



Florian Schönleitner

## Faserverbundwerkstoffe in Wickelköpfen

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom – Ingenieur

Technische Universität Graz

Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften

Studienrichtung Wirtschaftsingenieurwesen – Maschinenbau

Betreuer: Ass. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Christian Moser

Institut für Leichtbau

Graz, September 2010

Deutsche Fassung:

Beschluss der Curricula – Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008

Genehmigung des Senates am 1.12.2008

## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtliche und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, am 30. September 2010

.....  
Florian Schönleitner

## Vorwort

Diese Diplomarbeit wurde in Zusammenarbeit mit der Firma Andritz AG, Andritz Hydro in Weiz durchgeführt. Auf diesem Wege möchte ich mich einerseits bei Andritz Hydro für die Bereitstellung dieser Diplomarbeit bedanken und des weiteren vor allem bei meinem Betreuer von Seiten der Firma, Herrn Dipl.-Ing. Markus Kaintz für seine hervorragende fachliche Unterstützung.

Für die Betreuung an der Technischen Universität Graz, am Institut für Leichtbau möchte ich mich besonders bei Herrn Ass. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Christian Moser und bei Herrn Dipl.-Ing. Dr. techn. Thomas Thurner für Ihre große Unterstützung bedanken.

Der größte Dank gebührt aber meinen Eltern, die mir nicht nur meine Ausbildung ermöglichten sondern die mich auch sonst immer unterstützen.

Danke.

Florian Schönleitner

## Kurzfassung

In Turbogeneratoren zählen Statorwickelköpfe, im Vergleich zu anderen Maschinenkomponenten zu den Bauteilen mit den größten Schwingungsamplituden, sowohl im Normalbetrieb als auch bei elektrischen Störfällen (Kurzschlüsse, etc.). Die Berechnung dynamischer Eigenschaften wie Eigenfrequenzen und Schwingungsamplituden dieser Komponenten ist heute Stand der Technik bei der Entwicklung von Turbogeneratoren. Grundlage für die treffsichere Vorhersage des Schwingungsverhaltens ist ein Materialmodell der Statorstäbe, das die Realität hinreichend genau widerspiegelt, um die gewünschten Voraussagen mit Finite – Elemente – Modellen der Wickelköpfe zu ermöglichen. In dieser Arbeit wird ein Materialmodell entwickelt, das diesen Anforderungen entspricht. Da sich die Statorstäbe aus einer Vielzahl von Komponenten zusammensetzen entspricht dies einem Werkstoff mit ausgeprägter Anisotropie.

Im ersten Teil der Arbeit wird ein analytisches Modell, basierend auf Annahmen aus der Theorie der Faserverbundwerkstoffe, gefunden. Bereits anhand dieses Materialmodells werden erste Untersuchungen hinsichtlich Einflussgrößen wie Temperatur, Anzahl der Teileiter, etc. durchgeführt. Zusätzlich werden Messungen in diversen Versuchsreihen durchgeführt um damit die erforderlichen Materialkennwerte zu ermitteln und die analytisch gefundenen Eigenschaften zu bestätigen. Dazu werden zur messtechnischen Bestimmung der E – Moduln, 4 – Punkt - Biegeversuch sowie Anschlagversuche (Eigenfrequenzmessungen) durchgeführt. Für die Ermittlung des Schubmoduls dient ein, speziell für die Statorstäbe konstruiertes, Torsionspendel. Abschließend wird ein Finite – Elemente – Modell präsentiert, das eben diese Eigenschaften genau widerspiegelt. Eine Netzstudie gibt zudem Aufschluss welches Modell alle diese Kriterien am genauesten erfüllt. Die Ergebnisse der rechnerischen Modalanalysen werden wiederum mit den aus den experimentellen Modalanalysen bekannten Eigenfrequenzen verglichen und interpretiert.

Sowohl das analytische als auch das in den FEM – Rechnungen eingesetzte Materialmodell zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Daten. Diese Modelle sind ein wichtiger Schritt in Richtung der Vorausberechnung von Betriebs- und Störfallschwingungsamplituden von Statorwickelköpfen.

## Abstract

End windings of the generator stator of turbo generators are in comparison with other components the parts with the highest amplitudes in normal mode as well as in electrical breakdowns (short circuits, etc.). The calculation of dynamical properties like resonance frequencies and oscillation amplitudes of these components is state of the art in the development of turbo generators. Basic principal for a serious forecast of the oscillation characteristics is a material model of the stator bar which represents the characteristics of these parts. That allows the prediction of the end windings with finite element models. In this paper a material model will be developed, which is conform to these requirements. The stator bar consists of different components and is therefore a material with a distinct anisotropy.

In the first part of this paper there will be an analytic model developed, that is based on basic theories of composite materials. With the help of this material model it is possible to make first analysis concerning influence factors such as temperature, number of sub conductors, etc. In addition to the analytic solution and to confirm them, measurements in several test runs will be organised to detect specific material values. For the metrological identification of the young's modulus 4 point bend tests and bump tests were realized. The modulus of shear was calculated by a special for these stator bars designed torsion pendulum. Finally a finite element model will be presented, that represents all these properties. A mesh study gives the information which model performs the criteria's exactly. The results of the numerical modal analysis will be compared and interpreted with the experimental results of the resonance frequencies of the experimental modal analysis.

The solution of the analytic model as well as the solution of the finite element model shows a very good correlation with the experimental data. These models are an important step in the direction of the forecast of normal mode and electrical breakdown oscillation amplitudes from end windings of the generator stator.

# Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	7
1.1	Problemstellung	7
1.2	Vorgehensweise	8
1.3	Aufbau Statorstab - Querschnitt	10
2	FASERVERBUNDWERKSTOFFE – THEORIE	11
2.1	Geschichte der Faserverbundwerkstoffe	11
2.2	Begriffe, Definitionen	11
2.3	Das lineare Elastizitätsgesetz der UD – Schicht	14
2.4	Anisotropie	14
2.5	Bestimmung der Elastizitätsgrößen einer UD-Schicht	18
3	ANALYTISCHE ABLEITUNG	24
3.1	Ermittlung der Elastizitätsgrößen der Versuchsstäbe	24
3.2	E – Modul in Faserrichtung (Stabrichtung)	25
3.3	E – Modul quer zur Faserrichtung	26
3.4	Schubmodul G	28
3.5	Querkontraktionszahlen $\nu_{xy} = \nu_{xz}$	31
3.6	Querkontraktionszahl $\nu_{yz}$	31
3.7	Formelzusammenstellung	32
3.8	Analytische Eingabeoberfläche in Microsoft Excel	33
3.9	Ausgabedaten analytische Lösung, Versuchsstab Typ 1	34
3.10	Ausgabedaten analytische Lösung, Versuchsstab Typ 2	36
3.11	Analytische Einflussgrößenuntersuchung auf den E – Modul	38
4	EXPERIMENTELLE ERMITTLUNG	41
4.1	Bestimmung der Elastizitätsgrößen durch Versuche	41
4.2	Versuchsstab – Typen	41
4.3	4 Punkt – Biegeversuch	42
4.4	Experimentelle Modalanalyse („Bump Test“)	51
4.5	Torsionspendelversuch	66

5	FE - MODELL	85
5.1	Modellbildung	85
5.2	Materialdefinition, Versuchsstab Typ 1	86
5.3	Elementtyp, Versuchsstab Typ 1	87
5.4	Modalanalyse	87
5.5	Detailergebnisse Modalanalysen, Versuchsstab Typ 1, Länge 670mm	90
5.6	Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, graphischer Vergleich mit Messergebnissen	93
5.7	Resümee Netzstudie Versuchsstab Typ 1	95
5.8	Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Abweichungen der Ergebnisse	96
5.9	Materialdefinition, Versuchsstab Typ 2	98
5.10	Elementtyp, Versuchsstab Typ 2	98
5.11	Detailergebnisse Modalanalysen, Versuchsstab Typ 2, Länge 500mm	99
5.12	Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, graphischer Vergleich mit Messergebnissen	102
5.13	Resümee Netzstudie Versuchsstab Typ 2	105
5.14	Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, prozentuale Abweichungen der Ergebnisse	105
6	ZUSAMMENFASSUNG	107
7	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	109
8	TABELLENVERZEICHNIS	111
9	LITERATURVERZEICHNIS	112

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Statorstäbe von Generatoren setzen sich aus einer Vielzahl von Komponenten (Teilleiter, Teilleiterisolierung, Gesamtsolierung, ...) zusammen. Im Prinzip entspricht dies einem Werkstoff mit ausgeprägter Anisotropie. Für eine Modellierung des mechanischen Verhaltens sind isotrope, d.h. richtungsunabhängige Materialmodelle, daher unzureichend.

Grundlage für die Vorhersage mechanischer Eigenschaften des Wickelkopfes, ist ein Materialmodell der Statorstäbe, das die Realität hinreichend genau widerspiegelt. Um dieses Ziel zu erreichen wird versucht, unter der Annahme der Theorie der Faserverbundwerkstoffe (Werkstoffe mit ausgeprägter Anisotropie), ein Modell zu finden, das den Eigenschaften der Statorstäbe entspricht.

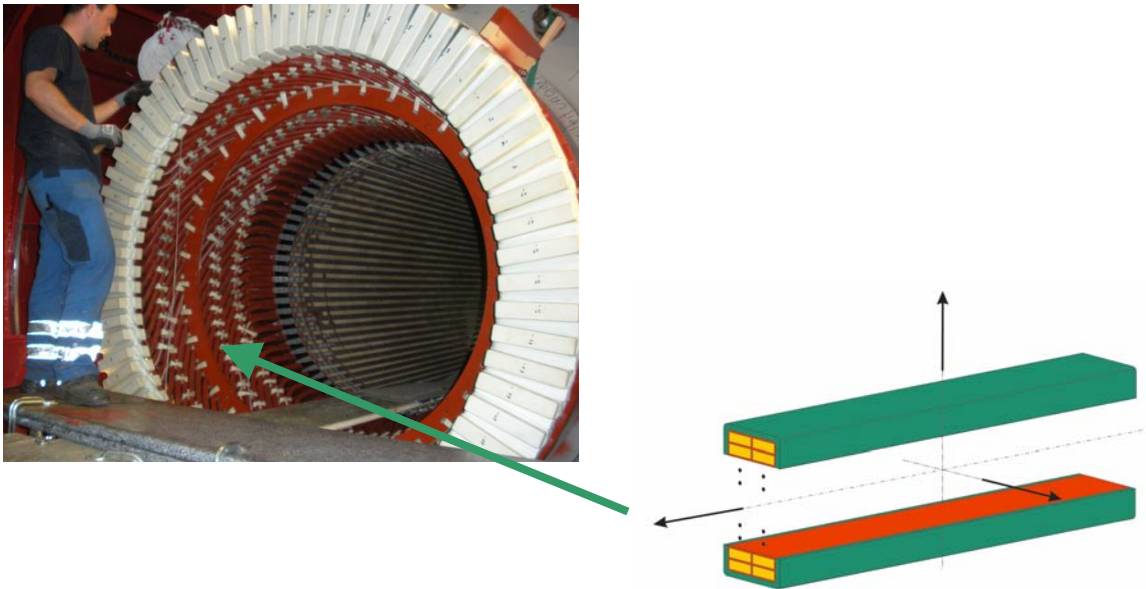


Abbildung 1: links: Fertigung des Statorwickelkopfes einer Turbomaschine, rechts: Statorstab vereinfachte Darstellung

In Abbildung 1 ist ein Foto während der Fertigung des Statorwickelkopfes einer Turbomaschine dargestellt. Der Wickelkopf ist der Bereich mit den größten Schwingungsamplituden sowohl bei Normalbetrieb als auch bei elektrischen Störfällen (Kurzschlüssen).

Um das dynamische Verhalten von Einzelstäben und in Folge jenes des gesamten Wickelkopfes genau vorhersagen zu können, soll im ersten Teil der Diplomarbeit das Stabverhalten unter Längs- und Querkräften sowie unter Biege- und Torsionsmomenten analytisch abgeleitet werden. Dieses Modell soll die Vorhersage globaler Stabeigenschaften (Biegesteifigkeiten etc.) ermöglichen.



Im zweiten Teil der Arbeit sollen die analytisch gefundenen Materialeigenschaften auf ein Materialmodell reduziert werden, welches das tatsächliche Verhalten der Stäbe hinreichend genau widerspiegelt. Dieses Materialmodell soll schließlich zur Finit-Element-Modellierung der Stäbe in einem bestehenden Programmpaket dienen. Die Methodik soll außerdem allgemeine Gültigkeit besitzen, d.h. für jede beliebige Stabgeometrie bzw. Zusammensetzung des Stabverbundes. Dazu soll der Stabverbund als orthotroper Verbundwerkstoff „nachmodelliert“ werden.

Der Abgleich der gefundenen analytischen Lösung, bzw. der rechnerischen Modalanalyse (FEM) mit messtechnisch ermittelten Werten soll die Richtigkeit der Lösung bestätigen. Es werden also neben der analytischen Betrachtung sowie Modellierung mittels FEM, zahlreiche Versuchsreihen durchgeführt, um die erforderlichen Materialkennwerte zu ermitteln. Die allgemeine Vorgehensweise wird in Abbildung 2 illustriert.

## 1.2 Vorgehensweise

Die Vorgehensweise lässt sich grob in 3 Schritte unterteilen:

### 1. Schritt: Analytik

Durch Anwendung mikromechanischer Betrachtung, wie sie in der Theorie der Faserverbundwerkstoffe vorkommen, werden die Elastizitätskonstanten des orthotropen Materialmodells ermittelt (9, genauere Definitionen siehe Kapitel 2). Damit können auch die Steifigkeiten der Statorstäbe bestimmt werden. Ergänzend zur analytischen Lösung werden verschiedene Einflussgrößen auf die Elastizitätskonstanten näher betrachtet. Dadurch lassen sich des weiteren Aussagen über den Einfluss der Anzahl der Teilleiter, der Lackschicht sowie den Einfluss bei unterschiedlicher Temperatur der Außenisolation auf die Elastizitätskonstanten des Stabverbundes treffen.

### 2. Schritt: Experimentelle Ermittlung

Durch verschiedene Versuchsreihen sollen verschiedene Elastizitätskonstanten experimentell ermittelt und mit den Ergebnissen der analytischen Lösung verglichen werden. Aus 4 – Punkt – Biegeversuchen wird der E – Modul quer zur Faserrichtung bestimmt. Mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse lässt sich dieser zudem über die gemessene Eigenfrequenz bestimmen. Ein dynamisch durchgeführter Torsionspendelversuch lässt neben der Ermittlung des Schubmoduls auch Aussagen über das Dämpfungsverhalten zu.

### 3. Schritt: FE – Modell

Es wird ein verschmiertes Modell der Statorstäbe modelliert, das die Eigenschaften aus der Realität wiedergibt. Dazu werden in der orthotropen Materialdefinition die Ergebnisse der analytischen Lösung eingegeben. Eine Netzstudie zeigt zudem das optimale oder auch hinreichend genaue Modell. Ergebnis der rechnerischen Modalanalysen sind die Eigenfrequenzen der Statorstäbe, die wiederum mit jenen der experimentelle Modalanalyse verglichen werden.

## Vorgehensweise

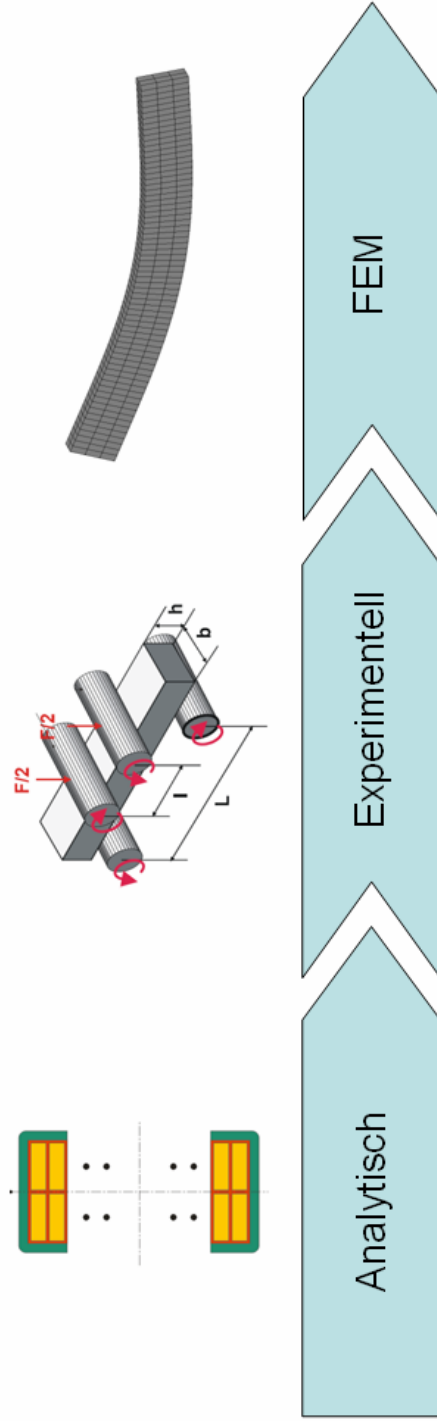


Abbildung 2: Vorgehensweise, Analytisch – Experimentell – FEM

### 1.3 Aufbau Statorstab - Querschnitt

Die folgenden Abbildungen zeigen den Aufbau eines Statorstabes:



Abbildung 3: Statorstab, links: unverpresst; rechts: verpresst

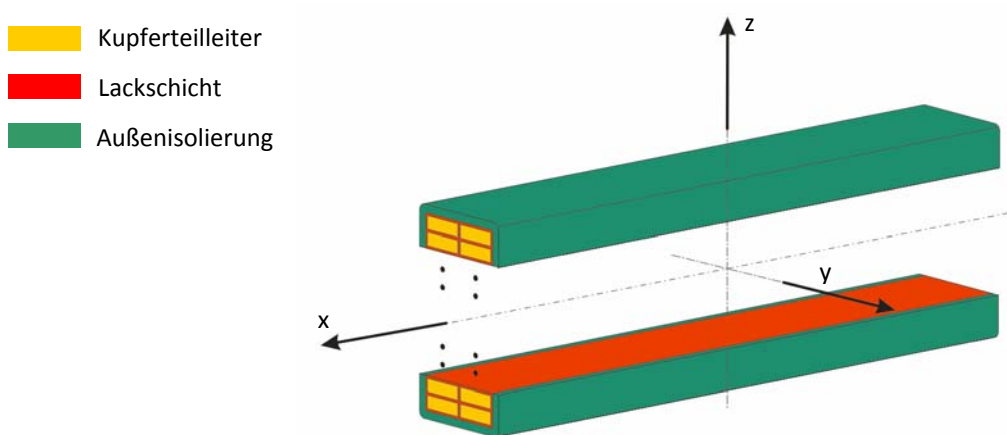


Abbildung 4: Schematischer Aufbau eines Statorstabs; Lage des Koordinatensystems

In Abbildung 4 ist der Aufbau eines Statorstabs schematisch dargestellt, außerdem zeigt Abbildung 3 einen verpressten bzw. unverpressten Statorstab. Die Kupferteilleiter laufen in Längsrichtung (gelb) und sind mit einer Lackschicht umgeben (rot). Das Leiterpaket ist außen mit einer in Harz getränkten Isolierung umgeben.

In weiterer Folge soll eine analytische Lösung gefunden werden, die sowohl die Geometrie und den Werkstoff der Einzelkomponenten berücksichtigt als auch die Anzahl der Teileiter neben- und untereinander. Das daraus abgeleitete Materialmodell dient als Grundlage für die Modellbildung mittels FEM.

## 2 Faserverbundwerkstoffe – Theorie

Zur Theorie der Faserverbundwerkstoffe existiert umfangreiche Literatur, deren detaillierte Auflistung den Rahmen dieser Arbeit bei weitem überschreiten würde. Als Übersicht zur Begriffsbestimmung in diese Theorie wird hier die in Schürmann, H. 2005; *Konstruieren mit Faser – Kunststoff Verbunden* angeführte Einleitung wiedergegeben.

### 2.1 Geschichte der Faserverbundwerkstoffe (Schürmann, H. 2005)

Faserverbundwerkstoffe sind keine Erfindung der Technik, sondern eine Evolutionslösung der Natur. Das Prinzip Kräfte durch hochfeste Fasern aufzunehmen ist das Ergebnis Jahrmillionen - langer Evolution und hat sich als bestgeeignetes Leichtbauprinzip herausgebildet. Faserverbundstrukturen finden sich in Tragstrukturen von Pflanzen sowie im Knochenbau und auch in der Muskulatur des Menschen. Auch der älteste Konstruktionswerkstoff des Menschen, Holz, ist ein Faserverbundwerkstoff. Holz stellt in idealer Weise die wichtigsten Eigenschaften eines Leichtbauwerkstoffes dar. Bei niedriger Dichte verfügt der Werkstoff dennoch über eine hohe Festigkeit. In Faserform verfügen Werkstoffe über deutlich höhere Steifigkeiten und Festigkeiten. Die Verbindung zwischen Holz und den neuartigen, derzeit in der Technik entwickelten Faserverbundwerkstoffen, drückt sich darin aus, dass Berechnungsverfahren und Konstruktionsprinzipien aus dem Holzbau teilweise übernommen wurden. Eine weitere Umsetzung des Faserverbundprinzips findet man im Bauwesen, die Verstärkung von Beton durch Stahldrähte.

Neben dem Leichtbauprinzip, Kräfte von Fasern aufnehmen zu lassen, liegt den Faserverbundwerkstoffen ein weiteres wichtiges Prinzip zugrunde. Verschiedene Werkstoffe werden so miteinander kombiniert, dass Teil-Mängel des Einzelwerkstoffes in der Werkstoffkombination ausgeglichen werden. D.h. es wird aus mehreren Einzelwerkstoffen mit bestimmten Eigenschaften ein Werkstoffverbund geschaffen, der wesentlich höherwertiger ist als seine Komponenten. Geschätzt sind neben dem Werkstoffleichtbau verbunden mit hoher Festigkeit und Steifigkeit, also auch die Möglichkeit freier Formgestaltung und die Möglichkeit der Integration mehrerer Einzelkomponenten (Integralbauweise).

### 2.2 Begriffe, Definitionen (Schürmann, H. 2005)

Homogenität

Ortsunabhängigkeit jeglicher Eigenschaften. D.h. es wird dadurch ein Werkstoff charakterisiert, dessen Eigenschaften im gesamten Körper gleich sind. Allerdings ist dies auch eine Frage der Betrachtungsebene. Ein Werkstoff kann makroskopisch homogen erscheinen, mikroskopisch jedoch inhomogen aufgebaut sein. Bei der Modellierung der Faserverbundwerkstoffe ignoriert man bei der makromechanischen Betrachtungsweise lokal vorliegende inhomogene Zustände, der Werkstoff wird also „zwangsweise“ homogenisiert.

## Faser

Hochfeste Fasern übernehmen die anliegenden mechanischen Lasten, während die Matrix die Fasern in der vorgegebenen Position fixiert und stützt. D.h. die Funktion der Fasern besteht vor allem darin, der Einzelschicht eine hinreichend hohe Steifigkeit und Festigkeit zu geben – die Fasern sind hauptsächlich tragende Verbundkomponente. Meist versteht man unter einem Faserverbundwerkstoff einen Verbund aus hochfesten Fasern und einem Kunststoff.

## Matrix

Unter Matrix wird im Allgemeinen die Bettungsmasse verstanden, die die Fasern umgibt und sie schützt und stützt. Die Matrix erfüllt eine Reihe weiterer notwendiger Aufgaben, ist aber häufig der Schwachpunkt des Werkstoffes.

## Composite

Ist im Englischsprachigen die Bezeichnung für eine Verbundkonstruktion. D.h. für eine Konstruktion bei der verschiedene Werkstoffe derart kombiniert werden, dass sich Eigenschaften ergeben, die die Einzelkomponente alleine nicht erzielen könnte.

## Laminat

Da die angreifenden Kräfte in unterschiedlicher Richtung auftreten können, werden die Last tragenden Fasern dem entsprechend auch in unterschiedlicher Richtung angeordnet. Da dies aber nur getrennt, durch stapeln mehrerer Einzelschichten mit unterschiedlicher Faserrichtung geschehen kann, entsteht ein so genannter Mehrschichten-Verbund oder ein Laminat. Die Lamineigenschaften sind wesentlich durch die Schichtfolge oder das so genannte Layup bestimmt. Laminat ist umgangssprachlich, aber die gebräuchlichere Bezeichnung. Mehrschichten - Verbund ist der mechanisch korrekte Terminus. Das Verhalten der Laminat lässt sich in sehr vielen Fällen mit der so genannten klassischen Laminattheorie erfassen.

Abbildung 5 zeigt noch einmal kurz zusammengefasst die wichtigsten Begriffe bzw. Unterscheidungen.

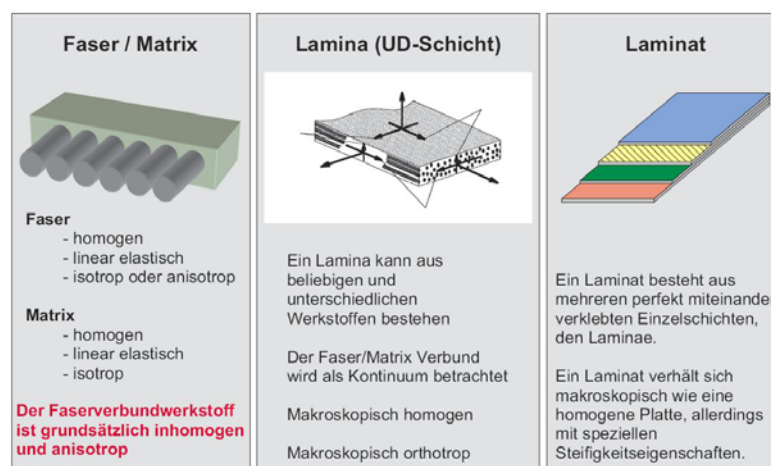


Abbildung 5: Definitionen für Faserverbundwerkstoffe (Kress, G. 2009)

## Lamina (UD – Schicht)

Ein Mehrschichten-Verbund ist also aus Einzelschichten, Lamina, aufgebaut, dargestellt in Abbildung 6. Dies sind meist unidirektionale Schichten (UD – Schichten), und stellen das Grundelement eines klassischen Mehrschichten – Verbundes dar. Die linear elastischen Eigenschaften der Laminat-Einzelschichten sind häufig stark anisotrop.

Folgende idealisierende Annahmen werden bezüglich der UD - Schicht getroffen:

- die Fasern verlaufen *parallel* in einer Richtung
- die Fasern sind *gleichmäßig* über den Querschnitt verteilt
- die Fasern sind *ideal gerade* und verlaufen ohne Unterbrechung
- Matrix und Fasern *haften ideal* aneinander; d.h. es treten bei Belastung keinerlei Verschiebungen an der Faser-Matrix-Grenzfläche auf (*keine Relativbewegungen!*)

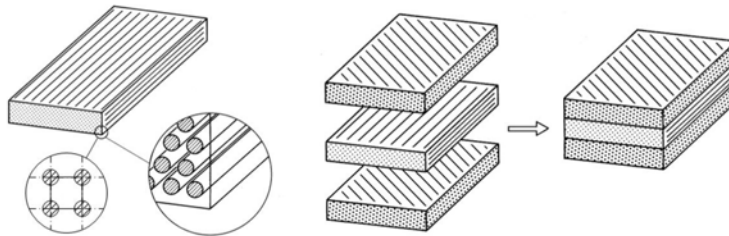


Abbildung 6: a Unidirektionale Schicht, b Mehrschichten-Verbund bestehend aus mehreren Einzelschichten (Schürmann, H. 2005)

## Anisotropie

UD – Schichten und viele Laminare weisen ein richtungsabhängiges Verhalten auf. Dies bezieht sich auf mechanische Eigenschaften wie Elastizitätsgrößen und Festigkeiten, aber auch auf thermodynamische Eigenschaften. Man bezeichnet die Richtungsabhängigkeit von Eigenschaften in der Mechanik als Anisotropie, allerdings ist ein UD – Schicht nicht vollständig anisotrop. Aufgrund vorliegender Symmetrieebenen, liegt ein Sonderfall vor (s. das lineare Elastizitätsgesetz einer UD – Schicht, Kapitel 2.3).

Der Vollständigkeit halber sollen zudem folgende Begriffe definiert werden:

### Mikromechanik

Das Studium des Werkstoffverhaltens im Kleinen, wobei das Zusammenspiel seiner einzelnen Komponenten als Teil der Definition des Verhaltens des heterogenen Materials untersucht wird.

### Makromechanik

Das Studium des Werkstoffverhaltens im Großen, wobei das Material von vornherein als homogenes Kontinuum gesehen wird und die Wirkungen der Komponenten nur in den gemittelten Verbundeigenschaften erkannt werden.

## 2.3 Das lineare Elastizitätsgesetz der UD – Schicht (Schürmann, H. 2005)

Ein Werkstoff wird mechanisch durch sein Werkstoffgesetz charakterisiert, das den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen beschreibt. Sind die Voraussetzungen linearer, idealer Elastizität gegeben, so kann man den allgemeinen Begriff Werkstoffgesetz als lineares Elastizitätsgesetz präzisieren, der Werkstoff gehorcht dem Hookeschen Gesetz.

An einem Werkstoff-Volumenelement mit den 3 Raumrichtungen, s. Abbildung 7, greifen im allgemeinen Fall 9 verschiedene Spannungen an (3 Normalspannungen, 6 Schubspannungen). Diese sind im Fall linearer, idealer Elastizität über 81 Konstanten mit den Verzerrungen gekoppelt.

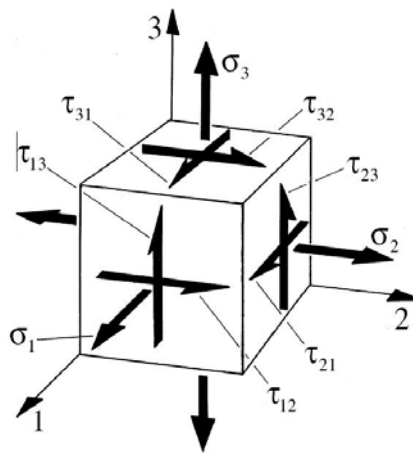


Abbildung 7: Werkstoff-Volumenelement mit den zugehörigen Spannungen (Schürmann, H. 2005)

## 2.4 Anisotropie

Bei anisotropen Werkstoffen wird je nach Isotropiegrad bzw. Vorhandensein von Symmetrieebenen zwischen folgenden Fällen der Anisotropie unterschieden:

### Trikline Anisotropie

Allgemeinster Fall, d.h. es liegt vollständige Anisotropie vor. Eine Besonderheit der Anisotropie ist es, dass so genannte Dehnungs-Schiebungs-Kopplungen vorliegen. Normalspannungen in Richtung der Elementachsen rufen nicht nur Dehnungen, sondern auch Schiebungen hervor. Schubspannungen bewirken Schiebungen und gleichzeitig Dehnungen.

## Monokline Anisotropie

Beim Vorhandensein einer Symmetrieebene. Dehnungen und Schiebungen sind teilweise entkoppelt.

## Orthotropie

Sind 3 orthogonal zueinander stehende Symmetrieebenen vorhanden, werden 9 unabhängige Konstanten zur Formulierung des Elastizitätsgesetzes benötigt. Es liegt eine rhombische Anisotropie oder Orthotropie vor. Normalspannungen und Schiebungen sowie Schubspannungen und Dehnungen sind infolge der Symmetrien vollständig entkoppelt. Es bleibt die immer vorhandene Koppelung der Quer- mit den Längsdehnungen, deren Verhältnis mit den Querkontraktionszahlen beschrieben wird. Abbildung 8 zeigt ein orthotropes Volumenelement.

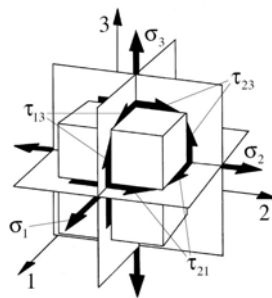


Abbildung 8: Orthotropes Volumenelement gekennzeichnet durch 3 senkrecht zueinander orientierte Symmetrieebenen  
(Schürmann, H. 2005)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix [S]}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 2.1})$$

Das Elastizitätsgesetz wird mit den so genannten Ingenieurskonstanten beschrieben. Dies sind die Elastizitätsmoduln  $E$ , die Schubmoduln  $G$  sowie die Querkontraktionszahlen  $\nu$ . Im Falle der Orthotropie werden zur vollständigen Beschreibung des Elastizitätsgesetzes 9 Ingenieurskonstanten (3x E-Modul, 3x G-Schubmodul, 3x Querkontraktionszahl) benötigt. Diese in Gl. 2.1 eingesetzt gibt die Nachgiebigkeitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix [S]}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 2.2})$$



## Transversale Isotropie

Die UD – Schicht von Faserverbundwerkstoffen gehört zu den transversal isotropen Werkstoffen und stellt einen Sonderfall der Orthotropie dar. Die isotrope Ebene liegt normal zur Faserlängsrichtung und senkrecht dazu existieren unendlich viele Symmetrieebenen, s. Abbildung 9. Auf allen Schnitten zur isotropen Ebene liegen gleiche Eigenschaften vor, was aber nur für eine ideale UD – Schicht mit homogener Faserverteilung gilt.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix [S]}} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 2.3})$$

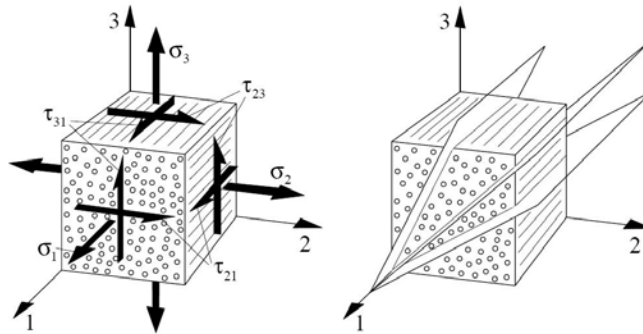


Abbildung 9: a Volumenelement einer UD – Schicht b Illustration der transversalen Isotropie. Auf allen Schnittebenen zur isotropen Ebene sind die Eigenschaften gleich (Schürmann, H. 2005)

Das Vorhandensein einer isotropen Ebene hat folgende Auswirkungen:

- Einige Elastizitätsgrößen sind dadurch identisch

$$E_2 = E_3$$

$$G_{31} = G_{21}$$

$$\nu_{31} = \nu_{21}$$

$$S_{orthotrop} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 2.4})$$

Die Inversion dieser Matrix liefert schließlich die Elemente der Steifigkeitsmatrix C. In Abbildung 10 wird illustriert warum die Elastizitätskennwerte für Schub in den längs - quer und quer - quer Richtungen unterschiedlich sind.

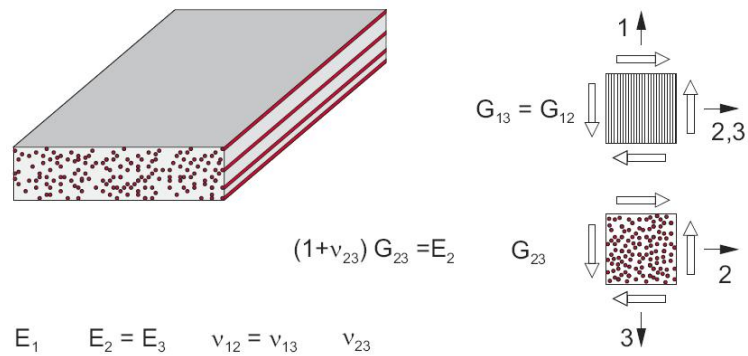


Abbildung 10: Transversal isotropes unidirektional verstärktes Material (Kress, G. 2009)

- Nach Becker, W., Gross, D. 2002, hängt der, der isotropen Ebene zugehörige Schubmodul  $G_{23}$ , über die bei Isotropie geltenden bekannten Geometriebeziehungen mit dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl dieser Ebene zusammen:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_{23})} \quad (\text{Gl. 2.5})$$

- Aus der Symmetrie der Steifigkeits- oder Nachgiebigkeitsmatrix ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{E_1}{\nu_{21}} = \frac{E_2}{\nu_{12}} \quad (\text{Gl. 2.6})$$

## 2.5 Bestimmung der Elastizitätsgrößen einer UD-Schicht (Schürmann, H. 2005)

### 2.5.1 Composite – Mikromechanik

Die rechnerische Bestimmung der Elastizitätsgrößen erfolgt anhand mikromechanischer Betrachtungen. Die Mikromechanik befasst sich mit der Frage, wie die Einzelschicht - Eigenschaften sich als effektive homogenisierte Größen aus den Eigenschaften der Konstituenten (also etwa Fasern und der Matrix) ergeben. Es wird ein mechanisches Modell an einem repräsentativen Ausschnitt des Werkstoffes an einer Einheitszelle erstellt. Je nach Belastungszustand der UD - Schicht liegen – legt man ein Federmodell zugrunde – Parallel- oder Hintereinanderschaltungen (Serienschaltung) von Fasern und Matrix vor. Im Allgemeinen ist das Ergebnis der mikromechanischen Analyse die Mischungsregel.

In der Mikromechanik der UD – Schicht trifft man, wie bereits unter 2.2 kurz erwähnt, meist folgende idealisierte Annahmen (s. auch Abbildung 13):

- die Fasern haben konstante Querschnitte und verlaufen exakt parallel
- die Fasern sind regelmäßig gepackt
- die UD – Schicht wird als Kontinuum modelliert. Die Haftung zwischen Fasern und Matrix ist vollständig
- es werden kleine Verformungen und lineares, ideal elastisches Verhalten der Einzelkomponenten Faser und Matrix vorausgesetzt

### 2.5.2 Faservolumengehalt

- Volumenanteil: auf das Gesamtvolumen bezogenes Volumen einer Werkstoffkomponente
- Bei kontinuierlich verstärkten Werkstoffen entspricht dies den Flächenverhältnissen

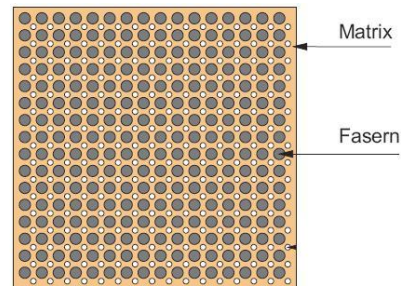


Abbildung 11: Volumenanteile der Komponenten in einem Verbundwerkstoff (Kress, G. 2009)

Wird das Volumen  $V$  eines Verbundwerkstoffes betrachtet, Abbildung 11, ergibt sich der Volumenanteil  $\phi_i$  der  $i$ -ten Komponente aus dem Quotienten ihres Volumens  $V_i$  und dem Gesamtvolumen  $V$ :

$$\phi_i = \frac{V_i}{V} \quad (\text{Gl. 2.7})$$

Bei einem Faserverbundwerkstoff werden die Anteile der verstärkten Fasern  $\phi_f$  und der Matrix  $\phi_m$  betrachtet. Die Summe aller Volumenanteile ist 1:

$$\phi_f + \phi_m + \phi_i = 1 \quad (\text{Gl. 2.8})$$

### 2.5.3 E – Modul in Faserrichtung

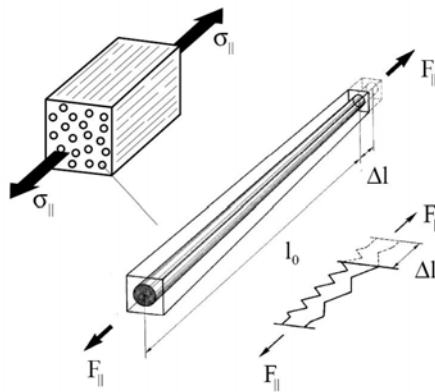


Abbildung 12: Repräsentative Einheitszelle und Federmodell zur Ermittlung des E – Modul in Faserrichtung (Schürmann, H. 2005)

Aus dem repräsentativen mikromechanischen Modell wird ein Federmodell erstellt, Abbildung 12, wobei die Fasern und Matrix parallelgeschaltet sind → die Federraten addieren sich.

