$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1 \in \mathbb{C}$. Definiere

$$\nu := \sqrt{m^2 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}, \quad (3.2.68)$$

dann gilt für $\nu = 0$ (also $m = 0$ und $\mu = 0$)

$$S_{00}(r) = 1, \quad (3.2.69a)$$

$$T_{00}(r) = \ln r, \quad (3.2.69b)$$

für $\nu \neq 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{Z}$

$$S_{0m}(r) = r^{-\frac{\mu}{2} + \nu}, \quad (3.2.69c)$$

$$T_{0m}(r) = r^{-\frac{\mu}{2} - \nu} \quad (3.2.69d)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

und für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$S_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r), \quad (3.2.69e)$$

$$T_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} e^{\nu\pi i} K_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r). \quad (3.2.69f)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich durch Linearkombination aller S_{nm} und T_{nm} .

Bemerkung 3.2.8. Der bei K_ν stehende Vorfaktor $e^{\nu\pi i}$ kann auch weggelassen werden, da dieser lediglich eine Skalierung beziehungsweise eine Änderung des Arguments¹ bewirkt. Für allgemeine Betrachtungen ist es jedoch von Vorteil diesen dabei zu lassen. Vergleiche dazu auch Abramowitz und Stegun [1], Abschnitt 9.6.

Beweis des Satzes. Zuerst wird der allgemeine Fall $\Gamma_n \neq 0$ behandelt. Durch Umformen von Gleichung (3.2.66) ergibt sich

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + (1 + \mu) r \frac{dR}{dr} + \left(-(\sqrt{\Gamma_n})^2 1^2 r^{2 \cdot 1} + \frac{\mu^2}{4} - \left(\sqrt{\Psi_m + \frac{\mu^2}{4}} \right)^2 1^2 \right) R = 0 \quad (3.2.70)$$

Mit $\Gamma_n > 0$ und $\Psi_m = m^2 \geq 0$ folgt daraus mittels 9.1.53 und 9.6 aus Abramowitz und Stegun [1] das gewünschte Resultat.

Ist $\Gamma_n = 0$ so ist die *Eulersche Differentialgleichung*

$$r^2 R'' + (1 + \mu) r R' - m^2 R = 0 \quad (3.2.71)$$

zu lösen. Dafür wird der Ansatz $R(r) = r^\xi$ gewählt, wodurch sich die charakteristische Gleichung

$$\xi(\xi - 1) + \xi(1 + \mu) - m^2 = 0 \quad (3.2.72)$$

ergibt. Die Lösungen davon sind

$$\xi = -\frac{\mu}{2} \pm \underbrace{\sqrt{m^2 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}}_{=: \nu}, \quad (3.2.73)$$

womit sich die gewünschte Lösung für $\nu \neq 0$ ergibt.

Ist $\nu = 0$ (also $m = 0$ und $\mu = 0$) tritt Resonanz auf, somit bleibt $r^2 R'' + r R' = 0$ zu lösen. Diese Gleichung besitzt die Lösungen 1 und $\ln r$, wie beispielsweise durch einfaches Einsetzen zu sehen ist. \square

¹Hier ist mit *Argument* der Winkel der komplexen Zahl gemeint.

Bemerkung 3.2.9 (Ableitungen von S_{nm} und T_{nm}). Definiere die Ableitungen von S_{nm} und T_{nm} durch die Symbole

$$\zeta_{nm}(r) := \frac{dS_{nm}}{dr}(r) \quad (3.2.74a)$$

und

$$\tau_{nm}(r) := \frac{dT_{nm}}{dr}(r) \quad (3.2.74b)$$

Hier wird wieder nach den bereits im Satz vorkommenden Kriterien unterschieden. Für $\nu = 0$ gilt

$$\zeta_{00}(r) = 0, \quad (3.2.75a)$$

$$\tau_{00}(r) = \frac{1}{r}. \quad (3.2.75b)$$

Für $\nu \neq 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ ergibt sich

$$\zeta_{0m}(r) = \left(-\frac{\mu}{2} + \nu\right) r^{-\frac{\mu}{2} + \nu - 1}, \quad (3.2.75c)$$

$$\tau_{0m}(r) = \left(-\frac{\mu}{2} - \nu\right) r^{-\frac{\mu}{2} - \nu - 1}. \quad (3.2.75d)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ folgt nach Einsetzen der Ableitungen der modifizierten Besselfunktionen laut Anhang A.4 und einer kleinen Rechnung

$$\zeta_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2} - 1} \left(\nu - \frac{\mu}{2}\right) I_\nu\left(\sqrt{\Gamma_n} r\right) + r^{-\frac{\mu}{2}} \sqrt{\Gamma_n} I_{\nu+1}\left(\sqrt{\Gamma_n} r\right), \quad (3.2.75e)$$

$$\tau_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2} - 1} \left(\nu - \frac{\mu}{2}\right) e^{\nu\pi i} K_\nu\left(\sqrt{\Gamma_n} r\right) + r^{-\frac{\mu}{2}} \sqrt{\Gamma_n} e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1}\left(\sqrt{\Gamma_n} r\right). \quad (3.2.75f)$$

Für weitere Lösungen der Differentialgleichung mit anderen Leitfähigkeitsverteilungen in radialer Richtung vergleiche Pidcock [7]. Dort ist zum Beispiel eine Lösung für

$$\hat{\sigma}(r) = \sigma_1 \frac{e^{\mu r}}{r} \quad (3.2.76)$$

angegeben, allerdings wieder mit den fehlenden Ausdrücken für S_{0m} und T_{0n} und mit der überflüssigen Fallunterscheidung, siehe Gegenbeispiele 2.2.2 und 2.2.5.

3.2.5 Zusammensetzen der Lösung

Aus dem Separationsansatz

$$\Phi(r, \theta, z) = R(r) \cdot P(\theta) \cdot Z(z) \quad (3.2.77)$$

folgt nach Elimination (Zusammenfassung) überflüssiger Koeffizienten die allgemeine Lösung

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (A_{nm} S_{nm}(r) + B_{nm} T_{nm}(r)) P_m(\theta) Z_n(z) \quad (3.2.78)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

der partiellen Differentialgleichung (3.0.1). Befindet sich $r = 0$ im Gebiet, wird der Term mit T_{nm} weggelassen, damit die Lösung beschränkt bleibt, also

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} S_{nm}(r) P_m(\theta) Z_n(z). \quad (3.2.79)$$

Für die weiteren Betrachtungen definiere

$$\psi_{nm}(\theta, z) := P_m(\theta) Z_n(z) \quad (3.2.80)$$

und

$$\langle f, g \rangle_\psi := \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{\gamma z} f(\theta, z) \overline{g(\theta, z)} d\theta dz. \quad (3.2.81)$$

Damit gelten die folgenden Propositionen, welche die Eigenschaften der P_m und Z_n auf die ψ_{nm} übertragen.

Proposition 3.2.10 (Orthonormalität der ψ_{nm}). *Die ψ_{nm} sind normiert und paarweise orthogonal bezüglich des inneren Produkts $\langle f, g \rangle_\psi$.*

Beweis. Sei $f \in 1$, dann gilt

$$\langle f, \psi_{nm} \rangle_\psi = \int_{z=0}^H e^{\gamma z} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} f(\theta, z) \overline{P_m(\theta)} d\theta}_{= \langle \theta \mapsto f(\theta, z), P_m \rangle_P =: \tilde{f}(z)} \overline{Z_n(z)} dz \quad (3.2.82)$$

$$= \langle \tilde{f}, Z_n \rangle_Z. \quad (3.2.83)$$

Unter Verwendung der Eigenschaften des inneren Produkts (siehe auch Anhang A.2) gilt damit

$$\begin{aligned} \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_\psi &= \langle z \mapsto (\langle \theta \mapsto (P_m(\theta) Z_n(z)), P_{\tilde{m}} \rangle_P), Z_{\tilde{n}} \rangle_Z \\ &= \langle Z_n [m = \tilde{m}], Z_{\tilde{n}} \rangle_Z \\ &= [m = \tilde{m}] [n = \tilde{n}]. \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Die Normiertheit der ψ_{nm} folgt analog aus der Normiertheit von P_m und Z_n . \square

Proposition 3.2.11 (Gleichmäßige Beschränktheit der ψ_{nm}). *Die ψ_{nm} gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. Es gilt

$$|\psi_{nm}(\theta, z)| = |P_m(\theta)| |Z_n(z)|. \quad (3.2.85)$$

Die beiden Faktoren sind nach Propositionen 3.2.2 und 3.2.5 gleichmäßig beschränkt, somit auch die ψ_{nm} . \square

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Proposition 3.2.12 (Vollständigkeit der ψ_{nm}). Jedes $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T \times [0, H])$ mit $\frac{df}{dz}(0) = 0$ und $\frac{df}{dz}(H) = 0$ kann durch eine Reihe

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_{nm} \psi_{nm}(z) \quad (3.2.86)$$

dargestellt werden.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Vollständigkeit der Funktionen P_m und Z_n in den Propositionen 3.2.3 und 3.2.6. \square

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Es ist nun an der Zeit, die Koeffizienten der allgemeine Lösung (3.2.78) beziehungsweise (3.2.79) aus dem vorherigen Abschnitt so zu bestimmen, dass die Lösung die Randbedingungen auf dem Zylindermantel erfüllt.

Es sei dafür eine Funktion f auf der Mantelfläche $M = T \times [0, H]$ vorgegeben, wobei T der eindimensionale Torus (siehe Anhang A) ist. α und β geben die Art der „Kontaktierung“ an, präziser ausgedrückt soll

$$f(\theta, z) = \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi}{dn}(R, \theta, z) \quad (3.3.1)$$

gelten. Die Ableitung in Normalrichtung auf dem Mantel $\frac{d}{dn}$ entspricht klarerweise der Ableitung $\frac{d}{dr}$. $\beta = 0$ (und $\alpha \neq 0$) führt zu *Dirichlet-Randbedingungen*, also zur Vorgabe des Potentials Φ und $\alpha = 0$ (und $\beta \neq 0$) zu *Neumann-Randbedingungen*, also zur Vorgabe der Stromdichte. Für den Fall $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ sind *Robin-Randbedingungen*, also eine Linearkombination aus beiden vorhanden. Die Bedingung

$$\alpha + \beta = 1 \quad (3.3.2)$$

ist formal für die Berechnung nicht notwendig, allerdings kann dies ohne Einschränkungen angenommen werden (skaliere gegebenenfalls f um einen passenden Faktor).

3.3.1 Allgemeine Vorgangsweise

Um jetzt die Koeffizienten der allgemeinen Lösung zu bestimmen, wird zuerst die Funktion f in eine Reihe mit den Basisfunktionen ψ_{nm} entwickelt. Danach erfolgt dann, nach Einsetzen in die allgemeine Lösung ein Koeffizientenvergleich, woraus die Koeffizienten bestimmt werden können, siehe Abschnitt 3.3.3 und 3.3.4.

Für die Entwicklung in eine Reihe, wird die Funktion auf die einzelnen Basisfunktionen ψ_{nm} projiziert. Definiere

$$f_{nm} := \langle f, \psi_{nm} \rangle_{\psi}. \quad (3.3.3)$$

Unter geeigneten Voraussetzungen für die Funktion und für die Koeffizienten gilt die folgende Umkehrformel.

3 Analytische Lösung für den Zylinder

Proposition 3.3.1 (Umkehrformel). *Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(M)$ und $f_{nm} \in \ell^1_{\mathbb{C}}$, dann gilt*

$$f(\theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{nm} \psi_{nm}(\theta, z). \quad (3.3.4)$$

Beweis. Es sind alle Voraussetzungen der Umkehrformel für vollständige Orthonormalsysteme gegeben, vergleiche Satz 3.4.1 beziehungsweise Rudin [9], 9.4. Für die gleichmäßige Beschränktheit der ψ_{nm} siehe Proposition 3.2.11, und dass diese ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, vergleiche Propositionen 3.2.10 und 3.2.12. Noch anzumerken ist, dass $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ isomorph zu \mathbb{Z} ist, also beide enthalten jeweils abzählbar unendlich viele Elemente. \square

3.3.2 Fourierentwicklung ausgewählter Elektrodenkonfigurationen

In diesem Abschnitt werden für zwei ausgewählte Elektrodenkonfigurationen, nämlich Punktelektroden und Rechteckelektroden die Fourierkoeffizienten explizit ausgerechnet.

Sei E die Zylindermantelfläche, also diejenige Fläche, wo sich unsere Elektroden befinden. Allgemein kann eine beliebige Funktion $f \in L^1_{\mathbb{C}}(E)$ auf E als Randbedingung vorgegeben werden.

Gibt es einzelne Elektroden an bestimmten Orten E_i , so setzt sich f aus der Summe all dieser einzelnen zusammen, also

$$f(\theta, z) = \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) f_i(\theta, z) \quad (3.3.5)$$

Damit ergibt sich

$$f_{nm} = \langle f, \psi_{nm} \rangle_{\psi} \quad (3.3.6)$$

$$= \left\langle (\theta, z) \mapsto \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) f_i(\theta, z), \psi_{nm} \right\rangle_{\psi} \quad (3.3.7)$$

$$= \sum_{i \in I} \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) f_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_{\psi} \quad (3.3.8)$$

$$= \sum_{i \in I} \underbrace{\int \int_{E_i} e^{\gamma z} f_i(\theta, z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz}_{=: f_{nm,i}} \quad (3.3.9)$$

$$= \sum_{i \in I} f_{nm,i}. \quad (3.3.10)$$

Es genügt also, für jede Elektrode über die Amplitudenfunktion über die Elektrodenfläche zu integrieren und zum Schluss alles aufzusummieren.

Gilt

$$\bigcup_{i \in I} E_i \subsetneq E, \quad (3.3.11)$$

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

so gibt es Bereiche, die nicht explizit entwickelt werden. Anders ausgedrückt, wird dort 0 dargestellt.

Im Folgenden wird jeweils unterschieden, ob $\alpha = 0$, $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ ist, siehe Abschnitt 3.3.3 und 3.3.4. Definiere

$$\tilde{g}(\theta, z) := e^{-\gamma z} g(\theta, z). \quad (3.3.12)$$

Vergleiche auch Abschnitt "4.1 Electrode models" von Pidcock [7].

Punktelektroden

Im Bereich von E_i existiere eine Punktelektrode bei (θ_i, z_i) , also

$$f_i(\theta, z) = \rho_i \delta(\theta - \theta_i) \delta(z - z_i) \quad (3.3.13)$$

mit einem konstanten $\rho_i \in \mathbb{C}$. Ist $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} f_{nm,i} &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) f_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\ &= \iint_{E_i} e^{\gamma z} f_i(\theta, z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \iint_{E_i} e^{\gamma z} \rho_i \delta(\theta - \theta_i) \delta(z - z_i) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \rho_i e^{\gamma z_i} \overline{P_m(\theta_i) Z_n(z_i)}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Für $\alpha = 0$ (oder $\gamma = 0$) gilt

$$\begin{aligned} f_{nm,i} &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) \tilde{f}_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\ &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) e^{-\gamma z} f_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\ &= \iint_{E_i} e^{\gamma z} e^{-\gamma z} f_i(\theta, z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \iint_{E_i} \rho_i \delta(\theta - \theta_i) \delta(z - z_i) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \rho_i \overline{P_m(\theta_i) Z_n(z_i)}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Rechteckelektroden

Im Bereich von E_i existiere eine Rechteckelektrode mit Mittelpunkt (θ_i, z_i) , Breite w_i und Höhe h_i . Die Breite entspricht einem Winkel von $\frac{w_i}{R}$. Somit ergibt sich

$$f_i(\theta, z) = \rho_i \mathbb{1}_{[\theta_i - \frac{w_i}{2R}, \theta_i + \frac{w_i}{2R}]}(\theta) \mathbb{1}_{[z_i - \frac{h_i}{2}, z_i + \frac{h_i}{2}]}(z) \quad (3.3.16)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

wieder mit einem konstanten $\rho_i \in \mathbb{C}$. Ist $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
f_{nm,i} &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) f_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\
&= \iint_{E_i} e^{\gamma z} f_i(\theta, z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\
&= \iint_{E_i} e^{\gamma z} \rho_i \mathbb{1}_{[\theta_i - \frac{w_i}{2R}, \theta_i + \frac{w_i}{2R}]}(\theta) \mathbb{1}_{[z_i - \frac{h_i}{2}, z_i + \frac{h_i}{2}]}(z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\
&= \rho_i \int_{\theta = \theta_i - \frac{w_i}{2R}}^{\theta_i + \frac{w_i}{2R}} \overline{P_m(\theta)} d\theta \int_{z = z_i - \frac{h_i}{2}}^{z_i + \frac{h_i}{2}} e^{\gamma z} \overline{Z_n(z)} dz.
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Für $\alpha = 0$ (oder $\gamma = 0$) gilt

$$\begin{aligned}
f_{nm,i} &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) \tilde{f}_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\
&= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{E_i}(\theta, z) e^{-\gamma z} f_i(\theta, z), \psi_{nm} \rangle_\psi \\
&= \iint_{E_i} e^{\gamma z} e^{-\gamma z} f_i(\theta, z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\
&= \iint_{E_i} \rho_i \mathbb{1}_{[\theta_i - \frac{w_i}{2R}, \theta_i + \frac{w_i}{2R}]}(\theta) \mathbb{1}_{[z_i - \frac{h_i}{2}, z_i + \frac{h_i}{2}]}(z) \overline{\psi_{nm}(\theta, z)} d\theta dz \\
&= \rho_i \int_{\theta = \theta_i - \frac{w_i}{2R}}^{\theta_i + \frac{w_i}{2R}} \overline{P_m(\theta)} d\theta \int_{z = z_i - \frac{h_i}{2}}^{z_i + \frac{h_i}{2}} \overline{Z_n(z)} dz.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Die ausgerechneten Integrale sind in Anhang B.1 zu finden.

3.3.3 Lösung für einen einschichtigen Zylinder

Für den einschichtigen Zylinder ($r = 0$ befindet sich im Zylinder) wurde die allgemeine Lösung bereits in Abschnitt 3.2 hergeleitet. Diese lautet

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} S_{nm}(r) \psi_{nm}(\theta, z). \tag{3.3.19}$$

Sei eine Funktion f auf dem Zylindermantel M gegeben, und es soll für $(\theta, z) \in M$

$$f(\theta, z) = \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) \tag{3.3.20}$$

gelten. Die Berechnung der Koeffizienten der allgemeinen Lösung gibt der folgende Satz an.

Satz 3.3.2 (Berechnung der Koeffizienten). *Sei $\gamma = 0$ (konstante Leitfähigkeitsverteilung in z -Richtung), $\beta = 0$ (Potential vorgegeben) oder $\alpha = 0$ (Stromdichte vorgegeben), und sei weiters für $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$*

$$f_{nm} = \langle f, \psi_{nm} \rangle_\psi \tag{3.3.21a}$$

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

und für $\alpha = 0$ (oder $\gamma = 0$)

$$f_{nm} = \langle \tilde{f}, \psi_{nm} \rangle_{\psi} \quad (3.3.21b)$$

mit

$$\tilde{f}(\theta, z) = e^{-\gamma z} f(\theta, z). \quad (3.3.21c)$$

Es gilt

$$A_{nm} = f_{nm} (\alpha S_{nm}(R) + \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R))^{-1}, \quad (3.3.22)$$

sofern die Inversion durchführbar ist.

