

Stefanie KERN

**Entwicklung eines optimierten
mathematischen Modells
für einen LED-Farbmetriekrechner**

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades einer Diplom-Ingenieurin

Diplomstudium Technische Mathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Olaf STEINBACH

Dipl.-Ing. Erwin BAUMGARTNER

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im März 2011

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date
.....
(signature)

Vorwort

Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, um einigen Personen zu danken. Allen voran sind dies mein Betreuer, Professor Olaf Steinbach, und der Geschäftsführer der Firma LUMITECH Produktion und Entwicklung GmbH, DI Erwin Baumgartner, die es mir überhaupt ermöglichten, meine Diplomarbeit zu einem solch interessanten und praxisnahen Thema zu verfassen, und die mir mit ihrem Fachwissen zur Seite standen.

Weiters möchte ich einigen Kollegen bei Lumitech, die mir immer wieder inhaltliche Anstöße gaben und mir mit firmeninternen Informationen aushalfen, meinen Dank aussprechen, vor allem Andreas Posch, Matthias Pörtl und Hannes Laky.

Zuletzt gilt mein Dank den Menschen aus meinem privaten Umfeld, deren Unterstützung für mich sehr wertvoll ist. Besonders möchte ich dabei meine Eltern und meine beiden Schwestern hervorheben, die mir nicht nur in den letzten Monaten, in der diese Arbeit entstand, sondern während des gesamten Studiums den Rücken stärkten, und außerdem natürlich auch meine engsten Freunde und meinen Freund, die ein großer, moralischer Rückhalt für mich sind.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Licht	9
1.1 Geschichtlicher Abriss	9
1.2 Optik - die Lehre des Lichts	12
1.2.1 Wellenoptik	12
1.2.2 Quantenoptik	21
1.2.3 Geometrische Optik	23
1.2.4 Lichttechnische Optik	28
1.3 Lichttechnisches und farbmimetrisches Maßsystem	28
1.3.1 Das menschliche Auge	28
1.3.2 Das lichttechnische Maßsystem: Größen und Einheiten	30
1.3.3 Grundlagen der Farbmimetrik	40
1.3.4 Das CIE-Normvalenzsystem	45
1.3.5 Farbwiedergabe	50
2 Leuchtdioden (LEDs)	53
2.1 Halbleiter: Das Energiebändermodell	53
2.2 Dotierung von Halbleitern	55
2.2.1 Der p-n-Übergang im Gleichgewicht	57
2.3 Halbleiterdioden	57
2.4 Aufbau und Funktionsweise von LEDs	58
2.5 LED-Bauformen	61
2.6 Eigenschaften von LEDs	62
2.6.1 LED-Farben und Öffnungswinkel	62
2.6.2 Elektrische Eigenschaften	64
2.7 Thermomanagement	65
3 Die PI-LED-Technologie	71
3.1 Anforderungen an Lichtquellen	71
3.2 Phosphorkonversion	74
3.3 Verschiedene LED-Technologien und deren Vor- und Nachteile	77
3.4 Grundlagen der PI-LED-Technologie	81
3.5 Farbortgenauigkeit - MacAdam-Ellipsen	84
3.5.1 Geschichte und Bedeutung	84

Inhaltsverzeichnis

3.5.2	Abstandsmessung von Farborten	85
3.5.3	Behandlung ungenauer Farborte	89
3.6	Das PI-LED-System: Aufbau und Funktionsweise	89
3.6.1	Der Analog-Digital-Umsetzer	90
3.6.2	Pulsweitenmodulation	94
3.6.3	Ulbricht-Kugeln	96
3.6.4	NTC-Widerstände	97
3.7	Farbsteuerung im PI-LED-System - der Farbmatrikrechner	98
3.7.1	Algorithmus zur Farbsteuerung	99
3.8	Problemfaktor Farbortungenauigkeit	104
3.8.1	Beschreibung der Ursachen	105
4	Ein neuer Farbmatrikrechner	109
4.1	Das Simplexverfahren für lineare Programme	110
4.1.1	Das Simplexverfahren für Standardprobleme	112
4.1.2	Varianten des Simplexverfahrens: Gleichungen als Restriktionen	119
4.1.3	Varianten des Simplexverfahrens: Beschränkte Variable	121
4.2	Ein Optimierungsproblem zur Berechnung der Verstärkungsfaktoren	127
4.3	Aktuelles und neues mathematisches Modell im Vergleich	129
4.4	Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte	137
4.4.1	Motivation	138
4.4.2	Neuer Approximationsansatz	139
4.4.3	Lineare und neu hergeleitete Approximation im Vergleich	156
	Abbildungsverzeichnis	163
	Tabellenverzeichnis	167
	Literaturverzeichnis	169

Einleitung

Das allgemeine Bestreben, Produkte herzustellen, welche einerseits energiesparend und umweltschonend sind, andererseits aber auch ein Maximum an Leistung zur vollständigen Zufriedenstellung der Kunden erbringen, nimmt gerade in der heutigen Zeit immer stärker zu. Dies ist eine klare Folge der rasanten Marktentwicklung: Aufgrund der stetig wachsenden Anzahl an Anbietern ist es schon lange nicht mehr ausreichend, Erzeugnisse bereitzustellen, die „irgendwie“ funktionieren und „irgendwann“ verkaufsbereit sind. Im Gegenteil, das jeweilige Produkt sollte bestmöglich und vor allem fehlerfrei arbeiten und schnellstmöglich fertiggestellt sein. Wie an viele andere Sparten, werden diese Anforderungen auch an die Lichtbranche gestellt, wobei Leuchtdioden (LEDs) hier getrost als das „Licht der Zukunft“ bezeichnet werden können und LED-Lampen damit immer attraktiver werden, sowohl für große Betriebe wie beispielsweise Hotels, als auch für den privaten Gebrauch. Die Firma LUMITECH Produktion und Entwicklung GmbH, mit deren Unterstützung und Kooperation diese Arbeit entstanden ist, hat den Schritt in Richtung innovativer, zukunftsorientierter Lichtsysteme bereits vor einigen Jahren gemacht und kann heute mit einer Vielfalt an Ideen - allen voran mit der PI-LED-Technologie - und, seit dem Jahr 2010, auch mit eigens hergestellten Leuchten überzeugen. Besonders hervorzuheben sind dabei jene Produkte, die nicht nur einfach Licht der üblichen Art abstrahlen, welches über die gesamte Lebensdauer der Lampe unverändert bleibt, sondern es gestatten, je nach Situation Licht in verschiedenen Weißtönen einzustellen. Trotz der Neuartigkeit solcher Lampen kann sich ein Stillstand in der Entwicklung sehr bald rächen und wird sofort von Konkurrenten ausgenutzt, sodass eine ständige Verbesserung der aktuell eingesetzten Technik gefragt ist. Mit dieser Arbeit wird versucht, einen Beitrag dazu zu leisten, indem bestimmte, noch nicht zur Gänze ausgereifte Faktoren, die maßgeblichen Einfluss auf das mit PI-LED-Systemen erzeugte Licht haben, zu optimieren.

Die Komplexität, die mit der Herstellung von LED-Lichtsystemen grundsätzlich einhergeht, hat zur Folge, dass Überlegungen dazu, welche Fortschritte im Zuge der Optimierung solcher Systeme **mathematisch** erzielt werden können, sinnvollerweise erst dann erfolgen sollten, wenn ein Grundverständnis zu den Themenschwerpunkten „Licht“ und „Leuchtdioden“ vorhanden ist. Dieses wird in den ersten beiden Kapiteln dieser Arbeit anhand von ausführlichen Erklärungen aufgebaut. Dabei zeigt sich, dass es allein schon keine leichte Aufgabe ist, zu verstehen, was Licht wirklich ist, wie es sich in den unterschiedlichen Bereichen der Optik verhält bzw. welchen Gesetzmäßigkeiten es gehorcht, wie letztlich überhaupt Lichtfarben entstehen und wie diese messbar gemacht werden können. Ähnlich umfassend gestaltet sich die Ausarbeitung über LEDs, welche sich insbesondere aus physikalischer Hinsicht alles andere als unkompliziert darstellt.

Mit Hilfe des erlangten Basiswissens über Licht und Leuchtdioden ist es um einiges nach-

vollziehbarer, wie die bereits erwähnte PI-LED-Technologie bzw. die darauf aufbauenden LED-Module gemäß dem aktuellen Stand (Herbst 2010) arbeiten und welche Schritte bis zum endgültig gewünschten Lichtergebnis durchlaufen werden. All diese Aspekte werden im dritten Abschnitt dieser Arbeit behandelt. Der wesentliche Bestandteil eines PI-LED-Systems, welcher für die Erzeugung der gewünschten Lichtfarbe zuständig ist und alle dafür notwendigen Parameter ermittelt, ist der Farbmetriekrechner. Ihm liegt derzeit ein vereinfachtes mathematisches Modell zugrunde, welches zwar prinzipiell richtig ist, jedoch noch die eine oder andere Schwachstelle aufweist und daher Spielraum für weiterführende Entwicklungen bietet. Dies ist Inhalt des vierten und letzten Kapitels, in welchem zunächst eine neue mathematische Formulierung der Problemstellung hergeleitet und diese dann wiederum mit einem speziellen Verfahren gelöst wird. Im Anschluss daran wird die Besonderheit, dass sich mit LEDs realisierte Lichtfarben in Abhängigkeit der Modultemperatur zu einem gewissen Grad verändern, näher beleuchtet und analysiert. Zusätzlich wird ein Vorschlag präsentiert, wie die durch diese Gegebenheiten auftretenden Schwankungen des erzeugten Lichts minimiert werden können.

1 Licht

Licht bedeutet Leben. Inzwischen ist das Licht, obwohl es unser ständiger Begleiter ist, für den Großteil der Menschen etwas Selbstverständliches geworden; dennoch übt es seit jeher Faszination aus und verursacht bis heute Uneinigkeiten darüber, wie es physikalisch beschrieben werden kann. Wird das Licht nämlich nicht einfach als vorhanden hingenommen, sondern hinterfragt, was es eigentlich ist, wird schnell ersichtlich, dass die Antwort darauf alles andere als trivial ist und die Meinungen vieler Wissenschaftler seit Jahrhunderten zurecht voneinander abweichen.

„Fünfzig Jahre intensiven Nachdenkens haben mich der Antwort auf die Frage 'Was sind Lichtquanten?' nicht nähergebracht. Natürlich bildet sich heute jeder Wicht ein, er wisse die Antwort. Doch da täuscht er sich.“¹

Es ist daher interessant, einen kurzen Blick auf die Forschungen zu diesem Thema zu werfen, die im Laufe der Geschichte stattfanden.

1.1 Geschichtlicher Abriss

Die nachfolgende Zusammenfassung über die historische Entwicklung von Lichtquellen verwendet Informationen aus [88].

Vor ca. 300.000 Jahren entdeckte der Mensch das Feuer. Dies war ein Ereignis von immenser Bedeutung, da bis zu diesem Zeitpunkt die Sonne die einzig existente Licht- und Wärmequelle war, und ermöglichte im weiteren Verlauf die Verwendung von Öl- und Talglampen. Lichtquellen dieser Art und Funktionsweise blieben dem Volk über Jahrhunderte hinweg erhalten, bis der Schweizer Physiker und Chemiker **Aimé Argand** 1783 den **Rundbrenner** als verbesserte Öllampe entwickelte und somit für einen wichtigen Fortschritt in der Erzeugung von Licht mit flüssigem Brennstoff sorgte. Die Erfindung der **Gaslampe** erfolgte im selben Jahr, wird dem niederländischen Wissenschaftler **Johannes Petrus Minckeleer** zugeschrieben und beruht auf einem von ihm kreierten Verfahren zur Gewinnung von Leuchtgas aus Steinkohle. Bis ins 19. Jahrhundert hinein war der Einsatz von Kerzen, Fackeln und Öllampen üblich, da elektrische Lichtquellen erst ab diesem Zeitraum mit der 1866 von **Werner Siemens** konstruierten **Dynamomaschine** ins Leben gerufen wurden. Zwar gab es vor ihm bereits Forschungen auf diesem Gebiet, doch da erstmals durch ihn elektrische Lampen praktisch genutzt werden konnten, gilt er als der Begründer

¹Zitat von Albert Einstein, 1951. Vgl. [74].








1 Licht


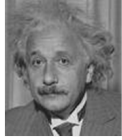
der Elektrotechnik. 1879 gelang **Thomas Alvar Edison** schließlich mit der Erfindung der **Glühlampe** der endgültige Durchbruch. In Wirklichkeit stammt diese zwar von **Johann Heinrich Goebel**, der schon 1854 den grundlegenden Einfall hatte, jedoch perfektionierte Edison dieses Modell und erlangte somit alle Anerkennung. Die Entwicklung und Herstellung von Entladungslampen folgte kurze Zeit später.

Die Antwort auf die Frage, wie Licht erzeugt werden kann, konnte also im Laufe der Zeit immer wieder erneuert und verbessert werden. Dafür war das Verständnis der physikalischen Hintergründe natürlich ausschlaggebend. Die Unstimmigkeiten, die dabei auftraten, verdeutlicht folgender Überblick der Meilensteine der wissenschaftlichen Lichtbeschreibung (vgl. [75]):

Ca. 300 v. Chr.	Euklid , ein berühmter Mathematiker aus Alexandria, nahm an, dass sich das Licht geradlinig ausbreitet. Allerdings dachte er fälschlicherweise, dass das menschliche Auge selbst Strahlen aussendet.	
Ca. 100-170 n. Chr.	Claudius Ptolemäus , ein griechischer Wissenschaftler, brachte Lichteinfall- und Lichtbrechungswinkel in Zusammenhang und schilderte, wie das Licht seiner Meinung nach in der Atmosphäre gebrochen wird.	
Ca. 965-1040	Der aus Arabien stammende Alhazan beschäftigte sich mit verschiedenen Phänomenen, wie zum Beispiel der Reflexion von Licht an gekrümmten Spiegeln oder, so wie Ptolemäus, der Lichtbrechung in der Atmosphäre. Seine Arbeiten beeinflussten zahlreiche andere Gelehrte.	
1214-1294	Der Engländer Roger Bacon stellte Gesetze darüber auf, wie man die Spiegelung und die Brechung von Licht erklären kann.	
1571-1630	Johannes Kepler , der bekannte deutsche Wissenschaftler, fand unter anderem heraus, dass die Lichtintensität einer Punktlichtquelle mit dem Quadrat der Entfernung sinkt. Weiters begriff er, wie das menschliche Auge bzw. ihre Linse funktionieren.	
1580-1626	Nach Snellius , einem niederländischen Mathematiker, ist das sogenannte Brechungsgesetz benannt, welches später auch von Fermat aufgegriffen wurde.	
1564-1643	Der berühmte italienische Naturwissenschaftler Galileo Galilei konstruierte ein Fernrohr von hoher Perfektion und wurde damit auf die Mondkrater und die Jupitermonde aufmerksam. Letztendlich waren diese Entdeckungen Anstoß dafür, das geozentrische Weltbild anzuzweifeln.	

1.1 Geschichtlicher Abriss

1618-1663	Francesco Grimaldi , Mitglied eines aus Genua stammenden Adelgeschlechts, beobachtete, wie sich Licht verhält, wenn es durch kleine Öffnungen tritt, und beschrieb darauf aufbauend Beugungs- und Interferenzerscheinungen. Er ging davon aus, dass das Licht eine Welle ist.	
1642-1727	Der Engländer Isaac Newton zerlegte mit Hilfe eines Prismas weißes Licht in seine Spektralfarben. Seiner Ansicht nach bestand das Licht aus Teilchen (Korpuskelmodell).	
1644-1710	Olaf Römer , einem dänischen Astronom, gelang es, mittels der Jupitermonde die Lichtgeschwindigkeit wertmäßig zu erfassen und wies ihr einen Wert von ca. 200 000 km/s zu.	
1629-1695	Der niederländische Wissenschaftler Christian Huygens war ein großer Verfechter des Lichtwellenmodells und beschrieb mit dem nach ihm benannten und heute noch anwendbaren Huygens-Prinzip Reflexion, Brechung und Beugung. Newton und er gerieten aufgrund ihrer konträren Ansichten in einen heftigen Streit. Huygens ging davon aus, dass Licht zur Ausbreitung ein Medium benötigt, den sogenannten Äther. Lange Zeit wurde diese Theorie als gültig anerkannt, bis Einstein den Standpunkt äußerte, dass der Äther überhaupt nicht existiert, das heißt kein reales Medium ist.	
1773-1829	Thomas Young , ein englischer Physiker, untermauerte mit dem Doppelspaltexperiment, bei dem Licht hinter zwei sehr schmalen Spalten Interferenzerscheinungen aufwies, Huygens' Wellentheorie. Weiters führte er Messungen von Lichtwellenlängen durch.	
1788-1827	Der französische Physiker und Ingenieur Augustin Fresnel stützte mit einer großen Anzahl an Versuchen zur Interferenz von Licht ebenfalls das Wellenmodell von Huygens.	
1819-1868	Ein weiterer französischer Physiker, Léon Foucault , ermittelte für die Lichtgeschwindigkeit unter Verwendung eines schnell rotierenden Spiegels einen Wert von ca. 298 000 km/s, sowohl in Luft als auch im Vakuum.	
1831-1879	James Clerk Maxwell , ein schottischer Physiker und bekannt für die nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen, kann als Begründer des Elektromagnetismus betrachtet werden. Er kam im Rahmen seiner Theorie zu dem Schluss, dass elektromagnetische Wellen existieren müssen. Basierend auf seiner Arbeit wurde Licht von nun an als elektromagnetische Welle definiert.	

1852-1931	Albert Michelson , ein US-amerikanischer Physiker, wollte mit einem speziellen, zusammen mit Edward Morley entwickelten Experiment herausfinden, welche Geschwindigkeit die Erde relativ zum Lichtäther aufweist. Die Resultate bewirkten eine von Einstein dargelegte, neue Vorstellung darüber, wie sich Licht beschreiben lässt.	
1879-1955	Albert Einstein , ein gebürtiger Deutscher, stellte die Theorie auf, dass sich das Licht aus sogenannten Photonen, das heißt kleinsten Energiequanten, zusammensetzt. Das war gleichzeitig die Geburtsstunde der Quantenmechanik.	

Heute wird ziemlich einheitlich die Ansicht vertreten, dass sich das Licht weder dem Wellen- noch dem Teilchenmodell eindeutig zuordnen lässt, sondern je nach betrachtetem Phänomen entweder die Wellen- oder die Teilcheneigenschaften des Lichts in den Vordergrund treten. Es ist daher prinzipiell falsch zu fragen, ob Licht Welle **oder** Teilchen ist, denn dies wäre zum Beispiel mit der Frage „Ist das Auto schwarz oder schnell?“ gleichbedeutend und ergäbe demzufolge keinen Sinn. Das heißt also, dass Wellen- und Teilchencharakter des Lichts natürlich unterschiedliche Eigenschaften sind, die sich aber nicht gegenseitig ausschließen.

1.2 Optik - die Lehre des Lichts

Wie zum Teil auch aus Kapitel 1.1 ersichtlich wurde, gibt es verschiedene Arten, Licht und seine Eigenschaften zu charakterisieren. Anhand der Überlegungen, wie sich das Licht ausbreitet und wie es mit Materie wechselwirkt, lässt sich die Optik in vier Teilbereiche zerlegen, auf welche im Anschluss näher eingegangen wird.

1.2.1 Wellenoptik

Die Wellenoptik ist jenes Teilgebiet der Optik, welches sich mit der Wellennatur des Lichts auseinandersetzt. Licht wird hier prinzipiell als elektromagnetische Welle erklärt, die durch periodische Änderung von elektrischer und magnetischer Feldstärke entsteht. Dies ist direkt mit den Maxwell'schen Gleichungen verknüpft, welche, zusammen mit den anschließenden Erklärungen, z.B. in [113] zu finden sind und folgendermaßen lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV, \quad (1.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (1.2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.2.4)$$

mit den Symbolen

- ρ Ladungsdichte
- \vec{D} elektrische Flussdichte
- \vec{B} magnetische Flussdichte
- \vec{E} elektrische Feldstärke
- \vec{H} magnetische Feldstärke
- $\vec{j} = \vec{v} \cdot \rho$ Stromdichte
- \vec{v} Geschwindigkeit der Ladungsträger.

- Die Gleichungen in (1.2.1) fallen unter den Begriff des **Gaußschen Gesetzes**, welches besagt, dass die Quelle eines elektrischen Feldes eine Ladung ist. Aus der integralen Form folgt für den elektrischen Fluss, betrachtet durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V , dass dieser der elektrischen Ladung im Inneren dieses Volumens entspricht.
- Das **Gaußsche Gesetz für Magnetfelder**, wie in (1.2.2) beschrieben, postuliert die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen. Mit der integralen Schreibweise gilt, dass zwischen dem magnetischen Fluss durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V und der magnetischen Ladung im Inneren von V , die jedoch Null ist, Gleichheit besteht.
- Gleichung (1.2.3) wird als das **Induktionsgesetz von Faraday** bezeichnet, welches eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldes stets mit einem korrespondierenden elektrischen Gegenfeld vereint. Die differentielle Formulierung beschreibt die Abhängigkeit der Wirbel des elektrischen Feldes von der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion, während die integrale Notation bedeutet, dass die elektrische Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A mit der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch A gleichgesetzt werden kann.
- Das **erweiterte Ampèresche Gesetz**, wie von den Gleichungen in (1.2.4) wiedergegeben, erklärt, dass die elektrische Stromdichte \vec{j} und die Verschiebungsstromdichte \vec{D} Auslöser eines magnetischen Wirbelfeldes sind. Anders ausgedrückt heißt das, dass sich die magnetische Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A aus der Summe des Verschiebungsflusses und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch A ergibt.

Zusammengefasst spiegeln die Maxwell-Gleichungen also den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld wider und bringen unter anderem zum Ausdruck, dass eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes eine räumliche Änderung des magnetischen Feldes impliziert, und umgekehrt. Handelt es sich hierbei um periodische Änderungen, ergibt dieses Zusammenspiel eine fortschreitende Welle, die elektromagnetische Welle. Dabei stehen die korrespondierenden Feldstärkevektoren senkrecht aufeinander und senkrecht

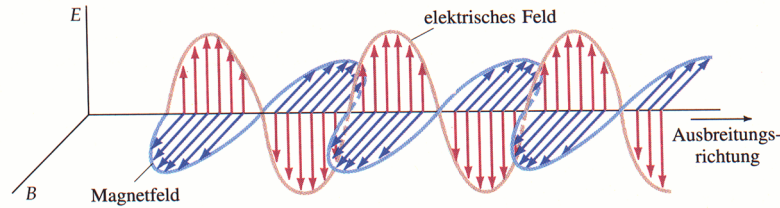


Abbildung 1.1 – Elektromagnetische Welle (vgl. [26])

auf die Ausbreitungsrichtung der Welle, wie in Abbildung 1.1 dargestellt. In Anlehnung an [40, Kap. 1, S. 2] und [82, S. 1109, 1166-1172] gelten folgende Definitionen und Gleichungen:

Mit Hilfe der Wellenlänge λ , welche für die räumliche Periodizität steht, und der Frequenz ν , die dem Kehrwert der Periodendauer T der Welle entspricht und die zeitliche Periodizität angibt, lässt sich die Phasengeschwindigkeit bzw. Lichtgeschwindigkeit c der Welle durch $c = \lambda \cdot \nu$ definieren. Im Vakuum nimmt c den bekannten Wert $c \cong 2.99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ an. Für die Ausbreitung des Lichts kann die Wellengleichung für \vec{E} und \vec{B} hergeleitet werden, die unter den vereinfachenden Annahmen, dass diese beiden Größen jeweils nur von einer Ortskoordinate x und der Zeit t abhängen und das betrachtete Medium das Vakuum ist, die Form

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

hat. Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c kann dabei auch alternativ als $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ geschrieben werden, wobei μ_0 und ϵ_0 die Feldkonstanten (magnetisch und elektrisch) mit den Werten

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cong 12.566 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \cdot (299792458)^2 \text{ Nm}^2} \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

sind. Dabei treten die Einheiten Henry (H), Meter (m), Coulomb (C) und Newton (N) auf.

In der Wellenoptik werden einige verschiedene Phänomene, im Zuge derer die Welleneigenschaften des Lichts zum Vorschein kommen, erklärt:

Reflexion und Brechung (vgl. [36, S. 235-257, 260-261] und [39]): Trifft Licht auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien, wird grundsätzlich ein bestimmter Anteil zurückgeworfen (reflektiert), während der verbleibende Anteil in das Medium 2 eintritt und dort, sofern das Licht nicht genau senkrecht auf die Grenzfläche einfällt, gebrochen wird, vgl. Abbildung 1.2. Dafür gelten einerseits das Reflexionsgesetz

$$\alpha = \alpha',$$

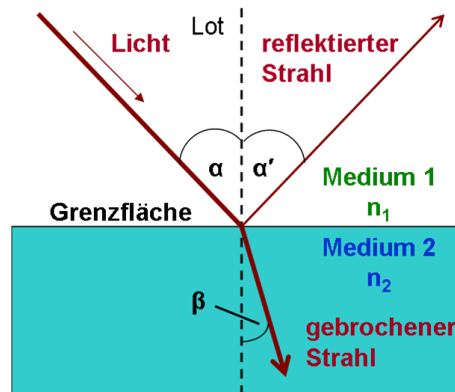


Abbildung 1.2 – Reflexion und Brechung (vgl. [78])

was bedeutet, dass Einfalls- und Reflexionswinkel gleich groß sind, und andererseits das Brechungsgesetz (Snelliusgesetz), welches durch

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2}$$

die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ins Verhältnis zueinander setzt.

Aus dem Brechungsgesetz kann nun eine wichtige Stoffkonstante für Medien, nämlich ihre Brechzahl, abgeleitet werden. Dafür wird zunächst die Überlegung angestellt, dass sich für zwei fixierte Medien 1 und 2 aus

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}$$

stets eine Konstante $n_{1,2}$ ergibt, die **relative Brechzahl**. Für den Übergang vom Vakuum (Medium 1), d.h. $c_1 = c_V$, in ein Medium 2 resultiert daraus in gleicher Art die **absolute Brechzahl** n_2 dieses Mediums.

Mit Hilfe der Brechzahl lässt sich nun ein interessanter Aspekt im Zusammenhang mit gebrochenen Strahlen veranschaulichen: Beim Übergang von Licht von einem optisch dünneren (kleinere Brechzahl) in ein optisch dichteres Medium (größere Brechzahl) ist das Ergebnis eine Brechung zum Lot (Senkrechte auf die Mediengrenzfläche), d.h. der Einfallswinkel ist größer als der Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Lot einschließt. Umgekehrt kommt es beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium zu einer Brechung vom Lot (die Winkel verhalten sich umgekehrt wie zuvor).

Diese Gegebenheit dient im Folgenden der Erklärung des Grenzfalls der Totalreflexion. Wie in Abbildung 1.3 skizziert, sei die Strahlungsrichtung umgekehrt. Somit handelt es sich um den Übergang von Licht von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium. Die dadurch auftretende Brechung vom Lot im optisch dünneren Medium hat zur Folge, dass der Winkel zwischen gebrochenem Strahl und Lot mit der Vergrößerung des Einfallswinkels anwächst, bis er bei einem ganz bestimmten Einfallswinkel, nämlich dem Grenzwinkel der Totalreflexion, schließlich den Wert 90° hat. Alle Einfallswinkel, die größer als dieser

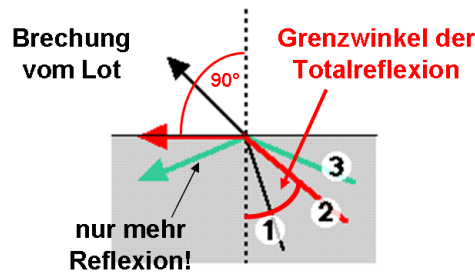


Abbildung 1.3 – Totalreflexion (vgl. [39])

Grenzwinkel sind, bewirken daher, dass das gesamte einfallende Licht von der Grenzfläche zurückgeworfen wird - es tritt Totalreflexion ein.

Beugung (vgl. [36, S. 257-259] und [40, Kap. 1, S. 4]): Die Beugung bezeichnet die Ablenkung von Wellen, wenn diese auf ein Hindernis treffen, und ist vereinfacht für ebene Wasserwellen in Abbildung 1.4 dargestellt. Dieses Phänomen beruht auf folgenden Gesetzmäßigkeiten:

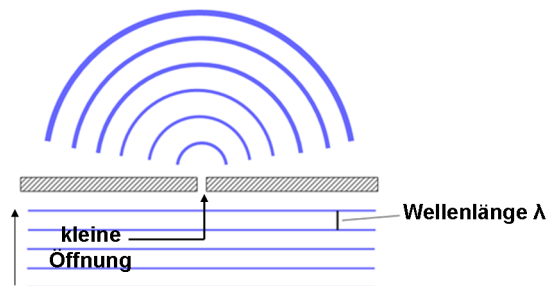


Abbildung 1.4 – Beugung (vgl. [15])

- (i) Das **Prinzip von Huygens** besagt, dass alle Punkte einer Wellenfront, d.h. einer Fläche, auf der sich alle schwingenden Teilchen in gleicher Phase befinden, ständig als Sender von Kugelwellen, den sogenannten Elementarwellen, fungieren.
- (ii) Mit dem **Prinzip von Fresnel** folgt außerdem, dass die Schwingung in einem beliebigen Punkt des betrachteten Wellenfeldes durch Überlagerung aller dort eintreffenden Elementarwellen entsteht.

Zusammen werden diese beiden Aussagen als Huygens-Fresnelsches Prinzip bezeichnet. Dabei ist bemerkenswert, dass man aus diesem wiederum die zuvor beschriebenen Gesetze zur Reflexion und Brechung ableiten kann. Dazu wird eine ebene Welle betrachtet, die, wie in

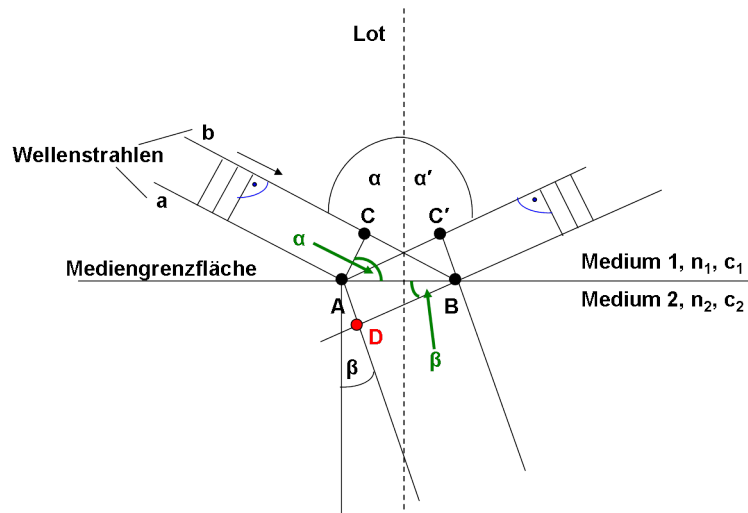


Abbildung 1.5 – Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes (vgl. [36, S. 258])

Abbildung 1.5 dargestellt, auf eine Mediengrenzfläche trifft; \overline{AC} sei dabei eine Wellenfront.

- **Reflexion:** Wenn jener Zeitpunkt t_b betrachtet wird, an dem der Strahl b im Punkt B auftritt, folgt daraus, dass der Strahl a zu einem früheren Zeitpunkt $t_a < t_b$ im Punkt A eingefallen ist. Somit hat sich zum Zeitpunkt t_b von A ausgehend im Medium 1 bereits eine Kugelwelle mit dem Radius $\overline{AC'}$ ausgebildet. Dies impliziert wiederum, dass $\overline{BC'}$ eine Wellenfront des reflektierten Wellenbündels darstellt, welche spiegelbildlich zur Wellenfront \overline{AC} des einfallenden Wellenbündels liegt, und daher $\alpha = \alpha'$ (Reflexionsgesetz).
- **Brechung:** Gemessen vom Auftreffen des Strahls a im Punkt A zum Auftreffen des Strahls b im Punkt B verstreicht die Zeit $t = \frac{\overline{CB}}{c_1}$. Innerhalb dieser hat sich auch im Medium 2 von A ausgehend eine Elementarwelle mit dem Radius $\overline{AD} = c_2 t$ ausgebreitet. Damit gilt

$$t = \frac{\overline{CB}}{c_1} = \frac{\overline{AD}}{c_2}$$

oder, diese Gleichung durch \overline{AB} dividiert,

$$\frac{\overline{CB}/\overline{AB}}{c_1} = \frac{\overline{AD}/\overline{AB}}{c_2}.$$

Nun sind lediglich noch die passenden, Abbildung 1.5 zu entnehmenden Winkelbeziehungen einzusetzen, was auf

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2} \implies \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2}$$

führt.

Interferenz (vgl. [36, S. 265-266, 274-276]): Wenn sich zwei oder mehrere Wellen im Raum ausbreiten, überlagern sich in den einzelnen, verschiedenen Raumpunkten die dort auftretenden Schwingungen. Die Interferenz ist ein Sonderfall einer solchen Überlagerung, der sich dadurch auszeichnet, dass die Amplitude der sich ergebenden Schwingung in jedem Punkt jeweils konstant ist. An manchen Orten beispielsweise löschen sich die Wellen stets aus, an anderen Orten ist die Amplitude stets maximal („maximale Verstärkung“). Damit ein Überlagerungseffekt dieser Art überhaupt zustande kommen kann, müssen die zugrundeliegenden Wellen kohärent sein, d.h. jede einzelne dieser Wellen muss in jedem Raumpunkt, den sie erreicht, eine dort immer gleiche Amplitude besitzen, und der Phasenunterschied zwischen den Wellen muss konstant sein. Im Rahmen dieser Arbeit werden folgende zwei Spezialfälle der Interferenz behandelt:

- (i) **Interferenz zweier ebener, gegenläufiger Wellen gleicher Amplitude x_0 und gleicher Frequenz ν :** Eine Überlagerung dieser Art führt zu einer stehenden Welle, vgl. Abbildung 1.6. Diese zeichnet sich durch ihre Bewegungsknoten (Orte, an denen

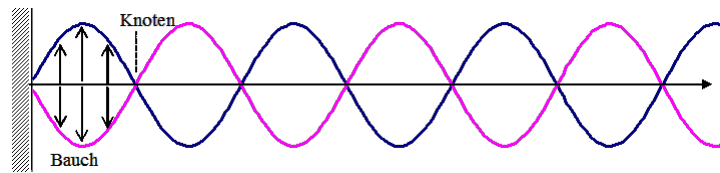


Abbildung 1.6 – Stehende Welle (vgl. [14])

das Medium zu jedem Zeitpunkt ruht), und ihre Bewegungsbäuche (Orte maximaler Auslenkung) aus, deren Abstand jeweils eine halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ beträgt. Für die mathematische Formulierung einer Welle dieses Typs wird einfachheitshalber der Koordinatennullpunkt so gewählt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Schwingungen, die den beiden zu überlagernden Wellen entsprechen, die Ruhelage durchqueren. Somit gilt $\delta_1 = \delta_2 = 0$ für die Phasenwinkel δ_1 und δ_2 . Die zwei Ausgangswellen bzw. deren Auslenkungen in Abhängigkeit von der Zeit t und der Ausbreitungsrichtung z lassen sich durch

$$x_1 = x_0 \cdot \sin \left[\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right], \quad (1.2.5)$$

$$x_2 = x_0 \cdot \sin \left[\omega \left(\frac{z}{c} + t \right) \right] \quad (1.2.6)$$

ausdrücken. Um nun die Interferenz mathematisch zu realisieren, werden die Gleichungen (1.2.5) und (1.2.6) addiert, was unter Verwendung des Additionstheorems

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

auf die resultierende Auslenkung

$$x = x_1 + x_2 = 2x_0 \cdot \sin \left(\omega \frac{z}{c} \right) \cos(\omega t)$$

führt. Daraus wird sofort ersichtlich, dass die entstehende Welle aufgrund des fehlenden charakteristischen Terms $\omega \left(\frac{z}{c} \pm t\right)$ keine fortschreitende ist. Aus der ortsabhängigen Amplitude $2x_0 \sin\left(\omega \frac{z}{c}\right)$ können die Bedingungen für die Bewegungsknoten und -bäuche abgeleitet werden, nämlich, für $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \omega \frac{z}{c} = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \text{Amplitude maximal, Bewegungsbauch} \\ \omega \frac{z}{c} = m\pi &\Rightarrow \text{Amplitude verschwindet, Bewegungsknoten.} \end{aligned}$$

- (ii) **Interferenz zweier ebener Wellen mit gleicher Amplitude x_0 , gleicher Frequenz ν und gleicher Ausbreitungsrichtung z :** Die Auslenkungen x_1 und x_2 dieser beiden Wellen können durch

$$x_1 = x_0 \cdot \sin \left[\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right], \quad (1.2.7)$$

$$x_2 = x_0 \cdot \sin \left[\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) + \delta_2 \right] \quad (1.2.8)$$

angegeben werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet δ_2 dabei den Phasenwinkel der Schwingung der zweiten Welle an der Stelle $z = 0$, während für die erste Welle für $t = 0$ und $z = 0$ offensichtlich $\delta_1 = 0$ für den Phasenwinkel gilt. Demzufolge ergibt sich die an jedem Ort z gleichbleibende Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen den zwei Wellen aus $\Delta\varphi = \delta_2$. Um die Auslenkung $x(t)$ der aus der Interferenz resultierenden Welle zu berechnen, werden (1.2.7) und (1.2.8) an jedem Ort z addiert, sodass mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

schließlich

$$x = x_1 + x_2 = 2x_0 \cdot \cos \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) \sin \left[\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) + \frac{\Delta\varphi}{2} \right]$$

folgt. Daraus lässt sich unmittelbar ablesen, dass die entstandene Welle eine fortschreitende ist und ihre Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ jener der Ausgangswellen entspricht. Zudem ist die Amplitude $2x_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ unabhängig von z , aber abhängig von der Phasendifferenz $\Delta\varphi$, die nun auch darüber entscheidet, wann eine konstruktive (Amplitude ist maximal) und wann eine destruktive (Amplitude ist an jedem Ort Null) Interferenz vorliegt, wie in Abbildung 1.7 dargestellt. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 2m\pi \text{ für } m \in \mathbb{N}_0 &\Rightarrow \text{konstruktive Interferenz,} \\ \Delta\varphi = (2m+1)\pi \text{ für } m \in \mathbb{N}_0 &\Rightarrow \text{destruktive Interferenz.} \end{aligned}$$

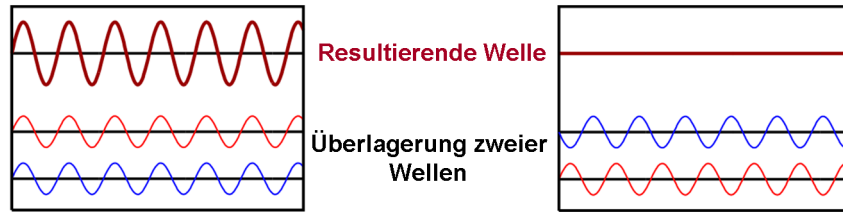


Abbildung 1.7 – Konstruktive und destruktive Interferenz (vgl. [92])

Polarisation (vgl. [40, Kap. 1, S. 5] und [59]): Natürliches Licht ist unpolarisiert, d.h. seine Schwingungsebene ist gegenüber seiner Ausbreitungsrichtung beliebig und kann sich zudem schnell und ohne einer festen Ordnung folgend ändern. Allerdings kann Licht mittels spezieller Filter polarisiert werden, wodurch erreicht wird, dass die Schwingungen nur mehr innerhalb einer bestimmten und auch zeitlich konstanten Ebene erfolgen. Abbildung 1.8 veranschaulicht diesen Vorgang: Der Polarisationsfilter lässt nur eine Schwingungsebene des ihn durchlaufenden Lichts passieren.

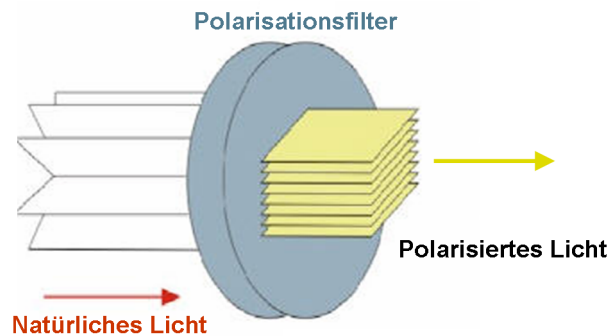


Abbildung 1.8 – Polarisation von Licht (vgl. [59])

Ein abschließender, wichtiger Begriff in der Wellenoptik, dessen nachfolgende Erklärung auf [36, S. 238] und [40, Kap. 1, S. 1] zurückgeht, ist das **Spektrum**. Dieses kennzeichnet die Stärke der Strahlung für diverse Wellenlängenbereiche. Das Lichtspektrum (vgl. Abbildung 1.9), das hier von Interesse ist, umfasst nur einen sehr kleinen Bereich der gesamten elektromagnetischen Strahlung und untergliedert sich, abhängig von der Größe der Wellenlänge λ , in folgende Anteile:

- Ultraviolette Strahlung (UV): $\lambda \in (10\text{nm}, 380\text{nm})$
- Sichtbares Licht (VIS): $\lambda \in [380\text{nm}, 780\text{nm}]$
- Infrarotstrahlung: $\lambda \in (780\text{nm}, 100.000\text{nm})$

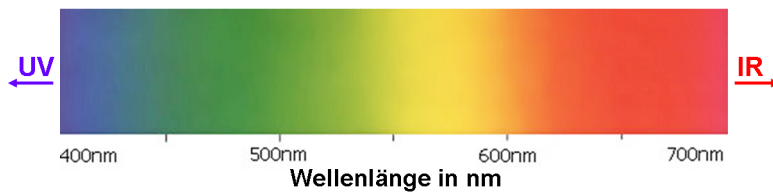


Abbildung 1.9 – Lichtspektrum (vgl. [22])

Die Grenzen zwischen diesen drei Abschnitten des Lichtspektrums sind fließend.

1.2.2 Quantenoptik

Die Quantenoptik, deren nachfolgende, einführende Erläuterungen auf [40, Kap. 1, S. 5] und [82, S. 1326] Bezug nehmen, befasst sich mit der Teilchennatur des Lichts, welche bei bestimmten physikalischen Vorgängen zum Vorschein kommt. Das Licht wird in diesem Zusammenhang als Teilchenstrahl angesehen, der sich aus Lichtteilchen, den sogenannten Photonen, bildet. Diese besitzen die Masse

$$m = \frac{h \cdot \nu}{c^2},$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum mit dem Wert $h \cong 6.626 \cdot 10^{-34}$ und der Einheit Ws^2 (bzw. Js) und ν die Frequenz des Lichtquants bezeichnen. Weiters gilt

$$e = h \cdot \nu$$

für die Energie eines Photons. Die Wechselwirkung von Licht mit Materie, wie bei Absorption und Emission von Licht, aber auch die Lichtentstehung bzw. Lichterzeugung basieren auf den Betrachtungsweisen der Quantenoptik.

Absorption und Emission von Licht (vgl. [93]): Bei der Lichtabsorption gibt das Licht seine Energie bzw. einen bestimmten Anteil davon an Materie ab, während beim Umkehrprozess der Lichtemission Materie Licht aussendet und sich dabei ihre innere Energie um den jeweiligen Energieanteil reduziert.

Lichtentstehung und Lichterzeugung (vgl. [43, S. 19-21], [61] und [82, S. 1380]): Die Basis für die Erklärung dieses Phänomens ist das Bohrsche Atommodell, vgl. Abbildung 1.10. Diesem Modell zufolge bewegen sich die Elektronen in einem Atom nicht beliebig um seinen Kern, sondern auf ganz bestimmten, kreis- oder ellipsenförmigen Umlaufbahnen, den Quantenbahnen. Diese sind stationär, was bedeutet, dass die Elektronen beim Umlauf nicht strahlen, also keine Energie verlieren. Mit zunehmendem Abstand einer Bahn vom Kern steigt auch das Energieniveau des Elektrons, das sich darauf befindet. Insgesamt ist

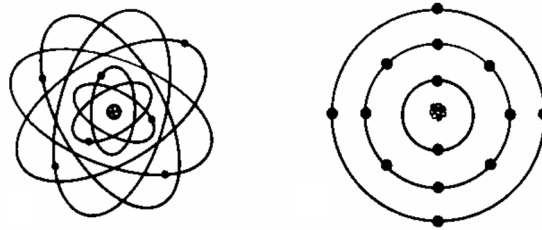


Abbildung 1.10 – Bohr'sches Atommodell in Raum und Ebene (vgl. [62])

diese Aussage im 1. Bohrschen Postulat über strahlungslose Umlaufbahnen zusammengefasst.

Wenn nun ein Elektron von seiner Quantenbahn auf eine andere wechselt, wird dies als Quanten- bzw. Elektronensprung bezeichnet. Ein solcher hat die Aufnahme oder Abgabe der entsprechenden Energiedifferenz zur Folge (gleichbedeutend mit Strahlungsabsorption oder -emission), je nachdem, ob der Übergang auf ein energetisch höheres oder niedrigeres Niveau erfolgt. Im zweiten Fall (vgl. Abbildung 1.11) verliert das Elektron Energie; die zugehörige Differenz wird dabei in Form eines Photons und in der Einheit Elektronenvolt (eV) abgegeben, wodurch schließlich Licht entsteht.

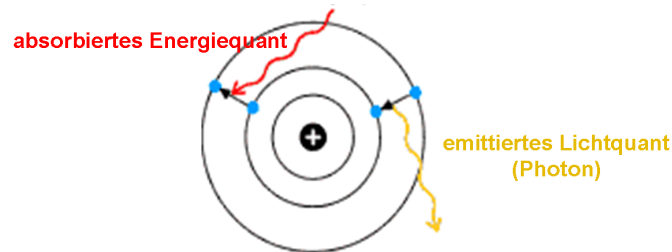


Abbildung 1.11 – Lichtentstehung (vgl. [61])

Das 2. Bohrsche Postulat trifft mit der Formel

$$\nu = \frac{E_A - E_E}{h} \quad (1.2.9)$$

eine Aussage über die Frequenz ν der emittierten Strahlung. h ist hierbei wieder das Plancksche Wirkungsquantum, E_A bezeichnet die Anfangsenergie, E_E die Endenergie des Atoms. Gleichung (1.2.9) ist äquivalent zur Erhaltung der Gesamtenergie, wenn ein Photon mit der Energie $h\nu$ abgestrahlt wird. Der vollständige Prozess, bei dem ein Atom Energie aufnimmt und durch Photonenemission wieder in seinen Grundzustand zurückkehrt, fällt unter den Begriff der Lumineszenz.

Für die Lichterzeugung greift man auf eben diese Quantensprünge und die daraus resultierende Abstrahlung von Lichtteilchen zurück. Die einzelnen Lichtquellen unterscheiden sich dann lediglich in der Art und Weise der Energiezufuhr, um einen Quantensprung auszulösen.

1.2.3 Geometrische Optik

Der dritte Teilbereich der Optik, der im Rahmen dieser Diplomarbeit nur in groben Zügen erwähnt wird, ist praktisch als Grenzfall der Wellenoptik für sehr kleine Wellenlängen zu betrachten. Im Anschluss werden zunächst einige Grundlagen angeführt, die [21] entnommen sind.

Da die Maße von optischen Systemen, mit denen in der geometrischen Optik gearbeitet wird, sehr groß verglichen mit den Wellenlängen des sichtbaren Lichts sind, werden die Welleneigenschaften des Lichts vernachlässigt. Stattdessen ist die Modellvorstellung, die in diesem Gebiet der Optik verwendet wird, eine Zusammensetzung des Lichts aus Lichtstrahlen, deren Verlauf in optischen Systemen wie beispielsweise Linsen und Spiegel untersucht wird. Zu diesem Zweck gibt es einige Regeln, die auf experimentellen Erfahrungen, aber auch auf theoretischen Überlegungen beruhen:

- Die zugrundeliegenden Medien sind homogen, besitzen also eine konstante Brechzahl. Dies impliziert die geradlinige Ausbreitung der Lichtstrahlen.
- Auf der Grenzschicht zweier solcher homogener Medien wird die Gültigkeit von Reflexions- und Brechungsgesetz vorausgesetzt.
- Der Strahlengang des Lichts ist umkehrbar.
- Lichtbündel (begrenzte Teile einer Lichtwelle), die sich kreuzen, zeigen keine gegenseitige Beeinflussung.

Die Bestandteile optischer Systeme sind

- dünne Linsen, welche Lichtstrahlen bündeln oder zerstreuen und bei der Herstellung von Brillen und Lupen verwendet werden,
- zusammengesetzte Linsen, die praktisch die Ergänzung zu den dünnen Linsen bilden,
- sphärische und parabolische Spiegel, die vor allem in optischen Instrumenten mit großen Ausdehnungen, wie beispielsweise Teleskopen, zum Einsatz kommen und dort die Linsen ersetzen, und
- ebene Spiegel und (Umkehr)prismen, welche eine Umkehrung des optischen Weges des Lichts realisieren.

1 Licht

Der letzte Punkt kann anhand der in Abbildung 1.12 dargestellten Skizzen und mit den in [87] zu findenden Ausarbeitungen näher veranschaulicht werden, wobei bezüglich Reflexion und Brechung jeweils nur das gerade relevante Phänomen erwähnt wird.

In der linken Graphik von Abbildung 1.12 fällt ein von links unten kommender Lichtstrahl auf die Grenzfläche zwischen dem Medium, in welchem sich das Licht ursprünglich bewegt (z.B. Luft) und dem Stoff, aus dem das Umkehrprisma besteht (z.B. Glas), und wird **zum Lot** gebrochen, da es sich um den Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium handelt, vgl. Kapitel 1.2.1; somit ist $\beta_1 < \alpha_1$. Der Lichtstrahl bewegt

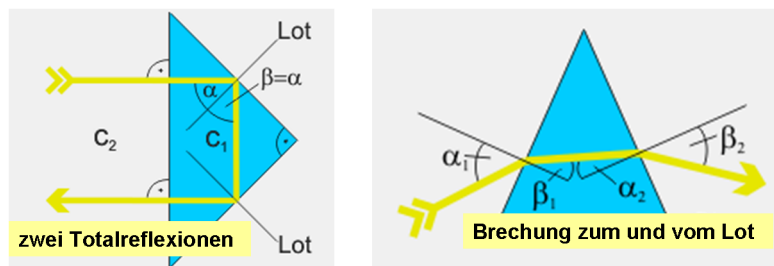


Abbildung 1.12 – Umkehrprismen (vgl. [87])

sich gemäß den im Vorfeld aufgelisteten Voraussetzungen der geometrischen Optik innerhalb des Prismas geradlinig weiter, bis er erneut auf eine Mediengrenzfläche trifft und beim Übergang in das andere Medium **vom Lot** gebrochen wird, das heißt $\alpha_2 < \beta_2$. Insgesamt erzwingt das Glasprisma somit eine Richtungsänderung des Lichtstrahls.

In der rechten Skizze von Abbildung 1.12 trifft ein Lichtstrahl **senkrecht** auf die Grenzfläche zwischen Luft und Glas ein, weswegen er vorerst nicht abgelenkt wird. Auf der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks allerdings kommt es zur Totalreflexion des Strahls unter einem Winkel von 45° , was auf die Materialeigenschaften des Prismas zurückzuführen ist. Nach einer erneuten Totalreflexion an der dritten Seite des Dreiecks tritt der Lichtstrahl aus dem Glasprisma, ohne ein zusätzliches Mal abgelenkt zu werden. Das Resultat ist damit eine Parallaxverschiebung und eine Richtungsumkehrung um 180° ; ein Umkehrprisma, welches einen Effekt dieser Art bewirkt, wird auch als doppelreflektierendes Prisma bezeichnet.

Im Rahmen der geometrischen Optik spielen unter anderem die im Folgenden erläuterten Gesetzmäßigkeiten eine Rolle:

- (i) Das **Prinzip von Fermat** (vgl. [36, S. 259]) ist ein fundamentales Gesetz im Zusammenhang mit der Lichtausbreitung und besagt, dass das Licht (bzw. allgemein eine Welle) in einem Medium von einem Punkt zu einem anderen stets jenen Weg nimmt, sodass die dafür benötigte Zeit minimal ist. Ähnlich zu der in Kapitel 1.2.1 demonstrierten Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes aus dem Huygens-Fresnelschen Prinzip kann eine Herleitung derselben Gesetze auch aus dem Prinzip von Fermat erfolgen, was anhand von Abbildung 1.13 gezeigt werden kann (siehe auch [36, S. 260]):

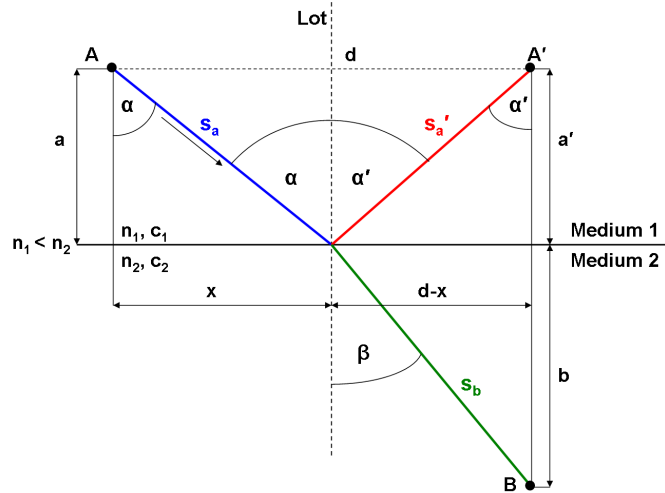


Abbildung 1.13 – Reflexions- und Brechungsgesetz: Fermat (vgl. [36, S. 260])

Reflexion: Die Laufzeit t des Lichtstrahls von A nach A' ergibt sich durch Verwendung des Satzes von Pythagoras aus

$$t = \frac{s_a}{c_1} + \frac{s'_a}{c_1} = \frac{1}{c_1} \cdot \left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d-x)^2 + (a')^2} \right).$$

Da dies gemäß Fermat die minimale Zeit für die Zurücklegung des Weges zwischen diesen zwei Punkten ist, verschwindet die Ableitung von t nach der Ortskoordinate x :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{c_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(d-x)^2 + (a')^2}} \cdot 2(d-x) \cdot (-1) \right) \\ &= \frac{1}{c_1} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + (a')^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

und damit

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + (a')^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.2.10)$$

Aus Abbildung 1.13 ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= s_a \sin \alpha = \sqrt{a^2 + x^2} \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha, \\ d-x &= s'_a \sin \alpha' = \sqrt{(d-x)^2 + (a')^2} \sin \alpha' \Leftrightarrow \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + (a')^2}} = \sin \alpha', \end{aligned}$$

mit welchen Gleichung (1.2.10) gleichbedeutend mit

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = 0$$

1 Licht

ist. Daraus folgt das Reflexionsgesetz

$$\alpha = \alpha'.$$

Brechung: Anstatt der Laufzeit t von A nach A' wird hier nun jene von A nach B betrachtet, nämlich

$$t = \frac{s_a}{c_1} + \frac{s_b}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{c_2}.$$

Mit den gleichen Überlegungen wie für die Reflexion resultiert

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.2.11)$$

Die Beziehungen, die hier Abbildung 1.13 zu entnehmen sind, lauten

$$\begin{aligned} x = s_a \sin \alpha = \sqrt{a^2 + x^2} \sin \alpha &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha, \\ d - x = s_b \sin \beta = \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \sin \beta &\Leftrightarrow \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \sin \beta, \end{aligned}$$

was durch Einsetzen in (1.2.11) auf

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} - \frac{\sin \beta}{c_2} = 0$$

und somit auf das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

führt.

- (ii) Mit Hilfe der im Anschluss anhand von [94] und [96] definierten **Abbildungsgleichung** bzw. **Linsengleichung** lässt sich berechnen, wie die optische Abbildung einer idealen Linse aussieht. Dazu wird zunächst der zweite Strahlensatz benötigt, welcher mit den Beschriftungen aus Abbildung 1.14 besagt, dass sich die ausgeschnittenen Strecken \overline{AB} , $\overline{A'B'}$ auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden Strecken \overline{ZA} , $\overline{ZA'}$, die vom Scheitel ausgehend gemessen werden, verhalten, also

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}. \quad (1.2.12)$$

Um nun die Linsengleichung herleiten zu können, muss der Strahlensatz auf Abbildung 1.15 umgemünzt werden, was folgendermaßen bewerkstelligt wird:

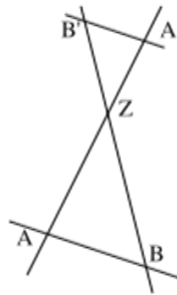


Abbildung 1.14 – 2. Strahlensatz (vgl. [96])

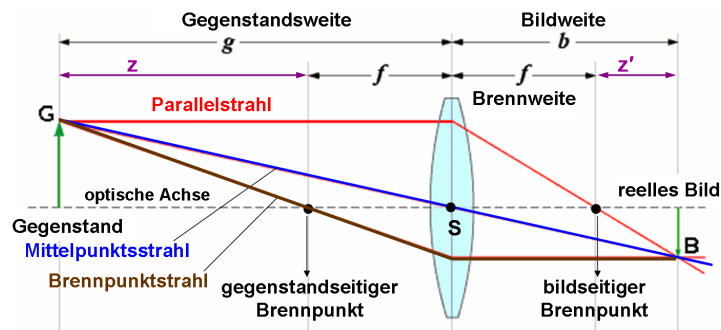


Abbildung 1.15 – Linsengleichung und Newtonsche Abbildungsgleichung (vgl. [95])

(a) Angewandt auf den Mittelpunktstrahl und die optische Achse und ausgehend vom Scheitelpunkt S ist Gleichung (1.2.12) äquivalent zu

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \quad (1.2.13)$$

wobei B die Größe des Bildes und G die Größe des abzubildenden Objekts bezeichnen.