Zur Analyse des Modells werden folgende Gleichungen aufgestellt:

- Kräftegleichgewicht
- Kinematikbeziehungen
- Elastizitätsgesetze

- **Kräftegleichgewicht**

Die äußere Kraft steht mit den in den Einzelkomponenten vorhandenen Kräften im Gleichgewicht:

$$F_{\parallel} = F_f + F_m \Rightarrow \sigma_{\parallel} \cdot A_{\text{verbund}} = \sigma_f \cdot A_f + \sigma_m \cdot A_m \quad (\text{Gl. 2.9})$$

$A_f$  ... Querschnitt der Faser

$A_m$  ... Querschnitt der Matrix

$$A_{\text{verbund}} = A_f + A_m \quad (\text{Gl. 2.10})$$

- **Kinematische Beziehungen**

Bei der Belastung eines Verbundes entlang seiner Verstärkungsrichtung sind, unter der Annahme einer homogenen Dehnung, die Dehnungen der Fasern  $\epsilon_f$  gleich den Dehnungen der Matrix  $\epsilon_m$  gleich den Dehnungen des Verbundes  $\epsilon_1$ :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon_{\parallel} = \epsilon_f = \epsilon_m \quad (\text{Gl. 2.11})$$

- **Elastizitätsgesetze**

Unter der weiteren Annahme gleicher Querkontraktion ( $\nu_f = \nu_m$ ) in der Faser und Matrix erhält man über die jeweiligen E-Moduln die Spannungen:

$$\sigma_f = E_{f\parallel} \cdot \varepsilon_f \quad \sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_m \quad (\text{Gl. 2.12, 2.13})$$

$E_{f\parallel}$  = Elastizitätsmodul der Faser in Längsrichtung

Werden für die Spannungen in Gl. 2.9 die Elastizitätsgesetze nach Gl. 2.12 und 2.13, sowie die Dehnungen lt. Gl. 2.11 eingesetzt, so ergibt sich:

$$E_{\parallel} = E_{f\parallel} \cdot \frac{A_f}{A_{\text{verbund}}} + E_m \cdot \frac{A_m}{A_{\text{verbund}}} \quad (\text{Gl. 2.14})$$

In den Brüchen erkennt man nun die relativen Flächenanteile die die gleichen Werte aufweisen wie die Volumenanteile. Damit erhält die Mischungsregel ihre endgültige Form:

$$E_{\parallel} = E_{f\parallel} \cdot \phi_f + E_m \cdot \phi_m \quad \text{mit} \quad \phi_f + \phi_m = 1 \quad (\text{Gl. 2.15})$$

Wie man erkennt errechnet sich der Elastizitätsmodul in Faserrichtung aus einer Aufsummierung der mit den Faservolumenanteilen gewichteten E-Moduln der Einzelkomponenten.

#### 2.5.4 E – Modul quer zur Faserrichtung

Abweichend von der tatsächlichen Anordnung von Fasern und Matrix im Verbund werden Vereinfachungen, illustriert in Abbildung 13, getroffen.

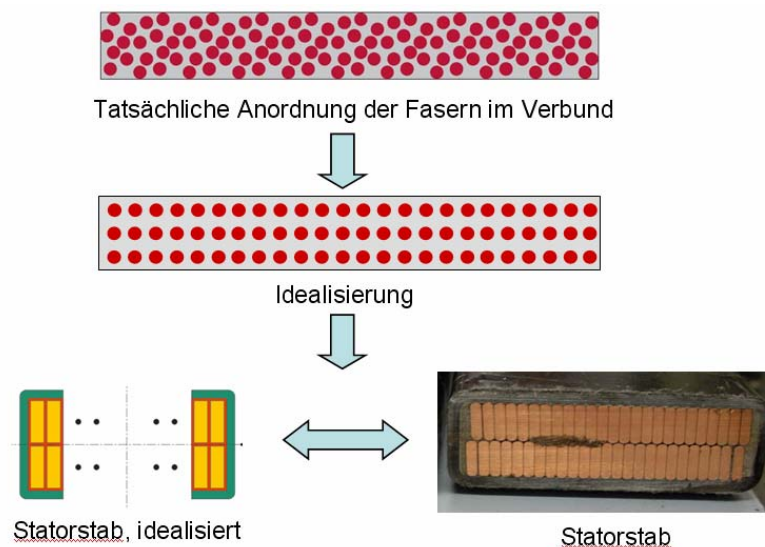


Abbildung 13: Idealisierung der Anordnung im Verbund, Anwendung auf den Statorstab

Aus dem wiederum vereinfachten mikromechanischen Modell wird das Federmodell, Abbildung 14, quer zur Faserrichtung abgeleitet:

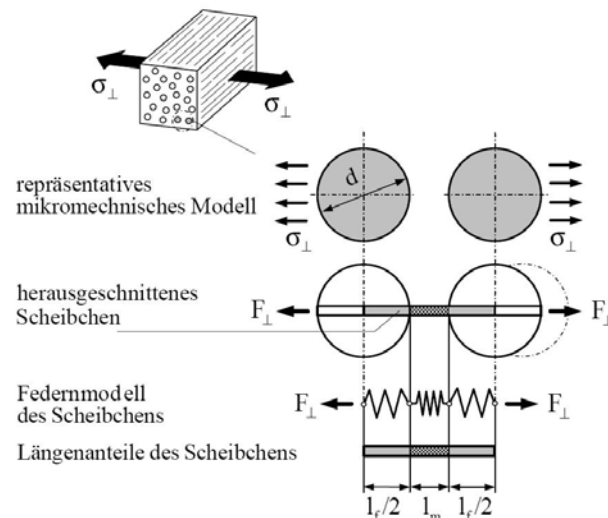


Abbildung 14: Federmodell zur Ermittlung des E-Moduls quer zur Faserrichtung (Schürmann, H. 2005)

Fasern und Matrix sind also im Federmodell hintereinander geschaltet. Die übertragene Spannung ist konstant und es stellen sich in Fasern und Matrix mit den entsprechenden E-Moduln folgende Dehnungen ein:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_{\perp}}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_{\perp}}{E_m} \quad (\text{Gl. 2.16, 2.17})$$

Der Längenteil der Fasern in Querrichtung entspricht im Durchschnitt den jeweiligen Volumenanteilen und deswegen gilt:

$$\varepsilon_{\perp} = \phi_f \cdot \varepsilon_f + \phi_m \cdot \varepsilon_m \rightarrow \varepsilon_{\perp} = \phi_f \cdot \frac{\sigma_{\perp}}{E_f} + \phi_m \cdot \frac{\sigma_{\perp}}{E_m} \quad (\text{Gl. 2.18})$$

Aus dem Hookschen Gesetz für den Verbund erhält man die Mischungsregel quer zur Faserrichtung:

$$\frac{1}{E_{\perp}} = \frac{1}{E_f} \cdot \phi_f + \frac{1}{E_m} \cdot \phi_m \quad (\text{Gl. 2.19})$$

### 2.5.5 Schubmodul G

Der Schubmodul wird analog wie der Elastizitätsmodul quer zur Faserrichtung bestimmt. Es liegt eine Hintereinanderschaltung der Schubnachgiebigkeiten von Faser und Matrix vor.

Es ergibt sich die Mischungsregel für den Quer-Längsschubmodul:

$$\frac{1}{G_{\perp\parallel}} = \frac{1}{G_f} \cdot \phi_f + \frac{1}{G_m} \cdot \phi_m \quad (\text{Gl. 2.20})$$

Dieses Modell gilt analog für die Schubmoduln in den anderen beiden Ebenen.

### 2.5.6 Quer – Quer - Querkontraktionszahl

Um das Elastizitätsgesetz bei Schub für die Ebene senkrecht zur Faserrichtung aufstellen zu können, wird die Quer-Quer-Querkontraktionszahl benötigt. Da innerhalb dieser Ebene Isotropie (siehe transversale Isotropie) vorliegt gilt die Beziehung zwischen Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Schubmodul.

$$G_{\perp\perp} = \frac{E_{\perp}}{2 \cdot (1 + \nu_{\perp\perp})} \quad (\text{Gl. 2.21})$$

Hieraus kann bei bekanntem E-Modul und G-Modul die Querkontraktionszahl berechnet werden.

### 2.5.7 Längs – Quer – Querkontraktionszahl (Becker, W., Gross, D. 2002)

Unter der Annahme einer homogenen Dehnung  $\varepsilon_{\perp}$ , gilt für die Querdehnungen  $\varepsilon_{\perp f}$  und  $\varepsilon_{\perp m}$  in der Faser und in der Matrix mit den entsprechenden Faser- und Matrixquerkontraktionszahlen  $\nu_f$  und  $\nu_m$ :

$$\varepsilon_{\perp f} = -\nu_f \cdot \varepsilon_{\parallel} \quad \varepsilon_{\perp m} = -\nu_m \cdot \varepsilon_{\parallel} \quad (\text{Gl. 2.21,2.22})$$

Die Gewichtung mit den Faser- und Matrixvolumenanteilen  $V_f$  und  $V_m$  ergibt die Querdehnung  $\varepsilon_{\perp}$  zu:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp f} \cdot \phi_f + \varepsilon_{\perp m} \cdot \phi_m = -(\nu_f \cdot \phi_f + \nu_m \cdot \phi_m) \cdot \varepsilon_{\parallel} \quad (\text{Gl. 2.23})$$

Der in der runden Klammer stehende Ausdruck entspricht der Querkontraktionszahl Längs - Quer:

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_f \cdot \phi_f + \nu_m \cdot \phi_m \quad (\text{Gl. 2.24})$$

Diese Mischungsregel ist analog zu der des Elastizitätsmoduls in Faserrichtung.

## 2.5.8 Weitere Mikromechanische Modelle

Generelle können für die Ermittlung der Elastizitätskonstanten verschiedene Modelle angewendet werden:

- Federmodell (wie oben beschrieben)
- Formelzusammenstellung nach C.C Chamis
- Zylindermodell nach Hashin

### Zylindermodell nach Hashin

Beim Zylindermodell wird ein prismatisches Volumen durch beliebig große Faser-Matrix-Zylinder mit innen liegender Faser und konstantem Verhältnis Faserradius zu Gesamtradius = Faservolumenanteil ausgefüllt.

### Formelzusammenstellung nach C.C Chamis

Aufbauend auf das Federmodell führte Chamis zahlreiche Versuche an realen Faserverbundwerkstoffen durch. Daraus ermittelte empirische „Korrekturwerte“ ergänzen die Mischungsregeln aus dem Federmodell.

### Vergleich der Modelle

Der Vergleich, gemäß Abbildung 15, der verschiedenen Modelle zeigt, dass eine sehr gute Übereinstimmung vorhanden ist. Jedoch muss das geeignete Modell für den spezifischen Anwendungsfall gefunden werden, bzw. abgewogen werden ob teils komplexere Modelle bessere Ergebnisse liefern.

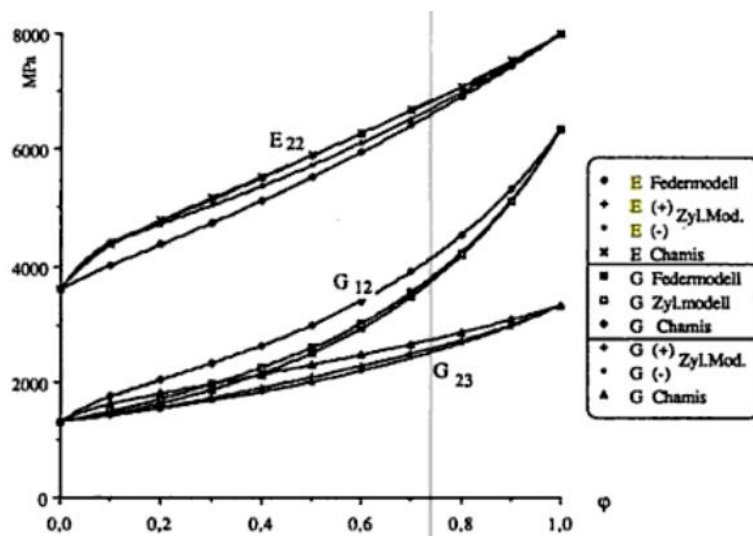


Abbildung 15: Vergleich der verschiedenen mikromechanischen Modelle (Moser, K. 1992)



## 3 Analytische Ableitung

### 3.1 Ermittlung der Elastizitätsgrößen der Versuchsstäbe

Aufgrund der einfachen Anwendung und der sehr guten Ergebnisse die das Federmodell liefert, wird auch in weiterer Folge bei der analytische Ableitung der Elastizitätskonstanten der Versuchsstäbe, welches in Kapitel 2.5 detailliert beschrieben wurde, das Federmodell angewendet.

Folgende Indizes werden in der analytischen Herleitung verwendet und repräsentieren dabei eine bestimmte Einzelkomponente des Stabverbundes:

Verbund ... charakterisiert den Statorstab als faserverstärkten Verbundwerkstoff

Kupfer ... Teileiter (Faser)

Lack ... Lackschicht (Matrix 1)

Iso ... Außenisolierung (Matrix 2)

Außerdem gilt das in Abbildung 4 dargestellte Koordinatensystem des Statorstabes. Dies wurde in Voraussicht darauf gewählt, dass in FE – Programmen die Andritz Hydro verwendet der orthotrope Werkstoff in den Koordinaten  $x - y - z$  anzugeben ist. Im Zuge dieser Arbeit wurden weiters Studien mit dem FE – Paket Msc Marc Mentat durchgeführt. Hier ist der orthotrope Werkstoff im Koordinatensystem 1 – 2 – 3 zu definieren, wobei  $1=x$ ,  $2=y$ ,  $3=z$ , im Vergleich zu dem oben genannten Koordinatensystem entspricht.

### 3.2 E – Modul in Faserrichtung (Stabrichtung)

Es findet eine Anwendung des Federmodells für den Statorstab, siehe Abbildung 16, statt. Bei diesem Modell liegt eine Parallelschaltung vor.

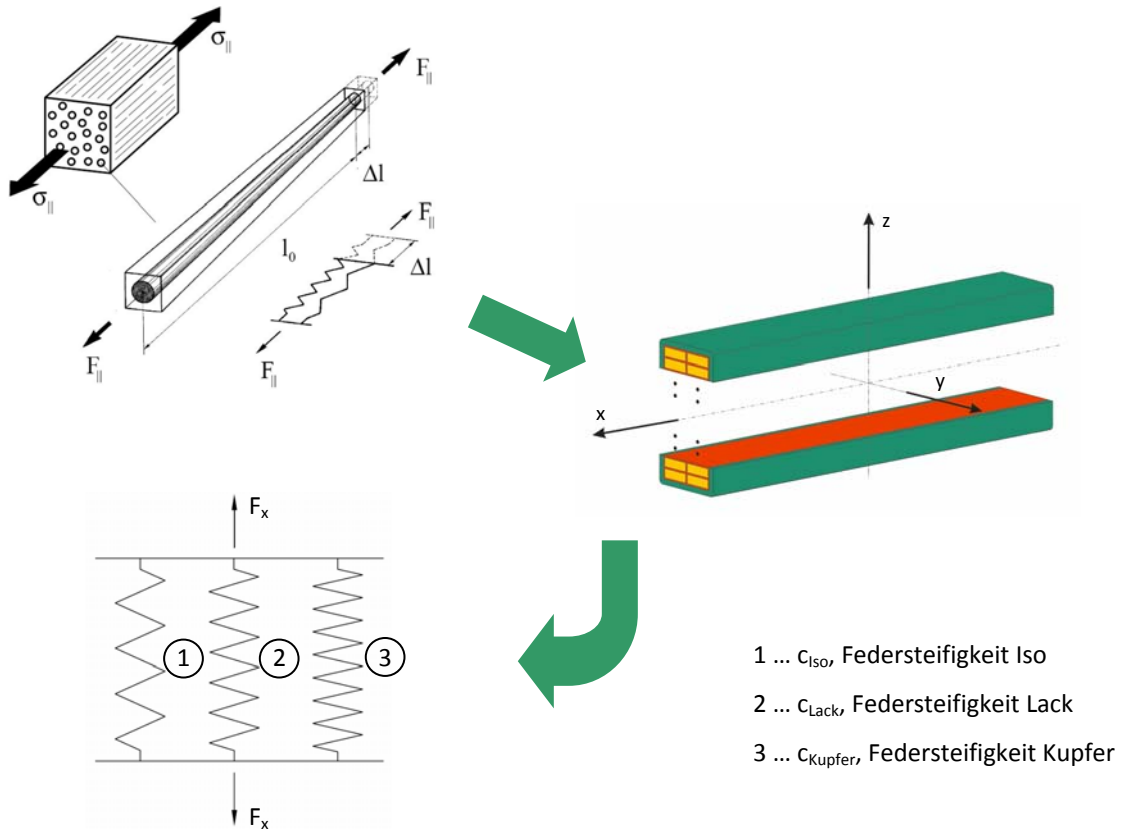


Abbildung 16: Anwendung des Federmodells auf den Statorstab, Parallelschaltung

- **Kräftegleichgewicht:**

$$F_{xVerbund} = F_{xKupfer} + F_{xLack} + F_{xIso} \quad (\text{Gl. 3.1})$$

mit  $\sigma = \frac{F}{A}$  in Gl. 3.1 eingesetzt, ergibt sich

$$\sigma_{xVerbund} \cdot A_{Verbund} = \sigma_{xKupfer} \cdot A_{Kupfer} + \sigma_{xLack} \cdot A_{Lack} + \sigma_{xIso} \cdot A_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.2})$$

- **Kinematische Beziehung:**

$$\varepsilon = \text{const.} \quad (\text{Gl. 3.3})$$

$$\varepsilon_{xVerbund} = \varepsilon_{xKupfer} = \varepsilon_{xLack} = \varepsilon_{xIso}$$

- **Elastizitätsgesetze:**

$$\begin{aligned} \sigma_{xVerbund} &= E_{xVerbund} \cdot \varepsilon_{xVerbund} \\ \sigma_{xKupfer} &= E_{xKupfer} \cdot \varepsilon_{xKupfer} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3.4 – 3.7})$$

$$\sigma_{xLack} = E_{xLack} \cdot \varepsilon_{xLack}$$

$$\sigma_{xIso} = E_{xIso} \cdot \varepsilon_{xIso}$$

Gl. 3.4 bis Gl. 2.7 in Gl. 3.2 eingesetzt ergibt

$$E_{xVerbund} \cdot \varepsilon_{xVerbund} \cdot A_{Verbund} = E_{xKupfer} \cdot \varepsilon_{xKupfer} \cdot A_{Kupfer} + E_{xLack} \cdot \varepsilon_{xLack} \cdot A_{Lack} + E_{xIso} \cdot \varepsilon_{xIso} \cdot A_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.8})$$

da  $\varepsilon = const.$  kürzen sich die Dehnungen aus Gl. 3.8

$$E_{xVerbund} \cdot A_{Verbund} = E_{xKupfer} \cdot A_{Kupfer} + E_{xLack} \cdot A_{Lack} + E_{xIso} \cdot A_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.9, 3.10})$$

$$E_{xVerbund} = E_{xKupfer} \cdot \frac{A_{Kupfer}}{A_{Verbund}} + E_{xLack} \cdot \frac{A_{Lack}}{A_{Verbund}} + E_{xIso} \cdot \frac{A_{Iso}}{A_{Verbund}}$$

Die Flächenverhältnisse entsprechen aufgrund konstanter Stablänge dem Volumenverhältnis  $\Phi_i$  der jeweiligen Einzelkomponente, und es ergibt sich die endgültige Form der Mischungsregel zur Bestimmung des E – Moduls in Faserrichtung (x-Richtung) zu:

$$E_{xVerbund} = E_{xKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + E_{xLack} \cdot \phi_{Lack} + E_{xIso} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.11})$$

### 3.3 E – Modul quer zur Faserrichtung

Es findet die Anwendung des Federmodells auf den Statorstab gemäß Abbildung 17. Für dieses Modell liegt eine Serienschaltung vor.

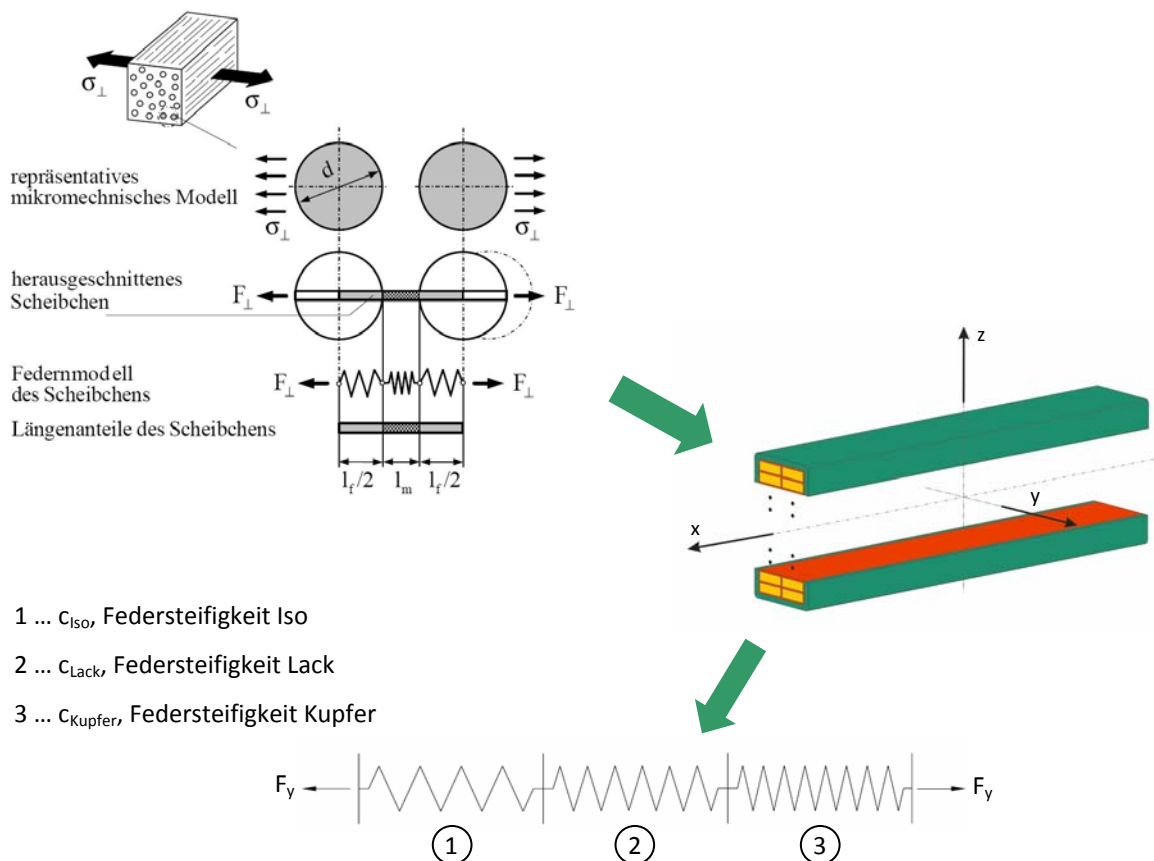


Abbildung 17: Anwendung des Federmodells auf den Statorstab, Serienschaltung

- **Kräftegleichgewicht**

$$F_{yVerbund} = F_{yKupfer} = F_{yLack} = F_{yIso} \quad (\text{Gl. 3.12})$$

da eine Serienschaltung vorliegt, ist die übertragene Spannung konstant:

$$\sigma = \text{const.} \quad (\text{Gl. 3.13})$$

$$\sigma_{yVerbund} = \sigma_{yKupfer} = \sigma_{yLack} = \sigma_{yIso}$$

- **Kinematische Beziehung**

Die Gesamte Längenänderung quer zur Faserrichtung entspricht der Summe der Einzeldehnungen der jeweiligen Komponente des Verbundes.

$$\Delta l_{Verbund} = \Delta l_{Kupfer} + \Delta l_{Lack} + \Delta l_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.14})$$

Mit

$$\varepsilon_{yVerbund} = \frac{\Delta l_{Verbund}}{l_{Verbund}} \rightarrow \Delta l_{Verbund} = \varepsilon_{yVerbund} \cdot l_{Verbund}$$

$$\varepsilon_{yKupfer} = \frac{\Delta l_{Kupfer}}{l_{Kupfer}} \rightarrow \Delta l_{Kupfer} = \varepsilon_{yKupfer} \cdot l_{Kupfer} \quad (\text{Gl. 3.15 – 3.18})$$

$$\varepsilon_{yLack} = \frac{\Delta l_{Lack}}{l_{Lack}} \rightarrow \Delta l_{Lack} = \varepsilon_{yLack} \cdot l_{Lack}$$

$$\varepsilon_{yIso} = \frac{\Delta l_{Iso}}{l_{Iso}} \rightarrow \Delta l_{Iso} = \varepsilon_{yIso} \cdot l_{Iso}$$

eingesetzt in Gl. 3.14, ergibt sich

$$\varepsilon_{yVerbund} \cdot l_{Verbund} = \varepsilon_{yKupfer} \cdot l_{Kupfer} + \varepsilon_{yLack} \cdot l_{Lack} + \varepsilon_{yIso} \cdot l_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.19})$$

- **Elastizitätsgesetze:**

$$\varepsilon_{yVerbund} = \frac{\sigma_{yVerbund}}{E_{yVerbund}}$$

$$\varepsilon_{yKupfer} = \frac{\sigma_{yKupfer}}{E_{yKupfer}} \quad (\text{Gl. 3.20 – 3.23})$$

$$\varepsilon_{yLack} = \frac{\sigma_{yLack}}{E_{yLack}}$$

$$\varepsilon_{yIso} = \frac{\sigma_{yIso}}{E_{yIso}}$$

Gl. 3.20 bis Gl. 3.23 in Gl. 3.19 eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\sigma_{yVerbund}}{E_{yVerbund}} \cdot l_{Verbund} = \frac{\sigma_{yKupfer}}{E_{yKupfer}} \cdot l_{Kupfer} + \frac{\sigma_{yLack}}{E_{yLack}} \cdot l_{Lack} + \frac{\sigma_{yIso}}{E_{yIso}} \cdot l_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.24})$$

Die übertragene Spannung ist gemäß Gl. 3.13 konstant, somit kürzt sich diese aus Gl. 3.24:

$$\frac{1}{E_{yVerbund}} = \frac{1}{E_{yKupfer}} \cdot \frac{l_{Kupfer}}{l_{Verbund}} + \frac{1}{E_{yLack}} \cdot \frac{l_{Lack}}{l_{Lack}} + \frac{1}{E_{yIso}} \cdot \frac{l_{Iso}}{l_{Iso}} \quad (\text{Gl. 3.25})$$

Die Längenverhältnisse entsprechen im Durchschnitt den Volumenanteilen der Einzelkomponenten. Man erhält die Mischungsregel quer zur Faserrichtung in ihrer endgültigen Form durch einsetzen der Volumenanteile  $\Phi_i$ .

$$\frac{1}{E_{yVerbund}} = \frac{1}{E_{yKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{E_{yLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{E_{yIso}} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.26})$$

Dieses Modell gilt analog für den E – Modul in z – Richtung (s. Theorieteil, Kapitel 2.5.4). Es folgt also für  $E_{zVerbund}$ :

$$\frac{1}{E_{zVerbund}} = \frac{1}{E_{zKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{E_{zLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{E_{zIso}} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.27})$$

### 3.4 Schubmodul G

Es gilt analog das Federmodell wie beim E – Modul quer zur Faserrichtung. In diesem Fall liegt eine Hintereinanderschaltung der Schubnachgiebigkeiten vor.

Der Schubmodul ist eine elastische Größe, die das Verschieben eines elastischen Würfels beschreibt (s. Abbildung 18).

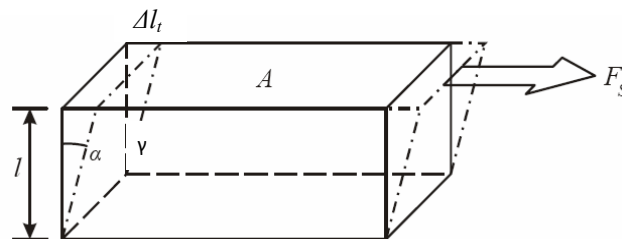


Abbildung 18: Elastische Deformation, Definition Schub

Wirken die Kräfte tangential auf A, so besteht die Deformation in einer Verschiebung der Flächen. Diese elastische Deformation bezeichnet man als Schub oder Scherung. Die Scherkraft  $F_S$  bewirkt eine Scherspannung, wenn sie gleichmäßig auf die Fläche A wirkt. Die Scherspannung bewirkt eine Scherung  $\gamma$ . Der Winkel ist umso größer, je stärker die Kraft an der Fläche zieht:

Für kleine Winkel gilt:

$$\tan(\gamma) \approx \gamma \rightarrow \gamma = \frac{\Delta l_t}{l} \quad (\text{Gl. 3.28})$$

Die Schubspannung errechnet sich aus:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{Gl. 3.29})$$

wobei  $\tau$  die Schubspannung ist und G als Gleit-, Schub-, Scherungs- oder Torsionsmodul bezeichnet wird und eine materialabhängige Konstante ist.

- **Kräftegleichgewicht**

Da eine Hintereinanderschaltung der Schubnachgiebigkeiten vorliegt folgt aus dem Kräftegleichgewicht das eine konstante Schubspannung übertragen wird.

$$\begin{aligned} \tau &= \text{const.} \\ \tau_{xyVerbund} &= \tau_{Kupfer} = \tau_{Lack} = \tau_{iso} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3.30})$$

- **Kinematische Beziehungen**

Die Gesamtverformung errechnet sich aus der Summe der Einzelverformungen (vgl. Abbildung 18) der Einzelkomponenten. Es folgt für die Gesamtverformung:

$$\Delta l_{tyVerbund} = \Delta l_{tyKupfer} + \Delta l_{tyLack} + \Delta l_{tyIso} \quad (\text{Gl. 3.31})$$

Mit

$$\begin{aligned} \gamma_{xyVerbund} &= \frac{\Delta l_{tyVerbund}}{l_{yVerbund}} \rightarrow \Delta l_{tyVerbund} = \gamma_{xyVerbund} \cdot l_{yVerbund} \\ \gamma_{xyKupfer} &= \frac{\Delta l_{tyKupfer}}{l_{yKupfer}} \rightarrow \Delta l_{tyKupfer} = \gamma_{xyKupfer} \cdot l_{yKupfer} \\ \gamma_{xyLack} &= \frac{\Delta l_{tyLack}}{l_{yLack}} \rightarrow \Delta l_{tyLack} = \gamma_{xyLack} \cdot l_{yLack} \\ \gamma_{xyIso} &= \frac{\Delta l_{tyIso}}{l_{yIso}} \rightarrow \Delta l_{tyIso} = \gamma_{xyIso} \cdot l_{yIso} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3.32 – 3.35})$$

in Gl. 3.31 eingesetzt ergibt sich

$$\gamma_{xyVerbund} \cdot l_{yVerbund} = \gamma_{xyKupfer} \cdot l_{yKupfer} + \gamma_{xyLack} \cdot l_{yLack} + \gamma_{xyIso} \cdot l_{yIso} \quad (\text{Gl. 3.36})$$

- **Elastizitätsgesetze**

$$\begin{aligned} \gamma_{xyVerbund} &= \frac{\tau_{xyVerbund}}{G_{xyVerbund}} \\ \gamma_{xyKupfer} &= \frac{\tau_{xyKupfer}}{G_{xyKupfer}} \\ \gamma_{xyLack} &= \frac{\tau_{xyLack}}{G_{xyLack}} \\ \gamma_{xyIso} &= \frac{\tau_{xyIso}}{G_{xyIso}} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3.37 – 3.40})$$

Gl. 3.37 bis Gl. 3.40 in Gl. 3.36 eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\tau_{xyVerbund}}{G_{xyVerbund}} \cdot l_{yVerbund} = \frac{\tau_{xyKupfer}}{G_{xyKupfer}} \cdot l_{yKupfer} + \frac{\tau_{xyLack}}{G_{xyLack}} \cdot l_{yLack} + \frac{\tau_{xyIso}}{G_{xyIso}} \cdot l_{yIso} \quad (\text{Gl. 3.41})$$

Da die übertragene Schubspannung konstant ist kürzt sich diese heraus, und durch gleichzeitiges Umformen folgt:

$$\frac{1}{G_{xyVerbund}} = \frac{1}{G_{xyKupfer}} \cdot \frac{l_{yKupfer}}{l_{yVerbund}} + \frac{1}{G_{xyLack}} \cdot \frac{l_{yLack}}{l_{yVerbund}} + \frac{1}{G_{xyIso}} \cdot \frac{l_{yIso}}{l_{yVerbund}} \quad (\text{Gl. 3.42})$$

Die Längenverhältnisse entsprechen im Durchschnitt den Volumenanteilen der Einzelkomponenten. Man erhält die Mischungsregel für den Schubmodul in der xy - Ebene in ihrer endgültigen Form durch einsetzen der Volumenanteile  $\Phi_i$ .

$$\frac{1}{G_{xyVerbund}} = \frac{1}{G_{xyKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{xyLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{xyIso}} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.43})$$

Dieses Modell gilt analog für den G – Modul in der xz – Ebene und auch in der yz – Ebene (s. Theorieteil, Kapitel 2.5.5). Es folgt also:

$$\frac{1}{G_{xzVerbund}} = \frac{1}{G_{xzKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{xzLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{xzIso}} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.44})$$

$$\frac{1}{G_{yzVerbund}} = \frac{1}{G_{yzKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{yzLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{yzIso}} \cdot \phi_{Iso} \quad (\text{Gl. 3.45})$$

### 3.5 Querkontraktionszahlen $\nu_{xy} = \nu_{xz}$

Unter der Annahme einer homogenen Dehnung in x - Richtung, gilt für die Querdehnungen mit den entsprechenden Querkontraktionszahlen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \text{const.} \\ \varepsilon_{xVerbund} &= \varepsilon_{xKupfer} = \varepsilon_{xLack} = \varepsilon_{xIso}\end{aligned}\quad (\text{Gl. 3.46})$$

- **Elastizitätsgesetze**

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yVerbund} &= -\nu_{xyVerbund} \cdot \varepsilon_{xVerbund} \\ \varepsilon_{yKupfer} &= -\nu_{xyKupfer} \cdot \varepsilon_{xKupfer} \\ \varepsilon_{yLack} &= -\nu_{xyLack} \cdot \varepsilon_{xLack} \\ \varepsilon_{yIso} &= -\nu_{xyIso} \cdot \varepsilon_{xIso}\end{aligned}\quad (\text{Gl. 3.47 – 3.50})$$

Die Dehnung in y – Richtung ist die Summe der Dehnungen in y – Richtung aller Einzelkomponenten, mit der Gewichtung der Volumenanteile ergibt sich die Gesamte Querdehnung  $\varepsilon_y$  zu:

$$\varepsilon_{yVerbund} = \varepsilon_{yKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \varepsilon_{yLack} \cdot \phi_{Lack} + \varepsilon_{yIso} \cdot \phi_{Iso}\quad (\text{Gl. 3.51})$$

Gl. 3.47 bis Gl. 3.50 eingesetzt in Gl. 3.51 ergibt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yVerbund} &= -\nu_{xyKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} \cdot \varepsilon_{xKupfer} - \nu_{xyLack} \cdot \phi_{Lack} \cdot \varepsilon_{xLack} - \nu_{xyIso} \cdot \phi_{Iso} \cdot \varepsilon_{xIso} \\ \varepsilon_{yVerbund} &= -(\nu_{xyKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \nu_{xyLack} \cdot \phi_{Lack} + \nu_{xyIso} \cdot \phi_{Iso}) \cdot \varepsilon_{xVerbund}\end{aligned}\quad (\text{Gl. 3.52, 3.53})$$

Umformen der Gl. 3.53 liefert die Mischungsregel für die Querkontraktionszahl:

$$\nu_{xyVerbund} = \nu_{xyKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \nu_{xyLack} \cdot \phi_{Lack} + \nu_{xyIso} \cdot \phi_{Iso}\quad (\text{Gl. 3.54})$$

Diese Mischungsregel ist analog zu der des Elastizitätsmoduls in Faserrichtung und gilt außerdem für die Querkontraktionszahl  $\nu_{xz}$ .

$$\nu_{xzVerbund} = \nu_{xzKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \nu_{xzLack} \cdot \phi_{Lack} + \nu_{xzIso} \cdot \phi_{Iso}\quad (\text{Gl. 3.55})$$

### 3.6 Querkontraktionszahl $\nu_{yz}$

Da innerhalb dieser Ebene Isotropie (siehe transversale Isotropie) vorliegt gilt die Beziehung zwischen Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Schubmodul:

$$G_{yzVerbund} = \frac{E_{yVerbund}}{2 \cdot (1 + \nu_{yzVerbund})}\quad (\text{Gl. 3.56})$$

Aus Gleichung 3.56 folgt die Querkontraktionszahl:

$$\nu_{yzVerbund} = \frac{E_{yVerbund}}{2 \cdot G_{yzVerbund}} - 1\quad (\text{Gl. 3.57})$$



### 3.7 Formelzusammenstellung

E – Modul in Faserrichtung:

$$E_{xVerbund} = E_{xKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + E_{xLack} \cdot \phi_{Lack} + E_{xIso} \cdot \phi_{Iso}$$

E – Modul quer zur Faserrichtung:

$$\frac{1}{E_{yVerbund}} = \frac{1}{E_{yKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{E_{yLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{E_{yIso}} \cdot \phi_{Iso}$$

E – Modul quer zur Faserrichtung:

$$\frac{1}{E_{zVerbund}} = \frac{1}{E_{zKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{E_{zLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{E_{zIso}} \cdot \phi_{Iso}$$

Schubmodul x - y:

$$\frac{1}{G_{xyVerbund}} = \frac{1}{G_{xyKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{xyLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{xyIso}} \cdot \phi_{Iso}$$

Schubmodul x - z:

$$\frac{1}{G_{xzVerbund}} = \frac{1}{G_{xzKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{xzLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{xzIso}} \cdot \phi_{Iso}$$

Schubmodul y - z:

$$\frac{1}{G_{yzVerbund}} = \frac{1}{G_{yzKupfer}} \cdot \phi_{Kupfer} + \frac{1}{G_{yzLack}} \cdot \phi_{Lack} + \frac{1}{G_{yzIso}} \cdot \phi_{Iso}$$

Querkontraktionszahl x - y:

$$\nu_{xyVerbund} = \nu_{xyKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \nu_{xyLack} \cdot \phi_{Lack} + \nu_{xyIso} \cdot \phi_{Iso}$$

Querkontraktionszahl x - z:

$$\nu_{xzVerbund} = \nu_{xzKupfer} \cdot \phi_{Kupfer} + \nu_{xzLack} \cdot \phi_{Lack} + \nu_{xzIso} \cdot \phi_{Iso}$$

Querkontraktionszahl y - z:

$$\nu_{yzVerbund} = \frac{E_{yVerbund}}{2 \cdot G_{yzVerbund}} - 1$$

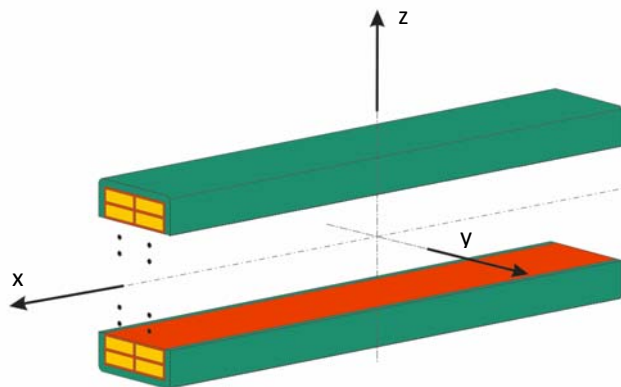


Abbildung 19: Schematischer Aufbau eines Statorstabes

### 3.8 Analytische Eingabeoberfläche in Microsoft Excel

Mit Microsoft Excel wurde ein Berechnungsprogramm erstellt, das die gefundene Analytik implementiert.