Für andere, allgemeine Kombinationen von γ , α und β ist keine Lösung auf diese Weise zu berechnen, da

$$\langle (\theta, z) \mapsto e^{\gamma z} \psi_{nm}(\theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle \neq [(n, m) = (\tilde{n}, \tilde{m})] \quad (3.3.23)$$

ist. Die auftretenden Funktionen sind also nicht mehr orthogonal und damit wäre für die Bestimmung der A_{nm} ein (sehr großes) Gleichungssystem zu lösen. Dieses Problem ist ähnlich zu dem später beschriebenen Problem der gemischten Randbedingungen.

Beweis des Satzes. Ist $\gamma = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} f_{\tilde{n}\tilde{m}} &= \langle f, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{\psi} = \left\langle \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \hat{\sigma}(R) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} (\alpha S_{nm}(R) + \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R)) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle \\ &= A_{\tilde{n}\tilde{m}} (\alpha S_{\tilde{n}\tilde{m}}(R) + \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}(R)) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

und umgekehrt auf der Mantelfläche

$$\begin{aligned} &\alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} (\alpha S_{nm}(R) + \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R)) \psi_{nm}(\theta, z) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{nm} \psi_{nm}(\theta, z) = f(\theta, z). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Für $\beta = 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_{\tilde{n}\tilde{m}} &= \langle f, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{\psi} = \langle \alpha \Phi(R, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{\psi} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \alpha S_{nm}(R) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle \\ &= A_{\tilde{n}\tilde{m}} \alpha S_{\tilde{n}\tilde{m}}(R) \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

und umgekehrt auf der Mantelfläche

$$\begin{aligned}
& \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) = \\
& = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \alpha S_{nm}(R) \psi_{nm}(\theta, z) \\
& = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{nm} \psi_{nm}(\theta, z) = f(\theta, z).
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Für $\alpha = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{n}\tilde{m}} & = \langle e^{-\gamma z} f, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{\psi} = \left\langle e^{-\gamma z} \beta \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} \\
& = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle \\
& = A_{\tilde{n}\tilde{m}} \beta \hat{\sigma}(R) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}(R)
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

und umgekehrt auf der Mantelfläche

$$\begin{aligned}
& \alpha \Phi(R, \theta, z) + \beta \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) = \\
& = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \beta \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \zeta_{nm}(R) \psi_{nm}(\theta, z) \\
& = e^{\gamma z} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{nm} \psi_{nm}(\theta, z) = e^{\gamma z} e^{-\gamma z} f(\theta, z) = f(\theta, z).
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

□

Bemerkung 3.3.3. Ist die Inversion im Satz nicht möglich, ist das System unterbestimmt. Es kann mindestens ein Koeffizient frei gewählt werden.

Für die in dieser Diplomarbeit beschriebenen Konfigurationen tritt dies nur bei $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ (reine Neumann-Randbedingungen) für den Koeffizienten A_{00} ein. Da dabei die Ableitung von Φ vorgegeben wird, ist klarerweise auch $\Phi(R, \theta, z) + \Phi_C$ mit $\Phi_C \in \mathbb{C}$ eine Lösung.

Physikalisch gesehen ist das auch klar, weil durch Anlegen von reinen Stromelektroden sich das Potential noch um eine Konstante unterscheiden kann.

3.3.4 Lösung für einen mehrschichtigen Zylinder

Gegeben sei also ein mehrschichtiger kreisförmiger Zylinder, das heißt, der Zylinder besteht aus mehreren kreisringförmigen Zylindern. Die nachfolgenden Betrachtungen sind für einen Zylinder mit L Schichten (Layern) und den Radien

$$0 = R^{[0]} < R^{[1]} < \dots < R^{[L]} = R \tag{3.3.30}$$

angegeben. Für Schicht ℓ gilt dabei $R^{[\ell-1]} < r < R^{[\ell]}$.

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Es bekommt nun jeder Schicht eine eigene (radialsymmetrische) Leitfähigkeitsverteilung

$$\sigma^{[\ell]}(r, \theta, z) = \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) e^{\gamma z}. \quad (3.3.31)$$

γ muss in allen Schichten gleich gewählt werden, ansonsten ist keine Lösung in der hier beschriebenen Weise möglich. Die $\hat{\sigma}^{[\ell]}$ können für jede Schicht beliebig (vergleiche Abschnitt 3.2.4) gewählt werden.

Für die einzelnen Schichten $\ell \in \{1, 2, \dots, L\}$ wird je eine allgemeine Lösung $\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z)$ angesetzt, siehe Abschnitt 3.2. Für die innerste Schicht $\ell = 1$ lautet diese

$$\Phi^{[1]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm}^{[1]} S_{nm}^{[1]}(r) \psi_{nm}(\theta, z), \quad (3.3.32a)$$

da sich $r = 0$ im Gebiet befindet. Für die anderen Schichten $\ell \in \{2, \dots, L\}$ gilt

$$\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(A_{nm}^{[\ell]} S_{nm}^{[\ell]}(r) + B_{nm}^{[\ell]} T_{nm}^{[\ell]}(r) \right) \psi_{nm}(\theta, z). \quad (3.3.32b)$$

An den Grenzflächen der einzelnen Schichten sollen die folgenden Bedingungen gelten. Für alle Grenzflächen im Inneren sollen das Potential und die Stromdichte stetig übergehen. Das heißt also, für $\ell \in \{1, \dots, L-1\}$ und für alle (θ, z) soll

$$\Phi^{[\ell]}(R^{[\ell]}, \theta, z) = \Phi^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}, \theta, z) \quad (3.3.33a)$$

und

$$\hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[\ell]}}{dr}(R^{[\ell]}, \theta, z) = \hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[\ell+1]}}{dr}(R^{[\ell]}, \theta, z) \quad (3.3.33b)$$

gelten. In der letzten Gleichung kann dabei auf den Faktor $e^{\gamma z}$ verzichtet (wegkürzen) werden. Auf der äußersten Schicht, welche gleich der Mantelfläche des Zylinders ist, werden wieder Elektroden in Form einer Funktion f angelegt, also

$$f(\theta, z) = \alpha \Phi^{[L]}(R, \theta, z) + \beta \hat{\sigma}^{[L]}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[L]}}{dr}(R, \theta, z). \quad (3.3.33c)$$

Satz 3.3.4 (Berechnung der Koeffizienten). *Sei $\gamma = 0$ (konstante Leitfähigkeitsverteilung in z -Richtung), $\beta = 0$ (Potential vorgegeben) oder $\alpha = 0$ (Stromdichte vorgegeben), und sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$. Definiere die Vektoren*

$$\mathcal{X}_{nm} := \begin{pmatrix} A_{nm}^{[1]} \\ A_{nm}^{[2]} \\ B_{nm}^{[2]} \\ \vdots \\ A_{nm}^{[L]} \\ B_{nm}^{[L]} \end{pmatrix} \quad (3.3.34)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

und

$$\mathcal{F}_{nm} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{nm} \end{pmatrix}. \quad (3.3.35)$$

Sei weiters für $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$

$$f_{nm} = \langle f, \psi_{nm} \rangle_\psi \quad (3.3.36)$$

und für $\alpha = 0$ (oder $\gamma = 0$)

$$f_{nm} = \langle \tilde{f}, \psi_{nm} \rangle_\psi \quad (3.3.37)$$

mit

$$\tilde{f}(\theta, z) = e^{-\gamma z} f(\theta, z). \quad (3.3.38)$$

Definiere die Matrix \mathcal{A}_{nm} durch die folgenden Blöcke, die laut Abbildung 3.1 zusammengesetzt werden. Für die Blöcke der innersten Grenzschicht $\ell = 1$ gilt

$$\mathcal{V}_{nm}^{[1]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) \\ \hat{\sigma}^{[1]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) \end{pmatrix} \quad (3.3.39a)$$

und

$$\mathcal{W}_{nm}^{[1]} = \begin{pmatrix} -S_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -T_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \\ -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \end{pmatrix}, \quad (3.3.39b)$$

für die der mittleren Grenzschichten $\ell \in \{2, \dots, L-1\}$

$$\mathcal{V}_{nm}^{[\ell]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & T_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \\ \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \end{pmatrix} \quad (3.3.39c)$$

und

$$\mathcal{W}_{nm}^{[\ell]} = \begin{pmatrix} -S_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -T_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \\ -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \end{pmatrix}, \quad (3.3.39d)$$

und für die des Zylindermantels $\ell = L$

$$\mathcal{V}_{nm}^{[L]} = \left(\alpha S_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) + \beta \hat{\sigma}^{[L]}(R^{[L]}) \zeta_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) \right) \quad (3.3.39e)$$

3.3 Nicht-gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

$$\left(\begin{array}{c|c}
 \mathcal{V}_{nm}^{[1]} & \mathcal{W}_{nm}^{[1]} \\
 \hline
 & \\
 \mathcal{V}_{nm}^{[2]} & \mathcal{W}_{nm}^{[2]} \\
 \hline
 & \ddots \\
 & \\
 & \mathcal{V}_{nm}^{[L-1]} & \mathcal{W}_{nm}^{[L-1]} \\
 & \hline
 & \mathcal{V}_{nm}^{[L]} & \mathcal{W}_{nm}^{[L]}
 \end{array} \right)
 \left(\begin{array}{c}
 \mathcal{Y}_{nm}^{[1]} \\
 \mathcal{Y}_{nm}^{[2]} \\
 \vdots \\
 \mathcal{Y}_{nm}^{[L-1]} \\
 \mathcal{Y}_{nm}^{[L]}
 \end{array} \right)
 =
 \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 f_{nm}
 \end{array} \right)$$

$\mathcal{A}_{nm} \qquad \mathcal{X}_{nm} \qquad \mathcal{F}_{nm}$

Abbildung 3.1: Gleichungssysteme $\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = \mathcal{F}_{nm}$ für mehrschichtigen Zylinder und nicht-gemischten Randbedingungen

und

$$\mathcal{W}_{nm}^{[L]} = \left(\alpha T_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) + \beta \hat{\sigma}^{[L]}(R^{[L]}) \tau_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) \right). \quad (3.3.39f)$$

Es gilt, die Koeffizienten A_{nm} und B_{nm} können durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = \mathcal{F}_{nm} \quad (3.3.40)$$

bestimmt werden, sofern die Inversion durchführbar ist.

Bemerkung 3.3.5. Ist die Inversion des Gleichungssystems nicht möglich, so kann mindestens ein Parameter frei gewählt werden. Es gilt das Gleiche wie im Fall des einschichtigen Zylinders, siehe Bemerkung 3.3.3. Dies tritt ebenfalls wieder für $n = 0$ und $m = 0$ ein.

Für eine Darstellung der zusammengesetzten Matrizen in Blockform beziehungsweise für die Fälle $L = 2$ und $L = 3$ siehe Anhang B.4.

Beweis des Satzes. Sei $\ell \in \{1, 2, \dots, L\}$. Wird das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ von $\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z)$ und $\psi_{\tilde{n}\tilde{m}}$ gebildet, so folgt wegen der Orthonormalität

$$\left\langle \Phi^{[1]}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_\psi = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]} S_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]}(r) \quad (3.3.41a)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

und

$$\left\langle \Phi^{[\ell]}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} S_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) + B_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} T_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) \quad (3.3.41b)$$

für $\ell \in \{2, \dots, L\}$. Analog gilt

$$\left\langle \hat{\sigma}^{[1]}(r) \frac{d\Phi^{[1]}}{dr}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]} \hat{\sigma}^{[1]}(r) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]}(r) \quad (3.3.42a)$$

und

$$\left\langle \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \frac{d\Phi^{[\ell]}}{dr}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) + B_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \tau_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) \quad (3.3.42b)$$

für $\ell \in \{2, \dots, L\}$. Durch Einsetzen der Grenzbedingungen (3.3.33a) und (3.3.33b) folgen die ersten $2L$ Zeilen des Gleichungssystems.

Die letzte Zeile des Gleichungssystems folgt, wie dies bereits beim einschichtigen Zylinder, siehe Satz 3.3.2 der Fall war, aus der Bedingung für die Elektroden (3.3.33c). Da die Rechnung analog verläuft, wird diese hier ausgelassen. \square

3.4 Verallgemeinerung von Fourierreihen

Für $f \in L_{\mathbb{C}}^1(E)$ definiere die *Fourierkoeffizienten* durch

$$\hat{f}(n) := \langle f, \varphi_n \rangle_E, \quad (3.4.1)$$

vergleiche Kapitel 4 von Rudin [9]. $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ist dabei ein geeigntes positiv definites inneres Produkt auf E . Die φ_n sind orthonormal bezüglich diesem. Die zugehörige *Fourierreihe* von f ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \varphi_n(t) \quad (3.4.2)$$

und ihre *Partialsummen* sind

$$s_N(t) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \varphi_n(t) \quad (3.4.3)$$

Ist $E = [-\pi, \pi]$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ und

$$\langle f, g \rangle_E = \int_E f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (3.4.4)$$

dann gilt für ein $f \in L_{\mathbb{C}}^2(E)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\|_2 = 0, \quad (3.4.5)$$

3.4 Verallgemeinerung von Fourierreihen

das heißt die Fourierreihe konvergiert im L^2 -Sinne gegen die ursprüngliche Funktion. Anders ausgedrückt, es gilt

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \varphi_n(t) \quad (3.4.6)$$

fast überall.

Das nachfolgende Satz stellt eine leichte Verallgemeinerung der normalen Umkehrformel für Fourierreihen dar, da allgemeinere Basisfunktionen verwendet werden. Die Beweisidee bleibt jedoch die gleiche, vergleiche Abschnitt 9.4 von Rudin [9].

Satz 3.4.1 (Umkehrformel). *Sei $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem bezüglich*

$$\langle f, g \rangle_E = \int_E f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (3.4.7)$$

und die φ_n gleichmäßig beschränkt, das heißt für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelte

$$|\varphi_n(t)| \leq C < \infty. \quad (3.4.8)$$

Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(E)$ und $\widehat{f} \in \ell^1_{\mathbb{C}}$ dann gilt

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \varphi_n(t) \quad (3.4.9)$$

fast überall.

Beweis. Setze

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \varphi_n(t). \quad (3.4.10)$$

$\widehat{f} \in \ell^1_{\mathbb{C}}$ heißt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty, \quad (3.4.11)$$

und damit gilt

$$|g(t)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| |\varphi_n(t)| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty. \quad (3.4.12)$$

Die Reihe g konvergiert also gleichmäßig. Somit ist g stetig und die Fourierkoeffizienten lauten

$$\langle g, \varphi_k \rangle_E = \int_E \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \varphi_n(t) \right) \overline{\varphi_k(t)} dt \quad (3.4.13)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\widehat{f}(n) \int_E \varphi_n(t) \overline{\varphi_k(t)} dt \right) \quad (3.4.14)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle_E \quad (3.4.15)$$

$$= \widehat{f}(k). \quad (3.4.16)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

f und g haben also die selben Fourierkoeffizienten, also gilt $f = g$ fast überall. Die Fourierreihe von f konvergiert also fast überall gegen f . \square

Sei nun E ein Gebiet mit einer Zerlegung

$$E = \bigsqcup_{i \in I} E_i, \quad (3.4.17)$$

in disjunkte Teile und f eine (komplexwertige) Funktion auf E . Ziel ist es, f auf den verschiedenen E_i durch Reihen der Form

$$g_i(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) b_i(m) \varphi_m(t) \quad (3.4.18)$$

darzustellen, wobei die Koeffizienten $a(m)$ für alle Reihen gleich, die $b_i(m)$ gegebene Koeffizienten und die φ_m geeignete gegebene Basisfunktionen sind.

Wird das Gebiet in zwei Teile geteilt, so sind solche Konstrukte in Sneddon [10], "Chapter V" unter dem Begriff *dual series equations* zu finden. Für spezielle Geometrien und spezielle Wahl der $b_i(m)$ sind dort auch geschlossene Lösungen angegeben. Diese beruhen auf dem Finden von geschlossenen Ausdrücken von Summen, welche unter anderem die $b_i(m)$ enthalten und auf dem Finden der Lösungen von den anschließend auftretenden Integralgleichungen. Weiters gibt es dort auch Lösung für eine Aufteilung des Gebiets in drei Teile, siehe Sneddon [10], Chapter VI. Diese sind unter dem Begriff *triple series equations* zu finden. Der hier wird vorgestellte Ansatz wird mit *Multiple Reihengleichungen*² bezeichnet.

Für $D \subseteq E$ definiere

$$\langle f, g \rangle_D := \langle t \mapsto \mathbb{1}_D(t) f(t), g \rangle_E. \quad (3.4.19)$$

Es gilt die folgende Aussage.

Satz 3.4.2. *Sei eine Zerlegung von E in endlich viele, messbare und paarweise disjunkte E_i gegeben. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\varphi_n \in L^1_{\mathbb{C}}(E)$, sodass $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ bilden. Sei g_i wie oben definiert, $f \in L^1_{\mathbb{C}}(E)$ mit Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ und darf die Summation mit der Bildung des inneren Produkts vertauscht werden, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) Für $i \in I$ und $t \in E_i$ gilt

$$f(t) = g_i(t) \quad (3.4.20)$$

fast überall.

(2) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\hat{f}(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) \sum_{j \in I} b_j(m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{E_j}. \quad (3.4.21)$$

²Englisch "multiple series equations"

3.5 Gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Beweis. (1) \implies (2). Es gilt

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(n) &= \langle f, \varphi_n \rangle_E \\
 &= \left\langle t \mapsto \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{E_i}(t) g_i(t), \varphi_n \right\rangle_E \\
 &= \sum_{i \in I} \langle g_i, \varphi_n \rangle_{E_i} \\
 &= \sum_{i \in I} \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) b_i(m) \varphi_m, \varphi_n \right\rangle_{E_i} \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) \sum_{i \in I} b_i(m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{E_i}.
 \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

(2) \implies (1). Sei $i \in I$ und $t \in E_i$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \varphi_n(t) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) \sum_{j \in I} b_j(m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{E_j} \varphi_n(t) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) \sum_{j \in I} b_j(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle t \mapsto \mathbb{1}_{E_j}(t) \varphi_m(t), \varphi_n \rangle_E \varphi_n(t) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) \sum_{j \in I} b_j(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{E_j}(t) \varphi_m(t) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) b_i(m) \varphi_m(t) \\
 &= g_i(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4.3. Für diese Arbeit wird der Fall, dass das Skalarprodukt von einem Integral, also

$$\langle f, g \rangle_E = \int_E f(t) \overline{g(t)} d\lambda(t), \tag{3.4.23}$$

wobei $\lambda(t)$ das *Lebesgue-Maß* ist, kommt, interessant sein. Gleichung (3.4.20) gilt dann fast überall.

Um den Satz anwenden zu können, ist im konkreten Fall noch die Vertauschbarkeit von Summation und Bildung des inneren Produkts nachzuweisen.

3.5 Gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Ziel in diesem Abschnitt ist es wieder die Koeffizienten der allgemeinen Lösung (3.2.78) beziehungsweise (3.2.79) zu bestimmen. Dabei wird jetzt aber der Zylindermantel in verschiedene Bereiche eingeteilt, wo jeweils verschiedene Kontaktierungsbedingungen gelten.

3 Analytische Lösung für den Zylinder

Solche Situationen treten in der Praxis sehr häufig auf. Werden beispielsweise auf dem Zylinder zwei Elektroden, auf denen das Potential vorgegeben ist, angebracht und die restliche Mantelfläche nicht kontaktiert, so gibt es zwei Bereiche mit Dirichlet-Randbedingungen (nämlich die Elektroden) und einen Bereich mit Neumann-Randbedingungen (der Rest).