(b) Hinsichtlich des Parallelstrahls und der optischen Achse und mit dem bildseitigen Brennpunkt als Scheitel kann aus dem Strahlensatz

$$\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f} \quad (1.2.14)$$

abgeleitet werden.

Die linken Seiten in (1.2.13) und (1.2.14) stimmen überein, weswegen auch

$$\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} \Leftrightarrow \frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1$$

gesetzt werden kann. Dies führt nach Division durch b auf die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}. \quad (1.2.15)$$

1 Licht

- (iii) Die **Newtonsche Abbildungsgleichung** kann, basierend auf [95], direkt aus der Linsengleichung abgeleitet werden. Beziehung (1.2.15) lässt sich durch einfache Umformungen auf die Gestalt

$$fg + fb = gb$$

bringen. Wird nun auf beiden Seiten der Ausdruck $f^2 - fg - fb$ addiert, folgt

$$f^2 = gb - gf - bf + f^2 = (g - f)(b - f).$$

Durch Ablesen von $z = g - f$ und $z' = b - f$ aus Abbildung 1.15 und Einsetzen ergibt sich sofort

$$f^2 = z \cdot z'.$$

Dies ist aber gerade die Newtonsche Abbildungsgleichung.

1.2.4 Lichttechnische Optik

Die Betrachtungen in den bisherigen Kapiteln waren auf rein physikalischer Ebene; der wirklich entscheidende Punkt in der Herstellung von Leuchtmitteln wurde bis jetzt völlig außer Acht gelassen, nämlich wie das Licht überhaupt auf den Menschen wirkt (vgl. [40, Kap. 1, S. 10] für die folgenden, einleitenden Worte). Auch in der lichttechnischen Optik wird das Ziel verfolgt, das Licht genauso wie in den anderen Bereichen der Optik sinnvoll zu beschreiben und zu erfassen, allerdings unter Berücksichtigung dessen, wie das visuelle System es wahrnimmt. Zu diesem Zweck wurden prinzipiell zwei Maßsysteme erstellt: Einerseits das lichttechnische Maßsystem, welches das Licht anhand seiner Helligkeitswirkung, die es auf den Menschen hat, bewertet, und andererseits das farbmétrische System, welches das Licht und seine Farbeindrücke, die das Auge empfindet, beurteilt. Da dieses Teilgebiet der Optik für diese Diplomarbeit von großer Bedeutung ist und daher in einem angemessenen Umfang aufgearbeitet werden muss, wird ihm ein separates Kapitel gewidmet.

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

Um begreiflich zu machen, wie die Wirkung, die das Licht auf den Menschen ausübt, in Größendefinitionen und konkrete Berechnungen einfließt, ist es notwendig, die Funktionsweise des menschlichen Auges zu beleuchten. Dies wird im folgenden Kapitel behandelt.

1.3.1 Das menschliche Auge

Das menschliche Auge ist ein sehr komplexer Apparat, dessen detaillierte Erklärung den Umfang dieser Arbeit sprengen würde; daher erfolgt die Beschreibung seines Aufbaus in eher groben Zügen (vgl. [7, S. 17], [18], [70] und [114]). Grundsätzlich ist das Auge, wie in Abbildung 1.16 dargestellt, aus drei Schichten zusammengesetzt:

1.3 Lichttechnisches und farbmetrisches Maßsystem

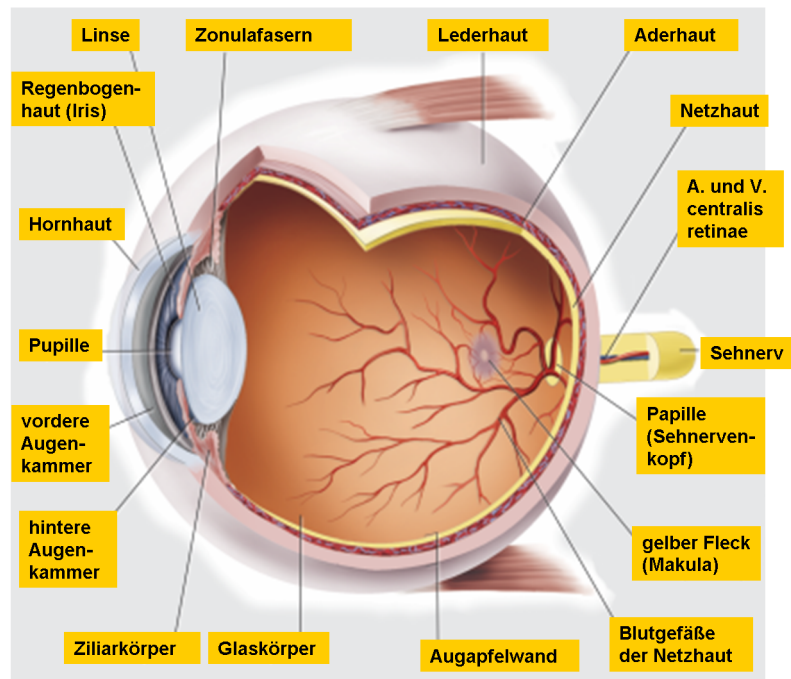


Abbildung 1.16 – Aufbau des menschlichen Auges (vgl. [114])

- Die **äußere Augenhaut** untergliedert sich in die Lederhaut und die Hornhaut. Hierbei fungiert die Lederhaut als schützende Einhüllung des Augapfels, wobei sie in dessen vorderen Bereich in die Hornhaut übergeht.
- Die **mittlere Augenhaut** wird von der Aderhaut, dem Ziliarkörper und der Regenbogenhaut (Iris) gebildet. Mit Hilfe der Aderhaut können Lichtreflexionen im Inneren des Augapfels unterbunden werden, da sie die Lichtstrahlen nach dem Erreichen der Netzhaut absorbiert. Der Ziliarkörper, der den Übergang der Aderhaut im vorderen Bereich des Auges darstellt, ermöglicht die Krümmungsflexibilität der Linse, welche wiederum für die Umstellung von Fernsehen auf Nahsehen (und umgekehrt) wesentlich ist. Das Auge kann sich auf diese Art und Weise an verschiedene Entfernungen anpassen (Akkommodation). Der sichtbare und farbige Teil des Augapfels wird als Regenbogenhaut oder Iris bezeichnet, die ein Loch, die Pupille, aufweist. Aufgabe der Regenbogenhaut ist die Anpassung der Pupillenweite auf unterschiedliche Helligkeitszustände.
- Die **innere Augenhaut** umfasst die Netzhaut, auf der die im Anschluss noch genauer beschriebenen Photorezeptoren eingebettet sind, und das Pigmentepithel, welches Licht, das durch die Netzhaut tritt, absorbiert und so Lichtreflexionen vermeidet.

Wenn Licht nun ins Auge fällt, bündelt die Linse die Lichtstrahlen, wodurch auf der Netzhaut eine Abbildung der wahrgenommenen Umgebung entsteht. Die dort befindlichen,

1 Licht

lichtempfindlichen Rezeptoren senden die empfangenen Signale an den Sehnerv, welcher ins Gehirn führt. Dieses wiederum verarbeitet die Informationen letztendlich zum Bild, das der Mensch sieht. Interessant ist dabei das unterschiedliche Verhalten der Photorezeptoren auf der Netzhaut. Prinzipiell unterteilen sich diese in Zapfen und Stäbchen, wie in Abbildung 1.17 dargestellt.

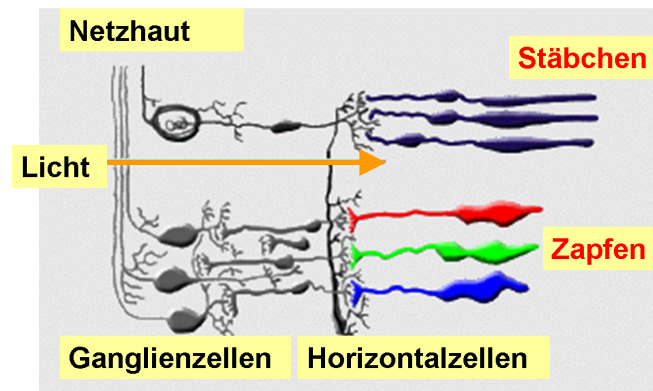


Abbildung 1.17 – Photorezeptoren (vgl. [16])

- Die Zapfen weisen eine Anzahl von circa 7 Millionen auf und befinden sich hauptsächlich in der sogenannten Netzhautgrube. Sie sind für die Farbempfindungen zuständig, was durch drei verschiedene Zapfentypen für jeweils rotes, grünes und blaues Licht realisiert wird. Die Helligkeit muss dabei allerdings ausreichend sein, was gleichzeitig der Grund dafür ist, dass die Zapfen vorwiegend beim Tagesehen (photopisches Sehen) aktiv sind.
- Die Stäbchen, die die Netzhautgrube umgeben, sind mit einer Anzahl von circa 120 Millionen eindeutig in der Überzahl. Sie sind jedoch nicht farbempfindlich, sondern können lediglich Helligkeitsstufen unterscheiden. Da sie aber eine hohe Absolutempfindlichkeit zeigen, werden sie bereits durch sehr schwache Lichteindrücke angeregt, was auch ihre Aktivität beim Nachtsehen (scotopisches Sehen) erklärt.

1.3.2 Das lichttechnische Maßsystem: Größen und Einheiten

Die Größen des lichttechnischen (photometrischen) Maßsystems sind grundsätzlich an jene des strahlungsphysikalischen (radiometrischen) Maßsystems gekoppelt. Dies wird, basierend auf [43, S. 21-22], [73, S. 19-20] und [85], im Folgenden verdeutlicht.

Wenn Strahlung über breitbandigere Wellenlängenbereiche $[\lambda_1, \lambda_2]$ betrachtet wird, ist die Definition von **spektralen** strahlungsphysikalischen Größen, d.h. spektralen Dichten, erforderlich. Die einer Größe entsprechende spektrale Größe kann durch Differentiation nach der Wellenlänge λ bzw. nach der Frequenz ν erhalten werden. In mathematischer Schreibweise und ausgehend von einer in einem Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ verteilten Strahlung bedeutet

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

dies

$$X_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X_{e,\lambda} d\lambda.$$

$X_{e,\lambda}$ bezeichnet hierbei die spektrale Dichte einer beliebigen, aber zugehörigen strahlungsphysikalischen Größe X_e , wobei der Index „e“ für „energetic“ steht.

Darauf aufbauend stellt nun die **spektrale Hellempfindlichkeitskurve** $V(\lambda)$ die Brücke zur photometrischen Bewertung dar. Die Definition dieser Kurve geht zurück auf die CIE (Commission Internationale de l'Éclairage; Internationale Beleuchtungskommission) und beruht auf der Funktionsweise des menschlichen Auges, genauer ausgedrückt auf der Tatsache, dass seine Hellempfindlichkeit neben der aufgenommenen Strahlungsleistung auch von deren spektraler Zusammensetzung abhängt. Zu berücksichtigen sind zudem die Unterschiede zwischen Tagesehen ($V(\lambda)$ -Kurve) und Nachtsehen ($V'(\lambda)$ -Kurve), wie in Abbildung 1.18 dargestellt. Der spektrale Unterschied zwischen den beiden Kurven wird Purkinje-

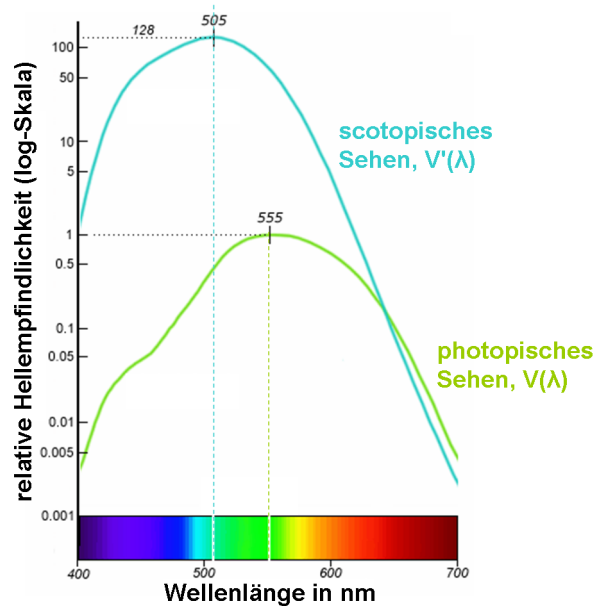


Abbildung 1.18 – Hellempfindlichkeitskurven (vgl. [58])

Effekt genannt und beruht auf den unterschiedlichen Eigenschaften der in Kapitel 1.3.1 beschriebenen Photorezeptoren. Wie dort bereits erwähnt wurde, sind beim Nachtsehen nur die Stäbchen aktiv, deren spektrale Hellempfindlichkeit sich anders als jene der Zapfen verhält. Daher sind die entsprechenden Kurven in Abhängigkeit der Wellenlänge verschoben und der Purkinje-Effekt wird ersichtlich.

Mithilfe der $V(\lambda)$ -Kurve erfolgt nun der Übergang von den radiometrischen zu den photometrischen Größen. Die Strahlung wird dann nicht mehr nur objektiv anhand ihrer physikalischen Eigenschaften, sondern auch hinsichtlich ihrer Wahrnehmung durch das menschliche

1 Licht

Auge bewertet. Der mathematische Zusammenhang lautet

$$X_v = K_m \int_{380\text{nm}}^{780\text{nm}} X_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda. \quad (1.3.1)$$

Eine lichttechnische Größe X_v ergibt sich demzufolge durch Integration der spektralen Dichte $X_{e,\lambda}$, gewichtet mit der spektralen Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$, über das (näherungsweise) Wellenlängenintervall des sichtbaren Lichts; der Index „v“ steht für „visible“. Im scotopischen Fall sind K_m und $V(\lambda)$ einfach durch K'_m und $V'(\lambda)$ zu ersetzen. Die Faktoren vor den jeweiligen Integralen werden Strahlungsäquivalente genannt; für sie gilt

$$K_m = 683 \frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}} \quad \text{und} \quad K'_m = 1699 \frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}}, \quad (1.3.2)$$

wobei auf die Einheit Lumen im Anschluss noch genauer eingegangen wird.

Zunächst wird der Raumwinkel Ω in Anlehnung an [73, S. 22-24], [76] und [91] beschrieben, der zwar selbst nicht zum lichttechnischen Maßsystem zählt, jedoch in die Definition einiger photometrischer Größen einfließt und daher nicht zu vernachlässigen ist. Prinzipiell ist der Raumwinkel jener Winkel, den ein aus einer Kugel herausgeschnittener Kegel (oder eine herausgeschnittene Pyramide) einnimmt, wie es in Abbildung 1.19 skizziert ist. Mit den

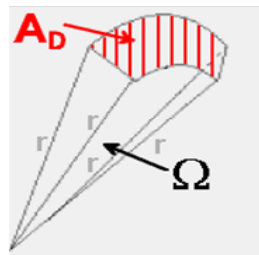


Abbildung 1.19 – Definition des Raumwinkels (vgl. [23])

Beschriftungen dieser Graphik lautet die Formelbeziehung

$$\Omega = \frac{A_D}{r^2}, \quad \text{mit der Einheit } [\Omega] = 1 \text{ Steradian (1sr)}, \quad (1.3.3)$$

wobei r den Kugelradius und A_D eine Teilfläche der entsprechenden Kugel bezeichnen. Anders ausgedrückt lässt sich aus dieser Definition ableiten, dass ein Raumwinkel von 1sr auf einer Kugel mit einem Radius von 1m eine Fläche von 1m^2 umschließt, was wiederum für die Einheitskugel ($r = 1$) impliziert, dass eine Teilfläche der Kugel stets dem zugehörigen Raumwinkel entspricht. Der volle Raumwinkel muss demzufolge den Wert 4π annehmen, da dies gleichzeitig die Oberfläche der Einheitskugel ist. Die Berechnung des Raumwinkels ist von der Beobachtungsrichtung abhängig: Ist diese nicht genau auf das Lot der zugehörigen Kugelfläche hin orientiert, wie es in (1.3.3) stillschweigend vorausgesetzt wird, sondern von einem anderen Punkt ausgehend, sodass die neue Blickrichtung mit der ursprünglichen

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

einen Winkel γ einschließt, ist von dem kleinen, in Abbildung 1.20 dargestellten Kugel-flächenelement dA_K nur noch dessen Projektion dA_P zu berücksichtigen, welche sich in diesem Fall aus $dA_P = dA_K \cdot \cos \gamma$ ergibt.

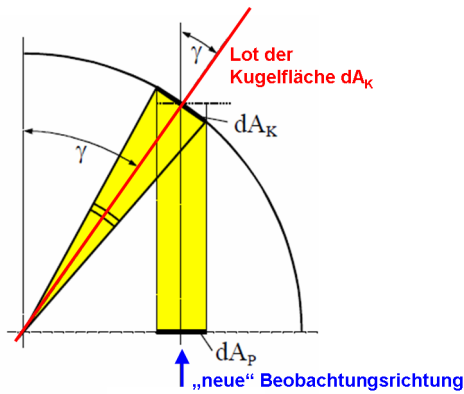


Abbildung 1.20 – Raumwinkel unter anderer Blickrichtung (vgl. [76])

Das lichttechnische Maßsystem umfasst nun folgende Größen:

- (i) Der **Lichtstrom** Φ_v bildet den Anfang dieser Aufzählung, da alle anderen Größen von ihm abgeleitet werden, und wird anhand der [43, S. 22-23], [73, S. 20-21] und [79] entnommenen Informationen erklärt. Er gibt, wie Abbildung 1.21 veranschaulicht, die gesamte ungerichtete, vom menschlichen Auge empfangene Strahlungsleistung einer Lichtquelle an, weswegen man ihn auch als die „Lichtleistung“ der Lichtquelle bezeichnet. Mit Gleichung (1.3.1) ergibt sich für den Lichtstrom

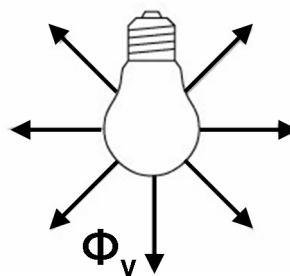


Abbildung 1.21 – Lichtstrom (vgl. [13])

$$\Phi_v = K_m \int_{380\text{nm}}^{780\text{nm}} \Phi_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda,$$

1 Licht

wobei $\Phi_{e,\lambda}$ den spektralen Strahlungsfluss symbolisiert. Die Einheit von Φ_v ist das Lumen (lm); zusammen mit der Einheit Watt für $\Phi_{e,\lambda}$ erklärt dies die Einheit Lumen/Watt für das Strahlungsäquivalent K_m , wie in den Gleichungen (1.3.2) angegeben. In Tabelle 1.1 scheinen einige, konkrete Lichtstromwerte verschiedener Leuchtmittel auf (Stand 2003).

Lichtquelle	Φ_v
Glühlampe 230V/100W	1.380lm
Halogenglühlampe 12V/100W	2.550lm
Leuchtstofflampe 230V/36W	3.200lm
Natriumdampf-Niederdruck 230V/90W	13.500lm
Natriumdampf-Hochdruck 230V/100W	10.000lm
Halogenmetall dampflampe 230V/70W	5.500lm

Tabelle 1.1 – Lichtstromwerte (vgl. [73, S. 21])

- (ii) Die **Lichtmenge Q** (vgl. [73, S. 21-22]) wird auch als Lichtarbeit bezeichnet und kann durch Integration des Lichtstroms über die Beleuchtungszeit bestimmt werden. Ist die betrachtete Lichtquelle über eine bestimmte Zeitspanne $[t_1, t_2]$ aktiv, wird Q aus

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \Phi_v(t) dt$$

berechnet. Die Einheit der Lichtmenge ist daher $\text{lm}\cdot\text{s}$.

- (iii) Die **Lichtstärke I_v** , deren nachfolgende Definition unter Verwendung der Quellen [40, Kap. 4, S. 16], [43, S. 23], [73, S. 24-25, 29] und [79] erfolgt, erfasst die Lichtausstrahlung der gesamten Lichtquelle, allerdings nur in einer bestimmten Richtung, wie in Abbildung 1.22 dargestellt. Dies wird über die Verwendung des Raumwinkels

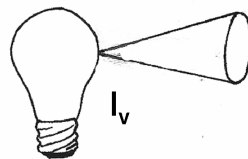


Abbildung 1.22 – Lichtstärke (vgl. [63])

direkt aus ihrer Definition ersichtlich, nämlich

$$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}.$$

Interessanterweise ist die Lichtstärke mit einem Kuriosum verknüpft. Einerseits ist sie offensichtlich eine vom Lichtstrom abgeleitete Größe, andererseits jedoch ist ihre

1.3 Lichttechnisches und farbmetrisches Maßsystem

Einheit, das Candela (cd), eine **Basiseinheit** im SI-Einheitensystem:

„1 Candela entspricht der Strahlungsleistung von $1/683$ Watt einer monochromatischen Strahlung der Frequenz von $540 \cdot 10^{12}$ Hertz pro Steradian.“²

Zu beachten ist noch die Ausdehnung der betrachteten Lichtquelle: Ist diese punktförmig, kann die Definitionsgleichung für I_v ohne Bedenken angewandt werden. Handelt es sich hingegen um eine räumlich ausgedehnte Lichtquelle, muss die photometrische Grenzentfernung beachtet werden, welche festlegt, dass der Abstand zwischen dem Leuchtmittel und dem beleuchteten Objekt zehnmal größer als die größte Ausdehnung der Lampe sein muss. Ab dieser Distanz können die jeweiligen Lichtquellen als punktförmig angesehen und alle gewünschten Berechnungen durchgeführt werden.

- (iv) Die **Beleuchtungsstärke** E_v , für deren anschließende Definition auf die Quellen [40, Kap. 4, S. 11], [43, S. 23], [73, S. 25-29] und [79] Bezug genommen wird, bezeichnet jenen Lichtstrom, der auf eine bestimmte Fläche trifft. Ihre Definitionsgleichung lautet daher

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA},$$

wobei dA gerade die beleuchtete Fläche ist, vgl. Abbildung 1.23. Als vom Lichtstrom

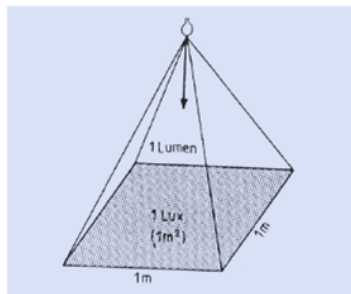


Abbildung 1.23 – Beleuchtungsstärke (vgl. [79])

abgeleitete Größe hat E_v die Einheit $1\text{lm}/\text{m}^2$; für diese wurde ein eigener Name, nämlich das Lux (lx), vergeben. Obwohl es im Zusammenhang mit der Beleuchtungsstärke um bestrahlte Flächen geht, macht sie keine Aussage über den Helligkeitseindruck, den das Auge empfindet. Weiters wird je nach Art der Empfängerfläche zwischen planarer, (halb)zylindrischer und sphärischer Beleuchtungsstärke unterschieden, wobei abhängig von der vorliegenden Situation der Lichtstrom, der in der Formel für E_v vorkommt, eventuell abgeändert werden muss. Beispielsweise wird eine schräg bestrahlte Fläche, wie in Abbildung 1.24 dargestellt, von weniger Lumen erreicht, sodass in diesem konkreten Fall Φ_v durch $\Phi_v \cos(\epsilon)$ ersetzt werden muss. In Tabelle 1.2 sind einige, verschiedene E_v -Werte aufgelistet.

- (v) Die unter Zuhilfenahme von [40, Kap. 4, S.9], [43, S. 23], [73, S. 29-30] und [79] beschriebene **Leuchtdichte** L_v ist als einzige, tatsächlich „sichtbare“ photometrische Größe ein Parameter, der den Helligkeitseindruck, den eine leuchtende oder

²Zitat aus [73, S. 24].

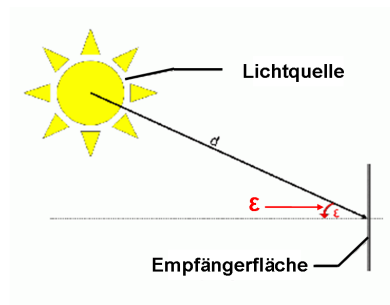


Abbildung 1.24 – Schräger Lichteinfall (vgl. [69])

Situation	E_v
wolkenloser Sommertag	bis 100.000lx
trüber Sommertag	20.000lx
trüber Wintertag	400lx
Vollmondnacht	1lx
Sternennacht	0.01lx
Bürobeleuchtung	500lx

Tabelle 1.2 – Beleuchtungsstärken (vgl. [73, S. 26])

beleuchtete Fläche im Auge auslöst, charakterisiert. Sie ist mit den Beschriftungen aus Abbildung 1.25 durch

$$L_v = \frac{d^2\Phi_v}{\cos(\varphi)dAd\Omega}$$

definiert und hat die Einheit cd/m^2 . Demnach gibt sie den im Raumwinkel $d\Omega$ vom betrachteten Flächenelement dA abgestrahlten Lichtstrom an, wobei φ den Winkel zwischen der Flächennormalen (charakterisiert durch \vec{n}) und der Lichtausstrahlungsrichtung bezeichnet und letztere somit festlegt. Ein interessanter Effekt ist die Un-

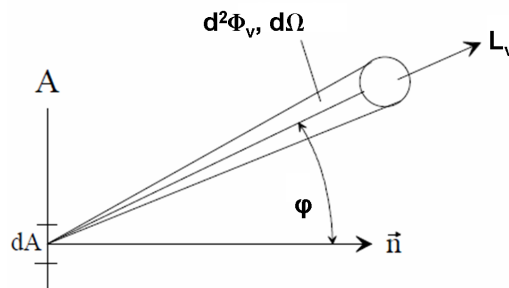


Abbildung 1.25 – Definition der Leuchtdichte (vgl. [40, Kap. 4, S. 9])

abhängigkeit der Leuchtdichte von der Sehdistanz – eine Vergrößerung des Abstands

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

zur Lichtquelle ändert daher nichts an der empfundenen Helligkeit. Einige L_v -Werte, die verschiedenen, alltäglichen Situationen entsprechen, sind in Tabelle 1.3 zusammengefasst.

Situation	L_v
Fensteröffnung mittags, leicht bewölkt	5.000–50.000cd/m ²
Fensteröffnung mittags, bedeckter Himmel	1.000–3.000cd/m ²
Opale Glühlampe, 100W	60.000cd/m ²
Leuchtstofflampe	5.000–15.000cd/m ²
Weißes Papier bei 500lx	130–150cd/m ²
Umweltschutzpapier bei 500lx	90–100cd/m ²

Tabelle 1.3 – Leuchtdichten (vgl. [73, S. 30])

- (vi) Die **Belichtung H_v** (vgl. [100]) ist jene Lichtmenge, die insgesamt von einem Flächenelement dA aufgenommen wird, wenn dieses mit Licht einer Beleuchtungsstärke E_v über ein Zeitintervall $[t_1, t_2]$ bestrahlt wird. Daher gilt

$$H_v = \int_{t_1}^{t_2} E_v(t) dt$$

mit der Einheit $[H_v] = \text{lx}\cdot\text{s}$.

Anhand der Definitionen der lichttechnischen Größen lassen sich zwei wichtige Gesetze herleiten (dazu werden Ausführungen aus [84, S. 86-87] verwendet):

- (i) Das **photometrische Grundgesetz** bestimmt den Lichtstrom, der einem Flächenelement zugestrahlt wird. Um die entsprechende Formel zu erhalten, wird Abbildung 1.26 herangezogen, deren Bezeichnungen folgende Bedeutung haben:

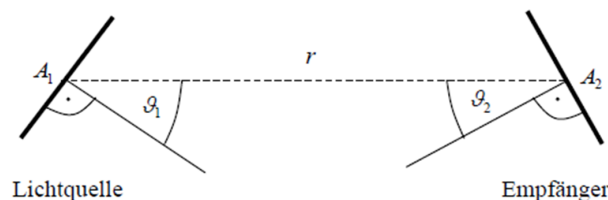


Abbildung 1.26 – Photometrisches Grundgesetz (vgl. [84])

1 Licht

- $A_1 \dots$ Fläche, die der am Ausgangspunkt befindlichen
 Lichtquelle zugeordnet wird,
 $A_2 \dots$ Empfängerfläche,
 $r \dots$ Abstand zwischen A_1 und A_2 (entlang der Horizontalen),
 $\vartheta_1 \dots$ Neigungswinkel von A_1
 (Winkel zwischen der Senkrechten auf A_1 und der Horizontalen),
 $\vartheta_2 \dots$ Neigungswinkel von A_2
 (Winkel zwischen der Senkrechten auf A_2 und der Horizontalen).

Das Flächenelement dA_2 der Empfängerfläche A_2 hat die Größe $dA_2 \cos(\vartheta_2)$, sodass sich der Raumwinkel $d\Omega$ aus

$$d\Omega = \frac{dA_2 \cdot \cos(\vartheta_2)}{r^2} \quad (1.3.4)$$

ergibt. Umgekehrt erscheint die Größe des Flächenelements dA_1 der Lichtquelle, ausgehend von der Empfängerfläche, als $dA_1 \cos(\vartheta_1)$. Somit gilt für die Lichtstärke I_v , die in Richtung des Empfängers ausgesandt wird, die Beziehung

$$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega} = \int_{A_1} L_v \cos(\vartheta_1) dA_1, \quad (1.3.5)$$

was für den Lichtstrom durch Umformen und Einsetzen von (1.3.4) zunächst auf

$$d\Phi_v = I_v d\Omega = \int_{A_1} L_v \frac{dA_1 \cos(\vartheta_1) \cdot dA_2 \cos(\vartheta_2)}{r^2} \quad (1.3.6)$$

und durch erneute Integration letztendlich auf das photometrische Grundgesetz

$$\Phi_v = \int_{A_2} \int_{A_1} L_v \frac{dA_1 \cos(\vartheta_1) \cdot dA_2 \cos(\vartheta_2)}{r^2}$$

führt.

- (ii) Das **photometrische Entfernungsgesetz** kann nun direkt aus den vorhergehenden Berechnungen abgeleitet werden. Aus (1.3.6) folgt für kleine Lichtquellen

$$d\Phi_v = L_v A_1 \cos(\vartheta_1) \frac{dA_2 \cos(\vartheta_2)}{r^2},$$

was unmittelbar in die Formel für die Beleuchtungsstärke E_v auf der Empfängeroberfläche eingesetzt werden kann,

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA_2} = L_v A_1 \cos(\vartheta_1) \frac{\cos(\vartheta_2)}{r^2}. \quad (1.3.7)$$

1.3 Lichttechnisches und farbmetrisches Maßsystem

Aus (1.3.5) lässt sich, wiederum für kleine Lichtquellen,

$$I_v = L_v A_1 \cos(\vartheta_1)$$

ablesen. Dieser Ausdruck ist ein in Gleichung (1.3.7) auftretender Faktor; diese geht damit in das photometrische Entfernungsgesetz

$$E_v = I_v \frac{\cos(\vartheta_2)}{r^2}$$

über und besagt, dass die Beleuchtungsstärke der Empfängerfläche mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt.

Eine zusätzliche Größe, die zwar selbst nicht zum lichttechnischen Maßsystem zählt, aber dennoch von immenser Bedeutung ist, ist die mittels [43, S. 24] und [73, S. 34-35] eingeführte **Lichtausbeute** oder **Effizienz** η , welche angibt, wieviel der aufgebrauchten elektrischen Energie P_{el} tatsächlich in Licht umgewandelt wird. Sie ist damit ein Maß für die Effizienz von Leuchtmittel und durch

$$\eta = \frac{\Phi_v}{P_{el}}$$

definiert; ihre Einheit lautet lm/W. Einige η -Werte für unterschiedliche Lampen können Tabelle 1.4 entnommen werden.

Lichtquelle	P_{el}	Lichtausbeute in lm/W		
		min	typisch	max
Haushaltsglühlampe 230V	5		5	
LED blau	0.05– >1	1	8.5	16
LED weiß (LED + Leuchtstoff)	0.05– >1	1	50.5	150
LED rot	0.05– >1	5	47.5	90
Halogen-Glühlampe 230V	1000		24.2	
Xenon-Gasentladungslampe	mehrere kW		47	

Tabelle 1.4 – Lichtausbeuten (vgl. [109])

radiometrische Größe	Einheit	photometrische Größe	Einheit
Strahlungsenergie Q_e	W·s	Lichtmenge Q_v	lm·s
Strahlungsleistung Φ_e	W	Lichtstrom Φ_v	lm
Strahlstärke I_e	W/sr	Lichtstärke I_v	cd
Strahldichte L_e	W/m ² ·sr	Leuchtdichte L_v	cd/m ²
Bestrahlungsstärke E_e	W/m ²	Beleuchtungsstärke E_v	lx
Bestrahlung H_e	Ws/m ²	Belichtung H_v	lx·s

Tabelle 1.5 – Radiometrie und Photometrie (vgl. [110])

Den Abschluss dieses Kapitels bildet Tabelle 1.5, die die Analogien zwischen den radio- und photometrischen Größen repräsentiert.

1.3.3 Grundlagen der Farbmatrik

Der komplexe Bereich der Farbmatrik befasst sich mit der mathematischen bzw. geometrischen Darstellung der Farben, die der Mensch empfindet. Für den gesamten Inhalt dieses Abschnitts werden Informationen folgender Quellen verwertet:

[7, S. 22], [11], [12], [20], [25], [29], [30], [31], [32], [43, S. 24-26], [73, S. 35-36], [104], [112].

Die Bedeutung eines umfangreichen Wissens auf dem Gebiet der Farbmatrik für Entwickler von Leuchtmitteln beruht auf der Tatsache, dass die Farbeindrücke, die wir durch das in Kapitel 1.3.1 erwähnte Zusammenspiel von Auge und Gehirn empfinden, nur dann möglich sind, wenn überhaupt Licht vorhanden ist. An dieser Stelle kann auch gleich eine Unterscheidung zwischen der **Lichtfarbe einer Lichtquelle** und der **Farbe eines Objekts** getroffen werden. Erstere steht für jenen Farbeindruck, den das Gehirn erzeugt, wenn das Licht der betreffenden Lampe direkt ins Auge fällt. Hingegen ist die einem Gegenstand zugeordnete Farbe von drei Faktoren abhängig, nämlich von

- der spektralen Zusammensetzung des Lichts, welches das Objekt beleuchtet,
- der spektralen Zusammensetzung des Lichts, welches das Objekt reflektiert,
- der individuell verschiedenen Sehfähigkeit des Beobachters.

Im Rahmen der Farbmatrik werden einige Begriffe definiert, die häufig allesamt fälschlicherweise als „Farbe“ bezeichnet werden:

- Der **Farbreiz** wird prinzipiell der zugehörigen Lichtquelle zugeordnet und benennt ihre Strahlungsleistung, die die auf der Netzhaut des Auges sitzenden Zapfen aufnehmen.
- Die **Farbvalenz** entsteht erst im Auge, bezeichnet also den farblichen Effekt der Strahlung einer Lichtquelle. Dieser ist davon abhängig, in welchem Ausmaß die unterschiedlichen Zapfentypen angeregt werden und kann als unmittelbare Folge des physikalischen Farbreizes angesehen werden.
- Die **Farbempfindung** bzw. **Farbe** entsteht schließlich durch die Verarbeitung der Informationen im Gehirn, die über den Sehnerv dorthin gelangen.

Um Farben zahlenmäßig festhalten und sie damit eindeutig reproduzieren zu können, wird als Basis die sogenannte **Dreifarbentheorie von Helmholtz und Young** eingesetzt, derzufolge jeder Farbeindruck durch die Mischung dreier beliebiger, aber unabhängiger Grundfarbreize (z.B. Rot, Grün, Blau) erzeugt werden kann. Dies fällt unter den Begriff der **additiven Farbmischung**, d.h. der Mischung von drei Lichtfarben, deren Intensitäten dabei, wie in Abbildung 1.27 gezeigt, „addiert“ werden. Mithilfe der Methode der additiven Farbmischung wurden die ersten Testreihen, deren Ziel ein System zur mathematischen Darstellung von Farbempfindungen war, von David Wright (1928) und John Guild (1931) durchgeführt; Abbildung 1.28 zeigt schematisch die Versuchsanordnung. Die jeweilige Test-

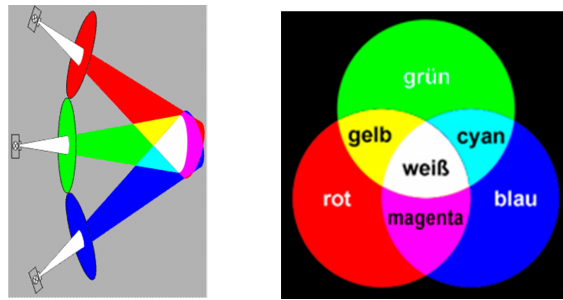


Abbildung 1.27 – Additive Farbmischung (vgl. [2], [89])

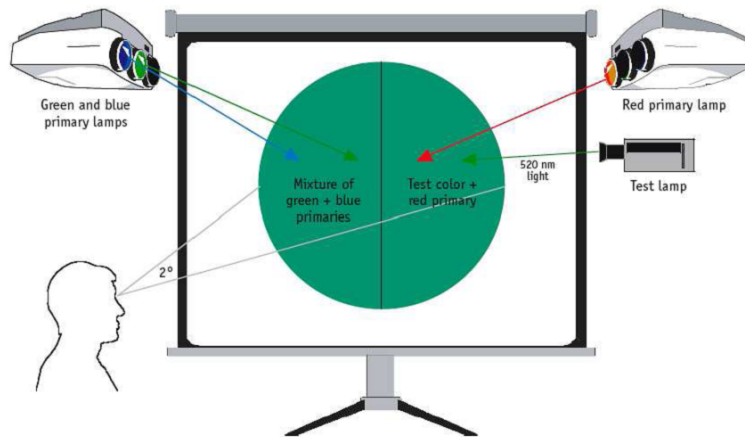


Abbildung 1.28 – Versuche zur additiven Farbmischung (vgl. [12])

person beobachtete einen geteilten Schirm unter einem 2° -Blickfeld, welches aus der Größe jener Zone auf der Netzhaut abgeleitet wurde, in welcher die meisten Zapfen aufzufinden sind³. Ein Blickfeld dieser Art ergibt sich z.B. bei der Betrachtung einer 1 Euro-Münze in einem Abstand, der jenem ausgestreckter Arme entspricht. Zur Bewertung von monochromatischem Licht (d.h. Licht einer genau definierten Wellenlänge) wurden nun auf eine Hälfte des Schirms nacheinander alle möglichen, verschiedenen Farben projiziert, was praktisch mit Farbfiltern realisiert wurde. Die zweite Schirmhälfte bot der Testperson die Möglichkeit, durch Einstellen der Lichtstärke von drei Strahlern in den Grundfarben Rot, Grün und Blau die Testfarbe nachzubilden (**innere Mischung**). Jedoch konnten nicht für alle vorgegebenen Farbreize Übereinstimmungen gefunden werden; in solchen Fällen sollte der Proband zur Testfarbe zusätzlich Licht einer Grundfarbe hinzufügen, um auf beiden Schirmhälften die gleiche Farbempfindung wahrzunehmen (**äußere Mischung**, vgl. Abbildung 1.28). Auf diese Art und Weise konnten insgesamt jeder Testfarbe drei zugehörige Farbwerte R , G und B (relative Leuchtdichten) zugeordnet werden. Im nächsten Schritt wurden für die drei Grundfarben Rot, Grün und Blau die dreidimensionalen Einheits-

³1964 fanden analoge Versuche basierend auf einem 10° -Blickfeld statt, was der Größe eines A4-Blattes in einem Abstand von 30cm entspricht. Dies führte natürlich auf andere Ergebnisse, da wegen der Erweiterung des Blickfelds die Zapfenanzahl im Randbereich geringer war.

1 Licht

vektoren \vec{R} , \vec{G} und \vec{B} vergeben, wodurch sich die Farbvalenz \vec{F} einer Testfarbe mit den experimentell ermittelten Farbwerten R , G und B aus

$$\vec{F} = R\vec{R} + G\vec{G} + B\vec{B}$$

ergab und somit vektoriell beschrieben werden konnte. Die Ergebnisse wurden im weiteren Verlauf und unter Verwendung von Grundfarben der konkreten Wellenlängen 700nm (rot), 546.1nm (grün) und 435.8nm (blau) auch kurvenmäßig durch die sogenannten **Spektralwertfunktionen** festgehalten (vgl. Abbildung 1.29), wobei der negative Anteil der Kurve $\bar{r}(\lambda)$ durch die zuvor erläuterten, teilweise notwendigen äußeren Farbmischungen verursacht wurde. Aufgrund dieser auftretenden negativen Farbwerte, die rechnerisch nicht die beste

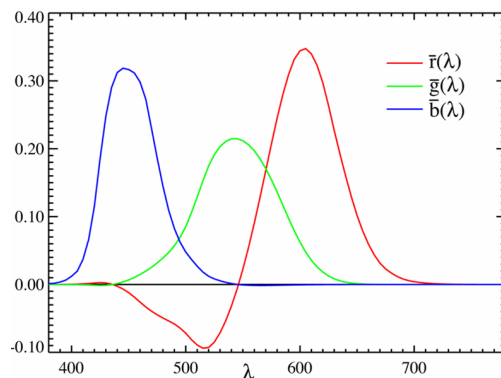


Abbildung 1.29 – Spektralwertfunktionen (vgl. [12])

Lösung zu sein schienen, beschloss die CIE 1931, ein standardisiertes, einheitliches System zu definieren. Zu diesem Zweck führte sie die sogenannten virtuellen Primärvalenzen (Tristimuluswerte) X , Y und Z bzw. die korrespondierenden **Normspektralwertkurven** $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$, wie in Abbildung 1.30 dargestellt, ein. Das Adjektiv „virtuell“ rührt

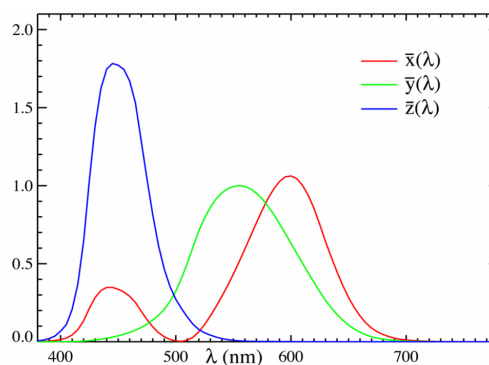


Abbildung 1.30 – Normspektralwertkurven (vgl. [12])

daher, dass diese Werte in der Realität zwar nicht existieren, aber es ermöglichen, alle realen Farben ohne Verwendung negativer Farbwerte anzugeben. Die Voraussetzungen für

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

die Transformation des ursprünglichen RGB-Farbraums auf die Tristimuluswerte sind
(a) die Erhaltung der Farbe Weiß bei gleichen Anteilen von X, Y und Z in der Farbmischung, und

(b) die Bedingung $\bar{y}(\lambda) = V(\lambda)$.

Konkret lautet die Umrechnung der RGB-Parameter auf die virtuellen Primärvalenzen

$$\begin{aligned} X &= +2.36460R - 0.51515G + 0.00520B && \dots \text{virtuelles Rot,} \\ Y &= -0.89653R + 1.42640G - 0.01441B && \dots \text{virtuelles Grün,} \\ Z &= -0.46807R + 0.08875G + 1.00921B && \dots \text{virtuelles Blau,} \end{aligned}$$

woraus auch sofort Voraussetzung **(a)** nachgerechnet werden kann: Die Drittelung jedes Tristimuluswerts und die anschließende Addition $\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{3}Z$ führen darauf, dass Rot, Grün und Blau zu je einem Drittel in der Farbmischung enthalten sind und somit Weiß resultiert.

Mit den von der CIE eingeführten Normspektralwertkurven können die Tristimuluswerte, deren Bestimmung zur zahlenmäßigen Angabe von Farbempfindungen notwendig ist, anhand der allgemeinen Formeln

$$X = \frac{1}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda, \quad (1.3.8)$$

$$Y = \frac{1}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) \underbrace{\bar{y}(\lambda)}_{=V(\lambda)} d\lambda, \quad (1.3.9)$$

$$Z = \frac{1}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (1.3.10)$$

berechnet werden. Die erste Unbekannte ist hier die sogenannte **Farbreizfunktion** $\varphi(\lambda)$ zur physikalischen Beschreibung des am Eingang des Kapitels definierten Farbreizes. Um sie auszuwerten, wird zwischen folgenden Fällen unterschieden:

- Für **Selbstleuchter**, die Licht aufgrund hoher Temperaturen oder bestimmter chemischer Abläufe ausstrahlen, gilt

$$\varphi(\lambda) = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda).$$

- Für **Nichtselbstleuchter**, die nur dann Licht aussenden, wenn sie von anderen Lichtquellen bestrahlt werden, ergibt sich die Farbreizfunktion je nach Situation aus

$$\varphi(\lambda) = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda) \cdot \tau(\lambda) \quad (1.3.11)$$

oder aus

$$\varphi(\lambda) = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda) \cdot \beta(\lambda). \quad (1.3.12)$$

1 Licht

Der spektrale Transmissionsgrad $\tau(\lambda)$ aus (1.3.11) ergibt sich dabei, wie in Abbildung 1.31 skizziert, aus

$$\tau(\lambda) = \frac{\Delta\Phi(\lambda)}{\Delta\Phi_0(\lambda)},$$

d.h. aus dem Verhältnis von transmittiertem zu auftreffendem Strahlungsfluss in einem kleinen Intervall $\Delta\lambda$ um eine bestimmte Wellenlänge λ , während der spektrale Remissionsgrad $\beta(\lambda)$ aus (1.3.12)

$$\beta(\lambda) = \frac{\Delta\Phi(\lambda)}{\Delta\Phi_N(\lambda)}$$

erfüllt, vgl. Abbildung 1.32. Dafür werden, hier wieder bei monochromatischer Bestrahlung, die Reflexionen der Oberfläche der Probe mit jenen eines Weißstandards N verglichen und die Strahlungsflüsse, die von beiden Objekten in die jeweils selbe Richtung reflektiert werden, ins Verhältnis gesetzt.

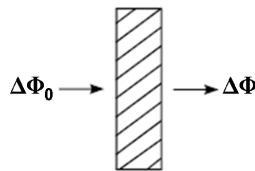


Abbildung 1.31 – Spektraler Transmissionsgrad (vgl. [29])

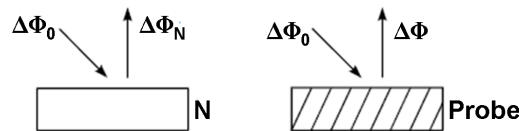


Abbildung 1.32 – Spektraler Remissionsgrad (vgl. [32])

Zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors $\frac{1}{k}$ in (1.3.8)-(1.3.10) kann beispielsweise auf ein Transmissionsnormal zurückgegriffen werden, für welches $\tau(\lambda) = 1$ für alle Wellenlängen λ gilt (in der Praxis bedeutet dies einfach die Entfernung der beleuchteten Probe aus der Halterung). Das impliziert aber einen Helligkeitswert von $Y_N = 100$. Wenn dies in Gleichung (1.3.9) eingesetzt und die Voraussetzung $\bar{y}(\lambda) = V(\lambda)$ berücksichtigt wird, folgt

$$\begin{aligned} Y_N = 100 &= \frac{1}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(\lambda) \underbrace{\tau(\lambda)}_{=1} \cdot V(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

woraus man einen Wert für den Faktor $\frac{1}{k}$ erhält und damit wiederum alle drei virtuellen Primärvalenzen X , Y und Z berechnen kann. Diese bilden die Grundlage für das im nächsten Kapitel behandelte Farbsystem.

1.3.4 Das CIE-Normvalenzsystem

Das 1931 von der Internationalen Beleuchtungskommission CIE definierte Normvalenzsystem (auch CIE-Farbtafel, CIE-Chart, Yxy-Farbraum, CIE-Yxy) erlaubt es, die Gesamtheit aller für den Menschen wahrnehmbaren Farben in kompakter Form abzubilden und diesen mathematische Koordinaten zuzuordnen⁴. Die Herleitung dieses Systems wird im Rahmen dieses Abschnitts in Anlehnung an folgende Quellen gezeigt:

[11], [12], [25], [36, S. 312, 321-324], [43, S. 24-28], [55], [73, S. 36-37], [80], [112], [115], [116].

Aus den Gleichungen (1.3.8)-(1.3.10) für die Tristimuluswerte X , Y und Z werden zunächst die sogenannten **Normfarbwertanteile** x , y und z aus den Formeln

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{X + Y + Z}, \\ y &= \frac{Y}{X + Y + Z}, \\ z &= \frac{Z}{X + Y + Z} \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

berechnet, woraus sofort der Zusammenhang

$$x + y + z = 1 \tag{1.3.14}$$

ersichtlich wird. Nun bedeutet dies aber, dass nur jene Punkte (x, y, z) im dreidimensionalen Raum für den Zweck der Erstellung einer einheitlichen Farbtafel relevant sind, die Bedingung (1.3.14) erfüllen; in der linken Illustration aus Abbildung 1.33 ist dieser in Frage kommende Bereich das schräg liegende, dunkelgrau eingefärbte Dreieck. Weiters zeigt

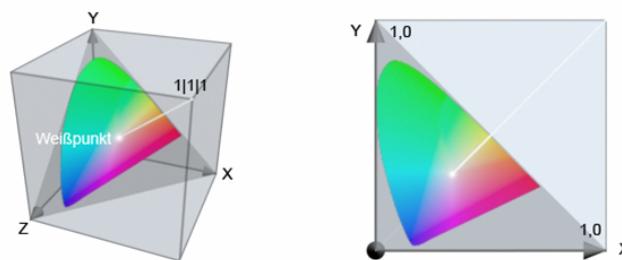


Abbildung 1.33 – Herleitung der CIE-Farbtafel (vgl. [11])

die Graphik die Verbindungslinie zwischen den Punkten $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$, welche alle

⁴Das System von 1931 geht auf den sogenannten 2°-Standardnormalbeobachter zurück. 1964 wurde eine weitere Farbtafel eingeführt, deren Ergebnisse auf 10°-Beobachtungen beruhen.

1 Licht

Punkte (x, y, z) mit $x = y = z$ enthält. Durch den Schnitt der Geraden mit dem grauen Dreieck ergibt sich gerade der Weißpunkt (Unbuntpunkt) $W = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, wie es bereits in Kapitel 1.3.3 bei den Definitionen der virtuellen Primärvalenzen gefordert wurde.

Gleichung (1.3.14) ist äquivalent zu

$$z = 1 - x - y;$$

die Angabe der zwei Normfarbwertanteile x und y ist demnach ausreichend, da diese automatisch auch z einen Wert zuordnen. Somit kann der ursprünglich betrachtete, dreidimensionale Raum von z aus betrachtet auf die xy -Ebene projiziert werden (Abbildung 1.33, Graphik rechts). Das CIE-Normvalenzsystem umfasst jedoch nicht das gesamte graue Dreieck, sondern nur einen Ausschnitt davon. Dies ist physiologisch bedingt: Da niemals nur genau einer der drei Zapfentypen im Auge angeregt wird, beinhalten die Umgebungen der Eckpunkte des Dreiecks keine wahrnehmbaren Farben und sind daher nicht besetzt. Die CIE-Farbtafel, wie in Abbildung 1.34 dargestellt, beschreibt alle wahrnehmbaren Farben durch sogenannte **Farborte** (x, y) , welche eine Aussage über **Farbton**⁵ und **Sättigung**⁶ machen, allerdings unabhängig von der Helligkeit. Da aber eine Farbe erst voll-

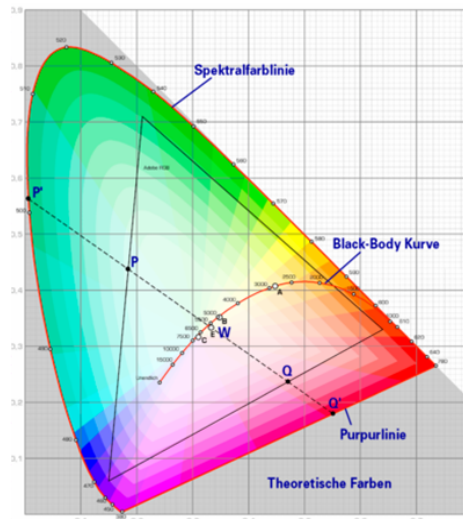


Abbildung 1.34 – CIE-Normvalenzsystem (vgl. [6])

ständig durch ihre „Farbigkeit“ (Chrominanz) **und** ihre Helligkeit (Luminanz) charakterisiert ist, müsste für die verwendete CIE-Chart eigentlich immer auch der entsprechende Helligkeitswert Y angegeben werden, was Abbildung 1.35 veranschaulicht. Die einzelnen Schichten des Yxy -Modells stehen für Chrominanz bei jeweils konstanter Helligkeit (d.h. jede Schicht ist praktisch eine Farbtafel), welche nach oben hin zunimmt. Weiters befinden sich die Weißpunkte jeder Schicht auf der vertikalen Y -Achse. Da sich bei zunehmender

⁵Definition aus der Farbenlehre: Der Farbton ist jene Eigenschaft, anhand der man Farbempfindungen z.B. nach rot, gelb und grün unterscheidet.

⁶Definition aus der Farbenlehre: Die Sättigung charakterisiert die Qualität der Farbwirkung.

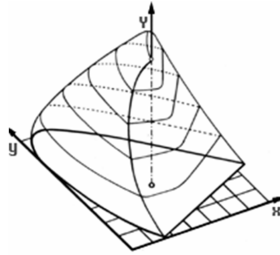


Abbildung 1.35 – Yxy-Farbräume (vgl. [11])

Helligkeit der Abstand der verschiedenen Farbtöne zum jeweiligen Weißpunkt sukzessive verringert, entsteht ein pyramidenartiges Gebilde.

Im Folgenden werden nun die wichtigsten Begriffe und Effekte, die für das grundlegende Verständnis der Farbmétrie unentbehrlich sind, anhand von Abbildung 1.34 erklärt:

- Die CIE-Farbtafel wird von der **Spektralfarblinie (Hüllkurve)**, welche von 380nm bis 750nm reicht, und der **Purpurlinie**, die als Gerade von Blau (circa 380nm) nach Rot (circa 780nm) verläuft, begrenzt.
- Der **Weißpunkt (Unbuntpunkt)** liegt bei $W = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- Punkte, die auf einer Geraden liegen, die zwei Farborte verbindet, können durch additive Mischung dieser beiden Farben wiedergegeben werden.
- Ein **Farbdreieck** ist ein Dreieck, dessen Eckpunkte drei monochromatischen Farben entsprechen. Alle Farborte innerhalb eines solchen Dreiecks können durch additive Mischung der drei mit den Eckpunkten assoziierten Farben erzeugt werden.
- Alle Farborte auf der Verbindungslinie \overline{PW} (für einen beliebigen Punkt P in der CIE-Chart) werden als **farbtongleich** empfunden. Wird die Gerade verlängert, ist ihr Schnittpunkt mit der Spektralfarblinie die **Spektralfarbe P'** . Wenn hingegen die Fortsetzung der Geraden \overline{PW} auf der gegenüberliegenden Seite des Weißpunkts betrachtet wird, liegen auf dem Teilstück \overline{WQ} die zu den Farben auf \overline{PW} gehörenden **Komplementärfarben**⁷. Der Schnittpunkt Q' der Geraden mit der Purpurlinie wird äußerste Komplementärfarbe genannt.
- Wenn P wieder ein beliebiger Farbort ist, dann wird das Verhältnis des Abstandes von P zu W zum Abstand, den W zur Spektralfarblinie hat, als **Sättigung** der betrachteten Farbe bezeichnet. Daraus folgt, dass jeder Farbort auf der Hüllkurve eine hundertprozentige Sättigung (Sättigung 1) hat.

⁷Wird von weißem Licht der Wellenlängenbereich einer bestimmten Farbe entfernt, resultiert wieder eine spezielle Farbe; diese wird als Komplementärfarbe der ausgeblendeten Farbe bezeichnet.

1 Licht

- Wird wie zuvor die Gerade \overline{PW} zur Hüllkurve hin verlängert und ist P' der resultierende Schnittpunkt, nennt man die Wellenlänge λ , die dort auftritt, die **dominante Wellenlänge** λ_{dom} der Farbe P .
- Die **Farbreinheit** einer Farbe ist umso größer, je weiter der entsprechende Farbort von seiner dominanten Wellenlänge entfernt ist.