Als Eingabe dienen die geometrischen Abmessungen sowie die Werkstoffkennwerte der einzelnen Stabkomponenten. Der Stabaufbau wird zudem durch die Anzahl der Teileiter über- sowie nebeneinander definiert. Deshalb gibt es auch hierfür eine eigene Eingabemöglichkeit.

Mit Hilfe der gefundenen Analytik können nun durch die Eingabe aller Daten die 9 Elastizitätskonstanten zur vollständigen Beschreibung des orthotropen Statorstabes bestimmt werden.

Diese Daten werden dann in weiterer Folge zur Materialdefinition in FE – Programmen verwendet (siehe Kapitel 5.2).

<b>Leiteraufbau</b>		
Anzahl der Leiter nebeneinander	xx	
Anzahl der Leiter untereinander	xx	
<b>Technische Daten Kupferstab</b>		
Breite	xx	mm
Höhe	xx	mm
E-Modul	xx	MPa
Poissonzahl $\nu$	xx	
Dichte	xx	kg/m <sup>3</sup>
<b>Technische Daten Lackisolation</b>		
Dicke	xx	mm
E-Modul bei Raumtemperatur	xx	MPa
Poissonzahl $\nu$	xx	
Dichte	xx	kg/m <sup>3</sup>
<b>Technische Daten Außenisolation</b>		
Dicke oben/unten	xx	mm
Dicke seitlich	xx	mm
Poissonzahl $\nu$	xx	
Dichte	xx	kg/m <sup>3</sup>
<b>E-Modul in Stabrichtung</b>		
E-Modul bei Raumtemperatur	xx	MPa
E-Modul bei 120°C	xx	MPa

Abbildung 20: Eingabemaske Microsoft Excel

### 3.9 Ausgabedaten analytische Lösung, Versuchsstab Typ 1

Technische Daten Verbundquerschnitt, Versuchsstab Typ 1

Volumenanteil der jeweiligen Verbundkomponente		
Kupfer	$\phi_{\text{Kupfer}}$	64,03%
Lack	$\phi_{\text{Lack}}$	5,85%
Isolierung	$\phi_{\text{Isolierung}}$	30,12%
Abmessungen Stabverbund		
b	24,4	mm
h	74,2	mm
h/b	3,04	
Fläche Stabverbund		
$A_{yz}$	1806	mm <sup>2</sup>
Masseneigenschaften		
m	11,16	kg/m
$\rho$	6178,9	kg/m <sup>3</sup>
l	0,670	m
m	7,478	kg
Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung des Stabverbundes		
$I_{y,yz}$	827617	mm <sup>4</sup>
$I_{z,yz}$	89323	mm <sup>4</sup>
Torsionsflächenträgheitsmoment		
$I_{t,yz}$	281902	mm <sup>4</sup>
$k_{2,yz}$	0,263	

Elastizitätskonstanten, Versuchsstab Typ 1

Elastizitätskonstanten bei <i>Raumtemperatur</i>			
E-Moduln bei RT			
$E_x$	84307	MPa	
$E_y$	66420	MPa	
$E_z$	66420	MPa	
Schubmoduln bei RT			
$G_{xy}$	22964	MPa	
$G_{xz}$	22964	MPa	
$G_{yz}$	24613	MPa	
Querkontraktionszahlen bei RT			
$\nu_{xy}$	0,30		
$\nu_{xz}$	0,30		
$\nu_{yz}$	0,35		
Elastizitätskonstanten bei <i>120°C</i>			
E-Moduln bei 120°C			
$E_x$	82199	MPa	
$E_y$	55449	MPa	
$E_z$	55449	MPa	
Schubmoduln bei 120°C			
$G_{xy}$	19122	MPa	
$G_{xz}$	19122	MPa	
$G_{yz}$	20588	MPa	
Querkontraktionszahlen bei 120°C			
$\nu_{xy}$	0,30		
$\nu_{xz}$	0,30		
$\nu_{yz}$	0,35		

### 3.10 Ausgabedaten analytische Lösung, Versuchsstab Typ 2

Technische Daten Verbundquerschnitt, Versuchsstab Typ 2

Volumenanteil der jeweiligen Verbundkomponente		
Kupfer	$\phi_{\text{Kupfer}}$	58,68%
Lack	$\phi_{\text{Lack}}$	7,40%
Isolierung	$\phi_{\text{Isolierung}}$	33,92%
Abmessungen Stabverbund		
b	20,3	mm
h	81,9	mm
h/b	4,03	
Fläche Stabverbund		
$A_{yz}$	1663	mm <sup>2</sup>
Masseneigenschaften		
m	9,67	kg/m
$\rho$	5813,7	kg/m <sup>3</sup>
l	0,500	m
m	4,835	kg
Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung des Stabverbundes		
$I_{y,yz}$	928876	mm <sup>4</sup>
$I_{z,yz}$	57235	mm <sup>4</sup>
Torsionsflächenträgheitsmoment		
$I_{t,yz}$	192996	mm <sup>4</sup>
$k_{2,yz}$	0,281	

Elastizitätskonstanten, Versuchsstab Typ 2

Elastizitätskonstanten bei <i>Raumtemperatur</i>		
E-Moduln bei RT		
$E_x$	80929	MPa
$E_y$	63206	MPa
$E_z$	63206	MPa
Schubmoduln bei RT		
$G_{xy}$	21738	MPa
$G_{xz}$	21738	MPa
$G_{yz}$	23409	MPa
Querkontraktionszahlen bei RT		
$\nu_{xy}$	0,30	
$\nu_{xz}$	0,30	
$\nu_{yz}$	0,35	
Elastizitätskonstanten bei $120^\circ\text{C}$		
E-Moduln bei $120^\circ\text{C}$		
$E_x$	78555	MPa
$E_y$	52149	MPa
$E_z$	52149	MPa
Schubmoduln bei $120^\circ\text{C}$		
$G_{xy}$	17903	MPa
$G_{xz}$	17903	MPa
$G_{yz}$	19356	MPa
Querkontraktionszahlen bei $120^\circ\text{C}$		
$\nu_{xy}$	0,30	
$\nu_{xz}$	0,30	
$\nu_{yz}$	0,35	

### 3.11 Analytische Einflussgrößenuntersuchung auf den E – Modul

Mit Hilfe der analytisch gefundenen Lösung werden nun erste Untersuchungen hinsichtlich diverser Einflussgrößen auf den E – Modul und damit der Steifigkeit der Statorstäbe durchgeführt.

Parameter die die Eigenschaften der Stäbe maßgeblich beeinflussen sind:

- Die Anzahl der Teilleiter untereinander (Stabhöhe)
- Der Temperatureinfluss der Außenisolation (veränderlicher E – Modul einer Komponente)
- Einfluss der Lackschicht die die Stäbe umgibt

Die Auswertungen wurden für den Versuchsstab Typ 2 durchgeführt.

#### 3.11.1 Anzahl der Teilleiter (Stabhöhe)

Im Folgenden wird dargestellt welchen Einfluss die Anzahl der Teilleiter untereinander auf die Eigenschaften hat. Es wird darauf hingewiesen, dass hierbei die Anzahl der Teilleiter variiert wird. Also nicht die Anzahl der Teilleiter in einem konstanten Gesamtquerschnitt, dies würde bedeuten, dass die Teilleiter in ihrer Geometrie verkleinert würden. Es wird also die Anzahl der Teilleiter, die genau definierte geometrische Abmessungen aufweisen variiert, d.h. es ändern sich gleichzeitig die geometrischen Abmessungen des Gesamtverbundes → bei Erhöhung der Anzahl der Teilleiter wird auch der Statorstab in seinen Abmessungen größer.

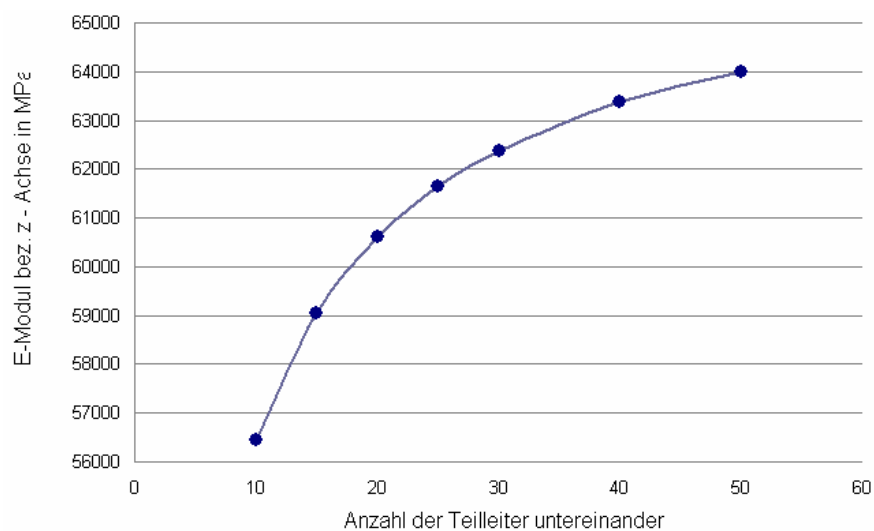


Abbildung 21: Einflussgrößenuntersuchung, Anzahl der Teilleiter untereinander

In Abbildung 21 erkennt man deutlich, dass der E – Modul des Statorstabes mit steigender Anzahl an Teilleitern zunimmt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass mit der Anzahl der Teilleiter der Volumenanteil des Kupfers am Verbundwerkstoff (vgl. mit Gl. 3.26), und damit der des Werkstoffes mit dem höheren E-Modul steigt. Damit steigt der E-Modul des Verbundes.

### 3.11.2 Temperatureinfluss der Außenisolation

Die Außenisolation ist der Werkstoff mit dem geringsten E – Modul im Verbund. Dieser ist zudem stark Temperaturabhängig. Im Folgenden wird der Temperatureinfluss in der Außenisolation berücksichtigt. Der E – Modul der Teilleiter mit Lackschicht wird als konstant angesehen. Als Referenztemperaturen dienen dabei die Raumtemperatur bzw. die Eigenschaften bei 120°C.

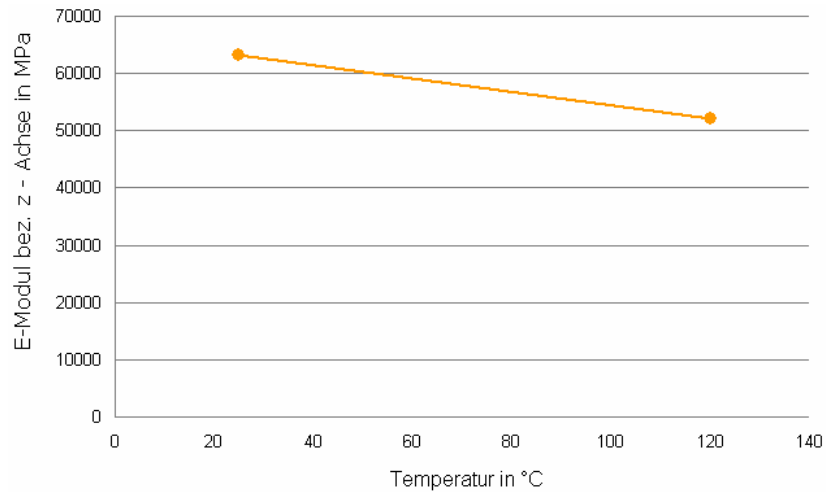


Abbildung 22: Einflussgrößenuntersuchung, Temperatureinfluss der Außenisolation

Der E – Modul der Außenisolation, einer Komponente im Verbund, nimmt mit der Temperatur ab. Führt man sich die Mischungsregel für den E – Modul quer zur Faserrichtung (Gl. 3.26) vor Augen, so bemerkt man, dass durch die Aufsummierung der mit dem Volumenanteil gewichteten Einzelkomponenten, bei der Verkleinerung eines E – Moduls auch der E – Modul des Verbundes sinkt. Dies veranschaulicht auch Abbildung 22. Der E – Modul des Verbundes, und damit des Statorstabes nimmt mit zunehmender Temperatur ab.



### 3.11.3 Einfluss der Lackschicht

Jeder Teilleiter ist mit einer Lackschicht mit einem bestimmten E – Modul umgeben. Es wird nun jeweils der E – Modul des Statorstabes, mit bzw. ohne Lackschicht um die Teilleiter berechnet. Zudem wird auch wieder die Anzahl der Teilleiter variiert.

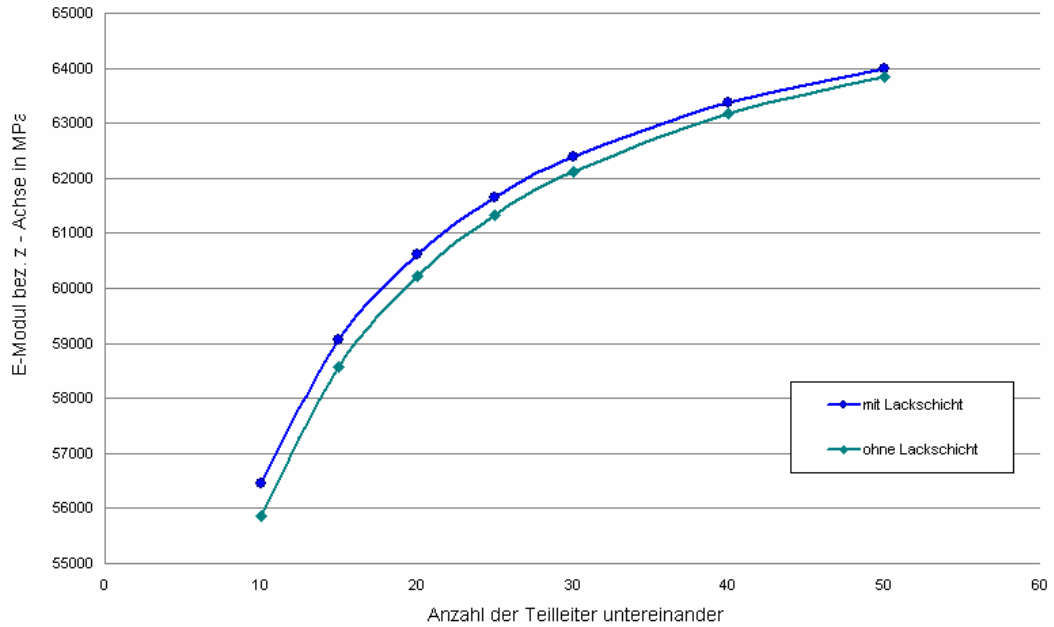


Abbildung 23: Einflussgrößenuntersuchung, Einfluss der Lackschicht

Es zeigt sich, dass die Lackschicht nur einen sehr kleinen Einfluss auf den E – Modul hat. Dies resultiert daraus, dass einerseits eine sehr geringe Schichtdicke vorliegt und andererseits der E – Modul des Lackes nur geringfügig von dem des Kupferleiters abweicht. Generell zeigt sich aber schon, dass mit Lackschicht der E – Modul des Statorstabes höher ist als ohne. Weiters erkennt man auch in Abbildung 23 sehr gut, dass mit steigender Anzahl an Teilleitern der Einfluss der Lackschicht auf den E – Modul des Statorstabes abnimmt. Je höher die Anzahl der Teilleiter wird umso größer werden die Volumenanteile des Kupfers, der Volumenanteil nimmt im Verhältnis dazu ab. Darum wird der Einfluss der Lackschicht mit steigender Teilleiteranzahl immer geringer.

## 4 Experimentelle Ermittlung

### 4.1 Bestimmung der Elastizitätsgrößen durch Versuche

Die genaueste Wiedergabe der Realität, die sichersten Daten, liefern Versuche an Probekörpern. Sie beinhalten außerdem Einflüsse die bei der mechanischen Modellierung aufgrund von Vereinfachungen nicht berücksichtigt wurden:

- Fertigungseinflüsse: Die Fasern sind durch bestimmte Herstellungsverfahren nicht homogen verteilt
- Die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungskurve. Elastizitätsgrößen sind eigentlich keine Konstanten sondern können nur in Teilbereichen linearisiert werden

Für die experimentelle Bestimmung des E-Moduls quer zur Faserrichtung wurden

- 4 – Punkt - Biegeversuche
- Experimentelle Modalanalysen (Bump Test)

durchgeführt.

Die Ermittlung des quer - quer Schubmoduls erfolgte anhand eines

- Torsionspendelversuch

### 4.2 Versuchsstab – Typen

Die experimentelle Bestimmung der Werkstoffdaten beinhaltet Versuche mit 2 unterschiedlichen Stabtypen, Versuchsstab Typ 1 und Versuchsstab Typ 2. Die beiden unterscheiden sich im Aufbau sowohl in der Anzahl der Teilleiter wie auch in den geometrischen Abmessungen der Einzelkomponenten.

Durch die Verwendung und Durchführung der Versuche mit 2 unterschiedlichen Stabtypen kann die allgemeine Gültigkeit des verwendeten analytischen Ansatzes bzw. auch die Ergebnisse aus den Modalanalysen mittels FEM bestätigt werden.

### 4.3 4 Punkt – Biegeversuch

#### 4.3.1 Theoretische Grundlagen

Beim 4 Punkt – Biegeversuch wird die Probe durch 2 Auflager gestützt. Durch 2 Gegenlager wird von der entgegen gesetzten Seite jeweils ein Belastung von  $F/2$  aufgebracht. Dadurch stellt sich im Bereich zwischen den mittleren Auflagern konstantes Biegemoment, d.h. Querkraft gleich Null und damit keine Schubdurchsenkung sondern reine Biegung, ein. Dies ist auch der große Vorteil gegenüber einem 3 Punkt – Biegeversuch. Durch den Bereich konstanten Biegemoments kann hier genau die Verschiebung gemessen werden.

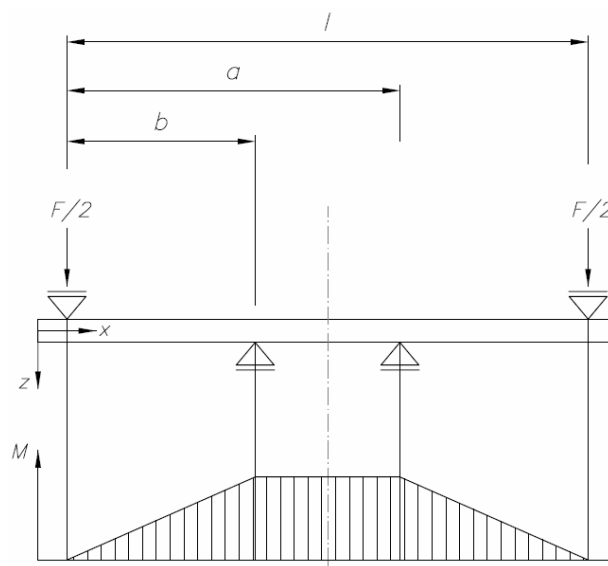


Abbildung 24: Schema 4 Punkt-Biegeversuch mit Biegemomentenverlauf

Abbildung 24 zeigt den schematischen Aufbau eines 4 Punkt – Biegeversuch. Aus dem darunter aufgezeichneten Biegemomentenverlauf erkennt man deutlich den Bereich konstanten Biegemomentes, in dem in weiterer Folge die Verschiebung gemessen wird.

#### 4.3.2 Versuchsaufbau

Der 4 Punkt – Biegeversuch wurde gemäß folgender Zeichnung, Abbildung 25, aufgebaut.



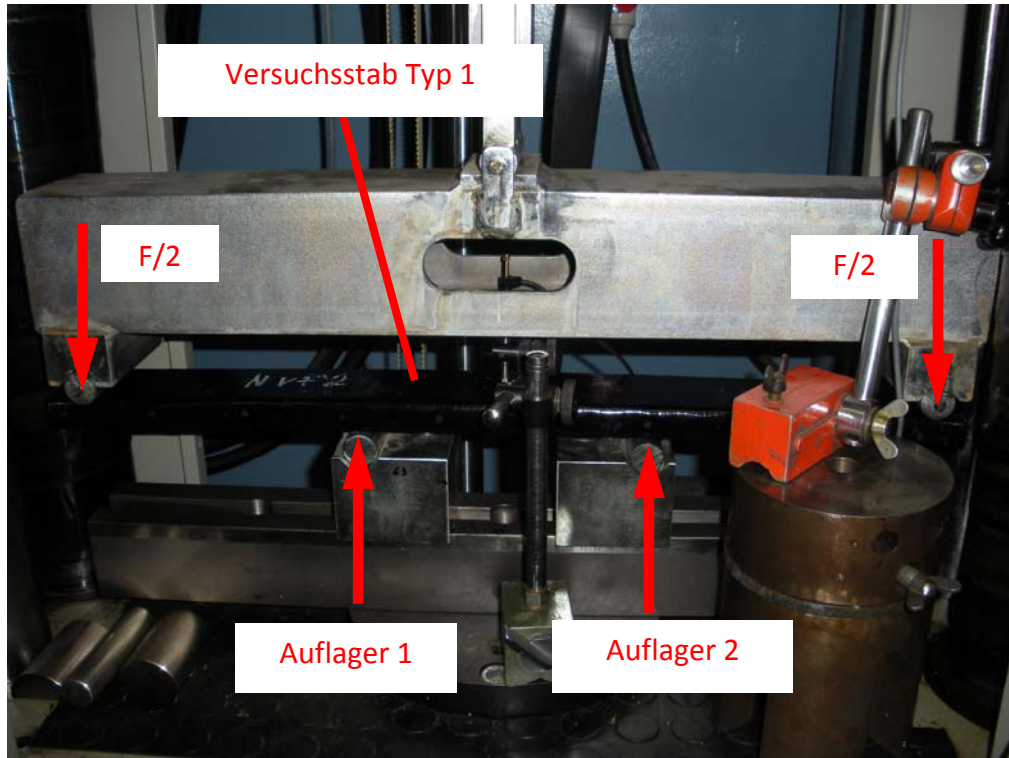


Abbildung 26: Versuchsaufbau 4 Punkt - Biegeversuch

Abbildung 26 zeigt den Versuchsaufbau bei AndritzHydro. Der Versuchsstab ist bereits eingespannt und die Messung der Durchbiegung (Verschiebung) erfolgt durch einen induktiven Wegmesser, siehe Abbildung 27.

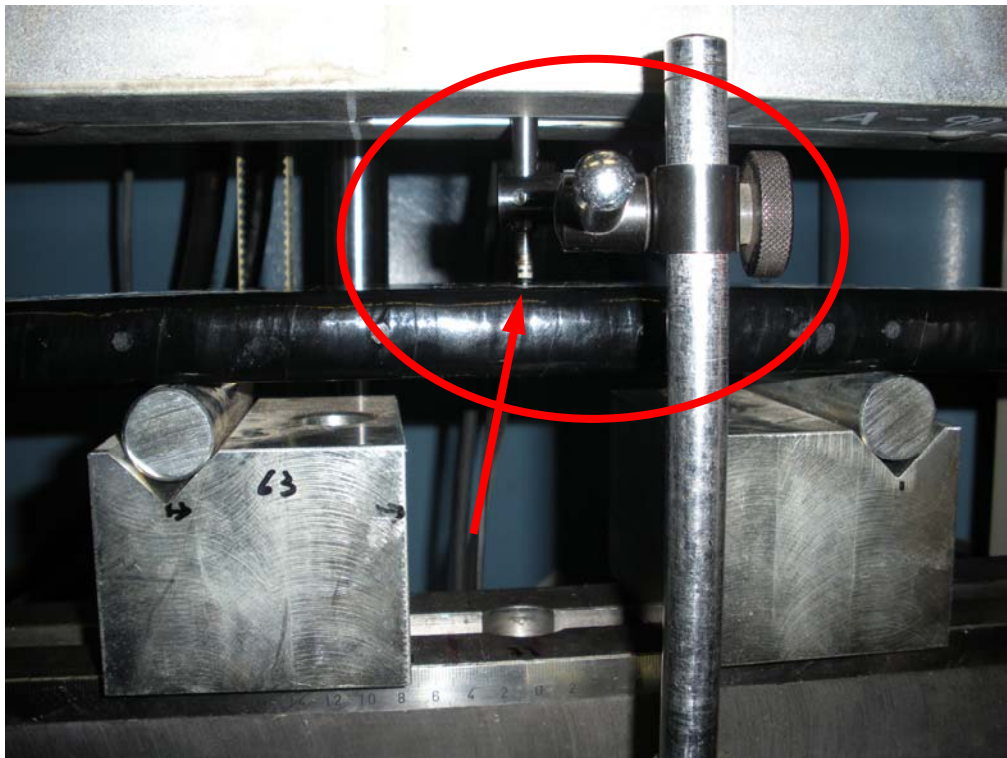


Abbildung 27: Messung der Durchbiegung (Verschiebung) durch induktiven Messaufnehmer

#### 4.3.3 Proben

In den Versuchen wurden Proben der Versuchsstäbe Typ 1, Abbildung 29, mit einer Länge von 670mm verwendet. Es wurden sowohl verpresste, als auch unverpresste Stäbe, abgebildet in Abbildung 28, geprüft.



Abbildung 28: Versuchsstab Typ 1, links verpresster Stab, rechts ein nicht verpresster Stab



Abbildung 29: Verschiedene Proben des Versuchsstabes Typ 1

#### 4.3.4 Versuchsdurchführung

Die Versuche wurden am 29.03.2010 bei AndritzHydro in Weiz durchgeführt. Nachdem der jeweilige Versuchsstab eingelegt war, wurde dieser gemäß der Versuchsanordnung belastet. Die Kraft am Stempel sowie die Durchbiegung des Versuchsstabes wurden gemessen, und so ein Kraft – Verschiebungsdiagramm aufgenommen.

#### 4.3.5 Auswertung

Für jede Probe wurde ein Kraft - Verschiebungsdiagramm aufgezeichnet, Abbildung 30. Um die Proben vor einer Beschädigung zu schützen wurden in weiterer Folge die Versuchsstäbe bis zu einer Kraft von 6000N belastet. Einige Proben erlitten beim Überschreiten dieser Kraft eine bleibende Beschädigung (der Stab knickte ein).

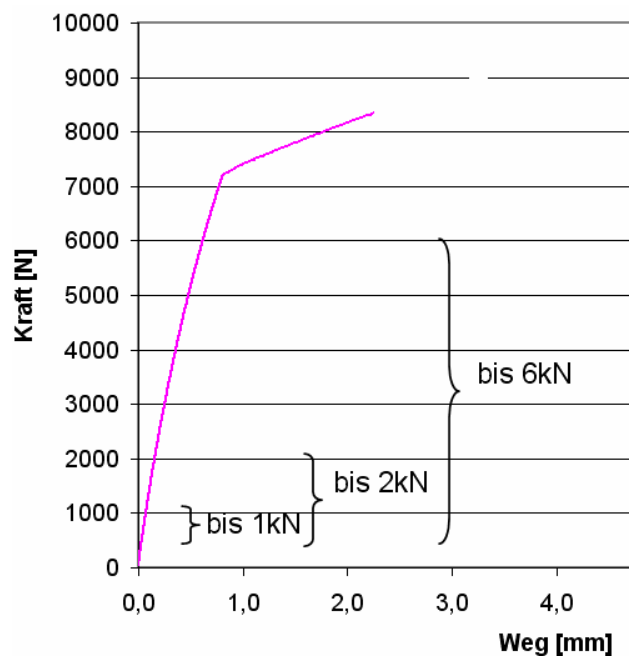


Abbildung 30: Kraft – Verschiebungsdiagramm 4 Punkt – Biegeversuch

Es zeigt sich ein nichtlinearer Anstieg der Kurve bereits zu Beginn der Belastung. Dies ist auf die, im Vergleich zu den übrigen Stabkomponenten, relativ weiche Isolierung zurückzuführen, die zu Beginn des Versuchs ein wenig eingedrückt wird. In der folgenden Auswertung wird die Kurve in den 3 Teilbereichen (bis 1kN, bis 2kN, bis 6kN) linearisiert.

Die Auswertung der Versuche erfolgte über die Biegelinie eines statisch unbestimmten Systems was der Anordnung gemäß Abbildung 24 entspricht. Umgeformt auf den E – Modul ergibt sich folgende Gleichung zur Auswertung der 4 Punkt Biegeversuche:

$$E = \frac{F}{w} \cdot \frac{a \cdot b}{3 \cdot I} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{l}{b} \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{l^2}{8 \cdot a \cdot b} \right] \quad (\text{Gl. 4.1})$$

Die Längen a, b und l entsprechen den Abmessungen gemäß Abbildung 24, mit a + b = l. Das Verhältnis F/w, das der Steigung der Kurve im Kraft – Verschiebungsdiagramm entspricht, wird auch direkt aus diesem entnommen. Das Flächenträgheitsmoment entspricht dem eines Rechteckes mit den Querschnittabmessungen der Versuchsstäbe.

Bei der Auswertung wird daher die Kurve in 3 Bereiche geteilt, bis 1kN, bis 2kN und bis 6kN Belastung. Diese Bereiche werden dann linearisiert und jeweils ein E-Modul berechnet.

#### 4.3.6 Versuchsergebnisse

Die Ergebnisse wurden von der F&E Abteilung von AndritzHydro zur Verfügung gestellt:

Versuchsstab 1 [Typenbezeichnung]		E [MPa]	E <sub>gemittelt</sub> [MPa]
<b>A1</b>	bis 1 kN	78754	→ <b>58818</b>
	bis 2 kN	74066	
	bis 6 kN	57140	
<b>A4</b>	bis 1 kN	97306	→ <b>73867</b>
	bis 2 kN	82791	
	bis 6 kN	60496	
<b>NVF2</b>	bis 1 kN	115254	→ <b>73867</b>
	bis 2 kN	91803	
	bis 6 kN	73779	
<b>NVF5</b>	bis 1 kN	146830	→ <b>73867</b>
	bis 2 kN	107245	
	bis 6 kN	73955	

Tabelle 1: Auswertung E-Moduln, 4 Punkt - Biegeversuche

Je nach Stabtyp (verpresst, unverpresst) wird der E – Modul (bis 6kN) gemittelt. Der experimentell ermittelte E – Modul wird demnach aus dem arithmetischen Mittel der Versuchsergebnisse gebildet (s. Tabelle 1, dick gedruckt).



Versuchsstäbe A1 und A4 sind verpresste Stäbe, NVF2 sowie NVF5 unverpresste. Abbildung 31 und Abbildung 32 zeigen noch einmal graphisch die Ergebnisse aus Tabelle 1.

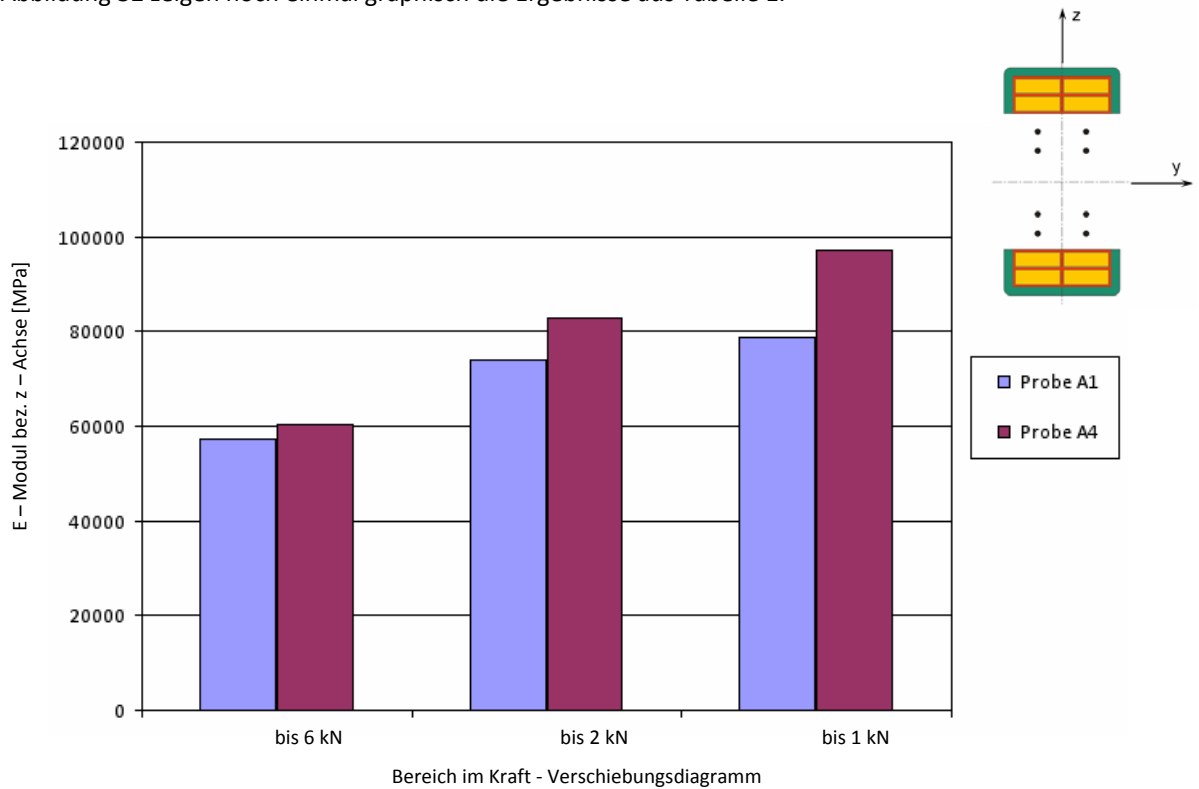


Abbildung 31: Vergleich der E – Moduln aus den 4 Punkt – Biegeversuchen, verpresster Statorstab

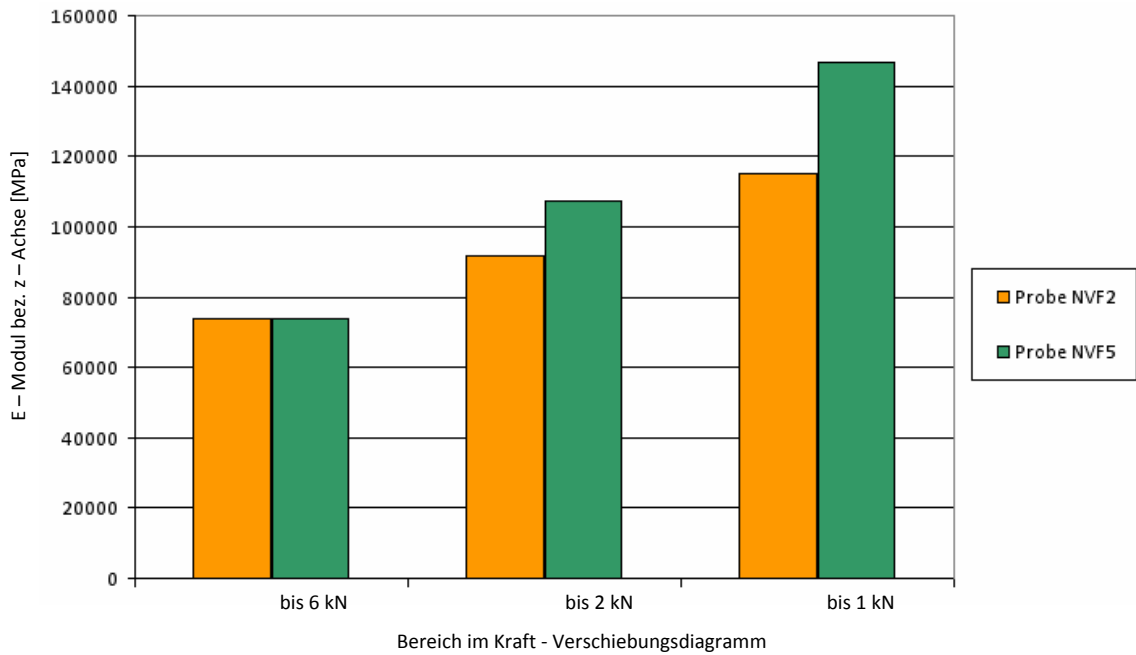


Abbildung 32: Vergleich der E – Moduln aus den 4 Punkt – Biegeversuchen, unverpresster Statorstab

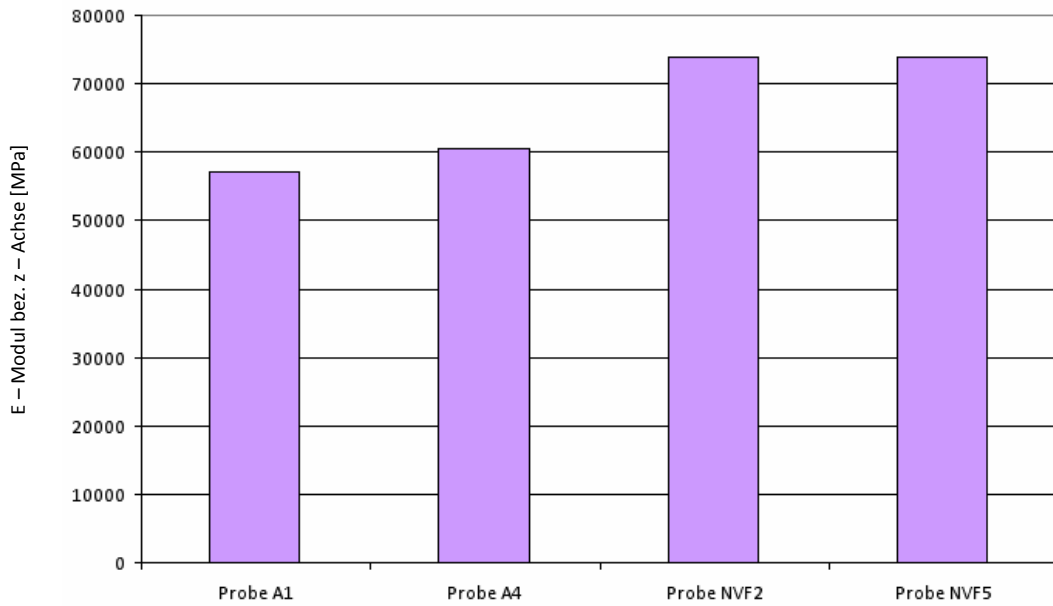


Abbildung 33: Vergleich der gemittelten E – Moduln, bis 6 kN, aus den 4 Punkt - Biegeversuchen

Die E-Moduln des jeweiligen Stabtyps bis 6kN wurden gemittelt, graphisch dargestellt in Abbildung 33, und stehen nun allgemein für den E-Modul quer zur Faserrichtung. Auch gut in dieser Graphik zu erkennen ist, dass tendenziell die E – Moduln der unverpressten Versuchsstäbe höher sind als jene der verpressten Proben.