Sei nun also $M = T \times [0, H]$ die Mantelfläche des Zylinders, wobei T wieder der eindimensionale Torus ist, siehe Anhang A. Dieses Gebiet wird in disjunkte Teile M_i mit $i \in I$ zerlegt, also

$$M = \bigsqcup_{i \in I} M_i. \quad (3.5.1)$$

Für jedes dieser M_i gebe es Parameter α_i und β_i und eine Funktion f_i , welche auf dem entsprechenden Teil des Mantels, also $(\theta, z) \in M_i$ laut

$$f_i(\theta, z) = \alpha_i \Phi(R, \theta, z) + \beta_i \hat{\sigma}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi}{d\bar{r}}(R, \theta, z) \quad (3.5.2)$$

vorgegeben wird.

3.5.1 Lösung für einschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen

Die allgemeine Lösung für den einschichtigen Zylinder wurde bereits in Abschnitt 3.2 hergeleitet. Diese lautet

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} S_{nm}(r) \psi_{nm}(\theta, z), \quad (3.5.3)$$

da sich $r = 0$ im Gebiet befindet. Für das Lösen dieses Problems wird die in Abschnitt 3.4 hergeleitete Erweiterung der *Multiplen Reihen Gleichungen* verwendet.

Definiere die Einschränkung des inneren Produkts auf M_i durch

$$\langle f, g \rangle_{M_i} := \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{M_i}(\theta, z) f(\theta, z), g \rangle_{\psi}. \quad (3.5.4)$$

Seien wie oben f_i , α_i und β_i gegeben. Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.5.1 (Berechnung der Koeffizienten). *Sei für jedes $i \in I$ $\beta_i = 0$ oder $\alpha_i = 0$, oder sei $\gamma = 0$. Sei weiters*

$$f_{nm} = \sum_{i \in I} f_{nm,i}, \quad (3.5.5)$$

wobei die $f_{nm,i}$ wie folgt ermittelt werden. Ist $\beta_i = 0$ oder $\gamma = 0$ sei

$$f_{nm,i} = \langle f_i, \psi_{nm} \rangle_{M_i} \quad (3.5.6)$$

und ist $\alpha_i = 0$ (oder $\gamma = 0$)

$$f_{nm,i} = \langle \tilde{f}_i, \psi_{nm} \rangle_{M_i} \quad (3.5.7)$$

3.5 Gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

mit

$$\tilde{f}_i(\theta, z) = e^{-\gamma z} f_i(\theta, z). \quad (3.5.8)$$

Definiere die a_i in allen Fällen durch

$$a_i(n, m) = \alpha_i S_{nm}(R) + \beta_i \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R). \quad (3.5.9)$$

Es gilt, die Koeffizienten A_{nm} können durch Lösen des Gleichungssystems

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \sum_{i \in I} a_i(n, m) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i} \quad (3.5.10)$$

bestimmt werden.

Beweis. Ist $\gamma = 0$, so gilt für $(\theta, z) \in M_i$

$$\begin{aligned} f_i(\theta, z) &= \alpha_i \Phi(R, \theta, z) + \beta_i \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \underbrace{(\alpha_i S_{nm}(R) + \beta_i \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R))}_{=a_i(n,m)} \psi_{nm}(\theta, z), \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

für $\beta_i = 0$ und $(\theta, z) \in M_i$

$$\begin{aligned} f_i(\theta, z) &= \alpha_i \Phi(R, \theta, z) + \beta_i \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \underbrace{\alpha_i S_{nm}(R)}_{=a_i(n,m)} \psi_{nm}(\theta, z) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

und für $\alpha_i = 0$ und $(\theta, z) \in M_i$

$$\begin{aligned} e^{-\gamma z} f_i(\theta, z) &= e^{-\gamma z} \left(\alpha_i \Phi(R, \theta, z) + \beta_i \sigma(R, \theta, z) \frac{d\Phi}{dr}(R, \theta, z) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \underbrace{\beta_i \hat{\sigma}(R) \zeta_{nm}(R)}_{=a_i(n,m)} \psi_{nm}(\theta, z). \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Wegen (3.5.5) gilt für alle $(\theta, z) \in M$

$$f_i(\theta, z) = \mathbb{1}_{M_i}(\theta, z) f(\theta, z) \quad (3.5.14)$$

Darf die Summe mit dem inneren Produkt vertauscht werden, so sind damit die Voraussetzungen von Satz 3.4.2 erfüllt, und es folgt das beschriebene Gleichungssystem. \square

3.5.2 Lösung für mehrschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen

Es sei wieder, wie schon in Abschnitt 3.3.4 ein mehrschichtiger kreisförmiger Zylinder gegeben. Für den Zylinder mit L Schichten seien die Radien durch

$$0 = R^{[0]} < R^{[1]} < \dots < R^{[L]} = R \quad (3.5.15)$$

gegeben, für Schicht ℓ gelte $R^{[\ell-1]} < r < R^{[\ell]}$ und für jede Schicht sei die Leitfähigkeit durch

$$\sigma^{[\ell]}(r, \theta, z) = \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) e^{\gamma z}. \quad (3.5.16)$$

gegeben.

Für die einzelnen Schichten $\ell \in \{1, 2, \dots, L\}$ wird wieder je eine allgemeine Lösung $\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z)$ angesetzt, siehe Abschnitt 3.2. Für die innerste Schicht $\ell = 1$ lautet diese

$$\Phi^{[1]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm}^{[1]} S_{nm}^{[1]}(r) \psi_{nm}(\theta, z), \quad (3.5.17a)$$

da sich $r = 0$ im Gebiet befindet. Für die anderen Schichten $\ell \in \{2, \dots, L\}$ gilt

$$\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(A_{nm}^{[\ell]} S_{nm}^{[\ell]}(r) + B_{nm}^{[\ell]} T_{nm}^{[\ell]}(r) \right) \psi_{nm}(\theta, z). \quad (3.5.17b)$$

An den Grenzflächen der einzelnen Schichten sollen die folgenden Bedingungen gelten. Für alle Grenzflächen im Inneren sollen das Potential und die Stromdichte stetig über gehen. Das heißt also, für $\ell \in \{1, \dots, L-1\}$ und für alle (θ, z) soll

$$\Phi^{[\ell]}(R^{[\ell]}, \theta, z) = \Phi^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}, \theta, z) \quad (3.5.18a)$$

und

$$\hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[\ell]}}{dr}(R^{[\ell]}, \theta, z) = \hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[\ell+1]}}{dr}(R^{[\ell]}, \theta, z) \quad (3.5.18b)$$

gelten. In der letzten Gleichung kann dabei auf den Faktor $e^{\gamma z}$ verzichtet (wegkürzen) werden. Auf der äußersten Schicht, welche gleich der Mantelfläche des Zylinders ist, werden wieder Elektroden mittels Parameter α_i und β_i und durch Funktionen f_i auf dem Abschnitt M_i angelegt. Für $(\theta, z) \in M_i$ gilt also

$$f_i(\theta, z) = \alpha_i \Phi^{[L]}(R, \theta, z) + \beta_i \hat{\sigma}^{[L]}(R) e^{\gamma z} \frac{d\Phi^{[L]}}{dr}(R, \theta, z). \quad (3.5.18c)$$

Es gilt der folgende Satz.

3.5 Gemischte Randbedingungen auf dem Zylindermantel

Satz 3.5.2 (Berechnung der Koeffizienten). *Sei für jedes $i \in I$ $\beta_i = 0$ oder $\alpha_i = 0$, oder sei $\gamma = 0$. Sei weiters*

$$f_{nm} = \sum_{i \in I} f_{nm,i}, \quad (3.5.19)$$

wobei die $f_{nm,i}$ wie folgt ermittelt werden. Ist $\beta_i = 0$ oder $\gamma = 0$ sei

$$f_{nm,i} = \langle f_i, \psi_{nm} \rangle_{M_i} \quad (3.5.20)$$

und ist $\alpha_i = 0$ (oder $\gamma = 0$)

$$f_{nm,i} = \langle \tilde{f}_i, \psi_{nm} \rangle_{M_i} \quad (3.5.21)$$

mit

$$\tilde{f}_i(\theta, z) = e^{-\gamma z} f_i(\theta, z). \quad (3.5.22)$$

Definiere die a_i durch

$$a_i(n, m) := \alpha_i S_{nm}^{[L]}(R) + \beta_i \hat{\sigma}^{[L]}(R) \zeta_{nm}^{[L]}(R) \quad (3.5.23)$$

und die b_i durch

$$b_i(n, m) := \alpha_i T_{nm}^{[L]}(R) + \beta_i \hat{\sigma}^{[L]}(R) \tau_{nm}^{[L]}(R). \quad (3.5.24)$$

Weiters definiere die Matrix \mathcal{A}_{nm} laut Abbildung 3.2, wobei die Blöcke der innersten Grenzschicht $\ell = 1$

$$\mathcal{V}_{nm}^{[1]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) \\ \hat{\sigma}^{[1]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) \end{pmatrix} \quad (3.5.25a)$$

und

$$\mathcal{W}_{nm}^{[1]} = \begin{pmatrix} -S_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -T_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \\ -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \end{pmatrix}, \quad (3.5.25b)$$

und die der mittleren Grenzschichten $\ell \in \{2, \dots, L-1\}$

$$\mathcal{V}_{nm}^{[\ell]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & T_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \\ \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \end{pmatrix} \quad (3.5.25c)$$

und

$$\mathcal{W}_{nm}^{[\ell]} = \begin{pmatrix} -S_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -T_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \\ -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \end{pmatrix} \quad (3.5.25d)$$

3 Analytische Lösung für den Zylinder

lauten. Definiere noch den Vektor

$$\mathcal{X}_{nm} := \begin{pmatrix} A_{nm}^{[1]} \\ A_{nm}^{[2]} \\ B_{nm}^{[2]} \\ \vdots \\ A_{nm}^{[L]} \\ B_{nm}^{[L]} \end{pmatrix} \quad (3.5.26)$$

und

$$\mathcal{U}_a(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) := \sum_{i \in I} a_i(n, m) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i} \quad (3.5.27a)$$

und

$$\mathcal{U}_b(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) := \sum_{i \in I} b_i(n, m) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i}. \quad (3.5.27b)$$

Es gilt, die Koeffizienten A_{nm} und B_{nm} können durch Lösen des linearen Gleichungssystems bestehend aus

$$\mathcal{A}_{nm} \mathcal{X}_{nm} = 0 \quad (3.5.28)$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$ und aus den Gleichungen

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{nm} \mathcal{U}_a(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) + B_{nm} \mathcal{U}_b(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) \quad (3.5.29)$$

bestimmt werden.

Beweis. Sei $\ell \in \{1, 2, \dots, L\}$. Wird wieder, wie dies schon beim nicht-gemischtem Randwertproblem im Beweis von Satz 3.3.4 der Fall war, das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ von $\Phi^{[\ell]}(r, \theta, z)$ und $\psi_{\tilde{n}\tilde{m}}$ gebildet, so folgt wegen der Orthonormalität

$$\left\langle \Phi^{[1]}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_\psi = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]} S_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]}(r) \quad (3.5.30a)$$

und

$$\left\langle \Phi^{[\ell]}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_\psi = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} S_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) + B_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} T_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) \quad (3.5.30b)$$

für $\ell \in \{2, \dots, L\}$. Analog gilt

$$\left\langle \hat{\sigma}^{[1]}(r) \frac{d\Phi^{[1]}}{dr}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_\psi = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]} \hat{\sigma}^{[1]}(r) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[1]}(r) \quad (3.5.31a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_{nm}^{[1]} & \mathcal{W}_{nm}^{[1]} & & \\ & \mathcal{V}_{nm}^{[2]} & \mathcal{W}_{nm}^{[2]} & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{V}_{nm}^{[L-1]} & \mathcal{W}_{nm}^{[L-1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{nm}^{[1]} \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[L-1]} \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[L]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_{nm} \qquad \qquad \mathcal{X}_{nm} \qquad \qquad 0$

Abbildung 3.2: Gleichungssysteme $\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = 0$ für mehrschichtigen Zylinder und gemischten Randbedingungen

und

$$\left\langle \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \frac{d\Phi^{[\ell]}}{dr}(r, \theta, z), \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \right\rangle_{\psi} = A_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \zeta_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) + B_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]} \hat{\sigma}^{[\ell]}(r) \tau_{\tilde{n}\tilde{m}}^{[\ell]}(r) \quad (3.5.31b)$$

für $\ell \in \{2, \dots, L\}$. Durch Einsetzen der Grenzbedingungen (3.5.18a) und (3.5.18b) folgen die Teile

$$\mathcal{A}_{nm}\mathcal{X}_{nm} = 0 \quad (3.5.32)$$

des Gleichungssystems.

Die anderen Gleichungen folgen, wie dies bereits beim einschichtigen Zylinder, siehe Satz 3.5.1 der Fall war, aus der Bedingung für die Elektroden (3.5.18c). Da die Rechnung analog verläuft, wird diese hier wieder ausgelassen. \square

3.5.3 Das Problem mit Punktelektroden

Für Punktelektroden bei gemischten Randbedingungen ist die im vorherigen Abschnitt beschriebene Methode leider nicht geeignet, wenn die zugehörigen Parameter α und β nur für diesen einen Punkt verschieden von denen der Umgebung sind. Der Grund ist, dass bei der Bildung des inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\psi}$ einzelne Punkte keine Rolle spielen,

3 Analytische Lösung für den Zylinder

da dieses von einem Integral stammt. Sie bilden eine *Nullmenge*, deshalb gilt für einen Punkt $(\theta_p, z_p) \in M$

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle_{(\theta_p, z_p)} &= \langle (\theta, z) \mapsto \mathbb{1}_{(\theta_p, z_p)}(\theta, z) f(\theta, z), g \rangle_\psi \\
 &= \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{\gamma z} f(\theta, z) \mathbb{1}_{(\theta_p, z_p)}(\theta, z) \overline{g(\theta, z)} d\theta dz \\
 &= \int_{z=z_p}^H \int_{\theta=\theta_p}^{2\pi} e^{\gamma z} f(\theta, z) \overline{g(\theta, z)} d\theta dz \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

sofern f und g beschränkt sind. Das war in den vorherigen Abschnitten bei der Bestimmung der Systemmatrix immer der Fall, da f und g jeweils verschiedene ψ_{nm} waren.

Punktelektroden sind dann möglich, wenn es eine ganze Umgebung gibt, in der diese Punktelektroden liegen. Dann steckt der Anteil der Punktelektroden in den Fourierkoeffizienten und nicht mehr in der Systemmatrix.

Eine andere Möglichkeit um dieses Problem - zumindest bei der Näherungslösung, also im endlichen Fall - zu lösen, wird in Abschnitt 4.1.3 gezeigt.

Kapitel 4

Näherungslösung für den Zylinder

Für die im vorherigen Kapitel 3 hergeleitete analytische Lösung ist es im Allgemeinen nicht möglich eine Implementierung in einer geeigneten Software (*GNU Octave* beziehungsweise *Matlab*[®]) zu erstellen. Dies kommt von den darin vorkommenden *unendlichen Reihen* und Gleichungssystemen mit unendlich vielen Variablen.

Eine Möglichkeit aus der gewonnenen analytischen Lösung eine Implementierung zu bekommen, ist diese durch eine Näherungslösung mit nur endlich vielen Summanden (*Partialsommen* der Reihen) beziehungsweise Variablen zu ersetzen. Diese Vorgangsweise wird hier beschrieben.

4.1 Beschreibung der Gleichungssysteme und Konvergenzbetrachtungen

In diesem Abschnitt werden die Näherungslösungen für die einzelnen Fälle nicht-gemischte und gemischte Randbedingungen, sowie Zylinder mit einer Schicht und mit mehreren Schichten beschrieben. Bei den gemischten Randbedingungen gibt es einen weiteren Abschnitt, der sich der Behandlung von Punktelektroden widmet. Weiters sind Sätze für die Konvergenz der Näherungslösung zur analytischen Lösung zu finden.

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{N}_0$. Setze $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ und $\mathcal{M} = \{-M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M\}$. In diesem Abschnitt sei $n \in \mathcal{N}$ und $m \in \mathcal{M}$ für die einzelnen vorkommenden Größen vorausgesetzt. Bezeichne die Näherungslösung für $(N + 1)(2M + 1)$ Koeffizienten mit Φ_{NM} und die Koeffizienten mit $A_{nm, NM}$ und $B_{nm, NM}$.

Bemerkung 4.1.1. Die Einschränkung der n und m muss nicht in der oben beschriebenen Weise erfolgen. Es können auch andere Teilmengen von \mathbb{N}_0 beziehungsweise \mathbb{Z} verwendet werden. Die obigen Mengen sind jedoch sinnvoll, da der Betrag der verallgemeinerten Fourierkoeffizienten $|f_{nm}|$ im Allgemeinen mit steigenden N und $|M|$ abnimmt.

Die Symmetrie bei den m führt dazu, dass reellwertige Randfunktionen f auch Näherungen aus reellwertige Funktionen besitzen.

4.1.1 Nicht-gemischte Randbedingungen

Es werden hier die analytischen Lösungen aus Abschnitt 3.3 verwendet. Zuerst wird ein einschichtiger Zylinder betrachtet. Die zugehörige Lösung beschreibt Satz 3.3.2. Die Näherungslösung ergibt sich durch Ersetzen der unendlichen Reihe in der Lösung durch ihr Partialsumme, das heißt, die Näherungslösung lautet

$$\Phi_{NM}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm, NM} S_{nm}(r) \psi_{nm}(\theta, z). \quad (4.1.1)$$

Die Berechnung der Koeffizienten folgt laut dem folgenden Satz.

Satz 4.1.2 (Näherungslösung für den einschichtigen Zylinder). *Für die Einschränkungen $n \in \{0, \dots, N\}$ und $m \in \{-M, \dots, M\}$ gilt Satz 3.3.2, und für die Koeffizienten gilt unabhängig von den gewählten N und M*

$$A_{nm, NM} = A_{nm}. \quad (4.1.2)$$

Die Näherungslösung Φ_{NM} konvergiert für $N \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$ gegen die analytische Lösung Φ .

Beweis. Die A_{nm} berechnet sich aufgrund der Orthogonalität nur von Ausdrücken, die ebenfalls nur von denselben n und m abhängen. Damit ist die Einschränkung durch Weglassen der nicht gewollten Ausdrücke möglich.

Durch Verändern der N und M ändern sich die Koeffizienten nicht. Es werden nur mehr oder weniger von diesen berechnet.

Die Konvergenz ist klar, da es sich bei der Näherungslösung um die Einschränkung auf die Partialsummen der unendlichen Reihe handelt. \square

Für einen mehrschichtigen Zylinder mit L Schichten lauten die, ebenfalls mittels Ersetzen der unendlichen Reihen durch ihre Partialsummen erhaltenen Lösungen für die innerste Schicht $\ell = 1$

$$\Phi_{NM}^{[1]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm, NM}^{[1]} S_{nm}^{[1]}(r) \psi_{nm}(\theta, z) \quad (4.1.3a)$$

und für die anderen Schichten $\ell \in \{2, \dots, L\}$

$$\Phi_{NM}^{[\ell]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(A_{nm, NM}^{[\ell]} S_{nm}^{[\ell]}(r) + B_{nm, NM}^{[\ell]} T_{nm}^{[\ell]}(r) \right) \psi_{nm}(\theta, z). \quad (4.1.3b)$$

Es gelten die folgenden Aussagen.

