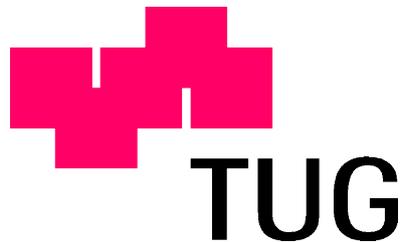


Diplomarbeit

Magnetische Induktionstomographie mit Hybrid-Sensoren

Georg Schober



Institut für Medizintechnik

Technische Universität Graz

Krenngasse 37, 8010 Graz, Austria

Betreuer: Dr. techn. Doga Gürsoy

Begutachter: A.o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hermann Scharfetter

Graz, Februar 2011

Abstract

Zusammenfassung: Bei der Magnetischen Induktionstomographie (MIT) handelt es sich um ein nicht invasives und kontaktloses Bildrekonstruktionsverfahren. Dieses stellt ein schwach auflösendes Bildverfahren für die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung in einem Objekt und im Speziellen im menschlichen Körper dar. Bei diesem Verfahren wird über ein äußeres von Spulen erzeugtes magnetisches Wechselfeld ein Wirbelstrom im zu betrachtenden Körper induziert, der wiederum ein magnetisches Feld in diesem hervorruft. Die in Summe daraus entstehende Änderung der magnetischen Flussdichte, welche mittels Messspulen detektiert wird, ist ein Maß für die elektrische Leitfähigkeitsverteilung im Körper. Ziel dieser Arbeit war es, das Messsystem der MIT durch Oberflächenelektroden zu erweitern und eine Bildrekonstruktion einer sphärischen Leitfähigkeitsänderung in einem zylindrischen Phantom durchzuführen. Dazu wurde für die Lösung des schlecht gestellten inversen Problems die regularisierte Einzelschrittmethod des Gauß-Newton Verfahrens verwendet und die radiale Auflösung berechnet.

Die Ergebnisse der Arbeit zeigen, dass sich die Bildqualität und die radiale Auflösung durch die Verwendung der zusätzlichen Messelektroden verbessern. Hierbei ist jedoch die Auswahl einer geeigneten Regularisierungsmethode für die Verbesserung des Ergebnisses maßgebend.

Schlüsselwörter: *Magnetische Induktionstomographie, Auflösung, Inverse Probleme, Regularisierung*

Abstract: The magnetic induction tomography (MIT) is a non-invasive and contactless imaging modality. It is a low-resolution imaging modality for reconstructing the changes of the conductivity distribution of an object or a human body. MIT applies a magnetic field to induce eddy currents in the human body and the magnetic field from these is then detected by an array of sensor coils. This measurement is used to reconstruct the conductivity distribution in the human body.

In this work, the measurement system of MIT was adjusted by an array of surface electrodes. This modified method was tested by the image reconstruction of a spherical perturbation within a cylindrical phantom and in addition to that the radial resolution was computed. Thereby the regularized single-step Gauss-Newton approach was used for the solution of the ill-posed inverse problem.

Using additional measurement electrodes, it was proven that the image quality and the radial resolution increase for the MIT. Thereby the results depend strongly on the regularization method.

Keywords: *Magnetic induction tomography, Resolution, Inverse Problems, Regularization*

Danksagung

Diese Diplomarbeit entstand im Auftrag des Instituts für Medizintechnik. Ich möchte mich auf dieser Seite bei allen Personen, die mich bei dieser Arbeit tatkräftig unterstützt haben, herzlichst bedanken.

Mein aufrichtigster Dank gilt meinen Betreuer Dr. Doga Gürsoy, ohne dessen Hilfe diese Arbeit niemals zustanden gekommen wäre. Weiters gilt mein Dank dem Initiator dieser Diplomarbeit, Univ.-Prof. Dipl. Ing, Dr. techn. Hermann Scharfetter, der mich während meines Studiums positiv geprägt hat und immer mit guten Rat zur Seite stand.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Schwester Birgit, die mich während meines Studiums immer tatkräftig unterstützt haben.

Weiters möchte ich mich bei meinen Freunden Hans, Lukas, Simon, Thomas, Flo, Andi, Martin und Stefan. Ohne eure jahrelange Unterstützung wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	6
2.1	Maxwellsche Gleichungen	6
2.1.1	Differentialgleichung für elektrostatische Felder	8
2.2	Methode der Finiten Elemente	9
2.2.1	Strategie eines gewichteten Residuums	11
2.2.2	Lokales Galerkin-Verfahren	14
2.2.3	FEM - Gleichungssystem	16
3	Methoden	19
3.1	Vorwärtsproblem der MIT	19
3.1.1	Problemdefinition	20
3.1.2	Feldberechnungen	20
3.1.3	\mathbf{A} - ϕ Formulierung	23
3.1.4	Quasistatische \mathbf{A} - ϕ Formulierung	24
3.1.5	Berechnung der Spannungen an den Receiverspulen	25
3.1.6	Numerische Berechnung der \mathbf{A} - ϕ Formulierung	26
3.2	Inverses Problem der MIT	28
3.2.1	LSQ - Verfahren	30
3.2.2	Regularisiertes Gauß-Newton Verfahren	31
3.2.3	Diskrepanzprinzip nach Morozov	35
3.3	Vorwärtsproblem der ICEIT	36
3.3.1	Problemdefinition	36
3.3.2	Berechnung der Spannung an den Elektroden	37
3.4	Inverses Problem der ICEIT	39
3.5	Vorwärtsproblem der Hybridmethode	41
3.5.1	Problemdefinition	41
3.6	Inverses Problem der Hybridmethode	42
3.7	Punktspreizfunktion	43
3.8	Signal-Rausch-Verhältnis	44
3.9	Modell Setup	45
3.10	Simulation und Evaluierung	49

3.11 Programmstruktur	50
3.11.1 Funktion zur FEM - Netzgenerierung	50
3.11.2 Funktionen zur Lösung der Vorwärtsprobleme	50
3.11.3 Funktionen der Rekonstruktion und Evaluierung	52
4 Ergebnisse	53
4.1 Spannungsdaten an den Messsensoren	53
4.2 Bildrekonstruktionen	58
4.2.1 Rekonstruktion mittels der Einheitsmatrix	58
4.2.2 Rekonstruktion mittels der Kovarianzmatrix	62
4.3 Auflösung	65
5 Diskussion	69
Literaturverzeichnis	73
A Berechnung der Spannungen an Punktelektroden	75
B Elektrisches Feld eines Elektrodenmodells	77

Abbildungsverzeichnis

1.1	MIT mit 8 Transmitterspulen und 16 Receiverspulen	3
1.2	ICEIT mit 8 Transmitterspulen und 16 Rechteckelektroden	4
1.3	Hybridsystem aus MIT und ICEIT mit 8 Transmitterspulen, 16 Rechteckelektroden und 16 Receiverspulen	5
2.1	Beispiel für ein gemischtes Randwertproblem mit Dirichletsche und Neumannsche Randbedingung	9
2.2	Oberflächenetz eines Zylinders: 13321 Tetraederelemente der Ordnung 1 mit 3088 Knoten	10
2.3	Lineare Formfunktion für den Knoten 1 und k	12
2.4	Lösungsverlauf für das Potential $\phi(x)$ sowie dessen erste und zweite Ableitung nach [2]	12
2.5	Schematische Schritte der FEM	16
3.1	Schematische Darstellung eines mathematischen Modells	19
3.2	Schematische Darstellung eines MIT - Systems	21
3.3	Morozov-Kriterium: Ermittlung des optimalen Regularisierungsparamters λ	36
3.4	Schematische Darstellung eines ICEIT-Systems	37
3.5	Schematische Darstellung einer Kombination aus MIT und ICEIT (Hybridmethode)	41
3.6	Punktspreizfunktion zweier abzubildender Punkte	44
3.7	Position der Transmitterspulen an einem zylindrischen Phantom. Die Draufsicht und Seitenansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.	46
3.8	Position der Receiverspulen an einem zylindrischen Phantom. Die Draufsicht und Seitenansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.	47
3.9	Position der Rechteckelektroden an einem zylindrischen Phantom. Die Seitenansicht und 3D-Ansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.	48

4.1	Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Receiverspulen der MIT. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt. .	54
4.2	Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Elektroden der ICEIT. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt. . . .	55
4.3	Darstellung der 32 Messdaten bei einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung und einer Stimulierung über die Transmitterspule T1. Oberes Bild: Die Elektrodenspannungen aus ICEIT. Unteres Bild: Die Receiverspannungen aus MIT.	56
4.4	Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Rechteckelektroden (1-512) und den Receiverspulen (513-524) der Hybridmethode. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt.	57
4.5	Transversalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT,ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}	60
4.6	Sagittalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT,ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}	61
4.7	Transversalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT,ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten.	63
4.8	Sagittalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT,ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten.	64
4.9	MIT: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	66
4.10	ICEIT: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	66
4.11	Hybrid: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	67
4.12	Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 20dB; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	67
4.13	Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 40dB; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	68
4.14	Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 80dB; Linkes Bild: $z=0mm$, Rechtes Bild: $z=40mm$	68
A.1	Schematische Spannungsmessung mit 4 Punktelektroden	76

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl der Messsensoren für das jeweilige Rekonstruktionsverfahren	46
3.2	Matlab-Funktion für die Netzgenerierung.	51
3.3	Matlab-Funktion für die Berechnung der Vorwärtsprobleme und der Sensitivitätsmatrizen.	51
3.4	Matlab-Funktion für die Berechnung der Inversen Probleme	52
4.1	Regularisierungsparameter λ für die MIT,ICEIT und Hybridmethode . . .	58

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Magnetischen Induktionstomographie (MIT) handelt es sich um eine nicht invasive und kontaktlose Bildrekonstruktion. Ziel der MIT ist die Rekonstruktion der elektrischen Leitfähigkeitsverteilung $\kappa = \sigma + j\omega\epsilon$ im Körper. Tatsächlich wird nur eine Änderung der Leitfähigkeitsverteilung $\Delta\kappa$ berechnet bzw. rekonstruiert. Die medizintechnische Motivation für die Messung der Leitfähigkeitsverteilung ist darin begründet, dass diese Aufschluss über den patho-physiologischen Zustand des zu untersuchenden Gewebes geben kann. Anwendungen finden sich zum Beispiel in der Rekonstruktion des Lungenzustandes und im Monitoring von Organen.

Grundsätzlich besteht das System aus einer bestimmten Anzahl von Transmitter- und Receiverspulen, um eine dreidimensionale Rekonstruktion gewährleisten zu können. Die Transmitterspulen induzieren abwechselnd ein sich zeitlich änderndes Primärmagnetfeld im Körper. Die daraus resultierende elektrische Wirbelfeldstärke, erzeugt eine im Gewebe verteilte Stromdichte \mathbf{J} . Der Wirbelstrom welcher die Verteilung der Stromdichte im Gewebe zusammenfasst erzeugt ein Sekundärmagnetfeld welches auf das primäre Magnetfeld rückwirkt. Die daraus entstehende Änderung der magnetischen Flussdichte wird als induzierte Spannung mit den Receiverspulen detektiert und erfasst. Diese Spannungsänderungen enthalten somit die Information der Leitfähigkeitsverteilung und sind für die Rekonstruktion bzw. für die Lösung des inversen Problems bestimmend. Ein schematischer Aufbau eines

MIT mit kreisförmigen Transmitter- und Reciverspulen und einem zylindrischen Phantom mit sphärischer Störung ist in Abb.1.1 dargestellt.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Spannungsdaten und der Leitfähigkeit κ in folgender Form:

$$\mathbf{v} = \Psi(\kappa). \quad (1.1)$$

Dabei handelt es sich um das sogenannte Vorwärtsproblem, wobei Ψ eine nichtlineare Funktion ist, auf die noch in späteren Kapiteln im Detail eingegangen wird. Die Anzahl der möglichen Spannungsdaten \mathbf{v} ergibt sich somit aus der Anzahl der Transmitterspulen mal der Anzahl der Receiverspulen. Für die Rekonstruktion der Leitfähigkeitverteilung für ein bestimmtes Gebiet Ω benötigt man nun die Lösung des komplexen inversen Problems:

$$\kappa = \Psi^{-1}(\mathbf{v}). \quad (1.2)$$

Bei diesem inversen Problem handelt es sich um ein *unterbestimmtes, schlecht gestelltes Problem*. Dies bedeutet, es stehen wenig unabhängige Messdaten den zu bestimmenden Parametern(Leitfähigkeiten) gegenüber. Deshalb ist die Anwendung von Regularisierungsmethoden für das inverse Problem meist unumgänglich.

Eine der großen technischen Herausforderungen der MIT ist die Messung des Nutzsignals, da das Primärmagnetfeld wesentlich größer ist als das Sekundärmagnetfeld. Deshalb ist man bemüht eine optimale Spulenanordnung zu erreichen, die eine Störung durch das Hauptmagnetfeld möglichst herabsetzt. Im Vergleich zur Elektroimpedanztomographie (EIT) hat die MIT den großen Vorteil, dass sie ein kontaktloses Messverfahren ist. Im Gegensatz dazu werden bei der EIT die Messdaten bzw. Spannungen über Elektroden ermittelt. Die Probleme bei dieser Messung ergeben sich durch die Einflüsse der Elektrodenimpedanz, der Elektroden-Hautimpedanz sowie der Fixierung der Elektroden.

Eine weitere Möglichkeit der Bildrekonstruktion ist die *induced-current electrical impedance tomography*(ICEIT), die eine Kombination aus EIT und MIT darstellt. Dieses System arbeitet mit Transmitterspulen und Messelektroden. Dabei wird wie bei der MIT ein sich

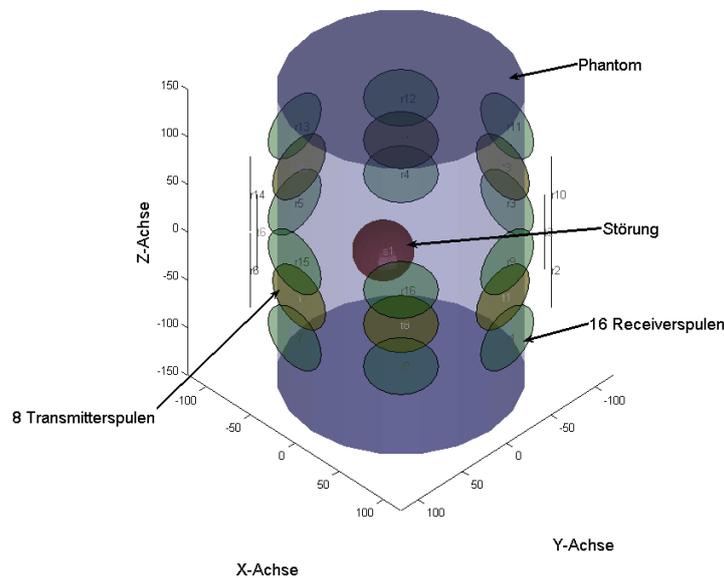


Abb. 1.1: MIT mit 8 Transmitterspulen und 16 Receiverspulen

zeitlich änderndes Magnetfeld über die Transmitterpulen im Körper induziert, welches wiederum Wirbelströme des Gewebes zur Folge hat. Die Messung erfolgt durch Elektroden, mit welchen die Potentialdifferenz an der Oberfläche des Körpers gemessen wird. Eine schematische Darstellung der ICEIT mit 8 kreisförmigen Transmitterspulen und 16 rechteckigen Messelektroden ist in Abb.1.2 dargestellt.

In der Medizintechnik ist jedoch das gesicherte Anbringen von Elektroden am Patienten mit Problemen behaftet. Insbesondere bei schmerzempfindlichen Patienten ist eine reproduzierbare Applikation oft schwer möglich. Zudem sind Messungen von Gewebeteilen die durch schlecht leitende Knochenteile abgeschirmt werden, unter Verwendung von Kontaktelektroden, welche auf die Haut appliziert werden, nur eingeschränkt möglich. Wie schon beschrieben, werden bei der ICEIT Wirbelströme direkt in den Körper induziert, wodurch die Stimulation nicht mehr über Elektroden erfolgen muss. Dadurch ergeben sich vor allem gegenüber der EIT Vorteile, da zum Beispiel der Abschirmeinfluss von Knochenteilen reduziert werden kann, was sich bei der Rekonstruktion des menschlichen Gehirns positiv auswirkt.

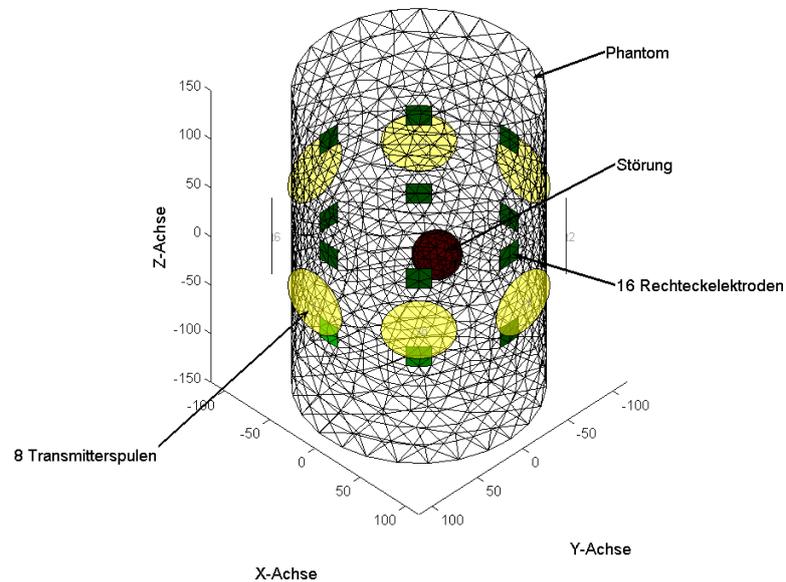


Abb. 1.2: ICEIT mit 8 Transmitterspulen und 16 Rechteckelektroden

Jedoch beeinflussen die unbeabsichtigten Bewegungen von Messelektroden bei beiden Methoden das Rekonstruktionsergebnis. Am menschlichen Körper sind Bewegungen, zum Beispiel bedingt durch die Atmung, nicht vollständig zu vermeiden.

In dieser Diplomarbeit wurde die Kombination aus der MIT und ICEIT untersucht. Ausgehend von der MIT wurde das Verbesserungspotential in der Bildrekonstruktion durch Einsatz von Hybridsensoren beurteilt. Diese stellen eine Kombination aus Receiverspulen und Messelektroden da. Es wurde somit eine MIT mit zwei Messsystemen durchgeführt, um eine höhere Anzahl von unabhängigen Messdaten für das *unterbestimmte, schlecht gestellte inverse Problem* zu erhalten (siehe Abb.1.3). Diese Art der Tomographie wird in dieser Arbeit als Hybridmethode (Hybrid) bezeichnet. Die Analysen dazu wurden auf der Basis der Finiten Elemente Methode (FEM) an einem zylindrischen leitfähigen Phantom mit sphärischer Störung angestellt. Im Speziellen wurde das Hauptaugenmerk auf die Auflösung, Punktspreizfunktionen (PSF) und die Detektierbarkeit der Störung gelegt.

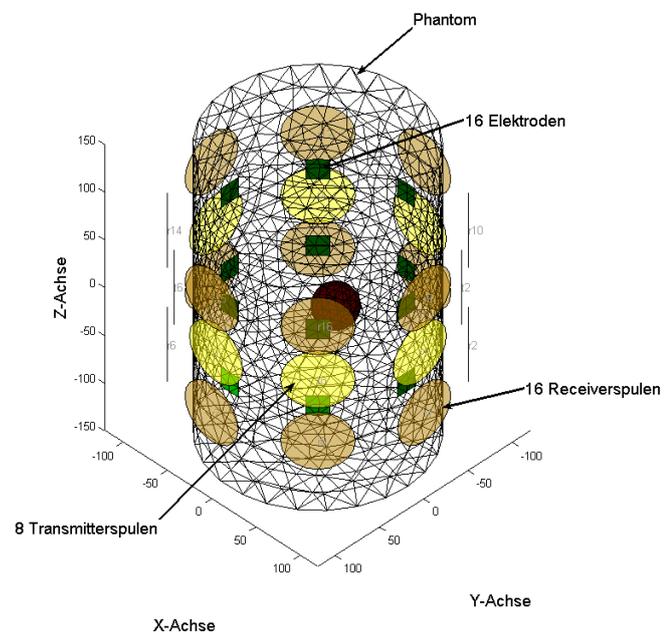


Abb. 1.3: Hybridsystem aus MIT und ICEIT mit 8 Transmitterspulen, 16 Rechteckelektroden und 16 Receiverspulen

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel gibt eine grobe Zusammenfassung feldtheoretischer Beziehungen und weiters einen Einblick in die Finite Elemente Methode (FEM). Die folgenden Ausführungen orientieren sich weitgehend an den Büchern “Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder“ von Prof. Dr.-Ing Arnulf Kost[2] und “Finite elements for electrical engineers“ von Peter P.Silvester und Ronald L.Ferrari[3]. Für Analysen bzw. Berechnungen in der Magnetinduktionstomographie (MIT), Elektroimpedanztomographie (EIT) und Elektroimpedanztomographie mit induzierten Strömen (ICEIT) sind die Basis aller Überlegungen die Maxwellschen Gleichungen.

2.1 Maxwellsche Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen lauten für harmonische Erregung:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.4)$$

Die Gleichung (2.1) wird auch als das Ampèresche Gesetz bezeichnet, d.h. die Stromdichte \mathbf{J} und die zeitlichen Änderung der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} führen zu einem magnetischen Wirbelfeld. Das Faradaysche Induktionsgesetz (2.2) gibt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld \mathbf{E} und der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} an. Weiters wird in Gleichung (2.3) die Quellenfreiheit des Magnetfeldes beschrieben und im Gaußschen Gesetz (2.4) wird die Ladung als Quelle des elektrischen Feldes formuliert, mit ρ als Raumladungsdichte.

Die Feldgrößen sind dabei über die Materialeigenschaften verknüpft und lauten:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.7)$$

mit der komplexen Admittanz

$$\kappa = \sigma + j\omega\epsilon. \quad (2.8)$$

Die Gleichung (2.7) ist auch als Ohmsches Gesetz bekannt. Die Materialparameter mit der Permeabilität μ , der Permittivität ϵ , die reele Leitfähigkeit σ und der komplexen Admittanz κ werden als konstant angenommen und in den Gleichungen (2.5) bis (2.7) als Skalar geschrieben, da in den nachstehenden Betrachtungen ausschließlich von linearen, nicht

magnetischen, leitenden und isotropen Medien ausgegangen wird.