#### 4.3.7 Vergleich der Ergebnisse aus den 4 Punkt Biegeversuchen mit der analytischen Lösung

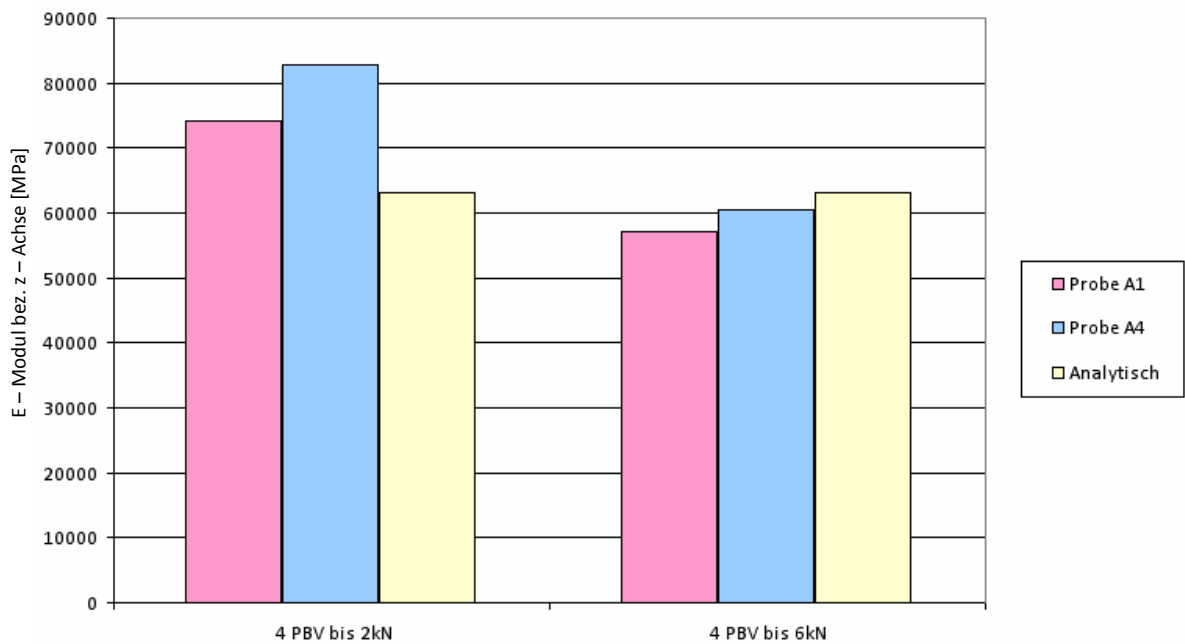


Abbildung 34: Ergebnisvergleich, 4 Punkt Biegeversuch – Analytisches Ergebnis

Die analytischen Werte können gemäß den Ausgabendaten aus Kapitel 3.9 ff entnommen werden.

#### 4.3.8 Versuchsdiskussion

Die Werte für den E-Modul bis 1kN liefern zu hohe Werte. Der Vergleich der Ergebnisse der 4 Punkt Biegeversuche, siehe Abbildung 33 (Versuchsstab Typ 1, Proben A1 und A4) mit der Analytik zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. D.h. der erste Abgleich der analytisch ermittelten Werte mit Versuchsergebnisse bestätigt, dass das analytische Modell die Realität sehr gut abbildet.

Des Weiteren zeigt sich, dass entgegen voriger Annahmen, der verpresste Stab einen niedrigeren E – Modul aufweist, als der unverpresste Stab. Dies ist eventuell darauf zurückzuführen, dass durch den Pressvorgang Harz aus dem Stab herausgedrückt wird und dadurch der E – Modul geringfügig sinkt. Im Vergleich zur analytischen Lösung würde dies bedeuten, dass sich durch den Pressvorgang die Volumenverhältnisse im Verbund ändern, und daher andere Werte für den E – Modul herauskommen.

Vergleicht man später die Ergebnisse mit der experimentellen Modalanalyse (siehe folgendes Kapitel), so decken sich die Ergebnisse des Bereiches bis 6kN am besten mit den Ergebnissen, und auch mit dem analytischen Ergebnis.

Der Versuchsstab wurde ausschließlich liegend, also Biegung bezüglich der z - Achse, s. Abbildung 34, geprüft. Bezogen auf die y – Achse sind die Versuchsstäbe zu steif, wodurch bei Belastung zuerst die Isolierung beschädigt wird, bevor sich die Stäbe verformen, bzw. ist sind die Auflagepunkte zu klein wodurch an diesen Stellen der Stab stark eingedrückt würde.

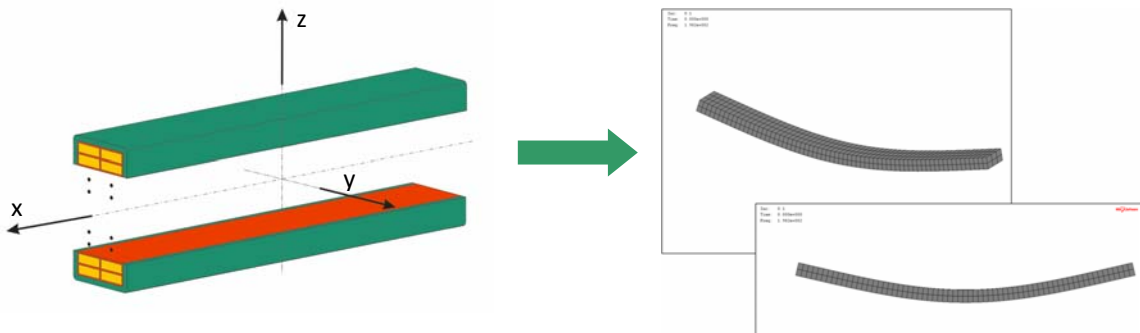


Abbildung 35: Durchbiegung des Versuchsstabes um die z – Achse, schematische Darstellung

## 4.4 Experimentelle Modalanalyse („Bump Test“)

Bei der experimentellen Modalanalyse, im Vergleich dazu die rechnerische Modalanalyse mittels FEM (siehe auch Kapitel 5) werden über Anschlagversuche Eigenfrequenzen des jeweiligen Versuchskörpers ermittelt. Über die Eigenfrequenz ist es möglich auf den E – Modul zurückzurechnen.

### 4.4.1 Theoretische Grundlagen – Modalanalyse (LMS, 2010)

Mit Hilfe der Modalanalyse lassen sich die Eigenfrequenzen eines Versuchskörpers bestimmen. Die Modalanalyse untersucht demnach die dynamischen Eigenschaften bzw. das Verhalten einer mechanischen Struktur bei nicht statischer Anregung. Es handelt sich um eine Systemanalyse, d.h. es werden systemtypische Charakteristika („Eigen“ - Werte) ermittelt. Für eine Systemanalyse ist immer eine (zumindest) 2-kanalige Messung erforderlich, nämlich ein Eingangssignal (z.B. Impulshammer) und ein (oder mehrere) Ausgangssignale (z.B. Piezoaufnehmer).

Mit Hilfe der Modalanalyse können

- Resonanzfrequenz
- Modale Schwingungsformen
- Dämpfung

ermittelt werden.

Anregungsarten

Schwingungsfähige mechanische Strukturen können auf verschiedene Arten angeregt werden:

- Fremdanregung (Vibratoren, Hammer, usw.)
- Eigenanregung (Reaktionskräfte oszillierender Teile, Unwuchten, Explosionen, usw.)

Impulshammer

Bei der Impulsmethode wird eine schwingungsfähige Struktur durch eine Impulsfunktion angeregt. Die übertragene Kraft als Eingangsgröße wird gemessen und die Schwingung über den Weg, die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung detektiert. Impulshammer erlauben sehr einfache und schnelle Tests, Nachteil dieser Methode ist, dass durch den Handbetrieb die Anregungsfunktion einen gewissen Zufallscharakter hat obwohl im Kopf die anregende Kraft gemessen wird. Außerdem ist der Schlag schlecht reproduzierbar. Die Form des Kraftimpulses ist also stark von der Art und Geschwindigkeit des Schlages abhängig. Des Weiteren kann über die Masse des Hammers die Größe des Impulses beeinflusst werden.

### Theoretisches Beispiel – ebene Platte

An einer Ecke wird eine Kraft mit sinusförmigem Verlauf aufgebracht. Wie in Abbildung 36 ersichtlich können verschiedene Signalformen als Eingangssignal dienen. Ein an einer anderen Ecke der Platte angebrachter Beschleunigungssensor misst daraufhin die Schwingungsantwort.

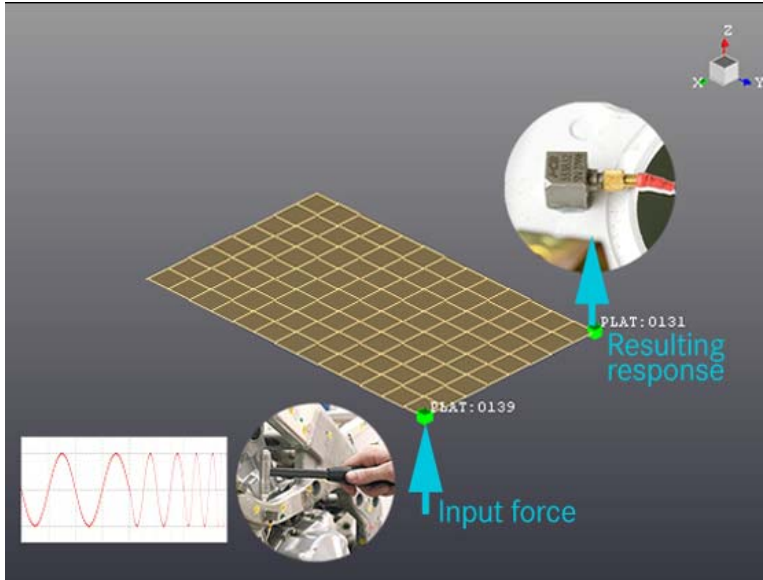


Abbildung 36: Experimentelle Modalanalyse – Impulsmethode (LMS, 2010)

Die gemessene Amplitude kann je nach Frequenz der aufgebrachten Kraft variieren. Das System reagiert mit immer größeren Amplituden, wenn sich die Frequenzen der aufgebrachten Kraft den Resonanz- oder Eigenfrequenzen des Systems nähern.

Die Zeitsignale werden dann mittels eines Algorithmus, der schnellen Fourier Transformation = FFT Analyse, in den Frequenzbereich transformiert. Die Übertragungsfunktion kann berechnet und die Resonanzstellen dargestellt werden.

#### 4.4.2 Versuchsaufbau und Messwerkzeuge

Die Versuchsstäbe wurden auf eine Schaumstoffunterlage gelegt. Aus vorhergehenden Versuchen wurde ermittelt, dass diese Arte der Auflage keinen Einfluss auf das Messergebnis hat, die Versuchsanordnung also der eines freien Balkens entspricht, siehe auch Abbildung 37 und Abbildung 38.

Es wurden sowohl die Eigenfrequenzen bezüglich der z - Achse also auch die bezogen auf die y - Achse gemessen. Dementsprechend wurden die Beschleunigungssensoren unterschiedlich platziert. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen wurden 3 Piezoelektrische Beschleunigungssensoren auf die Versuchsstäbe angebracht. Die Versuchsstäbe wurden mit einem Impulshammer angeschlagen.

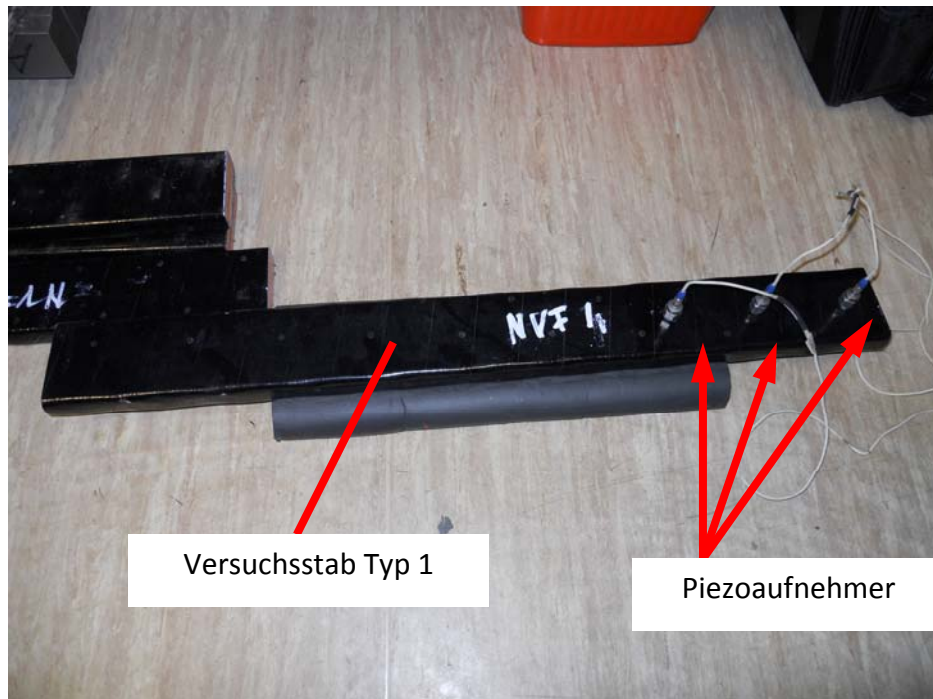


Abbildung 37: Messaufbau, Versuchsstab Typ 1, experimentelle Modalanalyse bez. z - Achse



Abbildung 38: Messaufbau, Versuchsstab Typ 2, experimentelle Modalanalyse bez. y – Achse

#### 4.4.3 Proben

Es wurden sowohl Versuchsstäbe Typ 1, mit einer Länge von 670mm, als auch Versuchsstäbe Typ 2, Abbildung 39, mit einer Länge von 500mm, geprüft. Als Proben der Versuchsstäbe Typ 1 wurden exakt die gleichen wieder verwendet wie bei den 4 Punkt – Biegeversuchen (Bilder Proben siehe Abbildung 28 und Abbildung 29).

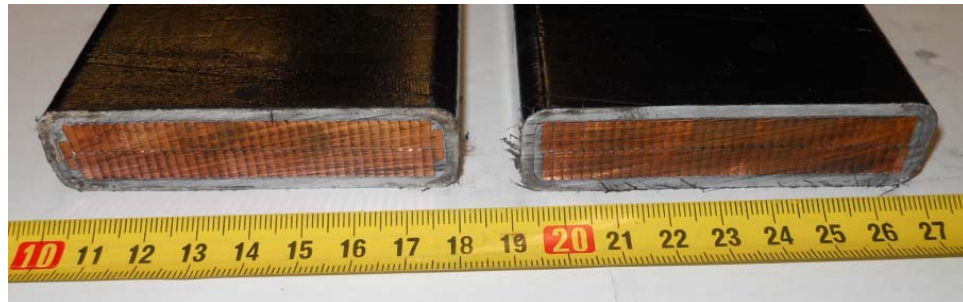


Abbildung 39: Experimentelle Modalanalyse – Versuchsstab Typ 2

#### 4.4.4 Versuchsdurchführung

Die Versuche wurden am 07.04.2010 bei AndritzHydro in Weiz durchgeführt. Die Proben wurden auf die weiche Unterlage aufgelegt und mehrmals mit dem Impulshammer angeschlagen, siehe Abbildung 40. Die Signale wurden direkt per FFT - Analyse ausgewertet, Abbildung 41 bis Abbildung 44.



Abbildung 40: Versuchsdurchführung experimentelle Modalanalyse mit Impulshammer

#### 4.4.5 Auswertung – FFT Analyse

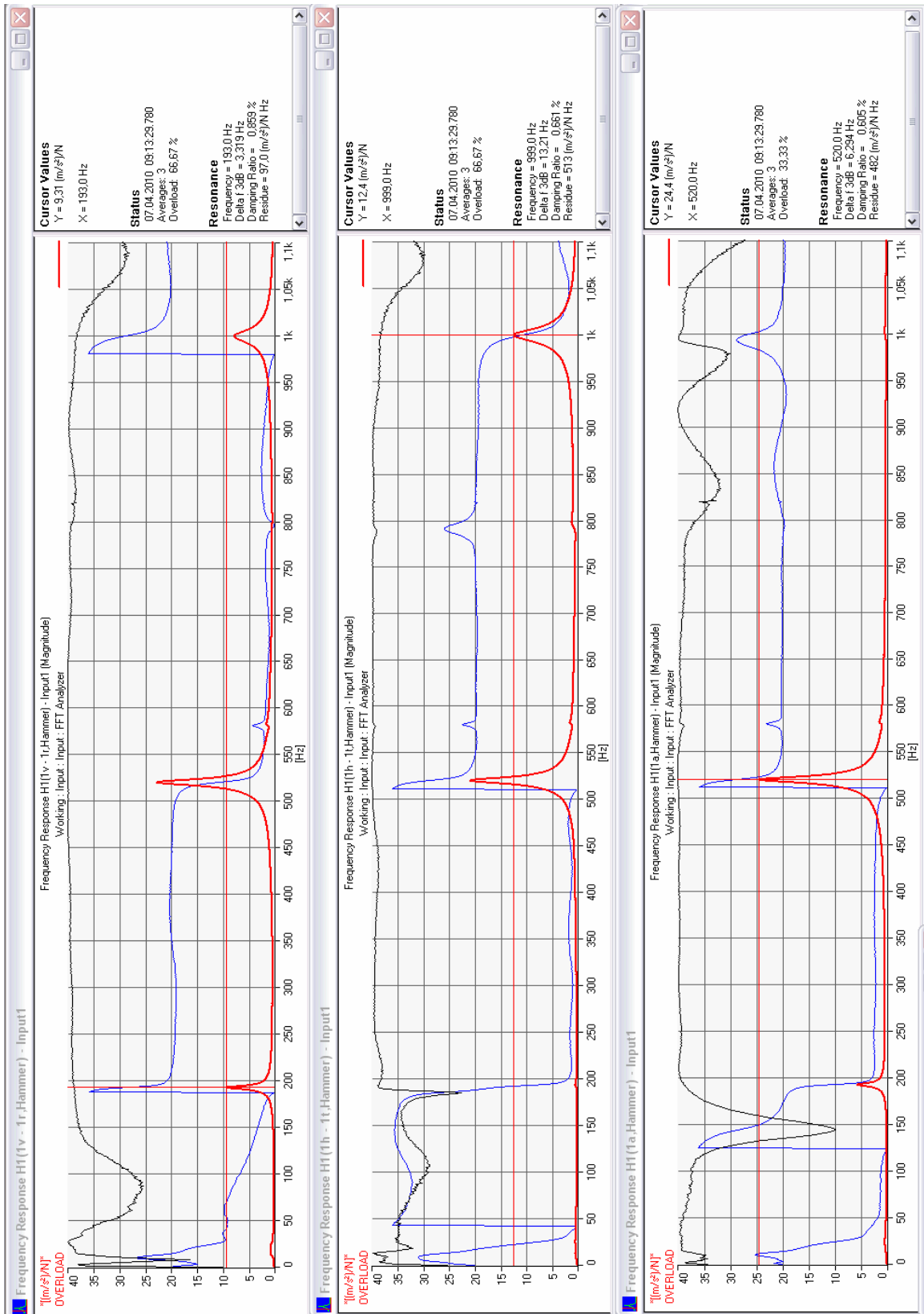


Abbildung 41: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. z – Achse



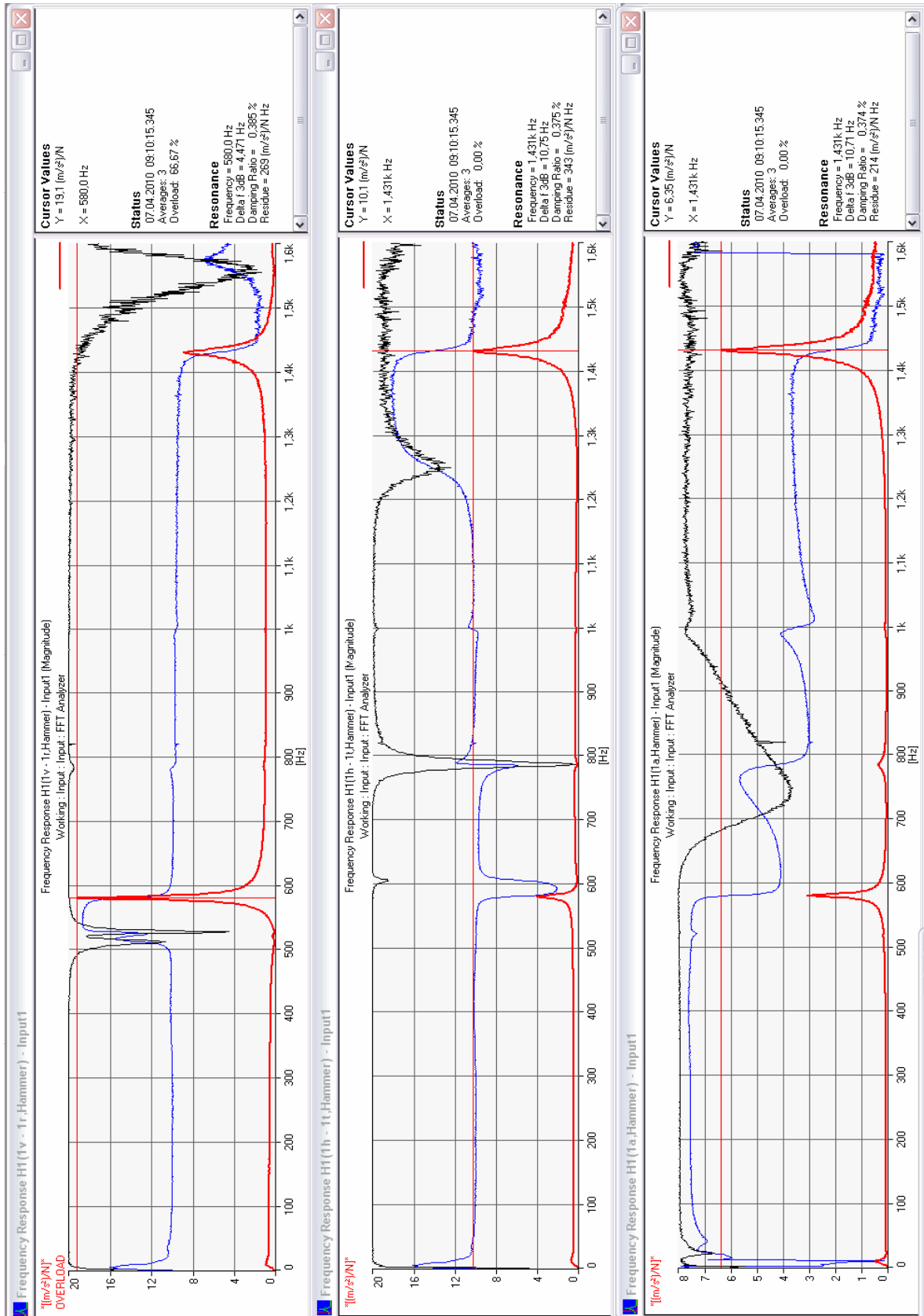


Abbildung 42: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. y - Achse

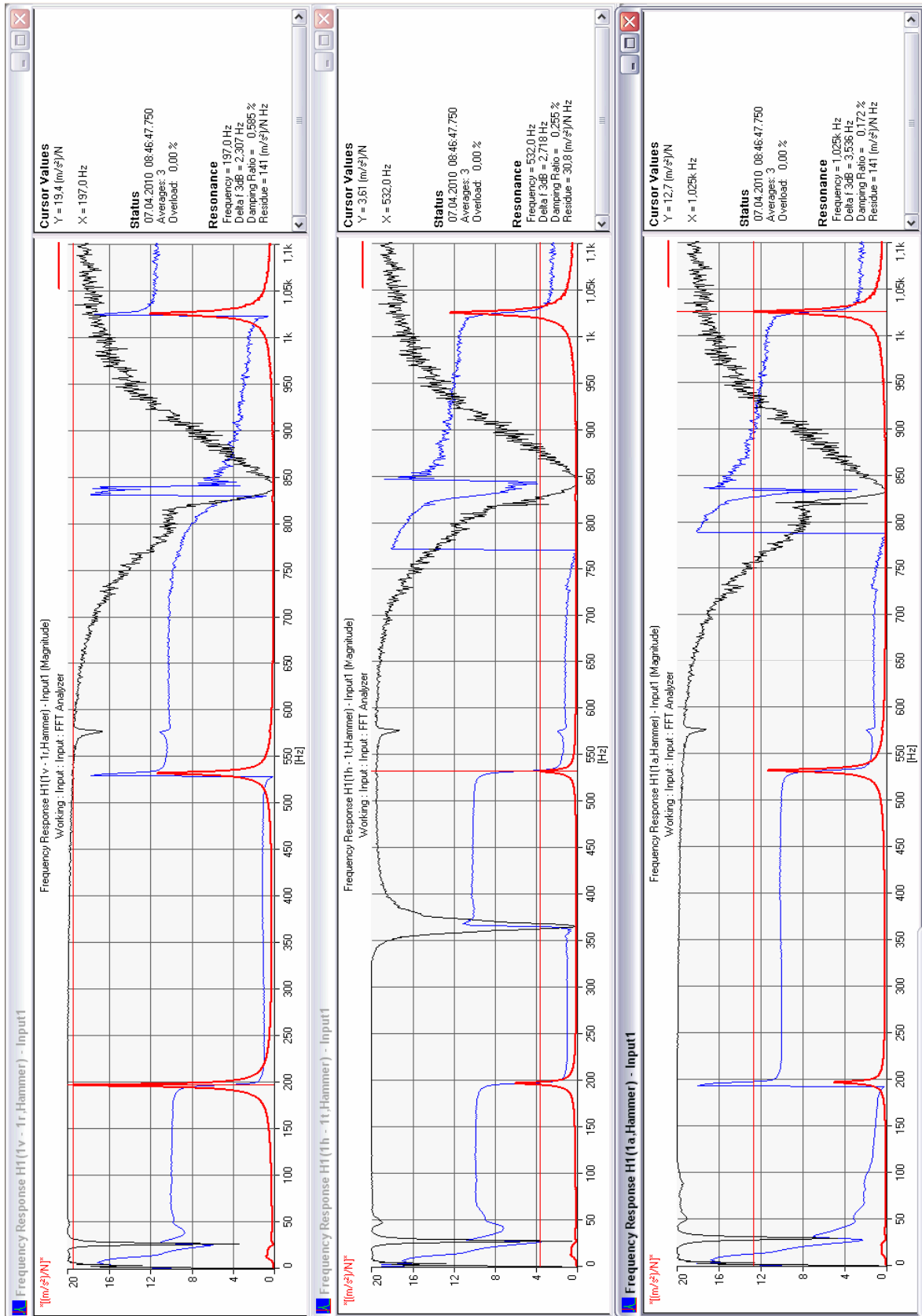


Abbildung 43: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. z – Achse

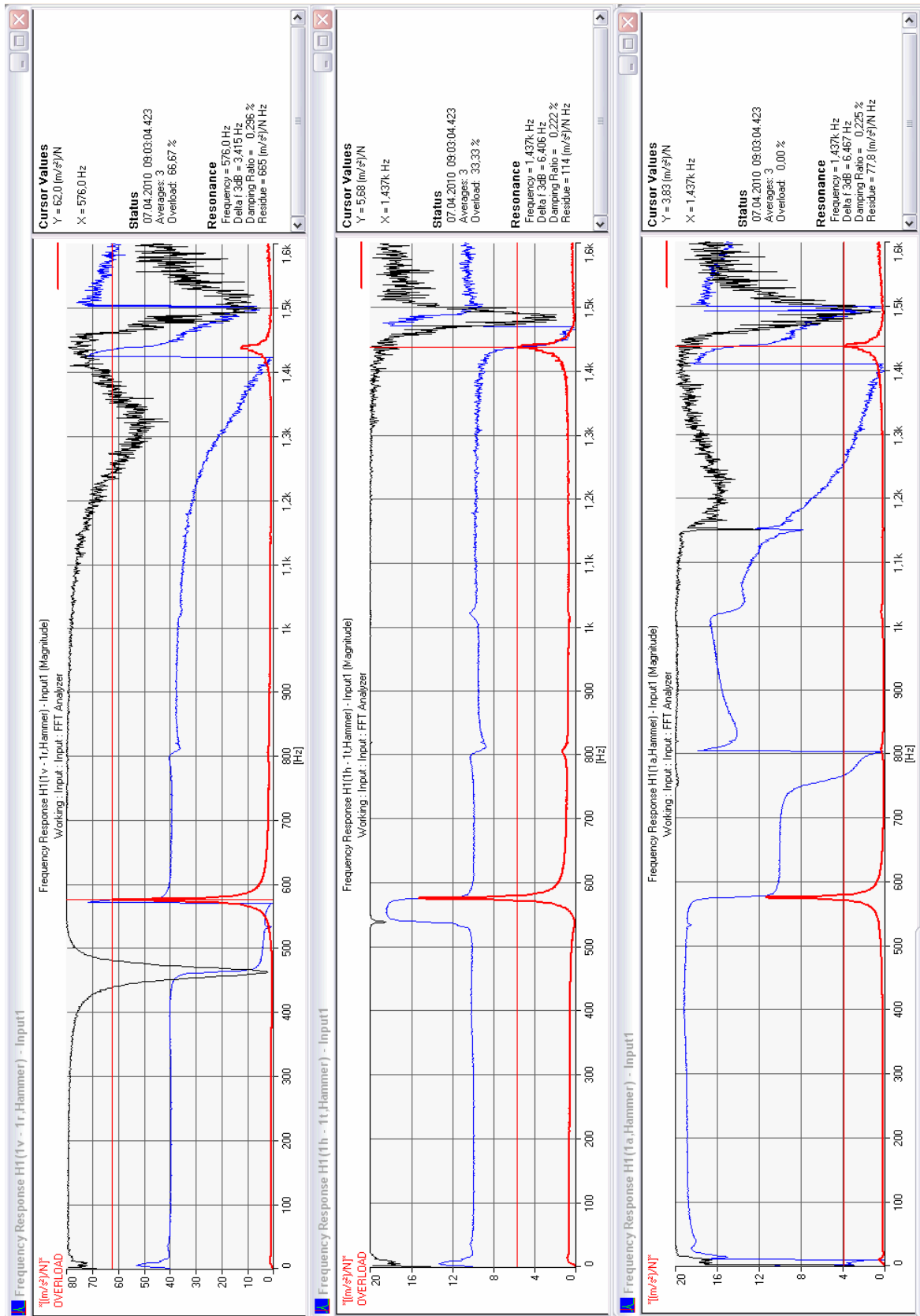


Abbildung 44: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. y – Achse

Die Eigenfrequenzen eines freien Stabes errechnen sich unter Vernachlässigung der Dämpfung aus folgender Beziehung:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2 \cdot \pi \cdot l^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{E \cdot I}{m}\right)} \quad i=1,2,3, \dots \quad (\text{Gl. 4.2})$$

$f_i$  ..... Eigenfrequenz bei i-ten Eigenmode [Hz]

$\lambda_i$  ..... Konstante bei i-ten Eigenmode

$l$  ..... Stablänge [m]

$E$  ..... Elastizitätsmodul [ $\text{N/m}^2$ ]

$I$  ..... Flächenträgheitsmoment in [ $\text{m}^4$ ]

$M$  ..... Stabmasse [kg]

Umgeformt zur Berechnung des Elastizitätsmoduls ergibt sich folgende Gleichung:

$$E = \frac{4 \cdot m}{I} \left( \frac{f_i \cdot l^2 \cdot \pi}{\lambda_i^2} \right)^2 \quad (\text{Gl. 4.3})$$

#### 4.4.6 Versuchsergebnisse

##### 4.4.6.1 Versuchsstab Typ 1 nicht verpresst

Die Eigenfrequenzen wurden ausschließlich bei einer Probentemperatur von 20°C (=Raumtemperatur) gemessen.

NV5:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	$f_i$ [Hz]	E [MPa]	$f_i$ [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	196	72895	575	67472
2	7,8532	529	69882	1440	55691
3	10,9956	1022	67869	-	-

Tabelle 2: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab NVF5

NVF2:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	$f_i$ [Hz]	E [MPa]	$f_i$ [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	195,5	72523	573,5	67121
2	7,8532	525,8	69040	1439	55614
3	10,9956	1020	67603	-	-

Tabelle 3: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab NVF2

#### 4.4.6.2 Versuchsstab Typ 1 verpresst

A1:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	$f_i$ [Hz]	E [MPa]	$f_i$ [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	193,5	70078	582,5	68299
2	7,8532	524	67632	1441	55007
3	10,9956	1012	65639	-	-

Tabelle 4: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab A1

A4:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	$f_i$ [Hz]	E [MPa]	$f_i$ [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	194	70874	581	68366
2	7,8532	524,5	68179	1434	54810
3	10,9956	1010	65782	-	-

Tabelle 5: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab A4

#### 4.4.6.3 Gemittelte Werte, E – Modul, Versuchsstab Typ 1

nicht verpresst		verpresst	
bez. z - Achse	bez. y - Achse	bez. z - Achse	bez. y - Achse
E [MPa]	E [MPa]	E [MPa]	E [MPa]
72709	67296	70476	68332
69461	55652	67905	54908
67736	-	65710	-

Tabelle 6: Mittelwerte E – Moduln Versuchsstab Typ 1

#### 4.4.6.4 Versuchsstab Typ 2

Die Eigenfrequenzmessungen bei Versuchsstab Typ 2 wurden bei einer Stabtemperatur 22°C (=Raumtemperatur), 110°C und 140°C gemessen. Hier handelt es sich um einen verpressten Versuchsstab.

Stabtemperatur 22°C:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	fi [Hz]	E [MPa]	fi [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	272	64901	1049	61020
2	7,8532	726	60772	2401	42054
3	10,9956	1373	56525	-	-

Tabelle 7: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 22°C

Stabtemperatur 110°C:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	fi [Hz]	E [MPa]	fi [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	265	61661	1033	59117
2	7,8532	708	57775	-	-
3	10,9956	1383	57393	-	-

Tabelle 8: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 110°C

Stabtemperatur 140°C:

bez. z - Achse				bez. y - Achse	
#	$\lambda_i$	fi [Hz]	E [MPa]	fi [Hz]	E [MPa]
1	4,7300	256	57519	960	51115
2	7,8532	682	53709	-	-

Tabelle 9: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 140°C

#### 4.4.7 Vergleich der Ergebnisse aus der experimentellen Modalanalyse mit der analytischen Lösung

In den folgenden Diagrammen, Abbildung 45 bis Abbildung 48, werden die Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse der analytischen Lösung gegenübergestellt, wobei die analytische Lösung nicht zwischen verpresst/unverpresst unterscheiden kann, die Balken der analytischen Lösung (gelb), in Abbildung 45 und Abbildung 46, sind also jeweils identisch.

