



Schlegl Bernd

Konzeptstudie eines neuen Rotordesigns bei Hydrogeneratoren

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom – Ingenieur

Technische Universität Graz

Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften

Studienrichtung Wirtschaftsingenieurwesen – Maschinenbau

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr. techn. Andreas Marn

Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik

Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Franz Heitmeir

Graz, September 2010

Deutsche Fassung:

Beschluss der Curricula – Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008

Genehmigung des Senates am 1.12.2008

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtliche und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, am 05. Oktober 2010

.....
Bernd Schlegl

Vorwort

Diese Diplomarbeit wurde in Zusammenarbeit mit der Firma Andritz AG, Andritz Hydro in Weiz durchgeführt. Auf diesem Wege möchte ich mich bei Andritz Hydro für die Bereitstellung dieser Diplomarbeit bedanken. Vor allem gebührt mein Dank meinem Betreuer von Seiten der Andritz Hydro, Herrn Dipl. Ing. Klaus Walter, der mir stets mit seinem enormen technischen Wissen und viel Geduld zur Seite stand. Nicht zuletzt möchte ich mich auch bei dem gesamten Team der Mechanischen Berechnung, Dipl. Ing. Gerhold Matthias, Dipl. Ing. Thaler Georg, Dipl. Ing. John Alexander und Dipl. Ing. Michele Pigbougum für ihre hervorragende fachliche Unterstützung aber auch für die sehr kollegiale Aufnahme in ihrer Gruppe bedanken.

Für die Betreuung an der Technischen Universität Graz, am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik möchte ich mich besonders bei Herrn Dipl.-Ing. Dr. techn. Andreas Marn für die große Unterstützung bedanken.

Mein größter Dank gebührt meiner Familie. Meinen Eltern Gerhard und Brigitte, die mir nicht nur meine Ausbildung ermöglicht haben, sondern mir auch sonst immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind und meiner Schwester Sandra, die mir stets ein großes Vorbild war.

Danke.

Schlegl Bernd

Nomenklatur

Abkürzungen und Indizes

S	Schwerpunkt
M	Masse, Motor
EK	Eingehängte Kette
D	Drehschwinger
1,2,...	Masse 1, Masse 2, ...
O	Schnittpunkt der Lagerverbindungsgeraden
W	Wellendurchstoßpunkt
U,A	Übertragungsmatrix

Griechisch

ω	$\frac{rad}{s}$	Eigenkreisfrequenz, Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit
Ω	$\frac{rad}{s}$	Erregerfrequenz
$\dot{\varphi}$	$\frac{rad}{s}$	Winkelgeschwindigkeit
$\ddot{\varphi}$	$\frac{rad}{s^2}$	Winkelbeschleunigung
λ		Eigenwert
β	rad	Winkel
α_0	°	Eingriffswinkel
φ_0	rad	Nullphasenwinkel

φ	rad	Verdrehwinkel bei Drehschwingern, Laufvariable
Ψ, φ, α	rad	Phasenwinkel
η		Frequenzverhältnis
κ		Schubbeiwert
θ	kgm ²	Massenträgheitsmoment
ξ, η, ζ		Körperfeste Koordinaten
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte

Symbol

x		Zustandsgröße, Weg, Schwalbenschwanz- Halsbreite
\dot{x}	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit
\ddot{x}	$\frac{m}{s^2}$	Beschleunigung
\hat{x}		Wegamplitude
t	s	Zeit
T	s	Schwingungsdauer
f	Hz	Frequenz, Eigenfrequenz
c	$\frac{N}{m}$	Federsteifigkeit
N	N	Normalkraft
M	Nm	Biegemoment
Q	N	Querkraft

L	$kg\ m^2\ s^{-1}$	Drallkomponente
m	kg	Masse
s	$\frac{N}{m}$	Biegesteifigkeit
A, U		Übertragungsmatrix eines Feldes
y		Zustandsvektor
B	$\frac{Vs}{m} = T(esla)$	Magnetische Flußdichte
g	$\frac{m}{s^2}$	Erdbeschleunigung; 9.81 m/s
p		Anzahl der Pole
M_T	Nm	Torsionsmoment
d	m	Durchmesser
Θ, J	kgm^2	Massenträgheitsmoment
Θ	A	Durchflutung
I	A	Strom
I	mm^4	Flächenträgheitsmoment
G	$\frac{N}{mm^2}$	Schubmodul
I_p	mm^4	Polares Flächenträgheitsmoment
U	kgm	Unwucht
ε, e	m	Exzentrizität
E	$\frac{N}{mm^2}$	Elastizitätsmodul
q	$\frac{N}{m}$	Streckenlast
σ	$\frac{N}{mm^2}$	Normalspannung