Satz 4.1.3 (Näherungslösung für den mehrschichtigen Zylinder). *Sei $\ell \in \{1, \dots, L\}$. Für die Einschränkungen $n \in \{0, \dots, N\}$ und $m \in \{-M, \dots, M\}$ gilt Satz 3.3.4, und für die Koeffizienten gilt unabhängig von den gewählten N und M*

$$A_{nm, NM}^{[\ell]} = A_{nm}^{[\ell]} \quad (4.1.4a)$$

4.1 Beschreibung der Gleichungssysteme und Konvergenzbetrachtungen

und

$$B_{nm,NM}^{[\ell]} = B_{nm}^{[\ell]}. \quad (4.1.4b)$$

Die Näherungslösungen $\Phi_{NM}^{[\ell]}$ konvergieren für $N \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$ gegen die analytische Lösung $\Phi^{[\ell]}$.

Beweis. Analog zum Beweis vom vorherigen Satz 4.1.2. \square

4.1.2 Gemischte Randbedingungen

In diesem Abschnitt wird die Näherungslösung des gemischten Randwertproblems behandelt. Es werden die zugehörigen analytischen Lösungen von Abschnitt 3.5 verwendet.

Zunächst folgt die Betrachtung des einschichtigen Zylinders. Die Näherung ergibt sich wieder durch Ersetzen der unendlichen Reihe der analytischen Lösung durch ihre Partialsomme. Die Näherungslösung lautet

$$\Phi_{NM}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm,NM} S_{nm}(r) \psi_{nm}(\theta, z), \quad (4.1.5)$$

also gleich wie beim nicht-gemischtem Randwertproblem. Allerdings werden die Koeffizienten anders berechnet. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4.1.4 (Berechnung der Koeffizienten für den einschichtigen Zylinder). *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 3.5.1, allerdings mit den Einschränkungen $n \in \{0, \dots, N\}$, $m \in \{-M, \dots, M\}$, $\tilde{n} \in \{0, \dots, N\}$ und $\tilde{m} \in \{-M, \dots, M\}$ gegeben, dann können die Koeffizienten $A_{nm,NM}$ durch Lösen des Gleichungssystems*

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm,NM} \sum_{i \in I} a_i(n, m) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i} \quad (4.1.6)$$

bestimmt werden.

Die Näherungslösung Φ_{NM} konvergiert für $N \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$ gegen die analytische Lösung Φ .

Beweis. Für $U_n, U_m, V_n, V_m \subseteq \mathbb{Z}$ definiere den Operator

$$\mathbf{G}_{U_n, U_m, V_n, V_m} : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{f} \quad (4.1.7)$$

durch

$$\mathbf{f}_{\tilde{n}\tilde{m}} = \sum_{n \in U_n} \sum_{m \in U_m} \mathbf{z}_{nm} \sum_{i \in I} a_i(n, m) \langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i} \quad (4.1.8)$$

für $\tilde{n} \in V_n$ und $\tilde{m} \in V_m$. Setze $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ und $\mathcal{M} = \{-M, \dots, M\}$. Definiere

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}}, \quad (4.1.9a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{G}_{\mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}}, \quad (4.1.9b)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}_{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}, \quad (4.1.9c)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}_{\mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}, \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} \quad (4.1.9d)$$

4 Näherungslösung für den Zylinder

und für $N_1 \geq N$ und $M_1 \geq M$

$$\mathbf{B}_{N_1 M_1} = \mathbf{G}_{\{0, \dots, N_1\} \setminus \mathcal{N}, \{-M_1, \dots, M_1\} \setminus \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}}, \quad (4.1.9e)$$

$$\mathbf{C}_{N_1 M_1} = \mathbf{G}_{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \{0, \dots, N_1\} \setminus \mathcal{N}, \{-M_1, \dots, M_1\} \setminus \mathcal{M}}, \quad (4.1.9f)$$

$$\mathbf{D}_{N_1 M_1} = \mathbf{G}_{\{0, \dots, N_1\} \setminus \mathcal{N}, \{-M_1, \dots, M_1\} \setminus \mathcal{M}, \{0, \dots, N_1\} \setminus \mathcal{N}, \{-M_1, \dots, M_1\} \setminus \mathcal{M}}. \quad (4.1.9g)$$

Sei

$$\mathbf{f} := (f_{nm})_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}} \quad (4.1.10a)$$

und

$$\mathbf{g} := (f_{nm})_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}}, \quad (4.1.10b)$$

dann kann das Gleichungssystem für die Lösung Φ mit Koeffizienten A_{nm} als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

geschrieben werden, wobei

$$\mathbf{X} := (A_{nm})_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}} \quad (4.1.12a)$$

und

$$\mathbf{Y} := (A_{nm})_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} \quad (4.1.12b)$$

ist. Für die Näherungslösung Φ_{NM} gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{NM} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

mit

$$\mathbf{X}_{NM} := (A_{nm, NM})_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}, \quad (4.1.14)$$

also $\mathbf{A}\mathbf{X}_{NM} = \mathbf{f}$.

Betrachte nun das System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_{N_1 M_1} \\ \mathbf{C}_{N_1 M_1} & \mathbf{D}_{N_1 M_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{N_1 M_1} \\ \mathbf{Y}_{N_1 M_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.1.15)$$

mit

$$\mathbf{X}_{N_1 M_1} := (A_{nm, N_1 M_1})_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}} \quad (4.1.16)$$

4.1 Beschreibung der Gleichungssysteme und Konvergenzbetrachtungen

und

$$\mathbf{Y}_{N_1 M_1} := ([n \leq N_1 \text{ und } m \leq M_1] A_{nm, N_1 M_1})_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} \quad (4.1.17)$$

Ist $N_1 = N$ und $M_1 = M$, so ergibt sich das Gleichungssystem für Φ_{NM} . Geht $N_1 \rightarrow \infty$ und $M_1 \rightarrow \infty$, so wird das System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\infty\infty} \\ \mathbf{Y}_{\infty\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.1.18)$$

gelöst. Mittels Inversionslemma von Anhang A.5 gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\infty\infty} \\ \mathbf{Y}_{\infty\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{f} \quad (4.1.20)$$

mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (4.1.21)$$

Analoges gilt für $\mathbf{X}_{N_1 M_1}$ und $\mathbf{Y}_{N_1 M_1}$. Für die Norm der Differenz der Koeffizienten folgt

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{X}_{\infty\infty} - \mathbf{X}_{N_1 M_1}\| \\ & \leq \left\| \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{N_1 M_1}\mathbf{M}_{N_1 M_1}^{-1}\mathbf{C}_{N_1 M_1}\mathbf{A}^{-1} \right\| \|\mathbf{f}\| \\ & \leq \left\| \mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{B}_{N_1 M_1}\mathbf{M}_{N_1 M_1}^{-1}\mathbf{C}_{N_1 M_1} \right\| \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \|\mathbf{f}\| \end{aligned} \quad (4.1.22a)$$

und analog

$$\|\mathbf{Y}_{\infty\infty} - \mathbf{Y}_{N_1 M_1}\| \leq \left\| \mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{B}_{N_1 M_1}\mathbf{M}_{N_1 M_1}^{-1}\mathbf{C}_{N_1 M_1} \right\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{f}\|. \quad (4.1.22b)$$

Für den Grenzübergang $N_1 \rightarrow \infty$ und $M_1 \rightarrow \infty$ gehen diese beiden Normen gegen Null, da die Differenz der Matrizen, wegen der Definition über Partialsummen beziehungsweise unendlichen Summen zu Null wird.

Die beiden Normen $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\infty\infty}\|$ und $\|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{\infty\infty}\|$ gehen ebenfalls gegen Null, wegen der Konvergenz der verallgemeinerten Fourierreihe, vergleiche Beweis von Satz 4.1.2. Damit folgt mittels *Dreiecksungleichung*

$$\lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ M_1 \rightarrow \infty}} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{N_1 M_1}\| \leq \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ M_1 \rightarrow \infty}} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\infty\infty}\| + \|\mathbf{X}_{\infty\infty} - \mathbf{X}_{N_1 M_1}\| = 0 \quad (4.1.23a)$$

und analog

$$\lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ M_1 \rightarrow \infty}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{N_1 M_1}\| = 0, \quad (4.1.23b)$$

also die gewünschte Konvergenzaussage. \square

4 Näherungslösung für den Zylinder

Für den mehrschichten Zylinder wird wieder die analytische Lösung von Abschnitt 3.5 verwendet. Eingeschränkt auf endlich viele Terme lautet diese für die innerste Schicht $\ell = 1$

$$\Phi_{NM}^{[1]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm, NM}^{[1]} S_{nm}^{[1]}(r) \psi_{nm}(\theta, z), \quad (4.1.24a)$$

und für die anderen Schichten $\ell \in \{2, \dots, L\}$

$$\Phi_{NM}^{[\ell]}(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(A_{nm, NM}^{[\ell]} S_{nm}^{[\ell]}(r) + B_{nm, NM}^{[\ell]} T_{nm}^{[\ell]}(r) \right) \psi_{nm}(\theta, z). \quad (4.1.24b)$$

Diese sind gleich derer bei nicht-gemischten Randbedingungen, allerdings werden wieder die Koeffizienten anders berechnet. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4.1.5 (Berechnung der Koeffizienten für den mehrschichtigen Zylinder). *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 3.5.2, allerdings mit den Einschränkungen $n \in \{0, \dots, N\}$, $m \in \{-M, \dots, M\}$, $\tilde{n} \in \{0, \dots, N\}$ und $\tilde{m} \in \{-M, \dots, M\}$ gegeben, dann können die Koeffizienten $A_{nm, NM}^{[\ell]}$ und $B_{nm, NM}^{[\ell]}$ durch Lösen des Gleichungssystems bestehend aus*

$$\mathcal{A}_{nm} \mathcal{X}_{nm, NM} = 0 \quad (4.1.25)$$

für ein $n \in \{0, \dots, N\}$ und $m \in \{-M, \dots, M\}$ und aus den Gleichungen

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} A_{nm, NM}^{[L]} \mathcal{U}_a(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) + B_{nm, NM}^{[L]} \mathcal{U}_b(n, m, \tilde{n}, \tilde{m}) \quad (4.1.26)$$

bestimmt werden.

Die Näherungslösungen $\Phi_{NM}^{[\ell]}$ konvergiert für $N \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$ gegen die analytischen Lösungen $\Phi^{[\ell]}$.

Beweis. Der Beweis folgt in Analogie zum Beweis von Satz 4.1.4 □

4.1.3 Behandlung von Punktelektroden bei gemischten Randbedingungen

Wie bereits in Abschnitt 3.5.3 erwähnt, gestaltet sich die Behandlung von Punktelektroden für den Fall, dass diese nur in einem Punkt andere Parameter α und β haben, schwieriger. Für die Näherungslösung gibt es aber eine Möglichkeit dies zu berücksichtigen, da für diesen Fall die (endliche) Fourierreihe der Punktelektrode eine endliche Amplitude besitzt.

Allgemein sei ein Gebiet M_i auf der Mantelfläche, mit zugehöriger Funktion f_i und Parameter α_i und β_i gegeben. Weiter gebe es eine Punktelektrode bei $(\theta_p, z_p) \in M_i$ mit

$$f_p(\theta, z) = \rho_p \delta(\theta - \theta_p) \delta(z - z_p) \quad (4.1.27)$$

und Kontaktierungsparametern α_p und β_p .

4.1 Beschreibung der Gleichungssysteme und Konvergenzbetrachtungen

Zur Lösung dieses Problems wird angenommen, dass die Funktion einer Punktelektrode f_p mit α_p und β_p einer anderen Funktion

$$\mathring{f}_p = \mathring{\rho}_p \delta(\theta - \theta_p) \delta(z - z_p) \quad (4.1.28)$$

mit α_i und β_i entspricht. Dabei ist allerdings die Amplitude $\mathring{\rho}_p$ unbekannt.

Bezeichne die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten von $\rho_p^{-1} f_p$ mit $f_{nm,p}$ und die für $\mathring{\rho}_p^{-1} \mathring{f}_p$ mit $\mathring{f}_{nm,p}$. Diese können laut Abschnitt 3.3.2 ermittelt werden.

Der folgende Satz baut auf den bereits bekannten Lösungen nicht-gemischter und gemischter Randbedingungen auf. Neben anderen Gleichungen galt in den Sätzen 3.3.2, 3.3.4, 3.5.1 und 3.5.2 allgemein für eine geeignete Funktion h

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = h\left(\{A_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}}, \{B_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}}\right), \quad (4.1.29)$$

beziehungsweise für die Näherungslösungen aus den Sätzen in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = h\left(\{A_{nm}\}_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}, \{B_{nm}\}_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}\right) \quad (4.1.30)$$

mit $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ und $\mathcal{M} = \{-M, \dots, M\}$. Diese Gleichungen werden nun erweitert.

Satz 4.1.6 (Bestimmung der Koeffizienten mit zusätzlichen Punktelektroden). *Seien die Voraussetzung wie oben für Punktelektroden $p \in P$ gegeben. Setze*

$$C_p := \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} f_{nm,p} \psi_{nm}(\theta_p, z_p). \quad (4.1.31)$$

Die Koeffizienten A_{nm} , B_{nm} und $\mathring{\rho}_p$ können durch Lösen des modifizierten Gleichungssystems

$$f_{\tilde{n}\tilde{m}} = h\left(\{A_{nm}\}_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}, \{B_{nm}\}_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}\right) - \sum_{p \in P} \mathring{\rho}_p \mathring{f}_{\tilde{n}\tilde{m},p} \quad (4.1.32a)$$

und für jedes $p \in P$

$$\rho_p C_p = \alpha_p \Phi_{NM}(R, \theta_p, z_p) + \beta_p \sigma(R, \theta_p, z_p) \frac{d\Phi_{NM}}{dr}(R, \theta_p, z_p) \quad (4.1.32b)$$

bestimmt werden.

Beweis. Wird die Summe von Gleichung (4.1.32a) auf die linke Seite gebracht, steht dort der Fourierkoeffizient der ursprünglichen Funktion und des unbestimmten Teils der Punktelektrode. Somit also die richtige verallgemeinerte Fourierentwicklung.

Für Gleichung (4.1.32b) gilt

$$\begin{aligned} \rho_p C_p &= \rho_p \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} f_{nm,p} \psi_{nm}(\theta_p, z_p) \\ &= f_{NM}(\theta_p, z_p) \\ &= \alpha_p \Phi_{NM}(R, \theta_p, z_p) + \beta_p \sigma(R, \theta_p, z_p) \frac{d\Phi_{NM}}{dr}(R, \theta_p, z_p), \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

wenn mit f_{NM} die Näherung für die Fourierreihe bezeichnet wird. \square

4 Näherungslösung für den Zylinder

Bemerkung 4.1.7. Für den Fall der analytischen Lösung, funktioniert dieser Beweis nicht. Der Grund ist, dass $C_p \rightarrow \infty$ geht, da ja f_{NM} die Punktelektrode mit

$$\rho_p \delta(\theta - \theta_p) \delta(z - z_p) \quad (4.1.34)$$

im Punkt (θ_p, z_p) annähert.

Bemerkung 4.1.8 (Berechnung von C_p). Werden die Fourierkoeffizienten von Punktelektroden in Formel (4.1.31) eingesetzt, so gilt für $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$

$$C_p = \frac{|M|}{2\pi} e^{\gamma z_p} \sum_{n \in \mathcal{N}} |Z_n(z_p)|^2 \quad (4.1.35)$$

und für $\alpha = 0$ (oder $\gamma = 0$)

$$C_p = \frac{|M|}{2\pi} \sum_{n \in \mathcal{N}} |Z_n(z_p)|^2, \quad (4.1.36)$$

da laut Proposition 3.2.2

$$|P_m(z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.1.37)$$

ist.

4.2 Berechnung des Fehlers

Zur Berechnung des Fehlers wird die *Parsevalsche Gleichung* verwendet, vergleiche hierfür Rudin [9], 4.13 bis 4.26. Sei H ein *Hilbertraum*. Für ein Orthonormalsystem

$$\{u_\alpha : \alpha \in A\} \quad (4.2.1)$$

von H definiere die *Fourierkoeffizienten* von $x \in H$ mit

$$\hat{x}(\alpha) := \langle x, u_\alpha \rangle \quad (4.2.2)$$

für $\alpha \in A$.

Satz 4.2.1 (Parsevalscher Satz). *Seien die Voraussetzungen wie oben gegen, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\{u_\alpha\}$ ist eine maximale orthonormale Menge (vollständige orthonormale Menge) in H .

(2) Für alle $x \in H$ gilt

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2. \quad (4.2.3)$$

(3) Für alle x und $y \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y \rangle. \quad (4.2.4)$$

Beweis. Siehe Rudin [9], Satz 4.18. □

Dieser Satz wird nun verwendet, um den Fehler bei der verallgemeinerten Fourierentwicklung der Näherungslösung zu ermitteln.

Setze wieder $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ und $\mathcal{M} = \{-M, \dots, M\}$. Für die Funktion f auf dem Zylindermantel M gilt

$$\langle f, f \rangle_{\psi} = \|f\|_{\psi}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f_{nm}|^2. \quad (4.2.5)$$

Die Einschränkung auf nur endlich viele n und m ergibt die Ungleichung

$$\langle f, f \rangle_{\psi} \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} |f_{nm}|^2. \quad (4.2.6)$$

Die Größe dieser Abweichung von der Gleichheit kann als Maß für den Fehler angesehen werden, da die vorkommende 2-Norm zu Betrachtungen der *Energie* der Funktion führt.

Proposition 4.2.2. *Für die Näherung f_{NM} (Partialsomme) von f gilt*

$$\|f - f_{NM}\|_{\psi}^2 = \|f\|_{\psi}^2 - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} |f_{nm}|^2. \quad (4.2.7)$$

Beweis. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_{NM}\|_{\psi}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f_{nm} - f_{nm} [n \in \mathcal{N} \text{ und } m \in \mathcal{M}]|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}} |f_{nm}|^2 \\ &= \|f\|_{\psi}^2 - \underbrace{\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} |f_{nm}|^2}_{=: \|f_{NM}\|_{\psi}^2} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

□

Der relative Fehler kann nun wie folgt berechnet werden.

Definition 4.2.3. Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}(M)$, dann berechnet sich der *relative Fehler* F in der Energienorm durch

$$F = 1 - \frac{\|f_{NM}\|_{\psi}}{\|f\|_{\psi}}. \quad (4.2.9)$$

Ist $\|f\|_{\psi} = 0$, also $f = 0$, so definiere $F = 0$.

4 Näherungslösung für den Zylinder

Die Definition für $f = 0$ ist sinnvoll, da für die Nullfunktion auch die Fourierkoeffizienten alle Null sind und somit die Funktion exakt angenähert wird. Wegen der Ungleichung (4.2.6) gilt klarerweise $0 \leq F \leq 1$. Durch Einsetzen folgt

$$F = 1 - \sqrt{\frac{1}{\|f\|_\psi^2} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} |f_{nm}|^2}. \quad (4.2.10)$$

Jetzt wird für ausgewählte Elektrodenkonfigurationen die Norm berechnet. Definiere

$$\tilde{g}(\theta, z) := e^{-\gamma z} g(\theta, z). \quad (4.2.11)$$

Für Rechteckelektroden berechnet sich die Norm laut folgender Proposition.