##### 4.4.7.1 Versuchsstab Typ 1

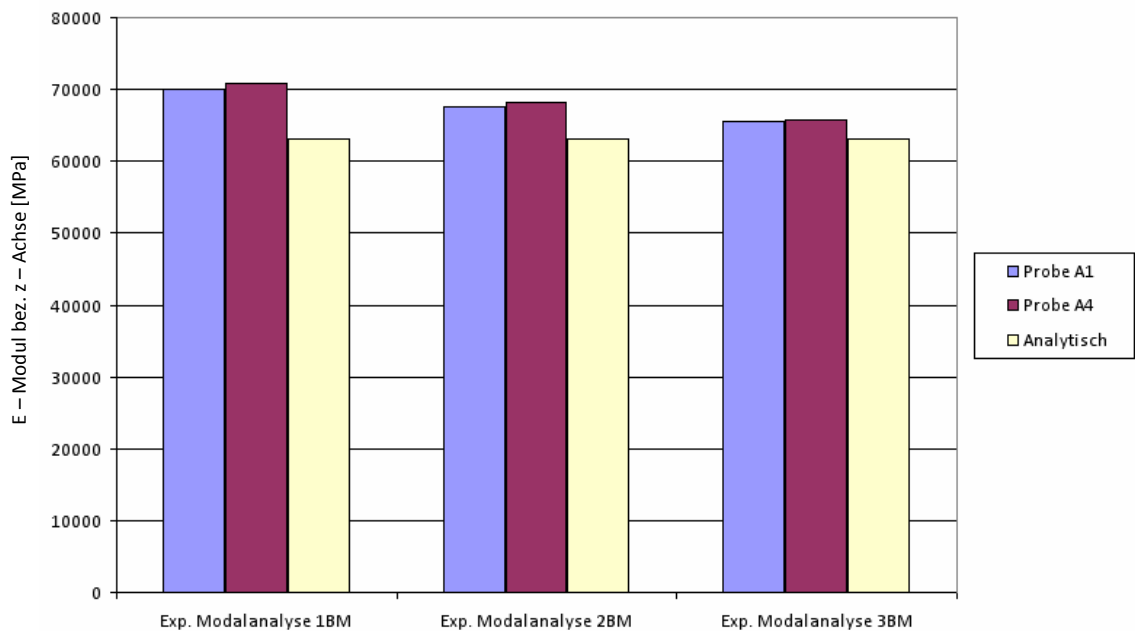


Abbildung 45: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. z – Achse

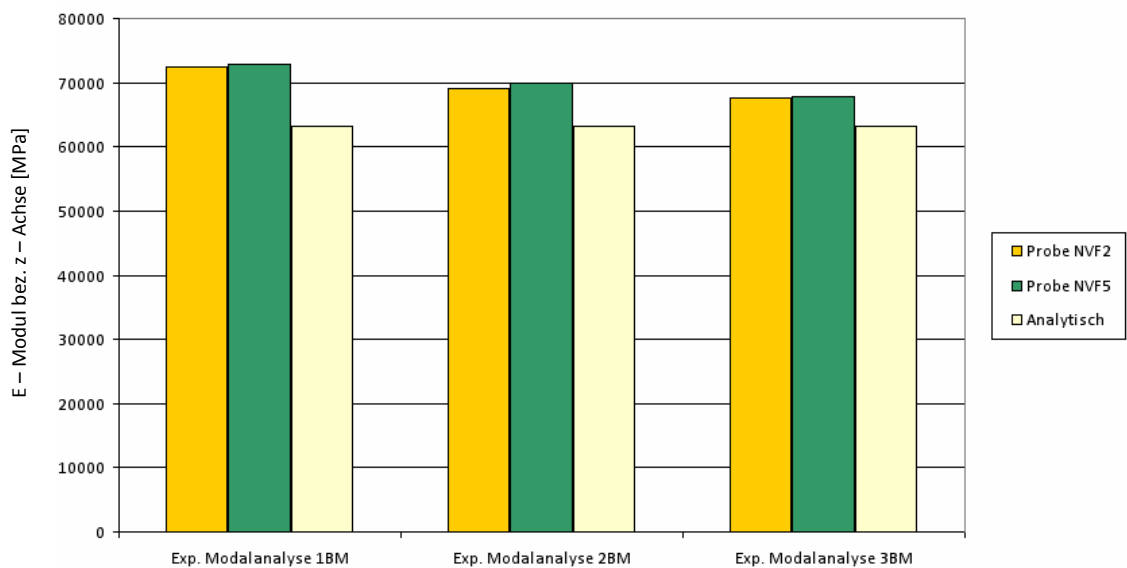


Abbildung 46: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. z - Achse

#### 4.4.7.2 Versuchsstab Typ 2

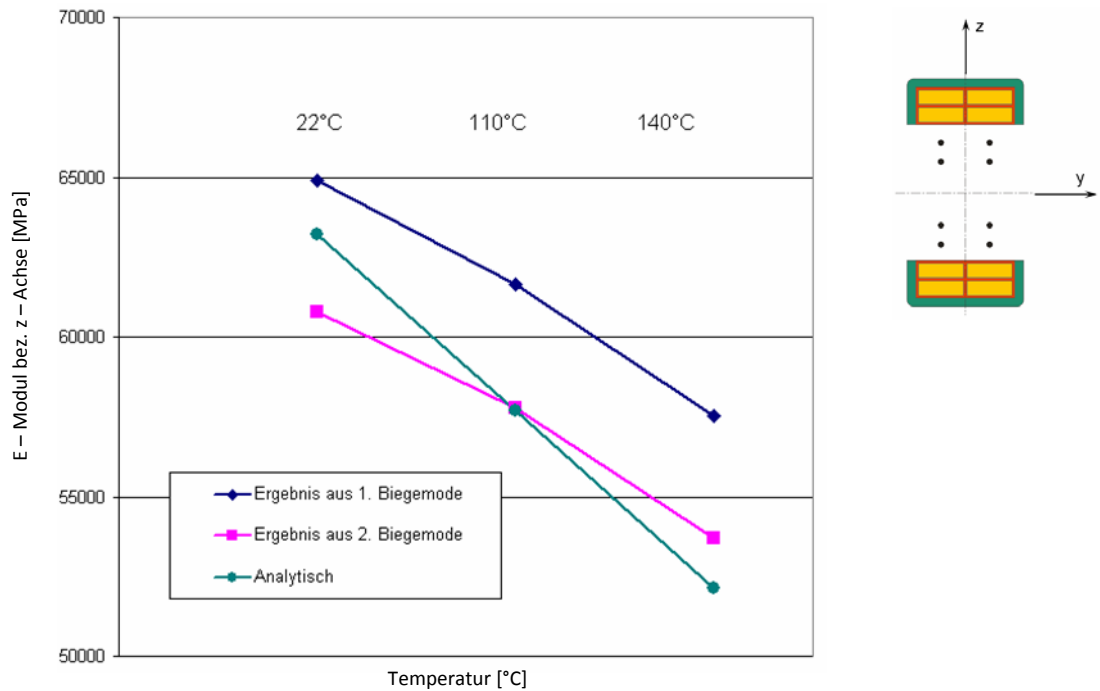


Abbildung 47: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab 2, bez. z - Achse

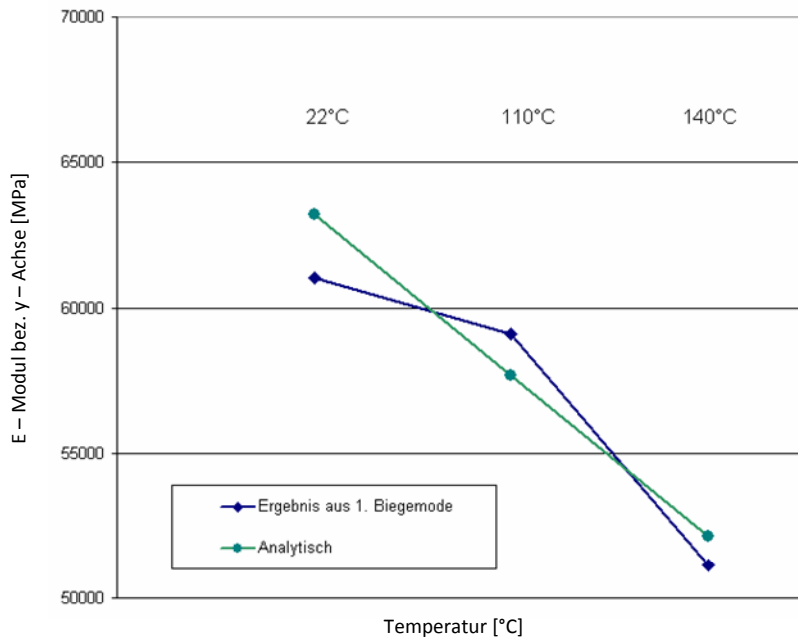


Abbildung 48: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab 2, bez. y - Achse

Der E – Modul der Außenisolation, einer Komponente im Verbund, nimmt mit der Temperatur ab. Führt man sich die Mischungsregel für den E – Modul quer zur Faserrichtung (Gl. 3.26) vor Augen, so bemerkt man, dass durch die Aufsummierung der mit dem Volumenanteil gewichteten Einzelkomponenten, bei der Verkleinerung eines E – Moduls auch der E – Modul des Verbundes sinkt. Der E – Modul des Verbundes, und damit des Statorstabes nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Das erklärt auch die Temperaturabhängigkeit der analytischen Lösung (s. auch Abbildung 22).



#### 4.4.8 Vergleich der Ergebnisse, exp. Modalanalyse – 4 PBV - Analytik

Da die 4 Punkt – Biegeversuche nur mit den Versuchsstäben Typ 1 durchgeführt wurden, gibt es auch im Folgenden nur einen Vergleich dieses Stabtyps mit der experimentellen Modalanalyse bzw. der Analytik, siehe Abbildung 49 und Abbildung 50.

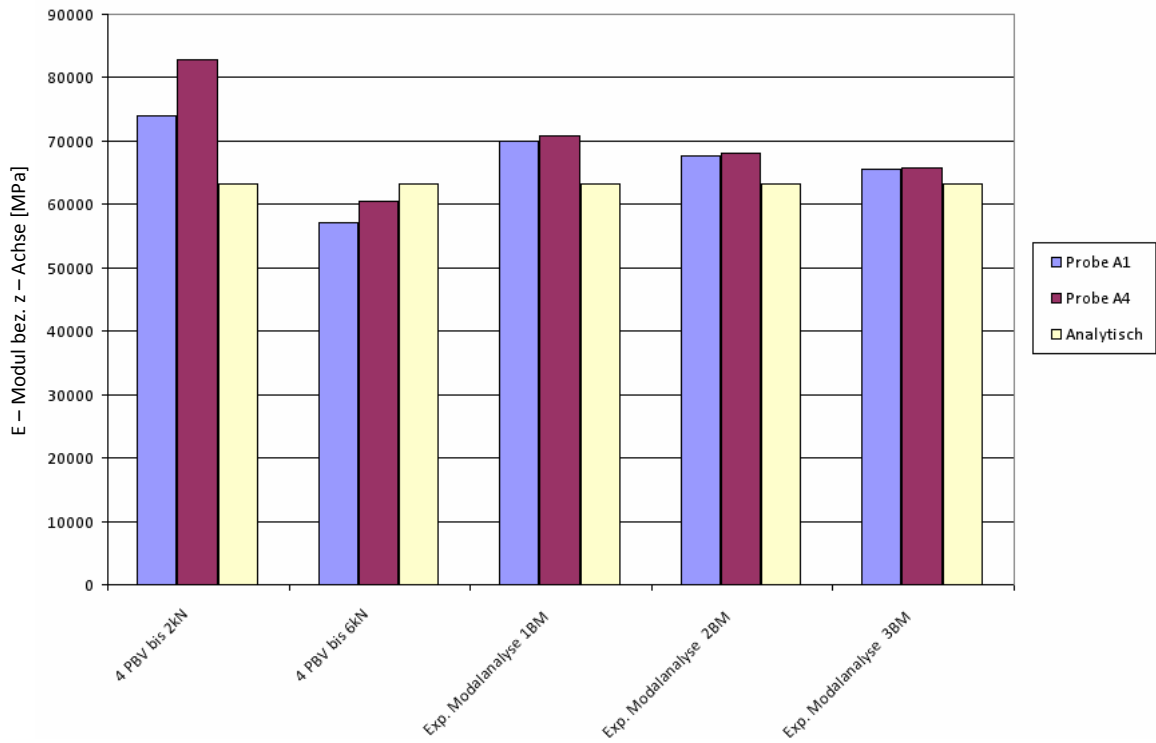


Abbildung 49: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – 4PBV – Analytik, Versuchsstab Typ 1 verpresst

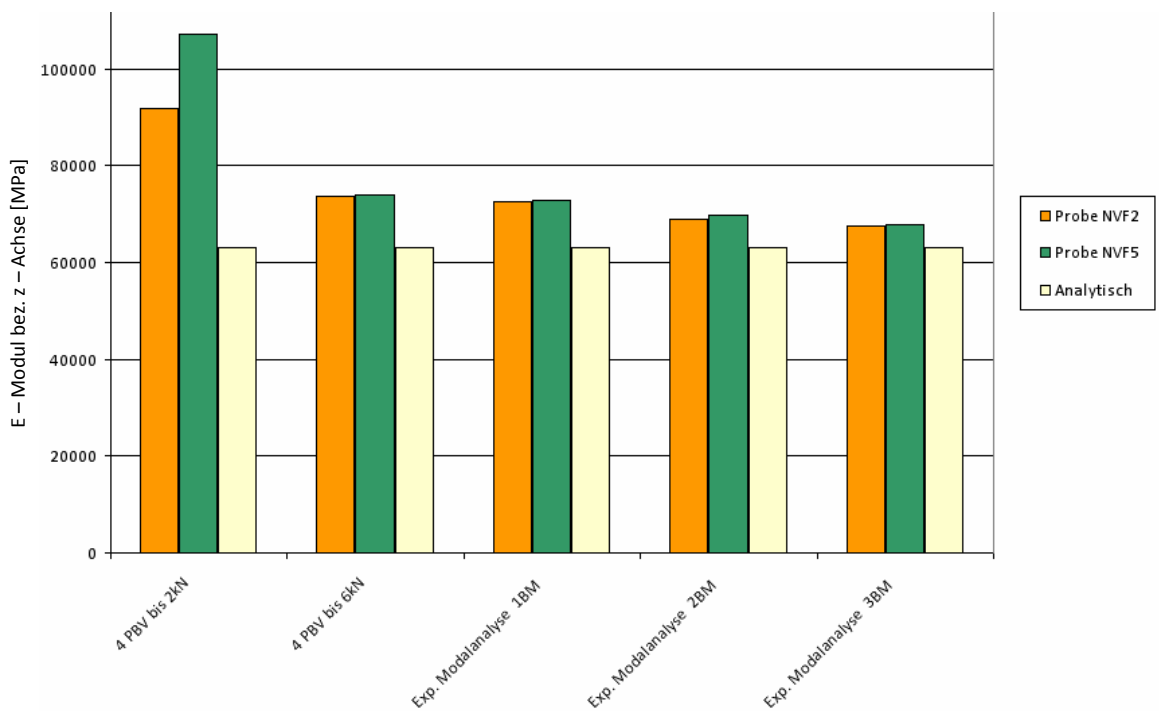


Abbildung 50: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – 4PBV – Analytik, Versuchsstab Typ 1 unverpresst

#### 4.4.9 Versuchsdiskussion

Die Vergleiche der Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse mit der gefundenen analytischen Lösung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Sowohl für Versuchsstab Typ 1 als auch für Versuchsstab Typ 2 zeigen sich qualitativ sehr hochwertige Ergebnisse.

Betrachtet man nur die Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse, so fällt auf das je nach Biegemode unterschiedliche E-Moduln ermittelt wurden. Theoretisch müsste aber immer der gleiche E-Modul das Ergebnis sein. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die Formel zur Ermittlung der Eigenfrequenz allgemein nur Gültigkeit für isotrope Werkstoffe mit homogener Masseverteilung, d.h. konstanter Dichte, besitzt. Dies trifft für unsere Probestäbe aber nicht exakt zu, da es sich um einen Faserverbundwerkstoff (orthotrop) handelt, der zudem auch keine gleichmäßige Masseverteilung besitzt. Es weichen daher die E-Moduln voneinander ab, wenn auch teilweise nur geringfügig.

Auch der Vergleich mit den 4 Punkt Biegeversuchen zeigt interessante Ergebnisse. Vor allem eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen ermittelt aus den 4 Punkt Biegeversuchen bis 6 kN. Ein weiterer Vorteil der experimentellen Modalanalyse gegenüber den 4 Punkt Biegeversuchen ist auch der, dass sowohl Eigenfrequenzen bezogen auf die z – als auch y – Achse ermittelt werden konnten. Dies war ja bei den Biegeversuchen nicht möglich da hier eine Beschädigung der Außenisolation auftrat.

Des Weiteren kommt hier der Einfluss der Temperatur auch sehr gut zum Vorschein. Mit zunehmender Temperatur nimmt gleichzeitig der E – Modul ab. Dies kommt auch mit der gefundenen Analytik sehr gut zum Ausdruck (vgl. Abbildung 22).

Damit sind die Versuche zur experimentellen Ermittlung des E – Moduls im Rahmen dieser Arbeit abgeschlossen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Versuchsergebnisse mit der analytischen Lösung sehr gut zusammenstimmen. Die gefundene Analytik wird also im nächsten Schritt im FE – Modell wieder angewendet. Es wird sich zeigen, dass auch die rechnerischen Modalanalysen qualitativ sehr gute Ergebnisse liefern. Siehe Netzstudie, graphischer Vergleich mit Messergebnissen (Kapitel 5.6 und 5.12).

## 4.5 Torsionspendelversuch

Mit Hilfe des Torsionspendelversuches wird der quer – quer Schubmodul der Statorstäbe experimentell ermittelt.

### 4.5.1 Theoretische Grundlagen (Fachhochschule Frankfurt am Main, 2010)

Der Torsionsversuch wird hier als dynamischer Versuch zur Ermittlung des Schubmoduls durchgeführt. Vorteil dieser Variante im Gegensatz zum statischen Versuch ist, dass neben der Periodendauer auch die Dämpfung mit gemessen bzw. bestimmt werden kann.

Wird beim dynamischen Torsionsversuch ein Körper aus der Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so führt er Drehschwingungen aus. D.h. ein Körper kann Drehschwingungen um seine Längsachse ausführen, wenn er durch ein Torsionsmoment um diese Achse aus dem Gleichgewicht gebracht wird. Man nennt den Körper dann Torsionspendel. Für einen Statorstab ist ein Aufbau wie in Abbildung 55 bis Abbildung 57 gezeigt möglich, der im Abschnitt 4.5.7 genauer beschrieben wird.

In den folgenden Absätzen wird der theoretische Hintergrund des klassischen Torsionspendelversuch behandelt, sowie der Formelapparat zur Ableitung des Schubmoduls.

Für die Periodendauer eines Torsionspendels der Drehschwingung ausführt gilt:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{c_T}} \quad (\text{Gl. 4.4})$$

T ... Periodendauer [s]

$\Theta$  ... Massenträgheitsmoment [kg.m<sup>2</sup>]

$c_T$  ... Torsionssteifigkeit [Nm]

Die Periodendauer wird dabei aus der Frequenz mit der bekannten Beziehung

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{Gl. 4.5})$$

berechnet.

Die Schwingungsdauer hängt vom rück treibenden Moment (Torsionssteifigkeit) und dem Trägheitsmoment der schwingenden Anordnung ab.

4.5.2 Verformung infolge Torsion, allgemeine Herleitung der Torsionssteifigkeit (Ferber, F. 2003)

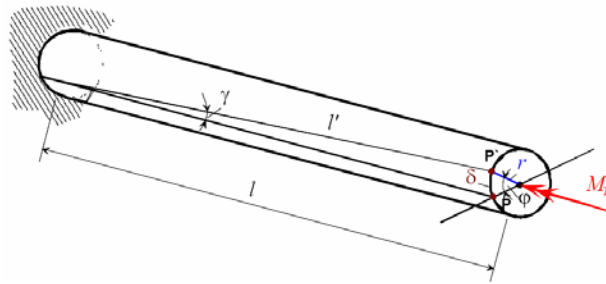


Abbildung 51: Tordierter, verdrehter Stab

Die maximale Schubspannung nach Hooke:  $\tau_{\max} = G \cdot \gamma$  (Gl. 4.6)

Mit der Bedingung für die Schubspannung:  $\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{M_T \cdot r}{I_p}$  (Gl. 4.7)

Gl. 4.7 mit Gl. 4.6 gleichgesetzt gibt:  $G \cdot \gamma = \frac{M_T \cdot r}{I_p}$  (Gl. 4.8)

und durch Umstellung wird der Winkel:  $\gamma = \frac{M_T \cdot r}{I_p \cdot G}$  (Gl. 4.9)

mit der geometrischen Bedingung:  $\gamma \cdot l = r \cdot \varphi$  (Gl. 4.10)

folgt:  $\varphi = \gamma \cdot \frac{l}{r}$  (Gl. 4.11)

mit Gl. 4.9 wird der Verdrehwinkel infolge Torsion:  $\varphi = \frac{M_T \cdot l}{I_p \cdot G}$  (Gl. 4.12)

Die Torsionssteifigkeit ist definiert mit:  $c_T = \frac{M_T}{\varphi}$  (Gl. 4.13)

Eingesetzt und umgeformt aus Gl. 4.12 ergibt sich für  $c_T$ :  $c_T = \frac{I_p \cdot G}{l}$  (Gl. 4.14)

Gleichung 4.14 besitzt die Gültigkeit für beliebige Querschnitte, auch für den Rechtecksquerschnitt des Statorstabes.  $I_p$  entspricht bei Kreisquerschnitten  $I_t$ , wobei auch für diesen Fall, des Torsionspendels, für reine Torsion die Beziehung nach *Baumgart, R. 2009*

$$c_T = \frac{I_t \cdot G}{l} \quad (\text{Gl. 4.15})$$

gilt.

D.h. durch Messung der Periodendauer/Frequenz des Torsionspendels und bei bekanntem Trägheitsmoment kann gemäß Gl. 4.15 über die Torsionssteifigkeit auf den Schubmodul der Stäbe zurückgerechnet werden.

#### 4.5.3 Bestimmung des Massenträgheitsmomentes

Um ein qualitativ hochwertiges Ergebnis zu erhalten ist die genaue Bestimmung des Massenträgheitsmomentes der schwingenden Anordnung von besonderer Wichtigkeit.

Deshalb werden zur Ermittlung des Massenträgheitsmomentes 2 Messungen durchgeführt. Bei der ersten Messung wird die Anordnung wie oben beschrieben ausgelenkt und die Frequenz gemessen. Die zweite Messung erfolgt dann mit einem so genannten Hilfskörper. Dabei wird zusätzlich eine Masse mit bekanntem Massenträgheitsmoment auf die Anordnung angebracht. Wieder wird die Frequenz/Periodendauer gemessen. Bei konstanter Torsionssteifigkeit kann das Massenträgheitsmoment wie folgt berechnet werden:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_1}{c_T}} \quad ; \quad T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{c_T}} \quad (\text{Gl. 4.16})$$

$T_1$  ... Periodendauer des Torsionspendels [s]

$T_2$  ... Periodendauer des Torsionspendels mit Hilfskörper [s]

$\Theta_1$  ... Massenträgheitsmoment des Torsionspendels [ $\text{kgm}^2$ ]

$\Theta_2$  ... Massenträgheitsmoment des Hilfskörpers [ $\text{kgm}^2$ ]

$c_T$  ... Torsionssteifigkeit des Torsionspendels [Nm]

Werden die beiden Periodendauern  $T_1$  und  $T_2$  ins Verhältnis gesetzt (d.h. es wird eine dimensionslose Größe gebildet), so kann daraus das unbekannte Massenträgheitsmoment  $\Theta_1$  ermittelt werden:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1}} = \sqrt{1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_1}} \quad (\text{Gl. 4.17})$$

Umformen der Gleichung 4.17 gibt das Massenträgheitsmoment des Torsionspendels:

$$\Theta_1 = \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \cdot \Theta_2 \quad (\text{Gl. 4.18})$$

#### 4.5.4 Bestimmung des Schubmoduls

Nach der Messung der Periodendauer und der Bestimmung des Trägheitsmomentes kann nun der Schubmodul  $G$  der Versuchsstäbe wie folgt bestimmt werden (umformen auf  $c_T$  aus Gl. 4.16 und in Gl. 4.15 eingesetzt):

$$G = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \Theta_1 \cdot l}{I_t \cdot T_1^2} \quad (\text{Gl. 4.19})$$

$G$  ... Schubmodul [MPa]

$I_t$  ... Torsionsflächenträgheitsmoment Rechteck [ $\text{mm}^4$ ]

$l$  ... Länge des Torsionsstabes [m]

$T_1$  ... Periodendauer des Torsionspendels [s]

$\Theta_1$  ... Massenträgheitsmoment Torsionspendel [ $\text{kgm}^2$ ]

#### 4.5.5 Bestimmung des Massenträgheitsmoment des Hilfskörpers

##### 4.5.5.1 Theoretische Grundlagen

Ziel dieses Versuchs ist die experimentelle Ermittlung des Massenträgheitsmoments  $\Theta_2$  des Hilfskörpers mit der Masse  $m_H$  um dessen Hochachse.

Der Versuch wird mit Hilfe eines Pendels durchgeführt. Dabei wird der Hilfskörper auf 3 Stahlseilen (masselos) aufgehängt und um dessen Hochachse ausgelenkt. Die Periodendauer von 10 Drehschwingungen wird gemessen und daraus das Massenträgheitsmoment bestimmt.

In den folgenden Absätzen wird die theoretische Herleitung des Massenträgheitsmoments genauer erörtert:

- $J_p$  Massenträgheitsmoment der Platte
- $J_z$  Massenträgheitsmoment eines Gegenstands
- $J_{ges}$  Gemessenes Massenträgheitsmoment
- $\varphi$  Drehwinkel des Pendels
- $r_s$  Radius der Seilanbindung
- $l$  Länge des Seils
- $\alpha$  Seilwinkel
- $F_G$  Gewichtskraft des Pendels
- $F_U$  Umfangskraft
- $s$  Bogenlänge
- $r_s$  Radius bis zur Befestigung

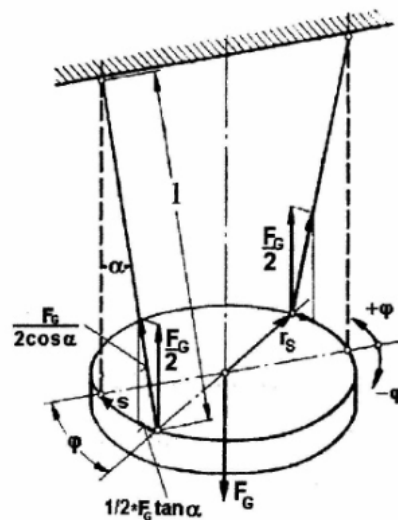


Abbildung 52: Pendelversuch, Masse auf 2 Seilen aufgehängt (FALA, 2008)

Geometrische Beziehung:

$$s = l \cdot \alpha = r_s \cdot \varphi \rightarrow \alpha = r_s \cdot \frac{\varphi}{l} \quad (\text{Gl. 4.20})$$

Dynamische Gleichgewichtsbeziehung:

$$\sum M_z = 0 = \Theta_2 \cdot \ddot{\varphi} + F_u \cdot r_s \quad (\text{Gl. 4.21})$$

Linearisierung für kleine Winkel:  $\tan \alpha \approx \alpha$  ;  $\sin \alpha \approx \alpha$  ;  $\cos \alpha \approx 1$

$$\rightarrow F_u = F_G \cdot \alpha \quad (\text{Gl. 4.22})$$

Gl. 4.20 und Gl. 4.22 in Gl. 4.21 ergibt:

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{F_G}{\Theta_2} \cdot \frac{r_s^2}{l} \cdot \varphi \quad (\text{Gl. 4.23})$$

Normalform der Schwingungsgleichung:

$$0 = \ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi \quad (\text{Gl. 4.24})$$

Damit folgt aus Gleichung 4.24 für  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \frac{F_G \cdot r_s^2}{\Theta_2 \cdot l} \quad (\text{Gl. 4.25})$$

Mit  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$  folgt aus Gl. 4.25 umgeformt auf das Massenträgheitsmoment:

$$\Theta_2 = \frac{F_G \cdot T^2 \cdot r_s^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} \quad (\text{Gl. 4.26})$$

#### 4.5.5.2 Versuchsaufbau

Der Hilfskörper mit der Masse  $m_H$  wurde mit 3 dünnen (masselosen) Stahlseilen aufgehängt. Die Masse des Hilfskörpers ist mit einer Kranwaage genau bestimmt worden. Da beim Torsionspendelversuch der Hilfskörper mit Hilfe von 2 Schrauben M24 x 320 am Torsionspendel befestigt wurden, werden diese auch zur Masse des Hilfskörpers hinzugerechnet bzw. das Pendel mit Masse + Schrauben aufgebaut, siehe Abbildung 53.

Technische Daten:

$m_H = 110,0 \text{ kg}$

$r_s = 232 \text{ mm}$

$l = 1284 \text{ mm}$

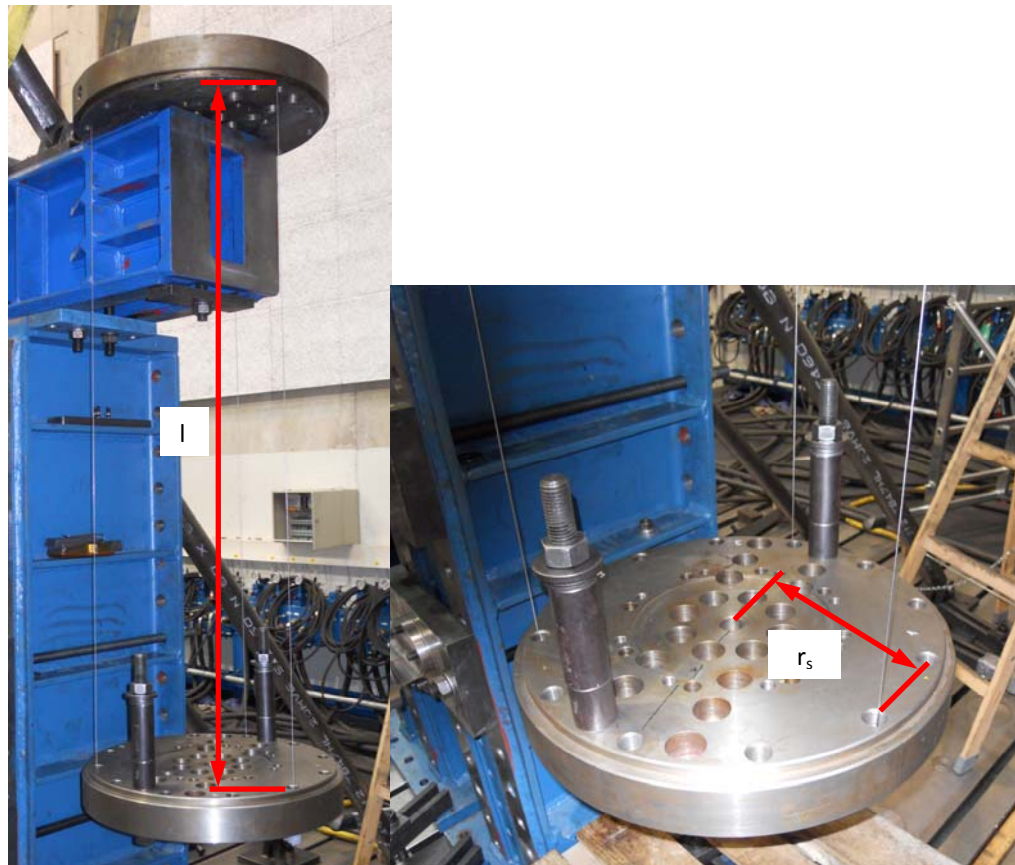


Abbildung 53: Pendelversuch zur Bestimmung des Massenträgheitsmoments des Hilfskörpers

#### 4.5.5.3 Versuchsdurchführung

Nachdem die Masse des Hilfskörpers exakt in der Waage, horizontal, positioniert wurde, ging es als nächstes darum die Periodendauer  $T$  von 10 Drehschwingungen zu ermitteln. Dazu ist der Hilfskörper mit einem kleinen Verdrehwinkel (damit die Annahmen der zuvor gezeigten Herleitung ihre Gültigkeit besitzen) ausgelenkt, und die Periodendauer von 10 Drehschwingungen per Hand gestoppt worden. Um Messfehler möglichst zu vermeiden bzw. gering zu halten, wurden jeweils 10 Durchgänge dokumentiert.

#### 4.5.5.4 Versuchsauswertung

Aus den 10 Versuchsdurchgängen wird in weiterer Folge der Mittelwert gebildet und dieser dann durch 10 dividiert um auf die Periodendauer  $T$  einer Drehschwingung zu kommen.

	Periodendauer $T_{10}$ [s]
Versuch 1	19,5
Versuch 2	19,3
Versuch 3	19,8
Versuch 4	19,7
Versuch 5	19,9
Versuch 6	19,6
Versuch 7	19,8
Versuch 8	19,9
Versuch 9	19,6
Versuch 10	19,8
Mittelwert	19,7

Tabelle 10: Versuchsdaten Trifilarpendel

Daraus folgt für die Periodendauer  $T$ , 1 Drehschwingung:  $T = 1,97\text{s}$

Das Massenträgheitsmoment des Hilfskörpers errechnet sich gemäß Gl. 4.26 zu:

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= \frac{F_G \cdot T^2 \cdot r_s^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} \\ \Theta_2 &= \frac{110,0 \cdot 9,81 \cdot 1,97^2 \cdot 0,232^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 1,284} \\ \Theta_2 &= 4,45 \cdot \text{kgm}^2\end{aligned}$$



#### 4.5.6 Proben

Es wurden ausschließlich Versuchsstäbe des Typs 2, lt. Abbildung 54, mit einer Länge von 1000mm geprüft. Dabei standen 3 Proben zur Verfügung.



Abbildung 54: Proben Torsionspendelversuch, Versuchsstab Typ 2

#### 4.5.7 Versuchsaufbau und Messwerkzeuge

Die Versuchsstäbe werden vertikal aufgehängt und eingespannt. Zusätzlich wird eine Schwungmasse am Ende des Versuchsstabes befestigt. Auf der Schwungmasse wurden 4 Beschleunigungssensoren, jeweils gegenüberliegend, befestigt. Um die Versuchsstäbe nicht zu beschädigen wurde sowohl für die obere Aufhängung aber vor allem für die Verbindung der Schwungmasse mit dem Versuchsstab eine geschraubte Klemmverbindung konstruiert.

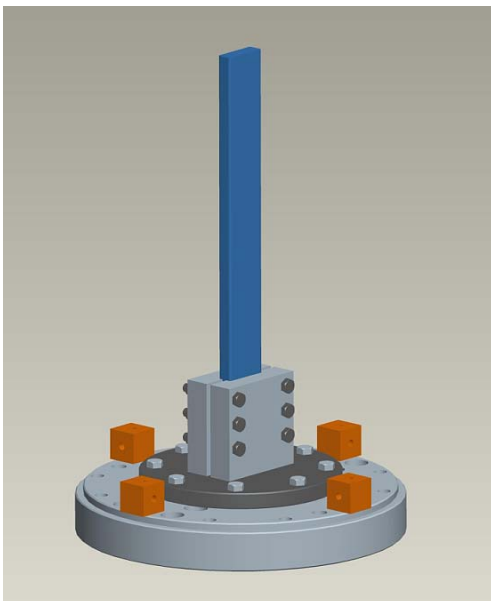


Abbildung 55: CAD-Modell Torsionspendel

In Abbildung 55 ist das CAD Modell des Torsionspendels dargestellt. Die obere Einspannung ist hier nicht eingezeichnet, da hier der Stab in einer bereits vorhandenen Einspannstelle befestigt wurde. Deutlich zu erkennen die Klemmbacken mit denen die Schwungmasse am Stab befestigt wurde. Auf der ca. 110kg schweren Schwungmasse wurden, orange eingezeichnet, die Beschleunigungssensoren platziert.

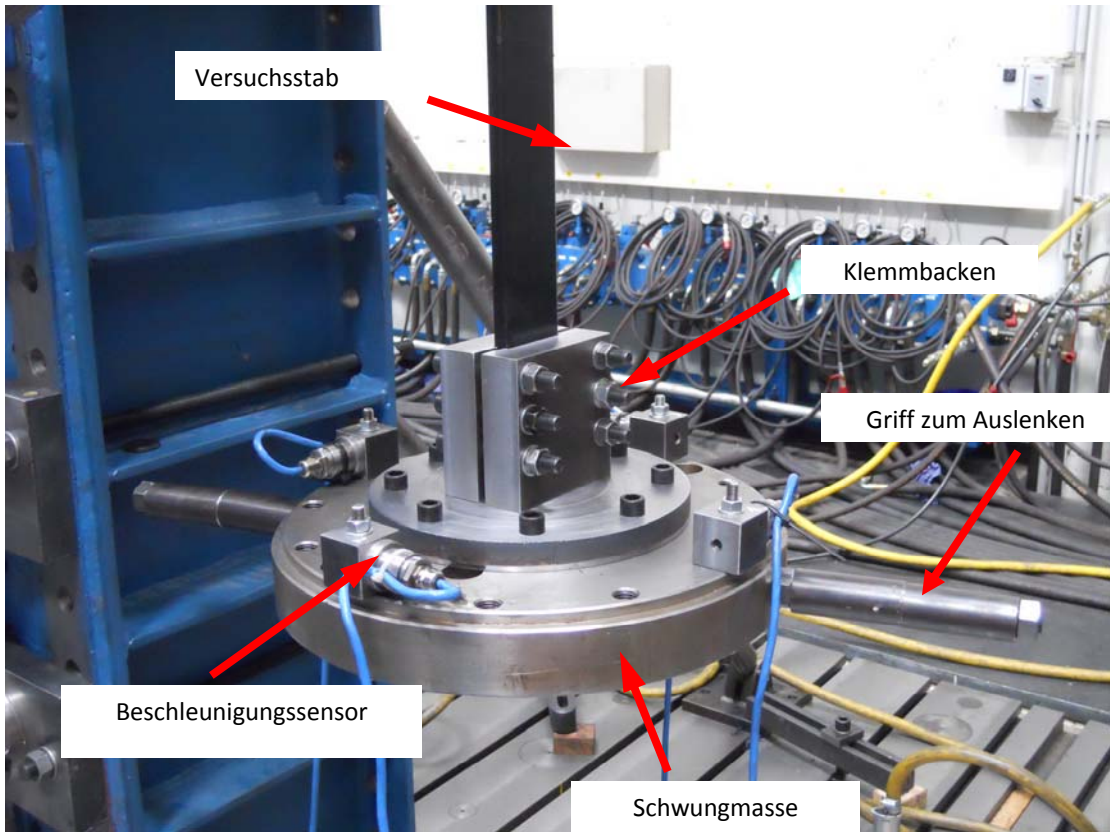


Abbildung 56: Torsionspendel



Abbildung 57: links: Torsionspendel; rechts: Torsionspendel – mit Hilfskörper zur Massenträgheitsmomentbestimmung

In Abbildung 56 erkennt man die zusätzlich angebrachten Griffe an der Schwungmasse. Diese dienen zum einfachen händischen Auslenken der Versuchsanordnung. Zudem sieht man in Abbildung 57 den Versuchsaufbau zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes mit Hilfskörper. Es wurde also wie in der Theorie (unter 4.5.3) beschrieben eine 2. Schwungmasse (identisch zur 1.) angebracht, und in einem vom Versuchsablauf analogen Torsionsversuch die Frequenz dieser Anordnung gemessen. Die Beschleunigungsaufnehmer nahmen hierzu die Tangentialbeschleunigungen an 4 Stellen auf.