τ	$\frac{N}{mm^2}$	Schubspannung
ϵ		Dehnung
w	m	Querauslenkung, Durchbiegung
a	m	Arbeitsweg
A	Nm	Arbeit
δP	N	Virtueller Kraftzuwachs
P	N	Einzelkraft
X	N/Nm	Statisch unbestimmte Kraftgröße
U^*	Nm	Verzerrungsenergie
σ_N	$\frac{N}{mm^2}$	Normalspannung zufolge Normalkraft
σ_B	$\frac{N}{mm^2}$	Normalspannung zufolge Biegemoment
β		Kerbfaktor
α	$\frac{1}{K}$	Wärmeausdehnungskoeffizient
T_m	K	Mittlere Temperaturdifferenz
Θ	$\frac{K}{m}$	Temperaturmoment
A_S	m ²	Spannungsquerschnitt
R_e	$\frac{N}{mm^2}$	Streckgrenze
R_m	$\frac{N}{mm^2}$	Zugfestigkeit

Zusammenfassung

In meiner Diplomarbeit beschäftige ich mich mit einem weiterentwickelten Rotordesign für Hydrogeneratoren. Speziell befasst sich diese Arbeit mit der sogenannten Kette. Die Kette ist jenes ringförmige Bauteil an dessen Umfang die Pole eingehängt werden. Die Welle wird als Rippenwelle ausgeführt. Das heißt im Bereich des Generators werden eine bestimmte Anzahl von Rippen, gleichmäßig über den Umfang verteilt, auf die Welle aufgeschweist. An der Innenseite der Kette befinden sich über den Umfang gleichmäßig verteilte Nuten, welche sich über die gesamte axiale Länge des Kettenkörpers erstrecken. Die Anzahl dieser Nuten ist mit der Anzahl der aufgeschweisten Rippen ident. Jede einzelne Nut in der Kette hat in einer Rippe eine Gegennut. Der ringförmige Körper der Kette wird nun im erwärmten (aufgeweiteten) Zustand axial so über die Rippenwelle geschoben, dass die Nuten exakt übereinander liegen. Durch das axiale Einschieben einer Passleiste in die so entstandenen rechteckigen Lücken und den anschließenden Abkühlvorgang, entsteht eine Welle- Nabe- Verbindung.

Die Innovation besteht nun darin, die Kette anstatt mittels rechteckiger Nuten und Schrumpfprozess, mittels Schwalbenschwanzverbindungen an der Rippenwelle einzuhängen. Dadurch würde der aufwändige und außerdem sehr kostenintensive Schrumpfvorgang entfallen. Durch das Einhängen mittels Schwalbenschwänzen findet außerdem auch in hohen Drehzahlbereichen immer ein definierter Kontakt in den Schwalbenschwanzkontaktflächen statt.

Die auftretenden Fliehkräfte werden durch das Einhängen der Kette nicht mehr ausschließlich in Form von Umfangsspannungen in die Kette übertragen, sondern zum Teil über den Schwalbenschwanz in die Rippe und weiter in die Welle geleitet.

Weiters trägt die Kette aufgrund des definierten Kontaktes über der gesamten Nabensternlänge in den Schwalbenschwanzkontaktflächen zur Biegesteifigkeit des Rotors bei.

Ziel dieser Diplomarbeit ist eine Machbarkeitsstudie der sogenannten „Eingehängten Kette“. Es soll anhand eines vereinfachten Modells, eine parametrisierte analytische Berechnung der nominellen Spannungen in der Kette erstellt werden, um schnell und effektiv die qualitativen und quantitativen Veränderungen diverser Spannungen bei Variation bestimmter geometrischer Parameter errechnen zu können. Weiters soll ein passendes FE-Modell erstellt werden. Die analytischen Ergebnisse sollen mit den FE-Ergebnissen verglichen werden. Diverse Ergebnisse aus der finiten- Elemente- Rechnung wurden in der Vergangenheit mit Messungen verglichen und validiert.

Des Weiteren müssen die vom Kunden geforderten Sicherheitsabstände zu den kritischen Drehzahlen eingehalten werden. Dazu muss eine rotodynamische Berechnung der Torsions- und Biegeeigenfrequenzen durchgeführt werden.