Proposition 4.2.4. *Sei eine Rechteckelektrode mit*

$$f_i(\theta, z) = \rho_i \mathbb{1}_{[\theta_i - \frac{w_i}{2R}, \theta_i + \frac{w_i}{2R}]}(\theta) \mathbb{1}_{[z_i - \frac{h_i}{2}, z_i + \frac{h_i}{2}]}(z) \quad (4.2.12)$$

gegeben, dann gilt

$$\|f_i\|_\psi^2 = |\rho_i|^2 \frac{w_i}{R} \cdot \begin{cases} h_i & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{2}{\gamma} e^{\gamma z_i} \sinh\left(\gamma \frac{h_i}{2}\right) & \text{für } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

und

$$\|\tilde{f}_i\|_\psi^2 = |\rho_i|^2 \frac{w_i}{R} \cdot \begin{cases} h_i & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{2}{\gamma} e^{-\gamma z_i} \sinh\left(\gamma \frac{h_i}{2}\right) & \text{für } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Beweis. Durch einfaches Ausrechnen des Integrals ergibt sich für $\gamma \neq 0$

$$\begin{aligned} \|f_i\|_\psi^2 &= \int_{\theta=\theta_i - \frac{w_i}{2R}}^{\theta_i + \frac{w_i}{2R}} \int_{z=z_i - \frac{h_i}{2}}^{z_i + \frac{h_i}{2}} e^{\gamma z} |\rho_i|^2 dz d\theta \\ &= |\rho_i|^2 \frac{w_i}{R} \frac{e^{\gamma z_i}}{\gamma} \underbrace{\left(e^{\gamma \frac{h_i}{2}} - e^{-\gamma \frac{h_i}{2}} \right)}_{=2 \sinh\left(\gamma \frac{h_i}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

und

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_i\|_\psi^2 &= \int_{\theta=\theta_i - \frac{w_i}{2R}}^{\theta_i + \frac{w_i}{2R}} \int_{z=z_i - \frac{h_i}{2}}^{z_i + \frac{h_i}{2}} e^{\gamma z} |\rho_i|^2 |e^{-\gamma z}|^2 dz d\theta \\ &= -|\rho_i|^2 \frac{w_i}{R} \frac{e^{-\gamma z_i}}{\gamma} \underbrace{\left(e^{-\gamma \frac{h_i}{2}} - e^{+\gamma \frac{h_i}{2}} \right)}_{=-2 \sinh\left(\gamma \frac{h_i}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Für $\gamma = 0$ gilt

$$\|f_i\|_\psi^2 = \|\tilde{f}_i\|_\psi^2 = \int_{\theta=\theta_i - \frac{w_i}{2R}}^{\theta_i + \frac{w_i}{2R}} \int_{z=z_i - \frac{h_i}{2}}^{z_i + \frac{h_i}{2}} |\rho_i|^2 dz d\theta = |\rho_i|^2 \frac{w_i}{R} h_i. \quad (4.2.17)$$

□

Für Punktelektroden der Form

$$f_i(\theta, z) = \rho_i \delta(\theta - \theta_i) \delta(z - z_i) \quad (4.2.18)$$

ist eine Berechnung des Fehlers in der oben beschriebenen Weise nicht möglich. Für die Norm der Punktelektrode gilt

$$\|f_i\|_\psi^2 = |\rho_i|^2 \iint_{M_i} |\delta(\theta - \theta_i) \delta(z - z_i)|^2 dz d\theta = |\rho_i|^2 (\delta(0))^2. \quad (4.2.19)$$

Die rechte Seite ist größer als jede reelle Zahl, die Norm also unendlich groß. Damit folgt im Fall der Näherungslösung mit nur endlich vielen n und m , dass für den relativen Fehler immer $F = 1$ gilt.

Zum Abschluss der Fehlerbetrachtungen wird die Auswirkung auf den Fehler der Koeffizienten näher beschrieben.

Bemerkung 4.2.5 (Fehler der Koeffizienten). Für die analytische Lösung gilt ein allgemeines lineares Gleichungssystem (Operatorgleichung) der Form

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{F}. \quad (4.2.20)$$

mit Operator \mathcal{A} , Koeffizienten \mathcal{X} und Fourierkoeffizienten der Randfunktion \mathcal{F} . Wird die Funktion auf dem Rand nur näherungsweise in eine Reihe entwickelt, so bezeichne den von Null verschiedenen Teil der rechten Seite mit \mathcal{F}_{NM} . Die zugehörige Operatorgleichung soll

$$\mathcal{A}\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.21)$$

lauten. Der nächste Schritt für die Näherungslösung ist die Einschränkung der Koeffizienten, das heißt, es werden nur endlich viele verwendet. Die restlichen sind Null. Das (endliche) Gleichungssystem lautet hier

$$\mathcal{A}_{NM}\mathcal{X}_{NM} = \mathcal{F}_{NM}, \quad (4.2.22)$$

wobei \mathcal{A}_{NM} die Einschränkung von \mathcal{A} durch Weglassen der Nulleinträge sind.

Gilt die Aufspaltung

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NM} & \mathcal{B}_{NM} \\ \mathcal{C}_{NM} & \mathcal{D}_{NM} \end{pmatrix}, \quad (4.2.23)$$

4 Näherungslösung für den Zylinder

so folgt mittels Inversionslemma aus Anhang A.5

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{X} - \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &\leq \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\| + \left\| \mathcal{Y} - \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \left\| \mathcal{F} - \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NM}^{-1} + \mathcal{A}_{NM}^{-1} \mathcal{L}_{NM} \\ -\mathcal{L}_{NM} \end{pmatrix} \mathcal{F}_{NM} - \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NM}^{-1} \mathcal{F}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \left\| \mathcal{F} - \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NM}^{-1} \mathcal{L}_{NM} \\ -\mathcal{L}_{NM} \end{pmatrix} \right\| \|\mathcal{F}_{NM}\| \\
&\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \left\| \mathcal{F} - \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{NM} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NM}^{-1} \\ -I \end{pmatrix} \right\| \|\mathcal{L}_{NM}\| \|\mathcal{F}_{NM}\|,
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

wobei

$$\mathcal{L}_{NM} = \mathcal{B}_{NM} \mathcal{M}_{NM}^{-1} \mathcal{C}_{NM} \mathcal{A}_{NM}^{-1} \tag{4.2.25}$$

mit

$$\mathcal{M}_{NM} = \mathcal{D}_{NM} - \mathcal{C}_{NM} \mathcal{A}_{NM}^{-1} \mathcal{B}_{NM} \tag{4.2.26}$$

ist.

Der erste Teil des Fehlers kann mit den obigen Überlegungen (und der Kenntnis der Norm des Operators) abgeschätzt werden. Für den zweiten Teil ist die Kenntnis der Normen der darin vorkommenden Operatoren nötig.

Für nicht-gemischte Randbedingungen verschwindet der zweite Term allerdings, da dabei $\mathcal{B}_{NM} = 0$ und $\mathcal{C}_{NM} = 0$ und somit $\|\mathcal{L}_{NM}\| = 0$ gilt.

4.3 Aufwandsberechnung

In diesem Abschnitt wird der Rechen- und Speicheraufwand für die beschriebenen Näherungslösungen analysiert. Seien N und M natürliche Zahlen, $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ und $\mathcal{M} = \{-M, \dots, M\}$. Die Näherungslösung Φ_{NM} bestehe aus den Termen für $n \in \mathcal{N}$ und $m \in \mathcal{M}$, also insgesamt aus

$$C_{NM} := |\mathcal{N}| |\mathcal{M}| = (N+1)(2M+1) \tag{4.3.1}$$

Summanden. Die Anzahl der Schichten des Zylinders wird wieder mit L bezeichnet.

Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird angenommen, dass $\mathcal{O}(\ell^3)$ Operationen für das Lösen von Gleichungssystemen der Größe ℓ benötigt werden. Dabei ist mit \mathcal{O} immer der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ und gegebenenfalls $L \rightarrow \infty$ gemeint.

Proposition 4.3.1 (Aufwand für nicht-gemischte Randbedingungen). *Das Bestimmen der $C_{NM} (2L-1)$ Koeffizienten der Näherungslösung aus den Sätzen 4.1.2 und 4.1.3 benötigt $\mathcal{O}(NML^3)$ Rechenoperationen und $\mathcal{O}(NML^2)$ Speicher.*

Beweis. Für jedes n und m lassen sich die Koeffizienten der Näherungslösungen ohne Kenntnis der anderen berechnen. Damit ist der Aufwand linear in der Anzahl dieser. Jedesmal ist dabei ein Gleichungssystem mit quadratischer Matrix der Größe $2L - 1$ zu lösen. Somit ergibt sich ein Aufwand von

$$C_{NM} (2L - 1)^3 = \mathcal{O}(NML^3) \quad (4.3.2)$$

Rechenoperationen.

Da die Koeffizienten für jedes n und m einzeln berechnet werden, wird nur der Speicher für die $(2L - 1) \times (2L - 1)$ -Matrix und den Vektoren der Größe $2L - 1$ benötigt. Damit gilt

$$C_{NM} \left((2L - 1)^2 + k(2L - 1) \right) = C_{NM} \mathcal{O}(L^2) \quad (4.3.3)$$

für den Speicheraufwand. □

In Bezug auf die Genauigkeit „Anzahl der Summanden“ ist also sowohl der Rechenaufwand, als auch der Speicheraufwand linear in NM . Wird die Genauigkeit gleichmäßig in beiden Dimensionen mittels $K = N = M$, so hängt der Rechen- und Speicheraufwand quadratisch von K ab.

Noch anzumerken ist, dass die Matrizen für jedes einzelne n und m *schwach besetzt* sind, da diese für $L > 1$

$$6 + 4(L - 2) + 2 = \mathcal{O}(L) \quad (4.3.4)$$

Einträge besitzen. Da aber im Allgemeinen die Anzahl der Schichten relativ gering ist (zum Beispiel $L = 3$), ist dies beim Lösen weniger von Bedeutung.

Proposition 4.3.2 (Aufwand für gemischte Randbedingungen). *Das Bestimmen der $C_{NM} (2L - 1)$ Koeffizienten der Näherungslösung aus den Sätzen 4.1.4 und 4.1.5 benötigt $\mathcal{O}((NML)^3)$ Rechenoperationen und $\mathcal{O}((NML)^2)$ Speicher.*

Beweis. Die Blöcke in der Hauptdiagonale haben, genau wie im nicht-gemischten Fall je $\mathcal{O}(L)$ Einträge. Die anderen Blöcke haben jeweils $\mathcal{O}(1)$ Einträge. Die Blockmatrix selbst besteht aus C_{NM}^2 Blöcken, somit insgesamt aus

$$C_{NM} \mathcal{O}(L) + (C_{NM}^2 - C_{NM}) \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}((NM)^2 + NML) \quad (4.3.5)$$

Einträgen. Damit ist die Matrix voll besetzt bezüglich NM , und das Lösen des Gleichungssystems benötigt $\mathcal{O}((NML)^3)$ Rechenoperationen. Der Speicher wird ebenfalls durch diese Matrix bestimmt. Er beträgt $\mathcal{O}((NML)^2)$, da die vorkommenden Vektoren, die noch zusätzlich benötigt werden, kleiner sind. □

Wird wieder für die Genauigkeit $K = N = M$ gesetzt, so ist zu sehen, dass der Rechenaufwand sich wie $\mathcal{O}(K^6)$ verhält, der Speicheraufwand $\mathcal{O}(K^4)$.

Generell ist noch anzumerken, dass die oben stehenden Betrachtungen (Propositionen) für N und M „scharf“ sind, das heißt, die Schranken können nicht kleiner gewählt werden. Sind die L sehr groß, so stimmen die Aussagen zwar noch, aber es geht besser.

4 Näherungslösung für den Zylinder

Für Punktelektroden wie in Satz 4.1.6 ergibt sich eine Verbesserung des Rechenaufwands. Darüber gibt die folgende Proposition Auskunft, wobei die Betrachtung von L hier vernachlässigt wurde.

Proposition 4.3.3 (Aufwand für gemischte Randbedingungen und Punktelektroden). *Sind Punktelektroden und andere Elektrodenkombinationen vorhanden, so bleibt der Aufwand wie in der Proposition über gemischte Randbedingungen, also $\mathcal{O}((NM)^3)$ Rechenoperationen und $\mathcal{O}((NM)^2)$ Speicher. Sind nur Punktelektroden vorhanden, so verringert sich der Rechenaufwand auf $\mathcal{O}((NM)^2)$.*

Beweis. Sind sowohl Punktelektroden, als auch andere Elektrodenfunktionen vorhanden, so berechnet sich der Aufwand wie im Beweis für gemischte Randbedingungen. Der interessante Fall ist, wenn nur Punktelektroden vorhanden sind. Dann wird die Inversion der Matrix mittels Blockinversionslemma aus Anhang A.5 durchgeführt.

Für die Teilmatrix A ist der Aufwand aus der Proposition über nicht-gemischte Randbedingungen zu entnehmen. Die Berechnung von M läuft in $\mathcal{O}(NM)$ ab, die Inversion dieser braucht $\mathcal{O}(1)$, die Berechnung von $A^{-1}BM^{-1}CA^{-1}$ benötigt $\mathcal{O}((NM)^2)$ und die anderen restlichen Einträge kommen mit $\mathcal{O}(NM)$ aus. Insgesamt führt das also auf $\mathcal{O}((NM)^2)$ für den Aufwand.

Der Speicher vergrößert sich ebenfalls auf $\mathcal{O}((NM)^2)$, da die inverse Matrix gespeichert werden muss und diese im Allgemeinen voll besetzt ist. \square

Kapitel 5

Bemerkungen zur Implementierung

In diesem Kapitel stehen einige Bemerkungen zur Implementierung¹ der Näherungslösung aus Kapitel 4. Dies wurde in *GNU Octave*² beziehungsweise *Matlab*^{®3} programmiert.

Im Nachfolgenden werden kurz die wichtigsten Funktionen der erstellten Software beschrieben. Bei den meisten erfolgte die Implementierung “staight forward“, das heißt, es konnte die Näherungslösung direkt verwendet werden. Einige Details und – wo erforderlich – Veränderungen sind unten aufgeführt.

5.1 Kurzbeschreibung ausgewählter Funktionen

Die Funktion `aeit_calc` startet die Berechnung. Nach überprüfen der Eingangsdaten (Geometrie, Material, Elektroden und gewünschte Genauigkeit) werden hier die zwei Routinen `aeit_fourier` und `aeit_coefficients` aufgerufen. Ergebnis ist ein Modell mit den berechneten Koeffizienten, welches nun weiterverarbeitet (Auswertung an Punkten, Plot des Potentials, Vergleich mit anderen Modellen, ...) werden kann.

Die Aufgabe von `aeit_fourier` ist die Bestimmung der Fourierkoeffizienten laut Abschnitt 3.3.2. Diese werden nun von `aeit_coefficients` verwendet, um die Koeffizienten zu bestimmen. Dabei werden, je nach verwendeter Konfiguration die unterschiedlichen Gleichungssysteme aus Abschnitt 4.1 gelöst.

Damit ist nun also das Modell bestimmt (also die Koeffizienten berechnet). Es stehen jetzt einige Funktionen zur Verfügung, welche mit diesem Modell weiterarbeiten. `aeit_values` dient zur Berechnung des Potentials an einem bestimmten Punkt beziehungsweise an bestimmten Punkten. Die Implementierung dieser Funktion ist effizient,

¹Der Projektname ist *AEIT*. Es handelt sich um freie Software, siehe Homepage <http://www.danielkrenn.at> für Download und Weiteres.

²*GNU Octave* ist freie Software. Siehe Homepage <http://www.gnu.org/software/octave/> für weitere Informationen

³*Matlab*[®] ist ein kommerzielles Softwarepaket von *The MathWorks*.

5 Bemerkungen zur Implementierung

wenn viele Werte in einem regelmäßigen Gitter berechnet werden sollen. Genauer ausgedrückt, im Falle des Zylinders ist dies der Fall, wenn das Gitter aus Kombinationen von Radien r , Winkeln θ und Höhen z ist.

Diese Funktion wird auch verwendet, um mittels `aeit_plot` Darstellungen des Potentials, der Ableitungen von diesem, der Elektrodenkonfigurationen und so weiter, zu erzeugen. Eine andere Möglichkeit der grafischen Ausgabe der Daten ist mittels `aeit_writeVTK`. Damit ist eine Visualisierung mittels *ParaView*⁴ möglich.

Es sind auch noch Routinen zum Vergleich des Modells mit anderen Modellen, zum Beispiel Finite-Elemente-Modelle vorhanden. Weiters gibt es viele Subroutinen die hier nicht näher beschrieben werden sollen. Für Informationen zu diesen und alle anderen auch verwende `'help Funktionsname'` oder siehe Implementierung.

5.2 Implementierung der Lösung in radialer Richtung

Wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben lautet für eine Leitfähigkeitsverteilung von $\hat{\sigma}(r) = \sigma_1 r^\mu$ die Lösung für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$S_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r), \quad (5.2.1a)$$

$$T_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} e^{\nu\pi i} K_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r). \quad (5.2.1b)$$

mit $\nu = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$ und $\Gamma_n = \lambda_n^2 + \frac{1}{4}\gamma^2$. Diese S_{nm} und T_{nm} besitzen einen sehr hohen Dynamikbereich, das heißt, die Werte strecken sich für verschiedene n und m über einen sehr großen Bereich.

Um die Implementierung numerisch stabiler zu machen, werden diese Funktionen an einem bestimmten Radius normiert. Die neuen Funktionen lauten

$$\frac{S_{nm}(r)}{S_{nm}(R)} \quad (5.2.2a)$$

im Falle des einschichtigen Zylinders und

$$\frac{S_{nm}^{[\ell]}(r)}{S_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]})} \quad \text{und} \quad \frac{T_{nm}^{[\ell]}(r)}{T_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell-1]})} \quad (5.2.2b)$$

für den mehrschichtigen Zylinder. Dadurch sind auch die Koeffizienten A_{nm} und B_{nm} der Lösung in Bereichen mit betragsmäßig geringerem Exponenten in Gleitkommadarstellung skaliert.

5.3 Numerische Grenzen der Implementierung

In diesem Abschnitt wird auf Grenzen der Implementierung, welche aufgrund der Numerik, und damit wegen der endlichen Genauigkeit entstehen. Ein Problem tritt bei der

⁴*ParaView* ist Open Source Software und frei verfügbar. Siehe Homepage <http://www.paraview.org/> für Weiteres.

Software	Funktion	Maximalwert des Parameters	Funktionswert bei maximalem Parameter
<i>GNU Octave</i>	<code>besseli(m,pi)</code>	$m_{max} = 35$	$7.5806e - 34$
<i>Matlab</i> [®]	<code>besseli(m,pi)</code>	$m_{max} = 185$	$4.7073e - 305$
<i>GNU Octave</i>	<code>besselk(m,pi)</code>	$m_{max} = 36$	$4.1909e + 32$
<i>Matlab</i> [®]	<code>besselk(m,pi)</code>	$m_{max} = 185$	$5.7406e + 301$
<i>GNU Octave</i>	<code>besseli(0,n*pi)</code>	$n_{max} = 709$	$1.2315e + 306$
<i>Matlab</i> [®]	<code>besseli(0,n*pi)</code>	$n_{max} = 700$	$1.5296e + 302$
<i>GNU Octave</i>	<code>besselk(0,n*pi)</code>	$n_{max} = 742$	$4.9407e - 324$
<i>Matlab</i> [®]	<code>besselk(0,n*pi)</code>	$n_{max} = 697$	$9.3997e - 305$

Tabelle 5.1: Maximaler Wertebereich der Funktionen `besseli` und `besselk` in *GNU Octave* beziehungsweise *Matlab*[®].

Berechnung der *Besselfunktionen* auf. Wenn nur die Eingangsparameter dieser groß genug sind, liefern die verwendeten Softwarepakete falsche beziehungsweise unzureichend genaue Lösungen. Dies wird im Folgenden beispielhaft aufgezeigt.