2.1.1 Differentialgleichung für elektrostatische Felder

Im Fall der Elektrostatik wird die zeitliche Änderung des Magnetfeldes vernachlässigt. Dadurch wird der Ausdruck

$$-j\omega\mathbf{B} = 0 \quad (2.9)$$

und die Gleichung (2.2) reduziert sich auf

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.10)$$

Durch die Tatsache, dass das elektrische Feld konservativ ist, kann dieses als Gradientenfeld des elektrischen Skalapotentials ϕ geschrieben werden:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (2.11)$$

Somit kann aus der Kombination der Gleichungen (2.4),(2.6) und (2.11) folgende Differentialgleichung zur Beschreibung des elektrostatischen Feldes gewonnen werden:

$$\nabla \cdot (\epsilon\nabla\phi) = -\rho. \quad (2.12)$$

Dabei handelt es sich um die sogenannte Poisson Gleichung, die nur eine eindeutige Lösung besitzt, wenn einer der folgende Randbedingungen gilt:

- **Neumann - Bedingung**

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (2.13)$$

wird auf einer geschlossenen Fläche Γ vorgegeben, bzw.

- **Dirichlet - Bedingung**

das Potential ϕ wird auf einer geschlossenen Fläche Γ vorgegeben.

Die Variable \mathbf{n} bezeichnet die Normalkomponente zur Fläche F . Es können auch beide Randbedingungen gleichzeitig auftreten, wobei man dann von einem sogenannten gemischten Randwertproblem spricht. Ein solches Randwertproblem ist schematisch in Abb.2.1 illustriert. Dabei setzt sich die Oberfläche des Volumens Ω aus $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ zusammen. Jede dieser beiden Oberflächen muss eine der beiden genannten Randbedingungen erfüllen, um eine eindeutige Lösung der Poissonsche Differentialgleichung berechnen zu können.

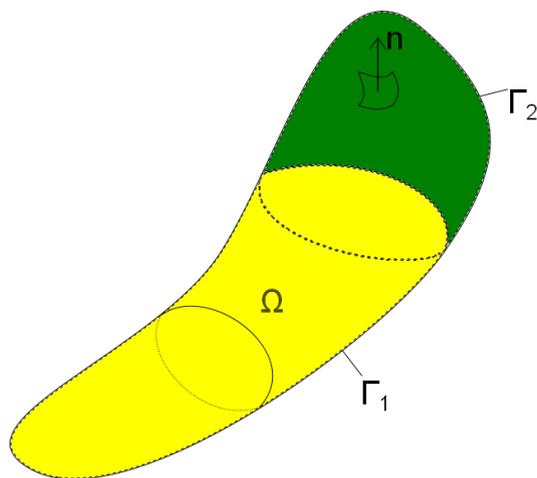


Abb. 2.1: Beispiel für ein gemischtes Randwertproblem mit Dirichletsche und Neumannsche Randbedingung

2.2 Methode der Finiten Elemente

Die Finite Elemente Methode ist grundsätzlich ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, wie zum Beispiel die Lösung der Poission Gleichung. Dabei wird das zu berechnende Gebiet bzw. Grundgebiet in eine beliebig große Anzahl von Elementen unterteilt. Diese Elemente sind endlich klein ("finite") und ergeben somit eine Diskretisierung des Grundgebietes (siehe dazu Abbildung 2.2). Je nach Anwendungsfall kommen

unterschiedliche Diskretisierungselemente wie z.B. Linien, Dreiecke, Vielecke und Tetraeder zum Einsatz. Diese Aufteilung des Grundgebietes in eine bestimmte Anzahl von endlichen Elementen gab dem Verfahren den Namen "Finite Elemente Methode".

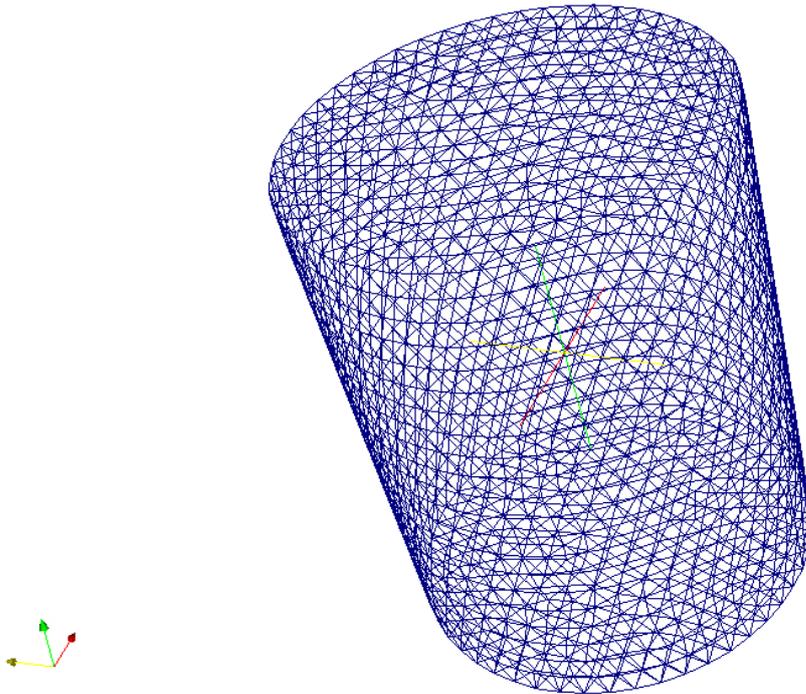


Abb. 2.2: Oberflächennetz eines Zylinders: 13321 Tetraederelemente der Ordnung 1 mit 3088 Knoten

Da im elektromagnetischen Feld nicht immer ein äquivalentes Variationsintegral bekannt ist, wird als Basis häufig auf die Methode der gewichteten Residuen zurückgegriffen. Auch in dieser Arbeit wurde ausschließlich der Strategie der gewichteten Residuen, in Kombination mit dem Galerkin Verfahren, nachgegangen. In den nachfolgenden Kapiteln wird ein Überblick über dieses Verfahren gegeben und alle wichtigen Verfahrensschritte der FEM anhand eines statischen Randwertproblems (siehe dazu Kapitel 2.1.1) beschrieben. In diesem statischen Randwertproblem soll die Poisson'sche Differentialgleichung mit gemischten Randbedingungen (siehe Abb.2.1) erfüllt sein.

2.2.1 Strategie eines gewichteten Residuums

Durch die Diskretisierung des Grundgebietes ist die mit der FEM gewonnene Lösung nur eine Approximation der exakten Lösung. Diese Approximation geschieht in der folgenden Form

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x, y, z) \phi_k. \quad (2.14)$$

Das exakte Potential ϕ wird hierbei über eine bekannte Formfunktion α_k (engl. *shape function*) angenähert. ϕ_k sind die Potentialwerte in k von insgesamt N Knoten. Es soll darauf hingewiesen werden, dass diese Potentialwerte an den Knoten unbekannt sind, da sie ja die Lösungen der Differentialgleichung sind. In Abb.2.3 sind für den zweidimensionalen Fall zwei lineare Formfunktionen illustriert. Diese Formfunktionen sind nur in begrenzten Teilbereichen des Volumens definiert und werden im Restbereich zu Null. Im Allgemeinen haben sich solche lineare Funktionen wegen ihrer Einfachheit und akzeptablen Genauigkeit der Lösungen bewährt. Auch in dieser Arbeit wurde in den numerischen Berechnungen auf lineare Formfunktionen zurückgegriffen, da diese, vor allem im dreidimensionalen Fall, programmiertechnisch relativ einfach und schnell zu implementieren sind. Ein möglicher Lösungsverlauf für das Potential ϕ und dessen Ableitung für den eindimensionalen Fall wird in Abb.2.4 schematisch dargestellt.

Aus der, in der Gleichung (2.14) beschriebenen, Annäherung wird die Differentialgleichung(2.12) zu:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho = R, \quad (2.15)$$

mit R als Residuum und ϕ als approximierte Lösung bzw. als approximiertes Potential. Die oben genannte Gleichung erfüllt also nur mehr näherungsweise die tatsächliche Differentialgleichung. Natürlich ist es im Sinne der Strategie, das Residuum zu minimieren und dadurch die approximierte Lösung der exakten Lösung $\phi \approx \phi_{\text{exakt}}$ anzunähern. Dazu wird das ortsabhängige Residuum mit einer Gewichtsfunktion ω gewichtet, über das gesamte

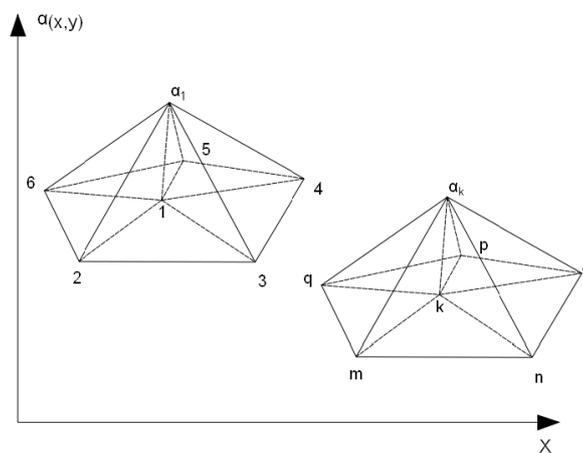


Abb. 2.3: Lineare Formfunktion für den Knoten 1 und k

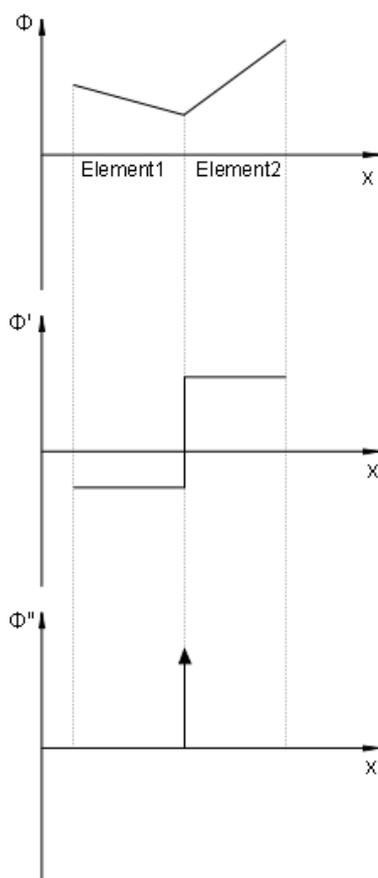


Abb. 2.4: Lösungsverlauf für das Potential $\phi_{(x)}$ sowie dessen erste und zweite Ableitung nach [2]

Volumen Ω integriert, und im Mittel minimiert bzw. zu Null gemacht. Dies führt zu der Strategie eines gewichteten Residuums,

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho] \omega d\Omega = \int_{\Omega} R \omega d\Omega = 0, \quad (2.16)$$

welche bei einer perfekten Approximation, d.h. $\phi = \phi_{\text{exakt}}$, zu einem Residuum $R=0$ führt. Wird in dieser Strategie das Potential ϕ , wie in Gleichung(2.14), mit linearen Formfunktionen $(\alpha_k(x, y, z))$ angenähert, so ergibt sich ein Problem. Dazu betrachte man den Ausdruck,

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \epsilon \Delta \phi + \nabla \epsilon \nabla \phi,$$

in Kombination mit dem Lösungsverlauf von ϕ in Abb.2.4. Durch $\Delta \phi$ wird die zweite Ableitung, wegen der gewählte linearen Formfunktion zu einem Dirac-Impuls und ergibt einen singulären Integranden über das Volumen in Gleichung (2.16). Daraus folgt, dass bei dieser Strategie die Formfunktionen und deren erste Ableitungen stetig differenzierbar sein müssen. Diese Bedingungen gelten natürlich auch für die frei wählbaren Gewichtsfunktionen ω .

Damit lineare Formfunktionen wegen ihrer Einfachheit verwendet werden können, wird der 1.Greensche Satz

$$\int_{\Omega} (U_1 \Delta U_2 + \nabla U_1 \nabla U_2) d\Omega = \int_{\Gamma} U_1 \nabla U_2 \vec{n} d\Gamma,$$

auf Gleichung(2.16) angewendet, um die zweite Ableitung von ϕ zu vermeiden und es folgt,

$$\int_{\Omega} (\epsilon \nabla \phi) \nabla \omega d\Omega - \int_{\Gamma} \epsilon \omega \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \omega d\Omega = 0. \quad (2.17)$$

Diese Form der Differentialgleichung wird auch aufgrund der schwächeren Stetigkeitsbe-

dingung der Formfunktion als *schwache Formulierung* der Poisson Gleichung bezeichnet. Dadurch ist es in diesem Fall möglich lineare Formfunktionen mit der Strategie eines gewichteten Residuums zu vereinen. Nachteilig wirkt sich die Tatsache aus, dass in (2.17) nun die Ableitung der Gewichtsfunktion $\nabla\omega$ auftritt. Weiters tritt ein Randintegral durch den 1. Greenschen Satz auf, welches entsprechend der vorgegebenen Randbedingung (Neumann bzw. Dirichlet-Bedingung) berücksichtigt und eingearbeitet werden muss.

2.2.2 Lokales Galerkin-Verfahren

Bei dem lokalen Galerkin-Verfahren handelt es sich um einen Spezialfall der Strategie eines gewichteten Residuums. Dabei werden die lokalen Formfunktionen auch als Gewichtsfunktionen verwendet:

$$\alpha_k(x, y, z) = \omega_k(x, y, z). \quad (2.18)$$

Dieses Verfahren überzeugt im Allgemeinen durch die bessere Genauigkeit und Konvergenz im Vergleich zu Verfahren mit anders gewählten Gewichtsfunktionen.

Nun soll dieses Verfahren an einem statischen Randwertproblem (siehe dazu Abb.2.1) mit gemischten Randbedingungen angewendet werden. Es soll an der Oberfläche Γ_1 eine homogene Neumann Bedingung und an der restlichen Oberfläche Γ_2 eine Dirichletsche Bedingung gelten. Aus diesen Forderungen folgt:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \phi|_{\Gamma_1} = \text{unbekannt},$$

$$\phi|_{\Gamma_2} = \phi_0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \text{unbekannt}.$$

Diese beiden Bedingungen müssen in (2.17) eingearbeitet werden. Die an dem Rand Γ_2

herrschende Dirichlet-Bedingung wird durch die Vorgabe der Knotenpotentiale ϕ_k eingearbeitet. Die unbekannte Normalableitung wird wirkungslos gemacht, indem man die frei wählbare Gewichtsfunktion am Rand Γ_2 auf Null setzt. Durch die homogene Neumann-Bedingung verschwindet das Randintegral in (2.17) und es folgt für die Integration über ein einzelnes Element (z.B. ein Tetraeder) Ω^i

$$\begin{aligned} E^i &= \int_{\Omega^i} (\epsilon \nabla \phi) \nabla \omega d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_1} \epsilon \omega \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma}_{=0} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \epsilon \omega \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma}_{=0} + \int_{\Omega^i} \rho \omega d\Omega = 0 \\ &= \int_{\Omega^i} (\epsilon \nabla \phi) \nabla \omega d\Omega + \int_{\Omega^i} \rho \omega d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Nun werden laut dem lokalen Galerkin Verfahren die Gewichtsfunktionen mit den lokalen Formfunktionen, $\omega = \alpha_k(x, y, z)$ besetzt und mit der Approximation entsprechend (2.14) resultiert

$$E_k^i = \sum_{k=1}^N \left[\int_{\Omega^i} \epsilon \nabla \alpha_k \nabla \alpha_l d\Omega \right] \phi_k + \int_{\Omega^i} \rho \alpha_l d\Omega.$$

Da das Grundgebiet Ω aus mehreren Elementen besteht muss die obige Gleichung noch adaptiert werden und es ergibt sich bei der Integration über das gesamte Volumen die folgende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \left[\int_{\Omega^i} \epsilon \nabla \alpha_k \nabla \alpha_l d\Omega \right] \phi_k + \sum_{i=1}^M \int_{\Omega^i} \rho \alpha_l d\Omega = 0, \quad l = 1, \dots, N. \quad (2.19)$$

Die Gleichung (2.19) beschreibt das geforderte Randwertproblem mit der Methode der gewichteten Residuen in Kombination mit den Galerkin-Verfahren vollständig.

2.2.3 FEM - Gleichungssystem

Die Abb.2.5 stellt nochmals zusammenfassend eine schematisch die Vorgehensweise in der FE-Methode.

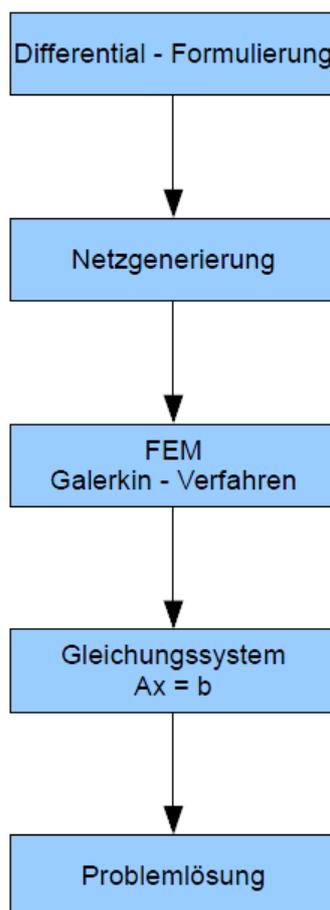


Abb. 2.5: Schematische Schritte der FEM

Nach der Festlegung der Differentialgleichung mit deren Randwert- und Anfangsbedingungen wird das Grundgebiet diskretisiert und in ein Gitter bzw. Netz aus Elementen generiert. Bei dieser Netzgenerierung wird die geometrische Form und die Anzahl der Elemente festgelegt. Je nach Anwendungsfall und Implementierung kommen verschiedene Elementgeometrien wie Linien, Dreiecke, Vielecke, Tetraeder etc. zum Einsatz. Im nächsten Schritt wird der Kern der FEM umgesetzt und daraus folgt ein Gleichungssystem. Dieses gilt es im letzten Schritt der FEM-Strategie zu lösen. Laut dem Galerkin-Verfahren muss

die Gleichung (2.19) nun in ein lineares Gleichungssystem überführt werden. Dieses lineare Gleichungssystem hat die Form:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{F} = 0, \quad (2.20)$$

mit der Koeffizientenmatrix \mathbf{K} , dem Potentialvektor \mathbf{U} und dem Spaltenvektor \mathbf{F} . Die einzelnen Elemente K_{kl} von \mathbf{K} und F_k von \mathbf{F} berechnen sich somit für das in dem Galerkin-Verfahren gezeigte Randwertproblem wie folgt:

$$K_{kl} = \int_{\Omega^i} \epsilon \nabla \alpha_k \nabla \alpha_l d\Omega, \quad F_k = \int_{\Omega^i} \rho \alpha_l d\Omega,$$

wobei sich \mathbf{K} als Matrix und \mathbf{F} der Spaltenvektor mit,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1} & \cdots & K_{kl} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix}$$

ergibt. Diese Koeffizientenmatrix wird in vielen Literaturen auch als Jakobimatrix bzw. Dirichletmatrix bezeichnet. Wie man erkennen kann, beinhalten die einzelnen Elemente K_{kl} der Matrix das Produkt $\nabla \alpha_k \nabla \alpha_l$ im Integral. Durch die Anwendung von lokalen Formfunktionen und lokalen Gewichtsfunktionen überlappen sich diese meistens nicht (siehe Abb.2.3) und das Integral wird zu Null. Daraus lässt sich folgern, dass es sich bei vielen Anwendungen um eine *dünn besetzte, diagonalendominante* Koeffizientenmatrix handelt. Somit ergibt sich aus (2.20) zusammenfassend

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1} & \cdots & K_{kl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix} = 0.$$

Nun muss das Gleichungssystem noch gelöst werden, um die Knotenpotentiale ϕ_k zu erhalten. In den meisten Fällen ist ein direktes Lösungsverfahren wie z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren wegen der Eigenschaften der Koeffizientenmatrix nicht möglich und

man geht deshalb auf iteartive Lösungsverfahren über. Diese haben sich vor allem bei dünn besetzten, großen Matrizen bewährt. Beispiele für iterative Verfahren sind das Gauß-Seidel-Verfahren und das Gradientenverfahren.

Kapitel 3

Methoden

3.1 Vorwärtsproblem der MIT

Der nachfolgende Abschnitt behandelt die allgemeine Formulierung des Vorwärtsproblems und des Inversen Problems in der MIT. Dabei werden die physikalischen Eigenschaften der MIT in einem mathematisches Modell definiert. Ein solches Modell sei in Abb. 3.1 schematisch dargestellt.



Abb. 3.1: Schematische Darstellung eines mathematischen Modells

Die Eingangsdaten und die Ausgangsdaten beschreiben hierbei meist physikalischen Größen wie zum Beispiel Spannungen oder Ströme. Das System selbst wird häufig durch einen Satz von Gleichungen (gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen) beschrieben. Grundsätzlich versucht man bei einem Vorwärtsproblem den Ausgang eines Systems, dessen Parameter bekannt sind, mit Hilfe der Eingangsdaten zu bestimmen. Bei einem Inversen Problem geht man genau den umgekehrten Weg, indem man die Systemparameter über die Eingangsdaten und die Ausgangsdaten bestimmen möchte. Damit ergibt sich folgen-

de Vorgehensweise: Es wird zuerst das Vorwärtsproblem einer Lösung zugeführt indem die Ausgangsdaten bzw. Messspannungen in den Receiverspulen berechnet werden. Dabei werden die Eingangsdaten und Systemparameter vorgegeben. Im nächsten Schritt werden die Systemparameter mit den Eingangsdaten und den, aus der Lösung des Vorwärtsproblems ermittelten, Ausgangsdaten bestimmt.

3.1.1 Problemdefinition

Wie schon erwähnt, sind die Messdaten bei diesem bildgebenden Verfahren die Spannungen an den Receiverspulen. Das Vorwärtsproblem beinhaltet nun die Berechnung dieser Spannungen bei einer vorgegebenen Leitfähigkeit im zu untersuchenden Gebiet Ω . Das Gebiet soll hierbei aus einem nichtleitenden Ω_N und einem leitenden Ω_L Volumen bestehen. Die Eingangsdaten entsprechen einem zeitharmonischen Magnetfeld. Dieses wird durch eine Stromdichte in den Transmitterspulen erzeugt und induziert im leitenden Gebiet ein elektrisches Wirbelfeld, welches wiederum Wirbelströme hervorruft. Daraus folgt eine sogenannte Sekundärmagnetfeld welches das primäre Magnetfeld überlagert. Die Receiverspule detektiert sowohl die von der Transmitterspule als auch von die vom Wirbelstrom erzeugte magnetische Flussdichteänderung. Eine schematische Anordnung dieses Vorwärtsproblems ist in Abb.3.2 dargestellt. Die mathematische Formulierung dieses Problems erfolgt über die Maxwellschen Gleichungen.