#### 4.5.8 Versuchsablauf

Der Torsionsversuch wurde vom 11.08. – 12.08.2010 in der Schwingprüfhalle des Instituts für Leichtbau der TU Graz durchgeführt. An diesen beiden Tagen wurde die gesamte Anordnung aufgebaut, inkl. Messinstrumenten, sowie die Versuche mit 3 Versuchsstäben des Typs 2 durchgeführt. Zusätzlich wurde der Versuch mit einem angebrachten Hilfskörper zur Ermittlung des Massenträgheitsmomentes der schwingenden Anordnung durchgeführt.

Dabei wurde also mit Hilfe der befestigten Griffe die Schwungmasse per Hand verdreht und dann plötzlich losgelassen. Die Beschleunigungssensoren zeichneten dann die Tangentialbeschleunigung während des Ausschwingvorganges auf. Der Versuch wurde pro Versuchsstab ca. 10x durchgeführt, wobei für die Auswertung die 5 Versuche herangezogen, bei denen die Biegeschwingungen am kleinsten waren. Da der Stab um die z – Achse weniger steif, aufgrund des wesentlich kleineren Flächenträgheitsmoments im Vergleich zu jenem bezogen auf die y – Achse, ist, waren deutliche Biegeschwingungen zu erkennen. Wobei letztendlich dies auch kein Problem war, da diese bei der abschließenden Versuchsauswertung, durch addieren der Signale der gegenüberliegenden Beschleunigungssensoren herausgerechnet wurden.

#### 4.5.9 Versuchsauswertung

Die Daten der Beschleunigungsaufnehmer wurden mit dem Programmpaket DIAdem von National Instruments wie folgt ausgewertet:

Legende:

x – Achse: Zeit des Schwingversuches [ms]

y – Achse: Tangentialbeschleunigung [ $m/s^2$ ]

##### 4.5.9.1 Vorgangsweise

## 1. Schritt

Einlesen der Daten aller 4 Beschleunigungsaufnehmer. Nach dem Einlesen werden die Signale der beiden gegenüberliegenden Aufnehmer addiert. Dadurch erhält man die Abklingkurve einer reinen Torsionsschwingung ohne den Einfluss von Biegeschwingungen, die natürlich gleichzeitig auftraten.

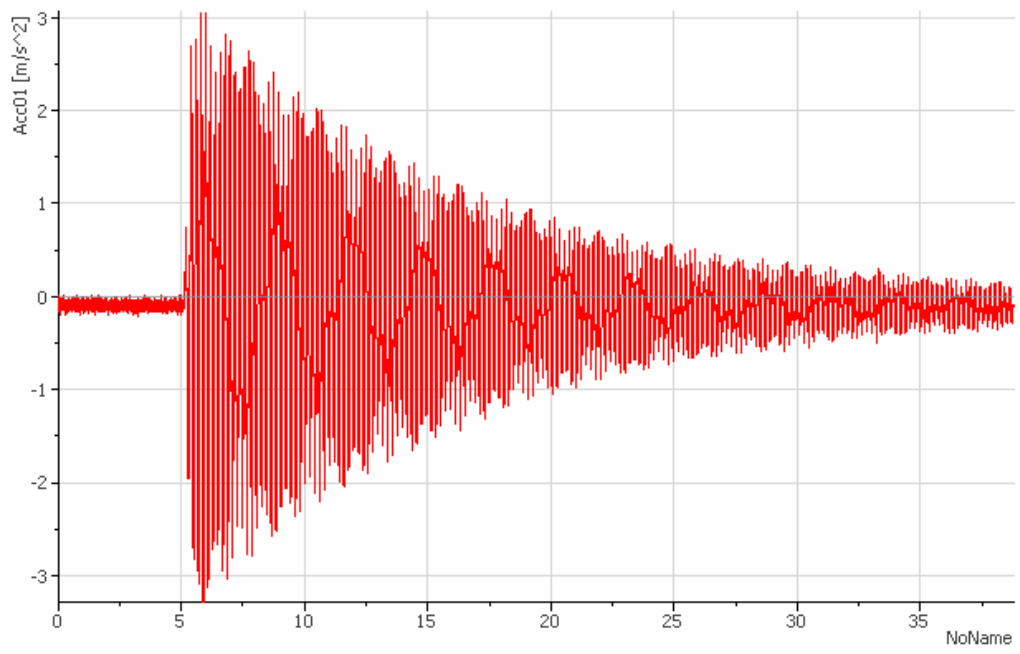


Abbildung 58: Torsionspendelversuch – Daten Beschleunigungsaufnehmer 1

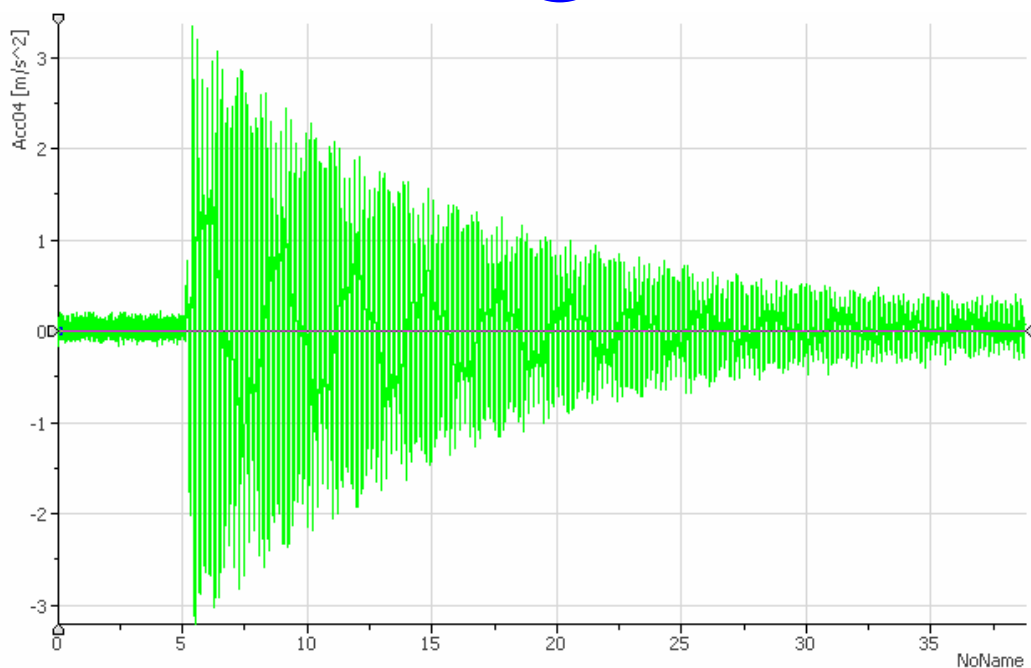


Abbildung 59: Torsionspendelversuch – Daten Beschleunigungsaufnehmer 2

Diese beiden Signale addiert, Abbildung 58 + Abbildung 59, geben die Kurve der reinen Torsionsschwingung, Abbildung 60:

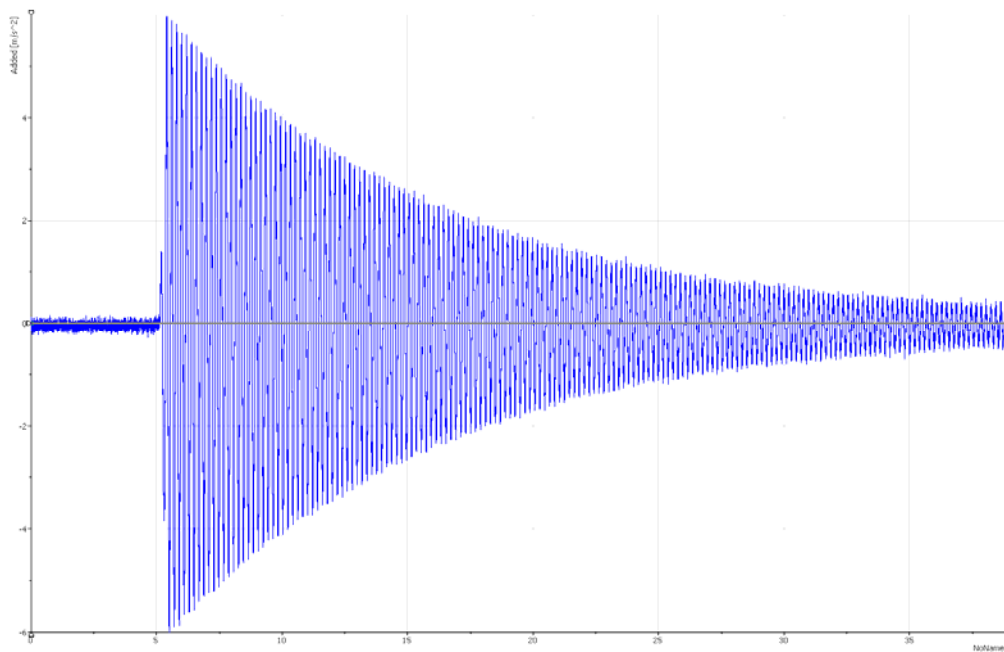
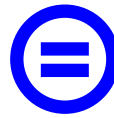


Abbildung 60: Torsionspendel - Torsionsschwingung

Dasselbe wird auch mit den Daten der beiden anderen, auch gegenüberliegenden Beschleunigungsaufnehmer durchgeführt.

## 2. Schritt

Im nächsten Schritt wird die durch Addition erhaltene Kurve einer FFT-Analyse unterworfen. D.h. es erfolgt eine Transformation in den Frequenzbereich zur Bestimmung der Frequenz der Torsionsschwingung. Die folgende Abbildung 61 zeigt das Ergebnis der FFT – Analyse der Kurve aus Abbildung 60.

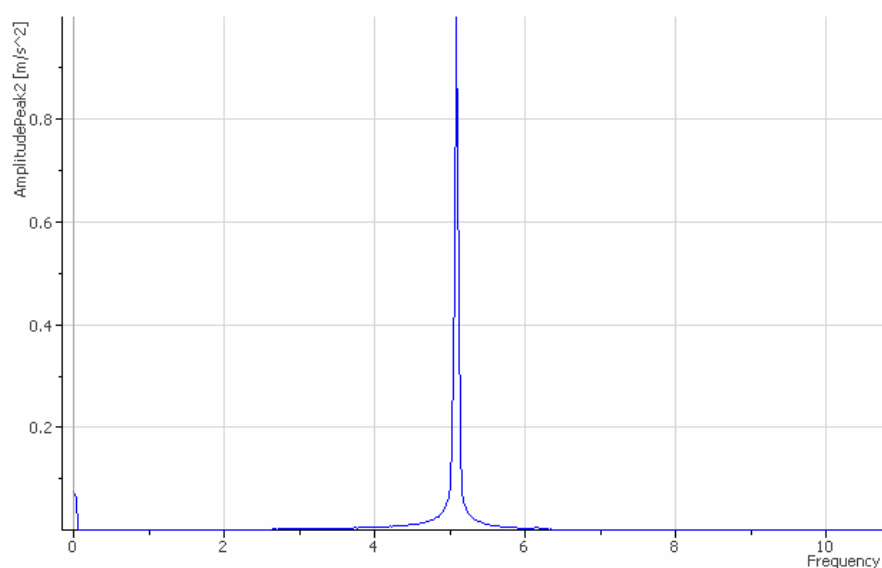


Abbildung 61: Ergebnis der FFT – Analyse der Torsionsschwingung

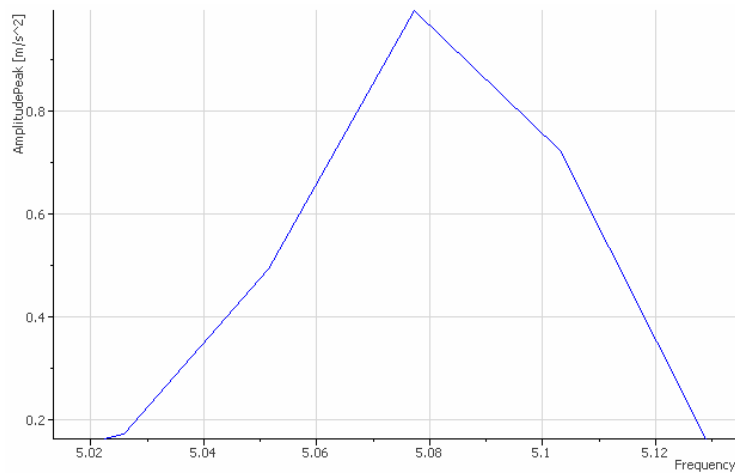


Abbildung 62: Zoom - Genaue Bestimmung der Drehfrequenz der Torsionsschwingung

In der vergrößerten Ansicht des Ergebnisses der FFT – Analyse, Abbildung 62, lässt sich die Schwingfrequenz exakt ablesen.

### 3. Schritt

Da das Signal nicht völlig rauschfrei ist, dargestellt in Abbildung 63, wird es zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements und der Dämpfung digital gefiltert (Tiefpassfilter, Grenzfrequenz: 40Hz), Abbildung 64.

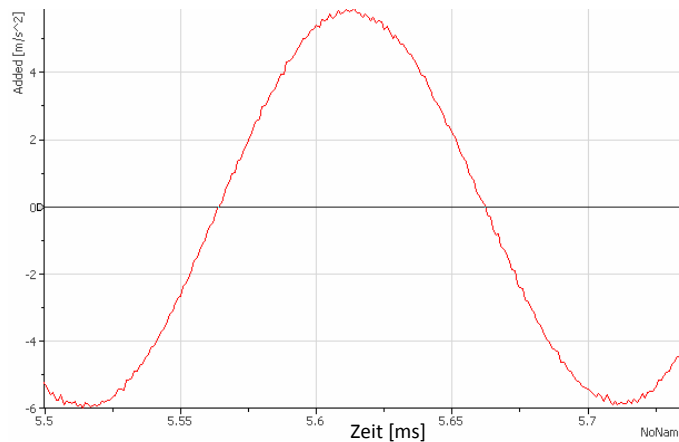


Abbildung 63: Torsionspendelversuch - Signal ungefiltert

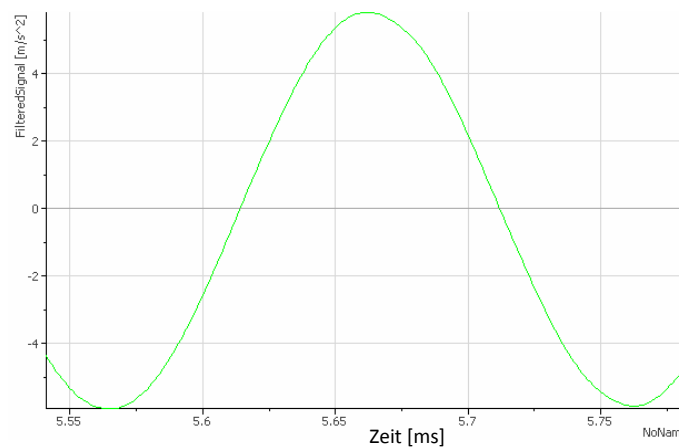


Abbildung 64: Torsionspendelversuch – Signal digital gefiltert

#### 4. Schritt

Aus der digital gefilterten Kurve werden nun das logarithmische Dekrement und die Dämpfung folgendermaßen bestimmt:

Logarithmisches Dekrement: 
$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (\text{Gl. 4.27})$$

Wobei  $A_n$  und  $A_{n+1}$  zwei aufeinander folgende gleichsinnige Amplituden bedeuten. Der Quotient zweier aufeinander folgender Amplituden ist konstant.

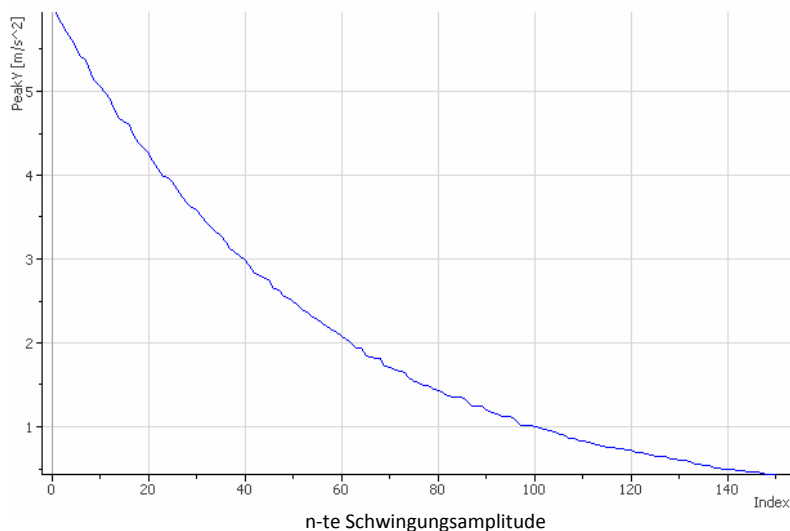
Dämpfungsgrad: 
$$g = \frac{\Lambda}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 + \Lambda^2}} \quad (\text{Gl. 4.28})$$

Für kleine  $\Lambda$  gilt mit guter Näherung für den Dämpfungsgrad:

$$g = \frac{\Lambda}{2 \cdot \pi} \quad (\text{Gl. 4.29})$$

Mit Hilfe des logarithmischen Dekrements lässt sich nun der Dämpfungsgrad gemäß Gl. 4.30 leicht bestimmen.

Zur einfachen Berechnung wird die Abklingkurve dargestellt, aus der 2 aufeinander folgende Amplituden abgelesen werden können. Dazu werden die Amplitudenwerte neben der graphischen Darstellung (s. Abbildung 65) auch noch in Tabellenform, rechts neben der Abbildung, ausgegeben. Wobei auf der x – Achse der graphischen Darstellung die ersten n-Schwingungsamplituden aufgetragen sind.



Ausge...	
Name	PeakY
Nummer	36
Länge	155
Einheit	m/s^2
Kanalinhalte	
1	6.84780238867119
2	6.73395864871359
3	6.59741673686309
4	6.50257869284236
5	6.4068292554141
6	6.27076621637454
7	6.19592024885807
8	6.09473923769958
9	5.96615992033622
10	5.91474812527433
11	5.79063920297155
12	5.6954910513888
13	5.60701711260687
14	5.52835494935854
15	5.41609915163089
16	5.34750114565788
17	5.25516882424725
18	5.16525555400295
19	5.07311456919804
20	5.02335307784764
21	4.89057597679847
22	4.83452219278278

Abbildung 65: Torsionspendelversuch – Amplitudenabklingkurve

Im folgenden Kapitel wurden die Daten mit DIAdem ausgewertet und zusammengefasst.

#### 4.5.9.2 Auswertungsergebnisse Torsionspendelversuch

##### Probe 1

	Frequenz f [Hz]	Periodendauer T [s]	Log. Dekrement $\Lambda$	Dämpfungsgrad $\mathcal{D}$
Versuch 01	5,092	0,1964	0,0155	0,0025
Versuch 02	5,078	0,1969	0,0152	0,0024
Versuch 03	5,093	0,1963	0,0156	0,0025
Versuch 04	5,096	0,1962	0,0157	0,0025
Versuch 05	5,082	0,1968	0,0158	0,0025
Mittelwert	5,088	0,1965	0,0157	0,0025

Tabelle 11: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 1

##### Probe 2

	Frequenz f [Hz]	Periodendauer T [s]	Log. Dekrement $\Lambda$	Dämpfungsgrad $\mathcal{D}$
Versuch 01	5,062	0,1975	0,0150	0,0024
Versuch 02	5,060	0,1976	0,0141	0,0022
Versuch 03	5,051	0,1980	0,0142	0,0023
Versuch 04	5,065	0,1974	0,0162	0,0026
Versuch 05	5,056	0,1978	0,0144	0,0023
Mittelwert	5,059	0,1977	0,0148	0,0024

Tabelle 12: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 2

##### Probe 3

	Frequenz f [Hz]	Periodendauer T [s]	Log. Dekrement $\Lambda$	Dämpfungsgrad $\mathcal{D}$
Versuch 01	5,072	0,1972	0,0165	0,0026
Versuch 02	5,066	0,1974	0,0163	0,0026
Versuch 03	5,061	0,1976	0,0179	0,0029
Versuch 04	5,065	0,1974	0,0145	0,0023
Versuch 05	5,061	0,1976	0,0144	0,0023
Mittelwert	5,065	0,1974	0,0159	0,0025

Tabelle 13: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 3

##### Probe 3 mit Hilfskörper

	Frequenz f [Hz]	Periodendauer T [s]
Versuch 01	3,779	0,2646
Versuch 02	3,772	0,2651
Versuch 03	3,780	0,2646
Versuch 04	3,782	0,2644
Versuch 05	3,771	0,2652
Mittelwert	3,777	0,2648

Tabelle 14: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 3 mit Hilfskörper



#### 4.5.9.3 Amplitude über dem Dämpfungsgrad

Als Ergänzung zu den oben angeführten Messungen mit dem Torsionspendel wird in diesem Kapitel ein Sachverhalt dargestellt, der bei Ausschwingvorgängen beobachtet werden kann. Dies ist weniger für die Versuchsauswertung des Schubmoduls relevant, als für Darstellung eines Zusammenhangs zwischen Dämpfung und Schwingungsamplitude.

Vorweg muss auch bemerkt werden, dass dies in einem sehr kleinen Bereich stattfindet und die Abbildung 66 und Abbildung 67, bewusst sehr übertrieben gezeichnet wurden. Auch muss bemerkt werden, dass die Verläufe eine Tendenz zeigen sollen. Betrachtet man alle Versuch genauer, so kann man nicht pauschal feststellen, dass bei einer bestimmten Amplitude sich ein dazugehöriger Dämpfungsgrad einstellt. Jedoch entspricht es der Bandbreite in dem sich der Dämpfungsgrad bewegt (daraus wurde bereits ein „mittlerer“, stellvertretender Dämpfungsgrad, s. Kapitel vorher, berechnet).

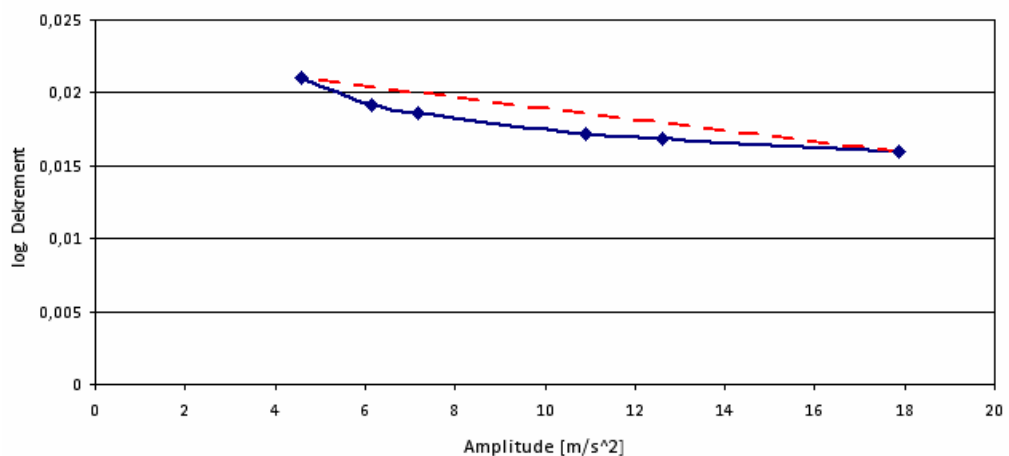


Abbildung 66: Log. Dekrement als Funktion der Amplitude

Theoretisch ist das Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden konstant. Nach Abbildung 66 ist aber eine nichtlineare Änderung (blau, im vgl. dazu rot: linear) festzustellen. Dies ist auf den stärkeren Einfluss der Luftreibung bei kleineren Amplituden zurückzuführen. Außerdem handelt es sich um eine sehr stark vergrößerte Darstellung.

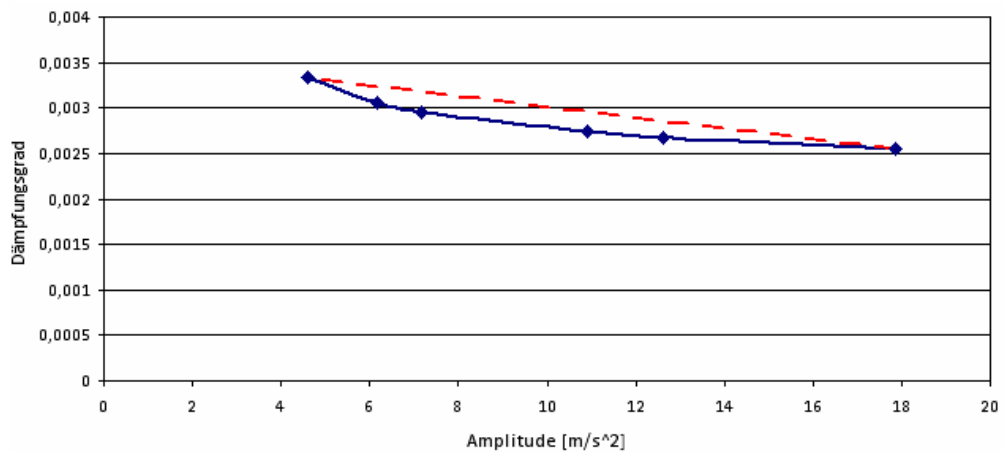


Abbildung 67: Amplitude über Dämpfungsgrad

Nachdem sich das logarithmische Dekrement mit der Amplitude ändert, ändert sich natürlich analog dazu auch der Dämpfungsgrad. Dieser ist nicht konstant und auch seine Änderung ist nicht linear, vgl. Abbildung 67, blau: tatsächliche Änderung, rot: linearer Verlauf. Die Nichtlinearität kann darauf zurückgeführt werden, dass bei höherer Frequenz, größeren Amplituden, die Luftreibungseinflüsse kleiner sind als bei kleinerer Amplitude. Demnach wird der Torsionsstab in diesem Versuch am Ende seines Ausschwingvorganges stärker von der Luft gedämpft als zu Beginn der Auslenkung.

Theoretisch kann neben der Luftreibung auch die Materialdämpfung selbst ein Grund für die nichtlineare Änderung der Dämpfung sein. Bei geringen Amplituden könnte (Mikro-)Reibung zwischen den Stabkomponenten stärker ins Gewicht als bei großen Amplituden fallen. Die errechnete Dämpfung würde daher mit sinkender Amplitude steigen.

#### 4.5.9.4 Versuchsergebnis Versuchsstab Typ 2

Wie bereits oben erwähnt wurde Versuchsstab Typ 2 dem Torsionspendelversuch unterzogen.

Zur Verallgemeinerung der Ergebnisse für den Versuchsstab Typ 2 werden die Auswertungsergebnisse aus Kapitel 4.7.9.2, Tabelle 11 – 13, der einzelnen Proben (Mittelwert aus 5 Versuchen) noch einmal gemittelt.

	Frequenz f [Hz]	Periodendauer T [s]	Log. Dekrement $\Lambda$	Dämpfungsgrad $\mathcal{D}$
Versuchsstab Typ 2	5,070	0,1972	0,0155	0,0025

Tabelle 15: Torsionspendelversuch – Ergebnis, Eigenschaften Versuchsstab Typ 2

#### 4.5.9.5 Bestimmung des Massenträgheitsmoments des Torsionspendel

Das Massenträgheitsmoment kann nun nach Gl. 4.18 bestimmt werden.

Periodendauer, Torsionspendel (s. Tabelle 15):  $T_1 = 0,1972 \text{ s}$

Periodendauer, Torsionspendel mit Hilfskörper (s. Tabelle 14):  $T_2 = 0,2648 \text{ s}$

Massenträgheitsmoment Hilfskörper:  $\Theta_2 = 4,45 \text{ kgm}^2$

$$\Theta_1 = \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \cdot \Theta_2$$

$$\Theta_1 = \frac{0,1973^2}{0,2648^2 - 0,1973^2} \cdot 4,45$$

$$\Theta_1 = 5,55 \cdot \text{kgm}^2$$

#### 4.5.9.6 Bestimmung des Schubmoduls $G_{yz}$ (quer – quer)

Nach Gl. 4.19 ergibt sich der Schubmodul zu:

$$G = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \Theta_1 \cdot l}{I_t \cdot T_1^2}$$

Torsionsflächenträgheitsmoment Rechtecksquerschnitt Versuchsstab Typ 1:  $I_t = 179840 \text{ mm}^4$

Einspannlänge Versuchsstab (lt. Abbildung 68):  $l = 734 \text{ mm}$

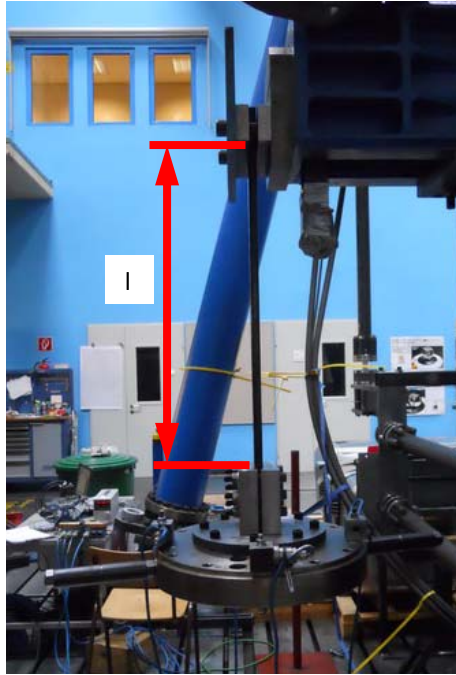


Abbildung 68: Torsionspendel – Einspannlänge

In die Gleichung 4.19 Zahlenwerte eingesetzt, liefert den Schubmodul  $G_{yz}$  des Versuchsstabes Typ 2:

$$G_{yz} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 5550 \cdot 734}{179840 \cdot 0,1973^2}$$

$$G_{yz} = 22972 \cdot \text{MPa}$$

#### 4.5.9.7 Vergleich Schubmodul Analytische Lösung - Torsionspendel

Laut Kapitel 3.10, Ausgabedaten der analytischen Lösung Versuchsstab Typ 2, liegt der analytisch ermittelte E – Modul bei 23409 MPa. Der Ergebnisvergleich Torsionspendelversuch - Analytik wird in Abbildung 69 graphisch dargestellt.

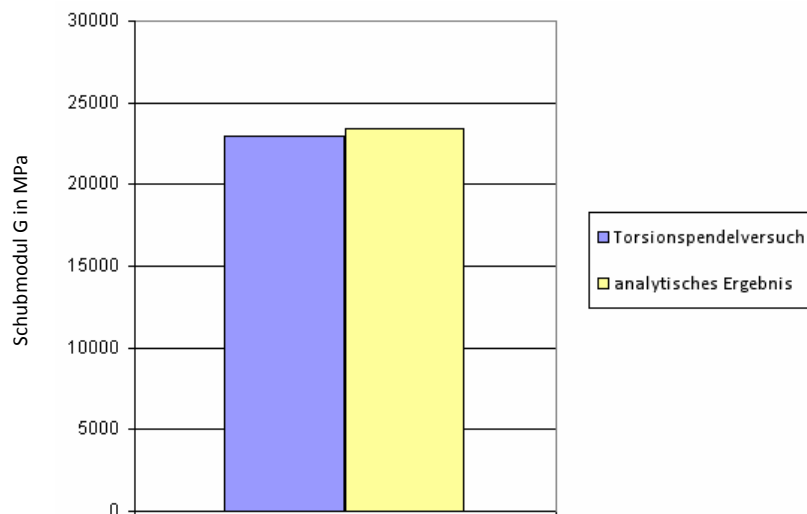


Abbildung 69: Ergebnisvergleich Torsionspendelversuch – analytische Lösung

Daraus folgt eine Abweichung des Schubmoduls der analytischen Lösung von der Messung von rund **1,85%!!**

#### 4.5.10 Versuchsdiskussion

Durch den Torsionspendelversuch in der vorliegenden Form konnte der Schubmodul sehr exakt bestimmt werden. Einerseits minimale Einflüsse von außen (Einspannung, etc.) und zudem eine exakte Bestimmung des Massenträgheitsmoments ermöglichten eine sehr genaue Ermittlung. Zudem liefern eine Reihe von Versuchen sehr gute Werte, die wenig streuen.

Dass keine lineare Dämpfung vorliegt wurde bereits erwähnt, eben aufgrund des Luftreibungseinfluss bei abnehmender Schwingungsamplitude. Theoretisch könnte auch Materialdämpfung dabei noch einen Einfluss haben, die sich bei kleiner werdender Amplitude stärker auswirkt als bei höheren Amplituden.

Vergleicht man abschließend den experimentell bestimmten Schubmodul mit jenem der analytischen Lösung, so kann man bei einer Abweichung von rund 2% von einem qualitativ sehr hochwertigen (von der Messung wie der Analytik) Ergebnis sprechen. Dies liegt auch in jenem Bereich wie die Vergleiche des 4 – Punkt – Biegeversuchs mit der Analytik zeigten. Analog dazu kann man die Abweichung auch darin begründen, dass die Annahmen und Herleitung des Schubmoduls aus dem Torsionsversuch davon ausgehen, dass isotropes Material mit homogener Masseverteilung, vorliegt, was für die geprüften Stäbe aber nicht zutrifft.

Analog zur Ermittlung der E – Moduln, kann man auch beim Schubmodul feststellen, dass die gefundene analytische Lösung, die Eigenschaften der Statorstäbe aus der Realität sehr gut abbildet.

Die Versuche zur experimentellen Ermittlung der Kennwerte sind damit im Rahmen dieser Arbeit abgeschlossen.

## 5 FE - Modell

Ziel der Diplomarbeit war das Finden eines Materialmodells, das die Eigenschaften der Versuchsstäbe möglichst genau widerspiegelt. Dazu wird ein „verschmiertes“ Modell mittels FE erstellt, das so einfach wie möglich aufgebaut sein soll. Die Ergebnisse aus den rechnerischen Modalanalysen werden mit den Werten der experimentellen verglichen. Des Weiteren wird eine Netzstudie durchgeführt. Die Rechnungen wurden mit Msc Marc Mentat durchgeführt.

### 5.1 Modellbildung

Es wurde ein einfacher Stab mit Rechtecksquerschnitt modelliert, siehe Abbildung 70. In weiterer Folge wird der Querschnitt in unterschiedlich viele Elemente mit verschiedener Dicke (= Anzahl der Elemente in Stabrichtung) aufgeteilt. Dem Stab werden die orthotropen Materialeigenschaften aus der analytischen Lösung zugewiesen. Es wurden beide Typen der Versuchsstäbe modelliert und analysiert (rechnerische Modalanalyse).

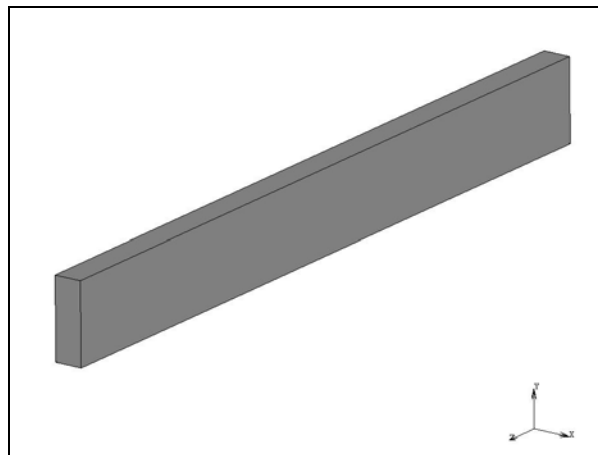


Abbildung 70: „Verschmiertes“ Modell Versuchsstab, Stab mit konstantem Rechteckquerschnitt

Ausgehend vom „verschmierten“ Modell mit konstantem Rechteckquerschnitt, wurde der Querschnitt in verschieden viele Elemente unterteilt. Ebenfalls wurde die Anzahl der Elemente in Stabrichtung variiert. Das Ergebnis ist eine Netzstudie, die Auskunft über ein hinreichend feines FE – Netz gibt, ohne dabei auf ein unnötig feines Netz (d.h. eine hohe Anzahl von Knoten und damit verbundene lange Rechenzeit) zurückzugreifen.

Variiert wurden also die Anzahl der Elemente neben- und untereinander auf den Querschnitt bezogen, Abbildung 71, und auch die Anzahl der Elemente in Stabrichtung, Abbildung 72. D.h. variiert wurden die Verhältnisse der Elementkanten  $x : y : z$  (Richtungen). Diese werden auch explizit in den Details der Netzstudien (s. folgendes Kapitel) angeführt.

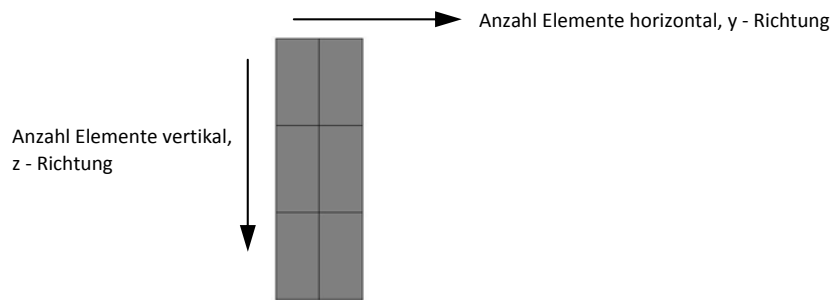


Abbildung 71: Aufteilung der Elemente über den Querschnitt

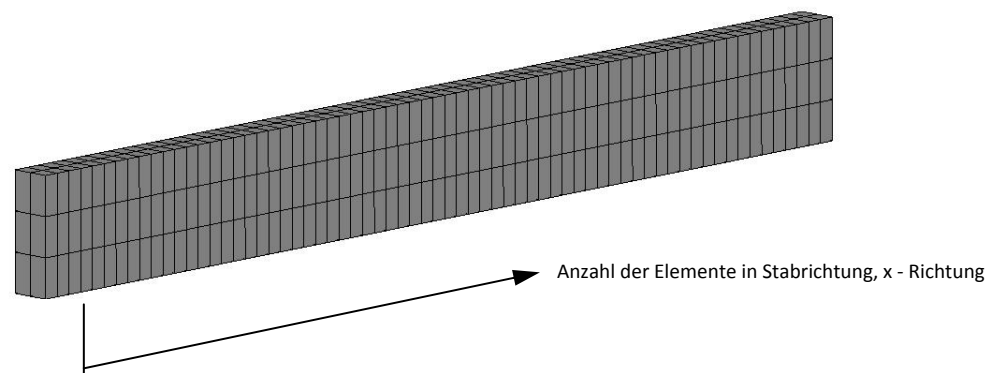


Abbildung 72: Auteilung der Elemente in Stabrichtung

## 5.2 Materialdefinition, Versuchsstab Typ 1

Unter den Materialeigenschaften wurden dem Stab orthotrope Eigenschaften zugewiesen (Screenshot der Material Properties in Marc Mentat dargestellt in Abbildung 73). D.h. die analytisch ermittelten Elastizitätskonstanten (9) und die Dichte dem „*verschmierten*“ Modell zugewiesen. Dies stellt das Materialmodell für die Versuchsstäbe dar und sollte die tatsächlichen Eigenschaften widerspiegeln.