Zum Verständnis der Black-Body Kurve bzw. Planckschen Kurve, die ebenfalls in Abbildung 1.34 eingetragen ist, muss der Begriff der **Farbtemperatur** mit der Einheit Kelvin (K) definiert werden, welche den Farbeindruck einer Lichtquelle bewertet. Dies spielt vor allem eine Rolle, da Lichtfarben im Allgemeinen nicht nur durch **eine** Wellenlänge beschreibbar sind, sondern ein breiteres Spektrum aufweisen, welches in irgendeiner Art und Weise charakterisiert werden muss. Die Farbtemperatur einer Lichtquelle ist eng mit den folgenden zwei grundlegenden Eigenschaften von **schwarzen Körpern** (schwarze Strahler, Plancksche Strahler) gekoppelt:

- Der schwarze Körper ist ein idealisiertes Modell, das elektromagnetische Strahlung jeder Wellenlänge, somit auch Licht, zur Gänze absorbiert.
- Weiters stellt der schwarze Körper eine ideale thermische Strahlungsquelle⁸ dar, was im **Kirchhoffschen Strahlungsgesetz** begründet ist. Dieses besagt, dass das Emissionsvermögen für thermische Strahlung für alle Körper bei jeder Wellenlänge und in jeder Richtung proportional zum Absorptionsvermögen ist. Letzteres ist bei schwarzen Körpern für alle Wellenlängen maximal, was, wieder für alle Wellenlängen, auf ein maximales Emissionsvermögen führt. Dies zeichnet aber genau einen idealen thermischen Strahler aus.

Das Plancksche Strahlungsgesetz

$$I(\lambda, T) = \frac{a_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{a_2/\lambda T} - 1}$$

mit

$$a_1 = 2hc_V^2, \quad a_2 = h \frac{c_V}{k}$$

und

$$\begin{aligned} c_V &\cong 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} && \dots \text{ Vakuumllichtgeschwindigkeit,} \\ h &\cong 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} && \dots \text{ Plancksches Wirkungsquantum,} \\ k &\cong 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} && \dots \text{ Boltzmann-Konstante} \end{aligned}$$

beschreibt die spektrale Intensitätsverteilung der elektromagnetischen Strahlung, die ein schwarzer Körper bei festen Temperaturen aussendet, vgl. Abbildung 1.36. Aufgrund seiner

⁸Thermische Strahlungsquellen senden elektromagnetische Wellen eines bestimmten, rein temperaturabhängigen Spektrums aus.

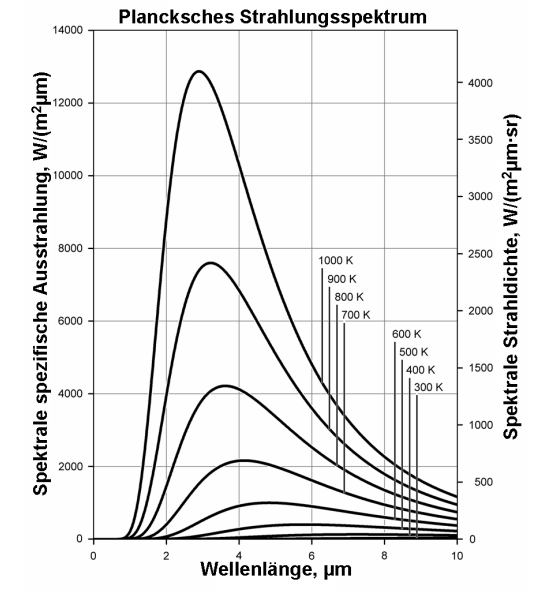


Abbildung 1.36 – Plancksches Strahlungsgesetz (vgl. [105])

Besonderheiten wird nun der schwarze Körper als Referenz für die Definition der Farbtemperatur einer Lichtquelle herangezogen. Wie zuvor erklärt, ist der Plancksche Strahler ein idealer thermischer Strahler; wenn man ihn also erhitzt, nimmt er bei bestimmten Temperaturen bestimmte Farben an. Die Farbtemperatur einer Lichtfarbe ist dann genau jene Temperatur, die ein schwarzer Körper hat, wenn er eben diese Farbe aufweist, was graphisch durch die zuvor bereits erwähnte Plancksche Kurve, auf welcher die verschiedenen Farbtemperaturwerte und die zugehörigen Farborte liegen, in der CIE-Farbtabelle verdeutlicht wird (vgl. Abbildung 1.34). Diese Kurve kann gleichzeitig als jene beschrieben werden, die alle als weiß empfundenen Farben enthält, was auch der Grund für die folgende Benennung von Farbtemperaturbereichen ist:

- Warmweiß (ww): $< 3.300\text{K}$,
- neutralweiß (nw): $3.300\text{-}5.300\text{K}$,
- kaltweiß/tageslichtweiß (kw): $> 5.300\text{K}$.

Tabelle 1.6 fasst einige Farbtemperaturwerte verschiedener Leuchtmittel zusammen.

Obwohl das CIE-Normvalenzsystem weit verbreitete Anwendung findet, weist es doch einen entscheidenden Nachteil auf: Geometrisch gleich große Abstände zwischen je zwei Farborten der Farbtabelle bedeuten **nicht**, dass das menschliche Auge auch die jeweils gleich großen Farbunterschiede wahrnimmt! Graphisch kann dieser Umstand durch die MacAdam-Ellipsen veranschaulicht werden (detaillierte Betrachtungen zu diesem Thema finden sich in Kapitel 3.5). Um diesen „Fehler“ zu beheben, wurden zahlreiche andere Farb Räume durch unterschiedlichste mathematische Transformationen definiert, auf deren Herleitung und Beschreibung jedoch im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wird.

Lichtquelle	Farbtemperaturen
Kerzenlicht	1.800K
Glühbirne	2.800K
Halogenlampe	3.400K
warmweiße LED	2.600–3.500K
neutralweiße LED	3.700–5.000K
Sonnenlicht	5.500–6.500K
Fluoreszenzröhre	6.000–8.000K
kaltweiße LED	5.000–10.000K

Tabelle 1.6 – Farbtemperaturen (vgl. [48])

1.3.5 Farbwiedergabe

Die Abrundung des großen Themengebiets der Farbmeterik bildet die auf Basis von [19], [40, Kap. 11, S. 11], [43, S. 28-29], [55] und [73, S. 37-38] angegebene Definition der Farbwiedergabe, welche ein ausschlaggebendes Qualitätsmerkmal von Leuchtmitteln darstellt. In Kapitel 1.3.3 wurde festgestellt, dass ein Objekt nur in jenen Farben erscheinen kann, deren korrespondierende Wellenlängen im Licht, mit dem es bestrahlt wird, enthalten sind und somit vom Gegenstand auch reflektiert werden können. Ein natürlicher Farbeindruck ist nur dann gegeben, wenn sich das abgestrahlte weiße Licht aus dem gesamten sichtbaren Spektrum zusammensetzt; dies muss prinzipiell nicht der Fall sein, da die Lichtfarbe Weiß durch additive Mischung verschiedener Komponenten entstehen kann (Metamerie). Zur Beschreibung dessen, wie „wahrheitsgetreu“ die Farbe eines Objekts unter der Bestrahlung einer zu untersuchenden Lichtquelle ist, wird der Farbwiedergabeindex R_a verwendet. Es gibt mehrere Varianten, diesen Wert zu bestimmen; eine davon ist der Vergleich von acht Testfarben, die einerseits von der zu beurteilenden Lichtquelle, andererseits von einem Bezugsstrahler (z.B. einem schwarzen Strahler für Farbtemperaturen bis 5000K) beleuchtet werden. Je geringer die Abweichungen sind, die sich aus diesem Vergleich ergeben, desto höher ist der R_a -Wert der betreffenden Lampe, wobei das Optimum bei $R_a = 100$ liegt. Nach DIN 5030/1 sind die in Tabelle 1.7 eingetragenen Qualitätsstufen definiert.

Stufe	subjektive Empfindung	R_a -Bereich
1A; 1B	sehr gut	> 90; 80–90
2A; 2B	gut	70–80; 60–70;
3	mäßig	40–60
4	schlecht	20–40

Tabelle 1.7 – Farbwiedergabe-Qualitätsstufen (vgl. [40, Kap. 11, S. 11])

Abschließend sind in Tabelle 1.8 die Farbwiedergabeindexwerte einiger Leuchtmittel aufgelistet.

1.3 Lichttechnisches und farbmétrisches Maßsystem

Leuchtmittel	R_a
Tageslicht	100
Glühlampe	bis 100
Normale Leuchtstofflampen	80-90
LED, weiß	70-95
Quecksilberdampf-Hochdrucklampe	45
Natriumdampf-Hochdrucklampe	18-30

Tabelle 1.8 – Farbwiedergabeindex verschiedener Leuchtmittel (vgl. [19])

2 Leuchtdioden (LEDs)

Leuchtdioden, im Folgenden kurz LEDs (für „Light Emitting Diodes“) genannt, zählen zur Kategorie der Lumineszenzstrahler und erzeugen Licht durch Elektrolumineszenz (vgl. [43, S. 32, 37]). Das bedeutet einfach formuliert, dass eine angelegte elektrische Spannung das zugrundeliegende Material, aus dem die LED besteht, dazu anregt, Licht zu emittieren. Die Basis dafür, Aufbau und Funktionsweise von Leuchtdioden zu begreifen, ist das Verständnis von Halbleitern und Dioden. Damit beschäftigen sich die nächsten Kapitel. An dieser Stelle sei angemerkt, dass alle nachfolgenden Ausführungen als vereinfachte Darstellung zu betrachten sind. Auf detaillierte physikalische Hintergründe wird aufgrund deren Komplexität verzichtet.

2.1 Halbleiter: Das Energiebändermodell

Die wesentlichen Eigenschaften nicht nur von Halbleitern, sondern auch von elektrischen Leitern und Isolatoren, ergeben sich anschaulich aus dem **Energiebändermodell**, welches unter Verwendung von [37], [44], [60], [102] und [103] beschrieben wird. In Kapitel 1.2.2 wurde das Bohrsche Atommodell (vgl. auch Abbildung 1.10) behandelt, demzufolge sich die Elektronen eines Atoms auf bestimmten Schalen beziehungsweise Energieniveaus um den Atomkern bewegen. Die Elektronen der äußersten Schale werden dabei als Valenzelektronen bezeichnet. Wird nun ein Atomverband (z.B. ein Kristallgitter) betrachtet, kommt es zu einer gegenseitigen Wechselwirkung der Atome, die umso größer ist, je näher die Atome beieinander liegen. Dadurch spalten sich die äußeren Elektronenniveaus auf, bis sie nicht mehr voneinander zu unterscheiden sind und zu Energiebändern unterschiedlicher Breite verschmelzen, vgl. Abbildung 2.1. Insbesondere sind die Valenzelektronen der einzelnen

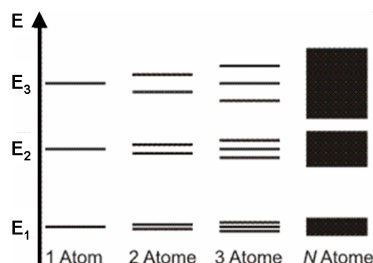


Abbildung 2.1 – Verschmelzung zu Energiebändern (vgl. [37])

Atome von diesem Effekt betroffen, da sie mit jenen der benachbarten Atome in starker

2 Leuchtdioden (LEDs)

Wechselwirkung stehen und somit relativ einfach von ihrem ursprünglichen Atom gelöst werden können.

In Abbildung 2.2 ist das Energiebändermodell selbst skizziert; es besteht prinzipiell aus zwei Energiebändern (Valenz- und Leitungsband) und der Bandlücke. Das Valenzband

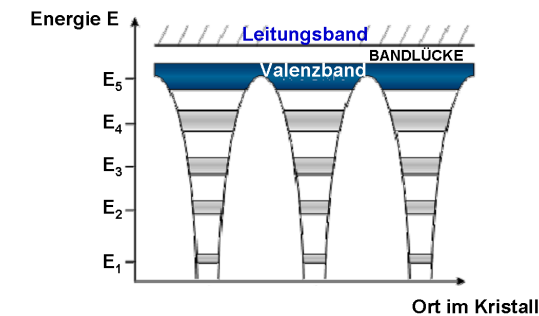


Abbildung 2.2 – Energiebändermodell (vgl. [44])

bildet sich durch die zuvor beschriebene, gegenseitige Beeinflussung der Valenzelektronen der Atome, während das im Grundzustand nicht mit Elektronen besetzte Leitungsband über dem Valenzband liegt und, genauso wie die Breite der Bandlücke, für die elektrische Leitfähigkeit eines Materials ausschlaggebend ist. Konkret können folgende Fälle vorliegen:

- (i) Bei **Nichtleitern (Isolatoren)** ist das Valenzband mit Elektronen vollbesetzt, die sich daher nicht darin bewegen können, vgl. Abbildung 2.3, Graphik links. Um dennoch ein elektrisch leitendes Material zu erhalten, müssten Elektronen ins Leitungsband gelangen, was aber aufgrund der großen Bandlücke nur unter einem immensen, praktisch kaum möglichen Energieaufwand realisiert werden könnte.
- (ii) Bei **elektrischen Leitern (Metallen)** hingegen, wie in der mittleren Skizze von Abbildung 2.3 dargestellt, ist das Valenzband nicht mit Elektronen vollbesetzt oder es ist zwar vollbesetzt, überlappt aber mit dem leeren Leitungsband, sodass die Bandlücke verschwindet. Beides ermöglicht den Elektronen, sich frei zu bewegen. Sie fungieren als Ladungsträger und das Material leitet damit elektrischen Strom. Bei zunehmender Temperatur sinkt hier die elektrische Leitfähigkeit, da dann der spezifische Widerstand der Metalle steigt und die Beweglichkeit der Elektronen aufgrund der wachsenden Anzahl an Stößen mit den Atomen abnimmt.
- (iii) Die letzte und im Zusammenhang mit LEDs wichtigste Gruppe bilden die **Halbleiter**, deren Bandlücke so schmal ist, dass diese bereits bei Raumtemperatur von den Elektronen überwunden werden kann, was auch die rechte Graphik aus Abbildung 2.3 zeigt. Sie gelangen daher vom Valenz- ins Leitungsband, wo sie frei beweglich sind und elektrische Ladung transportieren können. Im Zuge dieses Vorgangs hinterlassen die ins Leitungsband wandernden Elektronen im Valenzband Löcher, die als Defektelektronen bezeichnet und als positive Ladungsträger verstanden werden.

Diese werden wiederum von Valenzelektronen besetzt. Durch ständige Wiederholung desselben Ablaufs entsteht das Phänomen der wandernden Löcher.

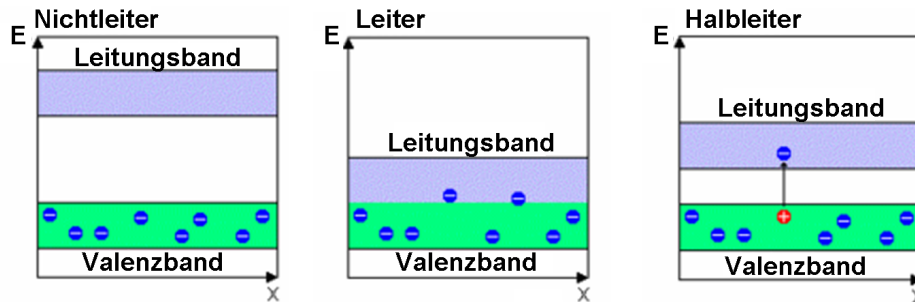


Abbildung 2.3 – Elektrische Leitfähigkeit (vgl. [102])

Für die Elektronen-Loch-Paare in Halbleitern gilt, dass die Anzahl der negativen Ladungsträger gleich der Anzahl der positiven Ladungsträger ist. Ein Halbleiterkristall ist daher grundsätzlich elektrisch neutral; man spricht von sogenannten intrinsischen Halbleitern. Die elektrische Leitfähigkeit verhält sich umgekehrt zu jener von Metallen: Mit zunehmender Temperatur wird zwar auch hier die Beweglichkeit der Elektronen eingeschränkt, jedoch nimmt die elektrische Leitfähigkeit dennoch zu, da die Anzahl der Elektronen, die die Bandlücke überwinden können, bei Erhitzung exponentiell wächst. Zusätzlich kann die elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern durch Dotierung beeinflusst werden, was in Kapitel 2.2 genauer ausgeführt wird.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass man Halbleiter in folgende zwei Gruppen unterteilt:

- **Elementhalbleiter**, wie zum Beispiel Silizium oder Germanium, besitzen vier Valenzelektronen.
- **Verbindungshalbleiter** entstehen durch die chemische Verbindung von beispielsweise Elementen der III. und V. Hauptgruppe des Periodensystems (III-V-Halbleiter, z.B. Galliumarsenid GaAs) oder von Elementen der II. und VI. Hauptgruppe (II-VI-Halbleiter, z.B. Zinkselenid ZnSe).

2.2 Dotierung von Halbleitern

Der Begriff „Dotierung“ steht für das Einbringen von Fremdatomen in ein Halbleitermaterial zur gezielten Beeinflussung seiner elektrischen Leitfähigkeit. Die Erklärung dieses Vorgangs erfolgt mittels [37], [46] und [60] am Beispiel Silizium, welches vierwertig ist, also vier Valenzelektronen besitzt. Es gibt zwei verschiedene Arten der Dotierung:

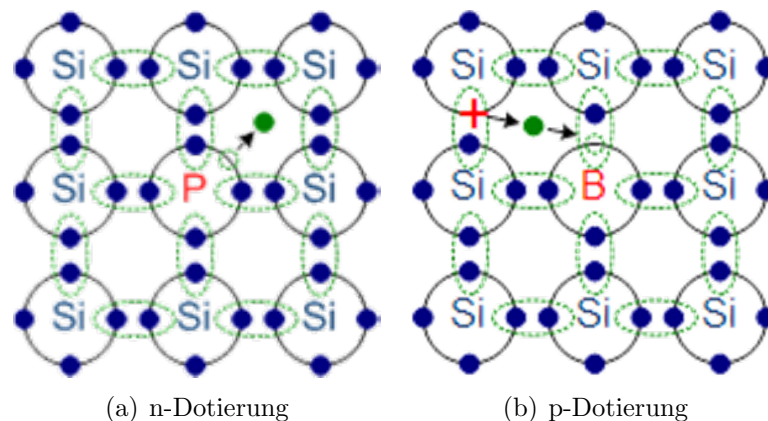


Abbildung 2.4 – Dotierung von Silizium (vgl. [46])

- Die **n-Dotierung** (hier mit Phosphoratomen): Ein Phosphoratom besitzt fünf Valenzelektronen und fungiert somit als fünfwertiges Dotierelement. Wird ein solches in ein Silizium-Gitter eingebracht, wie in Abbildung 2.4(a) dargestellt, binden sich vier der fünf Valenzelektronen des Fremdatoms mit je einem Siliziumatom, während das fünfte Valenzelektron ungebunden bleibt. Das Dotierelement gibt also ein Elektron ab, ist daher positiv geladen und wird auch Elektronendonator genannt. Für das freie Elektron gilt, dass es viel weniger Energie benötigt, um vom Valenz- ins Leitungsband zu gelangen, als jene Elektronen, die die Eigenleitfähigkeit von Silizium bewirken; infolgedessen kommt es zur Ausbildung von gefüllten Energieniveaus (Donorniveaus, Donatorniveaus) knapp unterhalb des Leitungsbandes. Die (zusätzliche) Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters beruht also auf den ungebundenen, negativen Elektronen, woher der Name „n-Dotierung“ rührt. Da die Anzahl der freien Elektronen aufgrund der Beschaffenheit der eingebrachten Dotierelemente in diesem Fall größer als jene der Löcher ist, werden erstere als Majoritätsladungsträger und zweitere als Minoritätsladungsträger bezeichnet.
- Die **p-Dotierung** (hier mit Boratomen): Ein Boratom ist dreiwertig. Es kann, wenn es, wie in Abbildung 2.4(b), in das Siliziumgitter eingebracht wird, ein zusätzliches Außenelektron aufnehmen, ist danach negativ geladen und wird auch Elektronenakzeptor genannt. Somit bilden sich in der Nähe des Valenzbandes der Siliziumatome Akzeptorniveaus aus, die eben symbolisieren, dass die eingesetzten Boratome Elektronen aufnehmen können, was bereits bei geringer Energiezufuhr geschieht. Dadurch entstehen aber im Valenzband Löcher; durch Wiederholung dieses Vorgangs werden die Elektronen dort beweglich. Die Löcher scheinen sich in entgegengesetzter Richtung fortzupflanzen; die (zusätzliche) elektrische Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters wird also scheinbar durch die positiv geladenen Löcher erzielt, was der Grund für die Bezeichnung „p-Dotierung“ ist. Hier sind daher die Defektelektronen die Majoritäts- und die Elektronen die Minoritätsladungsträger.

2.2.1 Der p-n-Übergang im Gleichgewicht

Führt man einen p-dotierten und einen n-dotierten Halbleiter zusammen, spricht man kurz von einem **p-n-Übergang**¹. Die Erklärungen aus Kapitel 2.2 implizieren eine Überzahl an Löchern für den p-dotierten Halbleiter bzw. auf der p-Seite im Gegensatz zu einem Überschuss an Elektronen auf der n-Seite (Abbildung 2.5, links). Wird nun ein **p-n-Übergang im Gleichgewicht** (d.h. eine Vereinigung der Halbleiter ohne jegliche äußere Einwirkungen) vollzogen (vgl. [9], [43, S. 38], [45] und [60]), bewegen sich aufgrund der Überschussituation die Elektronen der n-Seite in Richtung des p-dotierten Halbleiters und umgekehrt die Löcher bzw. Defektelektronen von der p- zur n-Seite hin. Diese Bewegung wird als Diffusion bezeichnet und findet bis zum Erreichen eines bestimmten Gleichgewichts statt (Abbildung 2.5, Mitte). Unmittelbare Folgen des Diffusionsprozesses sind sowohl die Ausbildung einer negativen Ladung an der Grenzschicht auf der p-Seite als auch die Entstehung einer positiven Ladung an der Grenzschicht auf der n-Seite. Dadurch wird aber ein elektrisches Feld erzeugt, welches der Bewegung der Ladungsträger entgegenwirkt. Somit kommt es zu einem Gleichgewicht zwischen Diffusion und elektrischer Kraft, sodass sich an der Grenzschicht eine ladungsarme Zone formt, die auch Raumladungszone, Verarmungszone oder Sperrschicht genannt wird, da hier durch das eben beschriebene entstehende Gleichgewicht die Elektronen mit den Löchern rekombinieren und das Gebiet nach außen hin elektrisch neutral erscheint (Abbildung 2.5, rechts).

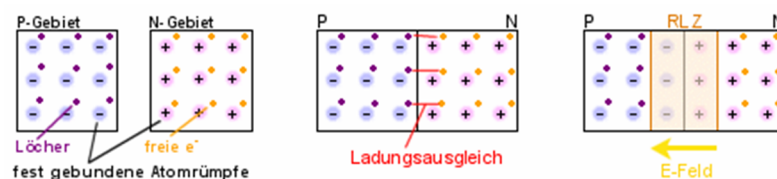


Abbildung 2.5 – p-n-Übergang im Gleichgewicht (vgl. [9])

2.3 Halbleiterdioden

Anders als bei dem in Kapitel 2.2.1 beschriebenen p-n-Übergang im Gleichgewicht wird nun im Zuge der Zusammenführung eines p- und n-dotierten Halbleiters zusätzlich eine elektrische Spannung angelegt, wofür es zwei Möglichkeiten gibt, welche in Anlehnung an [38], [45] und [60] erläutert werden:

- (i) Wenn, wie in Abbildung 2.6, die Spannung mit ihrem Minuspol auf der p-Seite und ihrem Pluspol auf der n-Seite angeschlossen wird, stimmen die Richtungen des auf diese Weise erzeugten elektrischen Feldes und des elektrischen Feldes im Inneren, dessen Existenz in Kapitel 2.2.1 erläutert wurde, überein, wodurch das Feld am p-n-Übergang verstärkt wird. Zudem sind die Ladungen der freien Ladungsträger in

¹Genauer ausgedrückt benennt der p-n-Übergang jenen Bereich, in welchem die beiden unterschiedlich dotierten Halbleiter aneinandergrenzen.

2 Leuchtdioden (LEDs)

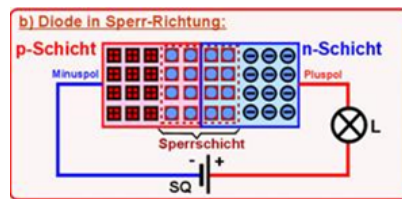


Abbildung 2.6 – Diode in Sperrrichtung (vgl. [38])

den Halbleitern jenen der angelegten Pole entgegengesetzt, sodass auf beiden Seiten eine Anziehung und damit automatisch eine Vergrößerung der Raumladungszone resultiert. Die logische Konsequenz daraus ist, dass, wenn überhaupt, nur ein sehr geringer Strom, der sogenannte Sperrstrom, fließen kann.

- (ii) Erfolgt ein umgekehrter Anschluss der elektrischen Spannung, wie dies in Abbildung 2.7 gezeigt wird, überlagert das korrespondierende elektrische Feld in entgegengesetzter Richtung jenes im Inneren. Plus- und Minuspol stoßen die freien Ladungsträger auf der jeweiligen Seite ab, sodass Elektronen und Löcher zur Grenzschicht wandern und dort rekombinieren. Dies ist ein kontinuierlicher Prozess, da das innere Feld irgendwann zur Gänze vom äußeren abgebaut wird und die Spannungsquelle permanent Elektronen nachliefert. Damit entsteht ein geschlossener Stromkreis.

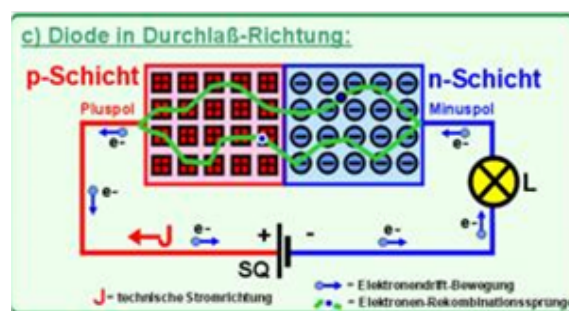


Abbildung 2.7 – Diode in Durchlassrichtung (vgl. [38])

Die gesamte Anordnung, zusammen mit den beiden Optionen bezüglich der angelegten elektrischen Spannung, heißt **Diode**. Eine solche leitet also elektrischen Strom in eine Richtung, nämlich in Durchlassrichtung, sehr gut, während sie sich in die andere Richtung, nämlich in Sperrrichtung, quasi wie ein Isolator verhält. Das Konzept der Halbleiterdioden bildet die Grundlage für das Verständnis der im anschließenden Kapitel behandelten Leuchtdioden.

2.4 Aufbau und Funktionsweise von LEDs

Prinzipiell sind LEDs p-n-Halbleiterdioden, die über Elektrolumineszenz Licht erzeugen, d.h. elektrischen Strom in Licht umwandeln. Alles, was in Kapitel 2.3 erklärt wurde, ist

auch hier gültig; allerdings heben sich Leuchtdioden insofern von „normalen“ Dioden ab, da sie, im Gegensatz zu zweiteren, Licht ausstrahlen, was an der Beschaffenheit der zugrundeliegenden Halbleitermaterialien liegt. Dies wird später noch im Detail ausgeführt. Die gründliche Beschreibung des Vorgangs der Lichterzeugung und alle in diesem Zusammenhang relevanten Überlegungen werden auf Basis von [5, Kap. 8], [43, S. 37-40] und [106] erklärt. Dazu wird der p-n-Übergang zweier verschiedener Halbleiterstoffe betrachtet, und zwar mit einer in Durchlassrichtung angeschlossenen elektrischen Spannung. Dies hat eine Bewegung der Elektronen zur Grenzschicht am p-n-Übergang zur Folge (vgl. Kapitel 2.3). Genauer beleuchtet bedeutet das, dass diese Elektronen auf der n-Seite das Leitungsband füllen, bei ausreichend großer angelegter Spannung die Grenzfläche überqueren können und in das energetisch günstigere Valenzband auf der p-Seite fallen. Dort rekombinieren sie mit den Löchern und müssen dabei ihre Energiedifferenz abgeben - dies geschieht durch Ausstrahlung von Photonen. Am p-n-Übergang wird somit Licht erzeugt, vgl. Abbildung 2.8. Entscheidend dafür, dass überhaupt Energie in Form von Licht abgegeben werden kann, ist

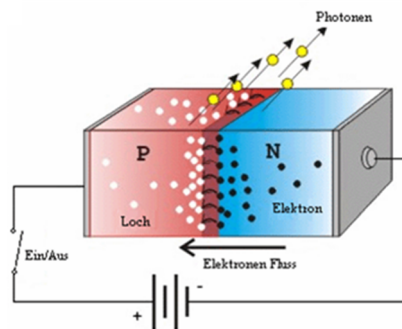


Abbildung 2.8 – p-n-Übergang einer LED (vgl. [33])

offensichtlich die Art des Bandübergangs, also des Wechsels der Elektronen vom Leitungsband auf der n-Seite ins Valenzband auf der p-Seite. Bezüglich dieser Eigenschaft werden Halbleiter in folgende zwei Kategorien eingeteilt:

- (i) **Indirekte Halbleiter**, die Silizium als bekanntesten Vertreter haben, zeichnen sich durch einen **indirekten Bandübergang** der Elektronen aus. Dies lässt sich mittels des Impulsvektors bzw. Wellenvektors \vec{k} und der Energie der Elektronen in Abhängigkeit von \vec{k} veranschaulichen, wobei \vec{k} praktisch die Ausbreitungsrichtung der Elektronen angibt (Elektronenwellen). Im Falle der indirekten Halbleiter verändert sich der Impulsvektor beim Bandübergang, wie in Abbildung 2.9 dargestellt. Der dabei verloren gegangene Impuls der Elektronen wird durch das Halbleiterkristallgitter aufgenommen, was Gitterschwingungen hervorruft. Das Gitter führt die erhaltene Energie als Wärme ab, sodass keine Energie für eine Lichtaussendung zur Verfügung steht.
- (ii) **Direkte Halbleiter** sind durch einen **direkten Bandübergang** der Elektronen charakterisiert. Diese können daher auf direktem Wege, d.h. ohne Änderung ihrer

2 Leuchtdioden (LEDs)

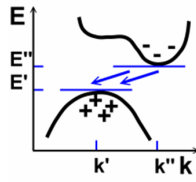


Abbildung 2.9 – Indirekter Bandübergang (vgl. [106])

Ausbreitungsrichtung bzw. ihres Impulses \vec{k} , vom Leitungsband ins Valenzband gelangen, vgl. Abbildung 2.10. Die durch den Wechsel bedingte Energiedifferenz kann in Form von Licht ausgestrahlt werden.

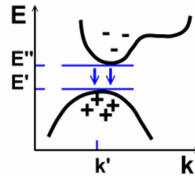


Abbildung 2.10 – Direkter Bandübergang (vgl. [106])

Für die Herstellung von LEDs kommen somit nur direkte Halbleiter, im Speziellen III-V-Halbleiter, in Frage. Um nun außerdem die Frequenz bzw. Wellenlänge der ausgesandten Photonen und damit die Lichtfarbe zu bestimmen, muss das Augenmerk auf die Größe der Energiedifferenz beim Bandübergang der Elektronen, d.h. auf die Größe der Bandlücke, gelegt werden. Auch diese Eigenschaft hängt von der chemischen Zusammensetzung der verwendeten Halbleiterverbindungen ab. Die gesuchte Wellenlänge λ kann ganz einfach anhand von Formel (1.2.9) und mittels $c = \lambda\nu$ berechnet werden. Mit den Beschriftungen aus Abbildung 2.10 folgt

$$\lambda = \frac{hc}{E'' - E'} = \frac{1240\text{nm eV}}{E'' - E'}$$

mit

$$c \cong 2.998 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \dots \text{ Lichtgeschwindigkeit,}$$

$$h \cong 6.626 \cdot 10^{-34} \text{Js} \cong 4.136 \cdot 10^{-15} \text{eVs} \quad \dots \text{ Plancksches Wirkungsquantum,}$$

und der Angabe von $E'' - E'$ in eV. Zum Beispiel besitzt Galliumarsenid einen direkten Bandabstand von 1.4eV, sodass LEDs aus diesem Material infrarotes Licht der Wellenlänge $\lambda = 885\text{nm}$ abstrahlen.

2.5 LED-Bauformen

Je nach Bauform können LEDs vier verschiedenen Kategorien zugeordnet werden (vgl. [27], [42], [90] und [106]):

- (i) Bei **bedrahteten LEDs**, wie in Abbildung 2.11 skizziert, befindet sich der Halbleiterkristall bzw. der LED-Chip in einer Reflektorwanne, welche meist gleichzeitig die Kathode (negative Polarität) darstellt², wobei die Anordnung insgesamt in eine transparente Kunststoffumhüllung eingebettet ist. Über den sogenannten Bonddraht wird die Anode (positive Polarität) kontaktiert.

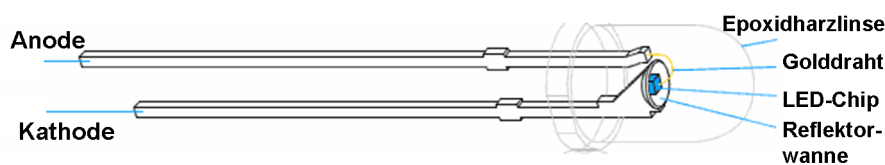


Abbildung 2.11 – Bedrahtete LED (vgl. [27])

- (ii) **Superflux LEDs** (bzw. Spider LEDs) sind eine Weiterentwicklung der bedrahteten LEDs und besitzen vier statt nur zwei Pins (Kontaktfüße). Sie können bis zu vier Chips enthalten (vgl. Abbildung 2.12, rechts).



Abbildung 2.12 – SMD und Superflux LEDs (vgl. [42])

- (iii) **SMD LEDs** (für „Surface Mounted Device“) werden gemäß ihrer Bezeichnung auf Oberflächen montiert, wobei sie im Gegensatz zu den zuvor aufgelisteten Bauformen keine Pins besitzen (vgl. Abbildung 2.12, links), sondern aufgrund geeigneter Anschlussflächen direkt auf Leiterplatten gelötet werden können.
- (iv) **COB LEDs** (für „Chip on Board“), wie in Abbildung 2.13 illustriert, sind ungehäuste LED-Chips, die wie SMD LEDs direkt auf Leiterplatten aufgebracht werden können („Bonding“), jedoch zusätzlich den Vorteil des fehlenden Gehäuses mit sich bringen, was eine höhere Chipdichte auf der Oberfläche ermöglicht. Weiters ist hier eine verbesserte thermische Anbindung zwischen Chip und Leiterplatte gegeben.

²Die Minusseite solcher Leuchtdioden weist eine Abflachung des Kunststoffmantels auf.

2 Leuchtdioden (LEDs)

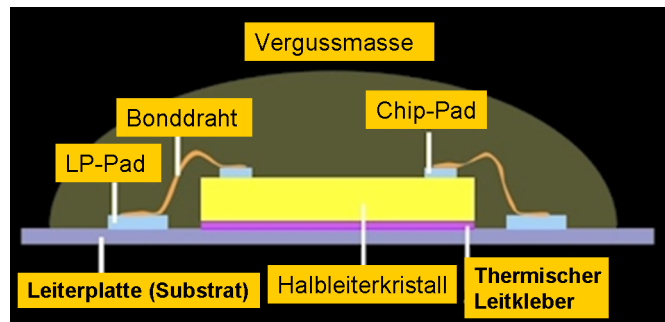


Abbildung 2.13 – COB-Technologie (vgl. [42])

2.6 Eigenschaften von LEDs

Während es einerseits von großem Interesse ist, welche Farben mit Hilfe von Leuchtdioden realisiert werden können, wie dabei vorgegangen werden muss und von welchen Faktoren die Wellenlängen des emittierten Lichts abhängen, spielen andererseits auch die elektrischen Eigenschaften, die einer LED zugrunde liegen, eine bedeutende Rolle für den Betrieb von LED-Lichtsystemen. Die folgenden beiden Kapitel befassen sich mit diesen Themengebieten.

2.6.1 LED-Farben und Öffnungswinkel

Die Ausführungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf [27], [43, S. 40-47], [57] und [106]. Charakteristisch für Leuchtdioden ist ihre sehr schmalbandige, beinahe monochrome Lichtemission. Daraus wird auch sofort klar, dass es weißes LED-Licht nicht ohne weitere Überlegungen, die im Anschluss noch erläutert werden, geben kann. Für die korrespondierenden Farborte im CIE-Normvalenzsystem bedeutet die Lichtaussendung in begrenzten Spektralbereichen eine jeweilige Position nahe an der Spektralfarblinie, vgl. Abbildung 2.14³. Grundsätzlich werden die emittierten Wellenlängen durch zwei Komponenten festgelegt,

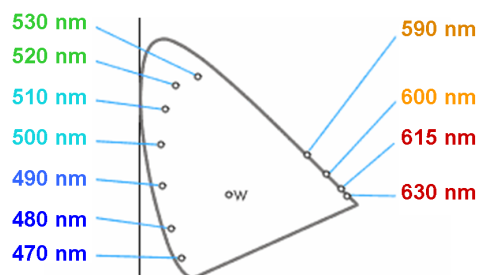


Abbildung 2.14 – LED-Farben (vgl. [27])

nämlich durch

³Die eingezeichneten Schriftfarben sind als ungefähre Wiedergabe der zugehörigen Farborte zu verstehen.

- die Auswahl der verwendeten Halbleitermaterialien und durch den Grad der Dotierung,
- die Kristalltemperatur und den zugeführten Strom.

Hinsichtlich des ersten Punktes enthält Tabelle 2.1 einige Beispiele für Halbleiterverbindungen und zugehörige LED-Lichtfarben.

Halbleitermaterial	Farbe
Galliumaluminiumarsenid (GaAlAs)	Rot, Infrarot
Galliumarsenidphosphid (GaAsP) und Aluminiumindiumgalliumphosphid (AlInGaP)	Rot, Orange, Gelb
Galliumphosphid (GaP)	Grün
Siliziumcarbid (SiC)	1. kommerzielle blaue LED
Indiumgalliumnitrid (InGaN) und Galliumnitrid (GaN)	UV, Violett, Blau, Grün

Tabelle 2.1 – Halbleitermaterialien und LED-Farben (vgl. [43, S. 40])

Die im zweiten Punkt erwähnten Faktoren verdeutlichen, wie wichtig die Behandlung der elektrischen Eigenschaften von LEDs und des Thermomanagements, welche in den Kapiteln 2.6.2 und 2.7 beschrieben wird, ist.

Als Randbemerkung sei hier ergänzt, dass sich bezüglich erzeugbarer LED-Farben in der Farbtabelle aus Abbildung 2.14 offensichtlich ein unbesetzter Bereich zwischen den Farben Gelb und Grün befindet, für welchen noch keine effizienten Halbleitermaterialien entdeckt wurden.

Für den alltäglichen Gebrauch ist weißes Licht natürlich unerlässlich. Um ein solches mit Hilfe von LEDs zu erhalten, können prinzipiell zwei Ideen verfolgt werden:

- (i) Gemäß den Ausführungen aus Kapitel 1.3.3 kann durch additive Mischung von drei Grundfarben wie z.B. Rot, Grün und Blau weißes Licht gewonnen werden. Hierbei können entweder drei separate LEDs zusammengeschaltet oder drei LED-Chips in **einem** Gehäuse kombiniert werden.
- (ii) Einen ganz anderen Ansatz stellt die in Abbildung 2.15 skizzierte **Farbkonversion** dar. Die Basis für diese Methode bilden sogenannte **Phosphore** (Fluoreszenzfarbstoffe bzw. Farbkonversionleuchtstoffe), welchen durch Bestrahlung mit Licht Energie zugeführt wird, die sie als Licht anderer Wellenlängen selbst wieder emittieren (nähere Informationen können Kapitel 3.2 entnommen werden). Wird als primärer Strahler eine UV-LED eingesetzt, muss diese mit mindestens drei unterschiedlichen Phosphoren beschichtet werden, um als Ergebnis die Lichtfarbe Weiß gewährleisten zu können. Viel rentabler ist es daher, von einer blauen LED auszugehen und diese mit nur einem gelben Fluoreszenzfarbstoff zu überziehen, was auch insgesamt das wirtschaftlichste Verfahren ist. Einerseits wird der UV-Anteil, der jede blaue LED

2 Leuchtdioden (LEDs)

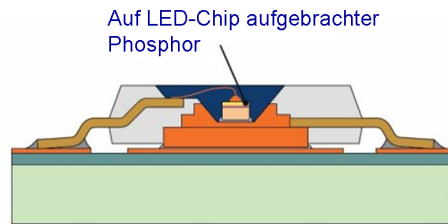


Abbildung 2.15 – Farbkonversion (vgl. [65])

zwangsläufig begleitet und schädliche Auswirkungen haben kann, vom Phosphor fast vollständig in gelbliches Licht umgewandelt, und andererseits weist das Licht, welches der verwendete Farbkonversionsleuchtstoff aussendet, ein sehr breites Spektrum auf.

Mittels einer phosphorbeschichteten blauen LED können Weißtöne verschiedenster Farbtemperaturen erzielt werden, von warmweißem bis hin zu kaltweißem Licht (vgl. Kapitel 3.2).

Nachdem nun beschrieben wurde, wie diverse LED-Lichtfarben zustande kommen und wie insbesondere weißes Licht mit LEDs erzeugt werden kann, wird als Abschluss dieses Kapitels noch kurz auf den sogenannten **Öffnungswinkel** eingegangen, der ein wichtiger Parameter zur Kennzeichnung von LEDs ist. Aufgrund dieses vorhandenen, begrenzten Winkels, in welchem Leuchtdioden abstrahlen, sind für oftmals erwünschte 360°-Beleuchtungen mehrere LEDs notwendig. Die entsprechende Anzahl A kann aus

$$A = \frac{2}{1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

berechnet werden, wobei φ den Öffnungswinkel des zugrundeliegenden LED-Typs bezeichnet.

2.6.2 Elektrische Eigenschaften

Als Einführung in dieses Teilkapitel, welches die elektrischen Eigenschaften von LEDs unter Verwendung von [43, S. 44-46] und [106] behandelt, dienen folgende Daten, welche natürlich abhängig vom jeweiligen Modell bzw. von der jeweiligen Ausführung sind:

- Die **Stromaufnahme** von Leuchtdioden, beginnend bei nur 2mA, kann über 20mA bei Standard-LEDs bis hin zu über 18A bei Hochleistungs-LEDs erreichen (Stand: Juni 2008).
- Für die maximal zulässige **Sperrspannung**, d.h. für die maximale Spannung, die die Leuchtdiode verkraftet, werden im Allgemeinen 5V festgelegt.
- Die **Flussspannung** bzw. **Durchlassspannung**, d.h. die Spannung an der Diode in Durchlassrichtung, liegt ungefähr zwischen 1.3V und 4V.

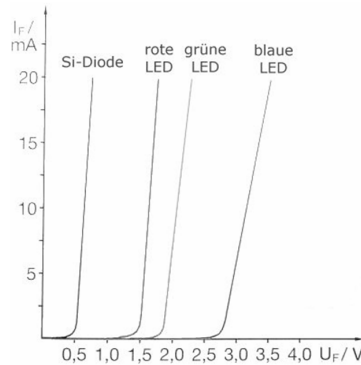


Abbildung 2.16 – Strom-Spannungskennlinien (vgl. [64])

Die Strom-Spannungskennlinie von Leuchtdioden hat exponentiellen Charakter (vgl. Abbildung 2.16), sodass bereits kleine Spannungsänderungen große Stromänderungen implizieren. Dies kann durch den dynamischen Widerstand

$$R = \frac{U_F}{I_F} \quad (2.6.1)$$

in Abhängigkeit vom jeweiligen Betriebspunkt beschrieben werden. Ein wesentlicher Fakt ist der Zusammenhang zwischen dem LED-Strom I_F und der Temperatur des Halbleiters. Fließt Strom durch die Leuchtdiode, erhöht sich die Kristalltemperatur, auch **Junction-Temperatur** oder **Sperrschichttemperatur** T_J genannt, was eine zusätzliche Abnahme des dynamischen Widerstands zur Folge hat. Wenn nun aber die Betriebsspannung (Flussspannung) U_F konstant ist, erhöht sich laut Gleichung (2.6.1) der Strom und damit auch wieder T_J . Dies kann letztendlich sogar zur thermischen Zerstörung der LED führen. Es ist daher naheliegend, den Strom konstant zu halten, da dann eine Abnahme von R auch eine Abnahme der Flussspannung U_F bedeutet und somit die Verlustleistung $P = U_F \cdot I_F$, d.h. der Wärmeverlust, reduziert werden kann.

2.7 Thermomanagement

Das Thermomanagement ist ein nicht zu vernachlässigender Bestandteil in der Herstellung von LED-Systemen und wird in diesem Abschnitt anhand der Quellen [43, S. 57-70], [86] und [111] beleuchtet. Es geht hierbei um Vorkehrungen, die getroffen werden müssen, um die beim Betrieb des Leuchtmittels entstehende Wärme geeignet abführen zu können. Während bei herkömmlichen Glühlampen nur unglaubliche 5% der aufgebrauchten elektrischen Leistung tatsächlich in Licht umgesetzt werden und der Rest als Wärme verloren geht, erzielt man mit LED-Lampen immerhin einen 20%igen Lichtanteil⁴, vgl. Abbildung

⁴Dieses Verhältnis ist mittlerweile veraltet; heutzutage ist der Anteil an mit LED-Lampen gewonnenem Licht um Einiges höher.

2 Leuchtdioden (LEDs)

2.17. Der verbleibende Anteil der eingesetzten elektrischen Leistung wird in Wärme umgewandelt und (anders als bei Glühlampen, die die Wärme mit dem Licht abstrahlen) vom LED-Chip ans Gehäuse abgegeben. Bezüglich des Wärmetransfers an die Umgebung

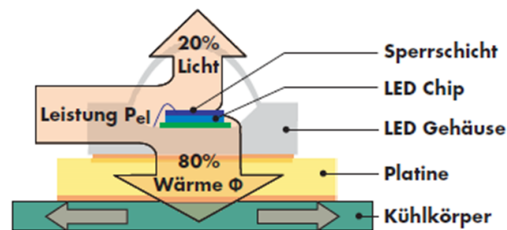


Abbildung 2.17 – Licht- und Wärmeanteil (vgl. [86])

spielen folgende drei, in Abbildung 2.18 dargestellten Faktoren eine Rolle:

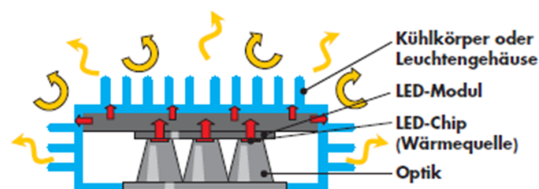


Abbildung 2.18 – Wärmetransfer an die Umgebung (vgl. [86])

- Die **Wärmeleitung** bezeichnet den Wärmetransport durch Medien, die direkten physikalischen Kontakt zueinander haben, wie z.B. der Transport der Wärme von der Sperrschicht der LED durch das LED-Gehäuse zur Leiterplatte (Platine).
- Im Zuge der **Konvektion** werden heißere Teilchen in kühlere Bereiche gebracht. Dies betrifft z.B. den von der Umgebungsluft umströmten Kühlkörper.
- Die **Wärmestrahlung** transportiert Wärme durch elektromagnetische Strahlung, wobei dafür kein Medium nötig ist. Das LED-Gehäuse strahlt beispielsweise Wärme als infrarote Strahlung ab.

Ausschlaggebend ist die „richtige“ Ableitung der Wärme, denn die Höhe der Chiptemperatur (Junction-Temperatur bzw. Sperrschichttemperatur) T_J hat Auswirkungen auf einige, im Folgenden aufgelisteten Parameter:

- Der **maximal zulässige Strom** muss auf die Chiptemperatur abgestimmt werden. Wenn der Betriebsstrom durch die Leuchtdiode zu groß ist, bedeutet das für den Halbleiterkristall eine lokale thermische Überlastung, was zu einer Störung des p-n-Übergangs führt. Die Bereiche der Grenzschicht, in denen kein Licht mehr abgestrahlt werden kann, nehmen zu.

- Allgemein kann es bei einem ungeeigneten Thermomanagement zu einer Überhitzung des Halbleiterkristalls oder zu Brüchen des Bonddrahts kommen. Andere mögliche Auswirkungen können das Ablösen des Chips von der Stromzuleitung oder das Erreichen der sogenannten Glaskristalltemperatur des Gehäusematerials sein, woraus resultiert, dass sich die Struktur der Kunststoffumhüllung ändert, diese spröde wird und der LED-Chip somit nicht mehr ausreichend vor Luftfeuchtigkeit abgeschirmt ist. Die Lampe fällt dann frühzeitig aus.
- Ebenso werden der Lichtstrom (und damit die lichttechnische Effizienz) und der zu erzeugende Farbort von der Junction-Temperatur beeinflusst.

Aufgrund all dieser Punkte lohnt es sich, nähere Überlegungen zur Sperrschichttemperatur T_J anzustellen. Um eine konkrete Formel zur Berechnung von T_J zu erhalten, wird der Wärmewiderstand R_{th} definiert, welcher im thermischen Ersatzschaltbild die analoge Größe zum elektrischen Widerstand R im elektrischen Ersatzschaltbild darstellt, vgl. Abbildung 2.19. Die Analogien lauten

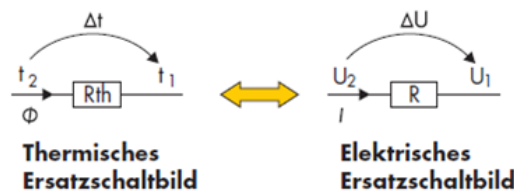


Abbildung 2.19 – Definition des Wärmewiderstands (vgl. [86])

$$\begin{aligned}
 \text{Spannung } U \text{ in V} &\Leftrightarrow \text{Temperatur } T \text{ in K,} \\
 \text{Strom } I \text{ in A} &\Leftrightarrow \text{Wärmeleistung } P \text{ in W,} \\
 \text{Widerstand } R \text{ in } \Omega &\Leftrightarrow \text{thermischer Widerstand } R_{th} \text{ in } \frac{\text{K}}{\text{W}},
 \end{aligned}$$

woraus

$$R = \frac{U_2 - U_1}{I} \Leftrightarrow R_{th} = \frac{T_2 - T_1}{P} \quad (2.7.1)$$

folgt. Wenn für T_1 die Umgebungstemperatur T_A (A für „Ambient“) und für T_2 die Junction-Temperatur T_J eingesetzt werden, folgt

$$T_J = R_{thJA} \cdot P + T_A$$

als Formel für die Sperrschichttemperatur, wobei R_{thJA} den thermischen Widerstand zwischen T_J und T_A angibt und sich aus dem internen Wärmewiderstand R_{thJS} auf Bauteilebene, der vom Hersteller im Datenblatt angegeben wird, und dem externen Wärmewiderstand R_{thSA} für den Wärmefluss vom Gehäusekontakt (Solder Point) zur Umgebung, der noch genauer zu betrachten ist, zusammensetzt. Mit den Randbedingungen des Systems, d.h. mit

2 Leuchtdioden (LEDs)

- der gesamten Verlustleistung P_{tot} ,
- der maximalen Sperrschichttemperatur T_J (mit einer eingeplanten Sicherheit von 10°C), und
- der maximalen Umgebungstemperatur T_A

gilt für den gesamten, benötigten thermischen Widerstand des Systems laut (2.7.1), dass

$$R_{\text{thJA}} = \frac{T_J - T_A}{P_{\text{tot}}}$$

erfüllt ist. Um nun eine Formel für den noch zu berechnenden Wärmewiderstand R_{thSA} zu erhalten, wird einfach der im Datenblatt notierte, interne Wärmewiderstand subtrahiert, was auf

$$R_{\text{thSA}} = \frac{T_J - T_A}{P_{\text{tot}}} - R_{\text{thJS}} = R_{\text{thSB}} + R_{\text{thBA}}.$$

führt. Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, dass sich der externe thermische Widerstand R_{thSA} aus den beiden Summanden R_{thSB} (Wärmewiderstand zwischen Solder Point und Board bzw. Platine) und R_{thBA} (Wärmewiderstand zwischen Board und Umgebung) ergibt. Die Bestimmung dieser Terme verläuft, oberflächlich skizziert, wie folgt:

- Für den ersten Summanden R_{thSB} ist das verwendete Platinensubstrat entscheidend. Im Allgemeinen werden hier sogenannte FR4-Materialien eingesetzt⁵ (FR für „flame retardant“), welche allerdings eher schlechte thermische Leiter sind. Eine Alternative zu thermisch verbesserten Stoffen wie z.B. Metallkernplatinen, die entsprechend teurer sind, stellen **thermische Vias** dar, mit welchen die Eigenschaften von FR4-Materialien positiv verändert werden können. Der Wärmewiderstand der Vias, die unterhalb der LEDs positioniert werden, berechnet sich aus

$$R_{\text{thV}} = \frac{1}{nk\pi(Dh - t^2)},$$

mit

- n ... Anzahl der Vias,
- k ... spezifische Wärmeleitfähigkeit der Via-Auskleidung,
- D ... Via-Durchmesser,
- h ... Via-Höhe bzw. Platinenstärke,
- t ... Stärke der Via-Auskleidung.

- Der zweite Summand R_{thBA} ist eng an die eingesetzte Kühlmethode bzw. die verwendeten Kühlkörper gekoppelt. Obwohl natürlich auch diesem komplexen Thema große Bedeutung zukommt, wird in dieser Arbeit auf nähere Ausführungen dazu verzichtet.

⁵FR4 ist eine Materialbezeichnung; es handelt sich hierbei um Epoxidharz in Verbindung mit Glasfasergewebe.

2.7 Thermomanagement

Werden die berechneten Ausdrücke in die jeweiligen Gleichungen eingesetzt, resultiert daraus der gesuchte Wärmewiderstand, wodurch ein angemessenes Thermomanagement sichergestellt werden kann.

3 Die PI-LED-Technologie

Nachdem durch die Behandlung der ersten beiden Kapitel zu den Themen „Licht“ und „LEDs“ ein umfangreiches Basiswissen erarbeitet wurde, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit dem aktuellen Stand der von der Firma LUMITECH Produktion und Entwicklung GmbH entwickelten PI-LED-Technologie¹ (PI für „Phosphor Innovation“), mit welcher effiziente LED-Lichtsysteme für unterschiedlichste Zwecke hergestellt werden können. Bevor das zugrundeliegende Verfahren und die Systeme selbst untersucht werden, ist es wichtig zu hinterfragen, was überhaupt von einer Lampe erwartet werden soll, kann und muss, damit diese über eine lange Zeitdauer hinweg nicht nur ein zufriedenstellendes, sondern ein bestmögliches Lichtresultat liefert.

3.1 Anforderungen an Lichtquellen

In der Entwicklung und Produktion von Leuchtmitteln im Allgemeinen, aber insbesondere von LED-Lichtquellen, gilt es, bestimmte Güteigenschaften, die die Qualität des Erzeugnisses beschreiben, zu realisieren (vgl. [55]):

- (i) **Gütemerkmal „Effizienz“:** Für die Effizienz einer Lichtquelle sind im Wesentlichen zwei Punkte von Bedeutung:
 - Die zur Lichterzeugung aufgebrauchte elektrische Leistung sollte so gut wie möglich in sichtbares Licht, welches bekanntermaßen den Wellenlängenbereich zwischen ca. 380nm und ca. 780nm einnimmt, umgesetzt werden. Die Größe dieses Anteils wird, wie in Kapitel 1.3.2 erwähnt wurde, durch die lichttechnische Effizienz mit der Einheit lm/W erfasst.
 - Der zweite wichtige Faktor bezieht sich auf die Hellempfindlichkeitskurve $V(\lambda)$: Es spielt nicht nur eine Rolle, wieviel an elektrischer Leistung in Licht des sichtbaren Bereichs umgewandelt wird, sondern auch, wie seine spektrale Zusammensetzung in diesem Bereich aussieht. Dies basiert auf der wellenlängenabhängigen Empfindlichkeit des menschlichen Auges, welche gerade durch die $V(\lambda)$ -Funktion repräsentiert wird. Erfolgt die Lichtemission in einem Bereich des Spektrums, für den das Auge empfindlicher reagiert, ist weniger Energie als in Zonen, für die die Empfindlichkeit niedriger ist, notwendig. Weiters kommt es zu einer Energieverschwendung, falls das ausgestrahlte Licht zusätzlich ultraviolette oder infrarote,

¹Lumitech wurde für die PI-LED-Technologie aufgrund ihrer zukunftsorientierten und ökonomischen Aspekte mit dem österreichischen Staatspreis für Innovation des Jahres 2007 ausgezeichnet.

3 Die PI-LED-Technologie

also nicht sichtbare Anteile, enthält. Die Berücksichtigung der Funktionsweise des menschlichen Auges, wie in Kapitel 1.3.1 beschrieben, ist aus diesem Grund für die Herstellung effizienter Lichtquellen unumgänglich.