Beispiel 5.3.1. Setze $\gamma = 0$, $\mu = 0$ und Höhe $H = 1$, und betrachte die allgemeine Lösung. Der Anteil in radialer Richtung lautet dann für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$S_{nm}(r) = I_{|m|}(n\pi r) \quad (5.3.1a)$$

und

$$T_{nm}(r) = e^{|m|\pi i} K_{|m|}(n\pi r). \quad (5.3.1b)$$

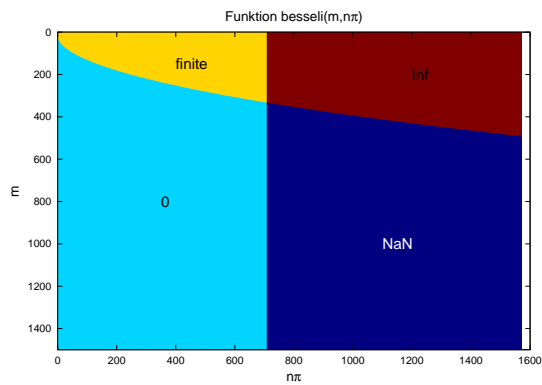
Für reelle nicht-negative Eingangswerte sind die Funktionen $I_{|m|}$ und $K_{|m|}$ reell, abgesehen von I_0 ungleich Null und abgesehen vom Eingangswert Null bei den $K_{|m|}$ beschränkt, vergleiche Abramowitz und Stegun [1], Abschnitt 9.6.

Die bereits in *GNU Octave* und *Matlab*[®] vorhandenen Funktionen⁵ `besseli` und `besselk` weisen jedoch anderes Verhalten für größere Eingangsparameter auf. In Abbildung 5.1 sind die Bereiche, in welchen die angegebenen Funktionen „vernünftige“ Werte liefern, zu sehen. Verwendbar ist dabei nur der gelbe, mit „finite“ gekennzeichneten Bereich.

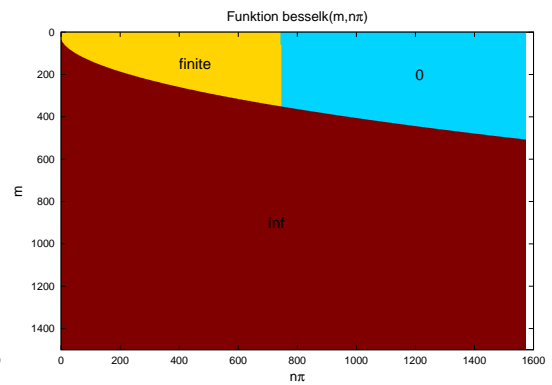
Werden für die Gesamtlösung alle $n \in \{0, \dots, N\}$ und $m \in \{-M, \dots, M\}$ verwendet, so kann eine Einschränkung der Werte für N und M laut Tabelle 5.1 ermittelt werden. Bei den darin vorkommenden m_{max} ist darauf zu achten, dass diese an der Stelle π mittels `besseli(m,pi)` berechnet wurden. Für Werte aus $(0, \pi)$ muss dieses m_{max} eventuell noch verringert werden.

⁵Das Betriebssystem des Testcomputers war *Debian Lenny amd64*, siehe www.debian.org. Es wurde *GNU Octave* Version 3.0.1 und *Matlab*[®] 7.6.0.324 (R2008a) verwendet.

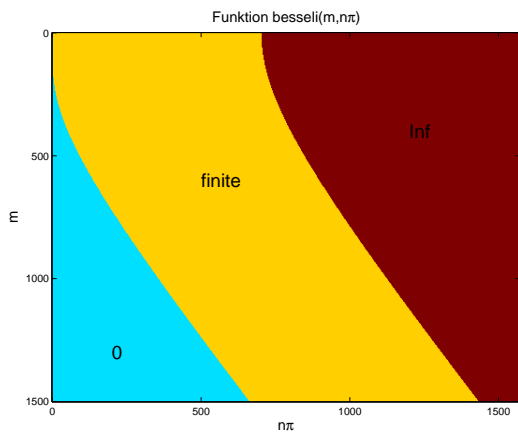
5 Bemerkungen zur Implementierung



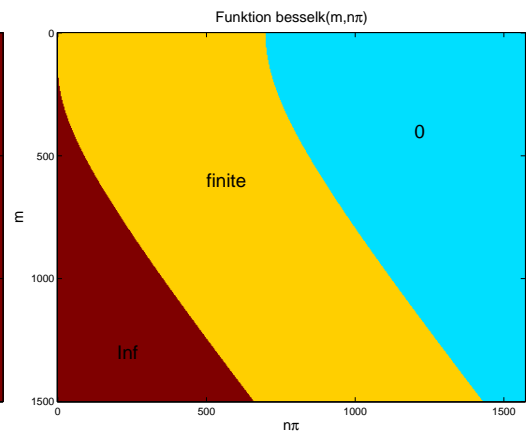
(a) `besseli(m,n*pi)` in *GNU Octave*



(b) `besselk(m,n*pi)` in *GNU Octave*



(c) `besseli(m,n*pi)` in *Matlab*[®]



(d) `besselk(m,n*pi)` in *Matlab*[®]

Abbildung 5.1: Wertebereich der Funktionen `besseli` und `besselk` in *GNU Octave* beziehungsweise *Matlab*[®].

Kapitel 6

Vergleich der analytischen Lösung mit anderen Lösungen

In diesem Kapitel erfolgt ein Vergleich der beschriebenen, auf der analytischen Lösung basierenden Näherung mit anderen. Dafür wird eine Vergleichsrechnung mit einem *Finite-Elemente-Modell* durchgeführt.

6.1 Effektivwertberechnung für einen allgemeinen Simplex

Das Finite-Elemente-Modell arbeitet mit einem Netz aus Tetraedern, bei welchen in den Eckpunkten das Potential bestimmt wird. Um einen *Effektivwert*¹ – gemittelt über einen Tetraeder beziehungsweise über das gesamte Modell – zu berechnen, muss über das gewünschte Gebiet integriert werden. Da dies für den allgemeinen Fall (beliebige Dimension) nicht komplizierter wird, folgt hier die Beschreibung von diesem.

Proposition 6.1.1 (Effektivwert für einen allgemeinen Simplex). *Sei $d \in \mathbb{N}$ und S ein d -Simplex mit den Eckpunkten x_0, \dots, x_d im \mathbb{R}^d . Sei weiters u eine Funktion vom Simplex S nach \mathbb{C} , welche in den Eckpunkten die Werte u_0, \dots, u_d annimmt und dazwischen linear ist. Mit den Bezeichnungen $D := \{0, \dots, d\}$ gilt*

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{2}{(d+1)(d+2)} \sum_{\substack{i \in D, j \in D \\ i < j}} \operatorname{Re}(u_i \overline{u_j})} \quad (6.1.1)$$

Beweis. Zuerst wird der d -Simplex S mittels der linearen Transformation $x = x_0 + J\xi$ mit

$$J = (x_1 - x_0 \quad x_2 - x_0 \quad \cdots \quad x_d - x_0) \quad (6.1.2)$$

¹Der *Effektivwert* ist für ein Gebiet Ω durch $u_{eff} := \sqrt{\frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$ definiert. $\operatorname{meas}(\Omega)$ bezeichnet dabei das *Maß* des Gebiets, also beispielsweise im eindimensionalen die Länge, zweidimensionalen die Fläche und im dreidimensionalen das Volumen.

6 Vergleich der analytischen Lösung mit anderen Lösungen

zum *Einheitssimplex* Δ_d mit den Eckpunkten $e_0 = 0$ und den *kanonischen Einheitsvektoren* e_i , $i \in \{1, \dots, d\}$ transformiert. Die Funktion u wird dabei in \tilde{u} übergeführt, wobei

$$\tilde{u}(\xi) = u(x(\xi)) \quad (6.1.3)$$

gilt. Aufgrund der Voraussetzungen an u und der linearen Transformation kann \tilde{u} durch

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{i \in D} u_i \psi_i(\xi) \quad (6.1.4)$$

dargestellt werden. ψ_i ist dabei jene lineare Funktion, die im Punkt e_i Eins ist und in allen anderen Punkten Null. Anders ausgedrückt, es gilt $\psi_i(e_j) = [i = j]$ beziehungsweise $\psi_0(\xi) = 1 - \sum_j \xi_j$ und für alle anderen $\psi_i(\xi) = \xi_i$, wobei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)^T$ ist.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_S |u(x)|^2 dx &= |\det J| \int_{\Delta_d} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= |\det J| \sum_{i \in D} \sum_{j \in D} u_i \bar{u}_j \int_{\Delta_d} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Es gilt

$$\int_{\Delta_d} \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi = \frac{1}{(d+2)!} \cdot \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}, \quad (6.1.6)$$

was durch einfaches Nachrechnen und Induktion gezeigt werden kann.

Weiters kann für das Maß von S

$$\text{meas}(S) = \int_S dx = |\det J| \int_{\Delta_d} d\xi = \frac{|\det J|}{d!} \quad (6.1.7)$$

gezeigt werden.

Da $u_i \bar{u}_j + u_j \bar{u}_i = 2 \text{Re}(u_i \bar{u}_j)$ ist, folgt nach Einsetzen in Gleichung (6.1.5) und Dividieren durch $\text{meas}(S)$ das gewünschte Resultat. \square

Proposition 6.1.2 (Effektivwert für ein aus Simplizes zusammengesetztes Gebiet). *Sei $d \in \mathbb{N}$ und*

$$\Omega = \bigcup_{k \in K} S_k \quad (6.1.8)$$

mit einer abzählbaren Indexmenge K und d -Simplizes S_k . Sei weiters u eine stückweise lineare Funktion von Ω nach \mathbb{C} welche in den Eckpunkten $x_{k,i}$ (lokale Nummerierung, $i \in D := \{0, \dots, d\}$) von Simplex S_k die Werte $u_{k,i}$ annimmt. Es gilt

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{(d+1)(d+2)} \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \sum_{k \in K} \left(\text{meas}(S_k) \sum_{\substack{i \in D, j \in D \\ i \leq j}} \text{Re}(u_{k,i} \bar{u}_{k,j}) \right)}. \quad (6.1.9)$$

Beweis. Das Ergebnis folgt direkt aus Proposition 6.1.1, wenn die einzelnen Effektivwerte der Simplizes, mit ihrem Maß gewichtet, gemittelt werden. \square

Für die im nächsten Abschnitt beschriebenen Finiten-Elemente (Tetraeder) ist $d = 3$ zu setzen.

6.2 Vergleich mit Finite-Elemente-Modell

In diesem Abschnitt wird das analytische Modell aus den vorherigen Kapiteln mit einem *Finite-Elemente-Modell*² verglichen. Für ausgewählte Elektrodenkonfigurationen werden Lösungen mit beiden Modellen berechnet und anschließend die Differenz gebildet.

Dafür werden die beim Finite-Elemente-Modell verwendeten Knotenpunkte eingelesen und das analytische Modell an diesen ausgewertet. Anschließend wird in jedem Punkt der Fehler berechnet und laut Abschnitt 6.1 aufsummiert. Damit wird ein mittlerer quadratischer Fehlerwert, der die Größe der Elemente berücksichtigt und dazwischen linear interpoliert, bestimmt. Durch diese Interpolation wird ein Fehler gemacht, da das analytische Modell zwischen zwei Punkte im Allgemeinen nicht linear ist. Als Annäherung für den tatsächlichen Fehler ist der Wert jedoch verwendbar.

Zum Einsatz kam jeweils ein Zylinder, auf dessen Mantelfläche Elektroden kontaktiert werden. Nichtkontaktierte Flächen sind isolierend. Dies entspricht also dem Fall von gemischten Randbedingungen. Auf den Elektroden selbst wird das Potential vorgegeben.

Die genauen Eingangsdaten der Simulationen und die detaillierten Ergebnisse sind in Anhang C zu finden. Für die visuelle Darstellung der Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 wurde die Software *ParaView*³ verwendet. Dabei ist in (a) der Realteil des Potentials des analytischen Modells zu sehen und in (b) der Absolutbetrag der Differenz zwischen analytischem Modell und Finite-Elemente-Modell. Der Zylinder wurde dabei jeweils bei $z = \frac{H}{2}$ und in der axialen Ebene durch den Mittelpunkt aufgeschnitten.

Das erste Modell (Modell A) ist ein einschichtiger Zylinder mit konstanter Leitfähigkeit. Die beiden rechteckigen Elektroden sind symmetrisch gegenüber angeordnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.1 zu sehen. Die beiden Ergebnisse (analytisches Modell und Finite-Elemente-Modell) stimmen im Bereich, wo keine Sprungstellen vorhanden sind, sehr gut überein. Bei den Sprungstellen sind die Abweichungen größer und ziehen sich etwa über zwei Reihen von Finiten-Elementen. Insgesamt beträgt der mittlere quadratische Fehler etwa 2% (Amplitudenhub der Elektroden ist 2 und der mittlere quadratische Fehler 0.0404).

Ein ähnliches Ergebnis ist auch bei der zweiten Modellkonfiguration (Modell B) zu finden. Hier wurde ein dreischichtiger Zylinder mit schichtweise konstanter Leitfähigkeit simuliert. Die zwei Rechteckelektroden sind in einem Winkel von 90° auf dem Mantel angeordnet. Siehe Abbildung 6.2 für eine grafische Darstellung der Potentialverteilung und der Differenz. Der Fehler ist wieder in der gleichen Größenordnung wie bei Modell

²Verwendet wurde *IMTmesh*, eine am Institut für Medizintechnik, TU Graz entwickelte FE-Software.

³*ParaView* ist Open Source Software und frei verfügbar. Siehe Homepage <http://www.paraview.org/> für Weiteres.

6 Vergleich der analytischen Lösung mit anderen Lösungen

A und ebenfalls wieder am gravierendsten bei Sprungstellen. In der Abbildung ist die Grenze zwischen Layer 2 und 3 zu erkennen, da sich dort die Leitfähigkeit stark ändert (Layer 2 hat eine sehr kleine Leitfähigkeit). Der Übergang von Layer 1 auf 2 ist nicht zu erkennen, da sich dort das Potential fast nicht mehr ändert (ist schon sehr nahe bei Null).

Im dritten Modell (Modell C) kommt wieder ein dreischichtiger Zylinder zum Einsatz. Eine Elektrode überspannt vollständig eine Hälfte der Mantelfläche, die zweite ist klein und gegenüber. Hier liegt der Fehler bei etwa 4%. Schön zu erkennen ist in Abbildung 6.3 auch wieder der Übergang von Layer 2 zu Layer 3.

Des Weiteren wurde eine Simulation mit einem einschichtigen Zylinder und Punktelektroden durchgeführt. Die Ergebnisse (vom Fehlerwert her) ähnlich denen der vorangegangenen Modelle. Allerdings ist dieser Wert mit etwas Vorsicht zu genießen. Erstens setzt die verwendete Finite Elemente Simulation die Punktelektrode auf den nächstliegenden Knoten, das analytische Modell belässt allerdings diesen an der angegebenen Stelle. Zweitens wird bei der Analyse des Fehlers die Auswertung, wie oben erwähnt auf die Knotenpunkte eingeschränkt und dazwischen linear interpoliert. Da der Peak aber im Allgemeinen nicht mit einem Knoten zusammenfällt, sind auch hier Abweichungen zu erwarten. Damit verbunden entspricht auch die grafische Darstellung nicht der tatsächlichen Potentialverteilung, weshalb auf diese verzichtet wurde. Das Problem lässt sich umgehen, indem die Punktelektroden genau in Knoten des Netzes aus Finiten-Elementen gesetzt wird.

6.2 Vergleich mit Finite-Elemente-Modell

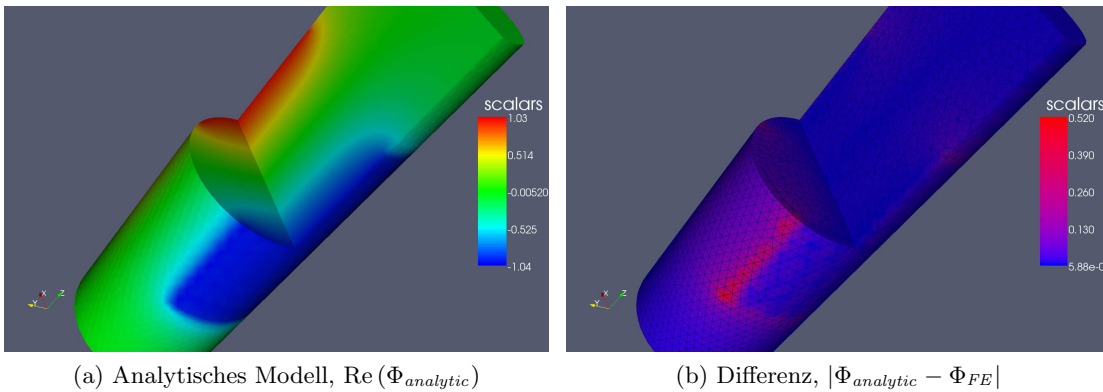


Abbildung 6.1: Einschichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden symmetrisch

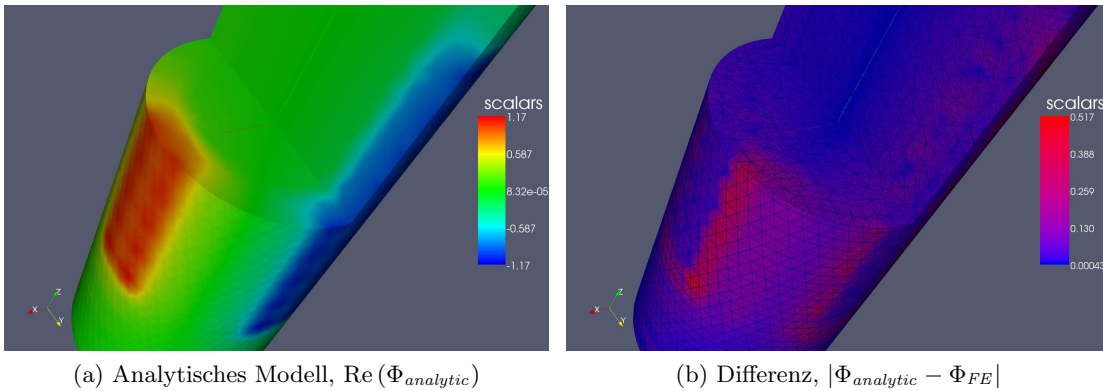


Abbildung 6.2: Dreischichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden im rechten Winkel

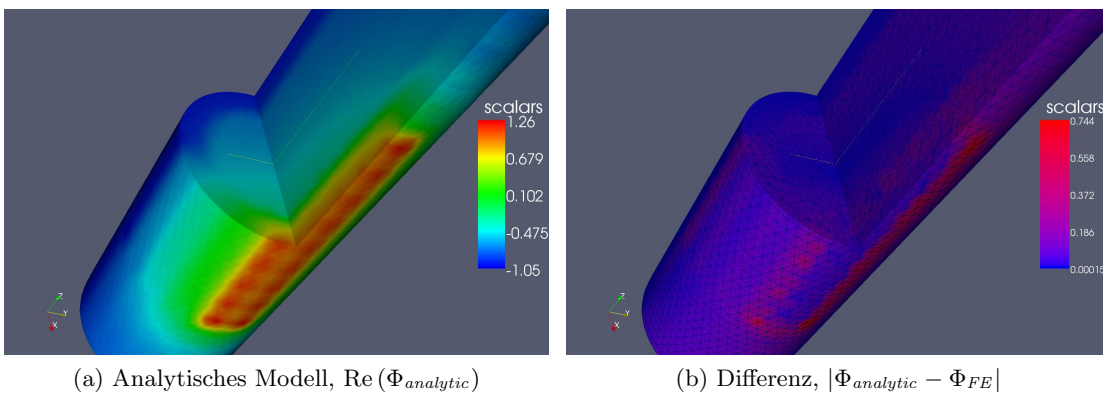


Abbildung 6.3: Dreischichtiger Zylinder, zwei Rechteckelektroden

6 Vergleich der analytischen Lösung mit anderen Lösungen

Kapitel 7

Ergebnisse, Diskussion und Ausblick

In dieser Arbeit ging es um das Finden von analytischen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0 \tag{7.0.1}$$

in einem Zylinder im dreidimensionalen Raum. Die Randbedingungen auf Boden- und Deckfläche waren als isolierend angenommen. Auf dem Zylindermantel wurde zwischen nicht-gemischten und gemischten Randbedingungen unterschieden. Die Leitfähigkeit ist dabei als radialsymmetrisch angenommen und entweder für den ganzen Zylinder oder für jede von mehreren (endlich vielen) Schichten des Zylinders vorgegeben. In axialer Richtung ist eine exponentielle Abhängigkeit möglich, in radialer Richtung wurde die Lösung auf Potenzen mit beliebigem reellen Exponenten, also insbesondere konstantes Verhalten beschränkt. Eine Erweiterung auf andere Verteilungen ist möglich.