Für die Lösung bestimmt man das elektrische Wirbelfeld für das zu untersuchende leitende Gebiet (Körper), indem man das elektrische skalare Potential ϕ und das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} berechnet. Diese Vorgehensweise wird auch als \mathbf{A} - ϕ Formulierung bezeichnet. Die nachfolgenden Kapitel sollen einen Überblick über diesen Formalismus geben, wobei für detaillierte Betrachtungen auf die Dissertation [7] verwiesen wird.

3.1.2 Feldberechnungen

Die Berechnung elektromagnetische Felder in einem bestimmten Gebiet erfolgt über die Maxwellschen Gleichungen (siehe Kapitel 1). Für lineare, nichtmagnetische und isotrope

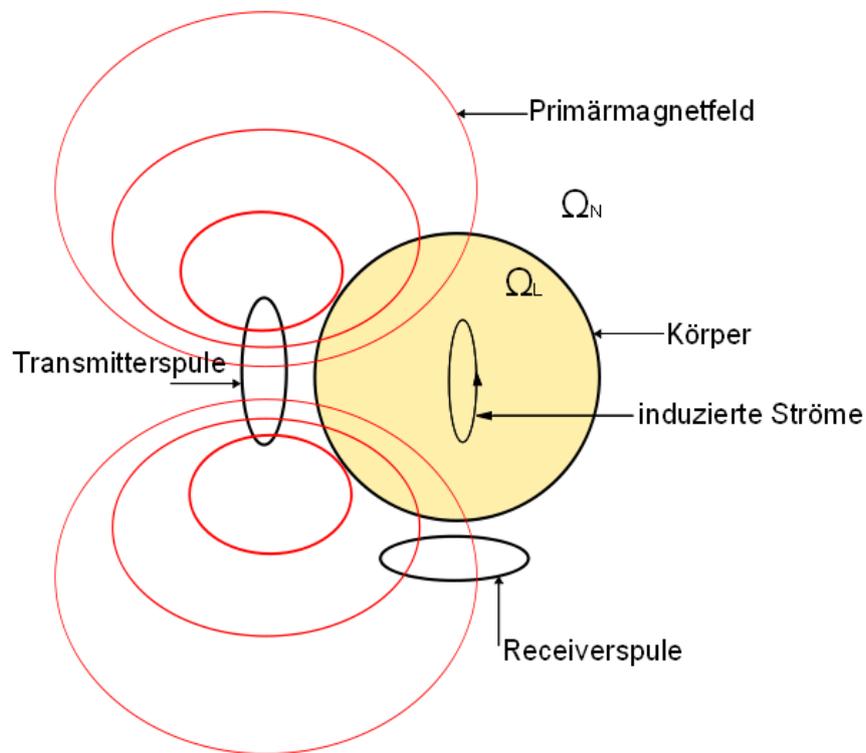


Abb. 3.2: Schematische Darstellung eines MIT - Systems

Materialien seien zur Verdeutlichung nochmals die Gleichungen (2.5), (2.6), (2.7) dargestellt:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}.$$

Für MIT werden zur Beschreibung zeitharmonischer elektromagnetischer Felder in dielektrischen Medien die Maxwell'schen Gleichungen in folgender Form verwendet:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_q + \kappa \mathbf{E} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.4)$$

angewendet. Mit \mathbf{H} als magnetische Feldstärke, \mathbf{E} als elektrische Feldstärke, \mathbf{B} als magnetische Flussdichte, \mathbf{D} als elektrische Flussdichte und ρ als Raumladungsdichte. Die Größe \mathbf{J}_q entspricht hierbei der Stromdichte in der Transmitterspule und der Ausdruck $\kappa \mathbf{E}$ der induzierten Wirbelstromdichte im Medium. Die Materialparameter μ und κ sind als Permeabilität und als komplexe Admittanz $\kappa = \sigma + j\omega\epsilon$ zu verstehen. Dabei entspricht σ der elektrischen Leitfähigkeit und ϵ der Permittivität. Die Zeitabhängigkeit der Felder wird über die Kreisfrequenz ω berücksichtigt. Aus der Tatsache, dass das Magnetfeld keine Quellen besitzt, ist die Einführung eines sogenannten magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A} mit,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.5)$$

möglich. Daraus folgt unter der Berücksichtigung der Gleichung (3.2) und ϕ als skalarem Potential die Berechnung des elektrischen Feldes \mathbf{E} mit,

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \phi. \quad (3.6)$$

Für die Ermittlung der Spannungsdaten in den Receiverspulen muss nun das elektrische Feld im leitenden Gebiet Ω_L bestimmt werden. D.h. es muss sowohl das skalare Potential

ϕ als auch das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} berechnet werden.

3.1.3 \mathbf{A} - ϕ Formulierung

Ausgehend von der Kontinuitätsgleichung die mit

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho = 0. \quad (3.7)$$

gegeben ist. Unter der Verwendung der Gleichungen (3.6), (3.5), (3.7) und (3.1) folgt:

$$\nabla \cdot \kappa(-\nabla\phi - j\omega\mathbf{A}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) - \kappa(-\nabla\phi - j\omega\mathbf{A}) = \mathbf{J}_q. \quad (3.9)$$

Hierbei soll darauf hingewiesen werden, dass das magnetische Vektorpotential nur eine Hilfsfunktion ist und nur der in Gleichung (3.5) gezeigte Ausdruck eine physikalische Bedeutung enthält. Weiters setzt man die Divergenz von \mathbf{A} für inhomogene Medien mittels der Coulomb-Eichung zu

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.10)$$

Mit der Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ und der Divergenz von \mathbf{A} reduzieren sich die beiden Gleichungen (3.8) und (3.9) zu,

$$-\nabla \cdot \kappa \nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \cdot \nabla \kappa = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu \kappa (-\nabla \phi - j\omega \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J}_q. \quad (3.12)$$

Aus den obigen Gleichungen lässt sich somit das skalare Potential und das magnetische Vektorpotential berechnen. Somit ist die Bestimmung des elektrischen Feldes \mathbf{E} in einem leitfähigen Körper möglich, indem man die beiden gekoppelten Differentialgleichungen nach ϕ und \mathbf{A} auflöst.

3.1.4 Quasistatische \mathbf{A} - ϕ Formulierung

Da in der medizinischen MIT nur niederfrequente Felder angewendet werden, wird auch die Lösung für ϕ und \mathbf{A} für den quasistatischen Fall durchgeführt. Dadurch lassen sich über die Materialparameter die Maxwell'schen Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} zu,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_q \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (3.14)$$

vereinfachen. Weiters kann gezeigt werden, dass die induzierten Wirbelstromdichten in einem leitfähigen Medium gegenüber den Stromdichten in dem Spulensystem \mathbf{J}_q um ein Vielfaches kleiner und somit vernachlässigbar sind. Diese Tatsache bzw. Annahme wurde auch in [5] bestätigt. Daraus folgt, dass der Ausdruck der Verschiebestromdichte in (3.12) nicht mitberücksichtigt wird. Aus diesen Vereinfachungen reduziert sich der \mathbf{A} - ϕ Formulismus zu:

$$-\nabla \cdot \kappa \nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \cdot \nabla \kappa = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_q. \quad (3.16)$$

Damit lassen sich die beiden Differentialgleichungen entkoppeln, indem man nun das ma-

agnetische Vektorpotential mit einer vorgegebenen Stromdichte \mathbf{J}_q direkt berechnet. Danach wird über die Gleichung (3.15) mit dem schon bestimmten Vektorpotential \mathbf{A} das skalare Potential ϕ bestimmt. Somit lässt sich die Beziehung zwischen ϕ und \mathbf{A} in folgender partiellen Differentialgleichung darstellen:

$$\nabla \cdot \kappa \nabla \phi = j\omega \mathbf{A} \cdot \nabla \kappa \quad \in \Omega_L. \quad (3.17)$$

Für die Vollständigkeit dieser Gleichung müssen die Randbedingungen zwischen leitfähigem Volumen Ω_L und nichtleitfähigem Volumen Ω_N noch bestimmt werden. Dies geschieht indem man die Normalkomponente der Stromdichte \mathbf{J} am Rand zu Null macht und dadurch die Neumann-Bedingung der Form,

$$\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = -j\omega \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \quad \in \Omega_L \cap \Omega_N, \quad (3.18)$$

mit \mathbf{n} als Normalvektor zur Oberfläche erhält.

3.1.5 Berechnung der Spannungen an den Receiverspulen

Die Ermittlung der Spannungen v in den Receiverspulen wird über das Reziprozitätstheorem [1],

$$v = \int_{\Omega_L} (\kappa \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{E}_r d\Omega, \quad (3.19)$$

durchgeführt. Der Ausdruck $\kappa \mathbf{E}_t$ beschreibt die induzierte Stromdichte \mathbf{J} im leitfähigem Körper Ω_L . Bei \mathbf{E}_r handelt es sich um ein fiktives elektrische Feld, welches über die Receiverspulen erzeugt wird. Dabei werden die Receiverspulen wie Transmitterspulen betrachtet und somit kann auch diese elektrische Feld wie in Gleichung 3.6 berechnet werden. Die darauf folgende Integration über das leitfähige Volumen lässt dann Rückschlüsse über die induzierte Spannung in der Receiverspule zu.

In diesem Zusammenhang soll nochmals auf die komplexe Leitfähigkeit eingegangen werden, indem wir die Gleichung (3.19) betrachten. Daraus ist abzuleiten, dass sich alle Span-

nungsdaten komplex darstellen. Trotzdem ist es in der medizinischen MIT möglich, Realteil und Imaginärteil der Spannungsdaten separat für die Bildrekonstruktion der elektrischer Leitfähigkeit und Permittivität zu nutzen. Auch soll darauf hingewiesen werden, dass technische Limitierungen bei der Rekonstruktion der Permittivitätsverteilung gegeben sind (siehe dazu [4]). Aus diesem Grund wurden für alle Berechnungen nur die Realanteile der Spannungsdaten berücksichtigt.

3.1.6 Numerische Berechnung der \mathbf{A} - ϕ Formulierung

Die Lösung des Vorwärtsproblems benötigt die Berechnung des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A} und die des skalaren Potential ϕ um das elektrische Feld \mathbf{E} in einem leitenden Körper bestimmen zu können. Diese Berechnungen werden mit dem Programm Matlab (The MathWorks Inc.) numerisch umgesetzt. Dabei wird nur der quasistatische Fall des Vorwärtsproblems berechnet und diskutiert.

Berechnung des magnetischen Vektorpotentials

Um die partielle Differentialgleichung in (3.17) lösen zu können muss zuerst das magnetische Vektorpotential für eine gegebene Spulenanordnung in dem Gebiet Ω_L bestimmt werden. Für einen gegebenen Punkt \mathbf{r} in Ω_L lässt sich \mathbf{A} wie folgt berechnen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_q(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad r \in \Omega_L, \quad (3.20)$$

mit r' als Abstand zur Stromdichte \mathbf{J}_q in der Spule. Die numerische Implementierung ist in [7] im Detail dargestellt. Auch konnte bei dieser Arbeit auf eine vorgefertigte numerische Implementierung des Vektorpotentials zurückgegriffen werden.

Berechnung des skalaren Potentials

Für die Berechnung des skalaren Potentials ϕ wird die FE-Methode in Kombination mit dem Galerkin Verfahren verwendet. Daraus folgt, dass die partielle Differentialgleichung

mit deren Randbedingungen diskretisiert werden muss. Eine genau Beschreibung der FE-Methode wurde in Kapitel 1 dargelegt. Mit der Methode der gewichteten Residuen und dem Galerkin Verfahren wird die Gleichung (3.17) zu,

$$\int_{\Omega_L} \alpha_i \nabla \cdot \kappa \nabla \phi = - \int_{\Omega_L} \alpha_i j \omega \mathbf{A} \cdot \nabla \kappa, \quad (3.21)$$

mit α_i als i-te Formfunktion (*shape function*). Die Gleichung wird mit einer linearen Formfunktion gewichtet und über das Volumen Ω_L integriert. Die vorgegebene Randbedingung $\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = -j \omega \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ wird mittels des Gauß-Satzes eingearbeitet und somit ergibt sich nach einigen mathematischen Umformungen aus (3.21),

$$\int_{\Omega_L} \kappa \nabla \alpha_i \cdot \nabla \phi = - \int_{\Gamma_L} \alpha_i j \omega \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_L, \quad (3.22)$$

mit Γ_L als Oberfläche und \mathbf{n} als Normalvektor zu dieser. Weiters wird auch das skalare Potential ϕ und dessen Gradientbildung $\nabla \phi$ in der Form,

$$\phi = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (3.23)$$

$$\nabla \phi = \sum_{k=1}^N \nabla \alpha_k \phi_k, \quad (3.24)$$

mit einer linearen Formfunktion α_k approximiert. Die Diskretisierung des Grundgebietes wird mit Tetraederelementen erster Ordnung durchgeführt, wodurch sich für die Gleichungen (3.23) und (3.24) eine Knotenanzahl $N=4$ ergibt. D.h. es entstehen für jedes Element insgesamt 4 Gleichungen, womit sich für das gesamte Gebiet ein Gleichungssystem aufstellen lässt. Dazu wird eine Koeffizientenmatrix \mathbf{K} und ein Spaltenvektor \mathbf{F} definiert, dessen einzelne Elemente K_{ki} und F_k aus den obigen Angaben wie folgt berechnet werden:

$$K_{ki} = \int_{\Omega_j} \kappa \nabla \alpha_k \nabla \alpha_i d\Omega, \quad F_k = - \int_{\Gamma_j} \alpha_i j \omega \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

mit Ω_j als Volumen und Γ_j als Oberfläche des j-ten Tetraederelements. Damit formt man ein Gleichungssystem $\mathbf{K}\phi = \mathbf{F}$ mit k-Zeilen (Anzahl der Knoten) und i-Spalten (Anzahl der Elemente) zu:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{k1} & \cdots & K_{ki} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix}.$$

Aus diesem Gleichungssystem lässt sich nun das skalare Potential ϕ für jeden einzelnen Knoten k bestimmen. Durch die Anwendung lokaler Formfunktionen α ergibt sich eine *dünn besetzte* Koeffizientenmatrix. Dadurch ergeben sich Vorteile zur Lösung des genannten linearen Gleichungssystems, indem der Einsatz von iterativen Lösungsverfahren möglich wird. In dieser Arbeit wurde das vorkonditionierte konjugierte Gradientenverfahren für die Lösung des Gleichungssystems herangezogen. In diesem Fall wird das Gradientenverfahren mit der Matrix \mathbf{M} als Vorkonditionierung auf das Gleichungssystem,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\phi = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F},$$

angewendet. Bei der Matrix \mathbf{M} handelt es sich natürlich um eine Matrix, die zum Gleichungssystem multipliziert wird, um die Konditionszahl des Ausdrucks $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ zu verbessern. Im Sinne dieses Verfahrens sollte \mathbf{M} leicht invertierbar sein, damit eine möglichst exakte Lösung erhalten wird. Die praktische Implementierung wurde mit einer von Matlab zur Verfügung gestellten Funktion durchgeführt.

3.2 Inverses Problem der MIT

In der Beschreibung des Vorwärtsproblem wurde der Zusammenhang zwischen den Meßspannungen in den Receiverspulen mit Admittanz κ in einem Volumen gezeigt. Dabei

werden von den komplexen Spannungsdaten nur die Realanteile berücksichtigt und über eine nichtlineare Funktion Ψ mit $v = \Psi(\sigma)$ berechnet. Die Admittanz reduziert sich somit auf die elektrische Leitfähigkeit σ . Die Rekonstruktion aus diesen Spannungsdaten lässt daher auch nur eine Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit in der Form $\sigma = \Psi^{-1}(v)$ zu. Wie schon in der Einleitung angedeutet, handelt es sich hierbei um ein *unterbestimmtes, schlecht gestelltes* Inverses Problem. Laut *Jacques Hadamard, 1923* ist ein Problem schlecht gestellt, wenn eine der folgenden Bedingungen nicht erfüllt ist:

1. **Existenz:** Für alle Daten gibt es eine Lösung,
2. **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist für alle Daten eindeutig,
3. **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

Für die Rekonstruktion der Leitfähigkeit σ wird die Funktion des genannten Problems mittels der Finite Elemente Methode linearisiert. Weiters werden keine Absolutwerte, sondern nur Differenzwerte der Leitfähigkeit bestimmt. D.h. es wird eine Leitfähigkeitsänderung (engl. *Perturbation*) $\Delta\sigma$ bezogen auf eine homogene Referenzleitfähigkeit im Körper berechnet. Dabei ist die Wahl der Referenzleitfähigkeit für eine akzeptable Rekonstruktion bzw. Lösung entscheidend. Diese Vorgangsweise setzt voraus, dass sich die Leitfähigkeit im Gebiet der definierten Referenzleitfähigkeit nur geringfügig ändern darf. Aus diesen Überlegungen lässt sich aus (3.19) für eine Leitfähigkeitsänderung $\Delta\sigma$ die nachstehende Gleichung aus [6],

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\Omega} (\Delta\sigma \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{E}_r d\Omega, \quad (3.26)$$

bestimmen. Durch die schon genannte Annahme der Linearisierung kann die obige Gleichung als lineares Gleichungssystem mit,

$$\mathbf{S}\Delta\sigma = \Delta\mathbf{v}, \quad (3.27)$$

geschrieben werden. \mathbf{S} ist hierbei eine $n \times m$ Matrix, die in der Literatur auch als Sensitivitätsmatrix bezeichnet wird. Jede einzelne Reihe dieser Matrix korrespondiert mit einem Transmitter-Receiverspulenpaar. Daraus folgen aus zum Beispiel i Transmitter und j Receiverspulen insgesamt $i \times j$ Reihen. Die n Spalten beinhalten die Anzahl der Tetraederelemente (Voxel) des zu rekonstruierenden Volumens Ω .

Gemäß der oben angestellten Überlegungen besteht die Möglichkeit die Leitfähigkeitsdifferenz aus,

$$\Delta\sigma = \mathbf{S}^+ \Delta\mathbf{v}, \quad (3.28)$$

mathematisch mit \mathbf{S}^+ als Pseudoinverse von \mathbf{S} zu bestimmen. Dabei handelt es sich bei der Sensitivitätsmatrix um eine nichtquadratische Matrix, weshalb die Berechnung der inversen Matrix \mathbf{S}^{-1} nicht möglich ist. Die aus praktischen Messungen ermittelten Signaldaten (Spannungen) sind jedoch verrauscht und dadurch ist eine stabile Lösung des inversen Problems nicht in jedem Fall gesichert.

Weiters sind die Messdaten meist verrauscht und somit ist eine stabile Lösung nicht gewährleistet.

3.2.1 LSQ - Verfahren

Grundsätzlich ergibt sich aus dem Vergleich zwischen den Messdaten \mathbf{y}_m und den berechneten Daten \mathbf{y} ein Fehler in der Form:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_m. \quad (3.29)$$

Dieser Fehler wird auch als Schätzfehler bzw. Residuum bezeichnet und ergibt in Verknüpfung mit dem Vorwärtsproblem der MIT folgende Gleichung:

$$\mathbf{e}(\Delta\sigma) = \mathbf{S}\Delta\sigma - \Delta\mathbf{v}. \quad (3.30)$$

Die Größe des Residuums hängt somit von der Qualität der Messdaten (Spannungsdiffe-

renzen $\Delta \mathbf{v}$) und den ermittelten Modellparametern $\Delta \sigma$ ab. Im Idealfall ist der Fehler gleich null. Dieser Fall ist jedoch in der Praxis kaum zu erreichen, da die Messdaten meist veräuscht sind und deshalb eine exakte Bestimmung der Modellparameter nicht möglich ist. Aus diesem Grunde versucht man das Residuum unter der Verwendung der euklidischen bzw. L2-Norm,

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (3.31)$$

zumindest zu minimieren. Zur Berechnung der elektrischen Leitfähigkeitdifferenz $\Delta \sigma$ in der Gleichung (3.28) kann ein sogenannter Schätzer (*least squares estimator*) eingesetzt werden. Das zu bestimmende Minimierungsproblem des LSQ - Verfahren lautet somit:

$$\Delta \sigma_{LS} = \underset{\Delta \sigma}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{e}(\Delta \sigma)\|^2 = \underset{\Delta \sigma}{\operatorname{argmin}} \left((\mathbf{S} \Delta \sigma - \Delta \mathbf{v})^T (\mathbf{S} \Delta \sigma - \Delta \mathbf{v}) \right). \quad (3.32)$$

Daraus folgt die inverse Lösung des linearen Gleichungssystem im Sinne der Minimierung der Fehlerquadrate:

$$\Delta \sigma_{LS} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{v}, \quad (3.33)$$

mit der Pseudoinversen $\mathbf{S}^+ = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$.

3.2.2 Regularisiertes Gauß-Newton Verfahren

Bei der Berechnung der Pseudoinversen mittels LSQ-Verfahrens ergibt sich der mathematische Term $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$. Dieser kann zu Problemen bei der Invertierung führen, da die daraus entstehende Matrix singulär werden kann. Eine in der MIT oft angewandte Methode diesem Problem entgegenzuwirken, ist das Verfahren der Regularisierung. Im Grunde versucht man dabei eine singuläre Matrix in eine reguläre Matrix zu überführen. Damit erreicht man eine

Verbesserung der Konditionszahl in Bezug auf die Invertierung. Wird diese Methode auf das LSQ-Verfahren angewendet, ergibt sich das Minimierungsproblem mit Regularisierung zu,

$$\Delta\sigma = \underset{\Delta\sigma}{\operatorname{argmin}} \left((\mathbf{S}\Delta\sigma - \Delta\mathbf{v})^T (\mathbf{S}\Delta\sigma - \Delta\mathbf{v}) + \lambda\Delta\sigma^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \Delta\sigma \right), \quad (3.34)$$

mit λ als Regularisierungsparameter und \mathbf{R} als Regularisierungsmatrix. Die Wahl der Regularisierungsmatrix R kann auf verschiedenste Weise getroffen werden. In den meisten Anwendungen, wie zum Beispiel in der EIT, wird die Einheitsmatrix \mathbf{I} für die Regularisierung benutzt, da sie leicht zu implementieren ist und vor allem die stärkste Regularisierung einer Matrix erzeugt. Weitere Berechnungen und Simulationen im Bereich der MIT mit verschiedenen Regularisierungsmatrizen sind in [8] und [9] gezeigt.

Einschrittmethode des Gauß-Newton Verfahrens

Das Gauß-Newton Verfahren versucht grundsätzlich die zu bestimmenden Modellparameter schrittweise zu verbessern. Die Iteration wird solange durchgeführt bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Für dieses Kriterium werden in der Literatur verschiedene Möglichkeiten diskutiert, wobei eine davon lautet: Die Iteration wird dann abgebrochen wenn eine akzeptable Genauigkeit aller Modellparameter erreicht, oder eine maximale Anzahl von Iterationen überschritten wird. Dieser Ansatz ist vor allem leicht zu implementieren aber nicht immer der Beste. Die Konvergenz bzw. Stabilität des Verfahrens hängt einerseits stark von der Schrittweite und andererseits vom Anfangswert der Modellparameter ab.