- (ii) **Gütemerkmal „Farbwiedergabe“:** Weißes Licht kann einerseits durch Mischung aller Wellenlängen des sichtbaren Bereichs, wie bei der Sonne oder einer Glühlampe, andererseits aber auch durch Mischung des Lichts ganz bestimmter, monochromer Strahler, wie die Kombinationen Blau-Gelb oder Rot-Grün-Blau, entstehen. Diese verschiedenen Möglichkeiten wirken sich in unterschiedlicher Art und Weise auf die Farbwiedergabe der jeweiligen weißen Lichtquelle aus. Wie bereits aus Kapitel 1.3.5 bekannt, geht es hierbei um den Farbeindruck, den ein beleuchtetes Objekt im menschlichen Auge auslöst, und zwar dadurch, dass dieser Gegenstand gewisse Anteile des auf ihn treffenden Lichts absorbiert bzw. reflektiert, wobei seine Farbe letztendlich aus den reflektierten Wellenlängen resultiert. Daraus lassen sich folgende Aussagen ableiten:
- Trifft weißes Licht, welches sich aus allen sichtbaren Wellenlängen zusammensetzt, auf einen Gegenstand, kann dieser auch alle Anteile des Spektrums reflektieren. Demzufolge ist dann für ein Objekt jede Farbe darstellbar, was wiederum bedeutet, dass sich Licht dieser Art durch eine hundertprozentige Farbwiedergabe auszeichnet.
 - Trifft im Gegensatz dazu weißes Licht, welches eine andere, ganz bestimmte spektrale Zusammensetzung aufweist, auf einen Gegenstand, kann dieser nur jene Wellenlängen reflektieren, die im Licht vorhanden sind. Als Beispiel werde ein Objekt betrachtet, welches von weißem Licht mit kontinuierlichem Spektrum, somit mit optimaler Farbwiedergabe, bestrahlt wird und sich unter dieser Lichtquelle in einer grünlichen Farbe darstellt. Beleuchtet man den Gegenstand nun mit weißem Licht einer anderen Komposition, in der die dieser grünen Farbe entsprechende Wellenlänge nicht vorkommt, kann diese auch nicht reflektiert werden. Das Objekt nimmt somit eine andere, „falsche“ Farbe an - für den Farbwiedergabeindex gilt $R_a < 100$. Dieses Beispiel lässt sofort die Wichtigkeit der Farbwiedergabe für die Qualität eines Leuchtmittels erkennen.
- (iii) **Gütemerkmal „Veränderung der Farbtemperatur“:** Lichtquellen, die nicht auf der LED-Technologie beruhen, besitzen allesamt die Eigenschaft, dass ihre Farbtemperatur eindeutig festgelegt bzw. definiert und nicht verstellbar ist. Allerdings bildet dieses Merkmal einen außerordentlichen Kontrast zur Natur, denn das Sonnenlicht wechselt seine Farbtemperatur in Abhängigkeit von der Tages- und Jahreszeit. In der mitteleuropäischen Gegend finden, gemittelt über das ganze Jahr, im Laufe eines Tages Übergänge von ca. 3000K am Morgen auf ca. 5500K mittags und dann wieder auf

ca. 3000K am Abend statt. Wie markant der Einfluss dieses natürlichen Farbtemperaturwandels auf den Menschen ist, zeigt sich beispielsweise in künstlich beleuchteten Räumen, in denen kein Tageslicht vorhanden ist: Hier sind negative Auswirkungen auf den menschlichen Organismus feststellbar. Genauso werden die unterschiedlichen Farbtemperaturen, die in Räumen auftreten, welche sowohl natürlich als auch künstlich beleuchtet werden, als unangenehm empfunden. Die Veränderlichkeit der Farbtemperatur einer Lichtquelle, insbesondere im Bereich von 2700K bis 6500K, ist aber nicht nur für das menschliche Wohlbefinden an sich von Bedeutung, sondern lässt sich auch aufgrund der Möglichkeit, neben der physiologischen auch die psychologische Wahrnehmung zu steuern, gezielt z.B. zur Beeinflussung des Kaufverhaltens von Kunden einsetzen.

Weitere Eigenschaften, die eine Lichtquelle erzielen sollte, sind folgende:

- (iv) **Weißtreue/Vermeidung von Weißfehlern:** Die Bedeutung der Planckschen Kurve, welche kurz beschrieben als die Kurve der als weiß empfundenen Farben definiert ist, spiegelt sich in der Tatsache, dass der Mensch nur Farborte in der Nähe dieser Kurve als weißes Licht empfindet, wider. Licht weist schon bei kleinen Abweichungen des korrespondierenden CIE-Farborts Weißfehler auf - es wirkt unnatürlich und hat einen Farbstich. Daraus kann man unmittelbar ableiten, dass das Themengebiet der Farbortgenauigkeit einen wichtigen Bestandteil im Gesamtprozess der Entwicklung und Herstellung von LED-Lichtsystemen auf höchstmöglichem Niveau bildet. Es sei an dieser Stelle auf Kapitel 4 verwiesen, welches sich detailliert den Hintergründen zu dieser Problematik widmet und in der Praxis angewandte Lösungsansätze beleuchtet.
- (v) **UV/IR-Freiheit:** Diverse Leuchtmittel wie z.B. Glühlampen oder Energiesparlampen senden zum Teil ultraviolette bzw. infrarote Strahlen aus. Diese haben schädliche Wirkung: Während UV-Strahlen Gegenstände ausbleichen und deren Lebensdauer verkürzen, heizen IR-Strahlen Gegenstände auf und vermindern ihre Haltbarkeit. Daher sind für diese Lichtquellen je nach Anwendungsgebiet Filtertechnologien unentbehrlich, welche jedoch gleichzeitig eine Effizienzverringerung bedeuten. Gefragt sind somit Lichtsysteme, die von vornherein keine schädigenden Wellenlängen emittieren.
- (vi) **Lebensdauer** (vgl. hier zusätzlich [28] und [47]): Die Zeitspanne, innerhalb welcher eine Lichtquelle erwartungsgetreu leuchtet, wird ihre Lebensdauer genannt. Erklärtes Ziel für Leuchtenhersteller ist es natürlich, eine stundenmäßig möglichst hohe Funktionsdauer für ihre Erzeugnisse zu gewährleisten. In diesem Zusammenhang sind folgende drei Definitionen ausschlaggebend:
 - Die **Nutzlebensdauer** spielt für jene Lampen eine Rolle, die im Laufe ihres Gebrauchs einen Abfall des Lichtstroms verzeichnen. Nach Verstreichen dieses Zeitraums sollte das Leuchtmittel nicht mehr benutzt werden, da die Lichtmenge, die es abstrahlt, den erwünschten Anforderungen nicht mehr genügt.

3 Die PI-LED-Technologie

- Die **mittlere Lebensdauer** ist jener Zeitabschnitt, nach welchem nur mehr die Hälfte einer ursprünglich in Betrieb genommenen Anzahl an Lichtquellen einer Testreihe funktioniert.
- Aus der **durchschnittlichen Lebensdauer** kann man ablesen, wie lange alle Leuchtmittel einer Testserie durchschnittlich funktioniert haben.

Allgemein wirken sich Umwelteinflüsse wie Erschütterungen, Umgebungstemperaturen oder permanente Vibration verschieden stark auf die Lebensdauer diverser Lampen aus. LEDs können mit einer äußerst hohen durchschnittlichen Lebensdauer aufzeigen, die durch übermäßige Ströme und Temperaturen allerdings massiv beeinträchtigt werden kann. Tabelle 3.1 umfasst ungefähre Stundenangaben für verschiedene Lichtquellen, um deren Lebensdauer zu charakterisieren (Stand: März 2010):

Lebensdauer verschiedener Lichtquellen	
Glühlampe E14/E27 ²	1.000 h
Niedervolt-Halogenlampe	2.000-4.000 h
T5 (Ø16mm) Leuchtstofflampe (6-13W)	7.000 h
T2 (Ø 7mm) Leuchtstofflampe	8.000 h
T8 (Ø26mm) Leuchtstofflampe KVG ³	13.000 h
Energiesparlampe	4000-19000 h
T8 (Ø26mm) Leuchtstofflampe EVG ⁴	20.000 h
T5 (Ø16mm) Leuchtstofflampe (14-80W)	24.000 h
LED (je nach Bauart, Kühlung, Ansteuerung etc.)	10.000-100.000 h

Tabelle 3.1 – Lebensdauerangaben (vgl. [28])

Im nächsten Schritt wird bewertet, wie verschiedene LED-Lösungen bezüglich der eben aufgezählten Güte Merkmale abschneiden. Da viele dieser Technologien vor allem für die Erzeugung von weißem Licht mit der bereits in Kapitel 2.6.1 eingeführten Farbkonversion arbeiten, wird diese im Folgenden gründlich beschrieben, um danach auf konkrete Verwendungsmöglichkeiten von phosphorbeschichteten LEDs eingehen zu können.

3.2 Phosphorkonversion

Dieser Abschnitt bezieht sich auf die Quellen [54], [56] und [1].

Phosphore sind Konversionsleuchtstoffe: Werden sie, wie in diesem Zusammenhang von

²E14/E27 sind Angaben für die geometrischen Abmessungen des als Lampenfassung verwendeten Edisongewindes.

³Die Bezeichnungen T2, T5 und T8 sind standardisierte Röhrendurchmesser; KVG steht für „konventionelles Vorschaltgerät“.

⁴EVG steht für „elektronisches Vorschaltgerät“.

einer LED, mit Strahlung einer bestimmten Wellenlänge angeregt, absorbieren sie einen Teil dieser primären Emission, um danach ihrerseits Strahlung einer im Allgemeinen größeren Wellenlänge auszusenden. Die Charakterisierung von Phosphoren erfolgt anhand mehrerer Kenngrößen:

- **Peak-Wellenlänge:** Sie bezeichnet jene Wellenlänge, bei der das spektrale radiometrische Maximum auftritt.
- **Dominante Wellenlänge:** vgl. Kapitel 1.3.4.
- **Halbwertsbreite:** Sie gibt jenen Bereich in nm an, der einer Intensität von 50% des Maximums zugrundeliegt.
- **Farbort** im CIE-Normvalenzsystem
- **Emissionswellenlänge:** Sie definiert die Farbe des emittiertes Lichts.
- **Quantenausbeute:** Sie legt fest, welche Anteile der absorbierten Strahlung wieder abgestrahlt werden.

Einige Kombinationen einer blauen LED mit Phosphoren unterschiedlicher Peak-Wellenlängen sind in Abbildung 3.1 skizziert. Wenn nun der Leuchtstoff so gewählt wird, dass er, wenn

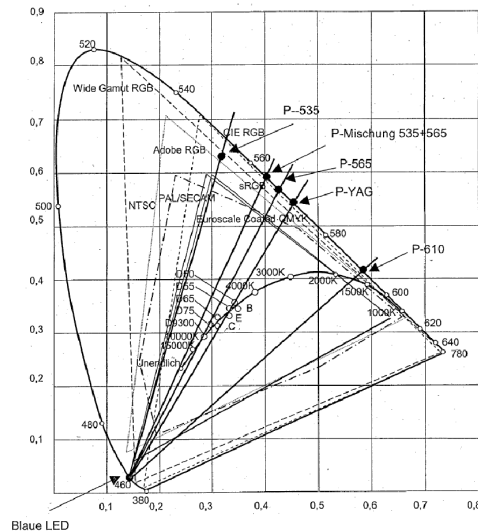


Abbildung 3.1 – Peak-Wellenlängen (vgl. [56])

er z.B. von einer blauen LED zum Leuchten angeregt wird, die Komplementärfarbe dazu, also gelb, emittiert, ergibt die Mischung weißes Licht. Eine Konstellation dieser Art fällt unter den Begriff einer Phosphor-LED der jeweiligen Farbtemperatur, der sie entspricht. Basierend auf dieser Überlegung kommen für die Weißlichterzeugung vorrangig

3 Die PI-LED-Technologie

Phosphore zum Einsatz, die als primäre Strahlung dominante Wellenlängen von ca. 460nm absorbieren und Licht mit einer Peak-Wellenlänge zwischen 500nm und 630nm aussenden. Mit Phosphor-LEDs dieser Art können zunächst einmal ganz gezielt bestimmte Weißtöne realisiert werden:

- (i) **Kaltweißes Licht:** Eine Phosphor-LED von z.B. 6500K, sprich kaltweißes Licht, weist ein Spektrum auf, welches einen beachtlichen Teil der $V(\lambda)$ -Kurve umfasst und kann somit hinsichtlich ihrer Effizienz punkten. Das große Defizit kristallisiert sich aus dem großen Anteil an kurzwelligem und geringen Anteil an langwelligem Licht im Spektrum heraus: Der Farbwiedergabeindex nimmt nur einen mittelmäßigen Wert von ungefähr 75 an und kann nur unter Effizienzeinbußen angehoben werden. Für die Allgemeinbeleuchtung ist diese Variante daher nicht ideal.
- (ii) **Warmweißes Licht:** In diese Kategorie fallen Phosphor-LEDs mit einer Farbtemperatur von z.B. 3200K. Sie unterscheiden sich von jenen, die kaltweißes Licht erzeugen, dadurch, dass die verwendeten Phosphore auch im roten, langwelligen Bereich emittieren, sodass ein Farbwiedergabeindex $R_a > 90$ erreicht werden kann. Jedoch erzielen LEDs diesen Typs nur etwa 70% der Effizienz der kaltweißen Phosphor-LEDs. Dies liegt darin begründet, dass wesentliche Anteile des hier erzeugten Lichts in einem durch $V(\lambda)$ schlecht bewerteten Bereich liegen ($> 650\text{nm}$), d.h. das menschliche Auge nur zu schwachen bis gar keinen Empfindungen anregen. Dies bedeutet natürlich einen Energieverlust bzw. eine Energieverschwendung und die Effizienz sinkt. Wird die 3200K-Kurve in Abbildung 3.2 betrachtet, wird diese Problematik deutlich: Die schraffierte Fläche repräsentiert die „verschwendeten“ Lichtanteile; es gilt hier, dass mit 80% der Strahlungsenergie 99% des Lichtstroms erzeugt werden, mit den restlichen 20% aber nur mehr 1% des Lichtstroms!

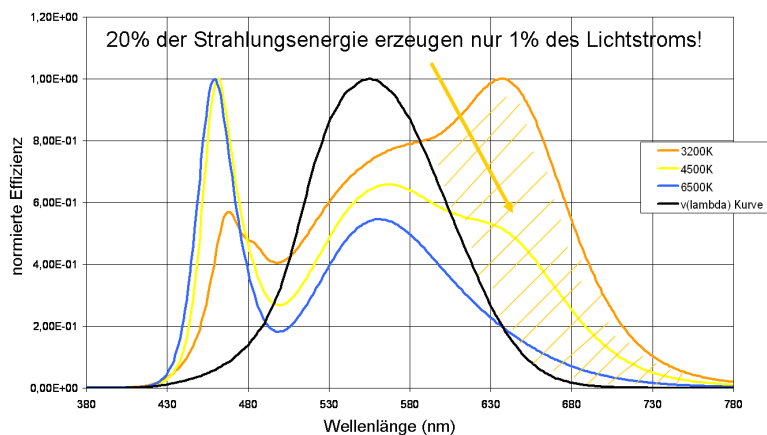


Abbildung 3.2 – Effizienzabnahme der 3200K-LED (vgl. [54])

Die hier beschriebenen phosphorbeschichteten LEDs erzeugen also weißes Licht einer definierten Farbtemperatur und können diesbezüglich nicht verstellt werden. Um das Güte-

merkmal der stufenlosen Veränderlichkeit der Farbtemperatur zu erreichen, können unter anderem Technologien eingesetzt werden, die Phosphor-LEDs beinhalten. Wie zielführend Methoden dieser Art im Vergleich zu solchen sind, die ohne Farbkonversion auskommen, beantwortet das nächste Kapitel.

3.3 Verschiedene LED-Technologien und deren Vor- und Nachteile

In diesem Abschnitt geht es nun darum, unterschiedliche Lösungsvarianten zur Erzeugung von weißem LED-Licht zu untersuchen und diese Methoden anhand ihrer Erfüllung der in Kapitel 3.1 aufgelisteten Qualitätsmerkmale zu beurteilen, was auf Basis von [54] und [55] durchgeführt wird. Prinzipiell erfolgt eine Unterteilung in zwei im Folgenden beschriebenen Gruppen, je nachdem, wie das erwünschte weiße Licht realisiert wird:

(i) **Additive Mischung von mindestens drei monochromen LEDs:**

- Bei der **RGB-Technologie** werden, wie der Name schon vermuten lässt, die LED-Farben Rot, Grün und Blau additiv gemischt. Die Verbindungslinien zwischen den diesen Farben entsprechenden Farborten im CIE-Diagramm spannen dann das Farbdreieck aus Abbildung 3.3 auf, innerhalb welchem alle mit dieser Technologie darstellbaren Farborte liegen. Diese Variante bringt automatisch

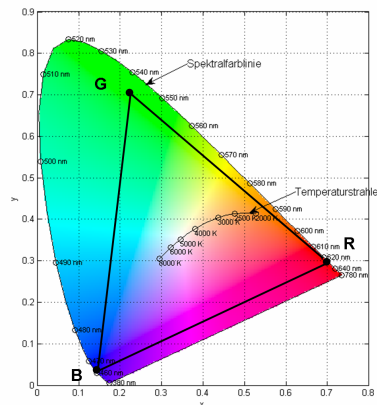


Abbildung 3.3 – RGB-Farbdreieck (vgl. [68])

einen Vorteil mit sich: Aufgrund der Gestalt des sich ergebenden Farbdreiecks sind auch die Weißtöne entlang der Planckschen Kurve einstellbar, was insbesondere die stufenlose Änderung der Farbtemperatur ermöglicht, sodass außerdem alle verwendeten LEDs in Betrieb sind.

Allerdings geht die RGB-Technologie mit gravierenden Nachteilen einher. Die einzelnen eingesetzten LEDs zeigen unterschiedliche Temperaturabhängigkeiten und verhalten sich auch hinsichtlich ihrer Lebensdauer nicht gleichermaßen, was

3 Die PI-LED-Technologie

insgesamt eine Temperaturabhängigkeit der erzeugten Farbe als Konsequenz hat; diese über eine geeignete Steuerung bzw. Regelung in den Griff zu bekommen, ist sehr aufwändig. Weiters sind mit den in Gebrauch genommenen LEDs immer herstellungsbedingte Toleranzen bezüglich ihrer radiometrischen Leistung und dominanten Wellenlänge verknüpft, was es erheblich erschwert, gewünschte Farborte zu reproduzieren. Zudem ist weißes Licht, welches mittels RGB-LEDs generiert wird, für die Allgemeinbeleuchtung untauglich, da dieses durch ein ziemlich einseitiges Spektrum charakterisiert ist (siehe Abbildung 3.4, verglichen mit $V(\lambda)$) und daher einen nur sehr geringen Farbwiedergabeindex aufweist (R_a zwischen 22 und 65). Auch hinsichtlich der Effizienz ist noch ein gehöriger Optimierungsbedarf vorhanden.

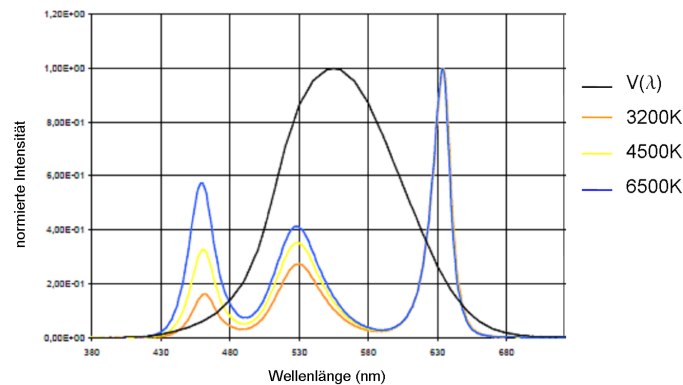


Abbildung 3.4 – Unausgewogenes RGB-Spektrum (vgl. [54])

- Mittels der **RGBA-Technologie** wird versucht, das Problem der unzureichenden Farbwiedergabe in der RGB-Ausführung durch das Einbringen einer zusätzlichen LED der Farbe Amber zumindest zum Teil zu beheben. Abbildung 3.5 zeigt den Raum der möglichen Farborte, der für diese Variante entsteht. Neben

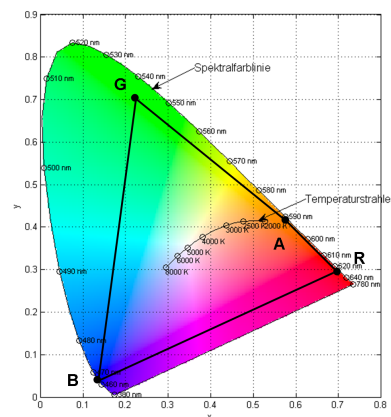


Abbildung 3.5 – RGBA-Farbraum (vgl. [68])

3.3 Verschiedene LED-Technologien und deren Vor- und Nachteile

der von der RGB-Technologie vererbten Eigenschaft der Farbtemperaturveränderlichkeit resultiert hier ein deutlich höherer R_a -Wert von 80 bis 83, was auch aus den Kurven in Abbildung 3.6 abzulesen ist. Jedoch steigt natürlich der Steuer- bzw. Regelungsaufwand durch die Hinzunahme einer vierten LED, sodass auch diese Variante nicht als optimal anzusehen ist.

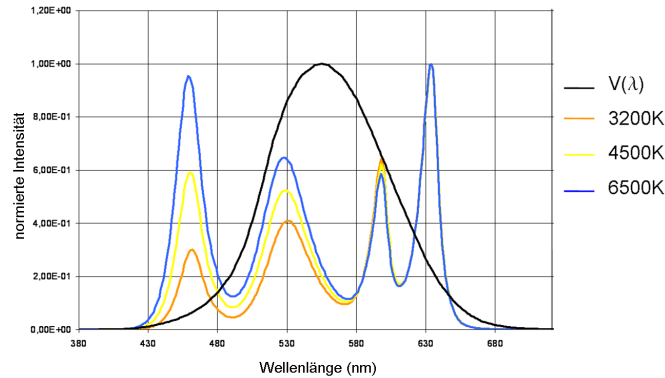


Abbildung 3.6 – Verbesserte Farbwiedergabe durch RGBA (vgl. [54])

(ii) Kombinationen mit mindestens einer phosphorbeschichteten LED:

- **Kombination von 3200K und 6500K LEDs:** Die Vorteile dieser Ausführung, nämlich der Betrieb von nur zwei LEDs und die Möglichkeit, alle Farborte auf der Verbindungsgeraden zu erreichen und somit auch die Farbtemperatur zu variieren, verblissen schnell durch eine Reihe von Nachteilen. Wie aus Abbildung 3.7 (statt einer 3200K wird hier eine 2700K LED verwendet) hervorgeht, weichen die erzeugten Farborte von der Planckschen Kurve ab, was die logische Folgerung aus dem Gebrauch von nur zwei LEDs ist: Eine Gerade kann eine nichtlineare Kurve wie die Black-Body-Kurve nicht realitätsgetreu nachbilden. Wenn nun beispielsweise eine Farbtemperatur von 5000K erwünscht ist, empfindet man die entsprechende Abweichung von der Kurve als rötlichen Stich. Die Eigenschaften der einzelnen LEDs, die in Kapitel 3.2 aufgelistet wurden, wirken sich hier insofern aus, dass der Farbwiedergabeindex abhängig von der Farbtemperatur zwischen $R_a < 80$ bei 6500K und bis zu $R_a > 90$ bei 3200K schwankt, was in Summe qualitativ unzureichend ist. Ähnliches gilt für die Effizienz des Systems; auch diese verhält sich ungleichmäßig und liegt zwischen nur weniger als 70% bei 3200K und 100% bei 6500K. Ein weiterer negativer Effekt ist die Tatsache, dass sich für Farborte, die sich durch Ansteuerung **beider** LEDs ergeben, ein Lichtmaximum durch die Summe der zwei Lichtströme ergibt, hingegen in den Extrempunkten bei z.B. 3200K oder 6500K jeweils nur **eine** LED aktiv ist, wodurch es zu einem Abfall der Lichtleistung bis auf weniger als die Hälfte des maximalen Lichtstroms kommen kann. Dies impliziert eine Verdopplung des

3 Die PI-LED-Technologie

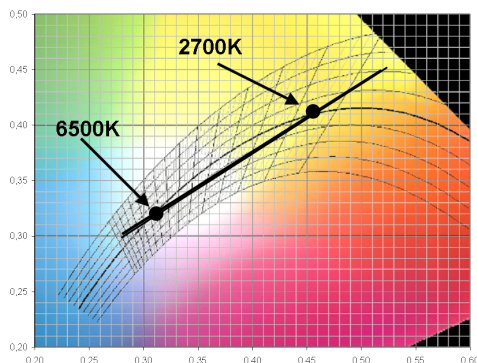


Abbildung 3.7 – Abweichung von Planckscher Kurve (vgl. [54])

Aufwands, um zu gewährleisten, dass die Leistung konstant bleibt, und ist daher in Hinblick auf die Elektronik nicht tragbar.

- **Kombination 3200K-Grün-Blau:** Die positiven Aspekte dieser Variante sind das Vermögen, die Plancksche Kurve (bzw. den relevanten Teil davon) nachzubilden, was aus der Beschaffenheit des resultierenden Farbdreiecks in Abbildung 3.8 folgt, und die hohe Farbwiedergabe (R_a zwischen 91 und 93), was wiederum aus dem Spektrum verschiedener Weißtöne in Abbildung 3.9 abzulesen ist. Den-

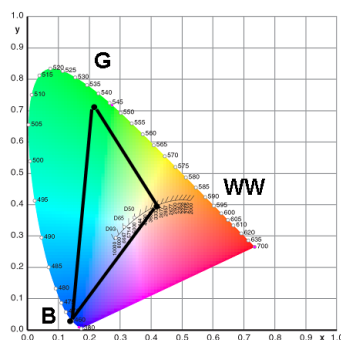


Abbildung 3.8 – 3200K-GB-Farbdreieck (vgl. [68])

noch besitzt diese Methode zur Realisierung verschiedener Farbtemperaturen ein entscheidendes Manko: Durch die Verwendung einer 3200K-LED sinkt die Effizienz insgesamt drastisch.

- **Kombination 6500K-Rot-Grün-Blau:** Auch mit dieser Methode können alle relevanten Farborte auf der Planckschen Kurve und ein einigermaßen akzeptabler Farbwiedergabeindex erreicht werden; jedoch ist die grundsätzliche Verbindung von vier verschiedenen LEDs für das gesamte System zu aufwändig (vgl. RGBA).

Trotz großer Differenzen, die all diese Technologien im Vergleich aufweisen, vereint sie doch eine Gemeinsamkeit: Keine einzige der Methoden kann alle erstrebenswerten, in Kapitel

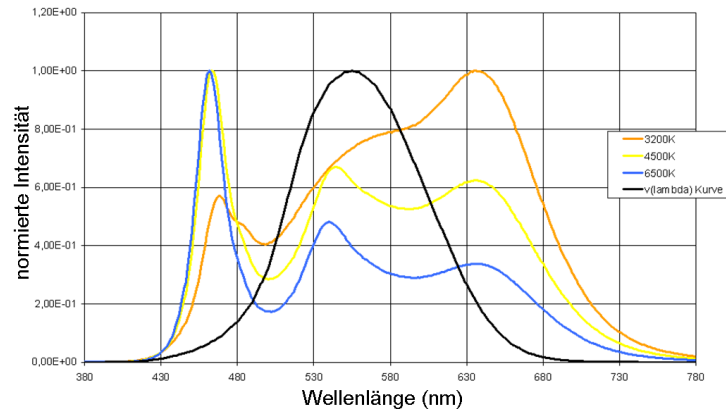


Abbildung 3.9 – 3200K-GB-Spektrum (vgl. [54])

3.1 thematisierten Anforderungen erfüllen. Weiters lässt sich leicht schlussfolgern, dass für eine LED-Lösung, die die Umsetzung **aller** Güteigenschaften, d.h. Effizienz, Farbwiedergabe und Verstellbarkeit der Farbtemperatur (mit Weißtreue) garantiert, folgende Punkte zu beachten sind:

- Die additive Mischung von nur zwei verschiedenen LEDs kann den Ansprüchen nicht standhalten, da für die Realisierung gewünschter Farborte nur die Verbindungsgerade zur Verfügung steht und demzufolge ein hinreichend großer Teil der Planckschen Kurve verfehlt wird, und zwar bereits in einem solchen Ausmaß, dass das menschliche Auge dies wahrnimmt und als störend empfindet.
- Demnach liegt die Notwendigkeit des Zusammenspiels von **drei** verschiedenen LEDs auf der Hand (die Verwendung von vier unterschiedlichen LEDs ist nicht mehr rentabel).
- Die RGB-Kombination würde zwar in die richtige Sparte fallen, versagt jedoch hinsichtlich ihrer Farbwiedergabeeigenschaften.

Daher ist das **naheliegende Fazit**: Eine geeignete Verbindung von RGB- und Phosphorkonversionstechnologie, d.h. eine neuartige Hybrid-Technologie, könnte zu einer optimalen LED-Lösung führen. Das ist der Grundstein für die Funktionsweise der im nächsten Kapitel behandelten PI-LED-Technologie.

3.4 Grundlagen der PI-LED-Technologie

Die PI-LED-Technologie, deren Beschreibung in diesem Abschnitt auf [51] und [54] beruht, ist grundsätzlich durch die Kombination der LED-Lichtfarben Rot und Blau und einer phosphorbeschichteten blauen LED charakterisiert, welche die grüne LED aus der RGB-Variante ersetzt. Das auf diese Weise erzeugte Farbdreieck ist in Abbildung 3.10

3 Die PI-LED-Technologie

dargestellt. Natürlich stellt sich sofort die Frage, welche Phosphor-LED hier zum Einsatz

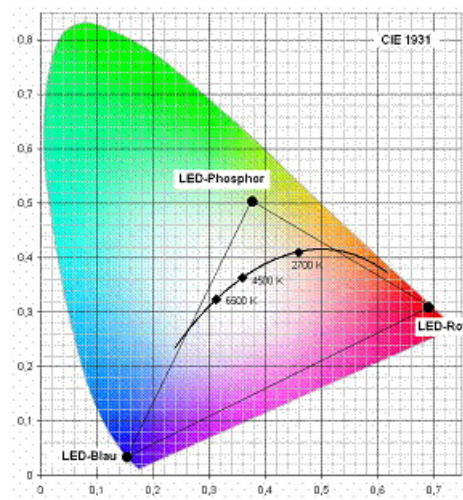


Abbildung 3.10 – Farbdreieck Phosphor-Blau-Rot (vgl. [51])

kommt bzw. wodurch die Wahl des „richtigen“ Phosphors gerechtfertigt ist. Dazu ist es notwendig, das Augenmerk zunächst darauf zu werfen, wie sich die Lichtintensität bzw. der Lichtstrom in Abhängigkeit der Phosphorkonzentration verhalten, um letztendlich auf das konkrete lichttechnische Effizienzverhalten schließen zu können. Im Allgemeinen nimmt die Intensität zunächst bis zu einem gewissen Maximum zu, um dann wieder abzufallen. Anders formuliert heißt das, dass die Verluste ab einer bestimmten Phosphorkonzentration überwiegen. Darüber gibt Abbildung 3.11 Aufschluss, die für verschiedene Phosphore die Effizienzkurven, normiert auf die zugrundeliegende blaue LED, als Funktionen der Phosphormenge (bzw. der x -Koordinate im CIE-System) darstellt. Die Effizienzmaxima für

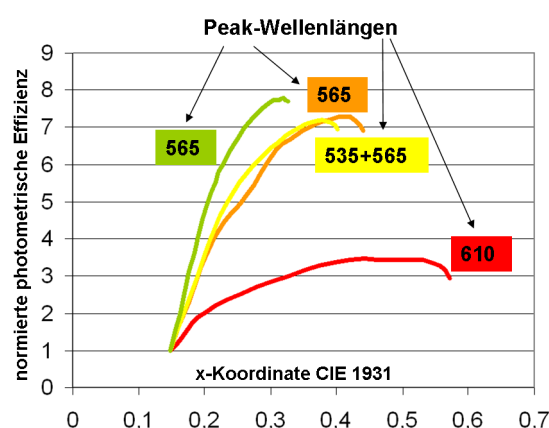


Abbildung 3.11 – Effizienz verschiedener Phosphore (vgl. [54])

Phosphore unterschiedlicher Peak-Wellenlängen können auch, wie in Abbildung 3.12, ins

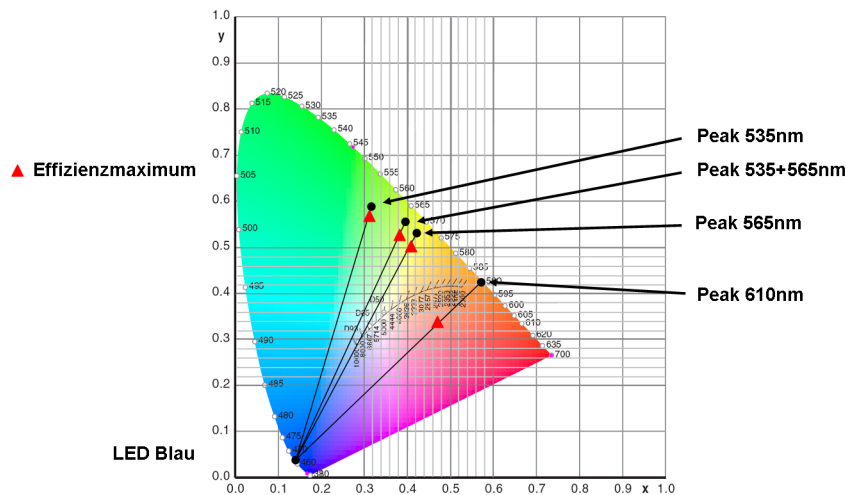


Abbildung 3.12 – Phosphore und ihre Effizienzmaxima (vgl. [54])

CIE-Normvalenzsystem eingezeichnet werden. Durch Gegenüberstellung der Effizienzmaxima zeigt sich, dass die Effizienz der hier nun neu eingeführten Lichtfarbe „Phosphor“, die durch Beschichtung einer blauen LED mit einer Mischung aus Phosphoren mit dominanten Wellenlängen von 565nm und 535nm entsteht, im Vergleich zu einer 6500K-LED um 15% und im Vergleich zu einer 3200K-LED sogar um ca. 30% höher ist.

Nachdem die LED-Typen bzw. die LED-Farben Phosphor, Blau und Rot der PI-LED-Technologie nun festgelegt sind, ist der Grad der Erfüllung der wichtigsten Gütemerkmale aus Kapitel 3.1 zu begutachten:

- **Gütemerkmal „Effizienz“:** Durch die besonderen Eigenschaften der zugrundeliegenden Phosphor-LED, welche sich, verglichen mit anderen Phosphor-Mischungen, durch ihre Emission in Wellenlängenbereichen, die durch die $V(\lambda)$ -Kurve sehr gut bewertet werden, auszeichnet, kann hier eine höhere Effizienz als bei anderen Technologien erzielt werden. Dabei wird die Lichtfarbe Phosphor in ihrem Effizienzmaximum bzw. in einem Bereich davon betrieben. Zusätzlich ist der Abstand des Phosphor-Farborts zur Planckschen Kurve beträchtlich kleiner als jener, der sich bei Verwendung einer grünen LED ergibt, wodurch blauer und roter Lichtstrom für die Weißlichterzeugung reduziert werden können.
- **Gütemerkmal „Farbwiedergabe“:** Die Lichtfarbe Phosphor emittiert sehr breitbandig und bewirkt dadurch insgesamt einen Farbwiedergabeindex von bis zu 95.
- **Gütemerkmal „Veränderung der Farbtemperatur“:** Da die Plancksche Kurve (bzw. der Abschnitt zwischen 2700K und 6500K) exakt wiedergegeben werden kann,

3 Die PI-LED-Technologie

ist eine stufenlose Änderung der Farbtemperatur mit sehr hoher Weißtreue garantiert. Dabei leuchtet die Phosphor-LED, die, wie zuvor erwähnt, für die hohe Effizienz sorgt, konstant, während die rote und die blaue LED je nach gewünschter Farbtemperatur unterschiedlich eingestellt werden. Somit verhält sich der gesamte Lichtstrom für Farborte zwischen 2700K und 6500K konstanter als bei anderen Methoden.

Die PI-LED-Technologie kann somit hinsichtlich aller grundlegenden Anforderungen überzeugen.

Die nächsten Kapitel werden sich damit befassen, wie ein PI-LED-Modul grundsätzlich aufgebaut ist, wie damit konkret die Gesamtlösung realisiert werden kann und welche Probleme in diesem Zusammenhang auftreten. Eines der Hauptziele, die heutzutage in der Herstellung von Leuchtmitteln und natürlich auch durch die PI-LED-Technologie verfolgt werden, ist eine möglichst hohe Farbortgenauigkeit. Zum besseren Verständnis dafür, auf welche Faktoren bei der Umsetzung dieses Ziels zu achten ist, dient der nachfolgende Abschnitt über MacAdam-Ellipsen.

3.5 Farbortgenauigkeit - MacAdam-Ellipsen

Wie in Kapitel 2.6.1 bereits erwähnt wurde, sind die von LED-Lichtquellen erzeugten dominanten Wellenlängen strom- und temperaturabhängig. Diese Einflussgrößen verursachen also eine Verschiebung bzw. Ungenauigkeit des gewünschten Farbortes. Zur Beschreibung des Ausmaßes dieses Drifts und um anzugeben, inwiefern dieser vom Menschen als störend empfunden wird, werden die sogenannten MacAdam-Ellipsen verwendet.

3.5.1 Geschichte und Bedeutung

Die Entstehungsgeschichte der MacAdam-Ellipsen wird im Folgenden in Anlehnung an [66], [67] und [99] wiedergegeben.

David Lewis MacAdam stellte sich grundsätzlich für zwei gegebene Farben folgende Fragen: Wie unterschiedlich sind diese Farben bzw. wie unterschiedlich werden sie wahrgenommen, und wie können diese empfundenen Unterschiede geometrisch und mathematisch dargestellt werden? Er machte es sich zum Ziel, ausgehend von bestimmten Farborten (x, y) im CIE-Normvalenzsystem eine Folge von Kurven um diese Farborte zu finden, die angeben, wie groß die Entfernungen entlang verschiedener Farbachsen vom jeweiligen Farbort sind, bis ein farblicher Unterschied wahrgenommen werden kann.

Dazu nahm er ein Experiment in Angriff, in dessen Verlauf ein geschulter Beobachter, dessen Sehvermögen unbeeinträchtigt war, zwei verschiedene Farben einer konstanten Leuchtdichte von ca. 48 cd/m^2 betrachtete und verglich. Eine dieser Farben blieb als Testfarbe unverändert, während die zweite Farbe variiert werden konnte, d.h. verstellbar war, und zwar so lange, bis es den Empfindungen des Probanden zufolge eine Übereinstimmung gab. Direkt daraus ergab sich der „Haken“ an diesen Versuchsreihen: Die gefundenen Ergebnisse konnten natürlich nicht als perfekt oder hundertprozentig richtig verbucht werden, da die Fähigkeit bzw. Genauigkeit des menschlichen Auges immer ihre Grenzen hat. MacAdam

3.5 Farbortgenauigkeit - MacAdam-Ellipsen

ließ sich dadurch nicht von seinem Vorhaben abbringen, analysierte die subjektiven Resultate und konnte daraus Ellipsen um die Testfarborte konstruieren. Insgesamt führte er das Experiment für 25 Farborte im CIE-Normvalenzsystem durch und zog daraus das interessante Resümee, dass sowohl die Größe als auch die Ausrichtung der Ellipsen sehr stark in Abhängigkeit des entsprechenden Testfarborts schwanken. Abbildung 3.13 zeigt diese 25 Ellipsen in zehnfacher Vergrößerung, ermittelt durch die Beobachtungen einer von MacAdam's Testpersonen, Perley Gilman Nutting Jr. Von welcher enormer Bedeutung

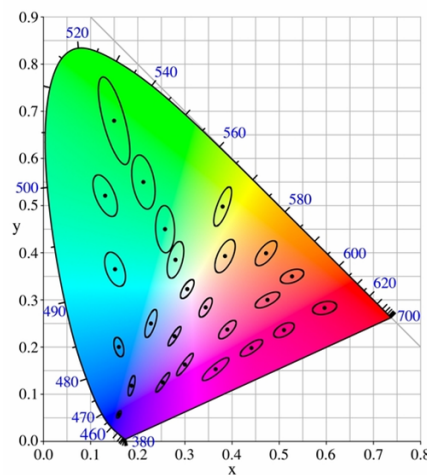


Abbildung 3.13 – MacAdam-Ellipsen (vgl. [99])

MacAdam's Arbeit auch heute noch ist, wird daraus ersichtlich, dass die Ellipsen Bestandteil der ANSI-Standards sind und somit in der Lampen- und Leuchtenproduktion eine wichtige Rolle spielen.

Die MacAdam-Ellipsen werden in Streuwerteinheiten bzw. Standardabweichungen angegeben. Für eine 1-step Ellipse (MacAdam1) bedeutet dies, dass jeder Punkt auf dem Rand dieser Ellipse eine Streuwerteinheit vom Zielfarbort darstellt. Wird ein fixer Punkt auf dem Ellipsenrand betrachtet und durch diesen eine Gerade gelegt, ergibt dies als Schnittpunkt auf der gegenüberliegenden Seite einen weiteren Punkt auf dem Ellipsenrand. Zwischen diesen zwei Randpunkten liegen nun aber zwei Streuwerteinheiten!

Die ANSI-Empfehlung für Lampenhersteller sind Bereiche innerhalb MacAdam4, was mit den Inhalten aus Tabelle 3.2 als sinnvoll erscheint.

3.5.2 Abstandsmessung von Farborten

Die mathematisch sinnvolle Abstandsmessung zwischen zwei bzgl. der zweidimensionalen CIE-Farbtabelle verschiedenen Farben wird in diesem Kapitel unter Verwendung von [10], [24, S. 61] und [71] hergeleitet.

Die Überprüfung, ob ein tatsächlich erzeugter Farbort, verglichen mit dem gewünschten Zielfarbort, in einem erlaubten Toleranzbereich (angegeben durch MacAdam-Ellipsen bestimmter Ausdehnung) liegt, spielt eine große Rolle. In Kapitel 3.5.1 wurde für die Angabe

Größe der MacAdam-Ellipse	Qualität der Farbhomogenität innerhalb der Ellipse
1 SWE (MacAdam1)	keine Farbunterschiede wahrnehmbar
2-3 SWE	kaum Farbunterschiede wahrnehmbar
> 4 SWE	Farbunterschiede wahrnehmbar

Tabelle 3.2 – Bedeutung der Streuwerteinheiten (vgl. [66])

der Größenordnung einer solchen Ellipse die Streuwerteinheit SWE festgelegt. Um dieses bis jetzt eher abstrakte Maß für jeden beliebigen Ausgangsfarbort mit Hilfe einer Formel für konkrete Berechnungen darstellen zu können, ist ein kleiner Exkurs in das Gebiet der Riemannschen Räume, für diese Zwecke nur im Zweidimensionalen betrachtet, notwendig. Ein Riemannscher Raum S kann als Verallgemeinerung eines in diesem Fall ebenen Euklidischen Raumes angesehen werden und zeichnet sich durch die Existenz einer Metrik aus. Er ist durch eine positiv definite, symmetrische Matrix $G(\vec{r})$, die in jedem als Ortsvektor notierten Punkt $\vec{r} \in S$ definiert ist, erklärt. Eine infinitesimale Distanz $d\vec{r}$ zu \vec{r} wird dann durch

$$(d\vec{r}, d\vec{r})_G = (d\vec{r})^\top G(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.5.1)$$

gemessen, wobei die Einträge von G mit $G = (g_{ij})_{i,j=1,2}$ bezeichnet werden. Mit

$$d\vec{r} = (dr^{(1)}, dr^{(2)}), \quad dr^{(1)} = dx, \quad dr^{(2)} = dy$$

und unter Verwendung der Einstein-Konvention ist Gleichung (3.5.1) gleichbedeutend mit

$$(d\vec{r}, d\vec{r})_G = g_{ij} dr^{(i)} dr^{(j)}. \quad (3.5.2)$$

Wenn die Koeffizienten g_{ij} bekannt sind, können somit Abstände zwischen je zwei Punkten des zugrundeliegenden Raumes angegeben werden. Dies kann auf Farbortgenauigkeitsanalysen umgemünzt werden, indem ein Zusammenhang zwischen Distanzberechnungen in Riemannschen Räumen und jenen mithilfe von MacAdam-Ellipsen hergestellt wird, vgl. dazu Abbildung 3.14. Der als Vektor $d\vec{r}$ bezeichnete Abstand zwischen dem Ausgangsfarbort \vec{r} , welcher offensichtlich Mittelpunkt einer der Ellipsen ist, und dem betrachteten Punkt $P = \vec{r} + d\vec{r}$ ist per Definition der MacAdam-Ellipsen betragsmäßig gleich der dieser Ellipse entsprechenden Anzahl an Streuwerteinheiten ds und setzt sich aus den Komponenten $d\vec{r} = (dx, dy)$ zusammen. Gleichung (3.5.2) geht damit direkt in

$$(d\vec{r}, d\vec{r}) = (ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + 2g_{12}dx dy + g_{22}(dy)^2 \quad (3.5.3)$$

über. Zu berechnen bleiben die Koeffizienten (g_{ij}) der Matrix G , was durch allgemeine, simple Überlegungen zur Geometrie von Ellipsen erfolgen kann. Dazu wird die Standardgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

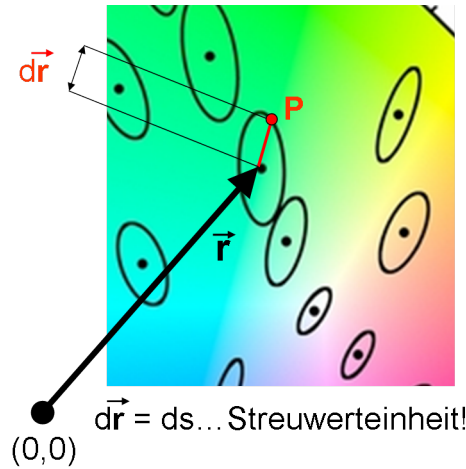


Abbildung 3.14 – MacAdam-Ellipsen und Streuwerteinheiten (vgl. [99])

für eine Ellipse mit

- $a \dots$ Länge der großen Halbachsen,
- $b \dots$ Länge der kleinen Halbachsen

auf die Form

$$1 = [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T D X \quad (3.5.4)$$

gebracht, mit $X = [x \ y]^T$. Die Rotation dieser Ellipse um einen Winkel θ wird durch die Matrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

beschrieben. Mit der allgemeinen Transformation $Y = R \cdot X$ bzw. der Inversen $X = R^T Y$ wird die ursprüngliche Ellipsengleichung (3.5.4) in die Gleichung

$$Y^T R D R^T Y = 1 \quad (3.5.5)$$

mit $Y = [x' \ y']$ übergeführt, wobei x' und y' die neuen Koordinatenachsen nach der Rotation bezeichnen. Einsetzen von Y, R und D in (3.5.5) ergibt schließlich

$$1^2 = [x' \ y'] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{b^2} \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) & \frac{1}{a^2} \sin^2(\theta) + \frac{1}{b^2} \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.5.6)$$

Wird nun in Gleichung (3.5.3) ds als konstant angenommen, je nachdem, welche Größe (in Streuwerteinheiten) die betrachtete MacAdam-Ellipse hat, ergeben sich durch einen

3 Die PI-LED-Technologie

Koeffizientenvergleich mit Gleichung (3.5.6) die gesuchten Einträge der Matrix G aus

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{a^2} \cos^2(\theta) + \frac{1}{b^2} \sin^2(\theta), \\ g_{12} = g_{21} &= \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \\ g_{22} &= \frac{1}{a^2} \sin^2(\theta) + \frac{1}{b^2} \cos^2(\theta). \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt für den Rotationswinkel θ

$$\tan(2\theta) = \frac{2g_{12}}{g_{11} - g_{22}}.$$

Zu beachten ist, dass die Parameter a und b auf MacAdam1-Ellipsen bezogen sind, da auf der linken Seite von Gleichung (3.5.6) eine 1 steht. Sie sind zusammen mit dem jeweiligen Winkel θ tabelliert⁵ (wodurch sich g_{11} , g_{12} und g_{22} bestimmen lassen), wobei für jene Farborte im CIE-Normvalenzsystem, welche selbst keine Mittelpunkte von MacAdam-Ellipsen sind, Interpolationen auf Basis der bereits bekannten Koeffizienten g_{11} , g_{12} und g_{22} berechnet werden können. Anhand von (3.5.3) kann nun ein Farbabstandsmaß durch

$$\Delta C = \sqrt{g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2} \quad (3.5.7)$$

definiert werden. Dieses gibt an, wie viele Streuwerteinheiten zwischen dem tatsächlich realisierten Farbort und dem Zielfarbort liegen, d.h. wie groß die kleinstmögliche MacAdam-Ellipse um den Zielfarbort ist, innerhalb oder auf welcher der erzeugte Farbort liegt. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass ΔC nur eine Aussage über Farbabstände macht, nicht aber über eventuell vorhandene Helligkeitsunterschiede der zu vergleichenden Farborte. Die Überprüfung der Farbortgenauigkeit kann nun folgendermaßen verwirklicht werden:

$(x_{\text{SOLL}}, y_{\text{SOLL}})$ seien die CIE-Koordinaten des Zielfarborts, der mit einer LED-Lichtquelle realisiert werden soll. Als Beispiel werde die Anforderung gestellt, dass der mit diesem LED-System tatsächlich erzeugte Farbort $(x_{\text{IST}}, y_{\text{IST}})$ im Toleranzbereich MacAdam4 liegen soll, also maximal 4 Streuwerteinheiten vom gewünschten Farbort entfernt. Mit den zum Zielfarbort gehörenden Ellipsenparametern a, b und θ werden die Werte g_{11}, g_{12} und g_{22} gemäß den zuvor aufgelisteten Gleichungen berechnet. Danach wird für $dx = x_{\text{IST}} - x_{\text{SOLL}}$ und $dy = y_{\text{IST}} - y_{\text{SOLL}}$ der Farbabstand ΔC mittels (3.5.7) ermittelt und somit abgefragt, ob der erzeugte Farbort die geforderte Genauigkeit einhält. Es kann also getestet werden, ob

(a) $(x_{\text{IST}}, y_{\text{IST}})$ auf MacAdam4 liegt, d.h.

$$(\Delta C)^2 = 4^2 = g_{11}(x_{\text{IST}} - x_{\text{SOLL}})^2 + 2g_{12}(x_{\text{IST}} - x_{\text{SOLL}}) \cdot (y_{\text{IST}} - y_{\text{SOLL}}) + g_{22}(y_{\text{IST}} - y_{\text{SOLL}})^2$$

gilt, oder ob

⁵Vgl. z.B. G. Wyszecki, W. Stiles: *Color Science: concepts and methods, quantitative data and formulae.* (2000)

(b) $(x_{\text{IST}}, y_{\text{IST}})$ innerhalb des Toleranzbereiches liegt, d.h.

$$(\Delta C)^2 = 4^2 > g_{11}(x_{\text{IST}} - x_{\text{SOLL}})^2 + 2g_{12}(x_{\text{IST}} - x_{\text{SOLL}}) \cdot (y_{\text{IST}} - y_{\text{SOLL}}) + g_{22}(y_{\text{IST}} - y_{\text{SOLL}})^2$$

gilt.

3.5.3 Behandlung ungenauer Farborte

Dieser Abschnitt verwendet Informationen aus [17] und [53].

In Kapitel 3.3 wurde im Zuge der Beschreibung der RGB-Technologie kurz eine mit der Herstellung von LEDs bzw. Die's (ungehäuste Halbleiterchips) verknüpfte Problematik erwähnt: dominante Wellenlängen können nicht exakt reproduziert werden. Dieser Fakt überträgt sich natürlich unmittelbar auf die Produktion von LED-Komponenten, die in der Folge Farborte nicht mehr ausreichend genau wiederholt wiedergeben können. Hier kommt das sogenannte „Binning“ ins Spiel. Die auf dem Modul des jeweiligen Produkts befindlichen LEDs werden vermessen und danach sortiert, d.h. gemäß ihrer Eigenschaften wie erzeugter Farbort, Lichtstrom oder, im Falle von weißem Licht, Farbtemperatur in unterschiedliche Kategorien eingeteilt, um eine genügend konstante Lichtqualität (gleichbleibende Helligkeit und Lichtfarbe) zu gewährleisten. Die PI-LED-Technologie kann sich hier bereits abgrenzen und umgeht die Notwendigkeit des Binnings mit Hilfe einer innovativen Lösung auf Software-Basis. Unter Einsatz eines EEPROMS, d.h. eines Speicherbausteins, können die aus den Messungen der LEDs resultierenden Daten deponiert werden. Da zusätzlich die Temperaturkennlinien der einzelnen LED-Typen abgespeichert werden, kann insgesamt über eine intelligente Steuerung der temperaturabhängigen Verschiebung des Farborts entgegengelenkt und eben dieser konstant gehalten werden. In Kapitel 3.7.1 finden sich ausführliche Beschreibungen darüber, wie dies im Detail funktioniert.

3.6 Das PI-LED-System: Aufbau und Funktionsweise

Ein PI-LED-System, wie im Folgenden mit Hilfe der Ausführungen in [52] und [53] beschrieben, funktioniert durch das Zusammenwirken des LED-Moduls und damit verbundener Elektronik. Anhand von Abbildung 3.15⁶ wird zunächst kurz beschrieben, wie ein PI-LED-System aufgebaut ist, wie es arbeitet und welche Vorgänge dabei im Hintergrund ablaufen⁷. Die prinzipielle Arbeitsweise eines PI-LED-Systems lässt sich in folgende Schritte untergliedern:

- **Datenvermessung und -speicherung:** Im Zuge der Typen- und Modulkalibrierung mit Hilfe der in Kapitel 3.6.3 behandelten Ulbricht-Kugel werden viele verschiedene, wichtige Daten vermessen. Weiters generiert der auf dem LED-Modul befindliche

⁶Die Graphik darf nicht als exakte Abbildung eines PI-LED-Systems verstanden werden! Es handelt sich lediglich um eine Skizze zum besseren Verständnis.

⁷Auf Erläuterungen zu elektronischen Vorschaltgeräten (EVGs) und zur verwendeten Steuertechnologie wird im Rahmen dieser Arbeit zur Gänze verzichtet.

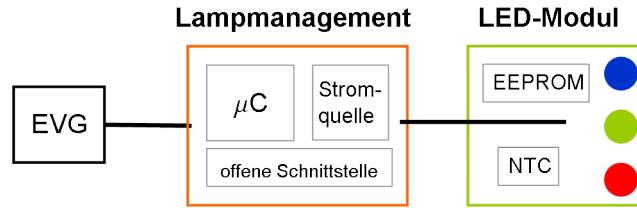


Abbildung 3.15 – Schematischer Aufbau eines PI-LED-Systems (vgl. [53])

NTC (vgl. Kapitel 3.6.4) bestimmte Werte, die den aktuellen Temperaturabhängigkeiten der LEDs entsprechen. All diese Daten werden in das EEPROM gespeichert, einem elektronischen Speicherbaustein, welcher ebenfalls auf dem LED-Modul angebracht ist.

- **Datenweiterleitung und -verarbeitung:** Der Mikrocontroller (μC), der als winzig kleine Computereinheit essentieller Bestandteil des Lampmanagements ist, oder genauer formuliert, der Farbmetriekrechner, mit dem er programmiert ist, wird von den gespeicherten Daten gespeist, lässt diese in die in Kapitel 3.7.1 detailliert beschriebenen Formeln, die ihm zugrunde liegen, einfließen und ermittelt für jeden verwendeten LED-Typ spezielle Werte, die angeben, welche Anteile der in diesem System eingesetzten LEDs für die gewünschte Lichtfarbe eingestellt werden müssen.
- **Korrekte Ansteuerung der LEDs:** Mit den Werten, die der Farbmetriekrechner ausgibt, kann die gewünschte Helligkeit über eine pulsweitenmodulierte Konstantstromquelle realisiert werden.

In dieser Aufzählung sind einige Bauteile bzw. Begriffe enthalten, deren nähere Erklärung in den anschließenden Unterkapiteln erfolgt.