Abstract

The present diploma thesis deals with an improved rotor design for hydro generators. Specifically, this work has its focus on the so-called chain. The chain is a ring-shaped component where the poles are mounted. The shaft is designed as a ribshaft. This means, that in the area of the generator a number of ribs - evenly distributed over the circumference - is welded on the shaft. On the inside of the chain there are evenly over the circumference distributed grooves, which extend over the tire axial length of the chain body. The number of these grooves is identically equal to the number of the weld-on ribs. Each groove in the chain has an inverse groove in a rib. The annular body of the chain is now in the heated (expanded) state axially pushed over the rib shaft so that the grooves are placed exactly one above the other. Due to the axial insertion of a pass bar into the resulting rectangular gaps and the subsequent cooling process, there arises a shaft-hub connection.

The innovation of my diploma thesis is to mount the chain instead of using rectangular grooves and the shrinking process, by means of dovetail joints in the rib shaft. As a result the complex and very expensive shrinking process would no longer be required. Mounting through dovetails allows defined contacts in the dovetail contact surfaces also for high speed ranges. Due to the mounting of the chain, the centrifugal forces are no longer exclusively transmitted in the chain by means of hoop stress, but are partly delivered into the rib through the dovetail and then passed into the shaft. Furthermore, because of the defined contact over the entire length of the hub star length in the dovetail contact surfaces, the chain contributes to the bending stiffness of the rotor.

The aim of this diploma thesis is a feasibility study of the so-called "Mounted Chain". Based on a simplified model, there a parameterized, analytical calculation of nominal tensions in the chain should be applied. This enables the company to calculate the qualitative and quantitative changes in various tensions by variation of certain geometric parameters quickly and efficiently. Additionally, a suitable FE-model will be created. The analytical results will be compared with the FE-results. Other results of the finite-element statement have been compared and validated in the past.

Furthermore, safety distances to the critical rotation speed must be strictly adhered to as claimed by the customer. This requires a rotor dynamic calculation of the torsional and bending natural frequencies.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	II
Nomenklatur	III
Zusammenfassung.....	VII
Abstract	VIII
Inhaltsverzeichnis	IX
1 Einleitung	11
1.1 Wasserkraftwerke	11
1.2 Allgemeine Beschreibung des Generators (Wiedemann & Kellenberger, 1967)	13
1.3 Aufbau des Rotors - Derzeitiger Stand der Technik	18
1.4 Erklärung des Prinzips der „Eingehängten Kette“	21
1.5 Ziel der Arbeit.....	22
2 Theoretische Grundlagen	23
2.1 Grundlagen Rotordynamik (Gasch, Nordmann, & Pfützner, 2002).....	23
2.1.1 Starre und biegeelastische Rotoren unter Unwucht.....	26
2.1.2 Drehschwingungen (Marn, 2010).....	30
2.1.3 Die biegekritische Drehzahl (Markert, 2003)	31
2.1.4 Selbstzentrierung des überkritischen Rotors (Marn, 2010)	32
2.2 Verfahren nach Holzer (Markert, 2003).....	33
2.2.1 Berechnung der Torsionseigenfrequenzen nach dem Verfahren von Holzer am Beispiel eines 8-poligen Generators mit dem Verfahren von Holzer	38
2.3 Übertragungsmatrizenverfahren (Markert, 2003)	41
2.3.1 Übertragungsmatrizen für Drehschwingungen.....	41
2.3.2 Übertragungsmatrizen für Biegeschwingungen.....	43
2.4 Einfluss der Kreiselwirkung (Gasch, Nordmann, & Pfützner, 2002)	49
2.5 Anstrengungshypothesen (Celigoj, 2004)	54
2.5.1 Fließhypothesen.....	54
2.5.2 Bruchhypothesen	58
2.5.3 Versagenshypothesen	59