Das Einschrittverfahren verfolgt nun die Implementierung des Gauß-Newton Verfahrens, indem nur eine einzige Iteration durchgeführt wird. Gerade in der MIT hat sich diese Methode, für eine zufriedenstellende Bildrekonstruktion, bewähren können und wird auch in der Literatur als *Newton-one-step-reconstructor* (NOSER) bezeichnet. Dieses Einschrittverfahren eignet sich für jene Bildrekonstruktionen, wo die Bestimmung einer Leitfähigkeitsdifferenz im Vordergrund steht. Die Bildrekonstruktion einer Lungenventilation stellt ein medizinisches Beispiel für die Bestimmung einer solchen Leitfähigkeitsdifferenz dar.

Aus dem gelöste Minimierungsproblem in Gleichung (3.34), ergibt sich für die Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$,

$$\Delta\sigma = (\mathbf{S}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{S}^T \Delta\mathbf{v}, \quad (3.35)$$

mit \mathbf{W} als Gewichtungsmatrix. Die Auswahl der Regularisierungsmatrix \mathbf{R} kann als Filterung der Lösung im weiteren Sinne verstanden werden. Dabei kommen sogenannte Gradientenmatrizen oder auch Laplacematrizen zum Einsatz. Beide Matrizen verwaschen (*smooths*) die Lösung bzw. das Rekonstruktionsbild. Einige solcher Rekonstruktionsergebnisse für die EIT sind in [10] gezeigt.

Mit der Bayesschen Wahrscheinlichkeitstheorie können die Regularisierungsmatrix \mathbf{R} und die Gewichtungsmatrix \mathbf{W} unter Betrachtung statistischer Zusammenhänge der Messdaten und Modellparameter berechnet und interpretiert werden. Unter der Annahme, dass das Rauschen unkorreliert und gaußverteilt ist, ergeben sich Messdaten mit gleicher Varianz. Der in Gleichung (3.35) definierte Schätzer entspricht somit einem *maximum a posteriori* (MAP) Schätzer. Die Regularisierungsmatrix $\lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ kann somit aus der inversen Kovarianzmatrix \mathbf{C}_M der Modellparameter berechnet werden. Wird angenommen, dass alle Bildpunkte (Modellparameter) unkorreliert sind kann die Matrix \mathbf{C}_M als Einheitsmatrix \mathbf{I} gewählt werden. Weiters ergibt sich die Gewichtsmatrix \mathbf{W} aus der inversen Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten. Mit der Annahme, dass alle Messdaten unkorreliert sind und das Rauschen gaußverteilt, berechnet sich die Kovarianzmatrix der Messdaten wie folgt:

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

mit σ^2 als Varianz. Schlußendlich ergibt sich für die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit $\Delta\sigma$ folgende Beziehung:

$$\Delta\sigma = (\mathbf{S}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta\mathbf{v} \quad (3.37)$$

$$= \mathbf{C}_M \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{C}_M \mathbf{S}^T + \lambda \mathbf{C}_D)^{-1} \Delta\mathbf{v}. \quad (3.38)$$

Die exakte Herleitung und mathematische gültige Umformungen der Gleichungen 3.37 und 3.38 ist in [11] beschrieben.

Zusammengefasst basiert somit die Durchführung der Bildrekonstruktion der elektrischen Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$ auf der Gleichung 3.38 und dem Diskrepanzprinzip nach Morzov. Hierbei werden bei den Bildrekonstruktionen nur die Form der Regularisierungsmatrizen variiert. Eine weitere Möglichkeit der Bildrekonstruktion auf welche in dieser Arbeit nicht eingegangen wird, bietet die Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition* SVD, siehe dazu [6] und [8]).

In weiterer Folge muss noch die geeignete Wahl des Regularisierungsparameters λ erläutert werden. Hierbei sucht man nach Möglichkeiten den Parameter so zu wählen, dass die Regularisierung effizient und optimal für das gestellte Inverse Problem ist. Eine sehr einfache Herangehensweise ist die empirische Ermittlung. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, dass diese Methode nicht zwingend den optimalen Regularisierungsparameter findet. Durch die willkürliche Wahl ergibt sich keine strukturierte Suchrichtung für λ und somit kann dieses Verfahren sehr zeitintensiv werden. Deswegen ist man bestrebt ein Verfahren anzuwenden, welches sowohl zuverlässig, als auch rasch einen optimalen Regularisierungsparameter findet. Einige solcher Verfahren seien hier genannt:

1. Morozovsche Diskrepanzprinzip,
2. Generalized Cross-Validation (GCV-Verfahren),
3. L-Kurve (*Hansen, 1992*).

In dieser Arbeit wird hier ausschließlich auf das Morzovsche Diskrepanzprinzip Bezug ge-

nommen. Nur dieses Verfahren wurde für die Berechnung des optimalen Regularisierungsparameter λ angewendet und implementiert. Wie bei jedem Optimierungsverfahren muss die Stabilität und die Konvergenz gegeben sein, was in verschiedenen technischen Anwendungsbereichen jedoch nicht immer erfüllt ist. Deshalb sei nochmals auf die Relevanz der empirischen Methode hingewiesen.

3.2.3 Diskrepanzprinzip nach Morozov

Das Ziel des Prinzips ist es, einen optimalen Regularisierungsparameter zu finden, indem man die quadratische Norm des Residuums nicht kleiner als die Varianz des Rauschens der Messdaten macht. Daraus folgt die Vorschrift,

$$\|\mathbf{S}\Delta\sigma_\lambda - \Delta\mathbf{v}\|_2^2 \geq \sigma_n^2, \quad (3.39)$$

mit σ_n als Standardabweichung des Rauschens der Messdaten. Weiters bezeichnet $\Delta\sigma_\lambda$ die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit $\Delta\sigma$ von dem Regularisierungsparameter λ . Eine schematische Darstellung dieser Vorschrift ist in Abb.3.3 zu sehen. Der Wert des Regularisierungsparameter maßgebend für die Größe des Residuums. Nach der in Gleichung (3.39) beschriebenen Vorschrift ist klar erkennbar, dass sich der optimale Regularisierungsparameter aus dem Schnittpunkt der beiden Kurven ergibt, d.h. wo die Norm des Residuums gleich groß ist wie die Standardabweichung des Rauschens der Messdaten. Dadurch lässt sich ein sogenanntes *over-fitting* der Parameter vermeiden. Das Rauschen selbst beinhaltet keine Information über die Modellparameter und sollte deshalb nicht als beeinflussender Faktor für die Parameteridentifikation dienen.

Dieses Prinzip hat sich vor allem durch die physikalische Interpretation bewährt und lässt sich unabhängig von der Form der Regularisierungsmatrix \mathbf{R} anwenden.

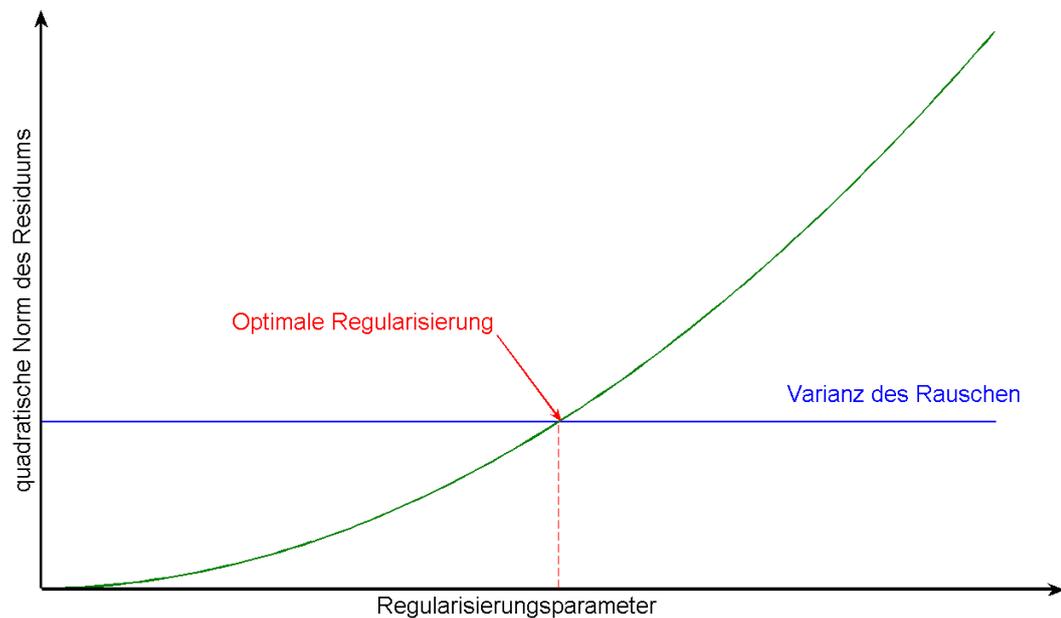


Abb. 3.3: Morozov-Kriterium: Ermittlung des optimalen Regularisierungsparameters λ

3.3 Vorwärtsproblem der ICEIT

3.3.1 Problemdefinition

Wie schon bei der MIT muss für die ICEIT (*induced current electrical impedance tomography*) das Vorwärtsproblem gelöst werden. Das zu lösende Problem ist in Abb.3.4 schematisch dargestellt. Es ist erkennbar, dass sich nur das Messsystem gegenüber der MIT ändert. Als Eingangsdaten fungiert wieder das zeitharmonische Magnetfelder das über die Transmitter-spulen erzeugt werden. Als Messsystem werden an der Oberfläche des leitenden Gebiets Ω_L Elektroden angebracht. Hierbei wird über jedes Elektrodenpaar im *adjoint-adjoint* Modus die Spannung bestimmt. Zur Berechnung der Spannungen an den Elektroden muss wiederum das elektrische Wirbelfeld im leitenden Gebiet bestimmt werden. D.h. es müssen sowohl das elektrische Potential ϕ , als auch das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} im leitenden Körper Ω_L ermittelt werden (siehe dazu Kapitel 3.1). Somit ergibt sich ein zur MIT identischer $\mathbf{A}-\phi$ Formulismus, der bereits im Abschnitt 3.1.3 hergeleitet wurde.

Die Spannungsdaten für ein Elektroden-system werden aus der Differenz der skalaren Ober-

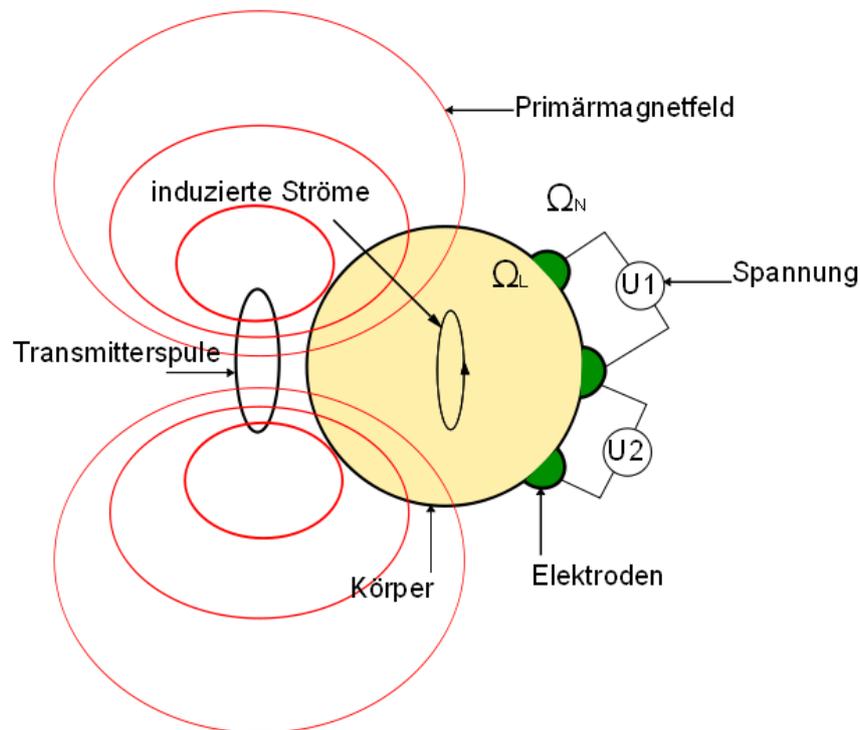


Abb. 3.4: Schematische Darstellung eines ICEIT-Systems

flächenpotentiale ermittelt. Dabei gehen die Form und die Anordnung der Elektroden entscheidend in die Berechnung ein.

3.3.2 Berechnung der Spannung an den Elektroden

Aus der Lösung des $A-\phi$ Formulismus werden die Spannungsdaten an den Elektroden ermittelt. Dazu werden zwei verschiedene Vorgehensweisen erläutert, wobei in dieser Arbeit nur die direkte Berechnung der Spannungsdaten zum Einsatz gekommen ist. Die Berechnung mittels des Reziproktheorems wird insbesondere angeführt, da diese vor allem für die inverse Lösung des Problems große Bedeutung hat.

Direkte Berechnung

Die Spannungen an den Elektroden werden über das skalare Potential ϕ und das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} an der Oberfläche des leitenden Volumens Ω_L berechnet. Dazu muss die partielle Differentialgleichung (3.17) mit der Randbedingung (3.18) gelöst werden und sei hier nochmals mit,

$$\nabla \cdot \kappa \nabla \phi = j\omega \mathbf{A} \cdot \nabla \kappa \quad \in \Omega_L,$$

$$\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = -j\omega \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \quad \in \Omega_L \cap \Omega_N,$$

angeführt. Die numerische Lösung dieser Differentialgleichung wurde bereits im Kapitel 3.1.6 ausführlich dargestellt. Mit der FE-Methode wird das Grundgebiet mit i-Tetraederelemente erster Ordnung und den dazu korrespondierenden k-Knoten diskretisiert. Daraus ergibt sich für die Lösung des skalaren Potentials ϕ ein Spaltenvektor ϕ der Länge k. Für ein Elektrodenpaar muss die Differenz der an den Oberflächen berechneten skalaren Potentiale in der Form,

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}\phi, \tag{3.40}$$

mit der Matrix \mathbf{C} und dem Spannungsvektor \mathbf{U} ermittelt werden. Die Art der Spannungsmessung wird über die Matrix \mathbf{C} bestimmt, d.h. welche Elektrodenpaare in Beziehung gesetzt werden. In der EIT ist es üblich, Elektrodenpaare aus örtlich benachbarten Elektroden zu bilden und deren Potentialdifferenz zu bestimmen. Diese Messart wird auch als *adjoint-adjoint* Messung bezeichnet. Die Berechnung der Matrix \mathbf{C} und die sich daraus ergebenden Spannungen \mathbf{U} für ein Messsystem mit Punktelektroden ist im Anhang A gezeigt.

Berechnung mittels des Reziprozitätstheorem

Die Spannungen v an den Elektroden können auch mittels des Reziprozitätstheorem [1] in der Form,

$$v = \int_{\Omega_L} (\kappa \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{E}_e d\Omega, \quad (3.41)$$

berechnet werden. \mathbf{E}_t entspricht wiederum dem elektrischen Wirbeleld, das direkt über das Magnetfeld der Transmitterspulen hervorgerufen wird. Der Ausdruck $\kappa \mathbf{E}_t$ stellt, wie auch schon im Fall der MIT die induzierte Stromdichte \mathbf{J} in einem leitfähigem Volumen Ω_L dar. Das elektrische Feld \mathbf{E}_e ist wiederum ein fiktives Feld im leitfähigem Volumen Ω_L , welches über die Oberflächenelektroden eingebracht wird. Hierbei werden die Messelektroden als stimulierende Elektroden betrachtet und das dadurch entstehende elektrische Feld \mathbf{E}_e im Volumen Ω_L bestimmt.

Durch die Integration über das Volumen Ω_L kann somit die Spannung an jedem einzelnen Elektrodenpaar ermittelt werden. Die Berechnung der Spannungsdaten mittels des Reziprozitätstheorem ist aufwendiger als die direkte Berechnung, da jeweils das fiktive elektrische Feld \mathbf{E}_e zu bestimmen ist.

3.4 Inverses Problem der ICEIT

Das Vowärtsproblem beschreibt den Zusammenhang zwischen der komplexen Elektroden- spannungen v und der komplexen Admittanz κ an. Auch hier wird, wie schon in der MIT beschrieben, nur die elektrische Leitfähigkeit σ für die Rekonstruktion verwendet. Allgemein ergibt sich daher für die Rekonstruktion dieser Leitfähigkeit das Inverse Problem mit $\sigma = \Psi^{-1}(v)$ mit Ψ als nichtlineare Funktion. Aus den schon in Kapitel 3.2 angestellten Überlegungen lässt sich mit Gleichung (3.41) für eine Leitfähigkeitsänderung $\Delta\sigma$ folgende Beziehung bestimmen:

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\Omega} (\Delta\sigma \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{E}_e d\Omega. \quad (3.42)$$

Hierbei wird darauf hingewiesen, dass in der obigen Gleichung das fiktive elektrische Feld \mathbf{E}_e noch bestimmt werden muss. In Anhang B wird diese Berechnung dargestellt. Der Finite Elemente Formulismus wurde hierbei in gleicher Weise wie in [13] durchgeführt. Für \mathbf{E}_t gelten die gleichen Überlegungen wie in der MIT und die Bestimmung erfolgt durch die Gleichung (3.6). Da beide elektrischen Felder durch Anwendungen der Finite Elemente Methode numerisch berechnet werden, kommt es zu einer gewünschten Linearisierung der nichtlinearen Funktion Ψ und es gilt damit das Gleichungssystem,

$$\mathbf{G}\Delta\sigma = \Delta\mathbf{v}, \quad (3.43)$$

mit \mathbf{G} als Sensitivitätsmatrix in der Form $n \times m$ und $\Delta\mathbf{v}$ als Spannungsdifferenz an den Elektroden. Jede einzelne Zeile von \mathbf{G} korrespondiert mit einem Transmitter-Elektrodenpaar und daraus folgen für i Transmitter und j Elektrodenpaare genau $i \times j$ Zeilen. Die m Spalten entsprechen wiederum der Anzahl der Tetraederelemente (Voxel) im diskretisierten Gebiet Ω_L . Für die elektrische Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$ ergibt sich das zu lösende Inverse Problem,

$$\Delta\sigma = \mathbf{G}^+ \Delta\mathbf{v}, \quad (3.44)$$

mit \mathbf{G}^+ als Pseudoinverse von \mathbf{G} . Unter der Verwendung des regularisierten Gauß-Seidel-Verfahrens ergibt sich für die obige Gleichung die Form,

$$\Delta\sigma = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta\mathbf{v} \quad (3.45)$$

$$= \mathbf{C}_M \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{C}_M \mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{C}_D)^{-1} \Delta\mathbf{v}, \quad (3.46)$$

mit \mathbf{C}_M und \mathbf{C}_D als Kovarianzmatrizen der Modellparameter und der Messdaten $\Delta\mathbf{v}$ an den Elektroden. Der Regularisierungsparameter λ wird ebenfalls mit dem beschriebenen Diskrepanzprinzip nach Morozov ermittelt. Für die Kovarianzmatrix der Modellparameter

C_M wurde auch hier die Einheitsmatrix \mathbf{I} gewählt. Die Matrix C_D ergibt sich aus den Messdaten an den Elektroden und ist in gleicher Weise mit Gleichung (3.36) zu berechnen.

3.5 Vorwärtsproblem der Hybridmethode

3.5.1 Problemdefinition

Die Hybridmethode ist eine Kombination aus den beiden Rekonstruktionsmethoden MIT und ICEIT. Beide Systeme haben dieselben Eingangsdaten und unterscheiden sich nur durch ihr Messsystem. Aus der Kombination der beiden Systeme lassen sich vorteilhaft mehrere unabhängige Messdaten ermitteln. D.h. es wird bei der Hybridmethode die Messung mit Receiverspulen und Elektroden an der Oberfläche des Volumens Ω_L durchgeführt. Eine schematische Darstellung ist in Abb. 3.5 gezeigt.

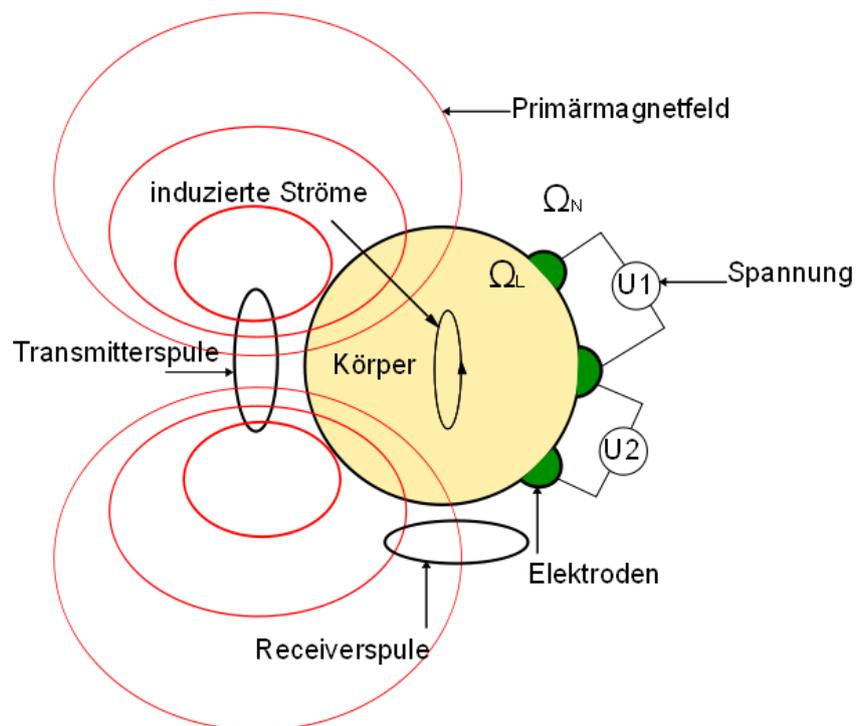


Abb. 3.5: Schematische Darstellung einer Kombination aus MIT und ICEIT (Hybridmethode)

Aus den schon dargestellten Vorwärtsproblemen der MIT und der ICEIT können die Span-

nungsdaten sowohl an den Receiverspulen, als auch an den Elektroden bestimmt werden.