3.6.1 Der Analog-Digital-Umsetzer

Analog-Digital-Umsetzer (kurz ADU), auch als ADCs (Analog-Digital-Converter) bezeichnet und im Rahmen dieses Abschnitts in Anlehnung an [4] und [81] erklärt, bilden die Schnittstelle zwischen Sensoren, wie beispielsweise einem NTC, und digitalen Verarbeitungseinheiten, wie z.B. einem Mikrocontroller μC . Demzufolge werden sie eingebracht, um analoge, kontinuierliche Signale, hauptsächlich Spannungen, in digitale Codes zu transformieren. Die wichtigsten Vorgänge und Begriffe in diesem Zusammenhang werden in der nachfolgenden Aufzählung beschrieben:

- Der **Wandlungsvorgang** lässt sich prinzipiell in **Quantisierung** und **Kodierung** unterteilen. Zunächst wird jener Bereich, den das Eingangssignal umfasst, in N Intervalle gleicher Größe zerlegt. Der ADC misst die eingehenden Amplitudenwerte in bestimmten Zeitabständen und ordnet sie den entsprechenden Intervallen zu (Quantisierung des Signals), welche jeweils Zahlen Z_A entsprechen. Diese sind somit die Resultate der Umsetzung und werden danach wiederum als Binärcodes dargestellt

3.6 Das PI-LED-System: Aufbau und Funktionsweise

(Kodierung). Erfolgt z.B. eine Untergliederung in $N = 8$ Teilintervalle mit den zugehörigen Zahlen 0-7, wie in Abbildung 3.16 dargestellt, wird jedes erfasste Segment der Eingangsgröße auf eines der 8 zur Verfügung stehenden Codewörter abgebildet, für welche in diesem Beispiel je $n = 3$ Bitstellen notwendig sind. Die Bitanzahl n ergibt sich aus

$$2^n = \text{Anzahl der Teilintervalle} = 8.$$

Gleichzeitig ist damit die **Auflösung** des ADCs, die hier $n = 3$ Bit beträgt, definiert. Für die Anzahl N der Quantisierungsintervalle ist automatisch $N = 2^n$ erfüllt. An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, dass eine AD-Umsetzung immer einen durch die Quantisierung bedingten, irreversiblen Informationsverlust mit sich bringt, welcher unter den Begriff des Quantisierungsfehlers fällt.

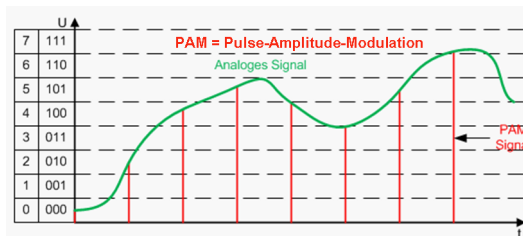


Abbildung 3.16 – Quantisierung und Kodierung (vgl. [81])

- (ii) Für die Festlegung der **Kennlinie eines ADCs** wird der gesamte Spannungsbereich von 0 bis U_{FS} in N gleichen Spannungsintervallen ΔU_E partitioniert, wobei N gleichzeitig die Anzahl an möglichen Zahlen im Zuge der Quantisierung ist. U_{FS} steht für die Full-Scale-Spannung und bezeichnet die wertmäßig obere Begrenzung der Eingangsgröße, wohingegen ΔU_E für die kleinste, anzeigbare Spannungsänderung steht, was

$$\Delta U_E = \frac{U_{FS}}{2^n}$$

für eine n -Bit-Auflösung bedeutet. Die Definition der Kennlinie eines **idealen** Analog-Digital-Umsetzers beruht auf dem Übergang von $Z_A = 0$ auf $Z_A = 1$ bei $\frac{1}{2}\Delta U_E$. Insgesamt ergibt sich daraus die in Abbildung 3.17 dargestellte, treppenförmige Funktion, aus welcher abgelesen werden kann, dass der Stelle $Z_A \cdot U_{FS}/2^n$ jeweils die Zahl Z_A zugeordnet wird. Die Kennlinie selbst wird in der Regel durch den Nullpunkt der analogen Eingangsgröße gelegt.

- (iii) Die **Auflösung** A und der **Quantisierungsfehler** F_Q können nun ebenfalls mit den gerade eingeführten Symbolen erklärt werden. Für A gilt

$$A = \frac{\Delta U_E}{U_{FS}} \cdot 100\% = \frac{1}{2^n} \cdot 100\%,$$

d.h. die Auflösung benennt die Spannungsänderung ΔU_E , bezogen auf U_{FS} . Sie wird häufig in Prozent angegeben.

3 Die PI-LED-Technologie

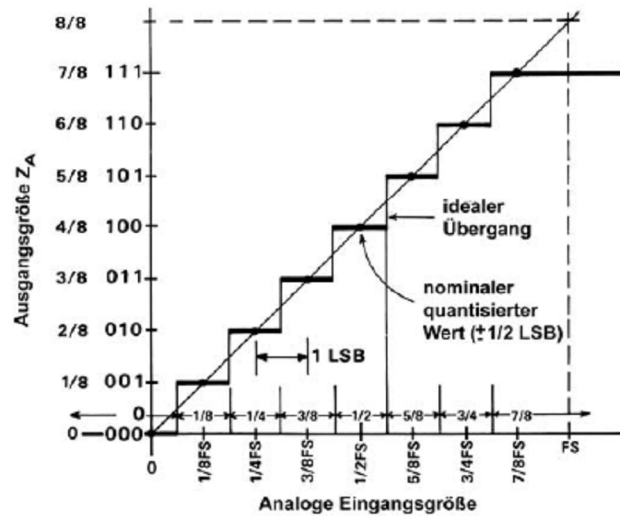


Abbildung 3.17 – Kennlinie eines idealen ADC (vgl. [4])

Um eine Formel für den Quantisierungsfehler F_Q zu erhalten, wird zunächst das LSB (Least Significant Bit)

$$\text{LSB} \hat{=} \frac{U_{\text{FS}}}{2^n} = \Delta U_E$$

als Entsprechung des analogen Werts $U_{\text{FS}}/2^n$ festgelegt. Für das MSB (Most Significant Bit) gilt dann

$$\text{MSB} \hat{=} \frac{U_{\text{FS}}}{2}.$$

Aus Abbildung 3.17 wird schnell ersichtlich, dass sich ausgehend vom Nominalwert NW , d.h. vom Mittelpunkt des jeweiligen Quantisierungsintervalls, die Ausgabe des ADCs erst für $NW \pm \frac{1}{2} \text{ LSB}$ ändert. Umgekehrt kann aus einem speziellen Ausgangswert lediglich auf ein ursprüngliches **Intervall** $[NW - \frac{1}{2} \text{ LSB}, NW + \frac{1}{2} \text{ LSB}]$ geschlossen werden (nicht auf einen speziellen Eingangswert!), welchem die entsprechende Amplitude der Eingangsspannung bei der Quantisierung zugeteilt wird. Die logische Folgerung ist der bereits früher erwähnte Informationsverlust, der sich im Quantisierungsfehler

$$F_Q = \pm \frac{1}{2} \Delta U_E = \pm \frac{1}{2} \text{ LSB}$$

widerspiegelt. Er wird für größer werdende Bitauflösung kleiner.

- (iv) Die **maximale Eingangsspannung** $U_{E,\text{max}}$, die der ADC weiterverarbeitet und die durch

$$U_{E,\text{max}} = U_{\text{FS}} - \frac{3}{2} \cdot \Delta U_E$$

definiert ist, ist jene Spannung, bei welcher der Übergang zum maximalen Zahlenwert erfolgt. In Abbildung 3.17 ist das der Wechsel von 6 auf 7 bzw. von 110 auf 111.

3.6 Das PI-LED-System: Aufbau und Funktionsweise

- (v) Die **Umsetzungszeit** (Conversion Time) kennzeichnet jene Zeit, die vom Beginn des Umsetzungsvorgangs bis zur Ausgabe der fertigen Bitkombination vergeht.
- (vi) Der Einsatz eines Analog-Digital-Umsetzers ist immer mit verschiedenen **Fehlergrößen** gekoppelt. Neben dem bereits behandelten Quantisierungsfehler, welcher nur durch Verbesserung der Auflösung verringert werden kann, können folgende, unerwünschte Effekte auftreten:
- Der **Offsetfehler** (Nullpunktfehler) gibt an, wie weit die reale Kennlinie des ADC von der idealen abweicht (betrachtet im Nullpunkt des Eingangssignals), vgl. Abbildung 3.18 links. Er tritt in der Folge in jedem Punkt auf der Linie auf,

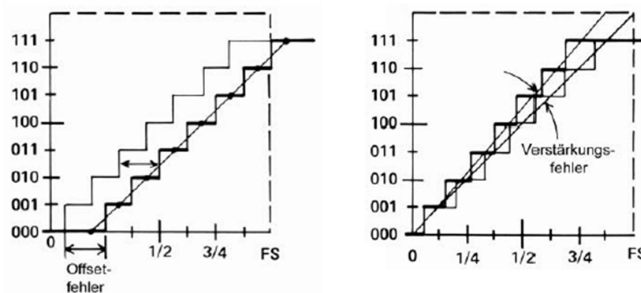


Abbildung 3.18 – Offset- und Verstärkungsfehler (vgl. [4])

kann jedoch abgeglichen werden.

- Durch den **Verstärkungsfehler** kommt es zu einer Änderung der Steigung der tatsächlichen Kennlinie, wie in Abbildung 3.18 in der rechten Graphik dargestellt. Die Referenzsteigung ergibt sich hierbei aus der Tatsache, dass die Kennlinie des idealen ADC aus Abbildung 3.17 mit den Achsen einen Winkel von 45° einschließt. Für die Ermittlung der Größe dieses Fehlers wird jene Stelle betrachtet, an der der Ausgangscode seinen letzten Übergang vollzieht (hier von 110 auf 111). Dieser Stelle entsprechen analoge Werte des realen und idealen ADCs, deren Differenz wiederum den Wert des Verstärkungsfehlers festlegt.
- Der **Linearitätsfehler** ist ein Maß für die prinzipielle Abweichung der Kennlinien, vgl. Abbildung 3.19(a).
- Der **Umsetzfehler** basiert auf der bereits erwähnten Tatsache, dass jeder ADC eine gewisse Umsetzungszeit benötigt und kommt durch eine Änderung der Eingangsgröße während dieser Zeitspanne zustande. Dieser Fehler lässt sich durch Verwendung einer Sample-and-Hold-Schaltung (Abtast-Halte-Schaltung) beheben, wie in Abbildung 3.19(b) skizziert. Das analoge Signal wird dabei abgetastet und für die Dauer der Umsetzung konstant gehalten.
- Wird das Ergebnis der Quantisierung genauer untersucht, ist zu erkennen, dass es zu einer betragsmäßigen Abweichung verschiedener Breiten von Quantisierungstreifen vom gewünschten Wert $\Delta U_E (\cong 1 \text{ LSB})$ kommen kann. Dies wird

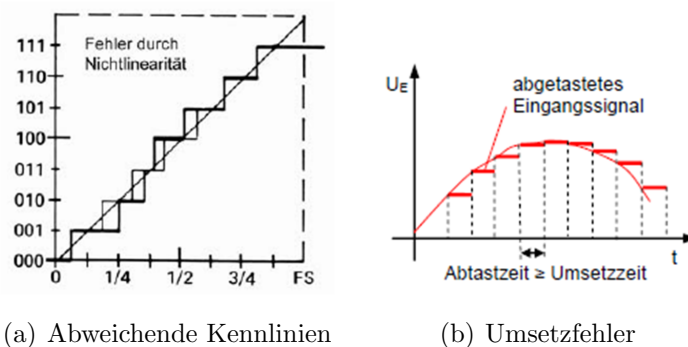


Abbildung 3.19 – Linearitäts- und Umsetzfehler (vgl. [4])

durch die **differentielle Nichtlinearität** angegeben und kann dazu führen, dass Zahlen bzw. Codewörter übersprungen werden und damit im Endergebnis der Kodierung nicht aufscheinen (vgl. Abbildung 3.20).

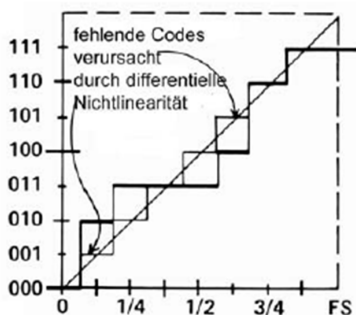


Abbildung 3.20 – Differentielle Nichtlinearität (vgl. [4])

3.6.2 Pulsweitenmodulation

Bei der im Anschluss anhand von [3], [43, S. 51-52] und [107] beschriebenen Pulsweitenmodulation (PWM) wechselt eine bestimmte Größe zwischen zwei Werten, was, grafisch dargestellt, in einer Rechteck-Puls-Folge Ausdruck findet. Dieser Wechsel findet bei konstanter Frequenz bzw. konstanter Periodendauer abhängig vom sogenannten Tastgrad (duty cycle) D mit

$$D = \frac{\tau}{T}$$

statt, der als das Verhältnis von der Impulsdauer τ zur Periodendauer T definiert ist. Der Tastgrad und somit auch die Breite eines solchen Rechteckimpulses werden moduliert, sodass die durchschnittliche Amplitude variiert (vgl. Abbildung 3.21). Der Mittelwert einer Funktion $f(t)$, die sich, wie in Abbildung 3.22 dargestellt, aus Rechteckimpulsen

3.6 Das PI-LED-System: Aufbau und Funktionsweise

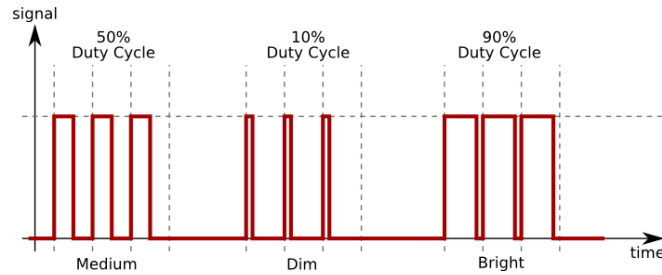


Abbildung 3.21 – PWM mit verschiedenen Tastgraden (vgl. [3])

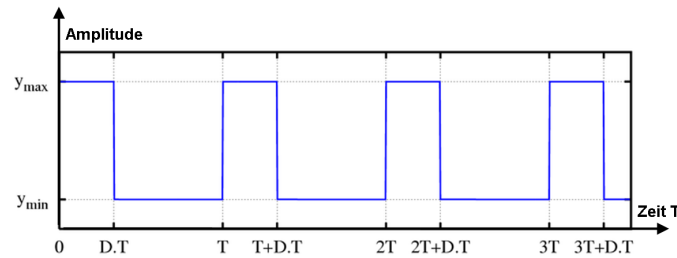


Abbildung 3.22 – Rechteckimpulse (vgl. [107])

zusammensetzt und deren minimaler bzw. maximaler Wert mit y_{\min} bzw. y_{\max} bezeichnet werden, berechnet sich aus

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= y_{\max} & \text{für} & \quad 0 < t < DT = \tau \\ f(t) &= y_{\min} & \text{für} & \quad DT = \tau < t < T. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{DT} y_{\max} dt + \int_{DT}^T y_{\min} dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} (y_{\max} \cdot DT + y_{\min}(T - DT)) = \\ &= Dy_{\max} + (1 - D)y_{\min}, \end{aligned}$$

und, vereinfacht für $y_{\min} = 0$,

$$\bar{y} = Dy_{\max}.$$

Der Mittelwert \bar{y} des Signals $f(t)$ zeigt also eine direkte Abhängigkeit vom Tastgrad D . Dies kann nun direkt auf die Verwendung von LEDs, und zwar für die Helligkeitsregelung bzw. Dimmung, umgelegt werden und beruht auf der Trägheit des menschlichen Auges: Lichtimpulse, die in zeitlich ausreichend kurzen Abständen in das Auge fallen, können von diesem nicht mehr realitätsgetreu als einzelne Impulse verarbeitet werden, sondern werden als gleichmäßiger Helligkeitseindruck empfunden, welcher sich, wie soeben berechnet, durch

Integration der Pulse ergibt. Zu beachten ist also eine ausreichend hohe Schaltfrequenz der Pulsweitenmodulation, um das Auge auszutricksen.

3.6.3 Ulbricht-Kugeln

Mit Hilfe von Ulbricht-Kugeln, für deren Behandlung in diesem Kapitel die Quellen [34], [72], [97], [98] und [117] herangezogen werden und deren Aufbau bzw. Gestalt in Abbildung 3.23 dargestellt ist, lassen sich unter anderem Lichtstrom- und Spektrummessungen durchführen. Im Zusammenhang mit PI-LED werden sie eingesetzt, um wichtige, modulspezifische Daten, die Ausgangspunkt für alle weiteren Berechnungen sind, zu vermessen. Darauf wird in Kapitel 3.7 noch genauer eingegangen. Die Ulbricht-Kugel ist eine hoh-



Abbildung 3.23 – Ulbricht-Kugel (vgl. [72], [34])

le Kugel, deren innere Oberfläche diffus reflektierend ist. Weiters sind zwei oder mehrere kleine Öffnungen für den Lichteinfall und zur Befestigung von Photodetektoren oder sogenannten „Baffles“ (Lichtabschirmungen zur Verhinderung der direkten Beleuchtung eines Detektors durch die Lichtquelle) vorhanden. Die besondere Beschaffenheit der Oberfläche auf der Innenseite gründet auf dem Lambertschen Gesetz, laut welchem die Stärke der Strahlung, die von einem Flächenelement ausgesandt wird, mit flacher werdendem Abstrahlungswinkel abnimmt. Einen Sonderfall bilden die sogenannten Lambert-Flächen: Es handelt sich dabei um Flächenelemente, bei denen die Strahlungsstärke bis auf die eben genannte keine weitere Winkelabhängigkeit aufweist und somit eine nach allen Richtungen konstante Strahlungsdichte vorliegt, was gleichbedeutend mit einer wie in Abbildung 3.24 (linke Graphik) skizzierten ideal diffusen Reflexion ist. Mathematisch formuliert und mit

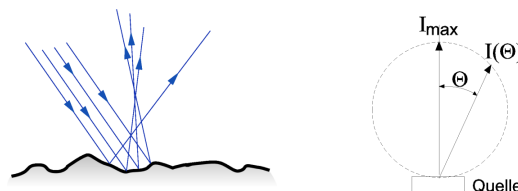


Abbildung 3.24 – Diffuse Reflexion und Lambertsches Gesetz (vgl. [97], [98])

den Bezeichnungen der rechten Graphik in Abbildung 3.24 gilt für die Leuchtdichte L einer Lambert-Fläche der Größe A

$$L = \frac{I(\theta)}{A \cos(\theta)}$$

Ist dieser Zusammenhang für alle Oberflächenelemente einer Lichtquelle erfüllt, spricht man von einem Lambert-Strahler. Ein solcher wird eben durch die Ulbricht-Kugel simuliert, d.h. Licht wird an ihrer Innenseite nicht gemäß dem Reflexionsgesetz, sondern dem Lambertschen Gesetz gehorchend beliebig diffus zurückgestreut. Dies bedeutet, dass sich das auf die Fläche einfallende Licht gleichmäßig verteilt.

3.6.4 NTC-Widerstände

NTC-Widerstände („Negative Temperature Coefficient Thermistors“), oder auch Heißleiter genannt, deren Beschreibung auf Basis von [41, S. 98], [83] und [101] vorgenommen wird, werden aus speziellen Halbleitermaterialien hergestellt und zeichnen sich durch einen negativen Temperaturkoeffizienten TK_R aus. Sie zählen zu den Thermistoren, d.h. elektrischen Widerständen, die eine nichtlineare Abhängigkeit von der Temperatur aufweisen. Für den Widerstandswert R_T eines NTCs gilt

$$R_T = R_0 \cdot e^{-B\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}, \quad (3.6.1)$$

wobei B eine Materialkonstante und R_0 den Bezugswiderstand bei Bezugstemperatur T_0 , welche üblicherweise 25°C bzw. 298.16K beträgt, bezeichnen und vom Hersteller im Datenblatt angegeben werden, während T die Betriebstemperatur meint. Daraus wird ersichtlich, dass sich der Widerstandswert R_T bei steigender Temperatur reduziert und Strom somit besser bei hohen als bei niedrigen Temperaturen geleitet wird. Abbildung 3.25 veranschaulicht diese Eigenschaft für zwei unterschiedliche Bezugswiderstände. Aus (3.6.1) folgt für

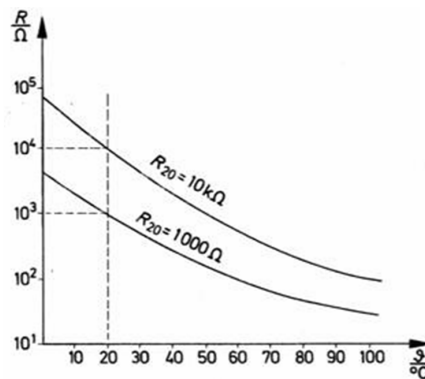


Abbildung 3.25 – Kennlinien eines NTC (vgl. [83])

die Temperaturabhängigkeit des Koeffizienten TK_R

$$TK_R = \frac{dR_T}{dT} \cdot \frac{1}{R_T} = -\frac{B}{T^2}.$$

Wird der NTC nun mit einem konstanten Strom I_0 gespeist, ergibt sich für die korrespondierende Spannung

$$U_T = I_0 R_T = I_0 R_0 \cdot e^{-B\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}.$$

3 Die PI-LED-Technologie

Eine weitere Möglichkeit, die Beziehung zwischen Temperatur und Widerstandswert eines NTC formelmäßig zu erfassen, ist durch die Steinhart-Hart-Gleichung

$$\frac{1}{T} = a + b \ln(R_T) + c (\ln(R_T))^3,$$

mit konstanten Koeffizienten a , b und c gegeben.

NTCs werden zur Temperaturüberwachung bzw. -kompensation eingesetzt: An der jeweiligen Stelle, an der die Temperatur registriert werden soll, ist es Aufgabe des NTCs, diese Temperatur so genau wie möglich anzunehmen und sie in einen auswertbaren Widerstand abzuwandeln.

Aufbauend auf dem Verständnis für die grundlegenden Vorgänge, die die Funktionsweise eines PI-LED-Systems erklären, kann nun der Farbmetriekrechner, das tatsächliche „Herzstück“ der Technologie, behandelt werden, über den alle zur Erzeugung des gewünschten Lichts notwendigen Berechnungen laufen.

3.7 Farbsteuerung im PI-LED-System - der Farbmetriekrechner

Die gesamten Abhandlungen dieses Abschnitts beruhen auf folgenden, hauptsächlich von Lumitech zur Verfügung gestellten Quellen: [35], [49] und [52].

Ausgangspunkt für alle nachfolgenden Berechnungen ist die Kalibrierung des jeweiligen LED-Moduls zur Vermessung diverser Rohdaten, die, wie in Kapitel 3.6.3 beschrieben wurde, praktisch mit Hilfe einer Ulbricht-Kugel realisiert wird. Dabei wird zwischen der Typenkalibrierung, die pro Modultyp genau einmal durchgeführt wird, und der Modulkalibrierung, die für jedes einzelne LED-Modul notwendig ist, unterschieden:

Typenkalibrierung: Aus früheren Kapiteln ist bekannt, dass die dominante Wellenlänge einer LED und damit der zu erzeugende Farbort, der durch seine Tristimuluswerte X , Y und Z charakterisiert wird, temperaturabhängig ist. Um die zugrundeliegenden Temperaturfunktionen zu bestimmen, werden zunächst die LEDs mit voller Leistung in Betrieb gesetzt. Ihre Eigenerwärmung impliziert insgesamt eine Temperaturerhöhung des LED-Moduls von ca. 5°C auf ca. 84°C innerhalb einer gewissen Zeitspanne, in welcher periodisch Messungen durchgeführt werden. Die Datenauswertung ergibt lineare Temperaturkurven⁸

$$f_T = k \cdot \text{ADC} + d.$$

⁸Dieser lineare Zusammenhang entsteht nicht „automatisch“, sondern wird einfachheitshalber als Näherung der vermessenen Daten angenommen. Genauere Ausführungen dazu sind in Kapitel 3.7.1 zu finden, neue Approximationsideen in Kapitel 4.4.2.

3.7 Farbsteuerung im PI-LED-System - der Farbmetrikrechner

Bei einer Ausgangstemperatur von etwa 28.1°C , was bei einer 10 Bit-Auflösung einem ADC-Wert von 821 entspricht, bedeutet dies für vollen Betrieb

$$100 = k \cdot 821 + d.$$

Aufgrund dieses linearen Zusammenhangs resultieren aus der Typenkalibrierung sowohl bestimmte Steigungen kX, kY, kZ als auch bestimmte Offsets dX, dY, dZ der Temperaturabhängigkeit von X, Y, Z (wie diese tatsächlich erhalten werden, ist in Kapitel 3.7.1 beschrieben). Dies gilt natürlich für jede der verwendeten LED-Farben Phosphor, Rot und Blau.

Modulkalibrierung: Bei ca. 28.1°C werden die Tristimuluswerte X, Y, Z für alle Farben ermittelt.

Die Basis der zu lösenden Aufgabe bilden die CIE-Koordinaten $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ des gewünschten Zielfarborts, den das LED-System wiedergeben soll. Um dies zu bewerkstelligen, müssen die Verstärkungen $g_P, g_B, g_R \in [0, 1]$ der zur Verfügung stehenden Kanäle Phosphor, Blau und Rot, die nötig sind, um den Zielfarbort zu erreichen, berechnet werden. Dafür werden die aus der Kalibrierung und vom NTC erhaltenen Daten verwendet. Die Aufgabenstellung lautet somit:

Gegeben:

$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$...Zielfarbort

X, Y, Z ...Tristimuluswerte, erhalten aus der Modulkalibrierung

kX, kY, kZ ...Steigungen der Temperaturabhängigkeit der Tristimuluswerte, erhalten aus der Typenkalibrierung

dX, dY, dZ ...Offsets der Temperaturabhängigkeit der Tristimuluswerte, erhalten aus der Typenkalibrierung

ADC_{NTC} ...aktueller Wert des NTC

Gesucht:

g_P, g_B, g_R ...Verstärkungen der Kanäle Phosphor, Blau, Rot.

Ziel ist es, dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Dazu werden zunächst im anschließenden Kapitel das bislang verwendete Verfahren und in Kapitel 4 schließlich ein neues Rechenmodell vorgestellt und erklärt.

3.7.1 Algorithmus zur Farbsteuerung

Über den NTC werden permanent die maximale Temperatur bzw. die Warntemperatur überwacht und die aktuelle Modultemperatur abgefragt, um die Tristimuluswerte der verwendeten LEDs ständig bzgl. ihrer Temperaturabhängigkeit anpassen zu können. Die im Folgenden zur Lösung der Aufgabe herangezogenen Formeln werden somit nicht nur einmal, sondern laufend (je nach Verhalten des LED-Moduls) angewandt.

Schritt 1: Temperaturanpassung

Anhand der gegebenen Daten erfolgt die Berechnung der aktuell gültigen Tristimuluswerte $X_{\text{temp}}, Y_{\text{temp}}, Z_{\text{temp}}$ durch die Formelkette

$$\begin{aligned} X_{\text{temp}} &= X \cdot \frac{(\text{ADC}_{\text{NTC}} \cdot kX + dX)}{100}, \\ Y_{\text{temp}} &= Y \cdot \frac{(\text{ADC}_{\text{NTC}} \cdot kY + dY)}{100}, \\ Z_{\text{temp}} &= Z \cdot \frac{(\text{ADC}_{\text{NTC}} \cdot kZ + dZ)}{100}, \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

was für jede Farbe (Phosphor, Rot, Blau) durchgeführt werden muss. Diese Rechenvorschriften beruhen auf den linearen Trendkurven, hier allgemein mit

$$f(x) = k \cdot \underbrace{\text{ADC}_{\text{NTC}}}_x + d$$

bezeichnet, welche folgendermaßen hergeleitet werden:

(a) Im Zuge der in Kapitel 3.7 erwähnten Typenkalibrierung werden die temperaturabhängigen Tristimuluswerte $X_{\text{temp}}, Y_{\text{temp}}$ und Z_{temp} für alle Farben über einen Temperaturbereich von circa 5°C bis circa 84°C vermessen.

(b) Danach werden diese Daten in Prozent dargestellt. Dazu dient als Referenzwert, der 100% entspricht, jener Tristimuluswert, der aus der Modulkalibrierung (MK) resultiert. Anhand von $X_{\text{MK}}, Y_{\text{MK}}$ und Z_{MK} (für alle Farben) können nun für alle anderen, gemessenen Tristimuluswerte die zugehörigen Prozentzahlen berechnet werden.

(c) Im nächsten Schritt werden für alle Farben und für alle Tristimuluskoordinaten die linearen Trendkurven (normiert auf %) bestimmt, indem einfach die beiden zum kleinsten und zum größten ADC_{NTC} -Wert gehörenden Punkte (angegeben in %) verbunden werden. Daraus ergeben sich die Werte für k und d .

(d) Damit sind aber bereits die Formeln in (3.7.1) erklärt, welche sich einfach durch Umkehrung der gerade erläuterten Vorgangsweise ergeben: Die gesuchten, der aktuellen Temperatur bzw. dem aktuellen ADC_{NTC} -Wert entsprechenden und zu einer der drei Farben gehörenden Tristimuluswerte sind klarerweise mittels

$$\begin{aligned} X_{\text{temp},\%} &= kX \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dX, \\ Y_{\text{temp},\%} &= kY \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dY, \\ Z_{\text{temp},\%} &= kZ \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dZ \end{aligned}$$

zu bestimmen. Um auf eine für spätere Berechnungen notwendige Darstellung im Intervall $[0, 1]$ zu kommen, werden die Schlussrechnungen

$$kX \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dX = X_{\text{temp},\%} \dots\dots\dots X_{\text{temp}} = ?$$

3.7 Farbsteuerung im PI-LED-System - der Farbmetrikrechner

$$kY \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dY = \overset{100\% \dots \dots \dots Y_{\text{MK}}}{Y_{\text{temp},\%} \dots \dots \dots Y_{\text{temp}}} = ?$$

$$kZ \cdot \text{ADC}_{\text{NTC}} + dZ = \overset{100\% \dots \dots \dots Z_{\text{MK}}}{Z_{\text{temp},\%} \dots \dots \dots Z_{\text{temp}}} = ?$$

gelöst, woraus die Rechenvorschriften in (3.7.1) folgen. An dieser Stelle sind folgende zwei Bemerkungen wichtig:

- Wird das Formelsystem (3.7.1) zur Bestimmung der zugehörigen, der aktuellen Temperatur entsprechenden CIE-Farborde verwendet, können die Werte für X_{MK} , Y_{MK} und Z_{MK} , die im Allgemeinen nicht im Intervall $[0, 1]$ liegen, unverändert eingesetzt werden.
- Wird das Formelsystem (3.7.1) zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren für den zu erzeugenden Zielfarborde verwendet, müssen die Werte für X_{MK} , Y_{MK} und Z_{MK} durch 10 dividiert werden, um insgesamt eine Darstellung der temperaturabhängigen Tristimuluswerte im Intervall $[0, 1]$ zu erhalten.

Schritt 2: Farbortkontrolle

Die Überprüfung, ob der Zielfarborde $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ im aktuellen, den temperaturangepassten Tristimuluswerten entsprechenden Farbdreieck liegt, dient bei positivem Ergebnis als Bestätigung dafür, dass der gewünschte Farborde überhaupt dargestellt werden kann. Dazu müssen zunächst unter Zuhilfenahme der in Schritt 1 ermittelten Tristimuluswerte die momentanen Eckpunkte von Phosphor, Rot und Blau, hier mit

$$(x_{\text{Eck,P}}, y_{\text{Eck,P}}), (x_{\text{Eck,R}}, y_{\text{Eck,R}}), (x_{\text{Eck,B}}, y_{\text{Eck,B}})$$

bezeichnet, mit Hilfe der Formeln (1.3.13) bestimmt werden. Dies liefert

$$x_{\text{Eck,P}} = \frac{X_{\text{temp,P}}}{X_{\text{temp,P}} + Y_{\text{temp,P}} + Z_{\text{temp,P}}},$$

$$y_{\text{Eck,P}} = \frac{Y_{\text{temp,P}}}{X_{\text{temp,P}} + Y_{\text{temp,P}} + Z_{\text{temp,P}}}.$$

Der Index P steht für die LED-Farbe Phosphor; für die Farben Rot und Blau verlaufen die Berechnungen natürlich analog (die jeweiligen temperaturbewerteten Tristimuluswerte wurden im vorhergehenden Schritt ermittelt).

Die eruierten Eckpunktkoordinaten ermöglichen es, die Geradengleichungen der Form $g(x) = kx + d$ für alle drei Verbindungsgeraden, die das Farbdreieck beranden, aufzustellen. Als Beispiel wird hier die Gerade, die die Punkte zu den Farben Blau und Phosphor verbindet, betrachtet. Ihre Parameter k und d ergeben sich durch Lösen des Gleichungssystems

$$g(x_{\text{Eck,P}}) = kx_{\text{Eck,P}} + d = y_{\text{Eck,P}},$$

$$g(x_{\text{Eck,B}}) = kx_{\text{Eck,B}} + d = y_{\text{Eck,B}}$$

3 Die PI-LED-Technologie

und lauten

$$k = \frac{y_{\text{Eck,P}} - y_{\text{Eck,B}}}{x_{\text{Eck,P}} - x_{\text{Eck,B}}},$$
$$d = y_{\text{Eck,B}} - \frac{y_{\text{Eck,P}} - y_{\text{Eck,B}}}{x_{\text{Eck,P}} - x_{\text{Eck,B}}} \cdot x_{\text{Eck,B}}.$$

Die Verbindungsgeraden Blau-Rot und Phosphor-Rot werden analog bestimmt, woraus insgesamt drei lineare Funktionen $g(x) = kx + d$ resultieren. In jede davon wird nun die x -Koordinate des gewünschten Farborts ($x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}$) eingesetzt, was drei Funktionswerte y_1 , y_2 und y_3 ergibt, für welche folgende Bedingungen verifiziert werden:

Geradengleichung Blau - Phosphor :	$y_{\text{Ziel}} < y_1$
Geradengleichung Phosphor - Rot :	$y_{\text{Ziel}} < y_2$
Geradengleichung Rot - Blau :	$y_{\text{Ziel}} > y_3$

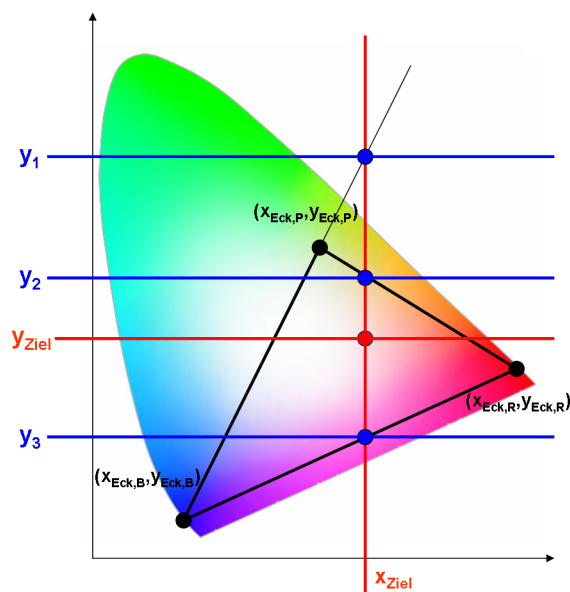


Abbildung 3.26 – Farbortkontrolle (vgl. [35])

Die Erfüllung dieser drei Bedingungen gewährleistet, dass der Zielfarbort ($x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}$), wie in Abbildung 3.26 gezeigt, tatsächlich im aktuellen Farbdreieck liegt. Wird hingegen mindestens eine der Bedingungen verletzt, kann der gewünschte Farbort nicht dargestellt werden, was durch ein kurzes Blinken der LEDs signalisiert wird. Beim Anschluss von mehreren LED-Modulen an die Elektronik gilt es, diese Kontrollberechnung für jedes Modul durchzuführen, da sinnvollerweise ein bestimmter Farbort nur dann zu erreichen sein sollte, wenn alle LED-Module dies unterstützen.

Schritt 3: Berechnung der Verstärkungsfaktoren

Um eine Antwort darauf zu erhalten, welche Anteile jeder verwendeten LED-Farbe in jener Lichtfarbe, die dem gewünschten Farbort $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ entspricht, enthalten sind, müssen die korrespondierenden Verstärkungsfaktoren g_P, g_B und g_R ermittelt werden. Dabei sind folgende Aspekte wichtig:

- Die Grundformeln (1.3.13) müssen in Anbetracht der Tatsache, dass mehrere LEDs zur Erzeugung des Zielfarborts (additiven Farbmischung) eingesetzt werden, entsprechend abgeändert werden.
- Mit den für die nachfolgenden Berechnungen benötigten Tristimuluswerte sind stets die temperaturangepassten Werte gemeint. Auf den zuvor eingeführten Index „temp“ wird im weiteren Verlauf verzichtet, stattdessen werden, um einen besseren Überblick zu behalten, die Variablen je nach Farbe mit den Indizes P, R und B versehen.

Zu ersetzen sind also

$$\begin{aligned} X &\text{ durch } X_P + X_R + X_B, \\ Y &\text{ durch } Y_P + Y_R + Y_B \text{ und} \\ Z &\text{ durch } Z_P + Z_R + Z_B. \end{aligned}$$

Dies führt, den Nenner etwas umgeformt, auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{\text{Ziel}} &= \frac{g_P X_P + g_R X_R + g_B X_B}{g_P(X_P + Y_P + Z_P) + g_R(X_R + Y_R + Z_R) + g_B(X_B + Y_B + Z_B)}, \\ y_{\text{Ziel}} &= \frac{g_P Y_P + g_R Y_R + g_B Y_B}{g_P(X_P + Y_P + Z_P) + g_R(X_R + Y_R + Z_R) + g_B(X_B + Y_B + Z_B)}. \end{aligned}$$

Für die Lösung dieses Gleichungssystems ist es naheliegend, aus einer der beiden Gleichungen, z.B. aus der Gleichung für x_{Ziel} , einen der drei Verstärkungsfaktoren, z.B. g_R auszudrücken, und diesen dann in die verbleibende Gleichung einzusetzen. Offensichtlich liegt hier jedoch ein unterbestimmtes Gleichungssystem vor. Um diese Problematik zu beheben, wird die Voraussetzung $g_P = 1$ getroffen, welche daher rührt, dass entlang der Planck’schen Kurve tatsächlich der Verstärkungsfaktor für die Phosphor-LED fast überall gleich Eins und diese Wahl damit plausibel ist. Somit ist nun ein System von zwei Gleichungen für die zwei Unbestimmten g_R, g_B zu lösen. Durch einfaches Umstellen lässt sich diese Aufgabe in der kompakten Form

$$M \cdot \underline{g} = \underline{f} \tag{3.7.2}$$

darstellen; hierbei sind die Systemmatrix M durch

$$M = \begin{pmatrix} (x_{\text{Ziel}} - 1)X_R + x_{\text{Ziel}}(Y_R + Z_R) & (x_{\text{Ziel}} - 1)X_B + x_{\text{Ziel}}(Y_B + Z_B) \\ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_R + y_{\text{Ziel}}(X_R + Z_R) & (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_B + y_{\text{Ziel}}(X_B + Z_B) \end{pmatrix}$$

3 Die PI-LED-Technologie

und die Vektoren \underline{g} und \underline{f} durch

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} g_R \\ g_B \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = g_P \cdot \begin{pmatrix} (1 - x_{\text{Ziel}})X_P - x_{\text{Ziel}}(Y_P + Z_P) \\ (1 - y_{\text{Ziel}})Y_P - y_{\text{Ziel}}(X_P + Z_P) \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei, wie zuvor erklärt, zunächst $g_P = 1$ gesetzt wird.

Die Lösungen des Gleichungssystems, d.h. die Verstärkungsfaktoren g_R und g_B , müssen aus dem Intervall $[0, 1]$ sein. Falls jedoch eines der Resultate größer als Eins ist, müssen der Faktor g_P , der als identisch Eins angenommen wurde, und jener Koeffizient, der bereits im Intervall $[0, 1]$ liegt, durch diesen betroffenen Wert dividiert werden. Sind beide ermittelten Faktoren g_B und g_R größer als Eins, werden g_P und der wertmäßig kleinere der beiden berechneten Koeffizienten durch den wertmäßig größeren dividiert. Diese Nachbehandlungen bewirken, dass alle Verstärkungsfaktoren Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Werden die einzelnen, auf dem LED-Modul befindlichen Leuchtdioden nun mittels pulsweitenmoduliertem Strom, wie in Kapitel 3.6.2 erklärt, betrieben, bedeutet dies, dass die angeschlossenen LEDs je nach Impulsbreite τ bzw. Tastgrad D unterschiedlich hell leuchten. Genau an dieser Stelle kommen die gerade berechneten Verstärkungsfaktoren g_P, g_R und g_B ins Spiel. Um zusätzlich zur korrekten Farbe auch die gewünschte Helligkeit zu realisieren, die durch einen Wert zwischen 0 und 1 charakterisiert ist, wird diese einfach mit allen drei Faktoren multipliziert. Dies ergibt eine Zahl, die wieder zwischen 0 und 1 liegt und nun mit dem Maximalwert τ des PWM-Generators multipliziert wird. Anschließend muss das Endergebnis nur noch dem jeweiligen PWM-Kanal zugewiesen werden, welcher dann die richtige Impulsbreite und somit die korrekte Helligkeit umsetzt.

3.8 Problemfaktor Farbortungenauigkeit

Die in den vorangehenden Kapiteln vorgestellte und umfassend beschriebene PI-LED-Technologie beeindruckt in vielerlei Hinsicht und erfüllt die wichtigsten Anforderungen in einem äußerst zufriedenstellenden Ausmaß. Jedoch gibt es auch im Rahmen dieser ausgefeilten LED-Lösung nach wie vor Toleranzbereiche, innerhalb derer Verbesserungen möglich und erwünscht sind und daher natürlich angestrebt werden - ein Optimierungsbedarf und -potential ist demzufolge vorhanden. Eine der Zielsetzungen, um PI-LED-Systeme auf ein noch höheres Niveau zu heben, ist eine Farbortgenauigkeit, die bis zu MacAdam2 reicht. Dies bedeutet, wie ausführlich in Kapitel 3.5 erklärt wurde, dass die tatsächlich erzeugten Lichtfarben innerhalb von MacAdam-Ellipsen einer Größe von zwei Streuwerteinheiten um die zu realisierenden Zielfarborte liegen. Die Abweichungen wären damit ausgesprochen gering. Im Folgenden soll erarbeitet werden, welche Einflussfaktoren überhaupt zu Farbortverschiebungen bei PI-LED-Systemen führen und wo noch Fortschritte und Weiterentwicklungen gemacht werden können.

3.8.1 Beschreibung der Ursachen

Für die nachfolgende Auflistung verschiedener Ursachen, die eine ungenaue Realisierung des gewünschten Farborts begünstigen, sei an dieser Stelle auf [50], [77] und [108] verwiesen.

Ein hilfreiches Mittel, um verschiedene Auslöser, die eine Abweichung vom Zielfarbort bewirken, graphisch darzustellen, ist das in Abbildung 3.27 gezeigte Ishikawa-Diagramm, angewandt auf PI-LED-Systeme. Dieses stammt prinzipiell vom japanischen Wissenschaftler Ishikawa Kaoru und bringt ein beliebiges Problem mit seinen Ursachen in Zusammenhang (Ursache-Wirkungs-Diagramm). Es kann beliebig tief verzweigt werden, je nachdem, wie

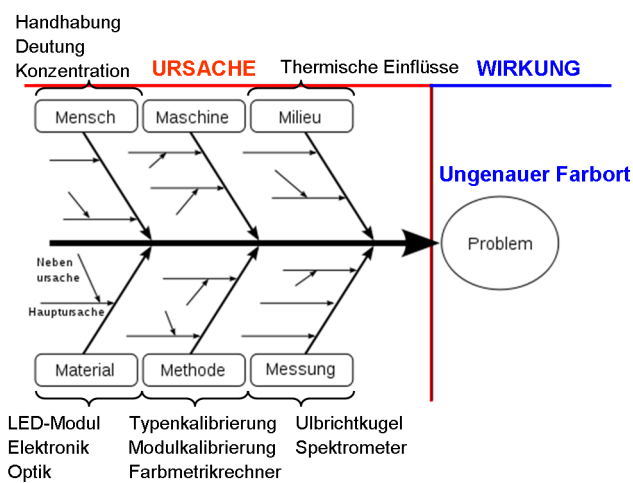


Abbildung 3.27 – Ishikawa-Diagramm (vgl. [108])

verschachtelt die Gründe für das betrachtete Problem sind. Basierend auf dem Diagramm gibt die anschließende Auflistung einen Überblick über einige hier auftretende Faktoren, die für nicht exakt generierte Farborte verantwortlich sind:

- (i) **Faktor „Mensch“:** Die Beschäftigung von Mitarbeitern ist unvermeidlich mit eventuellen Bedienungsfehlern verbunden, die beispielsweise bei der Typen- und Modulkalibrierung passieren können, möglicherweise zunächst unbemerkt bleiben und sich erst zu einem späteren Zeitpunkt auswirken. Genauso kann es zu Messfehlern oder Fehlinterpretationen der Messergebnisse kommen. Eine angemessene Ausbildung und Schulung bilden die Grundlage dafür, das Risiko für Irrtümer dieser Art zu minimieren; jedoch wird dieses nie zur Gänze ausgemerzt werden können, da es in der Natur des Menschen liegt, Fehler zu machen.
- (ii) **Faktor „Milieu“:** Die möglichen thermischen Effekte sind hier
 - Lufterwärmung in der Ulbricht-Kugel,
 - Stromänderung bei Erwärmung der Konstantstromquelle,

3 Die PI-LED-Technologie

- Abhängigkeit der vom NTC wahrgenommenen Temperatur von der Umgebungstemperatur.
- (iii) **Faktor „Messung“:** Die in Kapitel 3.6.3 behandelte Ulbricht-Kugel ist für ihre Messungszwecke mit einem Spektrometer gekoppelt, welches sich in seiner Funktionsweise dadurch auszeichnet, die vorkommenden Wellenlängen nicht gleichzeitig, sondern zeitlich nacheinander zu registrieren. Daher ist darauf zu achten, eine genügend lange Integrationszeit im Vergleich zur Periodendauer der Pulsweitenmodulation des LED-Stroms festzulegen, damit ausreichend viele Pulse erfasst werden können. Ist diese Zeit nicht adäquat gewählt, kann es zu Verfälschungen der Messresultate kommen. Weitere Fragen, die in diesem Zusammenhang aufgeworfen werden, sind folgende:
- Wie viele Kommastellen müssen für eine zufriedenstellende Genauigkeit berücksichtigt werden?
 - In Kapitel 3.7.1 wurde für die Typenkalibrierung erklärt, dass diese nur einmal pro LED-Modultyp vorgenommen wird, aber ist dies für die sich daraus ergebenden Daten ausreichend? Könnte es sein, dass bei wiederholter Durchführung nicht zu vernachlässigende Abweichungen der Messergebnisse auftreten?
- (iv) **Faktor „Material“:** Die wichtigsten Aspekte in diesem Bereich betreffen das LED-Modul und die Elektronik.
- LED-Modul:** Hier ist zu beachten, dass sowohl der NTC als auch die einzelnen LEDs ein gewisses Alterungsverhalten aufweisen. Der Temperaturgang einer LED, welcher bekanntlich einen merklichen Einfluss auf die dominante Wellenlänge ausübt, fließt über den NTC in die Typenkalibrierung ein und wird im Anschluss im Unterpunkt „Methode“ beschrieben. Ebenfalls von Interesse ist der Zusammenhang zwischen dem Lichtstrom und dem Tastgrad des gepulsten Betriebstroms, welcher als linear angenommen wird, was im Allgemeinen allerdings nur näherungsweise gilt; als Ergebnis tatsächliches Fading zu erhalten, d.h. stufenloses Dimmen von LEDs, welches diese Linearität zum Ausdruck bringen würde, ist oft nicht erfüllt. Dies ist in der nichtlinearen, beinahe logarithmischen Kennlinie des menschlichen Auges begründet.
- Elektronik:** Wesentlich sind an dieser Stelle die verwendeten Auflösungen der AD-Wandler und das kaufmännische Runden.
- (v) **Faktor „Methode“:** In dieser Kategorie treten viele Erscheinungen auf, wie z.B. das Mitglimmen der blauen LED bei der Vermessung von Phosphor und Rot oder die Fremdanregung von Phosphor bei der Vermessung von Blau im Zuge der Typen- und Modulkalibrierung. Besonders hervorzuheben ist hier die getroffene Annahme, dass die Tristimuluswerte, die direkt in die Formeln des Farbmetriekrechners einfließen, linear von der vom NTC erfassten Temperatur abhängen und auch dementsprechend laufend angepasst werden. Man könnte daher hinterfragen, ob diese Annahme zu einfach ist, und überlegen, wie groß die Unterschiede im Vergleich zu komplexeren Voraussetzungen sind.

3.8 Problemfaktor Farbortungenaugigkeit

Mit den bisherigen drei Kapiteln ist der Grundstein für weiterführende Überlegungen mit dem Ziel, bestmögliche LED-Lichtsysteme zu entwickeln, gelegt. In den nachfolgenden Abschnitten wird ein neues mathematisches Modell für einen Farbmetriekrechner hergeleitet, untersucht und mit dem bisher angewandten Rechenmodell verglichen. Außerdem wird noch näher auf einen der zuvor erwähnten Punkte zum Thema Farbortungenaugigkeit eingegangen, nämlich auf die Annahme der linear verlaufenden Temperaturkurven der Tristimuluswerte. Hierfür werden Approximationsansätze zur genaueren Darstellung der vermessenen Temperaturkurven vorgeschlagen und analysiert.

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

Ziel dieses Kapitels ist es, das Gleichungssystem (3.7.2), welches dem Farbmetrikrechner zugrunde liegt, durch ein neues, verbessertes mathematisches Modell zu ersetzen, um die Art und Weise der Bestimmung der Verstärkungsfaktoren g_P , g_B und g_R zu optimieren. Die am Beginn der Berechnungen getroffene Annahme, dass der Wert von g_P gleich Eins ist, bildet die Grundlage des alten Algorithmus und ist neben dem Aufwand, der durch das Lösen des Gleichungssystems entsteht, seine rechentechnische Schwachstelle. Entlang der Planckschen Kurve gilt $g_P = 1$ zwar praktisch als erwiesen, jedoch nicht automatisch auch für beliebige andere Farborte. Dies bedeutet natürlich eine Unsicherheit bzw. eine Unwissenheit darüber, ob **ein** Rechendurchlauf für die Erzeugung des Zielfarborts ausreichend ist oder ob sich herausstellt, dass g_P vom Wert Eins abweicht und die resultierenden, fehlerbehafteten Verstärkungsparameter nachträglich abgeändert werden müssen. Eine weitere Problematik tritt im Zusammenhang mit der Farbortkontrolle auf. Einerseits kommt es nur zu einem Blinken der LEDs, wenn der Benutzer einen Farbort einstellt, welcher außerhalb des (temperaturabhängigen) Farbdreiecks liegt, d.h. nicht darstellbar ist, nicht aber z.B. zu der Berechnung eines „geeignet verschobenen“ Farborts, welcher sich im gültigen Bereich befindet. Für den Bediener der Lampe bzw. Leuchte wäre es jedoch praktisch, wenn eine falsche Einstellung automatisch korrigiert werden würde. Andererseits könnte ein angesteuerter Farbort in Extremfällen aufgrund vorgenommener Rundungen im Zuge der im Vorfeld erforderlichen Berechnungen die Bedingungen der Farbortkontrolle erfüllen, obwohl er in Wirklichkeit knapp außerhalb des Farbdreiecks liegt und daher nicht erzeugt werden kann. Dennoch würden in solch einer Situation irreguläre Verstärkungsfaktoren ermittelt, d.h. falsche Berechnungen durchgeführt. Mit dem weiterentwickelten Modell wird zunächst die Unklarheit darüber ausgemerzt, ob g_P tatsächlich gleich Eins ist oder nicht, und eine von vornherein richtige Lösung berechnet, sodass die Notwendigkeit, Maßnahmen für eventuelle Nachbesserungen zu setzen, entfällt. Zusätzlich werden Erweiterungen bzw. Verbesserungen in Bezug auf die Farbortkontrolle vorgenommen. In Kombination mit den am Ende dieser Arbeit für die einzelnen Messkurven der temperaturabhängigen Tristimuluswerte definierten Approximationsfunktionen, welche die bislang verwendeten linearen Näherungsfunktionen ersetzen, zeigt sich vor allem hinsichtlich der erzielten Farbortgenauigkeit ein deutlicher Fortschritt zum aktuellen Farbmetrikrechner.

Bevor der neu erarbeitete Lösungsansatz zur Berechnung der Verstärkungsfaktoren vorgestellt wird, sind einige theoretische Kenntnisse zum später verwendeten mathematischen Verfahren erforderlich; einfache Beispiele tragen zum besseren Verständnis der Rechenmethode bei. Dazu dienen die nachfolgenden Kapitel.

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

Die Matrix A wird demzufolge einfach um die m -reihige Einheitsmatrix I_m erweitert, wodurch für (4.1.2) auch

$$(A \mid I_m)x = b, \quad x \geq 0 \tag{4.1.3}$$

geschrieben werden kann. In die weiteren Schritte fließen folgende zwei Definitionen ein:

Definition 4.1.1 (Basis). *Eine Basis B des linearen Programms (4.1.1) besteht aus m Indizes der Indexmenge $\{1, 2, \dots, m+n\}$, sodass die den Indizes $j \in B$ entsprechenden Spaltenvektoren a_j der Matrix $(A \mid I_m)$ linear unabhängig sind.*

Sei nun B eine Basis von (4.1.1). Dann werden die verbleibenden, nicht in B enthaltenen Indizes in der Menge

$$N = \{1, 2, \dots, m+n\} \setminus B$$

zusammengefasst. Darauf aufbauend wird zwischen

- **Basisvariablen (BV)**, d.h. Variable x_j mit $j \in B$, und
- **Nichtbasisvariablen (NBV)**, d.h. Variable x_j mit $j \in N$

unterschieden. Als Erweiterung können die Mengen B und N auch als Vektoren mit den Einträgen

$$B = (B(1), \dots, B(m)) \quad \text{und} \quad N = (N(1), \dots, N(n))$$

dargestellt werden. Unter Berücksichtigung der richtigen Reihenfolge bzw. Sortierung der Indizes wird nun der Vektor x der Unbekannten in einen Vektor x_B , welcher alle Basisvariablen enthält, und in einen Vektor x_N , dessen Einträge alle Nichtbasisvariablen sind, aufgespalten. Analog wird der Koeffizientenvektor c in c_B und c_N und die Matrix $(A \mid I_m)$ bezüglich ihrer Spalten in Matrizen A_B und A_N unterteilt.

Definition 4.1.2 (Basislösung). *B sei eine Basis von (4.1.1). Ein Vektor $x = (x_B, x_N) \in \mathbb{R}^{n+m}$, für den die Bedingungen*

$$\begin{aligned} A_B x_B &= b, \\ x_N &= 0 \end{aligned}$$

gelten, heißt Basislösung von (4.1.1). Weiters heißt eine solche Basislösung zulässig, wenn $x_B \geq 0$ gilt (alle Einträge von x_B sind nichtnegativ), und entartet, wenn eine Basisvariable den Wert Null annimmt.

An dieser Stelle ist zu beachten, dass das Gleichungssystem $A_B x_B = b$ aufgrund der Regularität von A_B , die per Definition 4.1.1 gegeben ist, eindeutig lösbar ist. Für konkrete Beispiele können, wie leicht aus (4.1.1) ersichtlich ist, als Ausgangspunkt die offensichtlich gültige Basis

$$B = (n+1, \dots, n+m)$$

und daraus folgend

$$N = (1, 2, \dots, n)$$

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

gewählt werden, was automatisch auf die zulässige Basislösung

$$x = (x_B, x_N) = (b, 0) \quad (4.1.4)$$

führt, d.h. $x_{B(i)} = b_i$, $1 \leq i \leq m$.

Basierend auf diesen einführenden Überlegungen wird in den anschließenden Kapiteln ein Verfahren vorgestellt, mit welchem Lösungen für Problemstellungen der Form (4.1.1) und für Erweiterungen davon gefunden werden können. Zur Vereinfachung der Notation wird die Matrix $(A \mid I_m)$ aus (4.1.3) im Folgenden einfach als A geschrieben.