2.6	Satz von Castigliano bzw. Menabrea (Parkus, 2005).....	59
3	Verwendete Software	61
3.1	Wellendynamik Beta 2	61
3.1.1	Rechenmethode	61
3.1.2	Beschreibung der Fähigkeiten des Programms	61
3.1.3	Bedienungsanleitung für Wellendynamik Beta2.....	62
3.2	ANSYS Workbench v11.....	62
4	Eingehängte Kette.....	64
4.1	Überprüfung der Machbarkeit der eingehängten Kette auf einen Rotor mit Vollwelle	64
4.1.1	Untersuchung eines 6-poligen Generators	65
4.2	Einhängen der Kette mittels Schwalbenschwanz an der Rippenwelle.....	68
4.3	Analytisches Modell	69
4.3.1	Analytische Berechnung mit dem Satz von Menabrea	70
4.3.2	Überprüfung des parametrisierten analytischen Berechnungstools	89
4.3.3	Analyse der auftretenden Kräfte und Spannungen am Beispiel eines 8- poligen Generators 97	
4.3.4	Analyse der auftretenden Kräfte und Spannungen am Beispiel eines 32- poligen Generators 104	
4.4	Rotordynamische Auslegung am Beispiel eines 32- poligen Generators.....	118
4.4.1	Steifigkeitsberechnung des Nabensterns.....	118
4.4.2	Torsionseigenfrequenzen.....	122
4.4.3	Biegekritische Drehzahl.....	128
4.4.4	Unwuchterzwungene Schwingung.....	129
4.4.5	Modalanalyse des Nabensterns	136
5	Ausblick.....	139
6	Abbildungsverzeichnis	140
7	Literaturverzeichnis	145

1 Einleitung

Im Zuge dieser Diplomarbeit wird eine Machbarkeitsstudie eines neuen Rotordesigns für einen Generator durchgeführt. Ein Generator wandelt die mechanische Energie der Turbine in elektrische Energie um und ist somit das Herzstück eines jeden Kraftwerks. Man unterscheidet diverse Arten von Kraftwerken (Dampfkraftwerke, Wasserkraftwerke, Windkraftanlagen, etc.). Ausschlaggebend ist, durch welches Medium die Turbine in Bewegung gesetzt wird.

Im Falle dieser Machbarkeitsstudie wird die Turbine vom Medium Wasser angetrieben. Man spricht daher von einem Wasserkraftwerk. Generatoren, die in Wasserkraftwerken zum Einsatz kommen, nennt man Wasserkraft- bzw. Hydrogeneratoren und genau für einen solchen Hydrogenerator soll die Machbarkeit eines neuen Rotordesigns überprüft werden.

1.1 Wasserkraftwerke

Ein Wasserkraftwerk ist ein Kraftwerk, das die potentielle oder kinetische Energie des Wassers in elektrischen Strom umwandelt. Damit wird die Wasserkraft für den Menschen nutzbar gemacht.

Laufwasserkraftwerk

Bei einem Laufwasserkraftwerk wird ein Fluss gestaut und mit dem abfließenden Wasser elektrischer Strom gewonnen. In Abbildung 1-1 ist das Schema eines Laufwasserkraftwerks zu sehen.

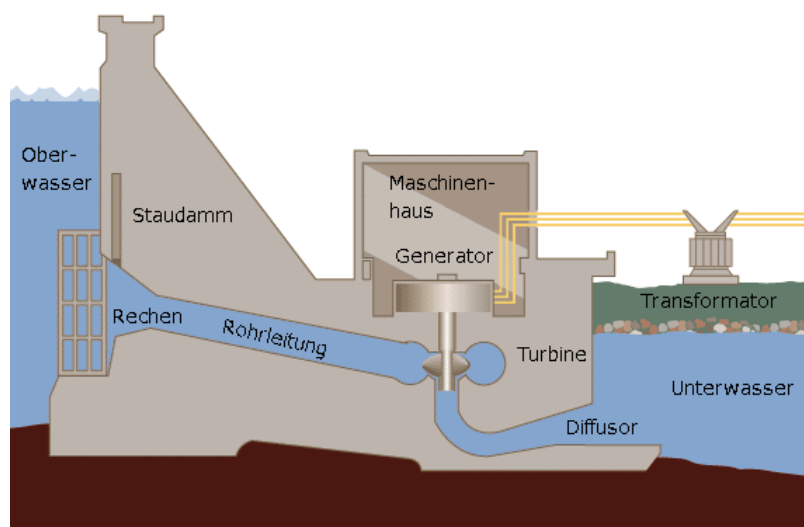


Abbildung 1-1 Schema eines Laufwasserkraftwerks

Speicherkraftwerk

Bei einem Speicherkraftwerk wird das Wasser über einen Zeitraum (mehrere Stunden bis mehrere Monate) gespeichert, um bei Bedarf wertvolle Spitzenenergie zu erzeugen.