3.6 Inverses Problem der Hybridmethode

Die realen Spannungsdifferenzen $\Delta \mathbf{v}$ an den Receiverspulen und an den Elektroden werden nun für die Rekonstruktion der elektrischen Leitfähigkeit $\Delta \sigma$ eines Volumens Ω_L verwendet und berechnet sich diese aus dem linearen Gleichungssystem wie folgt:

$$\Delta \sigma = \mathbf{H}^+ \Delta \mathbf{v}. \quad (3.47)$$

\mathbf{H} stellt die Sensitivitätsmatrix der Hybridmethode da und ergibt sich aus der Kombination der beiden Sensitivitätsmatrizen \mathbf{S} und \mathbf{G} . Daraus folgt aus der Gleichung 3.47,

$$\Delta \sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_{MIT} \\ \Delta \mathbf{v}_{ICEIT} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

mit $\Delta \mathbf{v}_{MIT}$ und $\Delta \mathbf{v}_{ICEIT}$ als Spannungsdaten an den Receiverspulen und Elektroden. Die Invertierung der Sensitivitätsmatrix \mathbf{H} bzw. die Berechnung der Pseudoinversen \mathbf{H}^+ ergibt sich mit dem regularisierten Gauß-Seidel-Verfahren zu,

$$\Delta \sigma = (\mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta \mathbf{v} \quad (3.49)$$

$$= \mathbf{C}_M \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{C}_M \mathbf{H}^T + \lambda \mathbf{C}_D)^{-1} \Delta \mathbf{v}, \quad (3.50)$$

mit den bekannten Kovarianzmatrizen \mathbf{C}_M , \mathbf{C}_D und den Regularisierungsparameter λ . Hierbei soll nochmals auf die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten eingegangen werden. Die Messdaten bestehen aus zwei voneinander getrennten Messsystemen, nämlich aus den Receiverspulen und den Elektroden. Deshalb berechnet sich die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D mittels Hybridsensoren wie folgt,

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{MIT} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{ICEIT} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

mit \mathbf{C}_{MIT} als Kovarianzmatrix aus den Spannungsdaten an den Receiverspulen. Weiters wird die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{ICEIT} aus den Spannungsdaten an den Elektroden berechnet. Durch die bereits genannte Annahme der unkorrelierten Modellparameter wird die Einheitsmatrix \mathbf{I} für die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_M der Modellparameter verwendet.

3.7 Punktspreizfunktion

Die Punktspreizfunktion (PSF) gibt an, wie ein idealisiertes punktförmiges Objekt in einem Bild dargestellt wird. Sie ist ein Maß, wie stark ein Punkt in einem Bild verwaschen wird. Daraus lassen sich Rückschlüsse für die Qualität eines bildgebenden Verfahren wie zum Beispiel in der Elektronenmikroskopie, Lichtmikroskopie oder auch Fluoreszenzmikroskopie ziehen.

Die Auflösung wird in der MIT und ICEIT mit dem Rayleigh-Kriterium charakterisiert. Hierbei wird angenommen, dass zwei Objektpunkte genau dann noch zu trennen sind, wenn das zentrale Maximum des einen Punktes im ersten Nulldurchgang der PSF des anderen liegt (siehe dazu Abb. 3.6). Geht man von einer PSF aus, die einer Sinc-Funktion entspricht, ist die kleinste unterscheidbare Distanz zwischen den beiden Punkten gleich zu setzen mit der Breite der PSF bei 64% ihres Maximums.

Aus der linearen inversen Theorie besteht die Möglichkeit die theoretische Auflösung mittels der Sensitivitätsmatrix zu berechnen. Unter der Verwendung der Gleichungen (3.27) und (3.28) ergibt sich für die Auflösungsmatrix \mathbf{R} folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^+ \mathbf{S}. \quad (3.52)$$

Die Spalten der Auflösungsmatrix ergeben hierbei die Punktspreizfunktionen zu den korrespondierenden Punkten (Tetraederelemente). Die Berechnung der Auflösung im Falle der

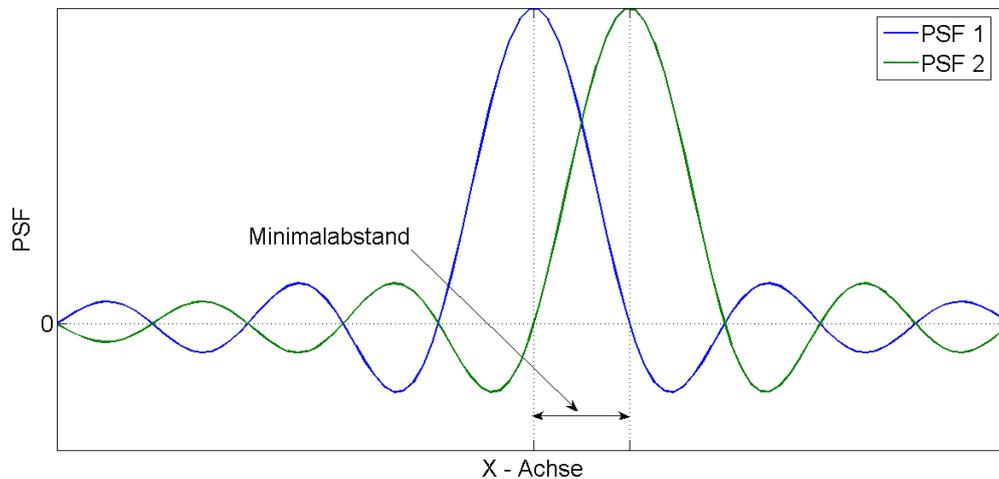


Abb. 3.6: Punktspreizfunktion zweier abzubildender Punkte

ICEIT und Hybridmethode erfolgt in gleicher Weise, indem man die zu den Verfahren gehörenden Sensitivitätsmatrizen (\mathbf{G} und \mathbf{H}) in Gleichung (3.52) einsetzt.

Bei einer idealen Auflösung wird die Matrix \mathbf{R} zu einer Einheitsmatrix \mathbf{I} , wobei alle Bildpunkte zueinander unkorreliert sind. Bei fehlenden Informationen in der Sensitivitätsmatrix ergibt sich jedoch keine Einheitsmatrix mehr für die Auflösung.

3.8 Signal-Rausch-Verhältnis

Das Signal-Rausch-Verhältnis (engl. *signal to noise ratio* SNR) ist definiert als Verhältnis der mittleren Signalleistung zur mittleren Rauschleistung. Weiters kann dieses Verhältnis über den Effektivwert des Nutzsignals \mathbf{U}_S und des Rauschsignals \mathbf{U}_N mit,

$$SNR = 20 \log_{10} \left(\frac{\mathbf{U}_S}{\mathbf{U}_N} \right). \quad (3.53)$$

definiert werden. Aus der logarithmische Darstellung ergibt sich für das SNR die Einheit Dezibel [dB]. Für die Simulation realer verauschten Messdatenreihen werden in der MIT und ICEIT berechneten Spannungsdaten $\Delta \mathbf{v}$ mit einem unkorrelierten Gaußrauschen beaufschlagt. Dafür werden Signal-Rausch-Verhältnisse zwischen 20dB und 80dB verwendet.

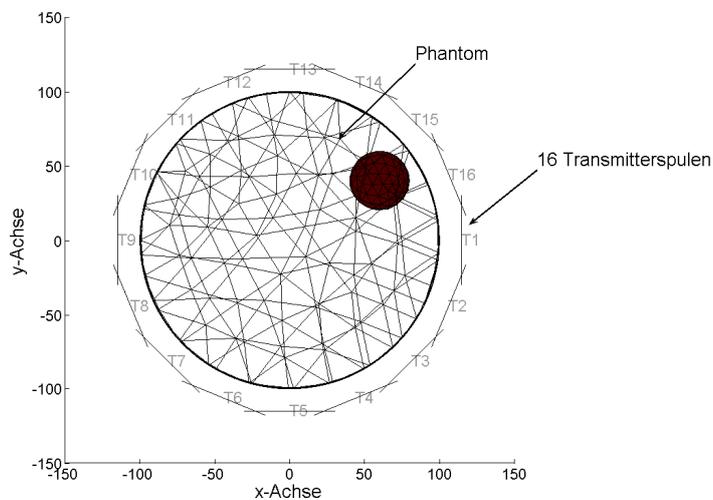
3.9 Modell Setup

Die Rekonstruktionen wurden bei den drei vorgestellten Methoden (MIT, ICEIT und Hybridmethode) mit einem simplen dreidimensionalen Modell in der Form eines Zylinders durchgeführt. Die Realisierung des zeitharmonische Magnetfeldes zur Stimulation erfolgte durch insgesamt 16 identen kreisförmigen Transmitterspulen mit einer Frequenz von 100kHz. Die Anordnung der Spulen war mit ihren Zentren ringförmig rund um das zylindrische Phantom gegeben. Somit wurde eine Ringebene mit einem Radius von 115mm, planparallel zur xy-Ebene gebildet (siehe dazu 3.7). Alle 16 Transmitterspulen waren mit dem gleichen Radius von 30mm angeordnet. Die Geometrie des Phantom entsprach einem Zylinder mit dem Radius von 100mm und einer Höhe von 300mm. Das Zentrum dieses Phantoms befand sich hierbei im Ursprung des Koordinatensystems. Dieses Modell wurde mit Hilfe des Netzgenerators NETGEN(siehe [14]) erzeugt und bestand aus insgesamt 19128 Tetraederelementen erster Ordnung.

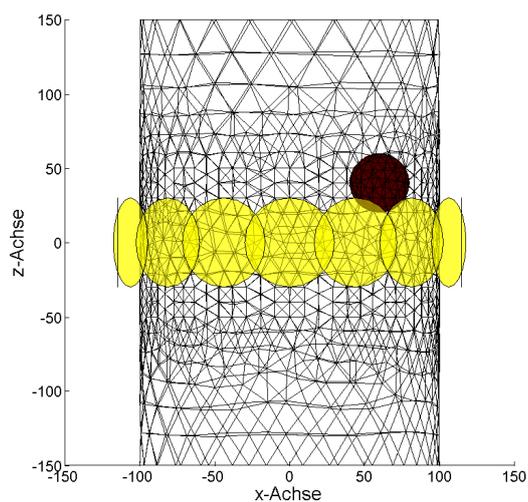
Für die Spannungsmessung in der MIT kamen insgesamt 32 kreisförmige Receiverspulen mit jeweils einem Radius von 35mm zum Einsatz. Die Anordnung der Spulen rund um das Phantom erfolgte ringförmig mit dem Radius von 110mm. Dabei wurden die 32 Messspulen auf zwei Ringebenen zu je 16 Receiverspulen aufgeteilt. Der vertikale Abstand (z-Achse) dieser planparallelen Ebenen entsprach 80mm. Eine graphische Darstellung einer solchen Anordnung ist in Abb.3.8 illustriert.

Bei der Spannungsmessung in der ICEIT wurden 32 idente Rechteckelektroden mit den Abmessungen 25x25mm verwendet. Die Positionierung der Elektroden erfolgte ringförmig auf der Oberfläche des Phantoms in zwei Messebenen, planparallel zur xy-Ebene, mit jeweils 16 Elektroden. Der vertikale Abstand zwischen den Messebenen entsprach hierbei 40mm und ergab somit dieselbe geometrische Anordnung der Messelektroden wie bei der MIT. Die Elektrodenform und Elektrodenanordnung, ist in Abb. 3.9 dargestellt.

Aus der Kombination der beiden Messsysteme MIT und ICEIT ergab sich die Modellierung der Hybridmethode. Die Anzahl der verwendeten Messsensoren für das jeweilige Rekonstruktionsverfahren ist in Tab. 3.1 angeführt.



(a) Draufsicht

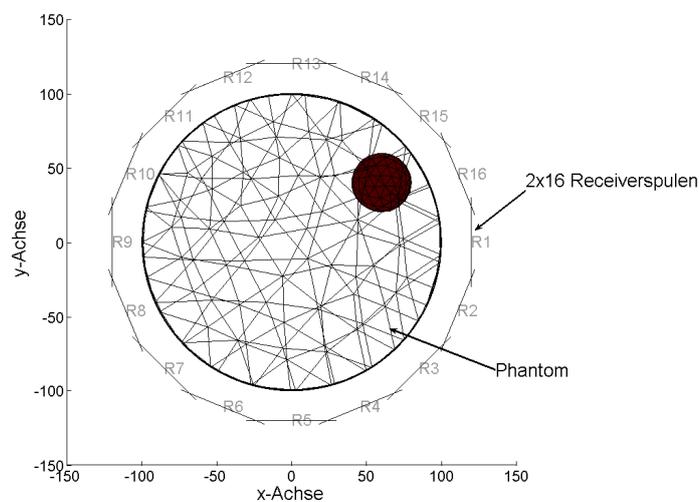


(b) Seitenansicht

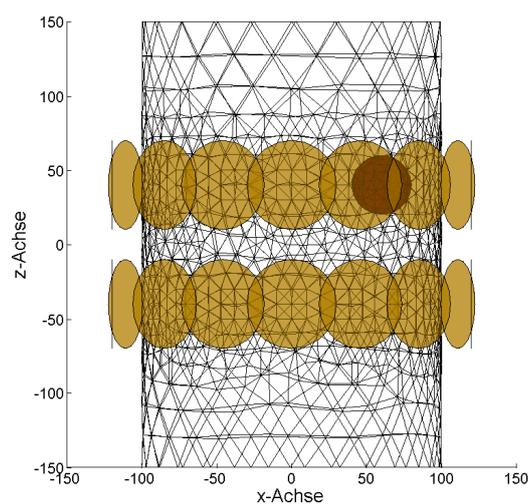
Abb. 3.7: Position der Transmitterspulen an einem zylindrischen Phantom. Die Draufsicht und Seitenansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.

	MIT	ICEIT	Hybridmethode
Anzahl der Transmitterspulen	16	16	16
Anzahl der Receiverspulen	32	-	32
Anzahl der Elektroden	-	32	32

Tabelle 3.1: Anzahl der Messensoren für das jeweilige Rekonstruktionsverfahren



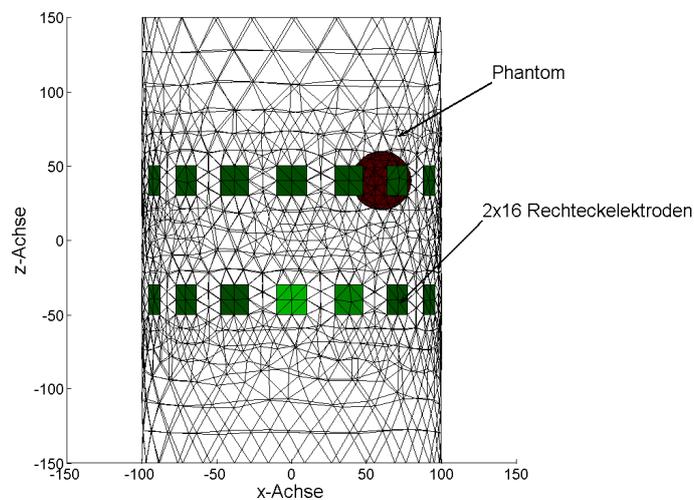
(a) Draufsicht



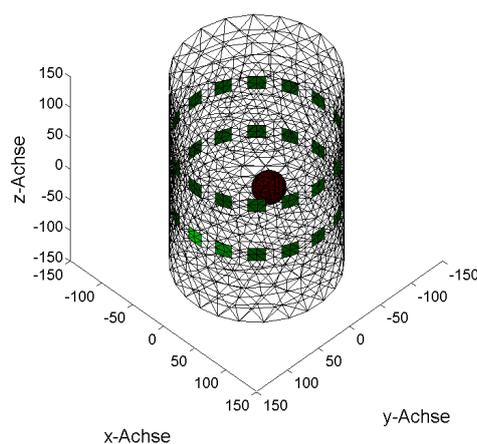
(b) Seitenansicht

Abb. 3.8: Position der Receiverspulen an einem zylindrischen Phantom. Die Draufsicht und Seitenansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.

Aus der Tatsache, dass alle Spannungsänderungen sowohl in den Receiverspulen als auch in den Elektroden von einer Leitfähigkeitsänderung im Phantom abhängen, wurde eine homogene Referenzleitfähigkeit mit 1S/m bestimmt. Diese Leitfähigkeit stellte somit den Hintergrund für aller Rekonstruktionen dar, d.h. alle Leitfähigkeitsänderungen sind auf diesen bezogen. Das zu rekonstruierende Objekt ist in der Form einer leitfähigen Sphäre an



(a) Draufsicht



(b) 3D-Ansicht

Abb. 3.9: Position der Rechteckelektroden an einem zylindrischen Phantom. Die Seitenansicht und 3D-Ansicht werden im oberen bzw. unteren Bild dargestellt. Alle Abmessungen sind in Millimeter angegeben.

der Position $[x, y, z] = [60, 40, 40]$ mm mit einem Radius von 25 mm im Phantom definiert worden. Die Leitfähigkeit der sphärische Störung war mit 2 S/m gegeben und ergab somit eine Differenz von 1 S/m zur Referenzleitfähigkeit.

Aus diesen Systemanordnungen ergaben sich für die Receiverspulen und Elektroden genau 512 unabhängige Messspannungen. Daraus folgten insgesamt 1024 unabhängige Messda-

ten für die Hybridmethode. Alle ermittelten Spannungsdaten wurden bei Verwendung für die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung mit einem unkorrelierten Gaußrauschen beaufschlagt.

3.10 Simulation und Evaluierung

Simulation

Folgende Simulationen wurden durchgeführt:

- Berechnung aller Spannungsdaten an den Messsensoren für eine homogene (Hintergrund) und eine inhomogene (Sphäre) Leitfähigkeitsverteilung im zylindrischen Phantom, durch lösen der Vorwärtsprobleme für die MIT, ICEIT und der Hybridmethode.
- Rekonstruktion der Leitfähigkeitsänderung in der Sphäre im zylindrischen Phantom mittels der Methoden MIT, ICEIT und Hybrid unter Anwendung der Einheitsmatrix \mathbf{I} als Regularisierungsmatrix. Der Regularisierungsparmeter λ wurde dabei mit dem Morozov-Verfahren bestimmt.
- Rekonstruktion der Leitfähigkeitsänderung in der Sphäre im zylindrischen Phantom mittels der Methoden MIT, ICEIT und Hybrid unter Anwendung der jeweiligen Kovarianzmatrizen \mathbf{C}_D der Messdaten als Regularisierungsmatrix. Der Regularisierungsparmeter λ wurde dabei eins gesetzt.

Evaluierung

Für die Analysen der jeweiligen Systeme (MIT, ICEIT und Hybridmethode) sind die Punktspreizfunktionen für die Berechnung der radialen Auflösungen bestimmt worden. Die Auflösung der einzelnen Elemente berechnete sich dabei über deren PSF, indem 64% des Maximums bestimmt und daraus die Breite der Hauptkeule ermittelt wurde. Diese Breite in Relation zum Zylinderradius bestimmte die radiale Auflösung. Daraus wurden folgende Evaluierungen durchgeführt:

- Berechnung der radialen Auflösung für alle drei Methoden bei einem SNR von 80dB, 40dB und 20dB.

3.11 Programmstruktur

Die Berechnung der Vorwärtsprobleme und der Inverse Probleme wurde numerisch in Matlab(The Math Works Inc.) implementiert und durchgeführt. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die erstellten Funktionen und Programme gegeben. Das Hauptprogramm unterteilt sich dabei in drei große Unterprogramme:

- Netzgenerierung
- Lösung der Vorwärtsprobleme
- Rekonstruktion und Evaluierung.

3.11.1 Funktion zur FEM - Netzgenerierung

Die Netzgenerierung des Phantoms und der Elektroden wurde mit Hilfe des Netzgenerators NETGEN (siehe [14]) durchgeführt. Dazu wurde eine Matlab-Routine erstellt die es ermöglicht, alle geometrischen Spezifikation der Elektroden und des Phantoms zu definieren und eine Netzgenerierung durchzuführen. Die Programmierung dieser Routine basiert auf der Grundlage von 3D-EIDORS (Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software) und wurde wesentlich für diese Arbeit verändert. Eine Zusammenfassung der erstellten Programme für die Netzgenerierung ist in Tab.3.2 dargelegt.

3.11.2 Funktionen zur Lösung der Vorwärtsprobleme

In diesem Abschnitt werden die Vorwärtsprobleme der MIT und ICEIT über die FE - Methode gelöst. D.h. im Speziellen werden die Spannungsdaten an den Receiverspulen und an den Elektroden für eine vorgegebene Leitfähigkeitsverteilung berechnet. Auch die

Funktionsaufruf	Beschreibung
fwd_model_netgen()	Hauptprogramm: Erzeugt zwei FEM - Vorwärtsmodelle mit homogener und inhomogener Leitfähigkeit mittels des Programms Netgen, wobei nur sphärische Leitfähigkeitsstörungen und zylindrische Phantome erzeugt werden können.
cylindersphere()	Diese Routine erstellt aus den vorgegebenen Spezifikationen des Zylinders und der Elektroden eine Geometriedatei (.geo). Sie stellt das Interface zwischen Matlab und Netgen dar.
container()	Definierung der Zylinderabmessungen
perturbation()	Definition der geometrischen Form der Leitfähigkeitsstörung
electrode()	Definition der Elektrodenabmessungen und deren Positionen
receiver()	Definition der Receiverspulenabmessungen und deren Positionen
transmitter()	Definition der Transmitterspulenabmessungen und deren Positionen

Tabelle 3.2: Matlab-Funktion für die Netzgenerierung.

Sensitivitätsmatrizen (**S**, **G** und **H**), die vor allem für das Inverse Problem von Bedeutung sind, werden in diesem Programmteil erstellt. Eine Übersicht der dazu verwendeten und erstellten Programme ist in Tabelle 3.3 dargestellt.

Funktionsaufruf	Beschreibung
feldelectric()	Diese Funktion berechnet für eine in der Funktion transmitter() spezifizierte Transmitterspulenordnung die Potentialverteilung und das elektrische Feld im Phantom. Der gesamte $A-\phi$ Formalismus wird in diesem Programm abgearbeitet. Weiters kann über eine spezifizierte Receiverspulenordnung das fiktive elektrische Feld berechnet werden, welches zur Ermittlung der Sensitivitätsmatrix S benötigt wird.
eitfeldelectric()	Diese Funktion berechnet die Potentialverteilung und das elektrische Feld im Phantom für ein Elektrodenmodell und ermöglicht somit die Berechnung der Sensitivitätsmatrix G .
directvoltage()	Diese Funktion berechnet die Spannungsdaten aus einer gegebenen Potentialverteilung an den Messelektroden.
adjointelectric()	Diese Funktion erzeugt die beiden Sensitivitätsmatrizen S und G mittels des gezeigten Reziprozitätstheorem. Mit Hilfe dieser können die Spannungsdaten an den Receiverspulen bzw. an den Messelektroden bestimmt werden.

Tabelle 3.3: Matlab-Funktion für die Berechnung der Vorwärtsprobleme und der Sensitivitätsmatrizen.

3.11.3 Funktionen der Rekonstruktion und Evaluierung

Mit diesem Programmteil wird die Rekonstruktion und die Berechnung der PSF für die Analyse der Auflösung durchgeführt. Die dazu verwendeten Funktionen sind in der Tabelle 3.4 gezeigt.