Beim nicht-gemischten Fall wurden zunächst die in Kapitel 2 angeführten Bemerkungen und Gegenbeispiele der Lösung von Pidcock et al [7] betrachtet. In Kapitel 3 ist diese analytische Lösung in einer korrigierten Version zu finden. Die Summanden des Resultats erfüllen nun eine Normalität und Orthogonalität bezüglich des richtigen inneren Produkts. Die Lösung selbst ist jetzt auch vollständig. Der Beweis für die Vollständigkeit enthält allerdings noch Lücken, welche hier nicht behandelt werden und noch exakt gemacht werden müssen. Weitere, ebenfalls in den Gegenbeispielen aufgeführte Probleme wurden auch richtig gestellt.

Eine Erweiterung der Gleichungen für den komplexen Fall wurde auch vorgenommen. Es sind sowohl bei den Randbedingungen (Elektroden) komplexe Funktionen, sowie komplexwertige Leitfähigkeiten möglich. Es stellte sich heraus, dass eine Lösung in der hier beschriebenen Form nur für entweder $\alpha = 0$ (Stromdichte vorgegeben), $\beta = 0$ (Potential vorgegeben) oder $\gamma = 0$ (keine Abhängigkeit in axialer Richtung) möglich ist. Andernfalls wird die Orthonormalitätseigenschaft zerstört. Um dieses Problem in den Griff zu bekommen, kann ein ähnlicher Ansatz wie der beim gemischten Randwertproblem verwendet werden, nämlich die Bildung eines großen Gleichungssystems zur Berechnung

der Koeffizienten. Dieser Weg wurde hier nicht weiter verfolgt.

In Kapitel 4 wurde aus der analytischen Lösung eine Näherungslösung konstruiert. Dies erfolgt in natürlicher Weise, indem von den vorkommenden unendlichen Reihen auf die Partialsummen dieser übergegangen wird. Dort wurde auch eine Möglichkeit aufgezeigt, den Fehler der Näherungslösung zu berechnen. Das erfolgte mittels Parsevalschem Satz. Weiters ist noch eine Aufwandsberechnung durchgeführt worden.

Die Näherungslösung konvergiert gegen die analytische Lösung, siehe Abschnitt 4.1.1. Die Geschwindigkeit hängt von der Konvergenz der verallgemeinerten Fourierreihenentwicklung der Funktion auf der Mantelfläche ab. Durch die Fehlerabschätzung aus 4.2 ist bekannt wie weit die Näherung noch von der tatsächlichen Lösung entfernt ist. Die Berechnungsdauer der Koeffizienten der Doppelsumme ist linear mit der Anzahl dieser, quadratisch, wenn in beide Richtungen die gleiche Anzahl angenommen – und diese Anzahl als Maß für die Genauigkeit genommen – wird, vergleiche 4.3. Rechentechnisch ist das also mit den heutigen Computerleistungen¹ kein Problem.

Allerdings gibt es Probleme mit der in *GNU Octave* und *Matlab*[®] implementierten Besselfunktionen, siehe Abschnitt 5.3. Diese werden nicht für alle Eingangsparameter exakt genug ausgerechnet. Damit ergibt sich auch eine Einschränkung der Genauigkeit der Näherungslösung in der erstellten Software. Eine mögliche Abhilfe wäre, bei großen Eingangsparametern anstatt der Besselfunktionen eine asymptotische Entwicklung dieser zu verwenden. Weiters könnte auch die Einschränkung „intelligenter“ erfolgen. Derzeit wird jeweils beim maximal möglichen Wert der beiden Eingangsparameter abgeschnitten. Größere Bereiche ließen sich durch Berücksichtigen der Abhängigkeiten beider Parameter erzielen.

Für den Fall von gemischten Randbedingungen – beispielsweise zwei Elektroden, auf denen das Potential vorgegeben ist und der Rest isolierend – lässt sich die obige analytische Lösung nicht direkt anwenden. Dafür wurde aber in Kapitel 3 die Theorie der Fourierreihen erweitert. Es kamen nun *Multiple Reihen*, eine für jeden Bereich der gemischten Randbedingungen zum Einsatz. In den Aussagen ist immer die Vertauschbarkeit der (unendlichen) Summation mit der Bildung des inneren Produkts vorausgesetzt. Für die vorgestellten Fälle ist dies noch mit geeigneten Methoden zu überprüfen. Das wurde im Zuge dieser Arbeit nicht durchgeführt. Dieser Ansatz stört leider in einer gewissen Weise die Orthogonalität, weshalb für die Berechnung der Koeffizienten ein großes Gleichungssystem zum Einsatz kommt, vergleiche Abschnitt 3.5 und Kapitel 4. Im nicht-gemischten Fall war jeweils ein kleines Gleichungssystem für jeden Koeffizienten zu lösen.

Damit ist die Lösung natürlich sehr viel aufwendiger zu berechnen, da das Gleichungssystem, im Fall der Näherungslösung die Matrix voll besetzt ist, vergleiche Abschnitte 4.1.2 und 4.3. Die Berechnungsdauer ist kubisch in der Anzahl der Koeffizienten, beziehungsweise geht mit der sechsten Potenz, wenn wieder als Maß für die Genauigkeit die Anzahl der Koeffizienten in einer Raumdimension angenommen wird. Auch nicht unerheblich ist der Speicherplatzbedarf der vollbesetzten Matrizen, siehe ebenfalls Abschnitt 4.3.

¹Computerleistung bezieht sich auf ein Testsystem mit *Intel*[®] *Core*TM *2 Duo* mit 2 GHz Prozessor und 2 Gigabyte Arbeitsspeicher.

Die Berechnung des Fehlers teilt sich in zwei Teile auf, siehe Abschnitt 4.2. Der erste ist, wie im nicht-gemischtem Fall aus der Näherung der Fourierentwicklung zu bestimmen und kann exakt angegeben werden. Für gemischte Randbedingungen kommt allerdings noch ein weiterer Teil hinzu, da sich die Koeffizienten der Näherungslösung durch Einschränkung des Gleichungssystems ändern. Dieser Anteil wurde im Zuge der Diplomarbeit nicht weiter betrachtet, eine Abschätzung dafür ist noch offen.

Wie beim nicht-gemischtem Randwertproblem treten auch hier bei großen Genauigkeiten wieder die Probleme der Implementierungen der Besselfunktionen in *GNU Octave* und *Matlab*[®] auf. Bevor das allerdings ein Problem wird, stößt die derzeitige Computerleistung¹ durch den hohen Rechen- und Speicheraufwand an die Grenzen. Weiters gab es bei diesen Genauigkeiten keine Probleme mit der Konditionierung der Matrix. Eine genau Analyse der Konditionszahl und damit der numerischen Stabilität bei großer Genauigkeit ist ebenfalls noch offen.

Durch Parallelisieren, also Berechnungen auf einem *Computercluster* können größere Genauigkeiten schneller (im Sinne von Rechenzeit) erzielt werden. Bei den oben genannten Genauigkeiten ist der zeitliche größte Aufwand das Assemblieren der Systemmatrix. Dieser Vorgang erfolgt für jeden Matrixeintrag getrennt, somit ist die Parallelisierung kein Problem. Weiters wird ein *Parallelsolver* für das Gleichungssystem benötigt. Mit zunehmender Genauigkeit wird das der rechenintensive Teil. Probleme beim Lösen kann es bei der Numerik geben, siehe obige Bemerkungen. Dabei ist insbesondere das Verhalten der Besselfunktionsimplementierungen zu beachten.

Für den gemischten Fall wurden Punktelektroden in Abschnitt 4.1.3 extra behandelt. Dabei wurde die Dirac-Delta-Distribution durch die endliche Partialsumme ihrer Fourierreihe angenähert und das Gleichungssystem entsprechend erweitert. Da die L^2 -Norm (Energienorm) der Dirac-Delta-Distribution unendlich ist, ist eine Berechnung des Fehlers mittels Parsevalschen Satzes nicht möglich. Die Vorgangsweise bei der analytischen Lösung hat auch anders zu erfolgen, um die genannte Unendlichkeit zu berücksichtigen.

In Kapitel 6 wurde das analytische Modell mit einem Finite-Elemente-Modell verglichen. Dabei unterschieden sich die beiden Lösungen um einige Prozent. Die größten Fehler waren im Bereich von Sprungstellen zu finden, ansonsten stimmen die beiden Lösungen sehr gut überein. Für Sprungstellen werden beim analytischen Modell sehr viele Koeffizienten benötigt, um diese korrekt anzunähern (vergleiche Fourierreihe von einer Rechteckfunktion). Ein Hauptgrund für die erhaltenen Abweichungen ist die verwendete geringe Genauigkeit des analytischen Modells durch die begrenzten Rechenkapazitäten. Bei Punktelektroden ist darauf zu achten, dass diese bei einem Vergleich mit einem Finite-Elemente-Modell sich genau in einem Knotenpunkt des Gitters (Finite-Elemente-Netz) befindet, damit der Vergleich ein sinnvolles Ergebnis liefert. Beim analytischen Modell selbst ist es egal, wo dieser platziert wird.

7 *Ergebnisse, Diskussion und Ausblick*

Anhang A

Mathematischer Anhang

In diesem Anhang werden einige mathematische Konzepte erläutert, die in dieser Diplomarbeit Verwendung finden. Gegebenenfalls wird auf das nachfolgende an den benötigten Stellen verwiesen.

Zu Beginn werden noch einige grundlegende Notationen und Symbole definiert, welche in dieser Arbeit vorkommen. Die *natürlichen Zahlen* werden mit

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (\text{A.0.1})$$

die *natürlichen Zahlen mit Null* mit

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{A.0.2})$$

und die *ganzen Zahlen* mit \mathbb{Z} bezeichnet.

Eckige Klammern kennzeichnen *Iverson-Notation*, also

$$[\textit{Bedingung}] := \begin{cases} 1 & \text{falls } \textit{Bedingung} \text{ erfüllt ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.0.3})$$

Siehe hierfür auch Seite 24 von Graham, Knuth, Patashnik [6]. Als Spezialfall ergibt sich das *Kronecker-Delta* durch

$$\delta_{mn} = [m = n], \quad (\text{A.0.4})$$

also

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.0.5})$$

Die *Indikatorfunktion* für eine Menge D wird durch

$$\mathbb{1}_D(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in D, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.0.6})$$

definiert. Mit $\delta(t)$ wird die *Dirac-Delta-Distribution* bezeichnet.

Die Menge der Funktionen von X nach K , deren p -te Potenz des Betrags integrierbar ist, wird mit $L_K^p(X)$ bezeichnet. Weiters sei

$$\ell_K^p := L_K^p(\mathbb{N}_0), \quad (\text{A.0.7})$$

also der Raum der Reihen, deren p -te Potenz des Betrags summierbar ist. Vergleiche hierfür Rudin [9], Abschnitt 4.15

Der eindimensionale Torus T sei als Einheitskreis in der komplexen Ebene definiert, vergleiche Rudin [9], Abschnitt 4.23. Es können Funktionen F auf T mit 2π -periodischen Funktionen f auf \mathbb{R}^1 vermöge

$$f(t) = F(e^{it}) \quad (\text{A.0.8})$$

identifiziert werden. Anders ausgedrückt ist T das Intervall $[0, 2\pi]$, wobei 2π mit 0 identifiziert wird.

A.1 Gradient, Divergenz und Laplace in Zylinderkoordinaten

In diesem Abschnitt wird die partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

in Zylinderkoordinaten umgerechnet. Dafür werden in der nächsten Proposition zuerst Gradient und Divergenz transformiert.

Proposition A.1.1 (Gradient und Divergenz in Zylinderkoordinaten). *Sei u eine skalare Funktion und v eine vektorwertige Funktion jeweils im \mathbb{R}^3 und in Zylinderkoordinaten, dann gilt*

$$\operatorname{grad} u(r, \theta, z) = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.1.2})$$

$$\operatorname{div} v(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.1.3})$$

Beweis. In einem allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem lautet der Gradient

$$\operatorname{grad} u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{A.1.4})$$

und die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (v_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (v_3 h_1 h_2) \right). \quad (\text{A.1.5})$$

Für Zylinderkoordinaten gilt

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = z, \quad (\text{A.1.6a})$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1, \quad (\text{A.1.6b})$$

womit sich nach Einsetzen das gewünschte Resultat ergibt. \square

Wird dies nun in (A.1.1) eingesetzt folgt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{A.1.7})$$

also die gewünschte partielle Differentialgleichung in Zylinderkoordinaten.

A.2 Innere Produkte

In diesem Kapitel gibt es eine Kurzeinführung über innere Produkte, vergleiche beispielsweise Rudin [9], Kapitel 4.

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *inneres Produkt*, falls für alle $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Wenn zusätzlich

4. $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$

gilt, so heißt das innere Produkt *positiv definit*. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *Inner-Produkt Raum*. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wird es auch *Skalarprodukt* genannt.

Durch ein positiv definites inneres Produkt wird eine Norm mittels

$$\|x\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\text{A.2.1})$$

induziert. Sei V ein positiv definit innerer Produktraum und $v, w \in V$. v und w heißen *orthogonal*, falls $\langle v, w \rangle = 0$, und v heißt *normiert*, falls $\|v\| = 1$.

Weiters gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{A.2.2})$$

und die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (\text{A.2.3})$$

A.3 Sturm-Liouville-Probleme

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Ein *Sturm-Liouville-Problem* ist ein Randwertproblem der Form

$$(r(x) y')' + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad (\text{A.3.1a})$$

mit

$$k_1 y + k_2 y' = 0 \quad \text{für } x = a \quad (\text{A.3.1b})$$

$$l_1 y + l_2 y' = 0 \quad \text{für } x = b, \quad (\text{A.3.1c})$$

wobei die Funktionen p, q, r reell und stetig auf $[a, b]$ sind.

Es gelten die folgenden Aussagen, vergleiche hierfür zum Beispiel Agnew [2], Abschnitte 12.3 bis 12.9.

1. Ist die Gewichtsfunktion $p(x)$ positiv (oder negativ), dann sind alle Eigenwerte λ_n reell. Es existieren abzählbar-unendlich viele Eigenwerte mit

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \quad (\text{A.3.2})$$

und für $n \rightarrow \infty$ gilt $\lambda_n \rightarrow \infty$.

2. Sind y_m und y_n stetig differenzierbare *Eigenfunktionen* zu verschiedenen Eigenwerten, so sind diese *orthogonal* bezüglich der Gewichtsfunktion p , genauer, bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle_p = \int_a^b p(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (\text{A.3.3})$$

also

$$\langle y_m, y_n \rangle_p = 0. \quad (\text{A.3.4})$$

Die Eigenfunktion zu einem Eigenwert ist – bis auf einen konstanten Faktor – eindeutig bestimmt. Diese kann als Linearkombination linear unabhängiger *einfacher Eigenfunktionen* bestehen (Differentialgleichung zweiter Ordnung). Der Faktor kann so gewählt werden, dass die Eigenfunktion *normiert* ist, also

$$\langle y_n, y_n \rangle_p = 1. \quad (\text{A.3.5})$$

3. Die orthonormale Menge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist vollständig, das heißt, es gibt keine Funktion z , sodass $\{z\} \cup \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine orthonormale Menge ist.

A.4 Besselfunktionen

In diesem Abschnitt werden die *Besselfunktionen* erster und zweiter Art, sowie die *modifizierten Besselfunktionen* beschrieben, vergleiche Abramowitz und Stegun [1], Abschnitt 9.1 und 9.6.

1. *Definition.* Sei die Differentialgleichung

$$z^2 W'' + z W' + (z^2 - \nu^2) W = 0 \quad (\text{A.4.1})$$

gegeben. Definiere die *Besselfunktionen erster Art* $J_{\pm\nu}$ als in Null beschränkte Lösung und die *Besselfunktion zweiter Art* Y_ν als in Null unbeschränkte Lösung $W(z)$ der Differentialgleichung (A.4.1). Die Gesamtlösung \mathcal{C}_ν ist dann gleich J_ν , Y_ν oder eine Linearkombination von beiden mit Koeffizienten unabhängig von z und ν .

Analog werden die *modifizierten Besselfunktionen* erster Art $I_{\pm\nu}$ und zweite Art K_ν also Lösungen von

$$z^2 W'' + zW' - (z^2 + \nu^2) W = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

definiert. Die Gesamtlösung \mathcal{Z}_ν ist wieder gleich I_ν , $e^{\nu\pi i} K_\nu$ oder eine Linearkombination von beiden ist mit Koeffizienten unabhängig von z und ν .

2. *Ableitungen.* Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und ν beliebig. Es gelten für die Besselfunktionen die Gleichungen

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k (z^\nu \mathcal{C}_\nu) = z^{\nu-k} \mathcal{C}_{\nu-k}, \quad (\text{A.4.3a})$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k (z^{-\nu} \mathcal{C}_\nu) = (-1)^k z^{-\nu-k} \mathcal{C}_{\nu+k} \quad (\text{A.4.3b})$$

und für die modifizierten Besselfunktionen

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k (z^\nu \mathcal{Z}_\nu) = z^{\nu-k} \mathcal{Z}_{\nu-k}, \quad (\text{A.4.4a})$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k (z^{-\nu} \mathcal{Z}_\nu) = z^{-\nu-k} \mathcal{Z}_{\nu+k}. \quad (\text{A.4.4b})$$

Wird speziell $k = 1$ gesetzt, so folgt

$$z^{-\nu-1} \mathcal{Z}_{\nu+1} = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{-\nu} \mathcal{Z}_\nu) = -\nu z^{-\nu-2} \mathcal{Z}_\nu + z^{-\nu-1} \frac{d}{dz} \mathcal{Z}_\nu \quad (\text{A.4.5a})$$

und damit

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Z}_\nu = \mathcal{Z}_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu. \quad (\text{A.4.5b})$$

Werden hier nun die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art eingesetzt, folgen die Ableitungsregeln

$$\frac{d}{dz} I_\nu = I_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} I_\nu \quad (\text{A.4.6a})$$

und

$$\frac{d}{dz} (e^{\nu\pi i} K_\nu) = e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} e^{\nu\pi i} K_\nu. \quad (\text{A.4.6b})$$

3. *Weitere Differentialgleichungen.* Die Differentialgleichung

$$z^2 W'' + (1 - 2p)zW' + (\lambda^2 q^2 z^{2q} + p^2 - \nu^2 q^2) W = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

besitzt die Lösung

$$W(z) = z^p \mathcal{C}_\nu(\lambda z^q) \quad (\text{A.4.8})$$

und die Differentialgleichung

$$z^2 W'' + (1 - 2p)zW' + (-\lambda^2 q^2 z^{2q} + p^2 - \nu^2 q^2) W = 0 \quad (\text{A.4.9})$$

die Lösung

$$W(z) = z^p \mathcal{Z}_\nu(\lambda z^q), \quad (\text{A.4.10})$$

wobei \mathcal{C}_ν und \mathcal{Z}_ν wie oben beschrieben sind.