4.1.1 Das Simplexverfahren für Standardprobleme

Aufgabe ist es, das sogenannte **Simplexverfahren (George Bernard Dantzig, 1947)** herzuleiten, welches für lineare Programme der Form (4.1.1) eine endliche Lösung bestimmt. Die Vorgangsweise wird in Anlehnung an [8, S. 28-34, S. 53] beschrieben und untergliedert sich in mehrere Schritte:

- (i) **Auflösen von $Ax = b$ nach den Basisvariablen x_B** : Dieses aus der Einführung der Schlupfvariablen resultierende Gleichungssystem der Nebenbedingungen des linearen Programms kann wegen $A = (A_B, A_N)$ folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_B x_B + A_N x_N &= b \quad \text{mit } x_B \geq 0, x_N \geq 0 \text{ und } A_B \text{ regulär} && | \cdot A_B^{-1} \\ \Rightarrow x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \tilde{b} - \tilde{A}_N x_N. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

- (ii) **Elimination der Basisvariablen aus der Zielfunktion**: Für die Zielfunktion $c^\top x$ gilt

$$\begin{aligned} c^\top x &= c_B^\top x_B + c_N^\top x_N = \\ &\stackrel{(4.1.5)}{=} c_B^\top A_B^{-1} b - c_B^\top A_B^{-1} A_N x_N + c_N^\top x_N = \\ &= \underbrace{c_B^\top A_B^{-1} b}_{\tilde{c}_0} + \underbrace{(c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N)}_{\tilde{c}_N^\top} x_N = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_N^\top x_N, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

wobei die Einträge $\tilde{c}_{N(j)}$, $1 \leq j \leq n$, des Vektors \tilde{c}_N **reduzierte Kostenkoeffizienten** genannt werden. Für die Basislösung (x_B, x_N) aus (4.1.4) ergibt sich damit der Zielfunktionswert $c^\top x$ wegen $x_N = 0$ einfach aus

$$\tilde{c}_0 = c_B^\top A_B^{-1} b.$$

- (iii) **Optimalitätskriterium**: Falls eine zulässige Basislösung $x = (x_B, x_N)$ vorliegt, ist laut Definition 4.1.2 $x_B \geq 0$ und, was hier vor allem von Bedeutung ist, außerdem auch $x_N \geq 0$. Wenn nun für die in (4.1.6) erhaltenen reduzierten Kostenkoeffizienten

$$\tilde{c}_{N(j)} \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

erfüllt ist, kann trotz Vergrößerung der Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$, $1 \leq j \leq n$, **keine** Verbesserung des Zielfunktionswerts in (4.1.6) erzielt werden, was bedeutet, dass die augenblickliche Basislösung **optimal** ist. Somit lautet das **Optimalitätskriterium**:

Eine Basislösung (x_B, x_N) ist optimal, wenn $\tilde{c}_N \leq 0$ gilt.

- (iv) **Optimalitätskriterium nicht erfüllt:** Sei die augenblickliche Basislösung zwar wieder zulässig, aber nicht optimal. Da das zuvor hergeleitete Optimalitätskriterium somit nicht erfüllt wird, gibt es zumindest einen Index $s \in \{1, \dots, n\}$, für den $\tilde{c}_{N(s)} > 0$ gilt. Werden nun in (4.1.5) alle Nichtbasisvariable bis auf $x_{N(s)}$ Null gesetzt, d.h.

$$x_{N(j)} = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq n, \quad N(j) \neq s,$$

reduziert sich das Matrix-Vektor-Produkt $A_N x_N$ und es bleibt

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} a_s x_{N(s)} = \tilde{b} - \tilde{a}_s x_{N(s)} \geq 0, \quad (4.1.7)$$

wobei a_s der s-te Spaltenvektor von A_N ist. Diese Ungleichung muss wegen der Eigenschaft einer zulässigen Basislösung erfüllt sein, wodurch aber die Wahl des Wertes von $x_{N(s)}$ eingeschränkt wird. Dazu werden folgende Fälle unterschieden:

Fall 1: $\tilde{a}_s \leq 0 \Rightarrow -\tilde{a}_s \geq 0$. Wegen Bedingung (4.1.7) kann dann $x_{N(s)}$ beliebig groß gewählt werden, sodass keine endliche Optimallösung existiert.

Fall 2 - Basisaustauschschritt: $\tilde{a}_s \not\leq 0$. Es existiert daher mindestens ein Index i , $1 \leq i \leq m$, mit $\tilde{a}_{is} > 0$. Ungleichung (4.1.7) impliziert

$$x_{B(i)} = \tilde{b}_i - \underbrace{\tilde{a}_{is}}_{>0} x_{N(s)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}_i \geq \tilde{a}_{is} x_{N(s)} \quad (4.1.8)$$

oder, anders formuliert,

$$x_{N(s)} \leq \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } \tilde{a}_{is} > 0,$$

und damit auch

$$x_{N(s)} \leq \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \quad \forall \tilde{a}_{is} > 0.$$

Angenommen, das Minimum werde für $i = r \in \{1, \dots, m\}$ erreicht, d.h.

$$\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \mid \tilde{a}_{is} > 0 \right\}.$$

Wenn nun $x_{N(s)} = \tilde{b}_r / \tilde{a}_{rs}$ gesetzt wird, folgt aus (4.1.8), dass $x_{B(r)} = 0$ ist. Bezogen auf Definition 4.1.2 bedeutet das aber, dass die r-te Basisvariable und die s-te Nichtbasisvariable vertauscht werden, d.h. ein **Basisaustauschschritt**

4 Ein neuer Farbmatrikrechner

durchgeführt wird. Natürlich müssen auch die Indexvektoren entsprechend angepasst werden:

$$\bar{B}(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq r, \\ N(s) & i = r. \end{cases}$$

$$\bar{N}(j) = \begin{cases} N(j) & N(j) \neq N(s), \\ B(r) & N(j) = N(s). \end{cases}$$

- (v) **Anpassung der Matrixeinträge:** Da im ersten Schritt das Gleichungssystem $Ax = b$ bereits nach x_B aufgelöst wurde, kann $\tilde{A}_B = I_m$ angenommen werden. Für diese Matrix bedeutet der soeben erfolgte Basisaustauschschritt, dass ihre r -te Spalte durch die s -te Spalte von \tilde{A}_N ersetzt wird, sich also $\tilde{A}_{\bar{B}}$ zu

$$\tilde{A}_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \tilde{a}_{2s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \tilde{a}_{rs} & & & \\ & & & & \tilde{a}_{r+1,s} & 1 & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & \tilde{a}_{ms} & & & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Dabei wird \tilde{a}_{rs} als **Pivotelement** bezeichnet. Aus $\tilde{A}_{\bar{B}}\tilde{A}_{\bar{B}}^{-1} = I_m$ ist leicht zu erkennen, dass das Ergebnis der Invertierung von $\tilde{A}_{\bar{B}}$

$$\tilde{A}_{\bar{B}}^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}_{rs}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{rs} & & & & -\tilde{a}_{1s} & & & & \\ & \ddots & & & \vdots & & & & \\ & & \tilde{a}_{rs} & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & \vdots & \tilde{a}_{rs} & & & \\ & & & & -\tilde{a}_{ms} & & \ddots & & \\ & & & & & & & \tilde{a}_{rs} & \end{pmatrix}$$

ist. Wegen (4.1.7) gilt $\bar{A} = A_B^{-1}A$, und daher für die neu zu berechnende Matrix \bar{A} der Zusammenhang

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) := \tilde{A}_{\bar{B}}^{-1}\tilde{A}.$$

Somit können die neuen Matrixeinträge durch

$$\bar{a}_{rj} := \frac{\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}} \quad 1 \leq j \leq n+m,$$

$$\bar{a}_{ij} := \tilde{a}_{ij} - \frac{\tilde{a}_{is}\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}} \quad 1 \leq i \leq m, i \neq r, 1 \leq j \leq n+m \quad (4.1.9)$$

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

bestimmt werden. Der Basisaustauschschritt bedeutet zum Einen, dass x_s eine Basisvariable wird und die zu x_s gehörende Spalte der Gesamtmatrix wegen (4.1.9) dem r -ten Einheitsvektor entspricht. Zum Anderen wird $x_{B(r)}$ eine Nichtbasisvariable; die Einträge der zu $x_{B(r)}$ gehörenden Spalte können basierend auf den vorhergehenden Überlegungen und mit (4.1.9) durch

$$\bar{a}_{i,B(r)} = \begin{cases} -\frac{\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}} & i \neq r, i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{\tilde{a}_{rs}} & i = r \end{cases}$$

berechnet werden. Auch die rechte Seite b und die Zielfunktion werden (wie eine Spalte bzw. Zeile von A) modifiziert.

Wird nun eine Aufgabe mit Hilfe des Simplexverfahrens gelöst, wird zunächst das Simplextableau

		$N(1)$	\dots	$N(n)$
ZF	$-z$	c_1		c_n
$B(1)$	b_1	a_{ij}		
\vdots	\vdots			
$B(m)$	b_m			

erstellt, mit

$$\begin{aligned} a_{0j} &:= c_j && \text{für } 1 \leq j \leq n, \\ a_{i0} &:= b_i && \text{für } 1 \leq i \leq m, \\ a_{00} &:= -z. \end{aligned}$$

Gleich zu Beginn bzw. nach jedem Durchlauf des im Anschluss beschriebenen Algorithmus sind folgende Punkte zu überprüfen:

- $b_1, \dots, b_m \geq 0 \Rightarrow$ das Simplextableau ist **zulässig**¹.
- $c_1, \dots, c_n \leq 0 \Rightarrow$ das Simplextableau ist **optimal**.

Algorithmus 1 (Simplexverfahren):

Ausgangspunkt ist ein lineares Programm der Form (4.1.1).
 Starte mit einer zulässigen Lösung: $b \geq 0$ im Simplextableau.

1. Ist die Lösung optimal ($a_{0j} \leq 0, 1 \leq j \leq n$)?

¹Diese Bedingung wird am Beginn überprüft und ist Voraussetzung für die Anwendung des Simplexverfahrens. Falls dieser Punkt nicht erfüllt ist, können verschiedene Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung angewandt werden. Die für diese Arbeit relevanten Beispiele kommen jedoch ohne diese zusätzlichen Methoden aus.

4 Ein neuer Farbmatrikrechner

- **JA:** Stop, Optimallösung erreicht:

$$\begin{aligned}x_{B(i)} &:= a_{i0} && \text{für } 1 \leq i \leq m, \\x_{N(j)} &:= 0 && \text{für } 1 \leq j \leq n, \\z &:= -a_{00}.\end{aligned}$$

- **NEIN:** Gehe zu Schritt 2.

2. **Spaltenauswahlregel:** Wähle $s \in \{1, \dots, n\}$ so, dass

$$a_{0s} = \max_{1 \leq j \leq n} a_{0j}.$$

3. Gilt für die Elemente a_{is} , $1 \leq i \leq m$, der s-ten Spalte $a_{is} \leq 0$?

- **JA:** Es gibt keine endliche Lösung.
- **NEIN:** Gehe zu Schritt 4.

4. **Zeilenauswahlregel (Bestimmung des Pivotelements):** Wähle $r \in \{1, \dots, m\}$ so, dass

$$\frac{a_{r0}}{a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}.$$

5. **Basisaustauschschritt (Pivot-Operation):** Vertausche die r-te Basisvariable mit der s-ten Nichtbasisvariable und führe folgende Rechenschritte durch:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{rs} &:= \frac{1}{a_{rs}}, \\ \bar{a}_{rj} &:= \frac{a_{rj}}{a_{rs}} && \text{für } 0 \leq j \leq n, j \neq s, \\ \bar{a}_{is} &:= -\frac{a_{is}}{a_{rs}} && \text{für } 0 \leq i \leq m, i \neq r, \\ \bar{a}_{ij} &:= a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} && \text{für } 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, i \neq r, j \neq s.\end{aligned}$$

Ersetze $\forall i$ und $\forall j$ die Koeffizienten a_{ij} durch \bar{a}_{ij} und gehe zu Schritt 1.

Um die einzelnen Schritte des Algorithmus zu veranschaulichen, wird folgendes Beispiel betrachtet: Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{aligned}\max (z &= x_1 + x_2) \\ \text{unter } x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3, \\ x_2 &\leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0,\end{aligned}$$

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

welches durch Einbringen der Schlupfvariablen zu

$$\begin{aligned}
 \max (z = x_1 + x_2) \\
 \text{unter } x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\
 2x_1 - x_2 + x_4 &= 3, \\
 x_2 + x_5 &= 1, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

wird. Die ursprünglichen Variablen x_1, x_2 werden als Nichtbasisvariablen, die Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5 als Basisvariablen festgelegt. Das Simplextableau hat daher zunächst die Form

		↓	x_1	x_2
ZF	0	1	1	
x_3	4	1	2	
x_4	3	2	-1	
x_5	1	0	1	

Der Simplex-Algorithmus wird nun Schritt für Schritt abgearbeitet:

Start: Die Ausgangslösung ist zulässig, da $(b_1, b_2, b_3) = (4, 3, 1) \geq 0$.

Schritt 1: Die Ausgangslösung ist wegen $a_{01} = 1 \not\leq 0$ und $a_{02} = 1 \not\leq 0$ nicht optimal.

Schritt 2 (Spaltenauswahlregel): Der Index $s \in \{1, 2\}$ muss so bestimmt werden, dass

$$a_{0s} = \max_{1 \leq j \leq 2} a_{0j} = \max\{1, 1\} = 1$$

erfüllt ist. Die Wahl der Pivotspalte ist in diesem Fall also beliebig; hier wird $s = 1$ gesetzt (der rote Pfeil im Tableau kennzeichnet die ausgewählte Spalte).

Schritt 3: Die Elemente a_{i1} der ersten Spalte sind nicht alle negativ oder gleich Null. Vorerst kann somit weitergerechnet werden.

Schritt 4 (Zeilenauswahlregel): Der Index $r \in \{1, 2, 3\}$ muss so bestimmt werden, dass

$$\frac{a_{r0}}{a_{r1}} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{i1}} \mid a_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{2}$$

gilt. Dies liefert $r = 2$; das Pivotelement $a_{21} = 2$ ist im Tableau eingerahmt.

Schritt 5 (Basisaustauschschritt): Die zu $r = 2$ gehörende Basisvariable x_4 wird mit der zu $s = 1$ gehörenden Nichtbasisvariable x_1 vertauscht. Weiters werden gemäß dem Algorithmus folgende Operationen durchgeführt:

4 Ein neuer Farbmatrikrechner

$$\begin{aligned} \bar{a}_{21} &= \frac{1}{a_{21}} = \frac{1}{2}, \\ \bar{a}_{20} &= \frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \bar{a}_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{a}_{01} &= -\frac{a_{01}}{a_{21}} = -\frac{1}{2}, \quad \bar{a}_{11} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \bar{a}_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{21}} = 0, \\ \bar{a}_{00} &= a_{00} - \frac{a_{01} \cdot a_{20}}{a_{21}} = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \bar{a}_{02} = a_{02} - \frac{a_{01} \cdot a_{22}}{a_{21}} = \frac{3}{2}, \\ \bar{a}_{10} &= a_{10} - \frac{a_{11} \cdot a_{20}}{a_{21}} = \frac{5}{2} \quad \text{und} \quad \bar{a}_{12} = a_{12} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}} = \frac{5}{2}, \\ \bar{a}_{30} &= a_{30} - \frac{a_{31} \cdot a_{20}}{a_{21}} = 1 \quad \text{und} \quad \bar{a}_{32} = a_{32} - \frac{a_{31} \cdot a_{22}}{a_{21}} = 1. \end{aligned}$$

Das Tableau, welches aus den neu berechneten Werten gebildet wird, lautet damit

		x_4	$\downarrow x_2$
ZF	-3/2	-1/2	3/2
x_3	5/2	-1/2	5/2
x_1	3/2	1/2	-1/2
x_5	1	0	1

Ein wiederholtes Durchlaufen der einzelnen Punkte des Algorithmus zeigt, dass erneut ein Basisaustauschschritt vorgenommen werden muss. Die Berechnungen führen auf das hier nur mehr teilweise dargestellte Tableau

		x_4	x_5
ZF	-3	-1/2	-3/2
x_3	0		
x_1	2		
x_2	1		

Da nun

$$a_{01} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{und} \quad a_{02} = -\frac{3}{2} < 0$$

gilt, ist die optimale, einfach aus dem Tableau herauszulesende Lösung erreicht, nämlich

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad z = 3.$$

Die Basisvariable x_3 nimmt den Wert Null an; somit ist die vorliegende Basislösung entartet.

Oftmals weichen Aufgabenstellungen der linearen Optimierung mehr oder weniger von der Standardform (4.1.1) ab. In manchen Fällen setzen sich die Nebenbedingungen eines linearen Programms nicht nur aus Ungleichungen, sondern auch aus Gleichungen zusammen. Weiters kann es vorkommen, dass für Variablen x_j Beschränkungen der Form $0 \leq x_j \leq d_j$ vorgegeben sind. Beide Situationen könnten grundsätzlich so behandelt werden, dass sich

letztendlich an der Vorgangsweise des vorigen Kapitels nichts ändert: Die eventuell vorliegenden Gleichungen werden dann einfach als jeweils zwei Ungleichungen geschrieben, da bekanntlich

$$x = b \quad \Leftrightarrow \quad x \leq b \wedge x \geq b$$

gilt; die oberen Schranken der Variablen werden dann als weitere Ungleichungen in das System der Restriktionen eingefügt. Dies hat jedoch eine Vergrößerung der Matrix A zur Folge, und damit auch längere Rechenzeiten und eine sinkende Rechengenauigkeit. Es ist daher naheliegend, sowohl die Behandlung von Gleichungen in den Nebenbedingungen als auch jene von beschränkten Variablen in anderer, besserer Art und Weise in das Simplexverfahren einzubauen. Die Ideen dafür werden in den folgenden beiden Abschnitten behandelt.

4.1.2 Varianten des Simplexverfahrens: Gleichungen als Restriktionen

Die Betrachtungen dieses Kapitels basieren auf [8, S. 53-55].

Für jene Restriktionen des zu lösenden linearen Programms, welche als Gleichungen vorliegen, werden künstliche Variable eingeführt. Deren Summe bildet eine Hilfszielfunktion, die mittels des Algorithmus aus Kapitel 4.1.1 minimiert wird. Hierbei werden zunächst die Schlupfvariablen und die künstlichen Variablen als Basisvariable und die restlichen Unbekannten als Nichtbasisvariable fixiert. Wenn als Optimalwert Null erreicht wird, nehmen alle künstlichen Variablen den Wert Null an und können zu Nichtbasisvariablen gemacht werden. Dies bedeutet die Zulässigkeit des ursprünglichen Problems und die den künstlichen Variablen entsprechenden Spalten können, genauso wie die zur Hilfszielfunktion gehörende Zeile, gestrichen werden. Danach wird das Simplexverfahren auf das verbleibende Tableau angewandt, um die tatsächliche Zielfunktion zu maximieren.

Zur Veranschaulichung sei folgendes lineare Programm gegeben²:

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + 2x_2 - x_3) \\ \text{unter } & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_2 - x_3 = -1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Für die erste Restriktion, welche eine Ungleichung ist, kann wie gewohnt eine Schlupfvariable x_4 eingeführt werden, während die verbleibenden Nebenbedingungen als Gleichungen gegeben sind und daher mit Hilfe von künstlichen Variablen y_1, y_2 behandelt werden (die zweite Gleichung wird zusätzlich noch mit -1 multipliziert). Die modifizierte Aufgabe hat

²Die einzelnen Rechenschritte werden nicht mehr im Detail dargestellt.

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

somit die Gestalt

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + 2x_2 - x_3) \\ \text{unter } & x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 5, \\ & -x_2 + x_3 + y_2 = 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zunächst wird, wie zuvor erläutert, die Hilfszielfunktion $y_1 + y_2$ minimiert. Für dieses Beispiel gilt

$$y_1 + y_2 = 6 - 2x_1 - 2x_3.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Minimierung von $y_1 + y_2$ praktisch der Maximierung von

$$-y_1 - y_2 = -6 + 2x_1 + 2x_3 \tag{4.1.10}$$

entspricht. Für das Erstellen eines Simplextableaus, bezogen auf die Maximierung einer Zielfunktion, wie in Kapitel 4.1.1 beschrieben, müssen also die Werte aus (4.1.10) herangezogen werden! Im Anschluss sind das Ausgangstableau und alle aus den weiteren Berechnungen resultierenden Tableaus dargestellt:

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3
HZF	6	2	0	2
ZF	0	1	2	-1
x_4	4	1	1	0
y_1	5	2	1	1
y_2	1	0	-1	1

		y_1	x_2	$\downarrow x_3$
HZF	1	-1	-1	1
ZF	-5/2	-1/2	3/2	-3/2
x_4	3/2	-1/2	1/2	-1/2
x_1	5/2	1/2	1/2	1/2
y_2	1	0	-1	1

		y_1	x_2	y_2
HZF	0	-1	0	-1
ZF	-1	-1/2	0	3/2
x_4	2	-1/2	0	1/2
x_1	2	1/2	1	-1/2
x_3	1	0	-1	1

		x_2
ZF	-1	0
x_4	2	0
x_1	2	1
x_3	1	-1

Der Optimalwert der Hilfszielfunktion ist Null und alle künstlichen Variablen sind zu Nicht-basisvariablen geworden. Das Ausgangsproblem ist daher zulässig und die entsprechenden

Zeilen und Spalten können aus dem Tableau gestrichen werden. Da außerdem der einzige verbleibende Wert in der Zielfunktionszeile die Bedingung ≤ 0 erfüllt, ist bereits die Optimallösung für das ursprüngliche lineare Programm erreicht. Die entsprechenden Werte werden dem Tableau entnommen (wobei x_2 als Nichtbasisvariable den Wert Null annimmt), woraus

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad z = 1$$

folgt.

4.1.3 Varianten des Simplexverfahrens: Beschränkte Variable

Die Inhalte dieses Abschnitts sind [8, S. 55-58] entnommen.

Gilt für eine Unbestimmte x_j des gegebenen linearen Programms $0 \leq x_j \leq d$, kann dies unter der Verwendung der entsprechenden Komplementärvariablen \bar{x}_j auch als

$$x_j + \bar{x}_j = d, \quad x_j \geq 0, \quad \bar{x}_j \geq 0$$

geschrieben werden. Wenn der Wert einer der beiden Variablen bekannt ist, ergibt sich daraus automatisch auch der Wert der zweiten Variablen. Durch Vorgabe einer Variablenbeschränkung sind folgende zwei den Simplex-Algorithmus betreffenden Punkte zu berücksichtigen:

- Der Wert einer nach oben beschränkten Nichtbasisvariable darf nicht beliebig vergrößert werden.
- Durch Pivotoperationen dürfen die Bedingungen $x_j \geq 0$ und $\bar{x}_j \geq 0$ nicht verletzt werden.

Die Beachtung dieser Faktoren schlägt sich in der Zeilenauswahlregel nieder, die abgeändert werden muss. Dazu wird neben den bekannten Indexmengen bzw. Indexvektoren B und N ein zusätzlicher Indexvektor K definiert, welcher die Indizes der beschränkten Variablen x_j mit

$$0 \leq x_j \leq d_j \quad \text{für } j \in K$$

enthält.

Durch die Spaltenauswahlregel wird der Index $s \in \{1, \dots, n\}$ der Pivotspalte festgelegt. Falls nun $N(s) \in K$, sind die zugehörige Nichtbasisvariable $x_{N(s)}$ und ihre Komplementärvariable $\bar{x}_{N(s)}$ durch ein $d_{N(s)}$ nach oben beschränkt. Folgende Aspekte müssen in die weitere Vorgangsweise miteinbezogen werden:

- Damit die Basisvariablen nichtnegativ bleiben, darf für Elemente a_{is} der Pivotspalte mit $a_{is} > 0$ der Wert von $x_{N(s)}$ nicht größer als b_i/a_{is} werden. Diese Bedingung kann aus (4.1.8) gefolgert werden.

4 Ein neuer Farbmeterkreehner

- Möglicherweise ist eine Basisvariable $x_{B(i)}$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$ durch ein $d_{B(i)}$ nach oben beschränkt. Sie muss daher auch nach der Pivotoperation diese Beschränkung erfüllen; dies kann durch die Forderung

$$x_{N(s)} \leq \frac{b_i - d_{B(i)}}{a_{is}} \quad \text{für } a_{is} < 0$$

bewerkstelligt werden (vgl. (4.1.7) unter Berücksichtigung der oberen Schranke $d_{B(i)}$ von $x_{B(i)}$).

Zusammengefasst muss also im Rahmen der Zeilenauswahlregel das Minimum der Elemente

$$d_{N(s)}, \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}, \left\{ \frac{b_i - d_{B(i)}}{a_{is}} \mid a_{is} < 0, B(i) \in K \right\} \quad (4.1.11)$$

bestimmt werden, wobei für den Fall, dass für den bereits fixierten Index s und $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\{N(s) \cap K\} \cup \{i \mid a_{is} > 0\} \cup \{i \mid a_{is} < 0, B(i) \in K\} = \emptyset$$

gilt, keine endliche Optimallösung existiert. Ansonsten gibt es drei Möglichkeiten:

- Das gesuchte Minimum ist $d_{N(s)}$:** Die zur s -ten Spalte gehörende Variable wird durch ihre Komplementarvariable ausgetauscht. Wenn beispielsweise in

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$x_{N(s)}$ durch $d_{N(s)} - \bar{x}_{N(s)}$ ersetzt wird, resultiert daraus die Gleichung

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,s-1}x_{N(s)-1} - a_{i,s}\bar{x}_{N(s)} + \dots + a_{in}x_n = b_i - a_{i,s}d_{N(s)}.$$

Um also im Simplextableau von $x_{N(s)}$ zur Komplementarvariablen $\bar{x}_{N(s)}$ übergehen, wird die Transformation $T(s)$, d.h.

$$\begin{aligned} a_{i0} &:= a_{i0} - a_{i,s}d_{N(s)}, \\ a_{is} &:= -a_{is} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

für $0 \leq i \leq m$ ausgeführt.

- Das gesuchte Minimum ist b_r/a_{rs} :** In diesem Fall wird einfach mit einer Pivotoperation (mit a_{rs} als Pivotelement) weiter gerechnet.
- Das gesuchte Minimum ist $(b_r - d_{B(r)})/a_{rs}$:** Zunächst wird eine Pivotoperation mit a_{rs} vorgenommen, wobei nach dem Vertauschen der Variablen die neue Nichtbasisvariable als Wert ihre obere Schranke (d.h. $d_{B(r)}$) annimmt. Daraufhin wird die Transformation $T(s)$, wie in (4.1.12) beschrieben, vollzogen.

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

Für eine bessere Strukturierung all dieser Überlegungen wird das Simplexverfahren im Folgenden noch einmal für den Sonderfall beschränkter Variablen als Algorithmus notiert:

Algorithmus 2 (Simplexverfahren zur Behandlung beschränkter Variablen):

Ausgangspunkt ist ein lineares Programm der Form

$$\max \{ c^\top x \mid Ax \leq b, 0 \leq x_j \leq d_j \text{ für } j \in K, x_j \geq 0 \text{ für } j \notin K \} \quad \text{mit } b \geq 0,$$

und das zugehörige Simplextableau mit den Einträgen a_{ij} , für $0 \leq i \leq m$ und $0 \leq j \leq n$. Die Indexvektoren B und N werden um negative Indizes erweitert, z.B. wird $B(i) = t$ der Variablen x_t und $B(i) = -t$ der Variablen \bar{x}_t zugeordnet.

Setze $k := 0$.

1. Ist die Lösung optimal ($a_{0j} \leq 0, 1 \leq j \leq n$)?

- **JA:** Stop, Optimallösung erreicht:

$$x_{B(i)} = \begin{cases} b_i & B(i) > 0 \\ d_{B(i)} - b_i & B(i) < 0 \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i \leq m,$$

$$x_{N(j)} = \begin{cases} 0 & N(j) > 0 \\ d_{N(j)} & N(j) < 0 \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n.$$

- **NEIN:** Gehe zu Schritt 2.

2. **Spaltenauswahlregel:** Wähle $s \in \{1, \dots, n\}$ so, dass

$$a_{0s} = \max_{1 \leq j \leq n} a_{0j}.$$

3. **Zeilenauswahlregel:** Gilt für $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\{N(s) \cap K\} \cup \{i \mid a_{is} > 0\} \cup \{i \mid a_{is} < 0, B(i) \in K\} = \emptyset,$$

besitzt das lineare Programm keine endliche Optimallösung. Ansonsten bestimme das Minimum der Ausdrücke

$$d_{N(s)} \quad \text{für } N(s) \in K,$$

$$\frac{a_{i0}}{a_{is}} \quad \text{für } a_{is} > 0 \text{ und } 1 \leq i \leq m,$$

$$\frac{a_{i0} - d_{B(i)}}{a_{is}} \quad \text{für } a_{is} < 0, B(i) \in K \text{ und } 1 \leq i \leq m.$$

- **Minimum** = a_{r0}/a_{rs} für ein $r \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow$ gehe zu Schritt 4.
- **Minimum** = $(a_{r0} - d_{B(r)})/a_{rs}$ für ein $r \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow$ setze $k := 1$ und gehe zu Schritt 4.

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

- **Minimum** = $d_{N(s)} \Rightarrow$ gehe zu Schritt 5.

4. **Basisaustauschschritt:** Vertausche die r -te Basisvariable mit der s -ten Nichtbasisvariable und führe eine Pivotoperation mit dem Pivotelement a_{rs} durch.

- $k \neq 1 \Rightarrow$ gehe zu Schritt 1.
- $k = 1 \Rightarrow$ setze $k := 0$ und gehe zu Schritt 5.

5. **Transformation $T(s)$:**

$$\begin{aligned} a_{i0} &:= a_{i0} - a_{is}d_{N(s)}, \\ a_{is} &:= -a_{is} \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq m$. Setze $N(s) := -N(s)$ und gehe zu Schritt 1.

Die Funktionsweise des Algorithmus wird anhand des folgenden Beispiels gezeigt:

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + 4x_2) \\ \text{unter} & \quad x_1 - x_2 \leq 2, \\ & \quad -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & \quad x_2 \leq 4, \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Mit der Schlupfvariablen x_3 wird die erste Restriktion zu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2.$$

Durch Addition der zweiten Restriktion zu dieser Gleichung folgt $x_3 \leq 5$, sodass das ursprüngliche Problem zu

$$\begin{aligned} \max & (-x_1 + 4x_2) \\ \text{unter} & \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ & \quad x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

wird. Demzufolge ergeben sich

	x_1	$\downarrow x_2$
ZF	0	-1 4
x_3	2	1 -1

als anfängliches Tableau, $d_2 = 4$ und $d_3 = 5$ als obere Schranken und

$$B = (3), \quad N = (1, 2), \quad K = (2, 3)$$

4.1 Das Simplexverfahren für lineare Programme

als vorläufige Indexvektoren. Die Ausgangslösung ist nicht optimal und mit der Spaltenauswahlregel wird als passender Index $s = 2$ festgelegt. Der nächste Schritt ist die Zeilenauswahlregel, mit der das Minimum der Größen

$$d_2 = 4 \quad \text{und} \quad \frac{a_{10} - \overbrace{d_{B(1)}}^{d_3}}{a_{12}} = \frac{2 - 5}{(-1)} = 3$$

bestimmt wird (in der Pivotspalte gibt es keine positiven Einträge, daher sind nur die oberhalb dargestellten Ausdrücke für die Bestimmung des Minimums relevant). Dieses wird vom zweiten Term angenommen; laut Algorithmus ist daher $k := 1$ zu setzen, eine Pivotoperation mit dem Pivotelement $a_{12} = -1$ und danach eine Transformation $T(2)$ durchzuführen:

- **Tableau nach Pivotoperation:**

	x_1	x_3
ZF	8	4
x_2	-2	-1

Die Indexvektoren sind nun $B = (2)$ und $N = (1, 3)$.

- **Transformation $T(2)$:**

$$\begin{aligned} a_{00} &:= a_{00} - a_{02} \cdot \overbrace{d_{N(2)}}^{d_3} = 8 - 4 \cdot 5 = -12, \\ a_{10} &:= a_{10} - a_{12} \cdot d_3 = -2 - (-1) \cdot 5 = 3, \\ a_{02} &:= -a_{02} = -4, \\ a_{12} &:= -a_{12} = 1. \end{aligned}$$

Wegen $N(2) := -N(2)$ ist nun $N = (1, -3)$.

- **Tableau nach Transformation:**

	$\downarrow x_1$	\bar{x}_3
ZF	-12	-4
x_2	3	1

Die Optimallösung ist noch nicht erreicht und die Spaltenauswahlregel liefert $s = 1$. Für das Minimum (Zeilenauswahlregel) kommt in diesem Fall ohnehin nur die Größe

$$\frac{a_{10} - \overbrace{d_{B(1)}}^{d_2}}{a_{11}} = \frac{3 - 4}{(-1)} = 1$$

in Frage. Nochmals müssen eine Pivotoperation, diesmal mit a_{11} (dabei wird $k := 0$ gesetzt), und eine Transformation $T(1)$ vollzogen werden:

• **Tableau nach Pivotoperation:**

	x_2	\bar{x}_3
ZF	-3	3 -1
x_1	-3	-1 -1

Die Indexvektoren sind nun $B = (1)$ und $N = (2, -3)$.

• **Transformation T(1):**

$$\begin{aligned}
 a_{00} &:= a_{00} - a_{01} \cdot \overbrace{d_{N(1)}}^{d_2} = -3 - 3 \cdot 4 = -15, \\
 a_{10} &:= a_{10} - a_{11} \cdot d_2 = -3 - (-1) \cdot 4 = 1, \\
 a_{01} &:= -a_{01} = -3, \\
 a_{11} &:= -a_{11} = 1.
 \end{aligned}$$

Wegen $N(1) := -N(1)$ ist nun $N = (-2, -3)$.

• **Tableau nach Transformation:**

	\bar{x}_2	\bar{x}_3
ZF	-15	-3 -1
x_1	1	1 -1

Nun sind alle a_{0j} für $j \in \{1, 2\}$ negativ, sodass die Optimallösung vorliegt. Die endgültigen Indexvektoren sind $B = (1)$ und $N = (-2, -3)$. Den Variablen müssen jetzt nur noch die richtigen Werte laut Algorithmus zugewiesen werden, und zwar

$$x_1 = 1, \bar{x}_2 = 0,$$

und damit

$$x_1 = 1, x_2 = 4, z = 15.$$

Nachdem nun das Simplexverfahren für die Lösung von linearen Programmen, sowohl in ihrer einfachsten Form als auch für diverse Sonderfälle, detailliert erklärt und anhand von Beispielen verdeutlicht wurde, wird es im nächsten Schritt auf das im Anschluss vorgestellte Rechenmodell zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren g_P , g_B und g_R angewandt. Dabei werden die Berechnungen zunächst händisch und danach auf Basis eines in C programmierten Algorithmus durchgeführt. Zudem erfolgt ein Vergleich der Rechenzeiten des ursprünglichen und des neu entwickelten mathematischen Modells.

4.2 Ein Optimierungsproblem zur Berechnung der Verstärkungsfaktoren

In Kapitel 3.7.1 wurde das Gleichungssystem, welches dem derzeitigen Farbmetrikrechner zugrunde liegt, präsentiert. Die nach g_B und g_R aufzulösenden Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_B + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_B + Z_B) \right\} \cdot g_B + \\
 & \quad + \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_R + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_R + Z_R) \right\} \cdot g_R = \\
 & = g_P \cdot \left\{ (1 - x_{\text{Ziel}})X_P - x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_P + Z_P) \right\}, \\
 & \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_B + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_B + Z_B) \right\} \cdot g_B + \\
 & \quad + \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_R + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_R + Z_R) \right\} \cdot g_R = \\
 & = g_P \cdot \left\{ (1 - y_{\text{Ziel}})Y_P - y_{\text{Ziel}} \cdot (X_P + Z_P) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

In diesem Modell wird zu Beginn der Berechnungen $g_P = 1$ gesetzt, um danach mit den beiden zur Verfügung stehenden Gleichungen die Faktoren g_B und g_R zu ermitteln, sodass die Anforderungen

$$g_B \in [0, 1] \quad \text{und} \quad g_R \in [0, 1]$$

erfüllt sind. Da diese Bedingungen jedoch in einigen Fällen verletzt und damit Nachbehandlungen notwendig werden, ist der Grundgedanke des neuen mathematischen Modells, nach einer **einmaligen** Durchführung der Rechenvorschriften die korrekten Verstärkungsfaktoren

$$g_P \in [0, 1], \quad g_B \in [0, 1], \quad g_R \in [0, 1] \tag{4.2.2}$$

zu erhalten. Aufgrund der in Kapitel 3.4 erläuterten positiven Eigenschaften der Lichtfarbe Phosphor des PI-LED-Systems soll dabei der Wert von g_P größtmöglich sein. Es ist daher naheliegend, eine Optimierungsaufgabe zu formulieren, im Zuge derer g_P maximiert werden soll. Natürlich müssen die drei Faktoren nach wie vor die Gleichungen (4.2.1), welche in

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_B + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_B + Z_B) \right\} \cdot g_B + \\
 & \quad + \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_R + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_R + Z_R) \right\} \cdot g_R \\
 & \quad - g_P \cdot \left\{ (1 - x_{\text{Ziel}})X_P - x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_P + Z_P) \right\} = 0, \\
 & \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_B + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_B + Z_B) \right\} \cdot g_B + \\
 & \quad + \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_R + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_R + Z_R) \right\} \cdot g_R \\
 & \quad - g_P \cdot \left\{ (1 - y_{\text{Ziel}})Y_P - y_{\text{Ziel}} \cdot (X_P + Z_P) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

umgeschrieben werden können, und die Bedingungen (4.2.2) erfüllen. Zusammenfassend ergibt sich folgendes mathematisches Modell:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximiere } g_P \\
 & \text{unter } \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_B + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_B + Z_B) \right\} \cdot g_B \\
 & \quad - \left\{ (1 - x_{\text{Ziel}})X_P - x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_P + Z_P) \right\} \cdot g_P + \\
 & \quad + \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_R + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_R + Z_R) \right\} \cdot g_R = 0, \\
 & \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_B + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_B + Z_B) \right\} \cdot g_B \\
 & \quad - \left\{ (1 - y_{\text{Ziel}})Y_P - y_{\text{Ziel}} \cdot (X_P + Z_P) \right\} \cdot g_P + \\
 & \quad + \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_R + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_R + Z_R) \right\} g_R = 0, \\
 & 0 \leq g_B \leq 1, \quad 0 \leq g_P \leq 1, \quad 0 \leq g_R \leq 1.
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Die Werte $X_B, Y_B, Z_B, X_P, Y_P, Z_P, X_R, Y_R, Z_R, x_{\text{Ziel}}$ und y_{Ziel} sind zu den Zeitpunkten, an denen das Maximierungsproblem (bzw. das Gleichungssystem (4.2.1)) zu lösen sind, bereits bekannt (vgl. Kapitel 3.7.1, Temperaturanpassung der Tristimuluswerte).

Aus (4.2.3) lässt sich sofort ablesen, dass eine Kombination der beiden in Kapitel 4.1.2 behandelten Sonderfälle vorliegt: Das lineare Programm beinhaltet sowohl Gleichungen als Restriktionen als auch beschränkte Variable. In Anlehnung an die Notationen aus Kapitel 4.1 gilt hier

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_B \\ g_P \\ g_R \end{pmatrix}$$

für den Vektor x der Unbestimmten,

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_B + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_B + Z_B) \right\} = a_{21}, \\
 v_{12} &= - \left\{ (1 - x_{\text{Ziel}})X_P - x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_P + Z_P) \right\} = a_{22}, \\
 v_{13} &= \left\{ (x_{\text{Ziel}} - 1)X_R + x_{\text{Ziel}} \cdot (Y_R + Z_R) \right\} = a_{23}, \\
 v_{21} &= \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_B + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_B + Z_B) \right\} = a_{31}, \\
 v_{22} &= - \left\{ (1 - y_{\text{Ziel}})Y_P - y_{\text{Ziel}} \cdot (X_P + Z_P) \right\} = a_{32}, \\
 v_{23} &= \left\{ (y_{\text{Ziel}} - 1)Y_R + y_{\text{Ziel}} \cdot (X_R + Z_R) \right\} = a_{33}
 \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

für die Koeffizientenmatrix und

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1$$

für die Zielfunktionskoeffizienten, den Vektor auf der rechten Seite und die oberen Schranken für die Variablen. Die zusätzlichen, blau eingefärbten Variablen in (4.2.4) weisen auf die späteren Positionen der berechneten Koeffizienten im Simplextableau hin. Für die Ermittlung der Optimallösung des linearen Programms (4.2.3) wird nun auf die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Methoden zurückgegriffen. Die nachfolgenden Beispiele sollen zum Einen zum besseren Verständnis der Behandlung dieses Optimierungsproblems beitragen, und zum Anderen parallel dazu nochmals das aktuelle Rechenmodell (4.2.1) beleuchten, um letztendlich einen Vergleich beider Ansätze zu erreichen.

4.3 Aktuelles und neues mathematisches Modell im Vergleich

Um zu demonstrieren, wie das Simplexverfahren, seine Varianten und deren Kombinationen zur Lösung des zuvor definierten Optimierungsproblems (4.2.3) eingesetzt werden, dienen die im Anschluss angegebenen, auf konkreten Messdaten beruhenden Beispiele³. Für einen direkten Vergleich der Farbmetrikrechner werden folgende Schritte durchgeführt:

Schritt 1 (aktuelles Modell): Die Temperaturanpassung der Tristimuluswerte (an die augenblickliche Temperatur) erfolgt anhand der Gleichungen in (3.7.1). Dazu können die in der weiter unterhalb abgebildeten Tabelle eingetragenen linearen Trendkurven aus der Typenkalibrierung und die vermessenen Tristimuluswerte aus der Modulkalibrierung herangezogen werden. Danach wird das zugehörige Farbdreieck für die Farbortkontrolle bestimmt. Ergibt die Kontrolle, dass der Zielfarbort im zulässigen Bereich liegt, werden mittels des Gleichungssystems (4.2.1) und unter der Annahme, dass $g_P = 1$ gilt, die Verstärkungsfaktoren ermittelt und eventuell nachbearbeitet. Sagt die Kontrolle allerdings aus, dass der gewünschte Farbort nicht darstellbar ist, werden die Berechnungen angehalten, bis der Benutzer einen neuen Farbort ansteuert.

Modulkalibrierung		Lineare Approximationen	
Phosphor:	$X_P = 1.96782$	$f_{XP}(\text{ADC}) = 0.027795\text{ADC} + 77.18$	
	$Y_P = 2.50504$	$f_{YP}(\text{ADC}) = 0.029908\text{ADC} + 75.445$	
	$Z_P = 0.57626$	$f_{ZP}(\text{ADC}) = 0.012888\text{ADC} + 89.419$	
Blau:	$X_B = 0.68929$	$f_{XB}(\text{ADC}) = 0.043354\text{ADC} + 64.406$	
	$Y_B = 0.31959$	$f_{YB}(\text{ADC}) = 0.028643\text{ADC} + 76.484$	
	$Z_B = 3.75737$	$f_{ZB}(\text{ADC}) = 0.042401\text{ADC} + 65.189$	
Rot:	$X_R = 3.28293$	$f_{XR}(\text{ADC}) = 0.10606\text{ADC} + 12.924$	
	$Y_R = 1.57299$	$f_{YR}(\text{ADC}) = 0.11335\text{ADC} + 6.9367$	
	$Z_R = 0.01233$	$f_{ZR}(\text{ADC}) = 0.082226\text{ADC} + 32.493$	

³Die im gesamten Abschnitt verwendeten Messdaten stammen aus der Vermessung eines LED-Moduls des Typs LTL-2000.

Schritt 2 (neues Modell): Die Temperaturbewertung der Tristimuluskoordinaten, die Erstellung des entsprechenden Farbdreiecks und die Farbortkontrolle erfolgen analog zu Schritt 1. An diesem Punkt der Berechnungen wird nun jedoch eine Erweiterung hinzugefügt. Liefert die Farbortkontrolle einen positiven Ausgang, ist der Zielfarbort darstellbar und seine Koordinaten bleiben unverändert. Ist der Ausgang der Kontrolle negativ, wird nicht gestoppt und auf den nächsten Zielfarbort gewartet, sondern der ursprüngliche, außerhalb des Farbdreiecks liegende Farbort in den gültigen Bereich versetzt. Dazu muss untersucht werden, wo genau sich der Farbort befindet. Je nach dessen Position wird er dann entweder entlang einer senkrecht auf die nächstliegende Verbindungslinie (Blau-Phosphor, Phosphor-Rot oder Blau-Rot) stehende Gerade verschoben, bis er innerhalb des Farbdreiecks liegt, oder auf einen der drei zu den LED-Farben Phosphor, Blau und Rot gehörenden Eckpunkte gelegt. Die Koordinaten des Zielfarborts werden natürlich entsprechend abgewandelt. Für die anschließende Bestimmung der Verstärkungsfaktoren wird zuerst überprüft, ob der gewünschte Farbort (entweder von vornherein oder aufgrund einer Verschiebung der zuvor beschriebenen Art) mit einem der den Eckpunkte des Farbdreiecks entsprechenden Farborte übereinstimmt. Ist dies der Fall, können die gesuchten Faktoren sofort angegeben werden:

$$\begin{aligned}(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) &= (x_{\text{Eck,P}}, y_{\text{Eck,P}}) \Rightarrow g_P = 1, \quad g_B = 0, \quad g_R = 0, \\(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) &= (x_{\text{Eck,B}}, y_{\text{Eck,B}}) \Rightarrow g_P = 0, \quad g_B = 1, \quad g_R = 0, \\(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) &= (x_{\text{Eck,R}}, y_{\text{Eck,R}}) \Rightarrow g_P = 0, \quad g_B = 0, \quad g_R = 1.\end{aligned}$$

In allen anderen Fällen werden die Verstärkungsfaktoren mit Hilfe von (4.2.3) ermittelt.

Bemerkung: Die temperaturangepassten Tristimuluswerte werden nicht nur für die Farbortkontrolle benötigt, sondern fließen natürlich auch in das Gleichungssystem (4.2.1) bzw. in das Maximierungsproblem (4.2.3) ein.

Wie sich die in Schritt 1 und Schritt 2 erläuterten in verschiedenen Situationen verhalten, wird im Anschluss gezeigt. Zu diesem Zweck werden beide Rechenverfahren in C implementiert. Dies ermöglicht außerdem einen direkten Laufzeitvergleich der Algorithmen.

BEISPIEL 1: Für den Zielfarbort

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.4599, 0.4106)$$

sind bei einer Temperatur von 37.18436°C (ADC=760) die Werte von g_P , g_B und g_R zu bestimmen. Die an die gegebene Temperatur angepassten Tristimuluswerte lauten

$$\begin{aligned}X_P &= 0.193445, & Y_P &= 0.245933, & Z_P &= 0.057173, \\X_B &= 0.0671059, & Y_B &= 0.0314006, & Z_B &= 0.36602, \\X_R &= 0.307051, & Y_R &= 0.146418, & Z_R &= 0.00117116.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Da die Farbortkontrolle erfolgreich verläuft, ist der gewünschte Farbort darstellbar.

4.3 Aktuelles und neues mathematisches Modell im Vergleich

- (i) **AKTUELLES MODELL:** Werden unter der Annahme $g_P = 1$ die Daten aus (4.3.1) in die Gleichungen (4.2.1) eingesetzt, ergeben sich folgende Lösungswerte:

	$g_P = 1$
Erster Rechendurchlauf:	$g_B = 0.126164$
	$g_R = 0.545163$
Laufzeit in ms:	$\cong 3.876$

Somit liegen in diesem Fall g_B und g_R nach dem ersten Rechendurchlauf im Intervall $[0, 1]$, sodass keine Nachbehandlungen erforderlich sind.

- (ii) **NEUES MODELL:** Als Alternative dazu werden nun die gesuchten Koeffizienten unter Verwendung des neu entwickelten Modells (4.2.3) und mit Hilfe des in den vorangegangenen Abschnitten ausführlich erklärten Simplex-Algorithmus bestimmt, wobei das betrachtete Maximierungsproblem alle in dieser Arbeit erwähnten Varianten vereint. Im Folgenden sind die notwendigen Rechenschritte anhand der jeweiligen Simplex-Tableaus, ergänzt von kurzen Anmerkungen, dargestellt.

Die zwei Gleichungen in (4.2.3), die die Nebenbedingungen formen, bedeuten die Einführung zweier künstlicher Variablen y_1 und y_2 bzw. einer Hilfszielfunktionszeile im Simplex-Tableau, welche die Maximierung von

$$-y_1 - y_2 = \underbrace{(a_{21} + a_{31})}_{a_{01}} + \underbrace{(a_{22} + a_{32})}_{a_{02}} + \underbrace{(a_{23} + a_{33})}_{a_{03}}$$

darstellt. Diese Werte bzw. auch alle anderen Einträge des Tableaus lassen sich mit den in (4.2.4) angegebenen Koeffizienten berechnen. Das Ausgangstableau⁴ mit den Werten a_{ij} , $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 3$, lautet damit:

		NBV ₁	NBV ₂	NBV ₃
	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
BV ₁	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
BV ₂	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

		$\downarrow g_B$	g_P	g_R
HZF	0	0.305864	-0.00713035	-0.0577047
ZF	0	0	1	0
y_1	0	0.14653	0.0349188	-0.097962
y_2	0	0.159334	-0.0420492	0.0402572

Der Algorithmus (vgl. Kapitel 4.1.2) legt die erste Spalte als Pivotspalte fest, d.h. $s = 1$. In dieser befinden sich nur positive Elemente, und die zugehörigen Kandidaten für das Minimum sind

$$\frac{a_{20}}{a_{21}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{a_{30}}{a_{31}} = 0. \quad (4.3.2)$$

⁴Die Belegung der Koeffizienten a_{ij} ist hier explizit dargestellt, da auf diese im weiteren Verlauf zurückgegriffen wird. Aufgrund der zusätzlichen Hilfszielfunktionszeile treten hier Abweichungen zu den Notationen in Algorithmus 2 auf.

4 Ein neuer Farbmeterrechner

Die der Pivotspalte entsprechende Nichtbasisvariable ist beschränkt und trägt daher mit ihrer oberen Schranke $d = 1$ zur Bestimmung des Minimums bei, wodurch aber klarerweise 0 das gesuchte Minimum ist. Als Pivotzeile wird in diesem Fall die erste Zeile gewählt (genauso könnte wegen (4.3.2) auch die zweite Zeile gewählt werden). Basisaustauschschritt und Pivotoperation mit dem Pivotelement a_{21} ergeben:

	y_1	g_P	$\downarrow g_R$	
HZF	0	-2.08738	-0.0800193	0.146779
ZF	0	0	1	0
g_B	0	6.82455	0.238305	-0.668546
y_2	0	-1.08738	-0.0800193	0.146779

Nun wird die dritte Spalte zur Pivotspalte, d.h. $s = 3$. Zwar kommt darin auch ein negativer Eintrag vor, jedoch ergibt sich für das Minimum gemäß (4.1.11) wieder

$$0 = \min \left\{ 1, \frac{a_{30}}{a_{33}} = 0, \frac{a_{20} - 1}{a_{23}} = \frac{-1}{a_{23}} \cong 1.496 \right\}.$$

Demzufolge ist das Element für die Pivotoperation a_{33} . Durch analoge Berechnungen wie im vorigen Schritt folgt als neues Tableau:

	y_1	g_P	y_2	
HZF	0	-1	0	-1
ZF	0	0	1	0
g_B	0	1.87177	-0.126164	4.55477
g_R	0	-7.40828	-0.545167	6.81294

Die den künstlichen Variablen y_1 und y_2 entsprechenden Spalten und die Hilfsziel-funktionszeile können aus dem Tableau gestrichen werden (Hilfsziel-funktionswert 0, alle künstlichen Variablen sind Nichtbasisvariable):

		g_P
ZF	0	1
g_B	0	-0.126164
g_R	0	-0.545167

Für die Spaltenauswahlregel kommt nun ohnehin nur mehr eine Spalte in Frage. Mit den Rechenregeln des Algorithmus gilt für das gesuchte Minimum

$$1 = \min \left\{ 1, \frac{0 - 1}{-0.126164} \cong 7.926, \frac{0 - 1}{-0.545167} \cong 1.834 \right\}.$$

Somit ist an dieser Stelle eine Transformation durchzuführen, im Zuge derer g_P durch \bar{g}_P zu ersetzen ist und der zu dieser Variable gehörende Index im Indexvektor der Nichtbasisvariablen ein negatives Vorzeichen erhält. Die neuen Einträge des Tableaus sind folgende:

		\bar{g}_P
ZF	-1	-1
g_B	0.126164	0.126164
g_R	0.545167	0.545167

4.3 Aktuelles und neues mathematisches Modell im Vergleich

Die Optimallösung ist erreicht. Sie umfasst nachstehende Lösungswerte:

	$g_P = 1$
Simplexalgorithmus:	$g_B = 0.126164$
	$g_R = 0.545167$
Laufzeit in ms:	$\cong 5.169$

Diese Werte weisen, verglichen mit der Lösung, die aus dem aktuellen Rechenmodell resultiert, nur geringe Abweichungen auf, die auf diverse Rundungen zurückzuführen sind.

Im Anschluss wird ein Beispiel betrachtet, in welchem sich die Annahme $g_P = 1$ als falsch herausstellt.

BEISPIEL 2: Gesucht sind die Verstärkungsfaktoren g_P , g_B und g_R zur Realisierung des Zielfarborts

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.5, 0.3)$$

bei einer Modultemperatur von 51.17166°C (ADC=646). Mit den temperaturangepassten Tristimuluswerten

$$\begin{aligned} X_P &= 0.18721, & Y_P &= 0.237392, & Z_P &= 0.0563263, \\ X_B &= 0.0636991, & Y_B &= 0.030357, & Z_B &= 0.347857, \\ X_R &= 0.267358, & Y_R &= 0.126092, & Z_R &= 0.00105558 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

erweist sich die Farbortkontrolle auch hier als erfolgreich.

- (i) **AKTUELLES MODELL:** Mit der Voraussetzung $g_P = 1$ ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems (4.2.1):

	$g_P = 1$
Erster Rechendurchlauf:	$g_B = 1.16663$
	$g_R = 3.37659$

Der Faktor g_R verfehlt damit eindeutig sein erlaubtes Intervall, und auch g_B liegt nicht in $[0, 1]$. Werden nun alle Werte durch g_R dividiert, folgen als richtige Verstärkungskoeffizienten:

	$g_P = 0.296157$
Zweiter Rechendurchlauf:	$g_B = 0.345506$
	$g_R = 1$
Laufzeit in ms:	$\cong 4.22$

Daraus wird ersichtlich, dass die ursprünglich getroffene Annahme $g_P = 1$ weit vom tatsächlichen Ergebnis entfernt ist!

- (ii) **NEUES MODELL:** In Anlehnung an die Vorgangsweise für das erste, zuvor präsentierte Beispiel, werden im Folgenden nur die einzelnen Tableaus abgebildet:

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

		$\downarrow g_B$	g_P	g_R
HZF	0	0.259474	-0.0398594	-0.0778455
ZF	0	0	1	0
y_1	0	0.157257	0.0532542	-0.0701052
y_2	0	0.102217	-0.0931135	-0.00774033

		y_1	g_P	$\downarrow g_R$
HZF	0	-1.65	-0.127729	-0.0378279
ZF	0	0	1	0
g_B	0	6.359	0.338643	-0.445799
y_2	0	-0.649997	-0.127729	0.0378279

		y_1	g_P	y_2
HZF	0	-1	0	-1
ZF	0	0	1	0
g_B	0	-1.30118	-1.16663	11.7849
g_R	0	-17.1833	-3.37657	26.4355

		$\downarrow g_P$
ZF	0	1
g_B	0	-1.16663
g_R	0	-3.37657

		g_R
ZF	0	0.296158
g_B	0	-0.345507
g_P	0	-0.296158

		\bar{g}_R
ZF	-0.296158	-0.296158
g_B	0.345507	0.345507
g_P	0.296158	0.296158

Die Optimallösung wird daher durch folgende Werte erreicht:

	$g_P = 0.296158$
Simplexalgorithmus:	$g_B = 0.345507$
	$g_R = 1$
Laufzeit in ms:	$\cong 6.151$

Anhand der bisherigen Beispiele lässt sich zwar erkennen, dass die beiden Verfahren zur Bestimmung von g_P , g_B und g_R unterschiedlich vorgehen, aber eine Beurteilung darüber, welches der Rechenmodelle besser funktioniert bzw. die Verstärkungsfaktoren garantiert korrekt ermittelt, ist an dieser Stelle noch nicht möglich. Allerdings können Konstellationen eintreten, welche die Vorteile des neu entwickelten Farbmetrikrechners deutlich hervorheben. Zwei solcher Situationen werden im Folgenden gezeigt.

4.3 Aktuelles und neues mathematisches Modell im Vergleich

BEISPIEL 3: Bei einer Temperatur von 68.81504°C (ADC=488) sind g_P , g_B und g_R zu berechnen, sodass der Zielfarbort

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.1633, 0.1721)$$

erzeugt wird. Zunächst werden wieder die entsprechenden Tristimuluswerte

$$\begin{aligned} X_P &= 0.178568, & Y_P &= 0.225554, & Z_P &= 0.0551529, \\ X_B &= 0.0589775, & Y_B &= 0.0289107, & Z_B &= 0.322686, \\ X_R &= 0.212344, & Y_R &= 0.097921, & Z_R &= 0.000895396 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

bestimmt, um danach die Farbortkontrolle durchführen zu können, welche hier aber ergibt, dass $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ nicht dargestellt werden kann.