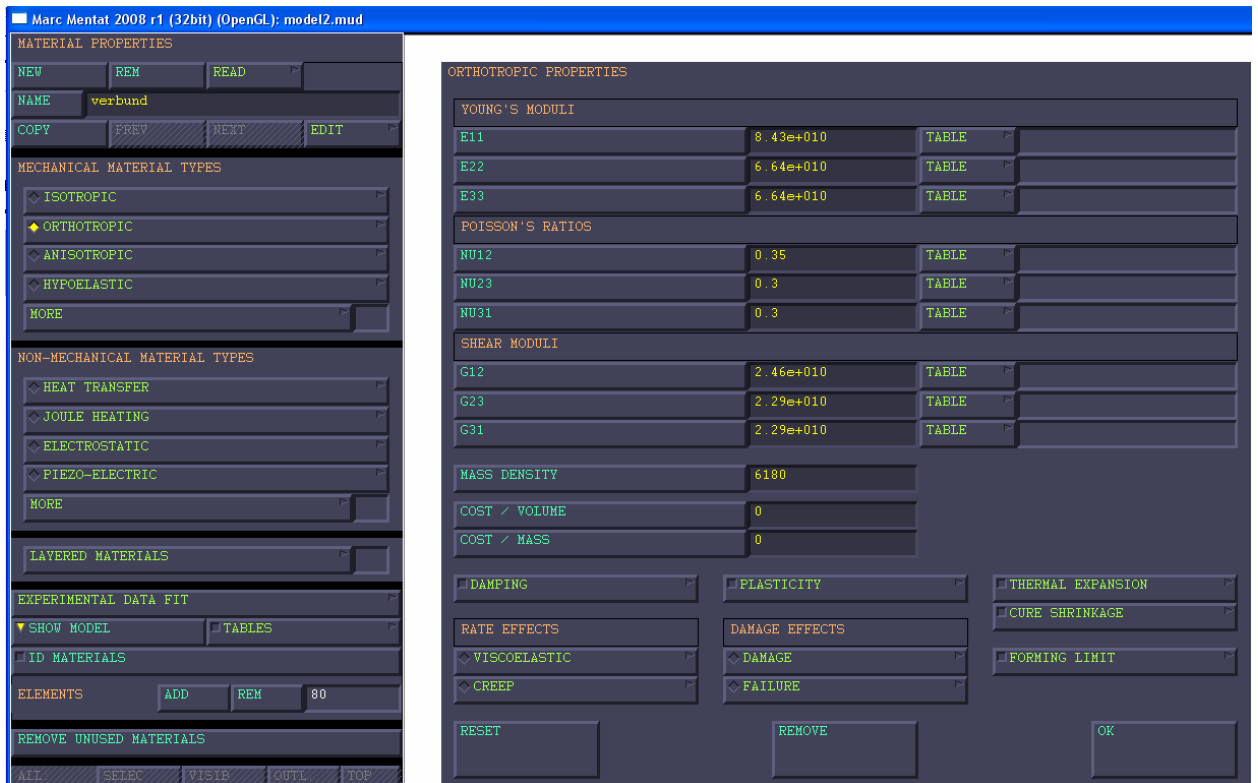


Abbildung 73: Materialdefinition, orthotroper Versuchsstab Typ 1

### 5.3 Elementtyp, Versuchsstab Typ 1

Als Elementtyp wurden Solid Elemente, hexagonal, 8 knotig, linear, verwendet.

### 5.4 Modalanalyse

#### 5.4.1 Eigenformen, Versuchsstab Typ 1 und 2

##### 1. Biegeeigenfrequenz bezogen auf die z – Achse

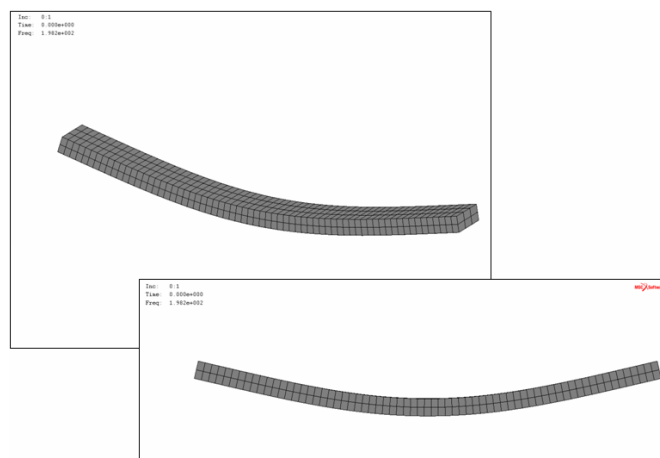


Abbildung 74: Eigenform, 1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse



## 2. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse

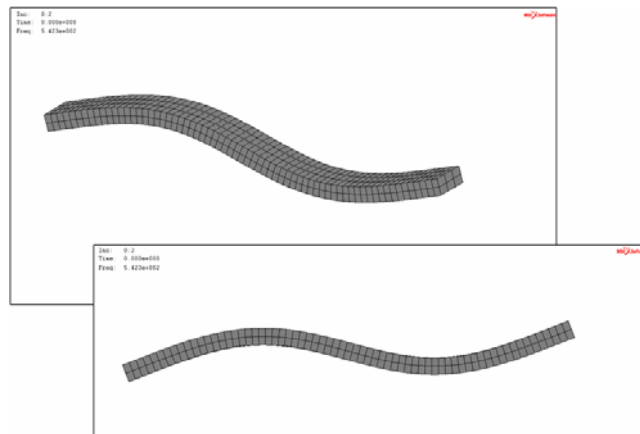


Abbildung 75: Eigenform, 2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse

## 3. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse:

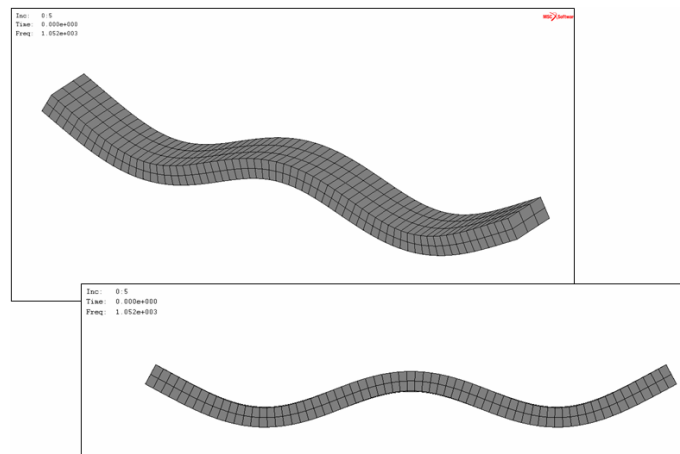


Abbildung 76: Eigenform, 3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse

## 1. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse:

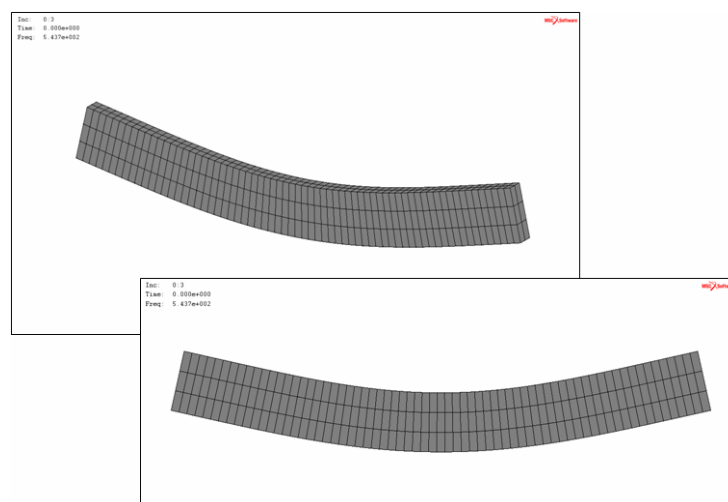


Abbildung 77: Eigenform, 1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse

## 2. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse

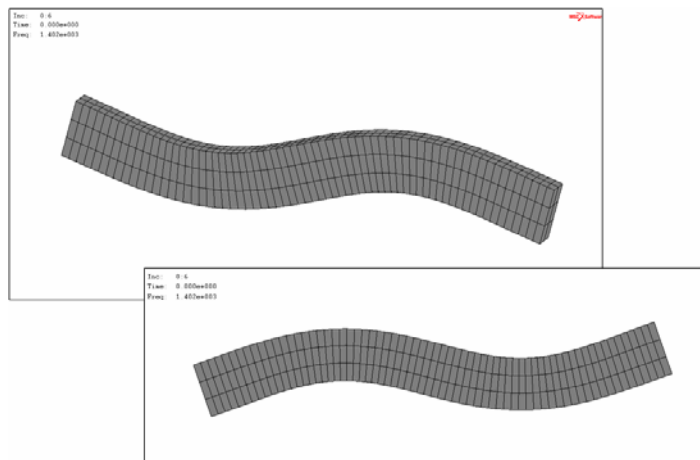


Abbildung 78: Eigenform, 2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse

## 1. Torsionseigenfrequenz

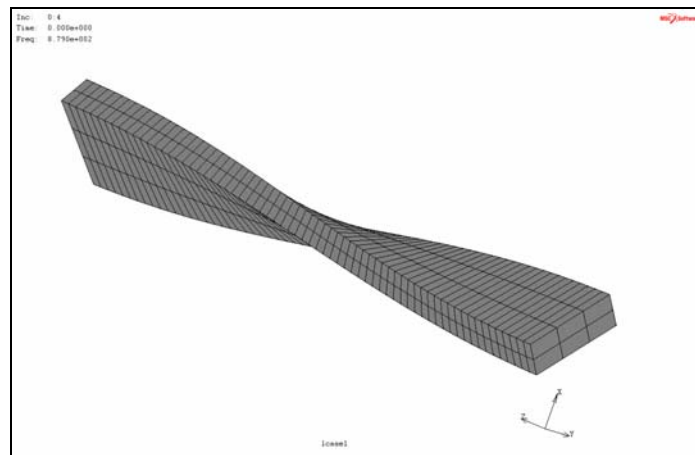


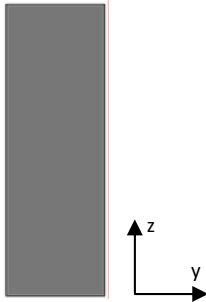
Abbildung 79: Eigenform, 1. Torsionseigenfrequenz

## 5.5 Detailergebnisse Modalanalysen, Versuchsstab Typ 1, Länge 670mm

Die Angabe der Verhältnisse der Elementkantenlängen  $x : y : z$  ist in mm.

Variante 1:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 1  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 25  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$  : 26,8 : 25 : 75

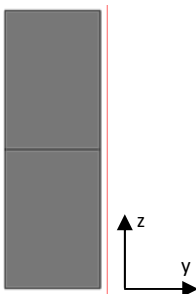


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	263,1
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	585,6
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1411,6
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	722,9
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1517,7
1. Torsionseigenfrequenz	886,6

Tabelle 16: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 1, Versuchsstab Typ 1

Variante 2:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 25  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$  : 26,8 : 25 : 37,5

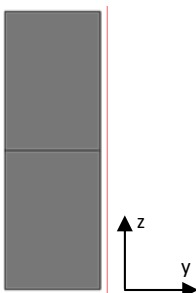


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	256,8
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	568,1
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1381,5
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	706,3
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1476,4
1. Torsionseigenfrequenz	886,4

Tabelle 17: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 2, Versuchsstab Typ 1

Variante 3:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 67  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$  : 10 : 25 : 37,5

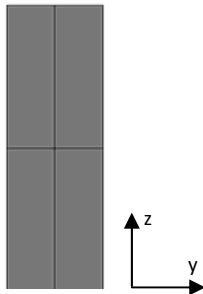


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	212,2
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	549,9
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1123,4
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	579,9
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1417,9
1. Torsionseigenfrequenz	884,4

Tabelle 18: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 3, Versuchsstab Typ 1

Variante 4:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 25  
 Elementkantenlänge x : y : z : 26,8 : 12,5 : 37,5

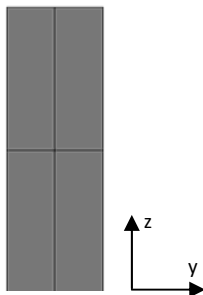


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	247,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	567,2
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1331,7
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	680,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1474,3
1. Torsionseigenfrequenz	886,1

Tabelle 19: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 4, Versuchsstab Typ 1

Variante 5:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 67  
 Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 12,5 : 37,5

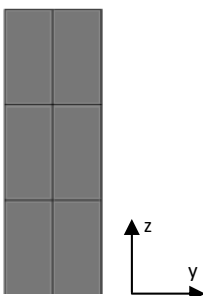


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	200,2
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	547,6
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1061,4
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	548,5
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1415,8
1. Torsionseigenfrequenz	884,1

Tabelle 20: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 5, Versuchsstab Typ 1

Variante 6:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 3  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 25  
 Elementkantenlänge x : y : z : 26,8 : 12,5 : 25

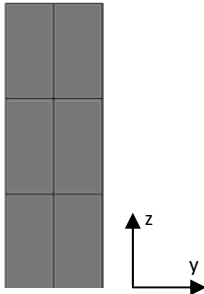


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	227,8
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	555,2
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1221,2
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	625,7
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1436,6
1. Torsionseigenfrequenz	867,4

Tabelle 21: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 6, Versuchsstab Typ 1

Variante 7:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 3  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 67  
 Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 12,5 : 25

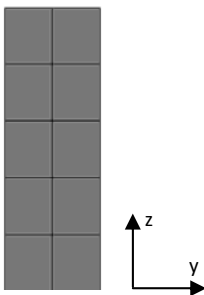


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	198,8
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	544,0
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1055,4
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	544,3
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1404,3
1. Torsionseigenfrequenz	884,1

Tabelle 22: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 7, Versuchsstab Typ 1

Variante 8:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 5  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 25  
 Elementkantenlänge x : y : z : 26,8 : 12,5 : 15

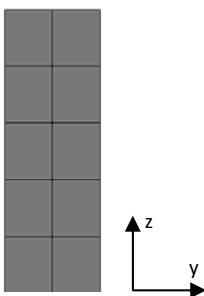


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	225,1
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	548,8
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1208,2
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	618,7
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1419,0
1. Torsionseigenfrequenz	853,0

Tabelle 23: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 8, Versuchsstab Typ 1

Variante 9:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 5  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 67  
 Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 12,5 : 15



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	196,4
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	537,6
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1043,3
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	541,1
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1392,0
1. Torsionseigenfrequenz	851,7

Tabelle 24: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 9, Versuchsstab Typ 1

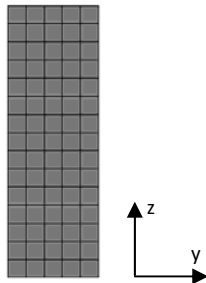
Variante 10:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 5

Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 15

Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 134

Elementkantenlänge x : y : z : 5 : 5 : 5



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	188,3
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	515,0
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	997,9
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	538,2
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1382,7
1. Torsionseigenfrequenz	832,0

Tabelle 25: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 10, Versuchsstab Typ 1

## 5.6 Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, graphischer Vergleich mit Messergebnissen

In den folgenden Grafiken, Abbildung 80 bis Abbildung 84, werden die Ergebnisse der FE – Studie mit den Eigenfrequenzmessungen verglichen. Es wird jedem FE – Ergebnis das jeweilige FE – Modell zugewiesen, wobei „V“ für die jeweilige Variante steht. Die genaue Definition der Varianten inklusive der kompletten Ergebnisse findet sich im Kapitel zuvor.

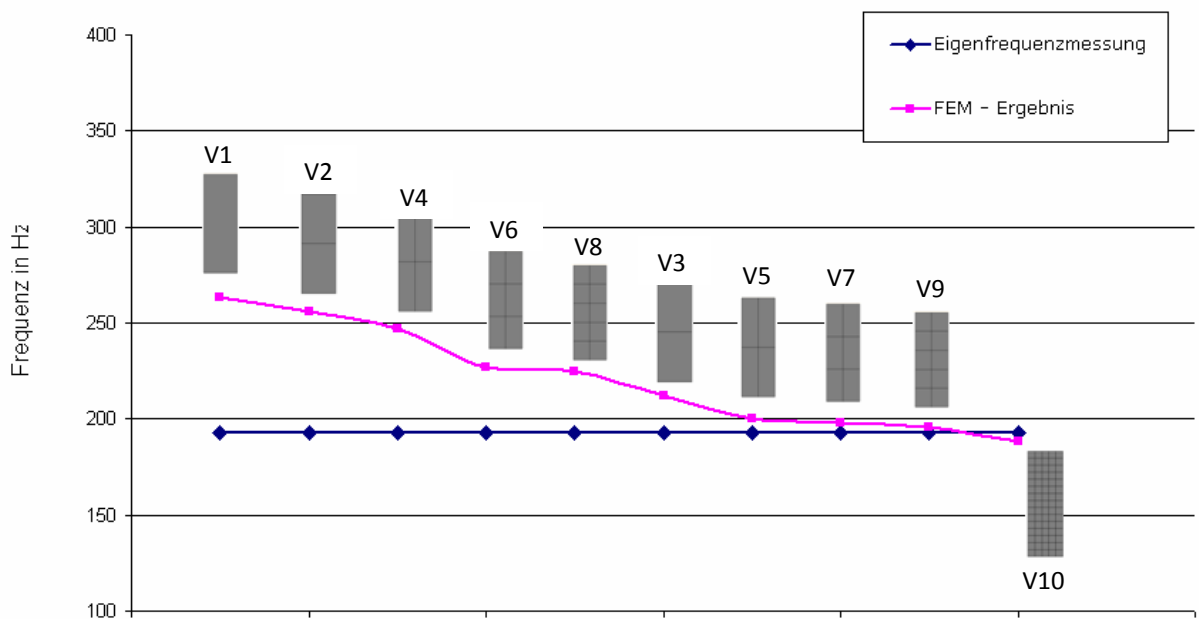


Abbildung 80: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse

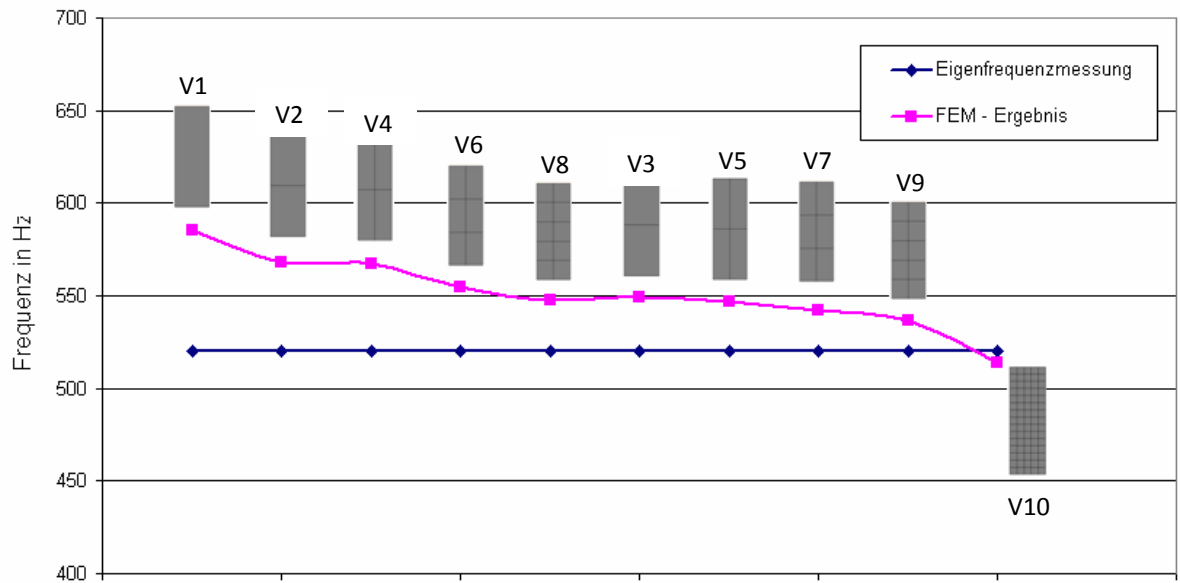


Abbildung 81: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse

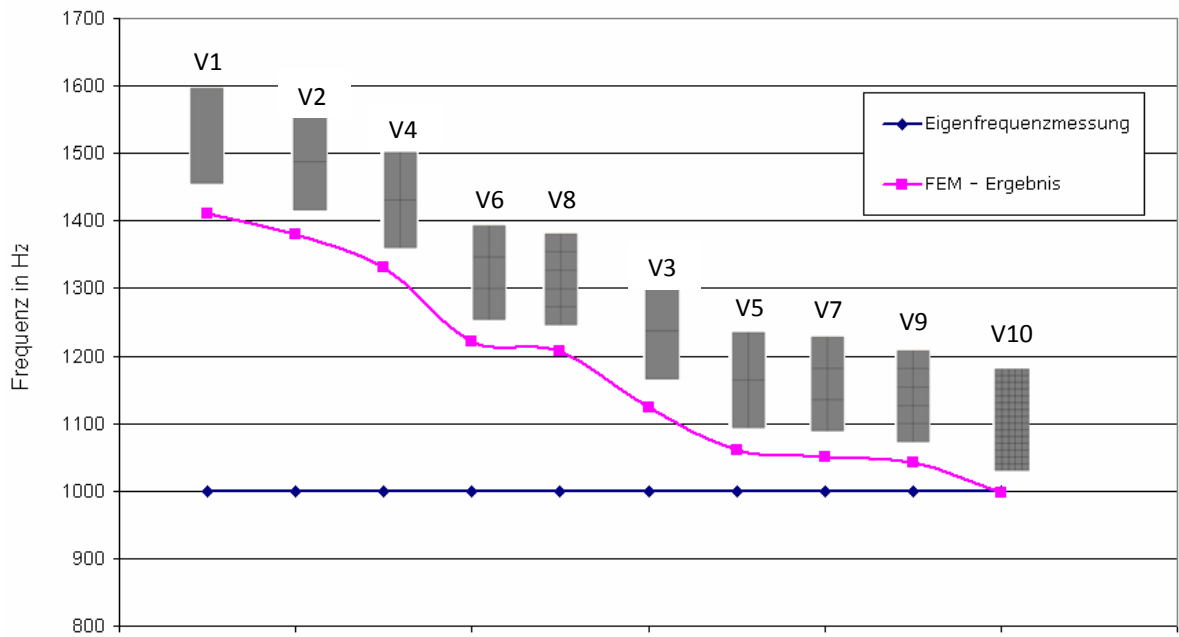


Abbildung 82: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse

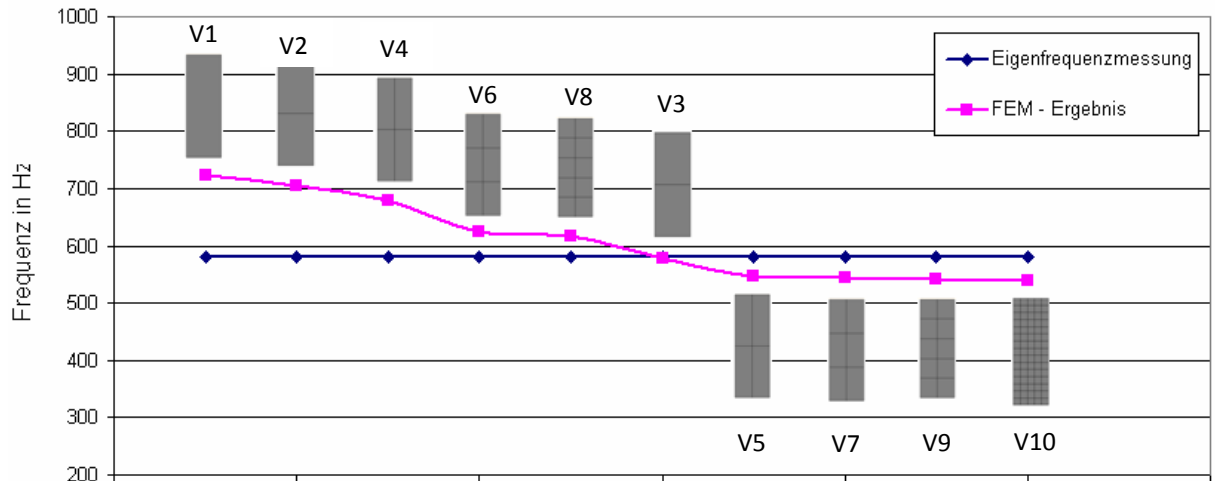


Abbildung 83: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse

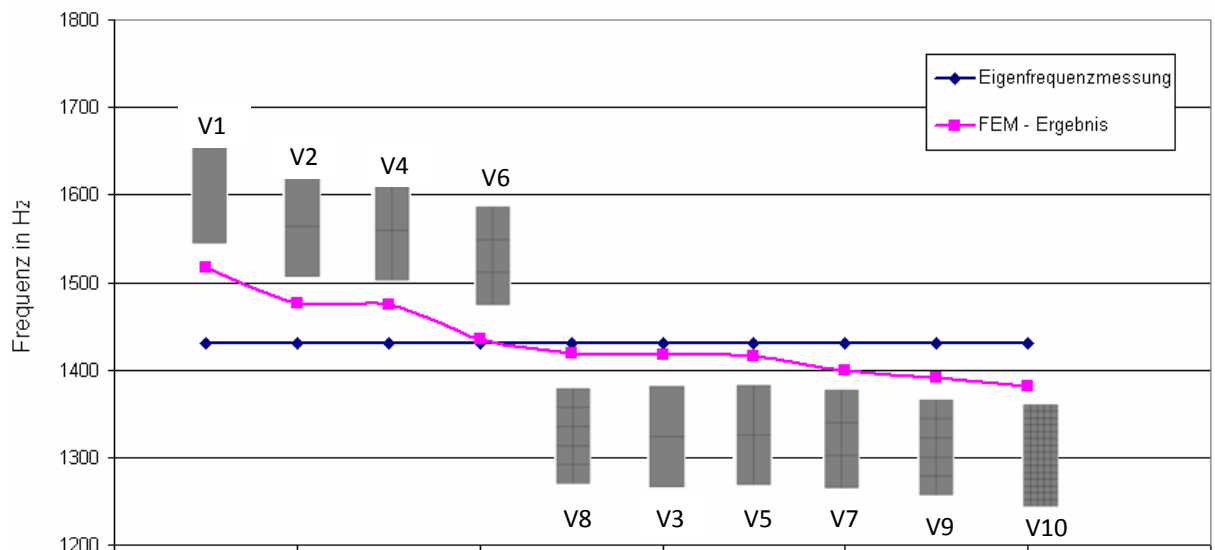


Abbildung 84: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse

## 5.7 Resümee Netzstudie Versuchsstab Typ 1

Die Netzstudien zeigen, dass es vor allem sehr wichtig ist in Stabrichtung möglichst fein aufzulösen. Da mit linearen Elementen gerechnet wird, ist das Ergebnis dementsprechend ungenauer je breiter die Elemente werden. Es zeigt sich, dass dies ein wesentlich wichtigerer Faktor ist, als die Aufteilung der Elemente über den Querschnitt. Aus bisherigen Erfahrungen wurden die Stäbe über den Querschnitt in 4 Elemente aufgeteilt (=Variante 4 und 5). Auch die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass diese Varianten sehr gute Ergebnisse liefern. Vergleicht man die Ergebnisse mit jenen, bei denen der Querschnitt in 6 bzw. 10 Elementen aufgeteilt wurde (= Varianten 6 bis 9), so erkennt man ebenfalls, dass keine wesentlich besseren Ergebnisse bei diesen Varianten erzielt werden.

Als ideale Variante, mit möglichst geringem Rechenaufwand erweist sich daher Variante 5, bzw. eine Aufteilung des Stabquerschnittes in 4 Elemente und eine möglichst geringe Breite in Stabrichtung.



## 5.8 Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Abweichungen der Ergebnisse

Zusätzlich zu den Netzstudien, sind im Folgenden die Abweichung der FE – Berechnungen zu den Eigenfrequenzmessungen in % angegeben. BM steht dabei für den jeweiligen Biegemode.

Dabei werden noch einmal alle Ergebnisse aus den experimentellen Modalanalysen mit jenen der Netzstudie verglichen. Die Abweichung der numerischen von den experimentellen Ergebnissen wird zudem vorzeichenbehaftet angegeben, sodass man sofort erkennt, ob die Abweichung über oder unter dem Messwert liegt.

		Variante 1		Variante 2	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	193	263,1	+26,6%	256,8	+24,6%
2. BM z-Achse	520	585,6	+11,1%	568,1	+8,5%
3. BM z-Achse	999	1411,6	+29,2%	1381,5	+27,2%
1. BM y-Achse	580	722,9	+19,7%	706,3	+17,8%
2. BM y-Achse	1431	1517,7	+5,7%	1476,4	+3,0%

		Variante 3		Variante 4	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	193	212,2	+9,0%	247,0	+21,9%
2. BM z-Achse	520	549,9	+5,3%	567,2	+8,3%
3. BM z-Achse	999	1123,4	+11,0%	1331,7	+24,9%
1. BM y-Achse	580	579,9	-0,2%	680,0	+14,7%
2. BM y-Achse	1431	1417,9	-1,0%	1474,3	+2,9%

		Variante 5		Variante 6	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	193	200,2	+3,5%	227,8	+15,0%
2. BM z-Achse	520	547,6	+4,9%	555,2	+6,3%
3. BM z-Achse	999	1061,4	+5,8%	1221,2	+18,2%
1. BM y-Achse	580	548,5	-5,8%	625,7	+7,2%
2. BM y-Achse	1431	1415,8	-1,1%	1436,6	+0,3%

	Messwert [Hz]	Variante 7		Variante 8	
		FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	193	198,8	+2,5%	225,1	+9,0%
2. BM z-Achse	520	544,0	+4,1%	548,8	+5,3%
3. BM z-Achse	999	1055,4	+4,9%	1208,2	+17,3%
1. BM y-Achse	580	544,3	-6,6%	618,7	+6,1%
2. BM y-Achse	1431	1404,3	-2,2%	1419,0	-0,8%

	Messwert [Hz]	Variante 9		Variante 10	
		FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	193	196,4	+1,5%	188,3	-2,7%
2. BM z-Achse	520	537,6	+3,2%	515,0	-1,2%
3. BM z-Achse	999	1043,3	+4,2%	997,9	-0,2%
1. BM y-Achse	580	541,1	-7,8%	538,2	-7,8%
2. BM y-Achse	1431	1392,0	-2,8%	1382,7	-3,5%

Tabelle 26: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse – Netzstudie – experimentelle Modalanalyse, Versuchsstab Typ 1

Tabelle 26 drückt noch einmal die Ergebnisse der Netzstudie in Zahlen aus. Es zeigt sich, dass vor allem die Varianten 5, 7, 9 und 10 sehr gute Ergebnisse liefern. Generell kann bei einer Abweichung kleiner, gleich +/- 5% von einem qualitativ sehr hochwertigen Ergebnis gesprochen werden.

## 5.9 Materialdefinition, Versuchsstab Typ 2

Unter den Materialeigenschaften wurden dem Stab ebenfalls orthotrope Eigenschaften zugewiesen (Screenshot Material Properties in Marc Mentat dargestellt in Abbildung 85). D.h. die analytisch Ermittelten Elastizitätskonstanten (9) und die Dichte dem verschmierten Modell zugewiesen. Dies stellt das Materialmodell für die Versuchsstäbe dar und sollte die tatsächlichen Eigenschaften widerspiegeln.

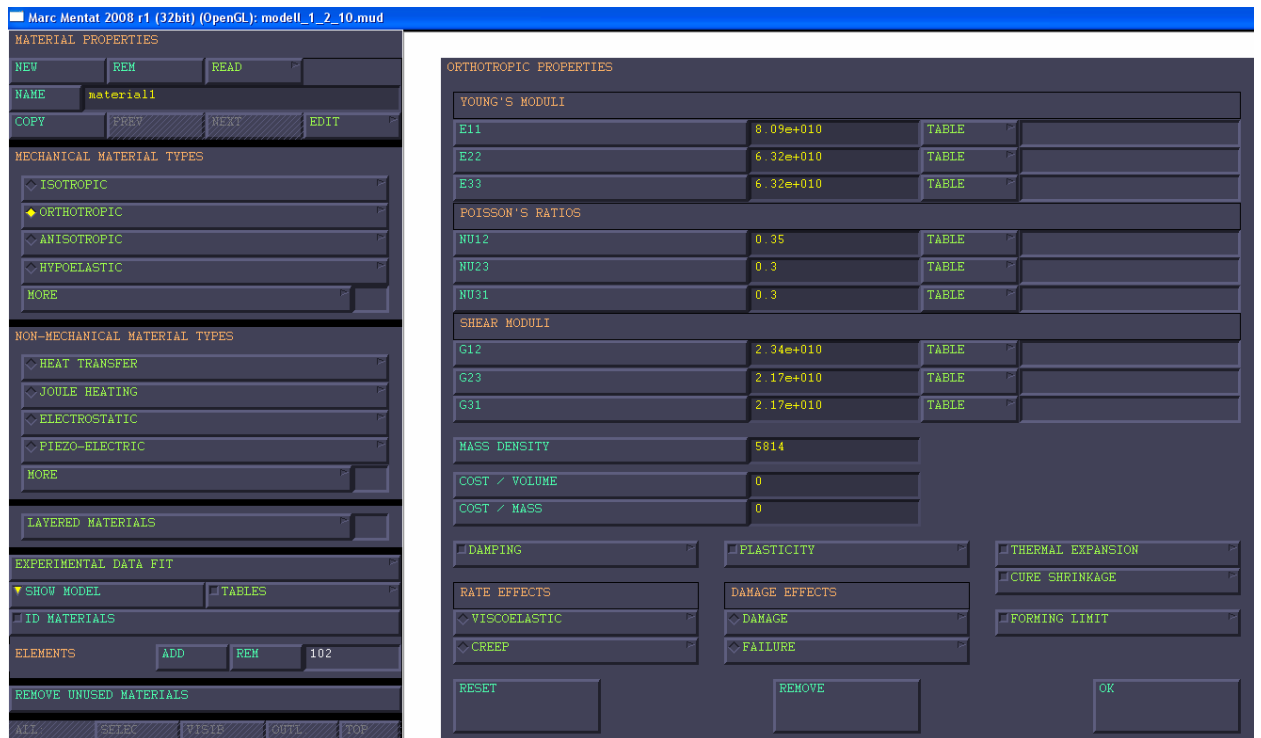


Abbildung 85: Materialdefinition, orthotroper Versuchsstab Typ 2

## 5.10 Elementtyp, Versuchsstab Typ 2

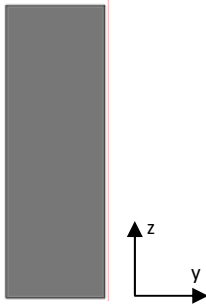
Als Elementtyp wurden Solid Elemente, hexagonal, 8 knotig, linear, verwendet.

## 5.11 Detailergebnisse Modalanalysen, Versuchsstab Typ 2, Länge 500mm

Die Angabe der Verhältnisse der Elementkantenlängen  $x : y : z$  ist in mm.

Variante 1:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 1  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 16  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$ : 32 : 20 : 80

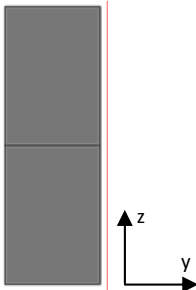


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	391,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1077,1
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	2011,8
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1033,5
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2565,6
1. Torsionseigenfrequenz	924,0

Tabelle 27: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 1, Versuchsstab Typ 2

Variante 2:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 16  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$ : 32 : 20 : 40

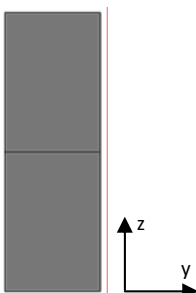


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	383,9
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1058,8
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	2079,3
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1003,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2501,6
1. Torsionseigenfrequenz	923,7

Tabelle 28: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 2, Versuchsstab Typ 2

Variante 3:

Anzahl der Elemente über dem Querschnitt: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 50  
 Elementkantenlänge  $x : y : z$ : 10 : 20 : 40

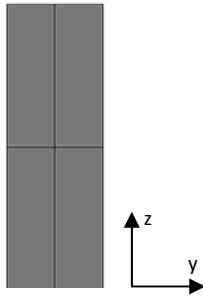


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	303,5
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	829,1
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1504,7
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	982,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2421,7
1. Torsionseigenfrequenz	922,7

Tabelle 29: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 3, Versuchsstab Typ 2

Variante 4:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 16  
 Elementkantenlänge x : y : z : 32 : 10 : 40

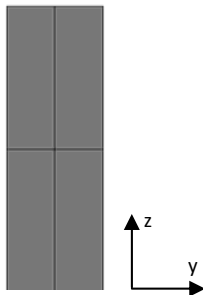


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	369,5
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1020,3
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	2007,1
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1003,2
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2499,6
1. Torsionseigenfrequenz	923,1

Tabelle 30: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 4, Versuchstab Typ 2

Variante 5:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 2  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 50  
 Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 10 : 40

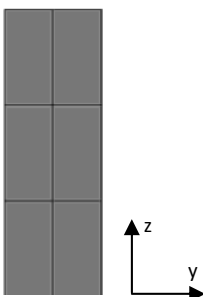


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	284,8
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	778,4
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1408,1
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	981,1
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2419,6
1. Torsionseigenfrequenz	922,1

Tabelle 31: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 5, Versuchstab Typ 2

Variante 6:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 3  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 16  
 Elementkantenlänge x : y : z : 32 : 10 : 26,7



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	367
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1014,1
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1896,5
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	993,8
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2471,3
1. Torsionseigenfrequenz	909,2

Tabelle 32: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 6, Versuchstab Typ 2

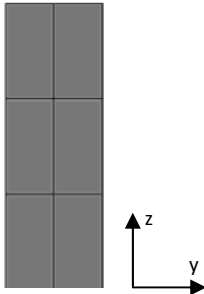
Variante 7:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2

Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 3

Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 50

Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 10 : 26,7



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	281,6
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	770,3
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1393,8
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	971,9
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2405,0
1. Torsionseigenfrequenz	908,1

Tabelle 33: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 7, Versuchstab Typ 2

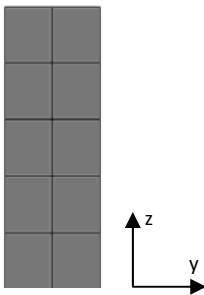
Variante 8:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2

Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 5

Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 16

Elementkantenlänge x : y : z : 32 : 10 : 16



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	364,6
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1008,1
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1886,0
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	988,9
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2454,6
1. Torsionseigenfrequenz	896,6

Tabelle 34: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 8, Versuchstab Typ 2

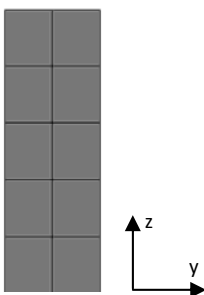
Variante 9:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 2

Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 5

Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 50

Elementkantenlänge x : y : z : 10 : 10 : 16

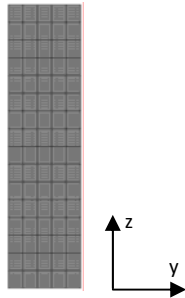


Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	289,6
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	792,7
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1438,3
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	1003,0
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2453,1
1. Torsionseigenfrequenz	913,5

Tabelle 35: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 9, Versuchstab Typ 2

Variante 10:

Anzahl der Elemente über den Querschnitt horizontal: 4  
 Anzahl der Elemente über den Querschnitt vertikal: 16  
 Anzahl der Elemente in Stabrichtung: 100  
 Elementkantenlänge x : y : z : 5 : 5 : 5



Eigenfrequenzart	$f_i$ [Hz]
1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	273,6
2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	748,2
3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	1349,0
1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	997,4
2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	2434,0
1. Torsionseigenfrequenz	893,0

Tabelle 36: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 10, Versuchstab Typ 2

### 5.12 Netzstudie, Versuchstab Typ 2, graphischer Vergleich mit Messergebnissen

In den folgenden Grafiken, Abbildung 86 bis Abbildung 90, werden die Ergebnisse der FE – Studie mit den Eigenfrequenzmessungen verglichen. Es wird jedem FE – Ergebnis das jeweilige FE – Modell zugewiesen, wobei V für die jeweilige Variante steht. Die genaue Definition der Varianten inklusive der kompletten Ergebnisse findet sich im Kapitel zuvor.