A.5 Blockmatrix Inversion

Im Folgenden wird die Inversion einer Blockmatrix beschrieben, vergleiche auch Cor-
men [3], Abschnitt 28.4 “Inverting matrices“.

Satz A.5.1. *Sei \mathbb{K} ein Körper, $n, k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k \times n}$ und $D \in \mathbb{K}^{k \times k}$. Definiere*

$$M := D - CA^{-1}B, \quad (\text{A.5.1})$$

das Schur Komplement von A . Falls A und M invertierbar sind, gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BM^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BM^{-1} \\ -BM^{-1}CA^{-1} & M^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5.2})$$

Beweis. Durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung A.5.2. Eine Erweiterung auf *lineare Operatoren* in *Banachräumen* ist mög-
lich.

Anhang B

Berechnete Integrale, Ableitungen und Matrizen

B.1 Integrale für die Berechnung der Fourierkoeffizienten bei Rechtekelektroden

Die in Abschnitt 3.3.2 vorkommenden Integrale werden hier nun ausintegriert. Für die „ P_m -Integrale“ ergibt sich

$$\int \overline{P_m(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \begin{cases} \theta & \text{für } m = 0 \\ \frac{i}{m} e^{-im\theta} & \text{für } m \neq 0. \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

Für die „ Z_n -Integrale“ gilt

$$\int e^{\gamma z} \overline{Z_0(z)} dz = \frac{1}{\sqrt{z_0}} \cdot \begin{cases} z & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{1}{\gamma} e^{\gamma z} & \text{für } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.1.2a})$$

und für $n \neq 0$

$$\int e^{\gamma z} \overline{Z_n(z)} dz = \frac{1}{\sqrt{z_n}} e^{\frac{\gamma}{2}z} \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n}, \quad (\text{B.1.2b})$$

beziehungsweise

$$\int \overline{Z_0(z)} dz = \frac{1}{\sqrt{z_0}} \quad (\text{B.1.3a})$$

und für $n \neq 0$

$$\int \overline{Z_n(z)} dz = -\frac{1}{\sqrt{z_n}} e^{-\frac{\gamma}{2}z} \frac{4\gamma\lambda_n \cos(\lambda_n z) + (\gamma^2 - 4\lambda_n^2) \sin(\lambda_n z)}{\lambda_n (\gamma^2 + 4\lambda_n^2)}. \quad (\text{B.1.3b})$$

Die Integrationskonstante wurde jeweils zu Null gesetzt.

B.2 Integrale der Massematrix bei gemischten Randwertproblemen

In Abschnitt 3.5 werden für die Berechnung der Massematrix die Ausdrücke

$$\langle \psi_{nm}, \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \rangle_{M_i} \quad (\text{B.2.1})$$

benötigt. Dabei sind die folgenden Integrale zu lösen.

Für den P_m -Teil gilt

$$\int P_m \overline{P_{\tilde{m}}(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \theta & \text{für } m = \tilde{m} \\ \frac{1}{i(m-\tilde{m})} e^{i(m-\tilde{m})\theta} & \text{für } m \neq \tilde{m} \end{cases}. \quad (\text{B.2.2})$$

Für den Z_n -Teil gilt

$$\int e^{\gamma z} Z_0(z) \overline{Z_0(z)} dz = \frac{1}{z_0} \cdot \begin{cases} z & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{1}{\gamma} e^{\gamma z} & \text{für } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.3a})$$

und für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \int e^{\gamma z} Z_n(z) \overline{Z_0(z)} dz &= \int e^{\gamma z} Z_0(z) \overline{Z_n(z)} dz = \int e^{\gamma z} Z_0(z) Z_n(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{z_0}} \int e^{\gamma z} Z_n(z) dz = \frac{1}{\sqrt{z_0 z_n}} e^{\frac{\gamma}{2} z} \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n}, \end{aligned} \quad (\text{B.2.3b})$$

vergleiche Abschnitt B.1. Setze

$$U_n := \frac{\gamma}{2\lambda_n}. \quad (\text{B.2.4})$$

Es gilt für $n \neq 0$

$$\int e^{\gamma z} Z_n(z) \overline{Z_n(z)} dz = \frac{1}{z_n} \left((U_n^2 + 1) \frac{z}{2} - \frac{U_n}{2\lambda_n} \cos(2\lambda_n z) - \frac{U_n^2 - 1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n z) \right). \quad (\text{B.2.5})$$

Setze weiters

$$V_n(z) := \cos(\lambda_n z) + U_n \sin(\lambda_n z) \quad (\text{B.2.6a})$$

und

$$W_n(z) := U_n \cos(\lambda_n z) - \sin(\lambda_n z). \quad (\text{B.2.6b})$$

Damit gilt für $n \neq 0$, $\tilde{n} \neq 0$ und $n \neq \tilde{n}$

$$\int e^{\gamma z} Z_n(z) \overline{Z_{\tilde{n}}(z)} dz = \frac{1}{\sqrt{z_n z_{\tilde{n}}}} \frac{\lambda_{\tilde{n}} V_n(z) W_{\tilde{n}}(z) - \lambda_n V_{\tilde{n}}(z) W_n(z)}{\lambda_n^2 - \lambda_{\tilde{n}}^2} \quad (\text{B.2.7})$$

B.3 Ableitungen der Lösungen in radialer Richtung

und speziell für $\gamma = 0$

$$\int Z_n(z) \overline{Z_n(z)} dz = \frac{1}{z_n} \left(\frac{z}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n z)}{4\lambda_n} \right) \quad (\text{B.2.8a})$$

und

$$\int Z_n(z) \overline{Z_{\tilde{n}}(z)} dz = \frac{1}{\sqrt{z_n z_{\tilde{n}}}} \left(\frac{\sin((\lambda_n - \lambda_{\tilde{n}}) z)}{2(\lambda_n - \lambda_{\tilde{n}})} + \frac{\sin((\lambda_n + \lambda_{\tilde{n}}) z)}{2(\lambda_n + \lambda_{\tilde{n}})} \right). \quad (\text{B.2.8b})$$

Die Integrationskonstante wurde dabei jeweils mit Null angenommen beziehungsweise nicht hingeschrieben.

B.3 Ableitungen der Lösungen in radialer Richtung

Für die Leitfähigkeitsverteilung

$$\hat{\sigma}(r) = \sigma_1 r^\mu \quad (\text{B.3.1})$$

gilt laut Abschnitt 3.2.4 für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$S_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r) \quad (\text{B.3.2a})$$

und

$$T_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} e^{\nu\pi i} K_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r). \quad (\text{B.3.2b})$$

Hier werden nun die Ableitungen nach r , welche auf dem Zylindermantel den Ableitungen in Normalenrichtung entsprechen, berechnet. Dafür werden die Ableitungsregeln aus Anhang A.4 verwendet.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} S_{nm}(r) &= -\frac{\mu}{2r} r^{-\frac{\mu}{2}} I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r) + r^{-\frac{\mu}{2}} \frac{d}{dr} I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r) \\ &= r^{-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{1}{r} \left(\nu - \frac{\mu}{2} \right) I_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r) + \sqrt{\Gamma_n} I_{\nu+1}(\sqrt{\Gamma_n} r) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3.3a})$$

und analog

$$\frac{d}{dr} T_{nm}(r) = r^{-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{1}{r} \left(\nu - \frac{\mu}{2} \right) e^{\nu\pi i} K_\nu(\sqrt{\Gamma_n} r) + \sqrt{\Gamma_n} e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1}(\sqrt{\Gamma_n} r) \right). \quad (\text{B.3.3b})$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{nm}^{[1]} & & & & & \\ & \mathcal{M}_{nm}^{[2]} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathcal{M}_{nm}^{[L-1]} & & \\ & & & & \mathcal{M}_{nm}^{[L]} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{nm}^{[1]} \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[L-1]} \\ \mathcal{Y}_{nm}^{[L]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{nm} \end{pmatrix}$$

Abbildung B.1: Gleichungssysteme für den mehrschichtigen Zylinder und nicht-gemischten Randbedingungen

B.4 Matrizen für den Fall von nicht-gemischten Randbedingungen

Die Matrizen werden aus den folgenden Blöcken laut Abbildung B.1 zusammengesetzt. Für den Block der innersten Grenzschicht $\ell = 1$ gilt

$$\mathcal{M}_{nm}^{[1]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -S_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -T_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \\ \hat{\sigma}^{[1]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4.1})$$

für den der mittleren Grenzschichten $\ell \in \{2, \dots, L-1\}$

$$\mathcal{M}_{nm}^{[\ell]} = \begin{pmatrix} S_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & T_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & -S_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -T_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \\ \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & \hat{\sigma}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell]}(R^{[\ell]}) & -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \zeta_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) & -\hat{\sigma}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \tau_{nm}^{[\ell+1]}(R^{[\ell]}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.2})$$

und für den des Zylindermantels $\ell = L$

$$\mathcal{M}_{nm}^{[L]} = \left(\alpha S_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) + \beta \hat{\sigma}^{[L]}(R^{[L]}) \zeta_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) \quad \alpha T_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) + \beta \hat{\sigma}^{[L]}(R^{[L]}) \tau_{nm}^{[L]}(R^{[L]}) \right). \quad (\text{B.4.3})$$

Für den Fälle zwei- und dreischichtiger Zylinder sind im Folgenden die Matrizen explizit angegeben. Für $L = 2$ lautet diese

$$\begin{pmatrix} S_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -S_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -T_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \\ \hat{\sigma}^{[1]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) \\ 0 & \alpha S_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) + \beta \hat{\sigma}^{[2]}(R^{[2]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) & \alpha T_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) + \beta \hat{\sigma}^{[2]}(R^{[2]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4.4})$$

und für $L = 3$

$$\begin{pmatrix} S_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -S_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -T_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & 0 & 0 \\ \hat{\sigma}^{[1]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[1]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & -\hat{\sigma}^{[2]}(R^{[1]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[1]}) & 0 & 0 \\ 0 & S_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) & T_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) & -S_{nm}^{[3]}(R^{[2]}) & -T_{nm}^{[3]}(R^{[2]}) \\ 0 & \hat{\sigma}^{[2]}(R^{[2]}) \zeta_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) & \hat{\sigma}^{[2]}(R^{[2]}) \tau_{nm}^{[2]}(R^{[2]}) & -\hat{\sigma}^{[3]}(R^{[2]}) \zeta_{nm}^{[3]}(R^{[2]}) & -\hat{\sigma}^{[3]}(R^{[2]}) \tau_{nm}^{[3]}(R^{[2]}) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha S_{nm}^{[3]}(R^{[3]}) + \beta \hat{\sigma}^{[3]}(R^{[3]}) \zeta_{nm}^{[3]}(R^{[3]}) & \alpha T_{nm}^{[3]}(R^{[3]}) + \beta \hat{\sigma}^{[3]}(R^{[3]}) \tau_{nm}^{[3]}(R^{[3]}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4.5})$$

Anhang C

Simulationsdaten und Ergebnisse beim Vergleich

Hier in diesem Abschnitt sind die Eingangsdaten der Simulationen von Kapitel 6 und die Ergebnisse dieser im Detail aufgelistet, siehe Tabelle C.1.

Die Rechenzeiten beziehen sich auf ein Testsystem mit *Intel*[®] *Core*[™] 2 *Duo* mit 2 GHz Prozessor und 2 Gigabyte Arbeitsspeicher.

C Simulationsdaten und Ergebnisse beim Vergleich

	Modell A	Modell B	Modell C
zugehörige Abbildung	Abbildung 6.1	Abbildung 6.2	Abbildung 6.3
Geometrie	Zylinder	Zylinder	Zylinder
Höhe H	90	90	90
Radius R	90	90	90
Anzahl der Layer	1	3	3
Radien	R	$[0.65, \frac{\pi}{4}, 1] \cdot R$	$[0.65, \frac{\pi}{4}, 1] \cdot R$
Leitfähigkeiten	$\frac{2}{5}(3 + 4i)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}(3 + 4i) \\ 0.1 \\ \frac{1}{10}(4 + 3i) \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}(3 + 4i) \\ 0.1 \\ \frac{1}{10}(4 + 3i) \end{bmatrix}^T$
Elektrode 1, Typ	Rechteck	Rechteck	Rechteck
Elektrode 1, Mittelpunkt, θ	0	0	0
Elektrode 1, Mittelpunkt, z	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$
Elektrode 1, Breite	$\frac{2}{3}R$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{1}{2}R$
Elektrode 1, Höhe	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$
Elektrode 1, Potential	+1	+1	+1
Elektrode 2, Typ	Rechteck	Rechteck	Rechteck
Elektrode 2, Mittelpunkt, θ	π	$\frac{\pi}{2}$	π
Elektrode 2, Mittelpunkt, z	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$
Elektrode 2, Breite	$\frac{2}{3}R$	$\frac{1}{2}R$	πR
Elektrode 2, Höhe	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}H$	H
Elektrode 2, Potential	-1	-1	-1
Genauigkeit in z -Richtung, N	71	35	35
Genauigkeit in θ -Richtung, M	71	35	35
Genauigkeit NM	5041	1225	1225
Matrixgröße	5041×5041	6125×6125	6125×6125
$E_{electrode}$	11.619	6.708	17.47
$E_{fourier}$	11.517	6.402	17.32
Fehler	0.88%	4.57%	0.85%
inverse Konditionszahl r_{cond}	$7 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
Anzahl Finite-Elemente	103336	103336	103336
Benötigte Zeit, assemblieren	1502 s	116 s	141 s
Benötigte Zeit, solve	37 s	61 s	63 s
Benötigte Zeit, FE-Simulation	36 s	38 s	38 s
Benötigte Zeit, vergleichen	1319 s	718 s	667 s
Differenz (rms)	0.0404	0.0453	0.0776

Tabelle C.1: Simulationsdaten und Ergebnisse beim Vergleich von analytischem Modell mit Finite-Elemente-Modell

Symbolverzeichnis

\bar{f} komplexe Konjugation von f

$\mathbb{1}_X(x)$ Indikatorfunktion, siehe Anhang A

$\langle f, g \rangle$ Inneres Produkt von f und g , siehe Anhang A.2

[Bedingung] Iverson-Notation, siehe A

A_{nm} Koeffizienten der Lösung

$A_{nm}^{[\ell]}$ Koeffizienten der Lösung in Schicht ℓ

\mathbf{A}_{nm}^ℓ Teil des Gleichungssystems (Systemmatrix) für ℓ Schichten bei Pidcock [7]

\mathcal{A}_{nm} Teil des Gleichungssystems (Systemmatrix)

α Koeffizient (Konstante) bei den Randbedingungen

B_{nm} Koeffizienten der Lösung

$B_{nm}^{[\ell]}$ Koeffizienten der Lösung in Schicht ℓ

\mathbf{B}_{nm}^ℓ Teil des Gleichungssystems (rechte Seite) für ℓ Schichten bei Pidcock [7]

β Koeffizient (Konstante) bei den Randbedingungen

\mathbb{C} komplexe Zahlen

C_{nm} Koeffizienten der Lösung

C_{nm}^ℓ Koeffizienten der Lösung in Schicht ℓ bei Pidcock [7]

δ Dirac-Delta-Distribution

f Funktion am Zylindermantel (Randbedingung)

f_{nm} Fourierkoeffizienten von f

\mathcal{F}_{nm} Teil des Gleichungssystems (rechte Seite)

γ Koeffizient der Materialabhängigkeit in z -Richtung

Symbolverzeichnis

Γ_n Separationskonstante

H Höhe des Zylinders

i eine Lösung von $X^2 + 1 = 0$

I_ν modifizierte Besselfunktionen erster Art

K_ν modifizierte Besselfunktionen zweiter Art

$L_{\mathbb{C}}^p(X)$ Funktionen deren p -te Potenz integrierbar ist

M Zylindermantel

\mathcal{M} Menge der verwendeten Koeffizienten der Näherungslösung

$\text{meas } X$ Maß von X (zum Beispiel Fläche oder Volumen)

\vec{n} Normalvektor

\mathcal{N} Menge der verwendeten Koeffizienten der Näherungslösung

\mathbb{N} natürliche Zahlen

\mathbb{N}_0 natürliche Zahlen mit Null

$P(\theta)$ Gesamtlösung in θ -Richtung

$P_m(\theta)$ Teillösung in θ -Richtung

Φ Potential

$\Phi^{[\ell]}$ Potential in Schicht ℓ bei einem mehrschichtigen Zylinder

Ψ_m Separationskonstante

ψ_{nm} Lösungen

r Koordinate in radialer Richtung

R Radius des Zylinders

$R(r)$ Lösung in r -Richtung

$R^{[\ell]}$ Radius der einzelnen Schichten des mehrschichtigen Zylinders

R_ℓ Radius der einzelnen Schichten des mehrschichtigen Zylinders bei Pidcock [7]

\mathbb{R} reelle Zahlen

S_{nm} Funktionen (Lösung) in r -Richtung

σ Materialparameter (Leitfähigkeit)

$\hat{\sigma}$ Materialparameter (Leitfähigkeit) in r -Richtung

T_{nm} Funktionen (Lösung) in r -Richtung

τ_{nm} Ableitungen der Funktionen in r -Richtung

θ Koordinate (Winkel)

W_n Lösung in z -Richtung bei Pidcock [7]

\mathcal{X}_{nm} Teil des Gleichungssystems (Lösungsvektor)

\mathbf{X}_{nm}^ℓ Teil des Gleichungssystems (Lösungsvektor) für ℓ Schichten bei Pidcock [7]

z Koordinate in Richtung Höhe

\mathbb{Z} ganze Zahlen

$Z(z)$ Gesamtlösung in z -Richtung

$Z_n(z)$ Teillösung in z -Richtung

z_n Normierungsfaktoren

ζ_{nm} Ableitungen der Funktionen in r -Richtung

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. Dover New York, 1964.
- [2] AGNEW, R. P. *Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1942.
- [3] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., AND STEIN, C. *Introduction to Algorithms (2nd ed.)*. MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- [4] DUFFY, D. G. *Mixed boundary value problems*. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [5] FABRIKANT, V. I. *Mixed boundary value problems of potential theory and their applications in engineering*. Kluwer, 1991.
- [6] GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., AND PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics*, second edition ed. Addison-Wesley, 2005.
- [7] PIDCOCK, M. K., KUZUOGLU, M., AND LEBLEBICIOGLU, M. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. three-dimensional problems. *Physiol. Meas.* 16 (1995), 91–110.
- [8] PIDCOCK, M. K., KUZUOGLU, M., AND LEBLEBICIOGLU, M. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. two-dimensional problems. *Physiol. Meas.* 16 (1995), 77–90.
- [9] RUDIN, W. *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg Verlag München Wien, 1999.
- [10] SNEDDON, I. N. *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1966.
- [11] STEINBACH, O. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. B.G. Teubner Verlag, 2003.