Pumpspeicherkraftwerk

Ein Pumpspeicherkraftwerk ist ein Speicherkraftwerk, bei dem mit überschüssigem Strom Wasser aus einer niedrigen Lage in einen höher gelegenen Stausee gepumpt wird, um später Spitzenstrom zu erzeugen. Pumpspeicher-Kraftwerke bieten als derzeit einzige Energieanlagen die Möglichkeit, Elektrizität wirtschaftlich und in nennenswertem Umfang mit Hilfe potentieller Energie (Speicherwasser) zu speichern. Abbildung 1-2 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Pumpspeicherkraftwerks.

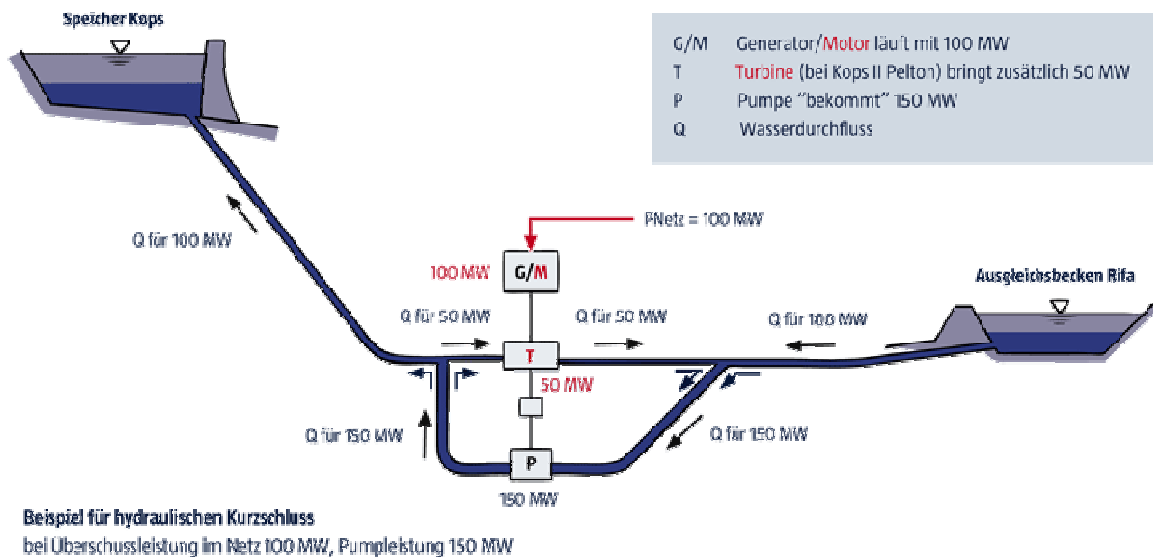


Abbildung 1-2 Prinzipieller Aufbau eines Pumpspeicherkraftwerkes

In Abbildung 1-3 ist ein Schnitt durch ein österreichisches Pumpspeicherkraftwerk dargestellt. Am oberen Ende des 35 Meter langen Wellenstranges sitzt eine Pelton-turbine. Am unteren Ende befindet sich die Pumpe, welche mit überschüssiger Energie (z.B. in der Nacht) das Wasser wieder in den Speicher zurück pumpt. Zwischen der Pelton-turbine und der Pumpe sitzt der Generator. Mit diesem beschäftige ich mich im Zuge meiner Diplomarbeit. In der Regel werden bei Pumpspeicherkraftwerken Pump-turbinen verwendet. Diese wechseln durch Drehrichtungsänderung vom Turbinenbetrieb in den Pumpbetrieb.