Funktionsaufruf	Beschreibung
solution()	Diese Funktion löst das Inverse Problem der MIT, ICEIT und Hybridmethode.
morozov()	Diese Funktion berechnet den Regularisierungsparameter λ mittels des Prinzips nach Morozov.
resolution_3D()	Diese Funktion berechnet die radiale Auflösung.
psffind()	Diese Funktion ermittelt die Punktspreizfunktion eines vorgegebenen Punkts
show_modell()	Ausgabeprogramm für die Darstellung der FEM-Modelle.

Tabelle 3.4: Matlab-Funktion für die Berechnung der Inversen Probleme

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Spannungsdaten an den Messsensoren

Die Spannungsdaten an den Receiverspulen bei MIT ergeben sich aus der Lösung des Vorwärtsproblems in Verbindung mit dem beschriebenen Reziprozitätstheorem. Dazu werden die Spannungen bei einer homogenen und inhomogenen Leitfähigkeitsverteilung im zylindrischen Phantom bestimmt und deren Differenz für die weitere Rekonstruktion verwendet. Die homogene Verteilung stellt dabei den Hintergrund da. Die 16 Transmitterspulen in Kombination mit den 32 Receiverspulen ergeben die, in der Abbildung 4.1 dargestellten 512 Spannungsdaten und deren Differenz. Jeweils 32 Messdaten sind in ihrer Anzahl aufsteigend, beginnend mit T1 den Transmitterspulen T1-T16 zugeordnet. D.h. das Messdatum 1 ergibt sich aus der Receiverspule R1 bei einer Stimulierung mit T1 und z.B. das Messdatum 33 bestimmt sich aus R1 und T2. In gleicher Weise besteht die Zuordnung bei der ICEIT.

Aus Abbildung 4.1 (oberes Bild) ist deutlich erkennbar, dass sich die Spannungsdaten zwischen homogener und inhomogener Verteilung nur marginal ändern.

Bei der ICEIT werden die Spannungen zwischen benachbarten Rechteckelektroden bestimmt. Hierbei berechnet sich das jeweilige Elektrodenpotential aus der Mittelung aller beinhaltenden Knotenpotentiale ϕ_k . Daraus ergibt sich die Spannung aus der Differenz der

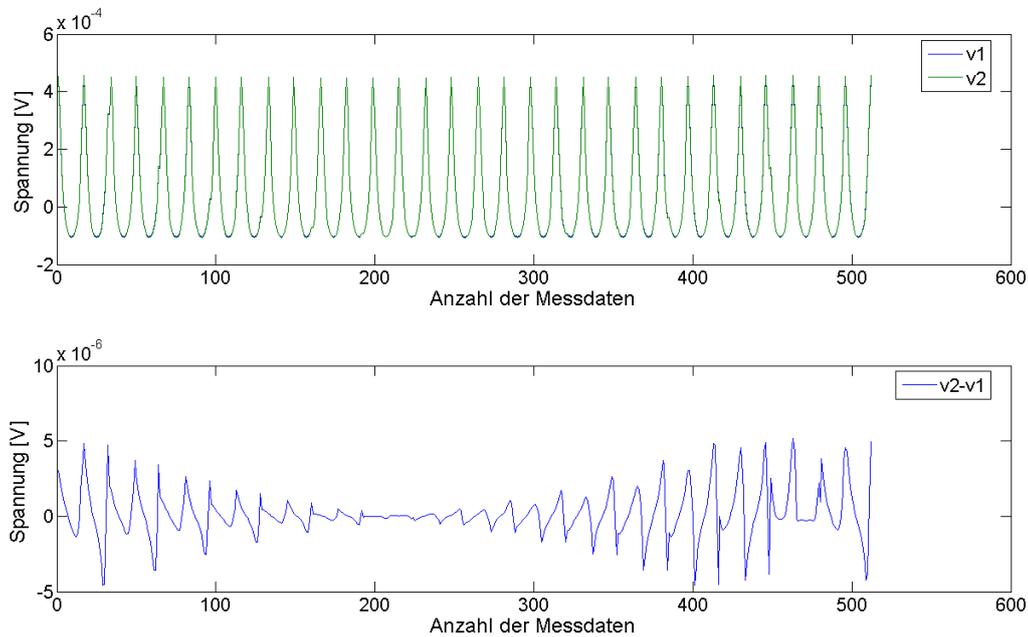


Abb. 4.1: Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Receiverspulen der MIT. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt.

benachbarten Elektrodenpotentiale. Es ergeben sich aus 16 Transmitterspulen gepaart mit insgesamt 32 Elektroden ebenfalls wiederum 512 Spannungsdaten (siehe dazu Abb.4.2). Auch hier zeigt sich in der Abbildung Abb. 4.2(oberes Bild) nur eine geringe Änderung der Spannungsdaten aufgrund der Leitfähigkeitsänderung. Weiters sind in der Abbildung 4.3 exemplarisch für die Stimulation durch die Transmitterspule T1 die 32 Spannungsdaten an den Receiverspulen sowie an den Elektroden im Detail dargestellt. D.h. es werden die Spannungen der ersten Transmitter-Receiverspulenordnung und der Transmitter-Elektrodenanordnung wiedergegeben. Die erste Transmitterspule T1 ist mit ihrem Zentrum an der Position $[x, y, z] = [115, 0, 0]$ fixiert und erzeugt somit insgesamt 32 Messdaten in den 32 Receiverspulen bzw. in den 32 Elektroden. Betrachtet man nun die Receiverspannungen in Abbildung 4.3(unteres Bild) erkennt man, dass die höchsten Spannungen dort auftreten, wo die Receiverspulen den geringsten Abstand zu der Transmitterspule aufweisen. Somit ergeben sich aus diesem Grunde die maximalen Spannungswerte an den Receiverspulen R1 und R17, deren Zentren sich an den Positionen $[x, y, z] = [120, 0, 40]$

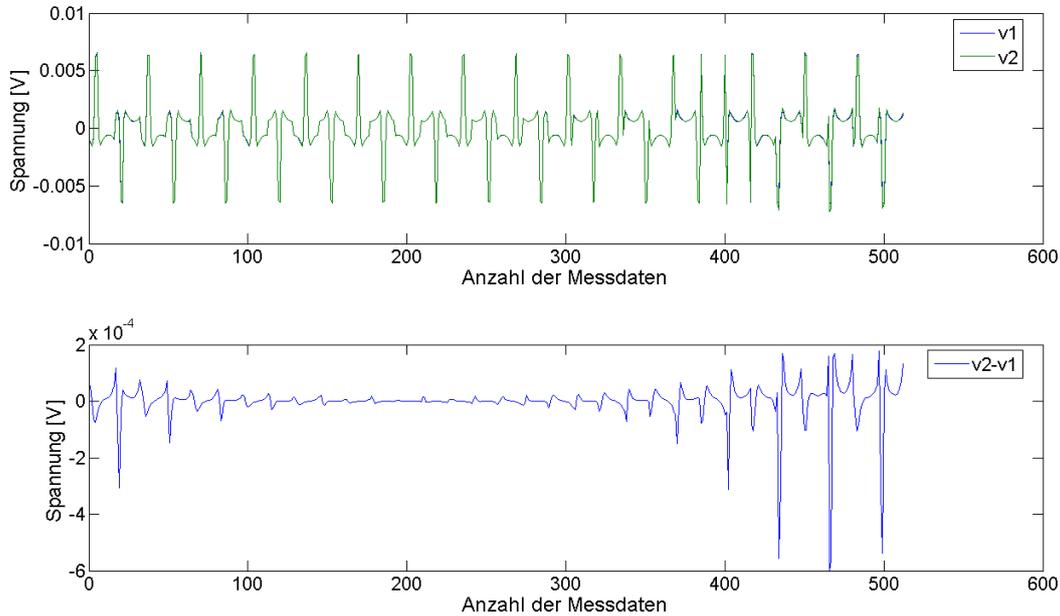


Abb. 4.2: Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Elektroden der ICEIT. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt.

und $[x, y, z] = [120, 0, -40]$ befinden.

Die gleiche Tatsache lässt sich auch an den Elektroden feststellen. Jene Elektrodenpaare, die sich am nächsten zu der stimulierenden Transmitterspule T1 befinden, messen die höchste Spannung. Betrachtet man die Elektrodenanordnung in Abb. 3.9 ist die Elektrode 1 in hellgrüner Farbe dargestellt. Ausgehend von der Elektrode 1, erfolgt die Nummerierung der Elektroden gegen dem Uhrzeigersinn. Die Elektroden 1 bis 16 befinden sich auf Messebene 1 und die von 17 bis 32 Messebene 2. Aus der Position der ersten Transmitterspule T1 ergeben sich somit die höchsten Spannungsdaten für die Elektrodenpaare $U_{3,4}$, $U_{4,5}$, $U_{19,20}$ und $U_{20,21}$. Die Indexierung bei den Spannungsdaten kennzeichnet hierbei die zugeordneten Elektroden. Aus den Abbildungen 4.1 und 4.2 (siehe dazu jeweils die unteren Bilder) wird die Abhängigkeit der Spannungsdifferenzen von der stimulierenden Transmitterspulenposition sichtbar. Die Spannungsdifferenz wird durch die Änderung der Leitfähigkeit begründet. Daher ergeben sich dort, wo sich die stimulierenden Transmitterspulen am nächsten zur Leitfähigkeitsänderung (Sphäre) positioniert sind, die größten

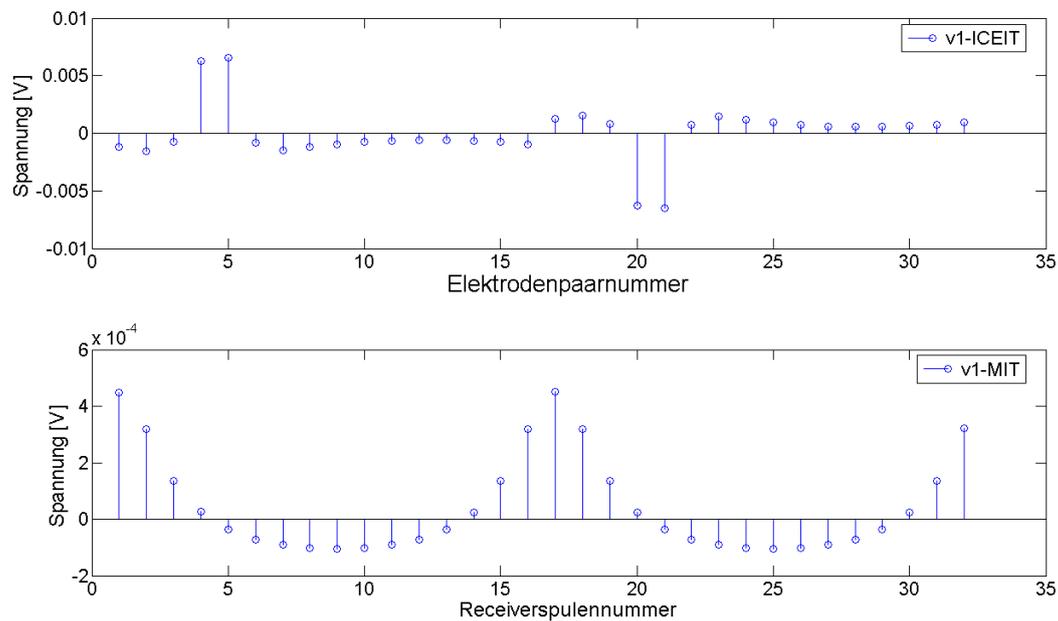


Abb. 4.3: Darstellung der 32 Messdaten bei einer homogenen Leitfähigkeitsverteilung und einer Stimulierung über die Transmitterspule T1. Oberes Bild: Die Elektrodenspannungen aus ICEIT. Unteres Bild: Die Receiverspannungen aus MIT.

Spannungsänderungen sowohl an den Receiverspulen, als auch an den Rechteckelektroden. Da die MIT mit Hybridsensoren sowohl mit Messspulen, als auch Messelektroden bestückt ist, lassen sich aus den berechneten Spannungsdaten an den Receiverspulen und Rechteckelektroden insgesamt 1024 Messdaten realisieren. Diese sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Dabei stellt man fest, dass sich die Spannungsdaten der MIT und ICEIT in ihre Größe stark voneinander unterscheiden.

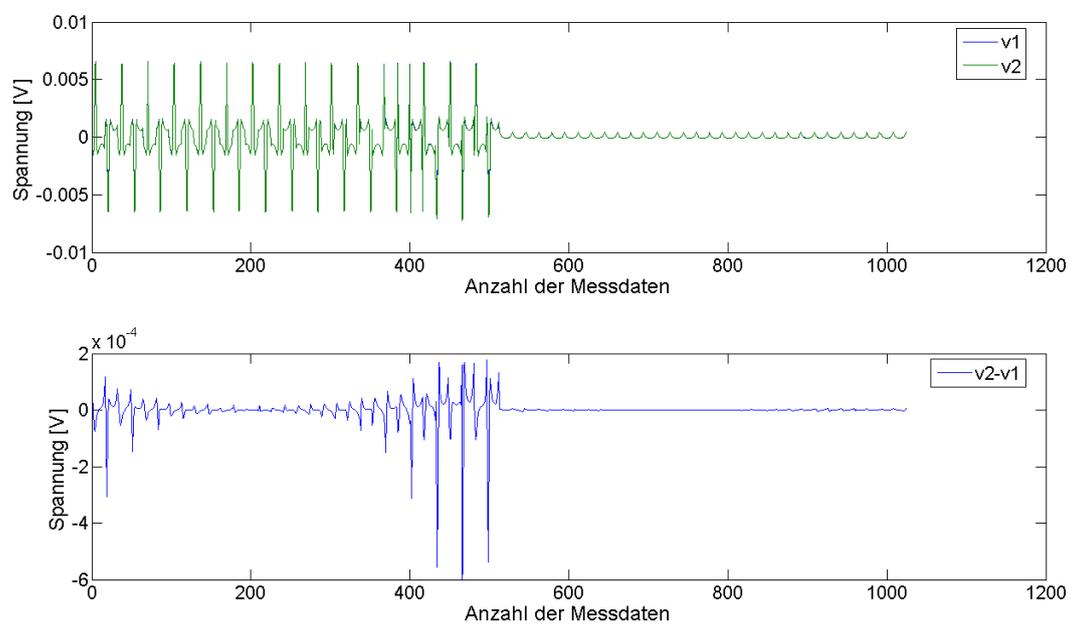


Abb. 4.4: Das obere Bild zeigt die Spannungsdaten v_1 und v_2 bei homogener und inhomogener Leitfähigkeitsverteilung an den Rechtelektroden (1-512) und den Receiverspulen (513-524) der Hybridmethode. In dem unteren Bild ist die Differenz der beiden Spannungsdaten dargestellt.

4.2 Bildrekonstruktionen

Die Bildrekonstruktion ergibt sich aus der Lösung der Inversen Probleme für das jeweilige Verfahren. Dazu wurden zwei Rekonstruktionen der Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$, die sich hauptsächlich in der Definition der Regularisierungsmatrix unterscheiden, durchgeführt.

4.2.1 Rekonstruktion mittels der Einheitsmatrix

Als Regularisierungsmatrix wurde bei nachfolgend beschriebenen Bildrekonstruktion die Einheitsmatrix \mathbf{I} gewählt. Der Regularisierungsparameter λ wurde mit dem Morozov-Verfahren bei einem SNR von 20dB, 40dB und 80dB bestimmt. Die ermittelten Regularisierungsparameter finden sich in Tabelle 4.1 wieder.

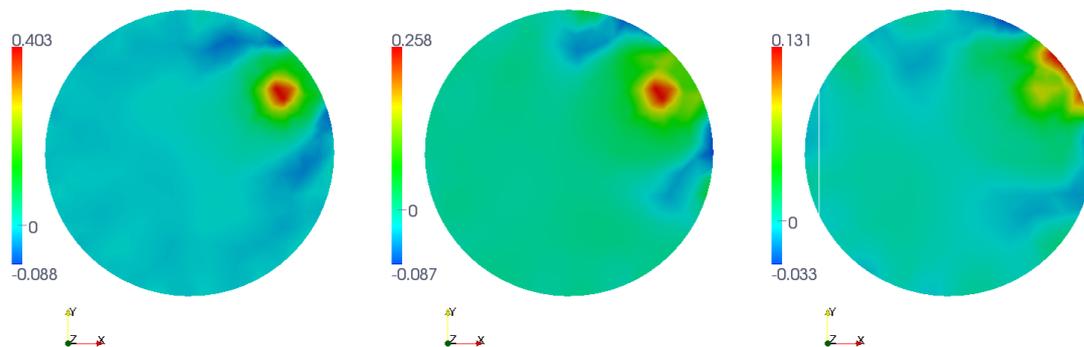
SNR	MIT λ	ICEIT λ	Hybrid λ
80dB	$8.0584 \cdot 10^{-18}$	$1.6548 \cdot 10^{-15}$	$1.2409 \cdot 10^{-15}$
40dB	$2.2067 \cdot 10^{-14}$	$2.5483 \cdot 10^{-10}$	$1.6548 \cdot 10^{-10}$
20dB	$2.5483 \cdot 10^{-12}$	$9.3057 \cdot 10^{-10}$	$9.3057 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 4.1: Regularisierungsparameter λ für die MIT,ICEIT und Hybridmethode

In den Abbildungen 4.5 und 4.6 sind die einzelnen Rekonstruktionen der Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$ dargestellt. Die Schnittbilder zeigen die Transversalebene und die Sagittalebene des zylindrischen Phantoms an den Positionen $[x, y, z] = [0, 0, 40]$ mm und $[x, y, z] = [0, 40, 0]$ mm. Die Reihen korrespondieren mit den drei angewendeten Rekonstruktionsverfahren und die Spalten zeigen die Schnittbilder bei unterschiedlichem SNR von 80dB, 40dB, 20dB.

An diesen Abbildungen lässt sich nun erkennen, dass die Rekonstruktion bei allen drei Methoden sehr stark von den Messdaten und deren Qualität abhängt. Bei einem SNR von 80dB wird die sphärische Leitfähigkeitsänderung von den drei Verfahren recht gut rekonstruiert. Im Gegensatz dazu, sind die Bilder bei einem SNR von 20dB stark verrauscht und können keine klar abgegrenzte Rekonstruktion der sphärischen Leitfähigkeitsänderung darstellen. Betrachtet man dazu die Regularisierungsparameter λ aller Methoden, erkennt man, dass bei stark verrauschten Messdaten eine sehr starke Regularisierung der Systeme

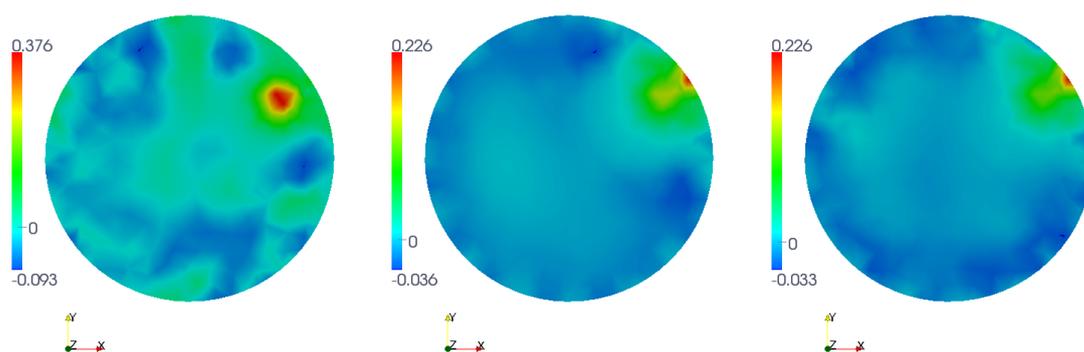
vorgenommen wird. Dadurch kommt es zu einer Verfälschung der zu invertierenden Matrizen bzw. zu einer Überregularisierung, die sich in den Rekonstruktionen negativ auswirkt. Ab einem SNR von 40dB ergeben sich vor allem für die ICEIT und die Hybridmethode verwaschene Bildrekonstruktionen. Obwohl bei der Hybridmethode zusätzliche 512 Messdaten im Gegensatz zu den anderen Verfahren verwendet werden, ist es überraschend, dass die Rekonstruktion keineswegs besser gelingt als bei der MIT und ICEIT. Der Grund dafür ist die Wahl der Regularisierungsmatrix bzw. die Anwendung des Morozov-Verfahrens. Die Sensitivitätsmatrix der Hybridmethode \mathbf{H} besteht aus den beiden Sensitivitätsmatrizen \mathbf{S} und \mathbf{G} der MIT und ICEIT. Wie man schon an den Spannungsdaten erkennen kann, sind die Messdaten an den Receiverspulen ca. um den Faktor 100 kleiner als an den Elektroden. Diese Tatsache spiegelt sich auch in den Werten der Sensitivitätsmatrizen \mathbf{S} und \mathbf{G} wieder und verursacht somit eine ungleiche Gewichtung der Gesamtmatrix \mathbf{H} . Daraus ergibt sich, dass die Matrix \mathbf{G} sensitiver in Relation zur Matrix \mathbf{S} wirkt. Somit wird die Lösung des Inversen Problems der Hybridmethode stark von den Informationen der Sensitivitätsmatrix \mathbf{G} aus der ICEIT bestimmt. Aus dem Morozov-Prinzip ergeben sich daraus in der Größenordnung fast identische Regularisierungsparameter λ für die ICEIT und Hybridmethode (siehe Tabelle 4.1).