- (i) **AKTUELLES MODELL:** Als Reaktion auf die negativ ausgefallene Farbortkontrolle blinken die LEDs kurz. Erst, wenn der Bediener einen anderen Zielfarbort auswählt, werden die Berechnungen wieder aufgenommen.
- (ii) **NEUES MODELL:** Gemäß der Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts (Schritt 2) wird $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ entlang der Geraden, die senkrecht auf die Verbindungsgerade der Eckpunkte $(x_{\text{Eck,B}}, y_{\text{Eck,B}})$ und $(x_{\text{Eck,P}}, y_{\text{Eck,P}})$ steht und auf der der Zielfarbort liegt, in das augenblickliche Farbdreieck verschoben. Dadurch ändern sich die Koordinaten des zu erzeugenden Farborts und werden zu

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.192864, 0.154872).$$

Werden diese Werte zusammen mit den temperaturangepassten Tristimuluswerten aus (4.3.4) in das Maximierungsproblem (4.2.3) eingesetzt und dieses, wie in den Beispielen zuvor, mit dem Simplexverfahren gelöst, lauten die Verstärkungsfaktoren:

	$g_P = 0.224544$
Simplexalgorithmus:	$g_B = 1$
	$g_R = 0.00000557878$
Laufzeit in ms:	$\cong 6.577$

Während also das aktuelle Modell aussetzt und die weitere Vorgangsweise vom Benutzer abhängt, erzeugt das neue Modell eine Lichtfarbe, welche jenem darstellbaren Farbort entspricht, der dem ursprünglich gewünschten am ähnlichsten ist.

Als letztes Beispiel wird eine Situation beschrieben, in welcher das neue Modell die richtigen Verstärkungsfaktoren berechnet, das aktuelle Modell hingegen versagt.

BEISPIEL 4: Der bei einer Modultemperatur von 44.12709°C (ADC=706) eingestellte Zielfarbort

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.33, 0.3913842712609573)$$

hat einen minimalen Abstand zum gültigen Bereich, d.h. er liegt ganz knapp außerhalb davon. Die Reaktion der beiden Farbmetrikrechner hängt hier vor allem davon ab, wie viele Nachkommastellen des gewünschten Farborts, aber auch der Tristimuluswerte und der

4 Ein neuer Farbmatrikrechner

daraus berechneten Eckpunktsfarborte, berücksichtigt bzw. welche Rundungen vorgenommen werden. Beispielsweise könnte ein Farbort laut Farbortkontrolle nicht innerhalb des Farbdreiecks liegen, obwohl er sich aber in Wirklichkeit gerade noch darin befindet und daher natürlich auch realisiert werden sollte. Das aktuelle Modell würde dann mit einem Blinken der LEDs antworten; der neue Farbmatrikrechner würde zwar auch nicht sofort den Zielfarbort erzeugen, aber dafür diesen weiter in das Dreieck hinein verschieben und die Verstärkungsfaktoren für den daraus resultierenden, neuen Farbort, welcher nur einen verschwindend kleinen Abstand zum ursprünglichen Farbort hätte, berechnen.

In dem hier betrachteten Szenario, d.h. für den zuvor angegebenen Zielfarbort, müsste die auf den temperaturbewerteten Tristimulukoordinaten

$$\begin{aligned} X_P &= 0.190491, Y_P = 0.241887, & Z_P &= 0.0567719, \\ X_B &= 0.0654921, Y_B = 0.0309063, & Z_B &= 0.357416, \\ X_R &= 0.288249, Y_R = 0.13679, & Z_R &= 0.00111641 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

basierende Farbortkontrolle eigentlich einen negativen Ausgang haben, liefert jedoch das Ergebnis, dass $(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}})$ darstellbar ist.

- (i) **AKTUELLES MODELL:** Mit $g_P = 1$, den Koordinaten des Zielfarborts und den Tristimuluswerten aus (4.3.5) ergeben sich durch Lösen des Gleichungssystems (4.2.1) folgende Verstärkungsfaktoren:

	$g_P = 1$
Erster Rechendurchlauf:	$g_B = 0.343939$
	$g_R = -0.00060438$
Laufzeit in ms:	$\cong 4.064$

Einer der Verstärkungsfaktoren ist also negativ, was als sinnloses Ergebnis zu bewerten und worauf der Farbmatrikrechner bzw. das System auch nicht vorbereitet ist - vor allem kann auch nach wiederholten Rechenschritten das negative Vorzeichen nicht eliminiert werden!

- (ii) **NEUES MODELL:** Wird das Maximierungsproblem (4.2.3) mit dem Simplexalgorithmus gelöst, lauten die Lösungswerte:

	$g_P = 1$
Simplexalgorithmus:	$g_B = 0.344112$
	$g_R = 0.00000520979$
Laufzeit in ms:	$\cong 6.577$

Der Zielfarbort kann also problemlos erzeugt werden.

Zusammenfassend gilt:

- In Hinblick auf die in Millisekunden gemessenen, d.h. sehr kurzen Laufzeiten der implementierten C-Algorithmen sind keine großen Unterschiede auszumachen.

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

- Die Einfachheit des Lösens des Gleichungssystems im aktuellen Modell ist natürlich unbestritten und gleichzeitig auch sein Vorteil gegenüber dem Simplexverfahren, welches das Verständnis einiger komplexer mathematischer Hintergründe und eine kompliziertere Implementierung erfordert.
- Das derzeitige mathematische Modell beruht auf einer Annahme ($g_P = 1$). Dies ist in vielen Fällen unproblematisch, aber dennoch Kennzeichen einer nicht vollständig durchdachten und daher unschönen Methode.
- Im Gegensatz dazu liefert das Simplexverfahren in Kombination mit einer Erweiterung der Farbortkontrolle für jeden erdenklichen Fall **sofort** und **garantiert** die richtigen Lösungswerte.
- In Einzelfällen können sogar nur mit dem neuen Farbmetriekrechner sinnvolle Verstärkungsfaktoren bestimmt werden.

Die letzten beiden Beispiele dieses Kapitels können als eindeutiges Argument für das neue und gegen das aktuelle Rechenmodell interpretiert werden. Zudem ist im Voraus nicht abzusehen, ob gewisse Situationen eintreten werden, in welchen der zur Zeit eingesetzte Farbmetriekrechner scheitert, der neu entwickelte hingegen korrekte Lösungen ermittelt. Noch deutlicher wird die Sachlage, wenn in das Maximierungsproblem (4.2.3) anstatt der bisher verwendeten, temperaturabhängigen Tristimuluswerte, die aus einer linearen Näherung der Messkurven stammen, besser approximierte Tristimuluswerte eingesetzt werden. Die Behandlung dieser Thematik erfolgt im anschließenden Abschnitt.

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Sowohl in das Gleichungssystem (4.2.1) als auch in das lineare Programm (4.2.3) fließen die Tristimuluswerte X , Y und Z , die den drei zur Einstellung des Zielfarborts eingesetzten LED-Farben Phosphor, Blau und Rot entsprechen, ein. Entscheidend dabei ist die Tatsache, dass diese Werte nicht konstant gehalten, sondern permanent der aktuellen Modultemperatur angepasst werden, da diese Einfluss auf die CIE-Koordinaten und somit auf die Genauigkeit der Realisierung des Zielfarborts hat. Für die Temperaturbewertung der Tristimulusdaten wurde bislang einfachheitshalber angenommen, dass diese **linear** von der Temperatur abhängen. Die Gleichungen in (3.7.1) repräsentieren diesen linearen Zusammenhang. Aus den aufgenommenen Messdaten⁵ wird nun aber ersichtlich, dass die Approximation der tatsächlichen Temperaturkurven durch Geraden in manchen Fällen zwar ausreichend genau, in manchen hingegen deutlich falsch ist. Ein gutes Beispiel dafür sind die vermessenen, temperaturabhängigen Phosphor-Z-Werte, wovon einige, zusammen mit der linearen Funktion, welche als Näherung der Messkurve verwendet wird, in Abbildung

⁵Alle in diesem Kapitel verwendeten Daten entstammen der gleichen Messreihe (Typenkalibrierung für den Typ LTL-2000, Modulkalibrierung für ein bestimmtes Modul dieses Typs).

4 Ein neuer Farbmeterrechner

4.1 gezeigt werden. Die Approximation ist hier offensichtlich in weiten Bereichen der Tem-

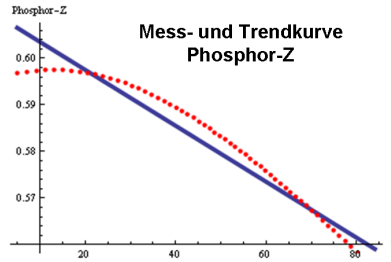


Abbildung 4.1 – Lineare Approximation der Phosphor-Z-Werte

peraturskala zu ungenau. Der nächste Abschnitt dient als Motivation für die Wichtigkeit einer möglichst korrekten Temperaturanpassung der Tristimuluskoordinaten.

4.4.1 Motivation

Durch das im Anschluss beschriebene Beispiel kann ein Verständnis dafür aufgebaut werden, inwiefern sich eine nicht ausreichend gute Approximation des temperaturabhängigen Verhaltens der Tristimuluswerte der verschiedenen LED-Farben auf die Korrektheit der berechneten Verstärkungsfaktoren g_P , g_B und g_R des zu erzeugenden Farborts und in der Folge auf dessen Genauigkeit auswirkt. Ausgangspunkt sind die bereits in Kapitel 4.3 verwendeten und nochmals in Tabelle 4.1 zusammengefassten Daten für ein spezielles LED-Modul, wobei die einzelnen linearen Trendkurven aus der Typenkalibrierung resultieren. Weiters

Modulkalibrierung		Lineare Approximationen	
Phosphor:	$X_P = 1.96782$	$f_{XP}(\text{ADC}) = 0.027795\text{ADC} + 77.18$	
	$Y_P = 2.50504$	$f_{YP}(\text{ADC}) = 0.029908\text{ADC} + 75.445$	
	$Z_P = 0.57626$	$f_{ZP}(\text{ADC}) = 0.012888\text{ADC} + 89.419$	
Blau:	$X_B = 0.68929$	$f_{XB}(\text{ADC}) = 0.043354\text{ADC} + 64.406$	
	$Y_B = 3.1959$	$f_{YB}(\text{ADC}) = 0.028643\text{ADC} + 76.484$	
	$Z_B = 3.75737$	$f_{ZB}(\text{ADC}) = 0.042401\text{ADC} + 65.189$	
Rot:	$X_R = 3.28293$	$f_{XR}(\text{ADC}) = 0.10606\text{ADC} + 12.924$	
	$Y_R = 1.57299$	$f_{YR}(\text{ADC}) = 0.11335\text{ADC} + 6.9367$	
	$Z_R = 0.01233$	$f_{ZR}(\text{ADC}) = 0.082226\text{ADC} + 32.493$	

Tabelle 4.1 – Vermessene Daten (Modul- und Typenkalibrierung)

sei der einzustellende Zielfarbort

$$(x_{\text{Ziel}}, y_{\text{Ziel}}) = (0.3851, 0.3817) \hat{=} 4000K.$$

Bei einer angenommenen Modultemperatur von 40.09883°C (ADC-Wert 738) werden die Verstärkungsfaktoren g_P , g_B und g_R zunächst über die dieser Temperatur entsprechenden, vermessenen, Tabelle 4.2 zu entnehmenden Tristimuluswerte bestimmt. Zu diesem Zweck

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Vermessene Tristimuluswerte bei 40.09883°C					
	$X_P = 1.89302592$		$X_B = 0.67359832$		$X_R = 2.65853457$
Phosphor:	$Y_P = 2.39268073$	Blau:	$Y_B = 0.24707415$	Rot:	$Y_R = 1.2410425$
	$Z_P = 0.5894267$		$Z_B = 3.6362261$		$Z_R = 0.00449678$

Tabelle 4.2 – Vermessene Werte bei ca. 40 Grad Celsius

werden diese Werte in das Maximierungsproblem 4.2.3 eingesetzt, welches danach mit Hilfe des Simplexalgorithmus gelöst wird. Die daraus resultierenden Koeffizienten sind

$$g_P = 1, \quad g_B = 0.310174, \quad g_R = 0.276837. \quad (4.4.1)$$

Zum Vergleich erfolgt für die selbe Modultemperatur eine Anpassung der Tristimuluswerte mittels der Gleichungen in (3.7.1). Die dafür benötigten linearen Näherungsfunktionen (mit ADC=738) und Messwerte aus der Modulkalibrierung sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Anschließend fließen die berechneten, temperaturbewerteten Tristimuluswerte wie zuvor in das Maximierungsproblem (4.2.3) ein. Das Simplexverfahren liefert die Lösung

$$g_P = 1, \quad g_B = 0.313807, \quad g_R = 0.276878. \quad (4.4.2)$$

Die Verstärkungskoeffizienten in (4.4.2) weichen also von jenen in (4.4.1) ab, wodurch es letztlich zu einer (mehr oder weniger starken) Abweichung des erzeugten Farborts vom Zielfarbort kommt (eine detaillierte Analyse dazu wird in Kapitel 4.4.3 durchgeführt). Das bedeutet, dass sich ein grundlegender, vom verwendeten Rechenverfahren unabhängiger Fehler einstellt. Für diesen gilt:

- Ihn vollständig zu beheben, würde einen enormen Vermessungs- und Speicheraufwand bedeuten, da neben der Modul- auch die Typenkalibrierung für jedes LED-Modul durchgeführt werden müsste, um immer auf temperaturabhängige Messwerte zurückgreifen zu können, welche zusätzlich fix abzuspeichern wären.
- Allerdings kann er durch die Herleitung besserer und flexibler Approximationen der Temperaturkurven verkleinert werden.

Im nachfolgenden Kapitel wird ein Approximationsansatz vorgestellt, der je nach Gestalt der betrachteten Messkurve geeignet angepasst bzw. abgeändert werden kann.

4.4.2 Neuer Approximationsansatz

Um neue, bessere Approximationen $P_X(T)$, $P_Y(T)$ und $P_Z(T)$ für die Phosphor-Kurven, $B_X(T)$, $B_Y(T)$ und $B_Z(T)$ für die Blau-Kurven und $R_X(T)$, $R_Y(T)$ und $R_Z(T)$ für die Rot-Kurven als Ersatz für die bislang verwendeten linearen Trendkurven zu finden, können unterschiedliche Ansätze verfolgt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird lediglich eine von vielen Möglichkeiten vorgestellt. Sie beruht auf folgenden Überlegungen:

4 Ein neuer Farbmeterkrechner

- Das gesamte, betrachtete Temperaturintervall $[T_{\min}, T_{\max}]$ wird in drei Teilintervalle $I_i = [T_{i-1}, T_i]$, $1 \leq i \leq 3$, d.h. in $[T_0, T_1]$, $[T_1, T_2]$ und $[T_2, T_3]$ zerlegt, wobei $T_0 = T_{\min}$ und $T_3 = T_{\max}$ gilt. Die Bezugswerte sind

$$\begin{aligned} T_0 &= 4.94543^\circ\text{C}, \\ T_1 &= 9.16715^\circ\text{C}, \\ T_2 &= 60.03959^\circ\text{C}, \\ T_3 &= 84.01235^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Diese Wahl ist frei getroffen und beruht auf der Überlegung, dass die Messkurven in einer Umgebung dieser Intervallgrenzen jeweils ihre Struktur ändern.

- Die den Temperaturen T_0 , T_1 , T_2 und T_3 entsprechenden, vermessenen Tristimuluswerte, hier allgemein für jede der Koordinaten X , Y und Z mit W_0 , W_1 , W_2 und W_3 bezeichnet, sind gegeben (vgl. Tabellen 4.3-4.11).
- In jedem der drei Intervalle werden als Approximationsansätze prinzipiell quadratische Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(T) &= a_1 + b_1T + c_1T^2, \\ f_2(T) &= a_2 + b_2T + c_2T^2, \\ f_3(T) &= a_3 + b_3T + c_3T^2 \end{aligned}$$

festgelegt. Dies erfolgt natürlich für jede Tristimuluskoordinate und für jede LED-Farbe.

- Im nächsten Schritt werden die Koeffizienten der quadratischen Funktionen berechnet. Die Kurven $f_1(T)$, $f_2(T)$ und $f_3(T)$ werden dabei so definiert, dass sich insgesamt stetige Funktionen ergeben, deren erste Ableitungen ebenfalls stetig sind. Daraus lassen sich folgende Bedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} f_1(T_0) &= a_1 + b_1T_0 + c_1T_0^2 = W_0, \\ f_1(T_1) &= a_1 + b_1T_1 + c_1T_1^2 = W_1, \\ f_2(T_1) &= a_2 + b_2T_1 + c_2T_1^2 = W_1, \\ f_2(T_2) &= a_2 + b_2T_2 + c_2T_2^2 = W_2, \\ f_3(T_2) &= a_3 + b_3T_2 + c_3T_2^2 = W_2, \\ f_3(T_3) &= a_3 + b_3T_3 + c_3T_3^2 = W_3, \\ \frac{df_1}{dT}(T_1) &= \frac{df_2}{dT}(T_1) \Leftrightarrow b_1 + 2c_1T_1 - b_2 - 2c_2T_1 = 0, \\ \frac{df_2}{dT}(T_2) &= \frac{df_3}{dT}(T_2) \Leftrightarrow b_2 + 2c_2T_2 - b_3 - 2c_3T_2 = 0. \end{aligned}$$

Es liegen nur acht Gleichungen für neun Unbestimmte vor. Als Zusatzbedingung, welche aufgrund der Beschaffenheit der Temperaturkurven als sinnvoll erscheint, wird

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

das Verschwinden der ersten Ableitungen von $f_1(T)$ und $f_2(T)$ an der Stelle T_1 gewählt. Somit lautet das endgültige Gleichungssystem zur Bestimmung der gesuchten Parameter

$$\begin{aligned}
 f_1(T_0) &= a_1 + b_1T_0 + c_1T_0^2 = W_0, \\
 f_1(T_1) &= a_1 + b_1T_1 + c_1T_1^2 = W_1, \\
 f_2(T_1) &= a_2 + b_2T_1 + c_2T_1^2 = W_1, \\
 f_2(T_2) &= a_2 + b_2T_2 + c_2T_2^2 = W_2, \\
 f_3(T_2) &= a_3 + b_3T_2 + c_3T_2^2 = W_2, \\
 f_3(T_3) &= a_3 + b_3T_3 + c_3T_3^2 = W_3, \\
 \frac{df_1}{dT}(T_1) &= b_1 + 2c_1T_1 = 0, \\
 \frac{df_2}{dT}(T_1) &= b_2 + 2c_2T_1 = 0, \\
 \frac{df_2}{dT}(T_2) &= \frac{df_3}{dT}(T_2) \Leftrightarrow b_2 + 2c_2T_2 - b_3 - 2c_3T_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems liefert für $f_1(T)$ die Werte

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{W_1 - W_0}{2T_1(T_0 - T_1) - T_0^2 + T_1^2}, \\
 b_1 &= \frac{W_0 - W_1 - c_1(T_0^2 - T_1^2)}{T_0 - T_1}, \\
 a_1 &= W_0 - b_1T_0 - c_1T_0^2,
 \end{aligned}$$

für $f_2(T)$ die Werte

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{W_2 - W_1}{2T_1(T_1 - T_2) - T_1^2 + T_2^2}, \\
 b_2 &= \frac{W_1 - W_2 - c_2(T_1^2 - T_2^2)}{T_1 - T_2}, \\
 a_2 &= W_1 - b_2T_1 - c_2T_1^2
 \end{aligned}$$

und für $f_3(T)$ die Werte

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \frac{b_2(T_2 - T_3) + 2c_2T_2(T_2 - T_3) - W_2 + W_3}{2T_2(T_2 - T_3) - T_2^2 + T_3^2}, \\
 b_3 &= \frac{W_2 - W_3 - c_3(T_2^2 - T_3^2)}{T_2 - T_3}, \\
 a_3 &= W_2 - b_3T_2 - c_3T_2^2.
 \end{aligned}$$

Am Beispiel der Phosphor-Z-Kurve zeigen die linke Graphik aus Abbildung 4.2 die Kopp- lung der drei quadratischen Funktionen als Approximation der vermessenen, temperatur- abhängigen Werte (durch rote Punkte dargestellt) und die rechte Graphik den direkten

Vergleich mit der linearen Näherungsfunktion, in welchem die neu erhaltene Kurve eindeutig besser abschneidet (die für diese Grafiken, aber auch für alle anschließenden Berechnungen verwendeten Daten sind den Tabellen 4.3-4.11 zu entnehmen). Für jede der

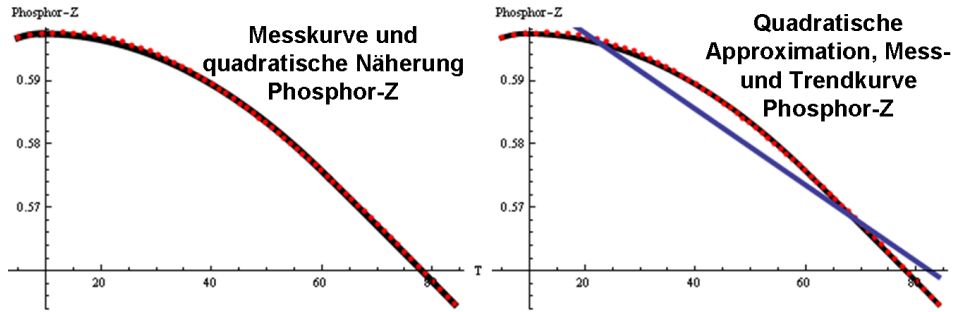


Abbildung 4.2 – Näherungskurven

zu approximierenden Kurven kann nun untersucht werden, ob sich die hergeleiteten quadratischen Funktionen verändern oder vereinfachen lassen, d.h. ob sie sich aufgrund des Verhaltens der Messdaten auf lineare Funktionen reduzieren. Dies kann in allen drei zugrundeliegenden Intervallen, aber auch fallweise nur in Teilintervallen eintreten, sodass also verschiedene Approximationsvarianten möglich sind. Um herauszufinden, welche davon für die unterschiedlichen Messkurven geeignet sind, werden die Ausgangsintervalle I_i noch einmal unterteilt, sodass

$$I_i = [T_{i-1}, T_i] = [T_{i-1}, T_{i-1,i}] \cup [T_{i-1,i}, T_i]$$

gilt, wobei die zugehörigen Temperaturen durch

$$\begin{aligned} T_{01} &= 7.08454^\circ\text{C}, \\ T_{12} &= 34.69824^\circ\text{C}, \\ T_{23} &= 72.14154^\circ\text{C} \end{aligned}$$

gegeben und die zugehörigen Tristimuluswerte den Tabellen 4.3-4.11 zu entnehmen sind. Die weitere, für alle Messkurven gültige Vorgangsweise wird in den nächsten Schritten beschrieben. Hierbei dient die Variable W als Platzhalter für X , Y oder Z und die Approximationsfunktion $A_W(T)$ als Platzhalter für die Funktionen $P_X(T)$, $P_Y(T)$, $P_Z(T)$, $B_X(T)$, $B_Y(T)$, $B_Z(T)$, $R_X(T)$, $R_Y(T)$ und $R_Z(T)$.

Schritt 1: Herleitung zweier linearer Funktionen

$$\begin{aligned} h_{i1}(T) &= k_{i1}T + d_{i1}, \\ h_{i2}(T) &= k_{i2}T + d_{i2} \end{aligned}$$

in jedem Teilintervall I_i , $i = 1, 2, 3$, anhand der Bedingungen

$$\begin{aligned} h_{i1}(T_{i-1}) &= k_{i1}T_{i-1} + d_{i1} = W_{i-1}, \\ h_{i1}(T_{i-1,i}) &= k_{i1}T_{i-1,i} + d_{i1} = W_{i-1,i} \end{aligned}$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

und

$$\begin{aligned}h_{i2}(T_{i-1,i}) &= k_{i2}T_{i-1,i} + d_{i2} = W_{i-1,i}, \\h_{i2}(T_i) &= k_{i2}T_i + d_{i2} = W_i.\end{aligned}$$

Schritt 2: Unterscheidung verschiedener Fälle für die einzelnen Teilintervalle $[T_{i-1}, T_i]$ und darauf basierende, eventuelle Abänderung der quadratischen Funktionen f_i , $1 \leq i \leq 3$. An dieser Stelle sei angemerkt, dass aufgrund der Gestalt der Messkurven in jedem Intervall jeweils nur zwei verschiedene, relevante Ansätze betrachtet werden. Welche davon schließlich verwendet werden, beruht zum Teil auf Vergleichen der Steigungen k_{i1} , k_{i2} , $1 \leq i \leq 3$, mit bestimmten, festgelegten oberen und unteren Schranken. Weichen in einem Intervall

$$[T_{i-1}, T_i] = [T_{i-1}, T_{i-1,i}] \cup [T_{i-1,i}, T_i]$$

die Werte von k_{i1} und k_{i2} „zu stark“ voneinander ab, d.h. überschreiten sie eine bestimmte Schranke, ist in diesem Temperaturbereich eine quadratische Approximation notwendig. Übersteigt der Betrag der Differenz von k_{i1} und k_{i2} im selben Intervall zusätzlich eine weitere Schranke, wird die Kombination einer quadratischen und einer linearen Funktion gewählt; eine Funktion allein ist dann für eine akzeptable Approximation nicht mehr ausreichend. Unterschreitet die Abweichung von k_{i1} und k_{i2} in einem Intervall hingegen eine fixe Schranke, können je nach Beschaffenheit der Kurve und betrachtetem Intervall $[T_{i-1}, T_i]$ entweder die Kombination zweier linearer Funktionen oder, wenn die Abweichung verschwindend klein ist, sogar nur eine lineare Funktion für die Approximation definiert werden. Die Problematik ist hier die Definition allgemeiner Schranken, die für jedes Temperaturintervall und für alle Farben und Tristimuluswerte gültig sind. Diese kommt zustande, da

- die Wertebereiche, in denen die gemessenen Tristimuluswerte liegen, nicht für alle LED-Farben und für alle Tristimuluskoordinaten gleich sind, sondern variieren,
- als Grundlage lediglich **eine** Messreihe dient.

Nichtsdestotrotz können die im Folgenden beschriebenen Überlegungen zur Herleitung geeigneter Approximationsansätze in den drei vorgegebenen Temperaturintervallen als Vorlage für andere Messreihenbewertungen betrachtet werden.

(i) **Fallunterscheidung in $[T_0, T_1]$:**

Fall 1-1: $k_{11} > 0$ und $k_{12} > 0 \Rightarrow$ quadratischer Ansatz

Fall 1-2: $k_{11} \not> 0$ und $k_{12} \not> 0 \Rightarrow$ linearer Ansatz.

(ii) **Fallunterscheidung in $[T_1, T_2]$:** Seien $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ geeignet gewählt.

Fall 2-1: $K_1 < |k_{21} - k_{22}| < K_2 \Rightarrow$ quadratischer Ansatz,

Fall 2-2: $|k_{21} - k_{22}| \geq K_2 \Rightarrow$ quadratischer Ansatz in $[T_1, T_{12}]$
linearer Ansatz in $[T_{12}, T_2]$.

(iii) **Fallunterscheidung in $[T_2, T_3]$** : Seien $K_3, K_4 \in \mathbb{R}_+$ geeignet gewählt.

Fall 3-1: $|k_{31} - k_{32}| \leq K_3 \Rightarrow$ linearer Ansatz

Fall 3-2: $K_3 < |k_{31} - k_{32}| < K_4 \Rightarrow$ lineare Ansätze in $[T_2, T_{23}], [T_{23}, T_3]$.

Schritt 3: Untersuchung aller möglicher Varianten und Definition der zugehörigen Approximationsfunktionen, basierend auf den Fallunterscheidungen aus Schritt 2.

• **Variante 1:**

$[T_0, T_1]$: Fall 1-1

$[T_1, T_2]$: Fall 2-1

$[T_2, T_3]$: Fall 3-1

Für $[T_2, T_3]$ resultiert eine lineare Funktion

$$\bar{f}_3(T) = \bar{k}_3 T + \bar{d}_3.$$

Sie stellt eine Gerade dar, die die Punkte W_2 und W_3 verbindet. Daher ergeben sich \bar{k}_3 und \bar{d}_3 aus

$$\begin{aligned} \bar{k}_3 &= \frac{W_2 - W_3}{T_2 - T_3}, \\ \bar{d}_3 &= W_3 - \bar{k}_3 T_3. \end{aligned}$$

Für $[T_1, T_2]$ resultiert eine quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{2,\text{neu1}} = \tilde{a}_{2,\text{neu1}} + \tilde{b}_{2,\text{neu1}} T + \tilde{c}_{2,\text{neu1}} T^2,$$

deren Koeffizienten mittels der Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu1}}}{dT}(T_2) &= \tilde{b}_{2,\text{neu1}} + 2\tilde{c}_{2,\text{neu1}} T_2 = \bar{k}_3, \\ \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu1}}}{dT}(T_1) &= \tilde{b}_{2,\text{neu1}} + 2\tilde{c}_{2,\text{neu1}} T_1 = 0, \\ \tilde{f}_{2,\text{neu1}}(T_2) &= W_2 \end{aligned}$$

berechnet werden. Die erste Ableitung von $\tilde{f}_{2,\text{neu1}}$ an der Stelle T_2 wird also der Steigung der zuvor definierten Geraden \bar{f}_3 angepasst, während T_1 wieder als Extremstelle fixiert wird. Somit können $\tilde{a}_{2,\text{neu1}}, \tilde{b}_{2,\text{neu1}}$ und $\tilde{c}_{2,\text{neu1}}$ aus

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2,\text{neu1}} &= \frac{\bar{k}_3}{2(T_2 - T_1)}, \\ \tilde{b}_{2,\text{neu1}} &= -2\tilde{c}_{2,\text{neu1}} T_1, \\ \tilde{a}_{2,\text{neu1}} &= W_2 - \tilde{b}_{2,\text{neu1}} T_2 - \tilde{c}_{2,\text{neu1}} T_2^2 \end{aligned}$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

berechnet werden. Abschließend ist noch die quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{1,\text{neu1}} = \tilde{a}_{1,\text{neu1}} + \tilde{b}_{1,\text{neu1}}T + \tilde{c}_{1,\text{neu1}}T^2$$

zu ermitteln, welche wiederum auf $\tilde{f}_{2,\text{neu1}}$ abgestimmt wird, sodass die Funktionswerte in T_1 die selben sind. Aus den Vorgaben

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_{1,\text{neu1}}}{dT}(T_1) &= 0, \\ \tilde{f}_{1,\text{neu1}}(T_1) &= \tilde{f}_{2,\text{neu1}}(T_1), \\ \tilde{f}_{1,\text{neu1}}(T_0) &= W_0 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{1,\text{neu1}} &= \frac{\tilde{a}_{2,\text{neu1}} + \tilde{b}_{2,\text{neu1}}T_1 + \tilde{c}_{2,\text{neu1}}T_1^2 - W_0}{T_1^2 - T_0^2 - 2T_1(T_1 - T_0)}, \\ \tilde{b}_{1,\text{neu1}} &= -2\tilde{c}_{1,\text{neu1}}T_1, \\ \tilde{a}_{1,\text{neu1}} &= W_0 - \tilde{b}_{1,\text{neu1}}T_0 - \tilde{c}_{1,\text{neu1}}T_0^2. \end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \tilde{f}_{1,\text{neu1}}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu1}} + \tilde{b}_{1,\text{neu1}}T + \tilde{c}_{1,\text{neu1}}T^2, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu1}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu1}} + \tilde{b}_{2,\text{neu1}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu1}}T^2, & T \in [T_1, T_2] \\ \bar{f}_3(T) = \bar{k}_3T + \bar{d}_3, & T \in [T_2, T_3]. \end{cases}$$

• Variante 2:

$[T_0, T_1]$: Fall 1-1

$[T_1, T_2]$: Fall 2-1

$[T_2, T_3]$: Fall 3-2

Für $[T_2, T_3]$ werden eine Aufspaltung des Intervalls vorgenommen und die in Schritt 1 definierten linearen Funktionen h_{31} in $[T_2, T_{23}]$ und h_{32} in $[T_{23}, T_3]$ verwendet. Ähnlich zu Variante 1 wird die im Intervall $[T_1, T_2]$ gesuchte quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{2,\text{neu2}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu2}} + \tilde{b}_{2,\text{neu2}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu2}}T^2$$

bezüglich ihrer ersten Ableitung an der Stelle T_2 an $h_{31}(T)$ angepasst, nimmt also dort den Wert k_{31} an. Die Koeffizienten $\tilde{a}_{2,\text{neu2}}$, $\tilde{b}_{2,\text{neu2}}$ und $\tilde{c}_{2,\text{neu2}}$ können daher aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu2}}}{dT}(T_2) &= k_{31}, \\ \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu2}}}{dT}(T_1) &= 0, \\ \tilde{f}_{2,\text{neu2}}(T_2) &= W_2 \end{aligned}$$

4 Ein neuer Farbmatrikrechner

berechnet werden, was die Werte

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{2,\text{neu}2} &= \frac{k_{31}}{2(T_2 - T_2)}, \\ \tilde{b}_{2,\text{neu}2} &= -2\tilde{c}_{2,\text{neu}2}T_1, \\ \tilde{a}_{2,\text{neu}2} &= W_2 - \tilde{b}_{2,\text{neu}2}T_2 - \tilde{c}_{2,\text{neu}2}T_2^2\end{aligned}$$

ergibt. Da $\tilde{f}_{2,\text{neu}2}$ von $\tilde{f}_{2,\text{neu}1}$ abweicht, muss auch $\tilde{f}_{1,\text{neu}1}$ in eine neue quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{1,\text{neu}2}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu}2} + \tilde{b}_{1,\text{neu}2}T + \tilde{c}_{1,\text{neu}2}T^2$$

abgewandelt werden, was anhand von

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{f}_{1,\text{neu}2}}{dT}(T_1) &= 0, \\ \tilde{f}_{1,\text{neu}2}(T_1) &= \tilde{f}_{2,\text{neu}2}(T_1), \\ \tilde{f}_{1,\text{neu}2}(T_0) &= W_0\end{aligned}$$

erfolgt. Somit gilt für die gesuchten Koeffizienten

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{1,\text{neu}2} &= \frac{\tilde{a}_{2,\text{neu}2} + \tilde{b}_{2,\text{neu}2}T_1 + \tilde{c}_{2,\text{neu}2}T_1^2 - W_0}{T_1^2 - T_0^2 - 2T_1(T_1 - T_0)}, \\ \tilde{b}_{1,\text{neu}2} &= -2\tilde{c}_{1,\text{neu}2}T_1, \\ \tilde{a}_{1,\text{neu}2} &= W_0 - \tilde{b}_{1,\text{neu}2}T_0 - \tilde{c}_{1,\text{neu}2}T_0^2.\end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \tilde{f}_{1,\text{neu}2}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu}2} + \tilde{b}_{1,\text{neu}2}T + \tilde{c}_{1,\text{neu}2}T^2, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu}2}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu}2} + \tilde{b}_{2,\text{neu}2}T + \tilde{c}_{2,\text{neu}2}T^2, & T \in [T_1, T_2] \\ h_{31}(T) = k_{31}T + d_{31}, & T \in [T_2, T_{23}] \\ h_{32}(T) = k_{32}T + d_{32}, & T \in [T_{23}, T_3]. \end{cases}$$

• Variante 3:

$[T_0, T_1]$: Fall 1-1

$[T_1, T_2]$: Fall 2-2

$[T_2, T_3]$: Fall 3-1

Wie in Variante 1 wird als Näherungsfunktion in $[T_2, T_3]$ die lineare Funktion $\bar{f}_3(T)$ verwendet. Das Intervall $[T_1, T_2]$ wird aufgespalten, wobei in $[T_{12}, T_2]$ die in Schritt 1 definierte Gerade $h_{22}(T)$ und in $[T_1, T_{12}]$ eine quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{2,\text{neu}3}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu}3} + \tilde{b}_{2,\text{neu}3}T + \tilde{c}_{2,\text{neu}3}T^2$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

für die Approximation eingesetzt werden. Hierbei wird $\tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T)$ analog zu den bisher erwähnten Varianten auf $h_{22}(T)$ abgestimmt, jedoch ist T_1 nicht mehr als Extremstelle fixiert. Die Bedingungen für die Ermittlung der gesuchten Koeffizienten sind in diesem Fall

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu3}}}{dT}(T_{12}) &= k_{22}, \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T_{12}) &= W_{12}, \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T_1) &= W_1,\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{2,\text{neu3}} &= \frac{W_1 - W_{12} - k_{22}(T_1 - T_{12})}{T_1^2 - T_{12}^2 - 2T_{12}(T_1 - T_{12})}, \\ \tilde{b}_{2,\text{neu3}} &= k_{22} - 2\tilde{c}_{2,\text{neu3}}T_{12}, \\ \tilde{a}_{2,\text{neu3}} &= W_1 - \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T_1 - \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T_1^2\end{aligned}$$

folgt. Dies impliziert weiters die Notwendigkeit der Definition einer neuen quadratischen Funktion

$$\tilde{f}_{1,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu3}} + \tilde{b}_{1,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{1,\text{neu3}}T^2,$$

in $[T_0, T_1]$, für deren Koeffizienten, wieder analog zu den vorangegangenen Varianten,

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{1,\text{neu3}} &= \frac{\tilde{a}_{2,\text{neu3}} + \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T_1 + \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T_1^2 - W_0}{T_1^2 - T_0^2 - 2T_1(T_1 - T_0)}, \\ \tilde{b}_{1,\text{neu3}} &= -2\tilde{c}_{1,\text{neu3}}T_1, \\ \tilde{a}_{1,\text{neu3}} &= W_0 - \tilde{b}_{1,\text{neu3}}T_0 - \tilde{c}_{1,\text{neu3}}T_0^2\end{aligned}$$

gilt. Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \tilde{f}_{1,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu3}} + \tilde{b}_{1,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{1,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu3}} + \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_1, T_{12}] \\ h_{22}(T) = k_{22}T + d_{22}, & T \in [T_{12}, T_2] \\ \bar{f}_3(T) = \bar{k}_3T + \bar{d}_3, & T \in [T_2, T_3]. \end{cases}$$

- **Variante 4:**

$[T_0, T_1]$: Fall 1-1

$[T_1, T_2]$: Fall 2-2

$[T_2, T_3]$: Fall 3-2

4 Ein neuer Farbmessrechner

Der einzige Unterschied zu Variante 3 ist die Verwendung zweier linearer Funktionen in $[T_2, T_3]$, nämlich $h_{31}(T)$ für $T \in [T_2, T_{23}]$ und $h_{32}(T)$ für $T \in [T_{23}, T_3]$. Daher lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$ hier insgesamt

$$A_W(T) = \begin{cases} \tilde{f}_{1,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{1,\text{neu3}} + \tilde{b}_{1,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{1,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu3}} + \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_1, T_{12}] \\ h_{22}(T) = k_{22}T + d_{22}, & T \in [T_{12}, T_2] \\ h_{31}(T) = k_{31}T + d_{31}, & T \in [T_2, T_{23}] \\ h_{32}(T) = k_{32}T + d_{32}, & T \in [T_{23}, T_3]. \end{cases}$$

• **Variante 5:**

$[T_0, T_1]$: Fall 1-2

$[T_1, T_2]$: Fall 2-1

$[T_2, T_3]$: Fall 3-1

Zunächst wird (als Hilfsfunktion für Anpassungszwecke) im Intervall $[T_0, T_1]$ die lineare Funktion

$$\bar{f}_1(T) = \bar{k}_1T + \bar{d}_1$$

definiert, welche die Punkte W_0 und W_1 verbindet. Es gilt daher

$$\bar{k}_1 = \frac{W_0 - W_1}{T_0 - T_1},$$

$$\bar{d}_1 = W_1 - \bar{k}_1T_1.$$

Grundsätzlich bedeutet diese Variante die Verwendung linearer Näherungsfunktionen $\bar{f}_{1,\text{neu1}}$ in $[T_0, T_1]$ und \bar{f}_3 in $[T_2, T_3]$. Die gesuchte quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{2,\text{neu4}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu4}} + \tilde{b}_{2,\text{neu4}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu4}}T^2$$

im Intervall $[T_1, T_2]$ wird bezüglich ihrer ersten Ableitungen an den Stellen T_1 und T_2 sowohl an $\bar{f}_1(T)$ als auch an $\bar{f}_3(T)$ angepasst, d.h. die Koeffizienten $\tilde{a}_{2,\text{neu4}}$, $\tilde{b}_{2,\text{neu4}}$ und $\tilde{c}_{2,\text{neu4}}$ werden aus den Bedingungen

$$\frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu4}}}{dT}(T_2) = \bar{k}_3,$$

$$\frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu4}}}{dT}(T_1) = \bar{k}_1,$$

$$\tilde{f}_{2,\text{neu4}}(T_2) = W_2$$

bestimmt und haben daher die Werte

$$\tilde{c}_{2,\text{neu4}} = \frac{\bar{k}_3 - \bar{k}_1}{2(T_2 - T_1)},$$

$$\tilde{b}_{2,\text{neu4}} = \bar{k}_3 - 2\tilde{c}_{2,\text{neu4}}T_2,$$

$$\tilde{a}_{2,\text{neu4}} = W_2 - \tilde{b}_{2,\text{neu4}}T_2 - \tilde{c}_{2,\text{neu4}}T_2^2.$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Zusätzlich wird nun in $[T_0, T_1]$ statt $\bar{f}_1(T)$ die zuvor bereits kurz erwähnte lineare Funktion

$$\bar{f}_{1,\text{neu1}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu1}}T + \bar{d}_{1,\text{neu1}}$$

durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_{1,\text{neu1}}}{dT}(T_1) &= \bar{k}_{1,\text{neu1}} = \bar{k}_1, \\ \bar{f}_{1,\text{neu1}}(T_1) &= \tilde{f}_{2,\text{neu4}}(T_1) \end{aligned}$$

definiert, was einer Anpassung an $\tilde{f}_{2,\text{neu4}}$ entspricht. Dies führt zu den Werten

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1,\text{neu1}} &= \bar{k}_1, \\ \bar{d}_{1,\text{neu1}} &= \tilde{a}_{2,\text{neu4}} + \tilde{b}_{2,\text{neu4}}T_1 + \tilde{c}_{2,\text{neu4}}T_1^2 - \bar{k}_{1,\text{neu1}}T_1. \end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \bar{f}_{1,\text{neu1}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu1}}T + \bar{d}_{1,\text{neu1}}, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu4}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu4}} + \tilde{b}_{2,\text{neu4}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu4}}T^2, & T \in [T_1, T_2] \\ \bar{f}_3(T) = \bar{k}_3T + \bar{d}_3, & T \in [T_2, T_3]. \end{cases}$$

- **Variante 6:**

$$\begin{aligned} [T_0, T_1] &: \text{ Fall 1-2} \\ [T_1, T_2] &: \text{ Fall 2-1} \\ [T_2, T_3] &: \text{ Fall 3-2} \end{aligned}$$

Das Intervall $[T_2, T_3]$ wird in $[T_2, T_{23}]$ und $[T_{23}, T_3]$ aufgespalten; in den beiden Teilintervallen werden die linearen Funktionen $h_{31}(T)$ und $h_{32}(T)$ als Näherungsfunktionen verwendet. Die in $[T_1, T_2]$ gesuchte quadratische Funktion könnte wie in Variante 2 als $\tilde{f}_{2,\text{neu2}}(T)$ gewählt werden, jedoch tritt hier im ersten Intervall statt einer quadratischen eine lineare Funktion auf, sodass andere Anpassungsüberlegungen (mit Hilfe von $\bar{f}_1(T)$) getroffen werden und eine neue quadratische Funktion

$$\tilde{f}_{2,\text{neu5}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu5}} + \tilde{b}_{2,\text{neu5}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu5}}T^2$$

anhand der Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu5}}}{dT}(T_2) &= k_{31}, \\ \frac{d\tilde{f}_{2,\text{neu5}}}{dT}(T_1) &= \bar{k}_1, \\ \tilde{f}_{2,\text{neu5}}(T_2) &= W_2 \end{aligned}$$

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

hergeleitet wird. Ihre Koeffizienten sind daher

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{2,\text{neu5}} &= \frac{k_{31} - \bar{k}_1}{2(T_2 - T_1)}, \\ \tilde{b}_{2,\text{neu5}} &= k_{31} - 2\tilde{c}_{2,\text{neu5}}T_2, \\ \tilde{a}_{2,\text{neu5}} &= W_2 - \tilde{b}_{2,\text{neu5}}T_2 - \tilde{c}_{2,\text{neu5}}T_2^2.\end{aligned}$$

Analog zu Variante 5 wird auch hier im Intervall $[T_0, T_1]$ und in Abstimmung mit $\tilde{f}_{2,\text{neu5}}(T)$ eine von $\bar{f}_1(T)$ abweichende lineare Funktion

$$\bar{f}_{1,\text{neu2}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu2}}T + \bar{d}_{1,\text{neu2}}$$

definiert, deren Parameter aus den Vorgaben

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{f}_{1,\text{neu2}}}{dT}(T_1) &= \bar{k}_{1,\text{neu2}} = \bar{k}_1, \\ \bar{f}_{1,\text{neu2}}(T_1) &= \tilde{f}_{2,\text{neu5}}(T_1)\end{aligned}$$

berechnet werden können und daher

$$\begin{aligned}\bar{k}_{1,\text{neu2}} &= \bar{k}_1, \\ \bar{d}_{1,\text{neu2}} &= \tilde{a}_{2,\text{neu5}} + \tilde{b}_{2,\text{neu5}}T_1 + \tilde{c}_{2,\text{neu5}}T_1^2 - \bar{k}_{1,\text{neu2}}T_1\end{aligned}$$

erfüllen. Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \bar{f}_{1,\text{neu2}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu2}}T + \bar{d}_{1,\text{neu2}}, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu5}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu5}} + \tilde{b}_{2,\text{neu5}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu5}}T^2, & T \in [T_1, T_2] \\ h_{31}(T) = k_{31}T + d_{31}, & T \in [T_2, T_{23}] \\ h_{32}(T) = k_{32}T + d_{32}, & T \in [T_{23}, T_3]. \end{cases}$$

- **Variante 7:**

$[T_0, T_1]$: Fall 1-2

$[T_1, T_2]$: Fall 2-2

$[T_2, T_3]$: Fall 3-1

In diesem Fall können lauter bereits hergeleitete Funktionen verwendet werden, da aufgrund der Gegebenheiten die in $[T_0, T_1]$ zu verwendende lineare Funktion **nicht** an die zu verwendende quadratische Funktion in $[T_1, T_{12}]$ angepasst wird. Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \bar{f}_{1,\text{neu1}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu1}}T + \bar{d}_{1,\text{neu1}}, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu3}} + \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_1, T_{12}] \\ h_{22}(T) = k_{22}T + d_{22}, & T \in [T_{12}, T_2] \\ \bar{f}_3(T) = \bar{k}_3T + \bar{d}_3, & T \in [T_2, T_3]. \end{cases}$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

- **Variante 8:**

$$[T_0, T_1] : \text{Fall 1-2}$$

$$[T_1, T_2] : \text{Fall 2-2}$$

$$[T_2, T_3] : \text{Fall 3-2}$$

Auch hier kann für alle Intervalle auf früher definierte Näherungsfunktionen zurückgegriffen werden. Insgesamt lautet die Approximationsfunktion $A_W(T)$

$$A_W(T) = \begin{cases} \bar{f}_{1,\text{neu1}}(T) = \bar{k}_{1,\text{neu1}}T + \bar{d}_{1,\text{neu1}}, & T \in [T_0, T_1] \\ \tilde{f}_{2,\text{neu3}}(T) = \tilde{a}_{2,\text{neu3}} + \tilde{b}_{2,\text{neu3}}T + \tilde{c}_{2,\text{neu3}}T^2, & T \in [T_1, T_{12}] \\ h_{22}(T) = k_{22}T + d_{22}, & T \in [T_{12}, T_2] \\ h_{31}(T) = k_{31}T + d_{31}, & T \in [T_2, T_{23}] \\ h_{32}(T) = k_{32}T + d_{32}, & T \in [T_{23}, T_3]. \end{cases}$$

Mit den aus den Tabellen 4.3-4.11 entnommenen Daten werden nun für alle Messkurven die neuen Näherungsfunktionen berechnet. In den Abbildungen 4.3-4.29 sind die Messpunkte jeweils im Vergleich mit der linearen Trendkurve, der ursprünglichen Kombination der quadratischen Funktionen $f_i(T)$, $1 \leq i \leq 3$ und der endgültigen Approximationsfunktion dargestellt.

4 Ein neuer Farbmetriekrechner

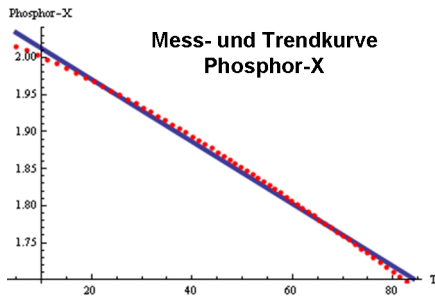


Abbildung 4.3 – Phosphor-X-1

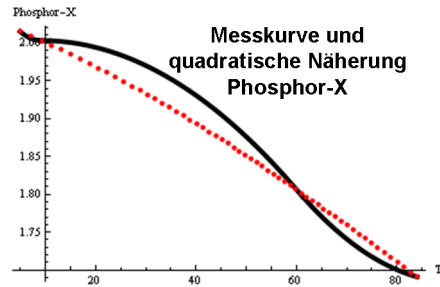


Abbildung 4.4 – Phosphor-X-2

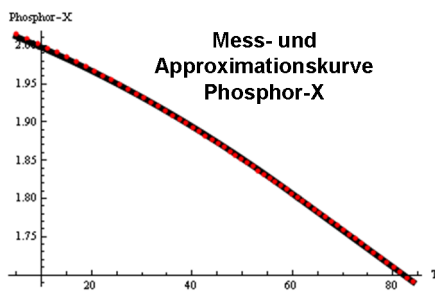


Abbildung 4.5 – Phosphor-X-3

Phosphor-X	
$X_{P,0}$	= 2.01512317
$X_{P,01}$	= 2.009162453
$X_{P,1}$	= 2.003153216
$X_{P,12}$	= 1.914749158
$X_{P,2}$	= 1.805854945
$X_{P,23}$	= 1.748842363
$X_{P,3}$	= 1.690964664
Approximation:	
Variante 5	

Tabelle 4.3 – Phosphor-X-Werte

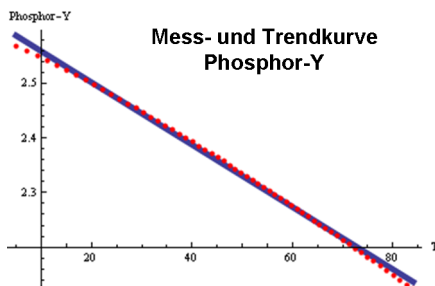


Abbildung 4.6 – Phosphor-Y-1

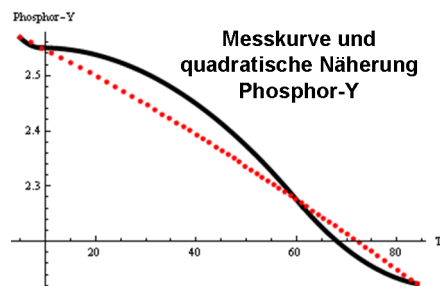


Abbildung 4.7 – Phosphor-Y-2

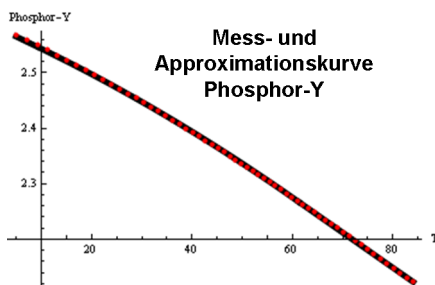


Abbildung 4.8 – Phosphor-Y-3

Phosphor-Y	
$Y_{P,0}$	= 2.568618843
$Y_{P,01}$	= 2.559388315
$Y_{P,1}$	= 2.550194569
$Y_{P,12}$	= 2.422685689
$Y_{P,2}$	= 2.274926944
$Y_{P,23}$	= 2.199365507
$Y_{P,3}$	= 2.123314437
Approximation:	
Variante 5	

Tabelle 4.4 – Phosphor-Y-Werte

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

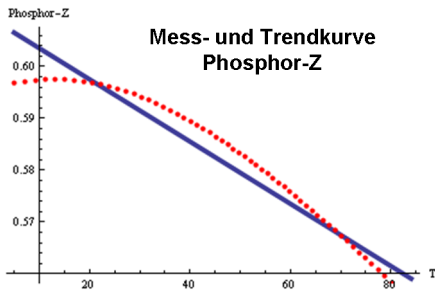


Abbildung 4.9 – Phosphor-Z-1

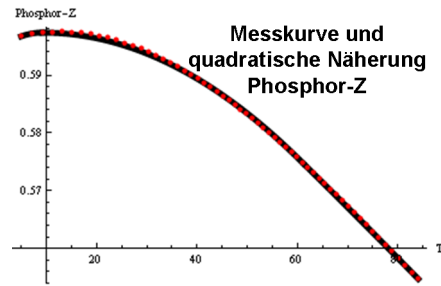


Abbildung 4.10 – Phosphor-Z-2

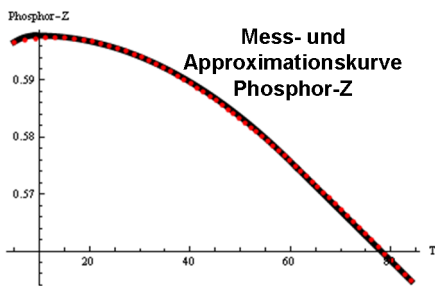


Abbildung 4.11 – Phosphor-Z-3

Phosphor-Z	
$Z_{P,0}$	= 0.596721506
$Z_{P,01}$	= 0.597112154
$Z_{P,1}$	= 0.597372818
$Z_{P,12}$	= 0.592188996
$Z_{P,2}$	= 0.575678997
$Z_{P,23}$	= 0.565454243
$Z_{P,3}$	= 0.554768616
Approximation:	
Variante 1	

Tabelle 4.5 – Phosphor-Z-Werte

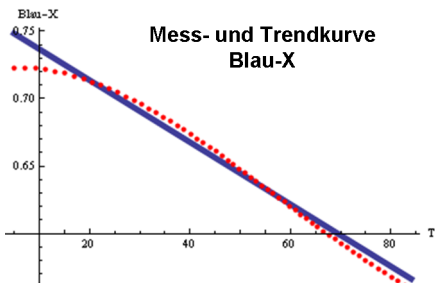


Abbildung 4.12 – Blau-X-1

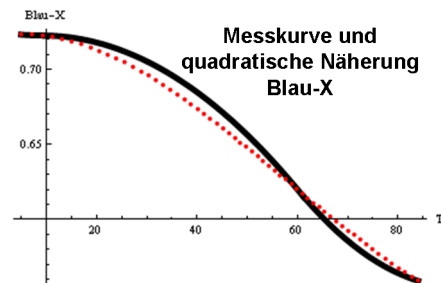


Abbildung 4.13 – Blau-X-2

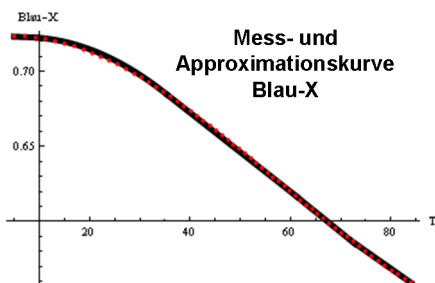


Abbildung 4.14 – Blau-X-3

Blau-X	
$X_{B,0}$	= 0.723147383
$X_{B,01}$	= 0.72307479
$X_{B,1}$	= 0.722544013
$X_{B,12}$	= 0.686375703
$X_{B,2}$	= 0.619774992
$X_{B,23}$	= 0.587016732
$X_{B,3}$	= 0.559124386
Approximation:	
Variante 8	

Tabelle 4.6 – Blau-X-Werte

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

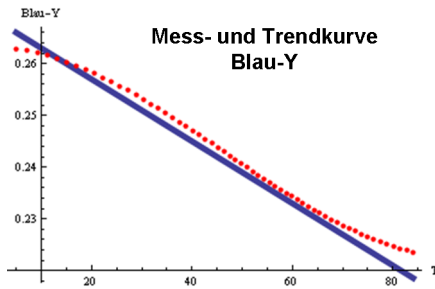


Abbildung 4.15 – Blau-Y-1

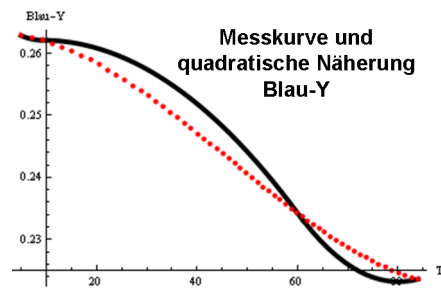


Abbildung 4.16 – Blau-Y-2

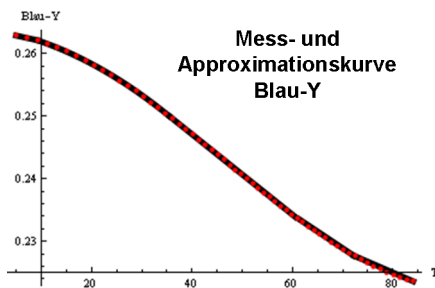


Abbildung 4.17 – Blau-Y-3

Blau-Y	
$Y_{B,0}$	= 0.262867447
$Y_{B,01}$	= 0.262542238
$Y_{B,1}$	= 0.262118418
$Y_{B,12}$	= 0.250489605
$Y_{B,2}$	= 0.234223279
$Y_{B,23}$	= 0.227737303
$Y_{B,3}$	= 0.223627506
Approximation:	
Variante 8	

Tabelle 4.7 – Blau-Y-Werte

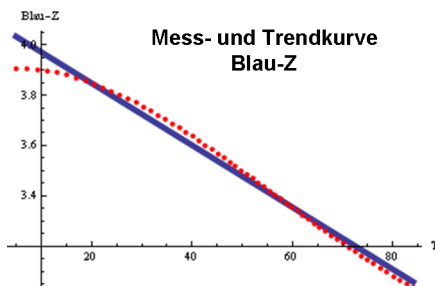


Abbildung 4.18 – Blau-Z-1

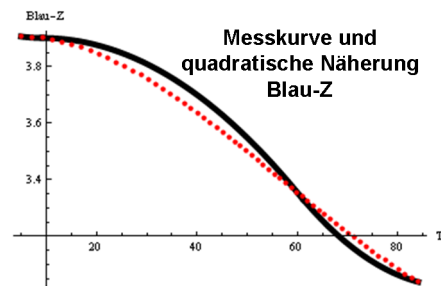


Abbildung 4.19 – Blau-Z-2

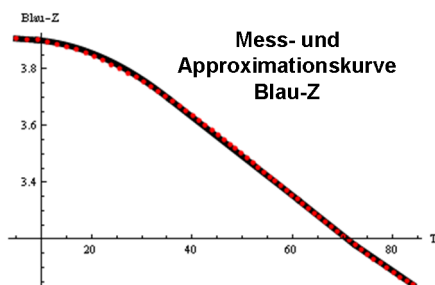


Abbildung 4.20 – Blau-Z-3

Blau-Z	
$Z_{B,0}$	= 3.90690167
$Z_{B,01}$	= 3.905505985
$Z_{B,1}$	= 3.901779984
$Z_{B,12}$	= 3.704109404
$Z_{B,2}$	= 3.353068102
$Z_{B,23}$	= 3.182453601
$Z_{B,3}$	= 3.038534938
Approximation:	
Variante 8	

Tabelle 4.8 – Blau-Z-Werte

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

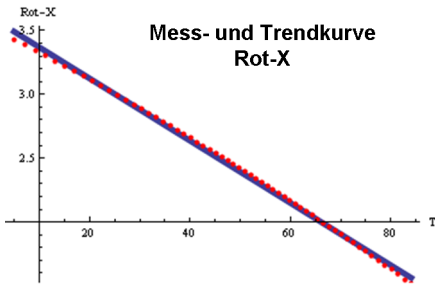


Abbildung 4.21 – Rot-X-1

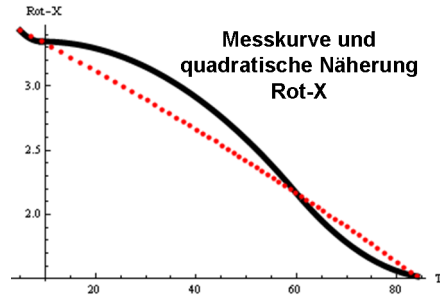


Abbildung 4.22 – Rot-X-2

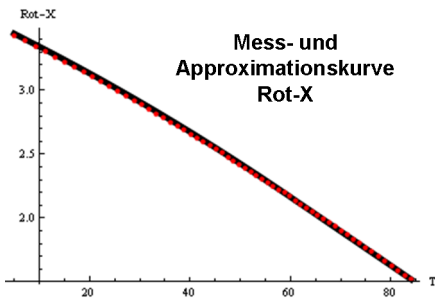


Abbildung 4.23 – Rot-X-3

Rot-X	
$X_{R,0}$	= 3.430857469
$X_{R,01}$	= 3.387887939
$X_{R,1}$	= 3.345528811
$X_{R,12}$	= 2.785966777
$X_{R,2}$	= 2.162792791
$X_{R,23}$	= 1.843825515
$X_{R,3}$	= 1.518739266
Approximation:	
Variante 5	

Tabelle 4.9 – Rot-X-Werte

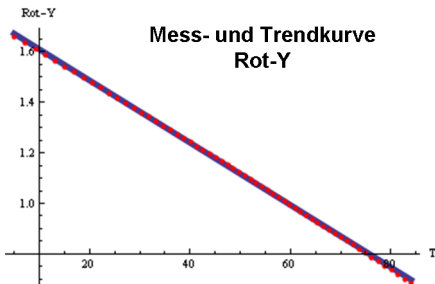


Abbildung 4.24 – Rot-Y-1

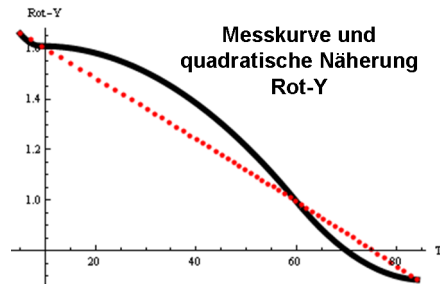


Abbildung 4.25 – Rot-Y-2

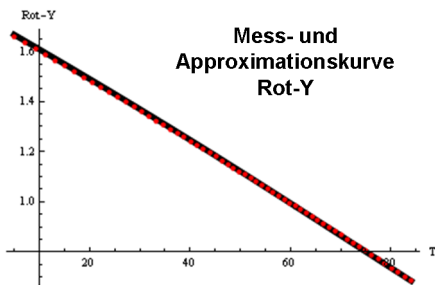


Abbildung 4.26 – Rot-Y-3

Rot-Y	
$Y_{R,0}$	= 1.659588497
$Y_{R,01}$	= 1.634682882
$Y_{R,1}$	= 1.610371063
$Y_{R,12}$	= 1.30672257
$Y_{R,2}$	= 0.993580559
$Y_{R,23}$	= 0.83927995
$Y_{R,3}$	= 0.684630137
Approximation:	
Variante 5	

Tabelle 4.10 – Rot-Y-Werte

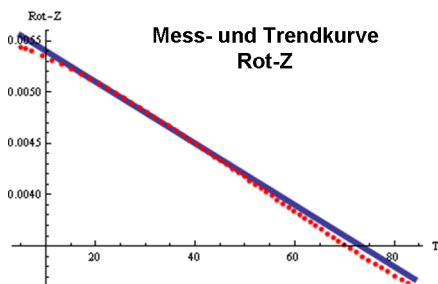


Abbildung 4.27 – Rot-Z-1

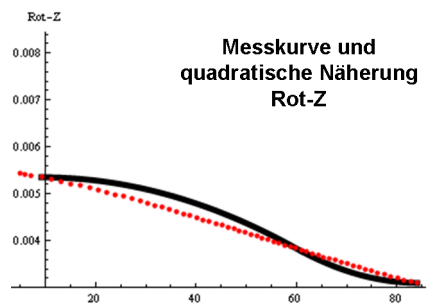


Abbildung 4.28 – Rot-Z-2

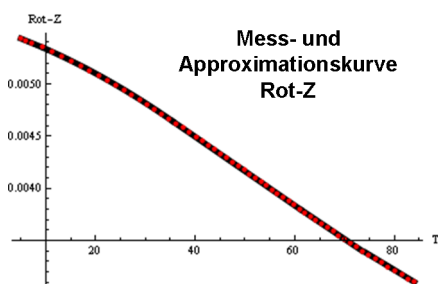


Abbildung 4.29 – Rot-Z-3

Rot-Z
$Z_{R,0} = 0.005437692$
$Z_{R,01} = 0.005397151$
$Z_{R,1} = 0.005354986$
$Z_{R,12} = 0.004669351$
$Z_{R,2} = 0.003834332$
$Z_{R,23} = 0.00344566$
$Z_{R,3} = 0.00310242$
Approximation: Variante 8

Tabelle 4.11 – Rot-Z-Werte

Als interessanter Aspekt ist hervorzuheben, dass durch die Verwendung der neu hergeleiteten, näherungsweise Temperaturkurven die Notwendigkeit der Modulkalibrierung, deren Messergebnisse für die Temperaturbewertung der Tristimuluswerte nach (3.7.1) benötigt werden, entfällt. Es müssen lediglich die den Temperaturen $T_0, T_{01}, T_1, T_{12}, T_2, T_{23}$ und T_3 entsprechenden Tristimuluswerte für Phosphor, Blau und Rot gespeichert werden.