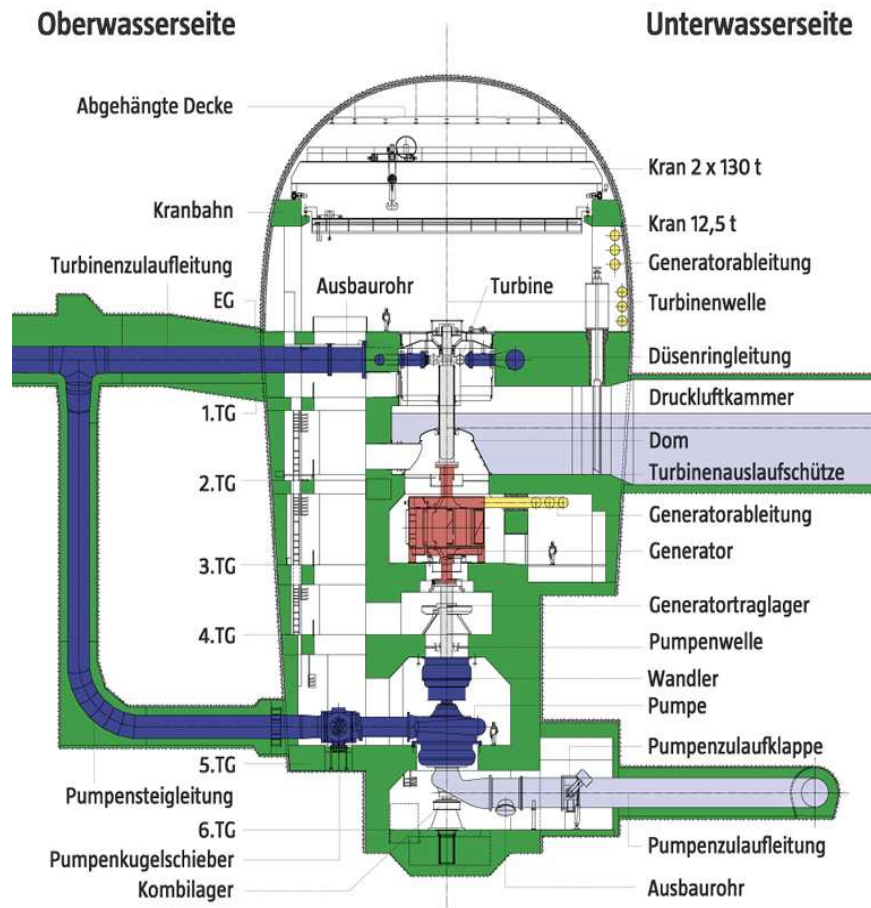


Abbildung 1-3 Aufbau eines österreichischen Pumpspeicherkraftwerks

1.2 Allgemeine Beschreibung des Generators (Wiedemann & Kellenberger, 1967)

Ein elektrischer Generator ist eine elektrische Maschine, die Bewegungsenergie oder mechanische Energie in elektrische Energie wandelt und damit technisch gesehen identisch mit einem Elektromotor ist, der umgekehrt elektrische Energie in Bewegungsenergie wandelt. Der Generator fußt auf dem von Michael Faraday 1831 entdeckten Prinzip der elektromagnetischen Induktion. Allen elektrischen Generatoren, die mittels elektrischer Induktion arbeiten, ist das Prinzip gemeinsam, mechanische Leistung in elektrische Leistung umzuwandeln. Die mechanische Leistung wird dem Generator in Form der Drehung einer mechanischen Welle zugeführt. Die Umwandlung beruht auf der Lorentzkraft, die auf bewegte, elektrische Ladungen in einem Magnetfeld wirkt. Bewegt sich ein Leiter quer (senkrecht) zum Magnetfeld, wirkt die Lorentzkraft auf die Ladungen im Leiter in Richtung dieses Leiters und setzt sie so in Bewegung. Diese Ladungsverschiebung bewirkt eine Potentialdifferenz und erzeugt eine elektrische Spannung zwischen den Enden des Leiters. Um die Spannung zu erhöhen, werden mehrere in Form einer Spule in Reihe geschaltete Leiter verwendet. Im Generator wird der Rotor (auch Läufer genannt) im Inneren des Generators gegenüber dem feststehenden Stator-Gehäuse (auch Ständer genannt) gedreht. Durch das vom Rotor mit

einem Dauermagnet oder einem Elektromagnet (Feldspule oder Erregerwicklung genannt) erzeugte, umlaufende magnetische Gleichfeld wird in den Leitern oder Leiterwicklungen des Stators durch die Lorentzkraft elektrische Spannung induziert.

Großtechnische Drehstrom-Synchronmaschinen bestehen aus einem Stator, der im Prinzip eine große Induktionsspule mit Eisenkern darstellt. Der Stator ist in der Regel kein massiver Eisenkörper, sondern wird zur Vermeidung von Wirbelströmen aus vielen einzelnen, voneinander isolierten Blechlamellen aufgebaut. Der drehbare Teil des Generators besteht aus den Lagern und dem Rotor. Dem Rotor wird über die Welle mechanische Leistung zugeführt. Schnelllaufende Synchrongeneratoren, wie sie in Kombination mit Dampfturbinen in Kohle- und Kernkraftwerken eingesetzt werden, werden als Turbogenerator oder Vollpolmaschine (siehe Abbildung 1-6, a) bezeichnet – sie weisen typisch zwei Pole auf. Bei Wasserkraftwerken kommen aufgrund der geringen Drehzahl der Turbinen typischerweise Schenkelpolmaschinen (siehe Abbildung 1-6, b) mit deutlich mehr als vier Polen zum Einsatz.