(a) MIT, 80dB

(b) MIT, 40dB

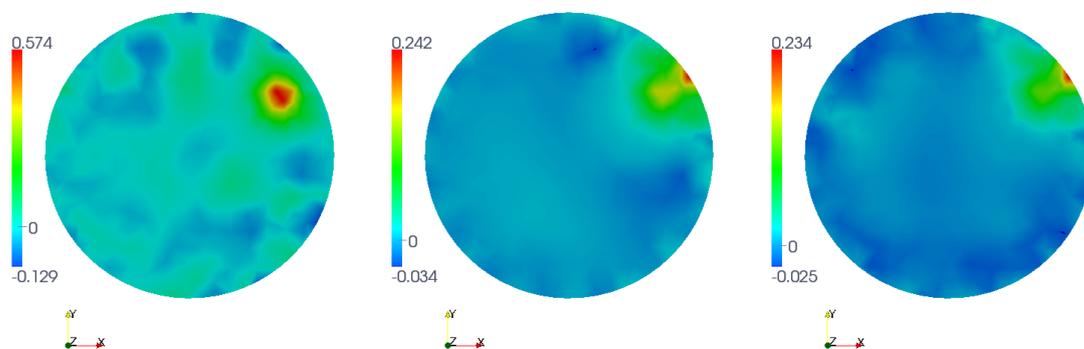
(c) MIT, 20dB



(d) ICEIT, 80dB

(e) ICEIT, 40dB

(f) ICEIT, 20dB

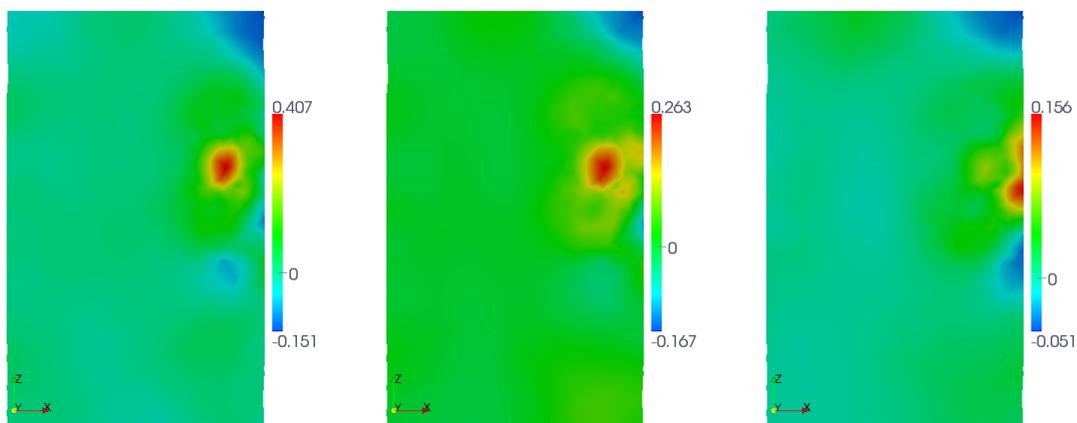


(g) Hybrid, 80dB

(h) Hybrid, 40dB

(i) Hybrid, 20dB

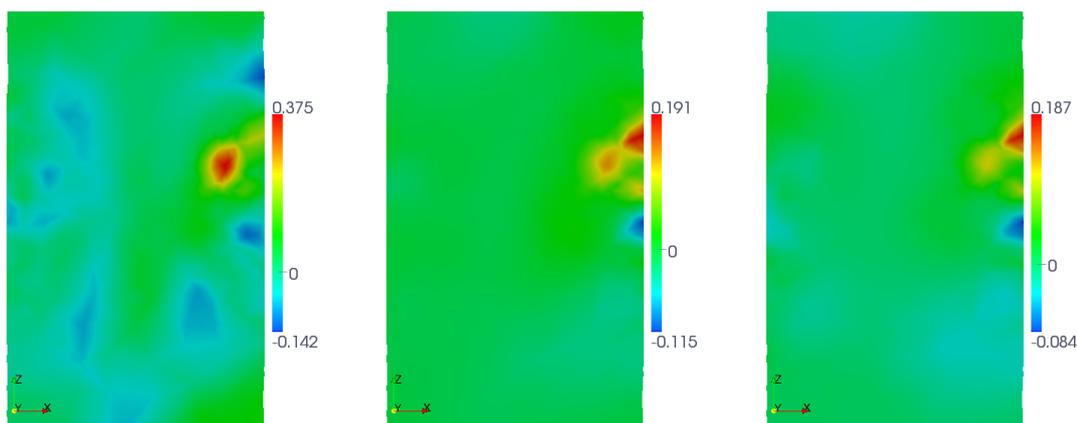
Abb. 4.5: Transversalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT, ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}



(a) MIT, 80dB

(b) MIT, 40dB

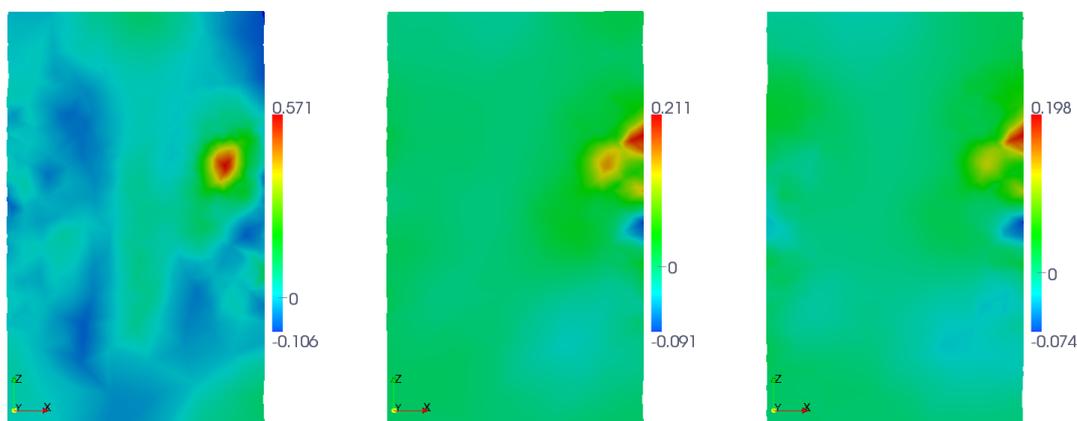
(c) MIT, 20dB



(d) ICEIT, 80dB

(e) ICEIT, 40dB

(f) ICEIT, 20dB



(g) Hybrid, 80dB

(h) Hybrid, 40dB

(i) Hybrid, 20dB

Abb. 4.6: Sagittalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT, ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}

4.2.2 Rekonstruktion mittels der Kovarianzmatrix

Als Regularisierungsmatrix wurde für die Rekonstruktionen die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten verwendet. Der Regularisierungsparameter λ ist dabei mit 1 bestimmt worden, um einer Überregularisierung vorzubeugen. In den Abbildungen 4.7 und 4.8 sind die einzelnen Rekonstruktionen der Leitfähigkeitsdifferenz $\Delta\sigma$ dargestellt. Die Schnittbilder zeigen die Transversalebene und die Sagittalebene des zylindrischen Phantoms an den Positionen $[x, y, z] = [0, 0, 40]$ und $[x, y, z] = [0, 40, 0]$. Die Reihen korrespondieren mit den drei angewendeten Rekonstruktionsverfahren und die Spalten zeigen die Schnittbilder bei unterschiedlichem SNR von 80dB, 40dB, 20dB.

In den Abbildungen 4.7 und 4.8 ist eine Verbesserung der Bildrekonstruktionen zu erkennen. Bis auf die ICEIT wird die sphärische Leitfähigkeitsstörung über alle Signal-Rausch-Abstände gut abgegrenzt detektiert. Daraus folgt, dass sich die Kovarianzmatrix der Messdaten für die Regularisierung eindeutig besser eignet als die Einheitsmatrix. Durch die a priori Information der Messdaten kommt es bei stark verrauschten Messdaten nicht zu einer Überregularisierung der Inversen Probleme. Vor allem die Rekonstruktionen der Hybridmethode sind durch diese Regularisierung stark verbessert worden. Diese Verbesserung wird durch die Form der Kovarianzmatrix der Hybridmethode herbeigeführt. Diese Form beinhaltet die Varianz der verrauschten Receiverspannungen und Elektrodenspannungen. Dadurch wird die Sensitivitätsmatrix \mathbf{H} , die aus den beiden Sensitivitätsmatrizen \mathbf{S} und \mathbf{G} besteht, gewichtet und erzeugt somit eine Normalisierung. Somit gehen die Informationen der MIT und ICEIT gleich stark in die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz für die Hybridmethode ein.

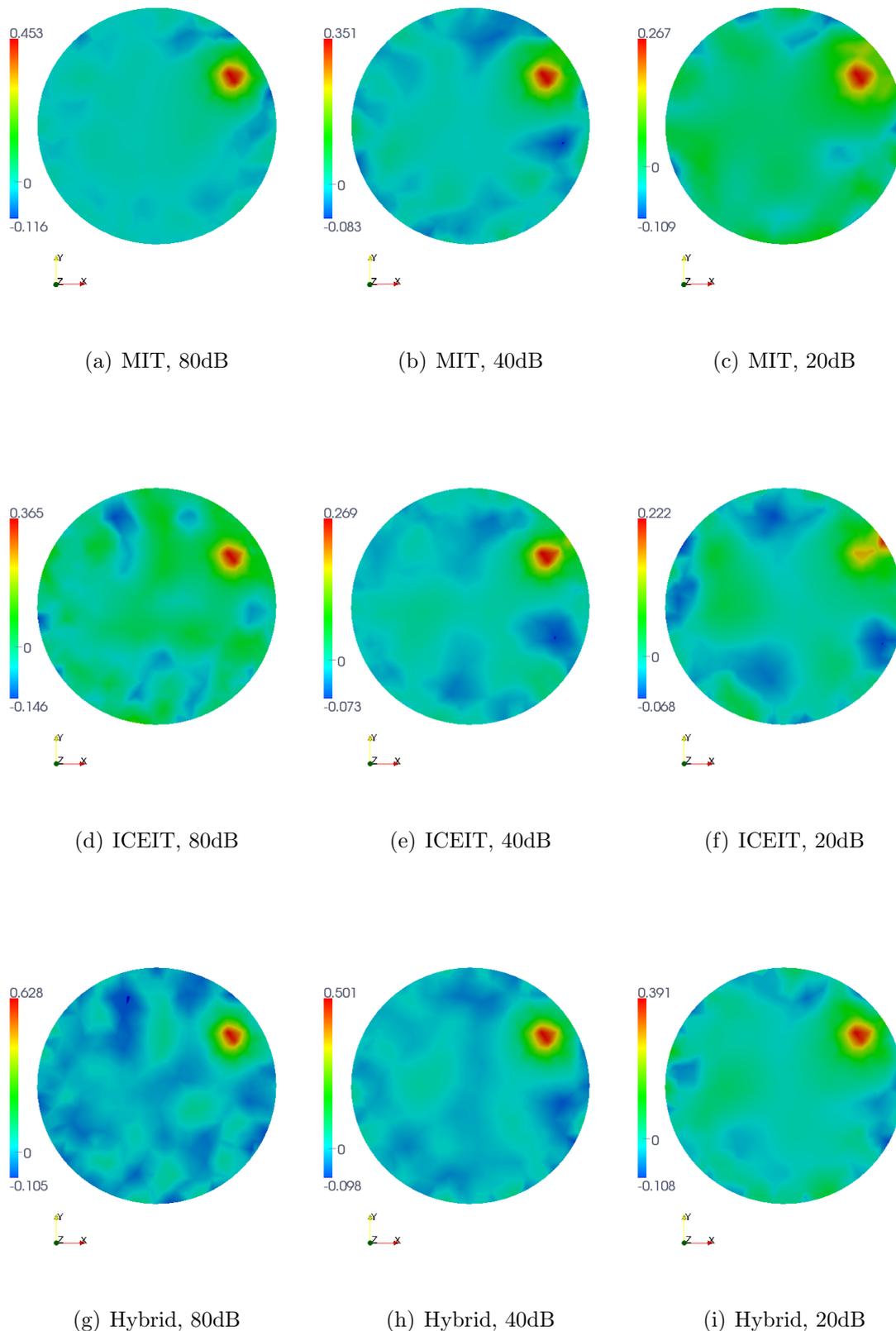
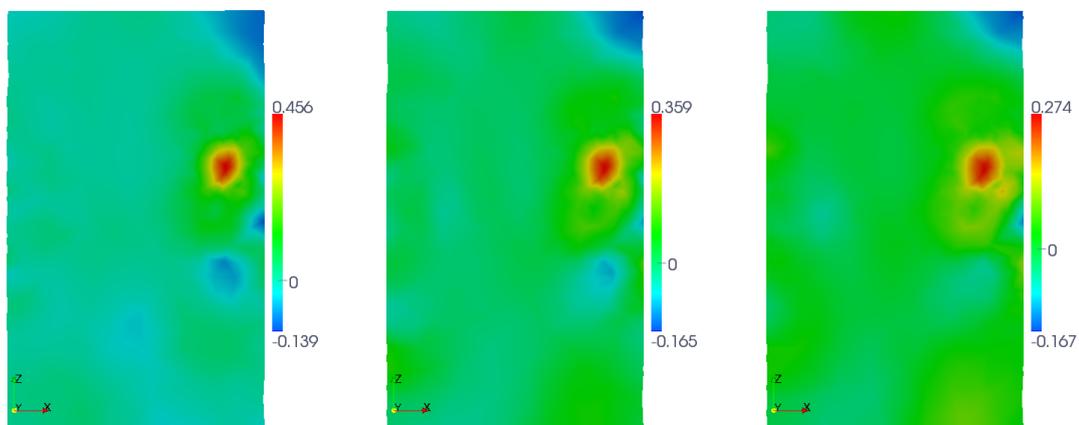


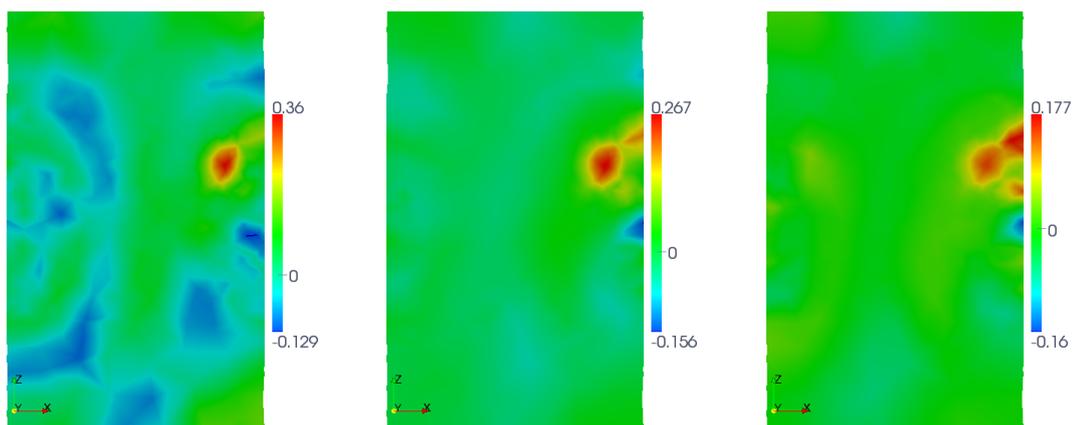
Abb. 4.7: Transversalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT, ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Kovarianzmatrix C_D der Messdaten.



(a) MIT, 80dB

(b) MIT, 40dB

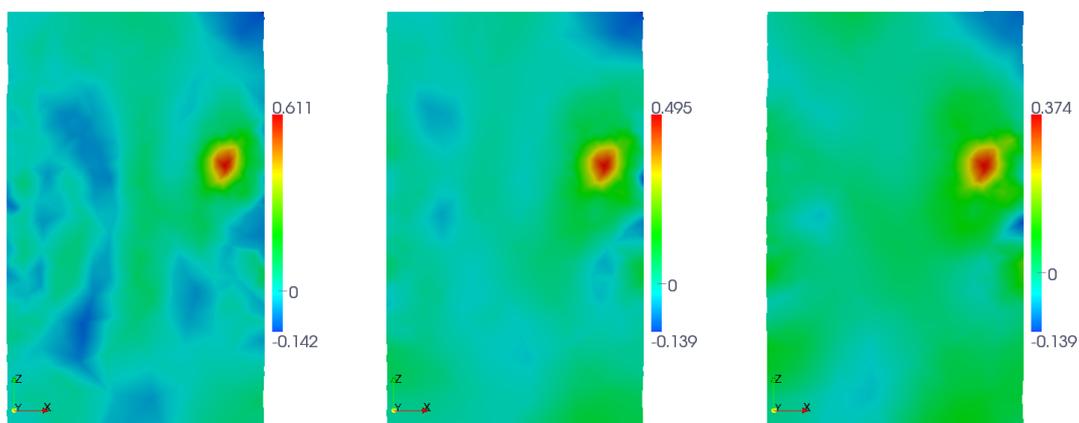
(c) MIT, 20dB



(d) ICEIT, 80dB

(e) ICEIT, 40dB

(f) ICEIT, 20dB



(g) Hybrid, 80dB

(h) Hybrid, 40dB

(i) Hybrid, 20dB

Abb. 4.8: Sagittalebene: Rekonstruktion der Leitfähigkeitsdifferenz aus der MIT, ICEIT und Hybridmethode. Regularisierung mit der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D der Messdaten.

4.3 Auflösung

Für den Vergleich der drei Rekonstruktionsmethoden wurden deren radiale Auflösung bei einem SNR von 80dB, 40dB und 20dB bestimmt. Die Bestimmung der Auflösungskurven erfolgte über zwei Transversalebene an den Positionen $z=0\text{mm}$ und $z=40\text{mm}$. Für jede dieser Ebenen wurden entlang des Zylinderradius die Punktspreizfunktionen und deren Hauptkeulenbreite bei 64% des Maximums bestimmt. Dazu sind für 100 Radien (von 1-100mm) jeweils 32 Punktspreizfunktionen und deren Hauptkeulenbreite in Form eines Ringes berechnet und gemittelt worden. Diese Breiten bezogen auf den Zylinderradius ergaben somit die radiale Auflösung in $[\text{mm}^{-1}]$ und ist für die MIT, ICEIT und Hybridmethode in den Abbildungen 4.9, 4.10 und 4.11, als Funktion der normalisierte x-Achse in der Transversalebene (xy-Ebene) dargestellt. Dabei zeigt sich für alle drei Methoden ein ähnlicher Kurvenverlauf für die radiale Auflösung. Es wird deutlich, dass die höchste Auflösung in der Nähe des Zylinderrandes für die MIT, ICEIT und Hybridmethode erreicht wird. Bei stärker verrauschten Messdaten sinkt in allen drei Methoden die Auflösung. Dies ist durch die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D , die als Regularisierungsmatrix fungiert begründen. Ein niedrigeres SNR führt zu einer erhöhten Regularisierung und daraus folgt eine Verbreiterung der PSF. D.h. die Hauptkeule der PSF wird verbreitert und daraus resultiert unmittelbar eine Verschlechterung der Auflösung.

Die Abbildungen 4.12, 4.13 und 4.14 zeigen den Vergleich der Auflösungen zwischen der MIT, ICEIT und Hybridmethode bei unterschiedlichen Signal-Rausch-Verhältnissen. Über den ganzen Bereich zeigt sich, dass die Hybridmethode die beste radiale Auflösung im Vergleich zu den beiden anderen Methoden hat. Jedoch muss in diesem Zusammenhang nochmals darauf hingewiesen werden, dass im Falle der Hybridmethode alle Rekonstruktionen mit insgesamt 1024 Messdaten durchgeführt wurden. D.h. es wurden doppelt so viel Messdaten wie bei der MIT und ICEIT eingesetzt. Diese Tatsache schlägt sich natürlich auf die Ergebnisse nieder, da die Auflösung nicht nur stark vom SNR abhängt sondern auch von der Anordnung und Anzahl der Messsysteme.

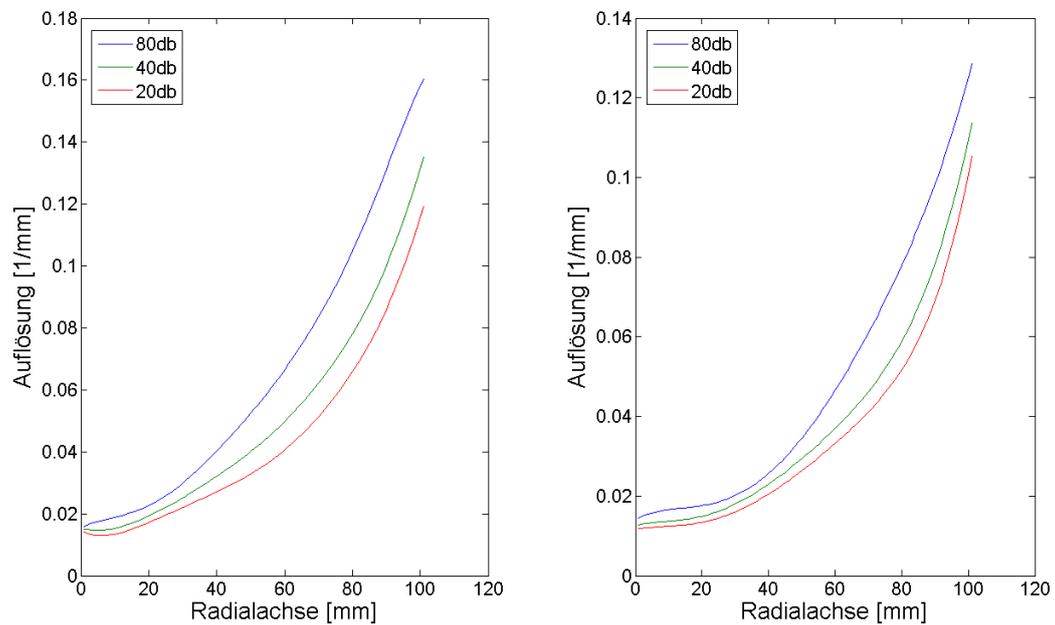


Abb. 4.9: MIT: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

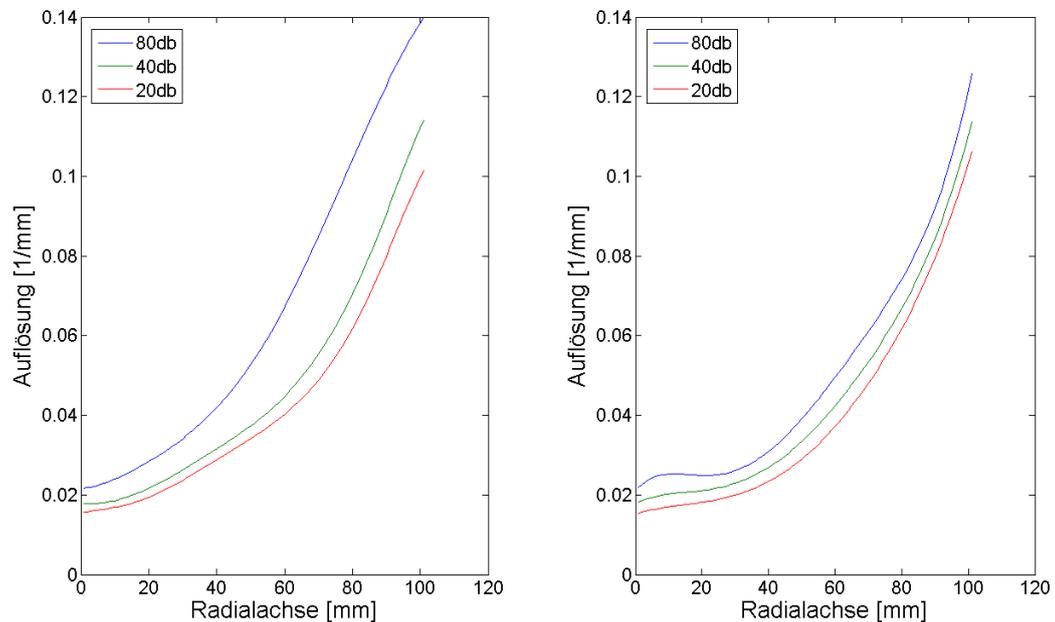


Abb. 4.10: ICEIT: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

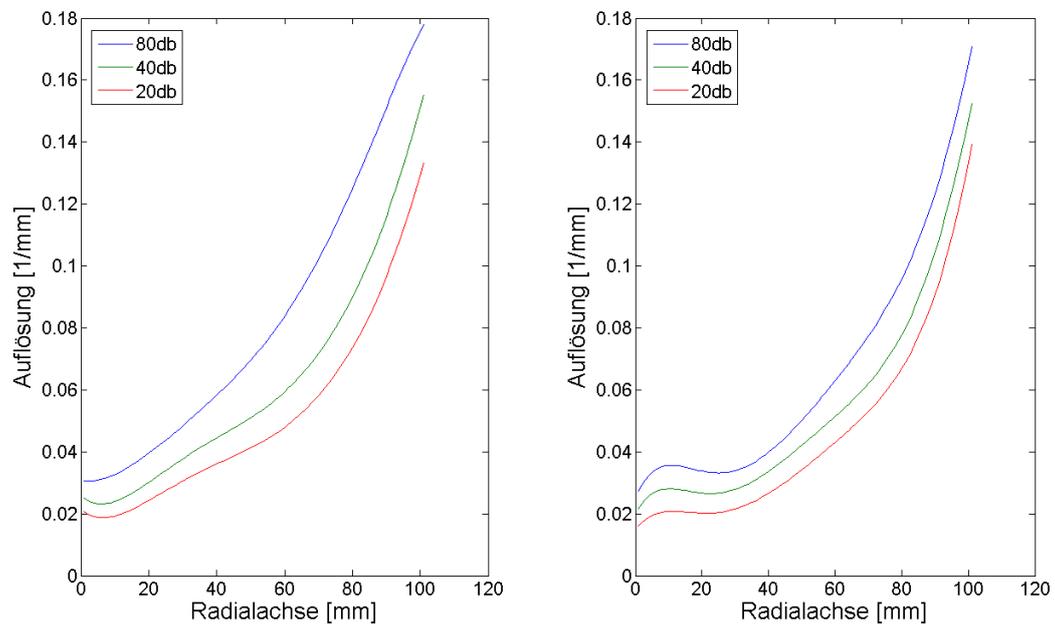


Abb. 4.11: Hybrid: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm]; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