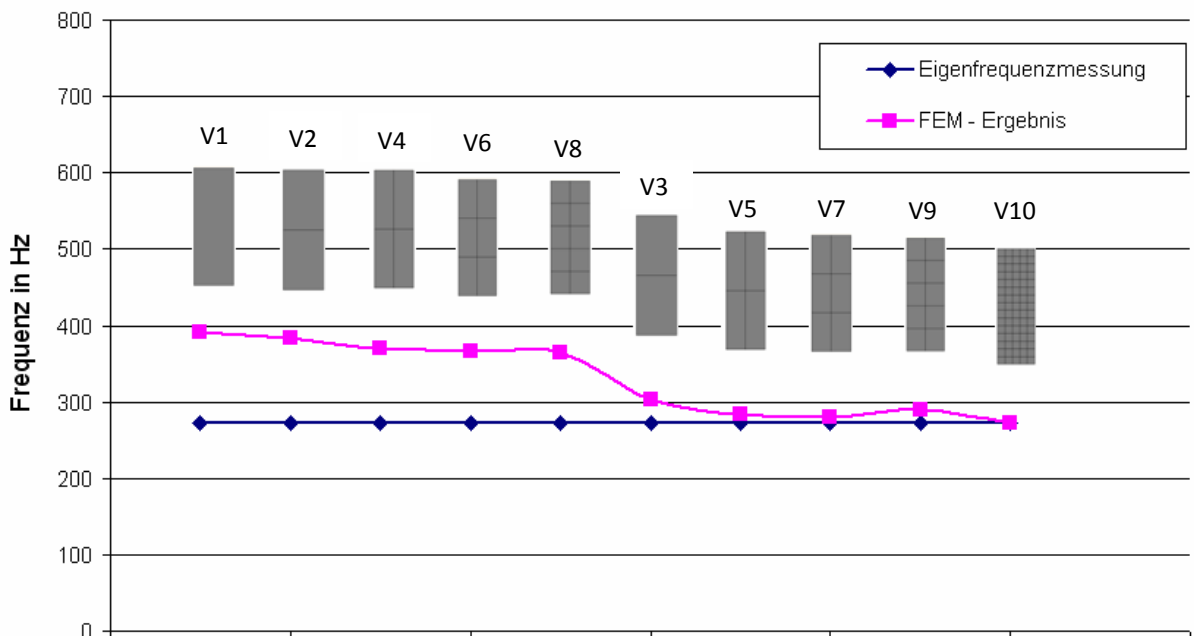


Abbildung 86: Netzstudie, Versuchstab Typ 2, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse

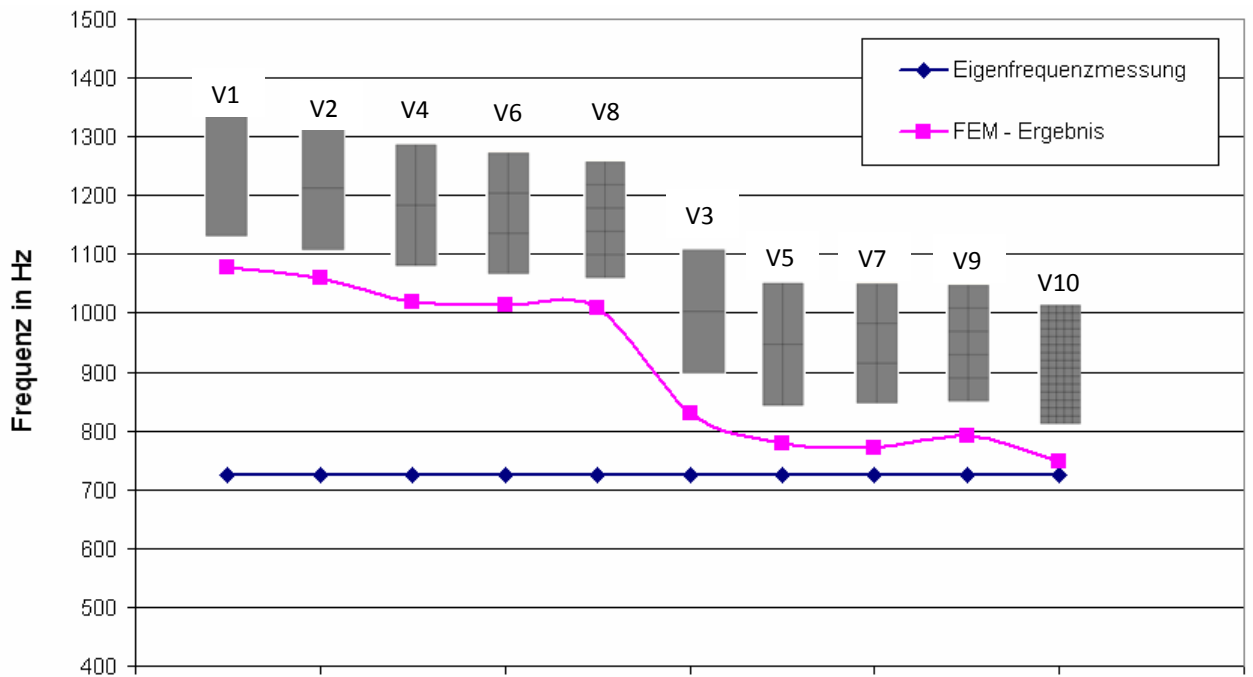


Abbildung 87: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse

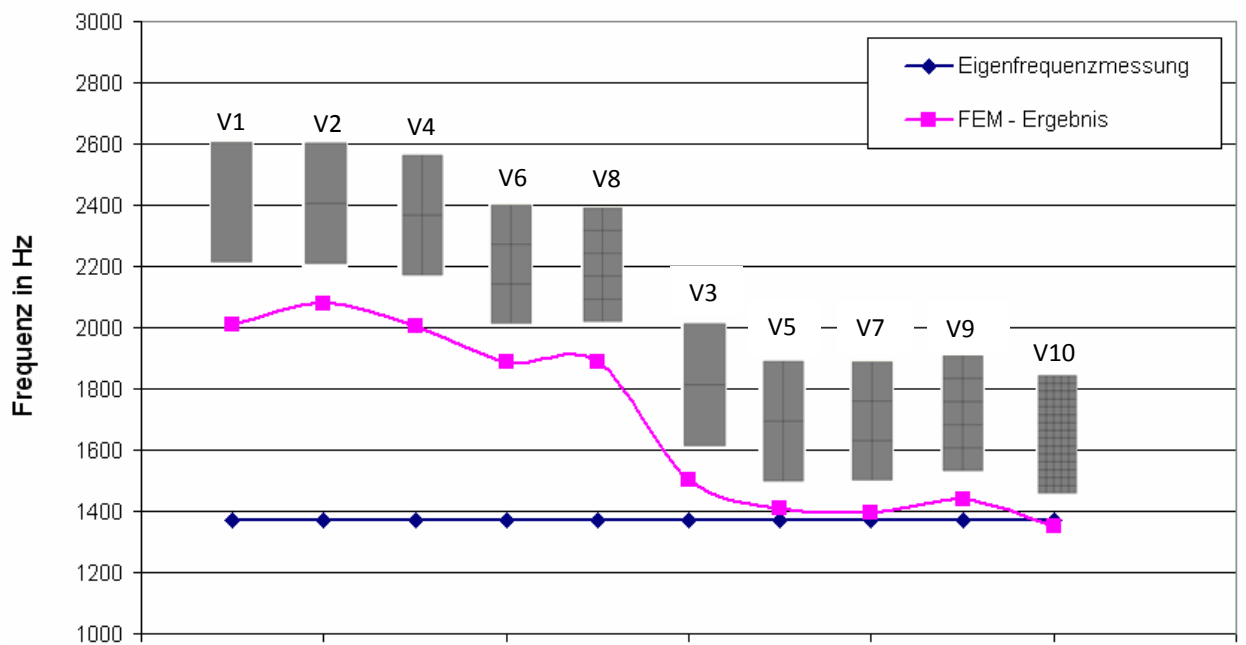


Abbildung 88: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 3. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse



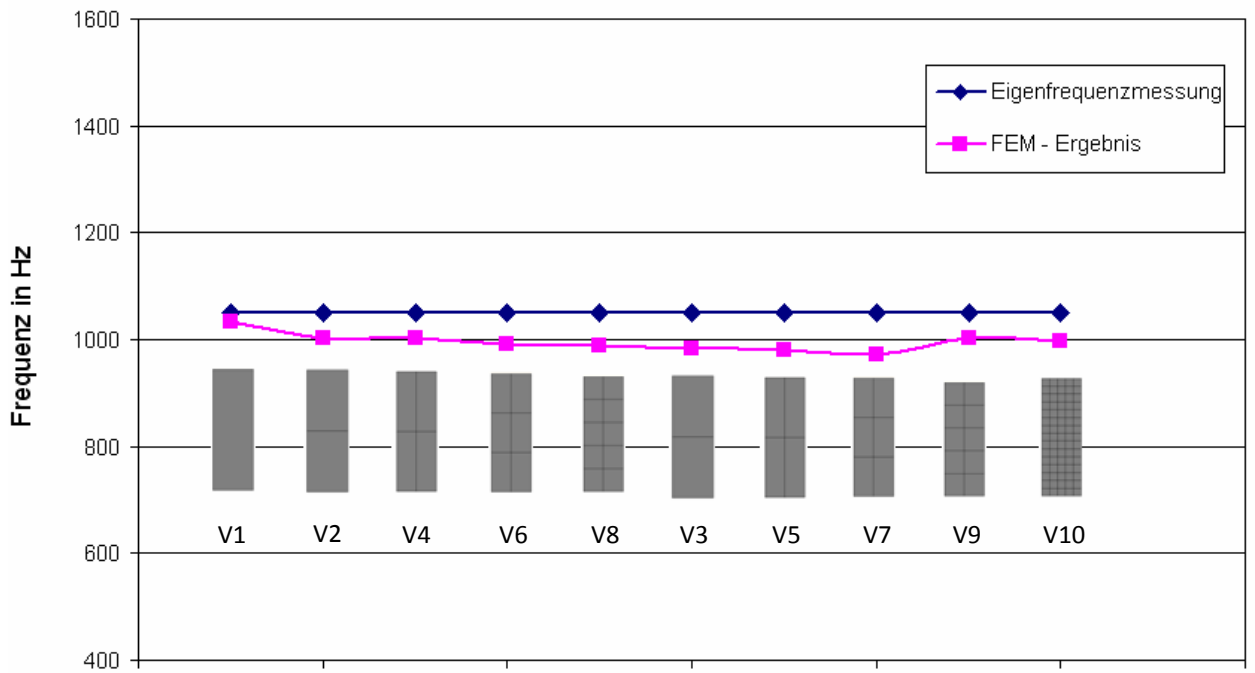


Abbildung 89: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse

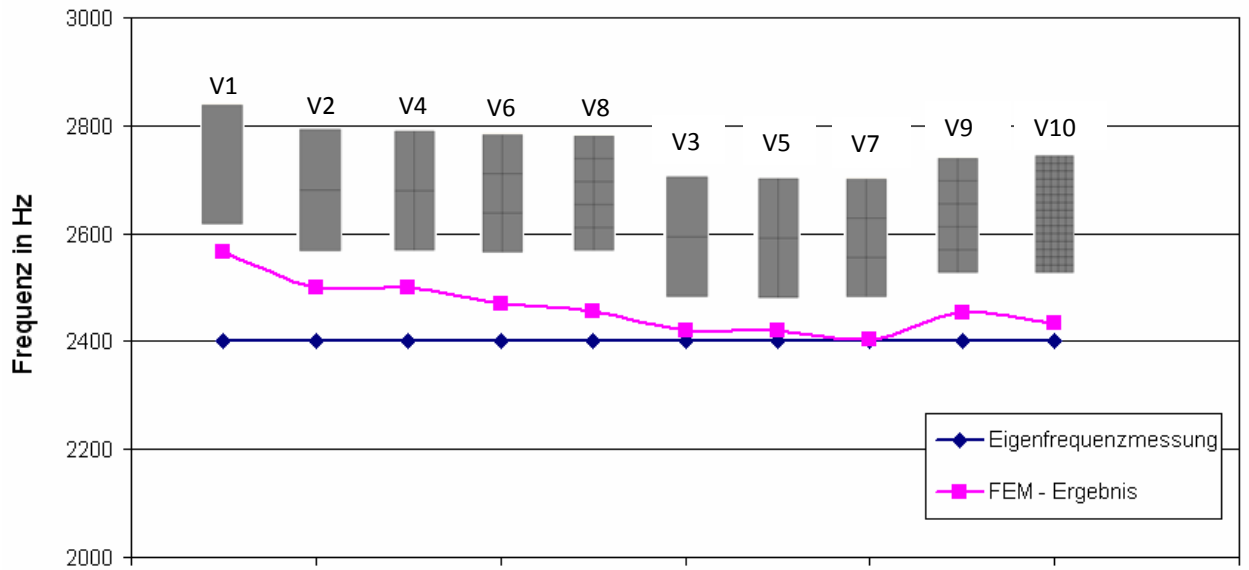


Abbildung 90: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse

### 5.13 Resümee Netzstudie Versuchsstab Typ 2

Nachdem die Netzstudie des Versuchsstabes Typ 1 bereits qualitativ sehr hochwertige Ergebnisse lieferte, bestätigt auch die Netzstudie des Versuchsstabes Typ 2, dass das gefundene Materialmodell funktioniert. Die Netzstudie des Versuchsstabes Typ 2 liefert analog qualitativ sehr gute Ergebnisse. Des Weiteren zeigt sich erneut, dass es sehr wichtig ist in Stabrichtung möglichst fein aufzulösen. Interessant auch in dieser Studie des Typ 2, dass ab einer Elementzahl von 10 (Varianten 8 und 9), bezogen auf den Querschnitt, die Ergebnisse wieder weiter vom Messwert abweichen.

Wieder kann Variante 5, 4 Elemente über dem Querschnitt, als sehr gute Variante herausgehoben werden. Analog zur Studie des Versuchsstabes Typ 1, liefert dieses Modell, qualitativ sehr gute Ergebnisse. Eine Erhöhung der Elementzahl über dem Querschnitt liefert im Vergleich zu Variante 5 keine deutlichen Verbesserungen (Varianten 7, 9, 10).

### 5.14 Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, prozentuale Abweichungen der Ergebnisse

Zusätzlich zu den Netzstudien, sind im Folgenden die Abweichung der FE – Berechnungen zu den Eigenfrequenzmessungen in % angegeben. BM steht dabei für den jeweiligen Biegemode.

Dabei werden noch einmal alle Ergebnisse aus den experimentellen Modalanalysen mit jenen der Netzstudie verglichen. Die Abweichung der numerischen von den experimentellen Ergebnissen wird zudem vorzeichenbehaftet angegeben, sodass man sofort erkennt, ob die Abweichung über oder unter dem Messwert liegt.

	Messwert [Hz]	Variante 1		Variante 2	
		FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	272	391,0	+30,4%	383,9	+29,1%
2. BM z-Achse	726	1077,1	+32,6%	1058,8	+31,4%
3. BM z-Achse	1373	2011,8	+31,8%	2079,3	+34%
1. BM y-Achse	1049	1033,5	-1,5%	1003,0	-4,6%
2. BM y-Achse	2401	2565,6	+6,4%	2501,6	+4,0%

		Variante 3		Variante 4	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	272	303,5	+10,2%	369,5	+26,4%
2. BM z-Achse	726	829,1	+12,4%	1020,3	+28,8%
3. BM z-Achse	1373	1504,7	+8,7%	2007,1	+31,6%
1. BM y-Achse	1049	982,0	-6,8%	1003,2	-4,6%
2. BM y-Achse	2401	2421,7	+0,8%	2499,6	+3,9%

		Variante 5		Variante 6	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	272	284,8	+4,2%	367	+25,9%
2. BM z-Achse	726	778,4	+6,7%	1014,1	+28,4%
3. BM z-Achse	1373	1408,1	+2,5%	1896,5	+27,2%
1. BM y-Achse	1049	981,1	-6,9%	993,8	-5,6%
2. BM y-Achse	2401	2419,6	+0,7%	2471,3	+2,8%

		Variante 7		Variante 8	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	272	281,6	+3,2%	364,6	+25,5%
2. BM z-Achse	726	770,3	+5,7%	1008,1	+28,0%
3. BM z-Achse	1373	1393,8	+1,4%	1886,0	+27,2%
1. BM y-Achse	1049	971,9	-8,0%	988,9	-6,1%
2. BM y-Achse	2401	2405,0	+0,2%	2454,6	+2,2%

		Variante 9		Variante 10	
	Messwert [Hz]	FEM [Hz]	Abweichung	FEM [Hz]	Abweichung
1. BM z-Achse	272	289,6	+5,9%	273,6	+0,4%
2. BM z-Achse	726	792,7	+8,3%	748,2	+2,9%
3. BM z-Achse	1373	1438,3	+4,5%	1349,0	+1,8%
1. BM y-Achse	1049	1003,0	-4,6%	997,4	-5,2%
2. BM y-Achse	2401	2453,1	+2,1%	2434,0	+1,4%

Tabelle 37: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse – Netzstudie – experimentelle Modalanalyse, Versuchsstab Typ 2

Tabelle 37 drückt noch einmal die Ergebnisse der Netzstudie in Zahlen aus. Es zeigt sich, dass vor allem die Varianten 5, 7, 9 und 10 sehr gute Ergebnisse liefern. Generell kann bei einer Abweichung kleiner gleich +/- 5% von einem qualitativ sehr hochwertigen Ergebnis gesprochen werden.

## 6 Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war, ein Materialmodell für Statorstäbe zu finden, welches die realen Stabeigenschaften möglichst genau abbildet, ohne dabei auf einen zu komplexen theoretischen Hintergrund zurückzugreifen. Dies ist sowohl analytisch als auch numerisch gelungen. Die vorgestellten Lösungsansätze haben dies im Vergleich mit den Messungen eindrucksvoll unter Beweis gestellt. Es wurden neben der analytischen Ableitung der Stabeigenschaften zahlreiche experimentelle Untersuchungen angestellt, und abschließend die gefundene Methodik auf ein FE – Modell angewendet.

Zu Beginn der Arbeit wurden anhand der Theorien der Faserverbundwerkstoffe deren mechanische Eigenschaften und Materialgesetze analytisch hergeleitet. Mit Hilfe der verschiedenen Federmodelle konnte dies erreicht werden. Es wurde eine analytische Lösung gefunden die auch allgemeine Gültigkeit besitzt, d.h. alle Eingabegrößen sind variabel (Anzahl Teilleiter, Werkstoffe der Einzelkomponenten sowie die geometrischen Abmessungen). Neben den Elastizitätskonstanten (9) wurden zudem erste Untersuchungen hinsichtlich Stabsteifigkeiten und Einflussgrößen darauf angestellt. Der größte Einfluss auf die Stabsteifigkeit resultiert dabei aus der Anzahl der Teilleiter. Je nachdem wie viele Teilleiter im Stab integriert sind wird dieser mit steigender Anzahl „steifer“ bzw. der E – Modul steigt. Wesentlich kleineren Einfluss dabei haben die Lackschicht die die Teilleiter umgibt sowie die Temperatur (in Bezug auf die Außenisolierung).

Die ersten experimentellen Untersuchungen durch 4 Punkt Biegeversuche brachten einen ersten Vergleich mit der Analytik. Es zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung, aber mit der Einschränkung, dass bei 4 Punkt Biegeversuchen nur der E – Modul bei Biegung um die z - Achse ermittelt werden konnte. Der E – Modul bezogen auf die y – Achse konnte nicht ermittelt werden, da sich der Stab auf dieser Achse als zu steif erwies und bevor eine Verformung des Stabes auftrat die Außenisolation beschädigt wurde. Zudem war zu bemerken, dass die aufgezeichnete Kraft - Verschiebungskurve keinen linearen Anstieg zeigte, sondern leichte Nichtlinearität aufzeigte. Dies ist wiederum auf die Außenisolation zurückzuführen, die bei anfänglicher Belastung zuerst leicht eingedrückt wird. Die Ergebnisse der 4 Punkt Biegeversuche zeigten aber vor allem, dass kein großer Unterschied zwischen verpressten und unverpressten Statorstäben vorliegt. Eher überraschend war entgegen vorhergehender Annahmen, dass die unverpressten Stäbe einen höheren E – Modul aufwiesen als die verpressten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich durch den Pressvorgang die Volumenverhältnisse der Einzelkomponenten veränderten und dadurch eine geringfügige Veränderung des E – Moduls entsteht.

Im nächsten Schritt wurden zahlreiche experimentelle Modalanalysen mit verschiedensten Stabgeometrien durchgeführt. Diese lieferten sehr gute Ergebnisse, da die Versuchsstäbe sowohl bezogen auf die z – als auch auf die y – Achse geprüft werden konnten. Ergebnis waren die Eigenfrequenzen der Stäbe, von denen man auf den jeweiligen E – Modul zurückrechnen konnte. Weiters wurden später die Eigenfrequenzen der experimentellen mit jenen der rechnerischen Modalanalyse verglichen.

In jedem Fall zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der ermittelten E – Moduln mit jenen der analytischen Lösung, und auch eine gute Übereinstimmung mit den 4 Punkt Biegeversuchen.

Zusätzlich zu den Versuchen zur Bestimmung der E – Moduln wurde dann speziell für die Versuchsstäbe ein Torsionspendel zur Ermittlung des Schubmoduls konstruiert. Aus dem dynamischen Schwingversuch konnten neben der Frequenz, über die dann mit Hilfe der Torsionssteifigkeit auf den Schubmodul zurückgerechnet wurde, auch noch die Dämpfung der Versuchsstäbe bestimmt werden.

Da bis zu diesem Zeitpunkt noch keine Untersuchungen hinsichtlich des Schubmoduls angestellt wurden, sind die Ergebnisse umso interessanter. Es kann hier angemerkt werden, dass eine ähnlich sehr gute Übereinstimmung mit dem analytisch gefundenen Ergebnis vorliegt. Der Torsionsversuch liefert insofern qualitativ sehr hochwertige Ergebnisse, da die Einflüsse von außen stark minimiert werden konnten, und zudem das Massenträgheitsmoment sehr genau bestimmt wurde. Mit Hilfe einer guten Auswertesoftware konnten die Versuchsdaten sehr genau weiterverarbeitet werden. Bei der Dämpfung zeigte sich, dass diese entgegen der Theorie nicht konstant über die Amplitude war. Grund hierfür ist, dass die Luftreibung bei höheren Amplituden einen geringeren Einfluss hat als bei kleiner werdender Amplitude. Wobei an dieser Stelle bemerkt werden muss, dass sich dies in einem äußerst kleinen Bereich bewegt. Daneben könnte auch noch Materialdämpfung selbst ein Grund dafür sein bzw. die Einspanndämpfung an den Einspannstellen.

Nachdem die experimentellen Versuche eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zeigten, wurden die gefundenen Stabeigenschaften im letzten Teil der Arbeit auf eine FE – Modell übertragen. Hierbei wurde der Statorstab als Stab mit orthotropen Eigenschaften nachgebildet und die gefundenen analytischen Ergebnisse als Materialdefinitionen angewendet. Zudem wurden in einer Netzstudie die Anzahl der Elemente über den Querschnitt und in Stabrichtung variiert. Damit kann eine Empfehlung hinsichtlich eines optimalen Netzes gemacht werden. Ziel dabei war es ja ein möglichst einfaches Modell mit wenig Rechenaufwand zu finden. Interessant war vor allem, dass ab einem gewissen Feinheitsgrad, eine weitere Verfeinerung keine größeren Verbesserungen auf das Endresultat hatte. Die Ergebnisse der rechnerischen Modalanalysen wurden mit jenen der experimentellen verglichen. Die Abweichung des FE – Modells (in Kombination mit der analytischen Lösung) ist, sofern man das geeignete Netz wählt, kleiner 5%. Dabei kann man also von einem qualitativ sehr hochwertigen Ergebnis sprechen.

Das Ziel, für die Statorstäbe ein orthotropes Materialmodell zu finden, konnte umgesetzt werden. Das die gefundene analytische Lösung mit der die Elastizitätskonstanten bestimmt werden sehr gute Ergebnisse liefert, zeigten alle experimentellen Versuche und auch das abschließende erstellte FE – Modell auf Basis dieser Daten. Die endgültigen Abweichungen der Ergebnisse aus der rechnerischen Modalanalyse zeigen, dass eine qualitativ sehr hochwertige Lösung gefunden wurde. Zudem besitzt diese allgemeine Gültigkeit, was auch durch die Versuche verschiedener Stabtypen bzw. Stabgeometrien bestätigt wird.

## 7 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: links: Fertigung des Statorwickelkopfes einer Turbomaschine, rechts: Statorstab vereinfachte Darstellung	7
Abbildung 2: Vorgehensweise, Analytisch – Experimentell – FEM	9
Abbildung 3: Statorstab, links: unverpresst; rechts: verpresst	10
Abbildung 4: Schematischer Aufbau eines Statorstabs; Lage des Koordinatensystems	10
Abbildung 5: Definitionen für Faserverbundwerkstoffe	12
Abbildung 6: a Unidirektionale Schicht, b Mehrschichten-Verbund bestehend aus mehreren Einzelschichten	13
Abbildung 7: Werkstoff-Volumenelement mit den zugehörigen Spannungen	14
Abbildung 8: Orthotropes Volumenelement gekennzeichnet durch 3 senkrecht zueinander orientierte Symmetrieebenen	15
Abbildung 9: a Volumenelement einer UD – Schicht b Illustration der transversalen Isotropie	16
Abbildung 10: Transversal isotropes unidirektional verstärktes Material	17
Abbildung 11: Volumenanteile der Komponenten in einem Verbundwerkstoff	18
Abbildung 12: Repräsentative Einheitszelle und Federmodell zur Ermittlung des E – Modul in Faserrichtung	19
Abbildung 13: Idealisierung der Anordnung im Verbund, Anwendung auf den Statorstab	20
Abbildung 14: Federmodell zur Ermittlung des E-Moduls quer zur Faserrichtung	21
Abbildung 15: Vergleich der verschiedenen mikromechanischen Modelle	23
Abbildung 16: Anwendung des Federmodells auf den Statorstab, Parallelschaltung	25
Abbildung 17: Anwendung des Federmodells auf den Statorstab, Serienschaltung	26
Abbildung 18: Elastische Deformation, Definition Schub	28
Abbildung 19: Schematischer Aufbau eines Statorstabes	32
Abbildung 20: Eingabemaske Microsoft Excel	33
Abbildung 21: Einflussgrößenuntersuchung, Anzahl der Teilleiter untereinander	38
Abbildung 22: Einflussgrößenuntersuchung, Temperatureinfluss der Außenisolation	39
Abbildung 23: Einflussgrößenuntersuchung, Einfluss der Lackschicht	40
Abbildung 24: Schema 4 Punkt-Biegeversuch mit Biegemomentenverlauf	42
Abbildung 25: Versuchsaufbau 4 Punkt - Biegeversuch	43
Abbildung 26: Versuchsaufbau 4 Punkt - Biegeversuch	44
Abbildung 27: Messung der Durchbiegung (Verschiebung) durch induktiven Messaufnehmer	44
Abbildung 28: Versuchsstab Typ 1, links verpresster Stab, rechts ein nicht verpresster Stab	45
Abbildung 29: Verschiedene Proben des Versuchsstabes Typ 1	45
Abbildung 30: Kraft – Verschiebungsdiagramm 4 Punkt – Biegeversuch	46
Abbildung 31: Vergleich der E – Moduln aus den 4 Punkt – Biegeversuchen, verpresster Statorstab	48
Abbildung 32: Vergleich der E – Moduln aus den 4 Punkt – Biegeversuchen, unverpresster Statorstab	48
Abbildung 33: Vergleich der gemittelten E – Moduln, bis 6 kN, aus den 4 Punkt - Biegeversuchen	49
Abbildung 34: Ergebnisvergleich, 4 Punkt Biegeversuch – Anayltisches Ergebnis	49
Abbildung 35: Durchbiegung des Versuchsstabes um die z – Achse, schematische Darstellung	50
Abbildung 36: Experimentelle Modalanalyse – Impulsmethode	52
Abbildung 37: Messaufbau, Versuchsstab Typ 1, experimentelle Modalanalyse bez. z - Achse	53
Abbildung 38: Messaufbau, Versuchsstab Typ 2, experimentelle Modalanalyse bez. y – Achse	53
Abbildung 39: Experimentelle Modalanalyse – Versuchsstab Typ 2	54
Abbildung 40: Versuchsdurchführung experimentelle Modalanalyse mit Impulshammer	54
Abbildung 41: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. z – Achse	55
Abbildung 42: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. y - Achse	56
Abbildung 43: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. z – Achse	57

Abbildung 44: Experimentelle Modalanalyse, Ergebnisse FFT – Analyse, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. y – Achse	58
Abbildung 45: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab Typ 1 verpresst, bez. z – Achse	62
Abbildung 46: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab Typ 1 unverpresst, bez. z - Achse	62
Abbildung 47: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab 2, bez. z - Achse	63
Abbildung 48: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – Analytik, Versuchsstab 2, bez. y - Achse	63
Abbildung 49: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – 4PBV – Analytik, Versuchsstab Typ 1 verpresst	64
Abbildung 50: Ergebnisvergleich, exp. Modalanalyse – 4PBV – Analytik, Versuchsstab Typ 1 unverpresst	64
Abbildung 51: Tordierter, verdrehter Stab	67
Abbildung 52: Pendelversuch, Masse auf 2 Seilen	69
Abbildung 53: Pendelversuch zur Bestimmung des Massenträgheitsmoments des Hilfskörpers	70
Abbildung 54: Proben Torsionspendelversuch, Versuchsstab Typ 2	72
Abbildung 55: CAD-Modell Torsionspendel	72
Abbildung 56: Torsionspendel	73
Abbildung 57: links: Torsionspendel; rechts: Torsionspendel – mit Hilfskörper zur Massenträgheitsmomentbestimmung	73
Abbildung 58: Torsionspendelversuch – Daten Beschleunigungsaufnehmer 1	75
Abbildung 59: Torsionspendelversuch – Daten Beschleunigungsaufnehmer 2	75
Abbildung 60: Torsionspendel - Torsionsschwingung	76
Abbildung 61: Ergebnis der FFT – Analyse der Torsionsschwingung	76
Abbildung 62: Zoom - Genaue Bestimmung der Drehfrequenz der Torsionsschwingung	77
Abbildung 63: Torsionspendelversuch - Signal ungefiltert	77
Abbildung 64: Torsionspendelversuch – Signal digital gefiltert	77
Abbildung 65: Torsionspendelversuch – Amplitudenabklingkurve	78
Abbildung 66: Log. Dekrement als Funktion der Amplitude	80
Abbildung 67: Amplitude über Dämpfungsgrad	81
Abbildung 68: Torsionspendel – Einspannlänge	83
Abbildung 69: Ergebnisvergleich Torsionspendelversuch – analytische Lösung	83
Abbildung 70: „Verschmiertes“ Modell Versuchsstab, Stab mit konstantem Rechteckquerschnitt	85
Abbildung 71: Aufteilung der Elemente über den Querschnitt	86
Abbildung 72: Auteilung der Elemente in Stabrichtung	86
Abbildung 73: Materialdefinition, orthotroper Versuchsstab Typ 1	87
Abbildung 74: Eigenform, 1. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	87
Abbildung 75: Eigenform, 2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	88
Abbildung 76: Eigenform, 3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	88
Abbildung 77: Eigenform, 1. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	88
Abbildung 78: Eigenform, 2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	89
Abbildung 79: Eigenform, 1. Torsionseigenfrequenz	89
Abbildung 80: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse	93
Abbildung 81: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	94
Abbildung 82: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 3. Biegeeigenfrequenz bez. z - Achse	94
Abbildung 83: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse	95
Abbildung 84: Netzstudie, Versuchsstab Typ 1, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. y - Achse	95
Abbildung 85: Materialdefinition, orthotroper Versuchsstab Typ 2	98
Abbildung 86: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse	102
Abbildung 87: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse	103
Abbildung 88: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 3. Biegeeigenfrequenz bez. z – Achse	103
Abbildung 89: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 1. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse	104
Abbildung 90: Netzstudie, Versuchsstab Typ 2, Ergebnisse 2. Biegeeigenfrequenz bez. y – Achse	104

## 8 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Auswertung E-Moduln, 4 Punkt - Biegeversuche	47
Tabelle 2: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab NVF5	59
Tabelle 3: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab NVF2	59
Tabelle 4: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab A1	60
Tabelle 5: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab A4	60
Tabelle 6: Mittelwerte E – Moduln Versuchsstab Typ 1	60
Tabelle 7: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 22°C	61
Tabelle 8: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 110°C	61
Tabelle 9: Messwerte Eigenfrequenzen und ermittelte E – Moduln Versuchsstab Typ 2, 110°C	61
Tabelle 10: Versuchsdaten Trifilarpendel	71
Tabelle 11: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 1	79
Tabelle 12: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 2	79
Tabelle 13: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 3	79
Tabelle 14: Auswertung Torsionpendelversuch – Probestab 3 mit Hilfskörper	79
Tabelle 15: Torsionspendelversuch – Ergebnis, Eigenschaften Versuchsstab Typ 2	82
Tabelle 16: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 1, Versuchsstab Typ 1	90
Tabelle 17: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 2, Versuchsstab Typ 1	90
Tabelle 18: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 3, Versuchsstab Typ 1	90
Tabelle 19: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 4, Versuchsstab Typ 1	91
Tabelle 20: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 5, Versuchsstab Typ 1	91
Tabelle 21: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 6, Versuchsstab Typ 1	91
Tabelle 22: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 7, Versuchsstab Typ 1	92
Tabelle 23: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 8, Versuchsstab Typ 1	92
Tabelle 24: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 9, Versuchsstab Typ 1	92
Tabelle 25: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 10, Versuchsstab Typ 1	93
Tabelle 26: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse – Netzstudie – experimentelle Modalanalyse, Versuchsstab Typ 1	97
Tabelle 27: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 1, Versuchstab Typ 2	99
Tabelle 28: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 2, Versuchstab Typ 2	99
Tabelle 29: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 3, Versuchstab Typ 2	99
Tabelle 30: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 4, Versuchstab Typ 2	100
Tabelle 31: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 5, Versuchstab Typ 2	100
Tabelle 32: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 6, Versuchstab Typ 2	100
Tabelle 33: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 7, Versuchstab Typ 2	101
Tabelle 34: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 8, Versuchstab Typ 2	101
Tabelle 35: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 9, Versuchstab Typ 2	101
Tabelle 36: Ergebnisse Modalanalyse, Variante 10, Versuchstab Typ 2	102
Tabelle 37: Prozentuale Abweichung der Ergebnisse – Netzstudie – experimentelle Modalanalyse, Versuchsstab Typ 2	106



## 9 Literaturverzeichnis

**Baumgart, R. 2009.** *Massivbau, Vorlesungsskriptum.* Hochschule Darmstadt : Fachbereich Bauingenieurwesen, 2009.

**Becker, W., Gross, D. 2002.** *Mechanik elastischer Körper und Strukturen.* Berlin; Heidelberg; New York : Springer Verlag, 2002. ISBN 3-540-43511-5.

**Fachhochschule Frankfurt am Main, 2010.** *Physiklabor, Versuch 6.* Fachhochschule Frankfurt am Main : Fachbereich 2, Informatik und Ingenieurwissenschaften, Laborunterlagen.  
<http://www.fh-frankfurt.de/de/.media/~bennert/v6neu.pdf>, aufgerufen am 28.06.2010.

**FALA, 2008.** *Bericht Massenträgheit und Schwerpunkt.* Internetadresse des Berichts:  
<http://www.scribd.com/doc/7059510/FALA-Bericht-Massentragheit-Und-Schwerpunkt> . aufgerufen am 03.09.2010.

**Ferber, F. 2003.** *Technische Mechanik 2 – Festigkeitslehre, Vorlesungsskriptum.* Universität Paderborn : Lehrstuhl für technische Mechanik, 2003.

**Kress, G. 2009.** *Mechanik der Faserverbundwerkstoffe.* Eidgenössische Technische Hochschule Zürich : Zentrum für Strukturtechnologien, 2009.

**LMS, 2010.** *Modalanalyse.* LMS Engineering Innovation, Homepage. <http://www.lmsintl.com/modalanalyse>, aufgerufen am 08.04.2010

**Moser, K. 1992.** *Faser – Kunststoff – Verbund. Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen.* Düsseldorf : VDI – Verlag, 1992. ISBN 3-18-401187-9

**Schürmann, H. 2005.** *Konstruieren mit Faser – Kunststoff – Verbunden.* Berlin; Heidelberg; New York : Springer Verlag, 2005. ISBN 978-3-540-72189-5