Grobe Einteilung der Generatoren

Abbildung 1-4 zeigt eine grobe Einteilung der Generatoren mit Hauptaugenmerk auf den, in dieser Arbeit behandelten, Synchron- Hydrogenerator.

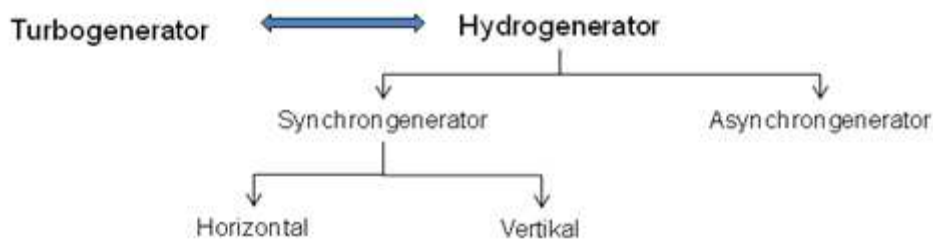


Abbildung 1-4 Einteilung der Hydrogeneratoren

Im Zuge dieser Diplomarbeit wird der Synchrongenerator näher betrachtet. Aus diesem Grund wird dieser Typ genauer beschrieben. Da die Andritz Hydro GmbH neben Hydrogeneratoren auch noch Turbogeneratoren entwickelt und fertigt, wird auch auf diese kurz eingegangen.

Synchrongenerator

Synchronmaschinen haben eine feste, der Polzahl p zugeordnete Drehzahl, abhängig von der Frequenz der Wechselspannung f . Die Drehzahl errechnet sich gemäß Formel (1.1).

$$n = \frac{60 * f}{p} \tag{1.1}$$

Synchronmaschinen dürfen nur in der Nähe der synchronen Drehzahl, bei Leerläuferregung und bei Übereinstimmung der Phasenfolge an das Netz geschaltet werden. Es gibt auch eine Grobsynchronisierung, bei welcher der unerregte Rotor in die Nähe des Synchronismus gebracht wird. Erst nach dem Zuschalten des Generators an das Netz wird erregt.

Aufbau und Wirkungsweise von Synchronmaschinen (Rentmeister, 1995)

Die Synchronmaschine ist eine Drehfeldmaschine, bei der in der Regel das Drehfeld im Rotor von gleichstromdurchflossenen Wicklungen aufgebaut wird, während der Stator ein- oder mehrphasige Wicklungen trägt, die vom Drehfeld induziert werden. Abbildung 1-5 zeigt eine schematische Darstellung einer Synchronmaschine.