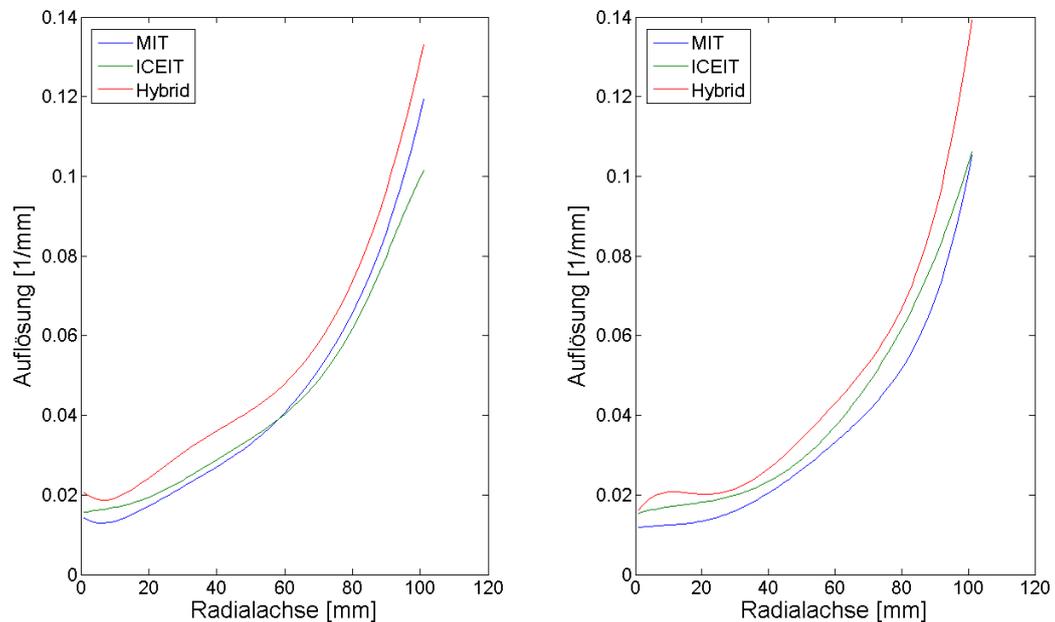


Abb. 4.12: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 20dB; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

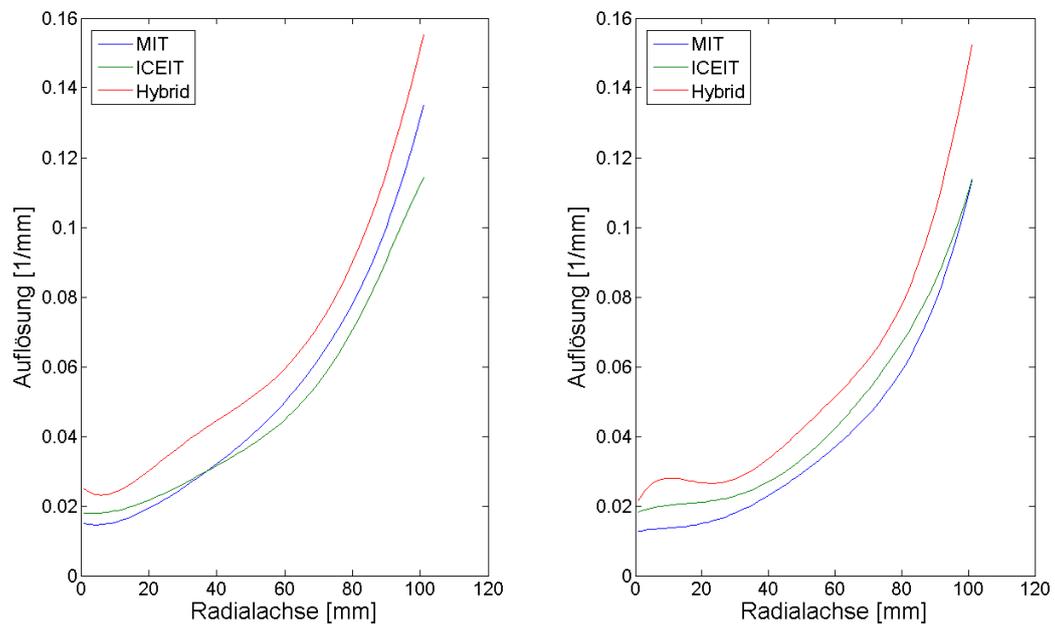


Abb. 4.13: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 40dB; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

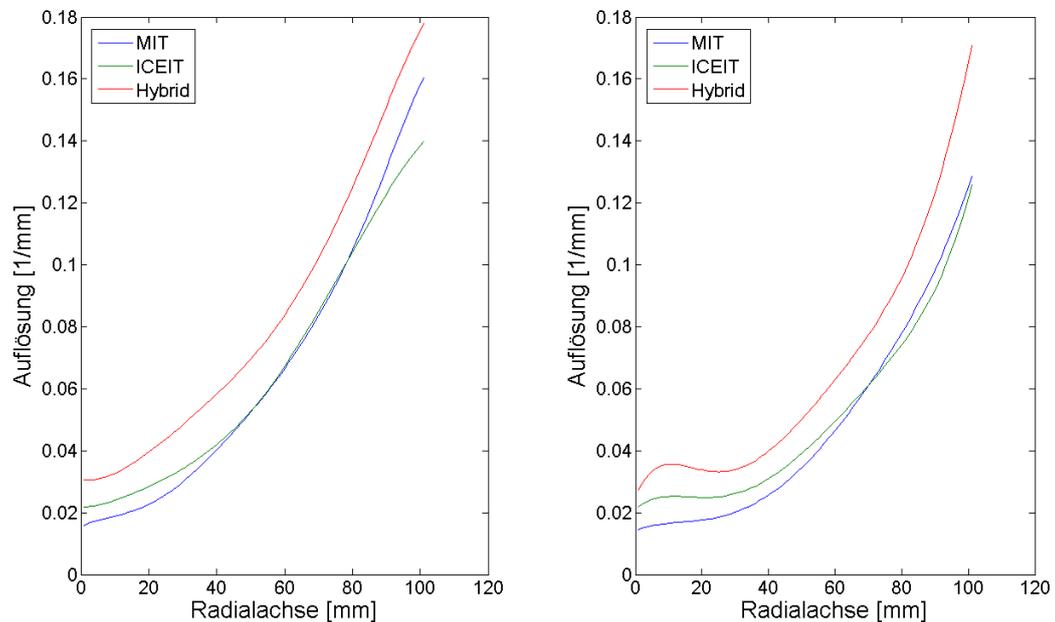


Abb. 4.14: Auflösung [mm^{-1}] als Funktion des Radius eines Zylinders in [mm] bei einem SNR von 80dB; Linkes Bild: $z=0\text{mm}$, Rechtes Bild: $z=40\text{mm}$

Kapitel 5

Diskussion

Bei allen Methoden wird die starke Abhängigkeit der Rekonstruktionsergebnisse von der jeweils verwendeten Regularisierungsmethode deutlich. Dabei ergibt sich für die sphärische Leitfähigkeitsstörung in den sagittalen und transversalen Rekonstruktionsbildern eine verwaschene Scheibe. Die PSF der drei Methoden MIT, ICEIT und Hybrid entspricht einer dreidimensionalen Verteilungsfunktion, die eine der dreidimensionalen Sincfunktion ähnliche Form besitzt. Das heißt für einen definierten Punkt, dass sich die Energie aufgrund dieser Funktion in Form einer diffusen Wolke verteilt. Hierbei sind die Energien der dreidimensionalen Seitenschwinger der PSF nicht zu unterschätzen. Diese zeigen einen periodischen Verlauf und nehmen mit dem Abstand zur Hauptkeule ab. Daraus ergeben sich Darstellungsfehler, sogenannte „Ringing“ Artefakte, für die in den Abbildungen 4.5, 4.6, 4.7 und 4.8 dargestellten Rekonstruktionen. Vor allem in der Transversalebene ist dieses Artefakt gut zu erkennen. Daraus lässt sich folgern, dass dieses „Ringing“ Artefakt nicht aus der Ungenauigkeit der Rekonstruktionsmethoden, oder aus den verrauschten Messdaten herrührt, sondern eine Folge der PSF-Verteilung ist. Weiters ergeben sich aus der Form der PSF keine klar abgegrenzten Bildrekonstruktionen der sphärischen Leitfähigkeitsänderung. Die Abgrenzung zwischen der Kugel und dem Hintergrund ist keine scharfe Kante, sondern ein verwaschener, weicher Übergang, welcher sich bei erhöhtem Rauschen stärker ausbildet.

Wie bereits erwähnt, hängen die ermittelten Leitfähigkeitswerte der Sphäre stark von der Regularisierungsmethode und dem SNR ab. Bei der Verwendung der Einheitsmatrix \mathbf{I} als Regularisierungsmatrix ergeben sich für die Leitfähigkeitsänderung im Zentrum $[x, y, z] = [60, 40, 40]mm$ der Sphäre bei einem SNR von 80dB die Werte für die MIT mit $\Delta\sigma = 0.40S/m$, für die ICEIT mit $\Delta\sigma = 0.38S/m$ und für die Hybridmethode mit $\Delta\sigma = 0.57S/m$. Aus der Rekonstruktion mittels der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_D ergeben sich wiederum im Zentrum der Sphäre bei einem SNR von 80dB die Werte für die MIT mit $\Delta\sigma = 0.45S/m$, für die ICEIT mit $\Delta\sigma = 0.37S/m$ und für die Hybridmethode mit $\Delta\sigma = 0.63S/m$. Vergleicht man diese Werte mit der tatsächlichen definierten Leitfähigkeitsänderung, die mit 1 S/m gegeben ist, erkennt man, dass bei nahezu idealen Bedingungen (SNR=80dB) die jeweilige Leitfähigkeitsänderung $\Delta\sigma$ im Zentrum der Sphäre in allen Methoden stark unterbestimmt ist. Die Unterbestimmung von $\Delta\sigma$ verstärkt sich zudem bei Verringerung des Signal-Rausch-Abstands.

Bei der Anwendung der Einheitsmatrix als Regularisierungsmatrix zeigt sich (siehe dazu Abb. 4.5 und 4.6), dass bei SNRs von 40dB und 20dB vor allem die beiden Methoden ICEIT und Hybrid überregularisiert werden. Diese Tatsache wird in der Tabelle 4.1 sichtbar. Weiters kommt es in den Rekonstruktionen zu einer Deplatziierung der Sphäre hin zum Rand des zylindrischen Phantoms.

Weitaus bessere Rekonstruktionen ergaben sich unter der Verwendung der Kovarianzmatrix als Regularisierungsmatrix. Aus den Abbildungen 4.7 und 4.8 werden besser abgegrenzte Rekonstruktionen der sphärische Leitfähigkeitsverteilung über den gesamten SNR-Bereich erkennbar. Die Kovarianzmatrix der Messdaten erzeugt im Gegensatz zur Einheitsmatrix keine zu starke Regularisierung der zu invertierenden Matrizen (\mathbf{S} , \mathbf{G} , \mathbf{H}). Weiters ist in den Rekonstruktionen der Sagittalebene erkennbar, dass die Deplatziierung der Sphäre gegenüber dem Fall der Regularisierung mit der Einheitsmatrix verringert wird.

Aus den schon genannten Vorteilen der Kovarianzmatrix als Regularisierungsmatrix, wurde diese zur Berechnung der radialen Auflösung für MIT, ICEIT und Hybridmethode herangezogen. In den Abbildungen 4.9, 4.10 und 4.11 wird der Auflösungsverlauf entlang der normalisierten x-Koordinate (in der xy-Ebene) dargestellt. Eine klar ersichtliche Steigerung

der radialen Auflösung vom Zentrum zum Rand des Zylinders hin ist für alle drei Methoden gegeben. Generell ist die Auflösung dabei sehr stark von der Transmitter-Spulenordnung bzw. Transmitter-Elektrodenanordnung und deren Anzahl abhängig, wobei vor allem die Position der Transmitterebene zu der Receiverebene bzw. Elektrodenebene maßgebend ist, da diese Geometrie stark die Sensitivitätseigenschaften der MIT, ICEIT und Hybridmethode prägt.

In den Abbildungen 4.12, 4.13 und 4.14 werden die Auflösungsunterschiede zwischen den Methoden eindeutig sichtbar. Es zeigt sich, dass die Hybridmethode für alle SNRs die höchste radiale Auflösung aufweist. Dies ist aus technischer Sicht nicht überraschend, da für diese Methode doppelt so viel Messdaten als bei der MIT und ICEIT verwendet werden. Die MIT und ICEIT unterscheiden sich hier nur gering in ihren Auflösungswerten. Dabei ergibt sich jedoch einerseits bei der ICEIT an der Position $z=40$ eine bessere Auflösung als bei der MIT, andererseits ergibt sich an der Position $z=0$ in Summe ein geringeres Vorteil zugunsten der MIT. Dies erklärt sich aus den unterschiedlichen Sensitivitätseigenschaften der MIT (siehe dazu [15]) und der ICEIT.

Aus den Ergebnissen zeigt sich, dass durch die Anwendung von Hybridsensoren in der MIT grundsätzlich eine Verbesserung der Bildrekonstruktionen erhalten wird. Dabei ist jedoch die Wahl der Regularisierungsmethode, wie erläutert von großer Bedeutung und nicht zu unterschätzen. Weiters ist eine Verbesserung der radialen Auflösung bei der Hybridmethode zu erreichen, wobei sie jedoch nicht sehr deutlich von den beiden Methoden MIT und ICEIT abhebt.

Eine qualitative Aussage über die Qualitätsmerkmale der Hybridmethode in Bezug auf MIT und ICEIT lässt sich mit den Ergebnissen dieser Arbeit jedoch noch nicht abschließend treffen. Dazu wären weitere Analysen zu nachfolgenden Bereichen anzustellen: Optimierung der Anordnung der Elektroden und Transmitter- sowie Receiverspulen; Verbesserungspotential in der Rekonstruktion durch Einbeziehung des komplexen Anteils der Spannungsdaten an den Receiverspulen sowie an den Elektroden; Einfluss der Netzgenerierung in Bezug auf Anzahl und Form der Elemente, auf die Rekonstruktionsergebnisse; Vergleich von alternativen Algorithmen (z.B. *truncated singular value decomposition* TSVD und Monte-Carlo

Verfahren) zur Bewertung der Lösungsqualität für die gegebenen inversen Problemstellungen.

Literaturverzeichnis

- [1] *Mortarelli J R* 1980 Generalization of the Geselowitz relationship useful in impedance Plethysmographic field *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **27** 665-7
- [2] *Arnulf Kost* **Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder** ISBN: 3-540-55005-4 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004
- [3] *Peter P. Silvester, Ronald L.Ferrari* **Finite elements for electrical engineers** ISBN: 0-521-44953-7 Cambridge University Press, 3.Auflage, 1996
- [4] *Scharfetter H, Casanas R and Rosell J* 2003 Biological tissue characterization by magnetic induction spectroscopy (MIS): requirements and limitations *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **50** 870-80
- [5] *Gencer N G and Tek M N* 1999 Electrical conductivity imaging via contactless measurements *IEEE Trans.Med.Imaging.* **18** 617-27
- [6] *D Gürsoy and H Scharfetter* The effect of receiver coil orientations on the imaging performance of magnetic induction tomography *2009 Meas. Sci. Technol.***20** 1-9
- [7] *D Gürsoy* **Modeling, System Optimization and Astifact Reduction in Megnetic Induction Tomography for Madical Applications.** Dissertaion, Graz University of Technology, Austria, 2010
- [8] *H. Scharfetter, K. Hollaus, J. Rosell, and R. Merwa.* Single-step 3-D image reconstruction in magnetic induction tomography: Theoretical limits of spatial resolution and contrast to noise ratio *Annals of Biomedical Engineering*, 34(11):1786–1798, 2006

- [9] *R. Merwa and H. Scharfetter* Magnetic induction tomography: evaluation of the point spread function and analysis of resolution and image distortion *Physiol. Meas.*, **28** 313-324, 2007
- [10] *Andy Adler and William R B Lionheart* Uses and abuses of EIDORS: an extensible software base for EIT *Physiol. Meas.*, **27**:S25-S42, 2006
- [11] *Albert Tarantola* **Inverse problem theory and methods for model parameter estimation ISBN 0-89871-572-5** *SIAM J. Appl. Math.*, 2005
- [12] *Somersalo E, Cheney M and Isaacson D* Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography *SIAM J. Appl. Math.* 52 1023-40, 1992
- [13] *Nick Polydorides and William R B Lionheart* A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project *Meas. Sci. Technol.* **13** 1871-1883, 2002
- [14] *Schöberl J* Netgen - an advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Computing and Visualization in Science* **1** 41-52, 1997
- [15] *Scharfetter H, P Riu, M Populo and J Rosell* Sensitivity maps for low-contrast-perturbations within conducting background in magnetic induction tomography (MIT) *Physiol. Meas.*, **23**:195-202, 2002

Anhang A

Berechnung der Spannungen an Punktelektroden

Es sei ein Gebiet Ω gegeben an dessen Oberfläche 4 Punktelektroden (E1,E2,E3,E4) angebracht sind. Weiters sind die skalaren Potentiale zu den jeweiligen Elektroden mit $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$ gegeben. Durch die Differenz der skalaren Potentiale der benachbarten Elektroden lassen sich insgesamt 4 Spannungsdaten $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]$ berechnen (siehe dazu Abb.A.1).

Dazu wird eine Matrix \mathbf{C} in der Form,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

erstellt und es folgt für die Berechnung der Spannungsdaten die Beziehung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

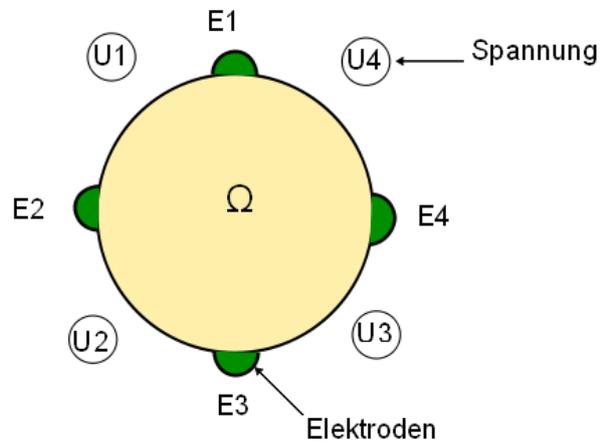


Abb. A.1: Schematische Spannungsmessung mit 4 Punktelektroden

Allgemein ergeben sich somit für eine Anzahl von i -Elektroden insgesamt i unabhängige Spannungsdaten.

Anhang B

Elektrisches Feld eines Elektrodenmodells

Für die Berechnung der Sensitivitätsmatrix \mathbf{G} in der ICEIT wird das elektrische Feld \mathbf{E}_e benötigt. Dabei wird fiktiv über ein Messelektrodenpaar eine Stromdichte \mathbf{J} in das leitfähige Volumen Ω_L eingeprägt. Die Berechnung des daraus resultierenden elektrischen Feldes erfolgt dann über die Maxwell'schen Gleichungen und wurde in [13] vollständig hergeleitet, womit folgt:

$$\mathbf{E}_e = -\nabla\phi, \tag{B.1}$$

mit dem skalaren Potential ϕ , welches aus der partiellen Differentialgleichung

$$\nabla \cdot \kappa \nabla \phi = 0 \quad \in \Omega_L, \tag{B.2}$$

mit den beiden Randbedingungen

$$\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{J} \quad \in \Gamma_1 \quad (\text{B.3})$$

$$\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \in \Gamma_2, \quad (\text{B.4})$$

gewonnen wird. Γ_1 entspricht der Oberfläche der stimulierten Elektroden und Γ_2 entspricht jener Fläche des Volumens, welches nicht von Elektroden besetzt ist, also der Restfläche. Das Integral der Stromdichte \mathbf{J} über die ganze Elektrodenfläche s ist gleich der Summe aller zu- und abfließender Stromstärken \mathbf{I}_i ,

$$\mathbf{I}_i = \int_{E_i} \kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.5})$$

mit N als Gesamtanzahl der Elektroden. Unter der Berücksichtigung einer Oberflächenimpedanz z_i [Ω/m^2], die an jedem Übergang von Elektrode zur Oberfläche gegeben ist, lässt sich das Potential \mathbf{U}_i mit

$$\mathbf{U}_i = \phi + z_i \kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.6})$$

bestimmen. Für eine einheitliche Lösung der partiellen Differentialgleichung müssen dazu noch die beiden folgenden Bedingungen eingehalten werden:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i = 0. \quad (\text{B.8})$$

D.h. die Summe aller Ströme und Spannungen an den Elektroden muss gleich Null sein.