Im anschließenden, letzten Abschnitt dieser Arbeit wird demonstriert, wie sich sowohl die linearen Trendkurven als auch die in diesem Kapitel hergeleiteten Approximationskurven als Näherung der vermessenen Temperaturkurven auf die Berechnung der Verstärkungsfaktoren g_P, g_B und g_R und auf die Genauigkeit des erzeugten Farborts bei bestimmten Temperaturen auswirken.

4.4.3 Lineare und neu hergeleitete Approximation im Vergleich

Um zu veranschaulichen, welchen Effekt sowohl der Einsatz linearer Trendkurven als auch jener der in Kapitel 4.4.2 erhaltenen Approximationsfunktionen zur näherungsweise Wiedergabe der vermessenen, temperaturabhängigen Tristimuluswerte auf die zu ermittelnden Werte g_P, g_B und g_R hat und wie groß die resultierende Farbortungenauigkeit ist, werden ausgehend von einem vorgegebenen Zielfarbort die jeweils tatsächlich erzeugten Farborte bei verschiedenen Temperaturen berechnet und mit dem Farbabstandsmaß (3.5.7) aus Kapitel 3.5.2 bewertet. Die Beispielwerte sind in den Tabellen 4.12 und 4.13 zusammengefasst.

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Vermessene Tristimuluswerte bei $T_1 = 26.91469^\circ\text{C}/\text{ADC}=830$					
	$X_P = 1.94435514$		$X_B = 0.70226955$		$X_R = 2.96421341$
Phosphor:	$Y_P = 2.46422341$	Blau:	$Y_B = 0.25501286$	Rot:	$Y_R = 1.40045301$
	$Z_P = 0.59525240$		$Z_B = 3.78921451$		$Z_R = 0.00490526$
Vermessene Tristimuluswerte bei $T_2 = 39.83912^\circ\text{C}/\text{ADC}=740$					
	$X_P = 1.89409126$		$X_B = 0.67423964$		$X_R = 2.66473165$
Phosphor:	$Y_P = 2.39414437$	Blau:	$Y_B = 0.24724181$	Rot:	$Y_R = 1.24421351$
	$Z_P = 0.58957051$		$Z_B = 3.63962505$		$Z_R = 0.00450521$
Vermessene Tristimuluswerte bei $T_3 = 75.10964^\circ\text{C}/\text{ADC}=436$					
	$X_P = 1.73451859$		$X_B = 0.57951167$		$X_R = 1.76364248$
Phosphor:	$Y_P = 2.18049540$	Blau:	$Y_B = 0.22645952$	Rot:	$Y_R = 0.80092706$
	$Z_P = 0.56282031$		$Z_B = 3.14357477$		$Z_R = 0.0033554$

Tabelle 4.12 – Daten aus der Typenkalibrierung

Tristimuluswerte aus Modulkalibrierung			Koeffizienten für Farbabstandsberechnung
$X_P = 1.96782$	$X_B = 0.68929$	$X_R = 3.28293$	$g_{11} = 860000$
$Y_P = 2.50504$	$Y_B = 0.31959$	$Y_R = 1.57299$	$g_{12} = -400000$
$Z_P = 0.57626$	$Z_B = 3.75737$	$Z_R = 0.01233$	$g_{22} = 450000$
Zielfarbort: $(x_{\text{SOLL}}, y_{\text{SOLL}}) = (0.313, 0.327) \hat{=} 6500\text{K}$			

Tabelle 4.13 – Modulkalibrierung, Farbabstandsdaten und Zielfarbort

Für die Berechnung der temperaturabhängigen Tristimulusdaten gemäß (3.7.1) werden die linearen Trendkurven aus Tabelle 4.1 herangezogen; gleichzeitig werden für alle LED-Farben und für alle Tristimuluskoordinaten die Näherungsfunktionen aus Kapitel 4.4.2 bestimmt (implementiert in C). An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass das Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt auf der Art der Temperaturbewertung der Tristimuluswerte und deren Auswirkung auf den erzeugten Farbort und weniger auf dem verwendeten Rechenverfahren für die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren liegt (Lösen des Gleichungssystems (4.2.1) oder Anwenden des Simplexalgorithmus auf (4.2.3))⁶.

Im ersten Schritt werden nun für T_1 , T_2 und T_3 die Verstärkungsfaktoren auf drei Arten berechnet, und zwar basierend auf

- den vermessenen Tristimuluswerten aus der Typenkalibrierung,
- einer linearen Näherung der vermessenen Werte, und
- den neu hergeleiteten Approximationskurven zu den einzelnen Messkurven.

Danach erfolgt im zweiten Schritt die Bestimmung des tatsächlich erzeugten Farborts. Dazu werden unter Verwendung der Tristimulusdaten aus Tabelle 4.12 die entsprechenden

⁶Da der Zielfarbort eindeutig im zulässigen Farbdreieck liegt, kann auf die Farbortkontrolle hier verzichtet werden.

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

CIE-Koordinaten aus

$$\begin{aligned} x_{\text{IST}} &= \frac{g_P X_P + g_R X_R + g_B X_B}{g_P(X_P + Y_P + Z_P) + g_R(X_R + Y_R + Z_R) + g_B(X_B + Y_B + Z_B)}, \\ y_{\text{IST}} &= \frac{g_P Y_P + g_R Y_R + g_B Y_B}{g_P(X_P + Y_P + Z_P) + g_R(X_R + Y_R + Z_R) + g_B(X_B + Y_B + Z_B)} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

ermittelt, wobei hier angenommen wird, dass der Zielfarbot durch die temperaturabhängigen Tristimuluswerte aus der Typenkalibrierung (und die sich daraus ergebenden Verstärkungsfaktoren) exakt bzw. ausreichend genau wiedergegeben wird. Im dritten Schritt wird schließlich die Abweichung des erzeugten Farborts vom gewünschten Farbort mit Hilfe von ΔC berechnet. Als Zusatz werden jeweils die benötigten Laufzeiten der C-Programme für die Kombination von Temperaturbewertung und Berechnung der Verstärkungsfaktoren angegeben.

(i) **Ergebnisse auf Basis der vermessenen Werte:**

Werden die der Messreihe entnommenen Tristimuluswerte zu den Temperaturen T_1 , T_2 und T_3 verwendet, durch 10 geteilt und g_P , g_B und g_R gemäß dem Rechenmodell (4.2.1) ermittelt, folgt

für T_1 :	für T_2 :	für T_3 :
$g_P = 1,$	$g_P = 1,$	$g_P = 1,$
$g_B = 0.636675,$	$g_B = 0.639967,$	$g_B = 0.66848,$
$g_R = 0.0755415.$	$g_R = 0.0797353.$	$g_R = 0.110463.$

(ii) **Ergebnisse auf Basis der linearen Trendkurven:**

Werden die den Temperaturen T_1 , T_2 und T_3 bzw. den ADC-Werten 830, 740 und 436 entsprechenden Tristimuluswerte anhand der linearen Trendkurven aus Tabelle 4.1 und der in Tabelle 4.13 notierten, aus der Modulkalibrierung kommenden Daten gemäß (3.7.1) berechnet, durch 10 dividiert und dann in das Gleichungssystem (4.2.1) eingesetzt, folgt für die Verstärkungsfaktoren

für T_1 :	für T_2 :	für T_3 :
$g_P = 1,$	$g_P = 1,$	$g_P = 1,$
$g_B = 0.687279,$	$g_B = 0.69291,$	$g_B = 0.714932,$
$g_R = 0.0929579,$	$g_R = 0.0994092,$	$g_R = 0.135752,$
Laufzeit $\cong 2.074\text{ms}.$	Laufzeit $\cong 1.6804\text{ms}.$	Laufzeit $\cong 2.0299\text{ms}.$

Mit (4.4.3) ergeben sich als tatsächlich erzeugte Farborte

$$\begin{aligned} (x_{\text{IST},T_1}, y_{\text{IST},T_1}) &= (0.311635, 0.319374) \quad \text{für } T_1, \\ (x_{\text{IST},T_2}, y_{\text{IST},T_2}) &= (0.311628, 0.3191) \quad \text{für } T_2, \\ (x_{\text{IST},T_3}, y_{\text{IST},T_3}) &= (0.312186, 0.320405) \quad \text{für } T_3. \end{aligned}$$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Schließlich werden aus (3.5.7) die Werte

$$\begin{aligned}\Delta C_{T_1} &= 4.4096 && \text{für } T_1, \\ \Delta C_{T_2} &= 4.58597 && \text{für } T_2, \\ \Delta C_{T_3} &= 3.98081 && \text{für } T_3\end{aligned}$$

für die Farbortabweichungen berechnet, wobei die Koeffizienten g_{11} , g_{12} und g_{22} Tabelle 4.13 zu entnehmen sind. Dies bedeutet aber, dass die bei T_1 und bei T_2 erzeugten Farborte nur eine Genauigkeit von MacAdam5 erreichen! Lediglich für T_3 liegt $(x_{\text{IST},T_3}, y_{\text{IST},T_3})$ innerhalb einer MacAdam-Ellipse, deren Ausdehnung 4 Streuwerteinheiten entspricht (MacAdam4).

(iii) Ergebnisse auf Basis der neuen Approximationskurven:

Wird die Temperaturbewertung der Tristimuluswerte anhand der Approximationskurven aus Kapitel 4.4.2 vorgenommen, sind nach Bestimmung dieser Kurven noch folgende Rechenschritte durchzuführen:

Berechnung der momentanen Temperatur in °C: Da der Farbmetrikrechner mit ADC-Werten, die Kurven aber in Abhängigkeit von der Temperatur in °C dargestellt werden, müssen hier die Temperaturwerte T_1 , T_2 und T_3 zu den ADC-Werten ADC_{T_1} , ADC_{T_2} und ADC_{T_3} erst ermittelt werden. Dies wird unter Verwendung von bestimmten Koeffizienten NTC_0 , NTC_1 , NTC_2 und NTC_3 , die dem jeweiligen NTC-Datenblatt zu entnehmen sind, und mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned}T_1 &= \text{NTC}_0 \left(\frac{\text{ADC}_{T_1}}{1000} \right)^3 + \text{NTC}_1 \left(\frac{\text{ADC}_{T_1}}{1000} \right)^2 + \\ &\quad + \text{NTC}_2 \left(\frac{\text{ADC}_{T_1}}{1000} \right) + \text{NTC}_3, \\ T_2 &= \text{NTC}_0 \left(\frac{\text{ADC}_{T_2}}{1000} \right)^3 + \text{NTC}_1 \left(\frac{\text{ADC}_{T_2}}{1000} \right)^2 + \\ &\quad + \text{NTC}_2 \left(\frac{\text{ADC}_{T_2}}{1000} \right) + \text{NTC}_3, \\ T_3 &= \text{NTC}_0 \left(\frac{\text{ADC}_{T_3}}{1000} \right)^3 + \text{NTC}_1 \left(\frac{\text{ADC}_{T_3}}{1000} \right)^2 + \\ &\quad + \text{NTC}_2 \left(\frac{\text{ADC}_{T_3}}{1000} \right) + \text{NTC}_3\end{aligned}$$

bewerkstelligt.

Bestimmung des richtigen Temperaturintervalls: Nachdem der gesamte Temperaturbereich der Vermessung gemäß Kapitel 4.4.2 in Teilintervalle zerlegt wird und die Approximationskurven sich daher aus mehreren Funktionen zusammensetzen, muss abgefragt werden, in welchem der Intervalle T_1 , T_2 und T_3 liegen.

Berechnung der temperaturabhängigen Tristimuluswerte: Je nach Farbe und

4 Ein neuer Farbmessrechner

Tristimulusvariable werden die richtigen Teilfunktionen, die aus den Abfragen im vorhergehenden Schritt resultieren, zur näherungsweise Temperaturbewertung der Tristimuluswerte verwendet.

Für die Berechnung der Verstärkungsfaktoren werden die temperaturangepassten Tristimuluswerte in das Maximierungsproblem (4.2.3) eingesetzt, welches anschließend mit Hilfe des Simplexverfahrens aus Kapitel 4.1 gelöst wird. Die Ergebnisse lauten

für T_1 :	für T_2 :	für T_3 :
$g_P = 1,$	$g_P = 1,$	$g_P = 1,$
$g_B = 0.678887,$	$g_B = 0.641349,$	$g_B = 0.667757,$
$g_R = 0.078504,$	$g_R = 0.079328,$	$g_R = 0.111062,$
Laufzeit $\cong 8.726$ ms.	Laufzeit $\cong 7.805$ ms.	Laufzeit $\cong 8.358$ ms.

Die tatsächlich erzeugten, mit den Gleichungen in (4.4.3) ermittelten Farborte lauten

$$\begin{aligned} (x_{\text{IST},T_1}, y_{\text{IST},T_1}) &= (0.309693, 0.320601) && \text{für } T_1, \\ (x_{\text{IST},T_2}, y_{\text{IST},T_2}) &= (0.312799, 0.32679) && \text{für } T_2, \\ (x_{\text{IST},T_3}, y_{\text{IST},T_3}) &= (0.313142, 0.327101) && \text{für } T_3. \end{aligned}$$

Für die anhand von (3.5.7) berechneten Abweichungswerte gilt

$$\begin{aligned} \Delta C_{T_1} &= 3.30202 && \text{für } T_1, \\ \Delta C_{T_2} &= 0.144078 && \text{für } T_2, \\ \Delta C_{T_3} &= 0.102113 && \text{für } T_3. \end{aligned}$$

Während der bei T_1 erzielte Farbort „nur“ MacAdam4 erfüllt, sind die Ergebnisse für T_2 und T_3 beachtlich genau. Hier liegen die Farborte innerhalb von MacAdam1-Ellipsen!

Ein weiteres Beispiel zeigt, dass die eben erzielte, außerordentlich gute Farbortgenauigkeit nicht auf einem Zufall beruht, sondern tatsächlich auf die verbesserten Approximationsfunktionen zu den temperaturabhängigen Tristimuluswerten zurückzuführen ist. Die dafür benötigten Daten sind in den Tabellen 4.14 und 4.15 aufgelistet.

Für alle nachfolgenden Berechnungen wird eine zum vorhergehenden Beispiel analoge Vorgehensweise angewandt.

(i) Ergebnisse auf Basis der vermessenen Werte:

Für T_1 :	Für T_2 :	Für T_3 :
$g_P = 1,$	$g_P = 1,$	$g_P = 1,$
$g_B = 0.166388,$	$g_B = 0.16397,$	$g_B = 0.162004,$
$g_R = 0.479776.$	$g_R = 0.513293.$	$g_R = 0.619432.$

4.4 Approximation der Temperaturkurven der Tristimuluswerte

Vermessene Tristimuluswerte bei $T_1 = 31.5212^\circ\text{C}/\text{ADC}=800$					
	$X_P = 1.92708701$		$X_B = 0.69326604$		$X_R = 2.85950532$
Phosphor:	$Y_P = 2.43989449$	Blau:	$Y_B = 0.25240576$	Rot:	$Y_R = 1.34511082$
	$Z_P = 0.59357755$		$Z_B = 3.7408891$		$Z_R = 0.00476775$
Vermessene Tristimuluswerte bei $T_2 = 44.37156^\circ\text{C}/\text{ADC}=704$					
	$X_P = 1.87521498$		$X_B = 0.6627226$		$X_R = 2.55559689$
Phosphor:	$Y_P = 2.36831664$	Blau:	$Y_B = 0.24428559$	Rot:	$Y_R = 1.18868853$
	$Z_P = 0.58691355$		$Z_B = 3.57869281$		$Z_R = 0.00435673$
Vermessene Tristimuluswerte bei $T_3 = 68.34992^\circ\text{C}/\text{ADC}=492$					
	$X_P = 1.76696303$		$X_B = 0.59698075$		$X_R = 1.94515443$
Phosphor:	$Y_P = 2.22329579$	Blau:	$Y_B = 0.2295709$	Rot:	$Y_R = 0.8879774$
	$Z_P = 0.56875899$		$Z_B = 3.23420295$		$Z_R = 0.00356434$

Tabelle 4.14 – Daten aus der Typenkalibrierung

Tristimuluswerte aus Modulkalibrierung			Koeffizienten für Farbabstandsberechnung
$X_P = 1.96782$	$X_B = 0.68929$	$X_R = 3.28293$	$g_{11} = 390.000$
$Y_P = 2.50504$	$Y_B = 0.31959$	$Y_R = 1.57299$	$g_{12} = -195.000$
$Z_P = 0.57626$	$Z_B = 3.75737$	$Z_R = 0.01233$	$g_{22} = 275.000$
Zielfarbort: $(x_{\text{SOLL}}, y_{\text{SOLL}}) = (0.44, 0.403) \hat{=} 3000\text{K}$			

Tabelle 4.15 – Modulkalibrierung, Farbabstandsdaten und Zielfarbort

(ii) Ergebnisse auf Basis der linearen Trendkurven:

für T_1 :

$$g_P = 1,$$

$$g_B = 0.18402,$$

$$g_R = 0.456299,$$

$$\text{Laufzeit} \cong 2.159\text{ms.}$$

für T_2 :

$$g_P = 1,$$

$$g_B = 0.182182,$$

$$g_R = 0.489003,$$

$$\text{Laufzeit} \cong 2.19\text{ms.}$$

für T_3 :

$$g_P = 1,$$

$$g_B = 0.176516,$$

$$g_R = 0.593608,$$

$$\text{Laufzeit} \cong 1.689\text{ms.}$$

Unter Verwendung von (4.4.3) führen diese Werte auf die erzeugten Farborte

$$(x_{\text{IST},T_1}, y_{\text{IST},T_1}) = (0.433829, 0.400339) \quad \text{für } T_1,$$

$$(x_{\text{IST},T_2}, y_{\text{IST},T_2}) = (0.433866, 0.400239) \quad \text{für } T_2,$$

$$(x_{\text{IST},T_3}, y_{\text{IST},T_3}) = (0.434989, 0.401065) \quad \text{für } T_3.$$

Um auf das Ausmaß der Abweichungen der Ist-Farborte vom Zielfarbort schließen zu

4 Ein neuer Farbmetrikrechner

können, wird mit (3.5.7) ΔC für jede Temperatur ermittelt, was auf

$$\begin{aligned}\Delta C_{T_1} &= 3.68739 \quad \text{für } T_1, \\ \Delta C_{T_2} &= 3.66987 \quad \text{für } T_2, \\ \Delta C_{T_3} &= 2.98862 \quad \text{für } T_3.\end{aligned}$$

führt. Bestenfalls wird hier für T_3 eine Farbortgenauigkeit von MacAdam3 erreicht.

(iii) Ergebnisse auf Basis der neuen Approximationskurven:

für T_1 :	für T_2 :	für T_3 :
$g_P = 1,$	$g_P = 1,$	$g_P = 1,$
$g_B = 0.178165,$	$g_B = 0.164214,$	$g_B = 0.16206,$
$g_R = 0.477987,$	$g_R = 0.16206,$	$g_R = 0.621873,$
Laufzeit $\cong 5.631\text{ms}.$	Laufzeit $\cong 6.451\text{ms}.$	Laufzeit $\cong 6.24\text{ms}.$

Daraus folgen als tatsächlich erzeugte Farborte

$$\begin{aligned}(x_{\text{IST},T_1}, y_{\text{IST},T_1}) &= (0.437705, 0.400612) \quad \text{für } T_1, \\ (x_{\text{IST},T_2}, y_{\text{IST},T_2}) &= (0.439593, 0.403079) \quad \text{für } T_2, \\ (x_{\text{IST},T_3}, y_{\text{IST},T_3}) &= (0.440234, 0.402899) \quad \text{für } T_3,\end{aligned}$$

und damit die Abweichungswerte

$$\begin{aligned}\Delta C_{T_1} &= 1.59801 \quad \text{für } T_1, \\ \Delta C_{T_2} &= 0.26942 \quad \text{für } T_2, \\ \Delta C_{T_3} &= 0.16961 \quad \text{für } T_3.\end{aligned}$$

Schlimmstenfalls tritt hier bei T_1 eine Verschiebung der Größenordnung von MacAdam2 auf, während bei T_2 und T_3 wieder eine nahezu optimale Farbortgenauigkeit von MacAdam1 vorliegt.

Zusammenfassend können folgende Aussagen getroffen werden: Der Laufzeitunterschied der Methoden ist klar im höheren Aufwand der Herleitung der neuen Approximationskurven begründet und überrascht natürlich nicht. Interessant ist aber der Vergleich der Ergebnisse:

- Kommen für die Temperaturanpassung der Tristimuluswerte die linearen Trendkurven zum Einsatz, ist die erreichte Farbortgenauigkeit teilweise befriedigend, teilweise aber nicht ausreichend.
- Wenn die temperaturabhängigen Tristimuluswerte mit Hilfe der neu hergeleiteten Näherungskurven berechnet werden, kann eine nahezu maximale Farbortgenauigkeit erreicht werden.

Eine zu schlechte Approximation der Temperaturkurven, wie es für die linearen Funktionen zum Teil (d.h. für bestimmte Temperaturbereiche) der Fall ist, führt zu einer nicht unerheblichen Verfälschung der Ergebnisse und in der Folge zu relativ großen Abweichungen vom Zielfarbot! Im Einklang mit dem Ziel, bestmögliche, effiziente LED-Lösungen anzubieten, sollte daher überlegt werden, wo die Prioritäten zu setzen sind und inwieweit ein Mehraufwand akzeptabel ist, wenn dafür im Gegenzug weitaus genauere Resultate erzielt werden können.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Elektromagnetische Welle	14
1.2	Reflexion und Brechung	15
1.3	Totalreflexion	16
1.4	Beugung	16
1.5	Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes	17
1.6	Stehende Welle	18
1.7	Konstruktive und destruktive Interferenz	20
1.8	Polarisation von Licht	20
1.9	Lichtspektrum	21
1.10	Bohrsches Atommodell in Raum und Ebene	22
1.11	Lichtentstehung	22
1.12	Umkehrprismen	24
1.13	Reflexions- und Brechungsgesetz: Fermat	25
1.14	2. Strahlensatz	27
1.15	Linsengleichung und Newtonsche Abbildungsgleichung	27
1.16	Aufbau des menschlichen Auges	29
1.17	Photorezeptoren	30
1.18	Hellempfindlichkeitskurven	31
1.19	Definition des Raumwinkels	32
1.20	Raumwinkel unter anderer Blickrichtung	33
1.21	Lichtstrom	33
1.22	Lichtstärke	34
1.23	Beleuchtungsstärke	35
1.24	Schräger Lichteinfall	36
1.25	Definition der Leuchtdichte	36
1.26	Photometrisches Grundgesetz	37
1.27	Additive Farbmischung	41
1.28	Versuche zur additiven Farbmischung	41
1.29	Spektralwertfunktionen	42
1.30	Normspektralwertkurven	42
1.31	Spektraler Transmissionsgrad	44
1.32	Spektraler Remissionsgrad	44
1.33	Herleitung der CIE-Farbtafel	45
1.34	CIE-Normvalenzsystem	46
1.35	Yxy-Farbräume	47

Abbildungsverzeichnis

1.36	Plancksches Strahlungsgesetz	49
2.1	Verschmelzung zu Energiebändern	53
2.2	Energiebändermodell	54
2.3	Elektrische Leitfähigkeit	55
2.4	Dotierung von Silizium	56
2.5	p-n-Übergang im Gleichgewicht	57
2.6	Diode in Sperrrichtung	58
2.7	Diode in Durchlassrichtung	58
2.8	p-n-Übergang einer LED	59
2.9	Indirekter Bandübergang	60
2.10	Direkter Bandübergang	60
2.11	Bedrahtete LED	61
2.12	SMD und Superflux LEDs	61
2.13	COB-Technologie	62
2.14	LED-Farben	62
2.15	Farbkonversion	64
2.16	Strom-Spannungskennlinien	65
2.17	Licht- und Wärmeanteil	66
2.18	Wärmetransfer an die Umgebung	66
2.19	Definition des Wärmewiderstands	67
3.1	Peak-Wellenlängen	75
3.2	Effizienzabnahme der 3200K-LED	76
3.3	RGB-Farbdreieck	77
3.4	Unausgewogenes RGB-Spektrum	78
3.5	RGBA-Farbraum	78
3.6	Verbesserte Farbwiedergabe durch RGBA	79
3.7	Abweichung von Planckscher Kurve	80
3.8	3200K-GB-Farbdreieck	80
3.9	3200K-GB-Spektrum	81
3.10	Farbdreieck Phosphor-Blau-Rot	82
3.11	Effizienz verschiedener Phosphore	82
3.12	Phosphore und ihre Effizienzmaxima	83
3.13	MacAdam-Ellipsen	85
3.14	MacAdam-Ellipsen und Streuwerteinheiten	87
3.15	Schematischer Aufbau eines PI-LED-Systems	90
3.16	Quantisierung und Kodierung	91
3.17	Kennlinie eines idealen ADC	92
3.18	Offset- und Verstärkungsfehler	93
3.19	Linearitäts- und Umsetzfehler	94
3.20	Differentielle Nichtlinearität	94
3.21	PWM mit verschiedenen Tastgraden	95

3.22	Rechteckimpulse	95
3.23	Ulbricht-Kugel	96
3.24	Diffuse Reflexion und Lambertsches Gesetz	96
3.25	Kennlinien eines NTC	97
3.26	Farbortkontrolle	102
3.27	Ishikawa-Diagramm	105
4.1	Lineare Approximation der Phosphor-Z-Werte	138
4.2	Näherungskurven	142
4.3	Phosphor-X-1	152
4.4	Phosphor-X-2	152
4.5	Phosphor-X-3	152
4.6	Phosphor-Y-1	152
4.7	Phosphor-Y-2	152
4.8	Phosphor-Y-3	152
4.9	Phosphor-Z-1	153
4.10	Phosphor-Z-2	153
4.11	Phosphor-Z-3	153
4.12	Blau-X-1	153
4.13	Blau-X-2	153
4.14	Blau-X-3	153
4.15	Blau-Y-1	154
4.16	Blau-Y-2	154
4.17	Blau-Y-3	154
4.18	Blau-Z-1	154
4.19	Blau-Z-2	154
4.20	Blau-Z-3	154
4.21	Rot-X-1	155
4.22	Rot-X-2	155
4.23	Rot-X-3	155
4.24	Rot-Y-1	155
4.25	Rot-Y-2	155
4.26	Rot-Y-3	155
4.27	Rot-Z-1	156
4.28	Rot-Z-2	156
4.29	Rot-Z-3	156

Tabellenverzeichnis

1.1	Lichtstromwerte	34
1.2	Beleuchtungsstärken	36
1.3	Leuchtdichten	37
1.4	Lichtausbeuten	39
1.5	Radiometrie und Photometrie	39
1.6	Farbtemperaturen	50
1.7	Farbwiedergabe-Qualitätsstufen	50
1.8	Farbwiedergabeindex verschiedener Leuchtmittel	51
2.1	Halbleitermaterialien und LED-Farben	63
3.1	Lebensdauerangaben	74
3.2	Bedeutung der Streuwerteinheiten	86
4.1	Vermessene Daten (Modul- und Typenkalibrierung)	138
4.2	Vermessene Werte bei ca. 40 Grad Celsius	139
4.3	Phosphor-X-Werte	152
4.4	Phosphor-Y-Werte	152
4.5	Phosphor-Z-Werte	153
4.6	Blau-X-Werte	153
4.7	Blau-Y-Werte	154
4.8	Blau-Z-Werte	154
4.9	Rot-X-Werte	155
4.10	Rot-Y-Werte	155
4.11	Rot-Z-Werte	156
4.12	Daten aus der Typenkalibrierung	157
4.13	Modulkalibrierung, Farbabstandsdaten und Zielfarbort	157
4.14	Daten aus der Typenkalibrierung	161
4.15	Modulkalibrierung, Farbabstandsdaten und Zielfarbort	161

Literaturverzeichnis

- [1] AUVA: *Optische Strahlung*. https://www.sozialversicherung.at/mediaDB/710279_M%20083.pdf, [Stand: 8. November 2010].
- [2] BECKER, T., PEUKERT, S. und ROOS, P.: *Bildkompression mit JPEG (Farbräume)*. <http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/EModule/jpeg/pages/node6.htm>, [Stand: 20. Oktober 2010]. Johannes Gutenberg Universität Mainz.
- [3] BECKLER, M.: *Fun with an RGB LED*. http://www.mbeckler.org/microcontrollers/rgb_led/, [Stand: 24. November 2010].
- [4] BERUFSAKADEMIE EISENACH: *Studienskript AD-/DA-Umsetzer*. <http://82.119.189.3/ext/dozent/lessig/Skript-AD-DA.pdf>, [Stand: 19. November 2010].
- [5] BRUNTHALER, G.: *Festkörper- und Halbleiterphysik*. Johannes Kepler Universität Linz (Vorlesungsskript), 2010.
- [6] BUETHER, A.: *CIE-Normfarbtafel*. <http://www.farbe-licht-raum.eu/flr/theorie/farbmodelle/1farbmodelle.html>, [Stand: 11. Oktober 2010]. Kunsthochschule Halle.
- [7] BÜHLER, P.: *MediaFarbe analog&digital. Farbe in der Medienproduktion*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2004.
- [8] BURKARD, R.: *Einführung in die mathematische Optimierung*. Technische Universität Graz (Vorlesungsskript), 2007.
- [9] BUROSCH AUDIO-VIDEO-TECHNIK: *Qualität von Verstärkerschaltungen - Rauschen*. <http://www.digitalvd.de/hardware.php4?ID=18>, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [10] CHAO, J., LENZ, R., MATSUMOTO, D. und NAKAMURA, T.: *Riemann Geometry for Color Characterization and Mapping*. http://webstaff.itn.liu.se/~reile/csp-pages/publications/reprints/CGIV2008_CHAO_PG277.pdf, [Stand: 22. November 2010].
- [11] DIGITAL MEDIA FOR ARTISTS: *Beschreibung und Ordnung von Farben, Farbmetrik, Farbmodelle*. <http://www.dma.ufg.ac.at/app/link/Grundlagen%3AAllgemeine/module/16579?step=all>, [Stand: 15. Oktober 2010].

Literaturverzeichnis

- [12] DREHER, A.: *Thema 2 - Grundlagen II*. http://www.uni-koblenz.de/~cg/ss09/Proseminar_Farbmanagement/Grundlagen%20II.pdf, [Stand: 3. November 2010]. Universität Koblenz-Landau, Proseminar Farbmanagement, SS 2009.
- [13] ERCO GMBH. http://www.ercoco.com/guide_v2/guide_2/lighting_te_94/luminous_fl_1835/images/eur_ercoco_luminous_fl_intro_1_1_.jpg, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [14] FACHINFORMATIONSZENTRUM CHEMIE GMBH: *Glossar: stehende Welle*. http://www.chemgapedia.de/vsengine/popup/vsc/de/glossar/s/st/stehende_00032welle.glos.html, [Stand: 13. Dezember 2010].
- [15] FAIRAUDIO - JÖRG DAMES & RALPH WERNER MEDIEN GBR: *Beugung (Diffraktion)*. <http://www.fairaudio.de/hifi-lexikon-begriffe/beugung-diffraktion.html>, [Stand: 13. Dezember 2010].
- [16] FISCHER, C. <http://www.biokurs.de/skripten/bilder/!retina5.gif>, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [17] FÖRDERGEMEINSCHAFT GUTES LICHT: *LED: Das Licht der Zukunft*. http://www.licht.de/fileadmin/shop-downloads/lichtwissen17_LED.pdf, [Stand: 18. November 2010].
- [18] FOTO VIDEO ZUMSTEIN AG: *Das menschliche Auge*. http://www.foto-zumstein.ch/uploads/astro_tipp/Das%20menschliche%20Auge.pdf, [Stand: 21. Oktober 2010].
- [19] FRIEDRICH, M. und WIRRIES, B.: *Farbwiedergabeindex*. <http://www.dieenergiesparlampe.de/lichttechnische-grundlagen/farbwiedergabeindex/>, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [20] GEHWEILER, M. und JANOTT, M.: *Das CIE-Farbmodell*. http://marc-janott.de/marc/uni/bildkommunikation_ss00/cie.html, [Stand: 4. November 2010].
- [21] GROSS, R.: *Geometrische Optik (Lecture Notes)*. http://www.wmi.badw.de/teaching/Lecturenotes/Physik3/Gross_Physik_III_Kap_4.pdf, [Stand: 25. Oktober 2010]. Walther-Meißner-Institute, Technische Universität München.
- [22] HAAS, M.: *Farben, Temperatur und Helligkeiten*. http://fotografie.marcus-haas.de/Hintergrund/Physik/Farben_Temperatur_und_Helligkeiten, [Stand: 20. Dezember 2010].
- [23] HACKER, G. und VOGEL, H.: *Streu-Experimente - Der differenzielle Wirkungsquerschnitt*. http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_stoss/stoss_streu_5.html, [Stand: 13. Oktober 2010].

- [24] HAFNER, W.: *Segmentierung von Video-Bildfolgen durch Adaptive Farbklassifikation*. Dissertation, Technische Universität München, 1998.
- [25] HARTL, S.: *CIE-Farbräume*. <http://www.copysshop-tips.de/luf06.php>, [Stand: 22. Dezember 2010].
- [26] HEBBEKER, T.: *Elektromagnetische Wellen*. http://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/ph2_02/p202_105.htm, [Stand: 8. November 2010].
- [27] HEIROM GMBH: *Leuchtdioden (Light Emitting Diode - LED)*. <http://www.heirom.ch/wissenswertes/leuchtdioden.html>, [Stand: 18. Oktober 2010].
- [28] HERA GMBH & CO. KG: *LED - die Zukunft energieeffizienter Beleuchtung*. http://www.hera-online.de/fileadmin/user_upload/LED_Folder_deutsch.pdf, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [29] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK, WIRTSCHAFT UND KULTUR LEIPZIG: *Versuchsanleitung O 11: Farbmatrik/Transmission*. <http://portal.imn.htwk-leipzig.de/labore-und-pools/physik-labore/dokumente/versuchsanleitungen/o11-farbmatrik-transmission>, [Stand: 21. Dezember 2010].
- [30] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK, WIRTSCHAFT UND KULTUR LEIPZIG: *Versuchsanleitung O 7: Transmissionsgrad*. <http://portal.imn.htwk-leipzig.de/labore-und-pools/physik-labore/dokumente/versuchsanleitungen/o7-transmissionsgrad>, [Stand: 21. Dezember 2010].
- [31] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK, WIRTSCHAFT UND KULTUR LEIPZIG: *Versuchsanleitung O 8: Remissionsgrad*. <http://portal.imn.htwk-leipzig.de/labore-und-pools/physik-labore/dokumente/versuchsanleitungen/o8-remissionsgrad>, [Stand: 21. Dezember 2010].
- [32] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK, WIRTSCHAFT UND KULTUR LEIPZIG: *Versuchsanleitung O 9: Farbmatrik/Remission*. <http://portal.imn.htwk-leipzig.de/labore-und-pools/physik-labore/dokumente/versuchsanleitungen/o9-farbmatrik-remission>, [Stand: 21. Dezember 2010].
- [33] IMAGES SCIENTIFIC INSTRUMENTS INC.: *Photovoltaic Cells - Generating electricity*. <http://www.imagesco.com/articles/photovoltaic/photovoltaic-pg4.html>, [Stand: 25. 10. 2010].
- [34] INSTRUMENT SYSTEMS GMBH: *Ulbricht-Kugel zur Messung von Strahlungsleistung und Lichtstrom*. http://www.ko-de-x.de/pdf/instrument_systems_datenblatt.pdf, [Stand: 16. November 2010].
- [35] INTERNATIONALE BELEUCHTUNGSKOMMISSION: *CIE-Farbdigramm*. <http://www.cielab.de/cie.shtml>, [Stand: 9. November 2010].

Literaturverzeichnis

- [36] JÄGER, H. und ERNST, W.: *Experimentalphysik 1*. Technische Universität Graz, 2007.
- [37] JODL, H.-J.: *Theorie*. <http://141.7.70.48/ger/theory.htm>, [Stand: 18. Oktober 2010]. Technische Universität Kaiserslautern.
- [38] KALLENBACH, C. <http://www.kallenbach-christian.de/Belegarbeit.htm>, [Stand: 21. Oktober 2010].
- [39] KEESMANN, I.: *Totalreflexion*. <http://www.uni-mainz.de/FB/Geo/Geologie/archaeo/Lehre/PolMik/Totalreflexion.html>, [Stand: 22. Oktober 2010].
- [40] KOKOSCHKA, S.: *Grundlagen der Lichttechnik*. Universität Karlsruhe, Lichttechnisches Institut, 2003.
- [41] KOSS, G., REINHOLD, W. und HOPPE, F.: *Lehr- und Übungsbuch Elektronik*. Hauser, Leipzig, 2005.
- [42] KOTTAS, M.: *Bauformen von LEDs*. <http://www.ledshift.com/Bauformen%20German.html>, [Stand: 19. Oktober 2010].
- [43] KRÜCKEBERG, J.: *HochleistungsLEDs in der Praxis*. Franzis Verlag, Poing, 2007.
- [44] LAUBE, P.: *Leiter - Nichtleiter - Halbleiter*. http://www.halbleiter.org/grundlagen/leiter/#Das_Baendermodell, [Stand: 18. Oktober 2010].
- [45] LAUBE, P.: *Der p-n-Übergang*. <http://www.halbleiter.org/grundlagen/p-n/>, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [46] LAUBE, P.: *Dotieren*. <http://www.halbleiter.org/grundlagen/dotieren>, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [47] LDBS LICHTDIENST: *Auswahl lichttechnischer Begriffe*. http://images.mercateo.com/pdf/LDBS_Lichtdienst/lichttechnische-begriffe.pdf, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [48] LIPINSKI, K.: *Farbtemperatur*. <http://www.itwissen.info/definition/lexikon/Weiss-white.html>, [Stand: 14. Oktober 2010].
- [49] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *Berechnungsweg in Firmware*. Firmeninternes Dokument.
- [50] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *Fehlerursache*. Firmeninternes Dokument.
- [51] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *LED-Modul LTL-1000-01*. Datenblatt.

- [52] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *PI-LED Elektronik Firmware*. Firmeninternes Dokument.
- [53] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *PI-LED Lösungen*. Firmeninternes Dokument.
- [54] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *PI-LED-Technologie - Detailinformationen*. Firmeninternes Dokument.
- [55] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *PI-LED-Technologie. Die Lichttechnologie der Zukunft*. Firmeninternes Dokument.
- [56] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *Gebrauchsmusterschrift*, 7. Oktober 2010. Schutzrecht.
- [57] LUMITECH PRODUKTION UND ENTWICKLUNG GMBH: *Farbkonversion*. http://www.lumitech.at/farbkonversion_10.htm, [Stand: 15. Dezember 2010].
- [58] MACEVOY, B. <http://www.handprint.com/HP/WCL/IMG/psf.gif>, [Stand: 25. Oktober 2010].
- [59] MCP WOLFF GMBH: *Polarisiertes Licht*. http://www.magen-spezial.de/0403/medizin_geschichte/index.shtml, [Stand: 25. Oktober 2010].
- [60] MIETKE, D.: *Vom Elektron zur Elektronik*. <http://www.elektroniktutor.de/grundlg/halbltr.html>, [Stand: 18. Oktober 2010].
- [61] MISZALOK, V.: *Lumineszenz*. http://www.miszalok.de/Lectures/L09_Displays/D4_Luminiscence/Luminiscence_d.htm, [Stand: 12. Oktober 2010].
- [62] MOLTRECHT, E.: *Halbleiter, Diode*. <http://www.dj4uf.de/lehrg/e12/e12.html>, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [63] NIKIEL, A.: *Grundmechanismen des Sehens*. <http://irtel.uni-mannheim.de/lehre/seminararbeiten/w96/Grundlagen/Grund.html>, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [64] OSCHMANN, T.: *Die Leuchtdiode*. <http://www.nullohm.de/berichte/led dex.htm>, [Stand: 14. Dezember 2010].
- [65] OSRAM GMBH: *LED Technik*. http://www.osram.de/osram_de/LED/Alles_ueber_LED/LED_Technik/index.html, [Stand: 15. Dezember 2010].
- [66] OSRAM GMBH: *Tutorial 1 - MacAdam's Theorie über den Farbeindruck, MacAdam Ellipse und SWE*. http://osram.de/osram_de/LED/LED_Systeme/FineWhite_LED-Module/Technische_Informationen/Tutorial/Tutorial_1/index.html, [Stand: 17. November 2010].

Literaturverzeichnis

- [67] OSRAM SYLVANIA: *MacAdam Ellipsen*. <http://assets.sylvania.com/assets/documents/faq0026-0999.f4172b60-cde8-4cb2-8a0a-37d3490d9e49.pdf>, [Stand: 17. November 2010].
- [68] OTT, P.: *Farbtemperatur*. <http://to.hs-heilbronn.de/wiki/Farbtemperatur>, [Stand: 14. 10. 2010].
- [69] OTT, P.: *Beleuchtungsstärke Bestrahlungsstärke*. <http://to.hs-heilbronn.de/wiki/http://to.hs-heilbronn.de/wiki/Beleuchtungsst%C3%A4rkeBestrahlungsst%C3%A4rke>, [Stand: 17. Dezember 2010].
- [70] OTTERSTEDT, H.: *Auge (Sehen)*. [http://www.otterstedt.de/wiki/index.php/Auge_\(Sehen\)](http://www.otterstedt.de/wiki/index.php/Auge_(Sehen)), [Stand: 21. Oktober 2010].
- [71] PANT, C. und FARUP, I.: *Evaluating Color Difference Formulae by Riemannian Metric*. http://www.ansatt.hig.no/ivarf/publications/Pant_10_cgiv.pdf, [Stand: 22. November 2010].
- [72] PASCHOTTA, R.: *Integrating Spheres*. http://www.rp-photonics.com/integrating_spheres.html, [Stand: 16. November 2010].
- [73] RIS, H.: *Beleuchtungstechnik für Praktiker*. AZ Verlag, VDE Verlag GMBH, Berlin-Offenbach-Aarau, 2003.
- [74] RUNDFUNK BERLIN-BRANDENBURG: *Einstein über die Welt. Die Welt über Einstein*. http://www.mensch-einstein.de/mythos/zitatmaschine/zitat_jsp/key=739/keyword=licht.html, [Stand: 23. Dezember 2010].
- [75] RUPPRECHT GYMNASIUM MÜNCHEN: *Eine kurze Geschichte der Optik*. http://www.leifiphysik.de/web_ph10_g8/geschichte/09optik/optik_geschichte.htm, [Stand: 4. November 2010].
- [76] SCHENKE, G.: *Hilfsblätter zur Beleuchtungstechnik*. http://www.et-inf.fho-enden.de/~elmalab/beleucht/download/Blt_1.pdf, [Stand: 28. Oktober 2010]. Fachhochschule Oldenburg Ostfriesland Wilhelmshaven.
- [77] SCHWARZ, A.: *LED-Fading*. <http://www.mikrocontroller.net/articles/LED-Fading>, [25. November 2010].
- [78] SEILNACHT, T.: *Licht*. <http://www.seilnacht.com/Lexikon/Licht.htm>, [Stand: 22. Oktober 2010].
- [79] SOLARI LAMPEN AG: *Lichtbegriffe*. http://www.solari.ch/02_lichtb.htm, [Stand: 14. Oktober 2010].
- [80] STATEMASTER/RAPID INTELLIGENCE: *CIE 1931 color space*. <http://www.statemaster.com/encyclopedia/CIE-1931-color-space>, [Stand: 4. November 2010].

- [81] TAENIGES, H.-J.: *Die Fernsteuerung*. <http://www.lkw-modellbau-berlin.de/tipps/fernsteuerung.html>, [Stand: 21. Februar 2011].
- [82] TIPLER, P. und MOSCA, G.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009.
- [83] TROOST, B.: *Heißleiter (NTC = negative temperature coefficient)*. <http://www.bibianatroost.de/Webcard/elektronik/index.html?bauteile/ntc/ntc.html>, [Stand: 19. November 2010].
- [84] UHLMANN, K.: *Angewandte Physik*. <http://www.unibw.de/rz/dokumente/fachbereiche/getFILE?fid=1951613&tid=fachbereiche>, [Stand: 17. Dezember 2010]. Universität der Bundeswehr München.
- [85] UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN: *Optische Grundlagen der Photosensorik*. <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5138/kap2.pdf>, [Stand: 18. Oktober 2010].
- [86] VOSSLOH-SCHWABE DEUTSCHLAND GMBH: *Thermisches Design von LED-Leuchten*. http://www.wustlich.de/images/onecms/site/Produkte/PDF/ThermischesDesign_DE_140909.pdf, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [87] WAGNER, P.: *Strahlenoptik bzw. Geometrische Optik*. <http://www.scandig.info/Strahlenoptik.html>, [Stand: 25. Oktober 2010].
- [88] WALDORF, J.: *Kurze Geschichte des Lichts*. <http://www.licht.de/de/licht-know-how/ueber-licht/kurze-geschichte-des-lichts>, [Stand: 4. November 2010].
- [89] WEHMEYER, F.: *Komplementärfarben/Farbkreis/additive und subtraktive Farbmischung*. http://www.frank-wehmeyer.de/frank/unterricht/licht_farbe/licht2.htm, [Stand: 20. Oktober 2010].
- [90] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Chip-On-Board-Technologie*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Chip-On-Board-Technologie>, [Stand: 13. Dezember 2010].
- [91] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Raumwinkel*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Raumwinkel>, [Stand: 13. Oktober 2010].
- [92] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Interferenz (Physik)*. [http://de.wikipedia.org/wiki/Interferenz_\(Physik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Interferenz_(Physik)), [Stand: 14. Dezember 2010].
- [93] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Lichtabsorption*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtabsorption>, [Stand: 15. Dezember 2010].
- [94] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Linsengleichung*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Linsengleichung>, [Stand: 15. Dezember 2010].

Literaturverzeichnis

- [95] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Newtonsche Abbildungsgleichung*. http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Abbildungsgleichung, [Stand: 15. Dezember 2010].
- [96] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Strahlensatz*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz>, [Stand: 15. Dezember 2010].
- [97] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Lambertsches Gesetz*. http://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsches_Gesetz, [Stand: 16. November 2010].
- [98] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Reflexion (Physik)*. http://de.wikipedia.org/wiki/Diffuse_Reflexion#Diffuse_Reflexion, [Stand: 16. November 2010].
- [99] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *MacAdam ellipse*. http://en.wikipedia.org/wiki/MacAdam_ellipse, [Stand: 17. November 2010].
- [100] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Belichtung (Physik)*. [http://de.wikipedia.org/wiki/Belichtung_\(Physik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Belichtung_(Physik)), [Stand: 18. Dezember 2010].
- [101] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Heißleiter*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Hei%C3%9Fleiter>, [Stand: 19. November 2010].
- [102] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Bändermodell*. <http://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%A4ndermodell>, [Stand: 19. Oktober 2010].
- [103] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Elektrische Leitfähigkeit*. http://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische_Leitf%C3%A4higkeit, [Stand: 19. Oktober 2010].
- [104] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Farbwahrnehmung*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Farbwahrnehmung>, [Stand: 20. Dezember 2010].
- [105] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Plancksches Strahlungsgesetz*. http://de.wikipedia.org/wiki/Plancksches_Strahlungsgesetz, [Stand: 20. Dezember 2010].
- [106] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Leuchtdiode*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Leuchtdiode>, [Stand: 22. Oktober 2010].
- [107] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Pulse-width modulation*. http://en.wikipedia.org/wiki/Pulse-width_modulation, [Stand: 24. November 2010].
- [108] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Ursache-Wirkungs-Diagramm*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Ishikawa-Diagramm>, [Stand: 25. November 2010].
- [109] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Lichtquelle*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtquelle>, [Stand: 27. Oktober 2010].

- [110] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Radiometrie*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Radiometrie>, [Stand: 27. Oktober 2010].
- [111] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Leiterplatte*. <http://de.wikipedia.org/wiki/FR4>, [Stand: 29. Oktober 2010].
- [112] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *CIE-Normvalenzsystem*. <http://de.wikipedia.org/wiki/CIE-Normvalenzsystem>, [Stand: 3. November 2010].
- [113] WIKIMEDIA FOUNDATION INC.: *Maxwell-Gleichungen*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>, [Stand: 8. November 2010].
- [114] WISSENSCHAFTLICHE VERLAGSGESELLSCHAFT STUTTGART: *Aufbau und Funktion des Auges*. http://www.gesundheit-heute.de/index.php?title=Aufbau_und_Funktion_des_Auges, [Stand: 16. Dezember 2010].
- [115] WORLDLINGO TRANSLATIONS LLC: *Farbsättigung*. <http://www.worldlingo.com/ma/dewiki/de/Farbs%C3%A4ttigung>, [Stand: 20. Dezember 2010].
- [116] WORLDLINGO TRANSLATIONS LLC: *Farbton*. <http://www.worldlingo.com/ma/dewiki/de/Farbton>, [Stand: 20. Dezember 2010].
- [117] X-RITE GMBH - OPTRONIK: *Integrating Spheres*. http://www.optronik.de/Integrating_Spheres.pdf, [Stand: 16. November 2010].