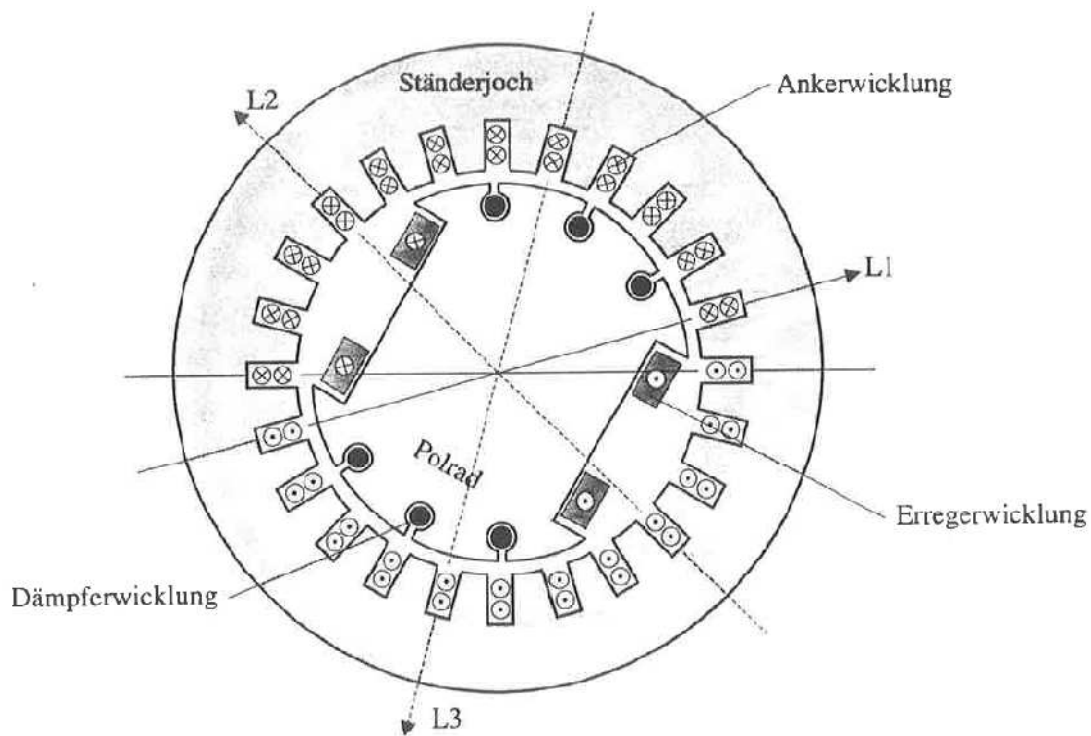


Abbildung 1-5 Prinzipieller Aufbau einer Synchronmaschine

Bei Synchronmaschinen mittlerer und großer Leistung können in Bezug auf den Rotor zwei Ausführungsformen unterschieden werden. Vorzugsweise für hohe Drehzahlen und Leistungen (z.B. Gas- oder Dampfturbinenkraftwerke) wird die Vollpolbauart (Turbogeneratoren, siehe Abbildung 1-6) verwendet, die im allgemeinen durch ein großes Längen-/ Durchmesser Verhältnis gekennzeichnet ist. Grenzen der Maschinenleistung ergeben sich durch den maximalen Rotordurchmesser (Fliehkräfte). Für niedrige Drehzahlen im gesamten Leistungsbereich wird die sogenannte Schenkelpolart (Bauart mit ausgeprägten Polen, siehe Abbildung 1-6) eingesetzt.

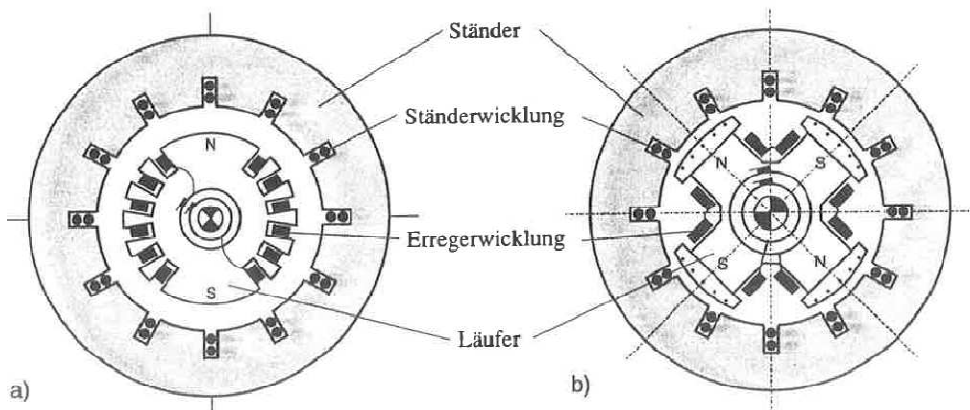


Abbildung 1-6 Schematischer Querschnitt von Vollpol- (a) und Schenkelpol- Synchronmaschine (b)

Die wesentlichen Unterschiede zwischen Vollpol- und Schenkelpol- Synchronmaschine liegen im Aufbau der Erregerwicklung und im Verlauf der Luftspaltbreite. Die Erregerwicklung der Vollpolbauart ist eine verteilte Einschichtwicklung die einen trapezförmigen Durchflutungsverlauf bewirkt. Somit ergibt sich trotz konstanter Luftspaltbreite ein Luftspaltflußdichteverlauf, der der Sinusform ausreichend nahe kommt (siehe Abbildung 1-7). Demgegenüber bewirkt die konzentrierte Erregerwicklung, die charakteristisch für die Schenkelpolart ist, einen rechteckigen Durchflutungsverlauf (siehe Abbildung 1-7), der durch die zu den Polrändern hin zunehmende Luftspaltbreite wiederum zu einem ausreichend sinusförmigen Flußdichteverlauf führt.

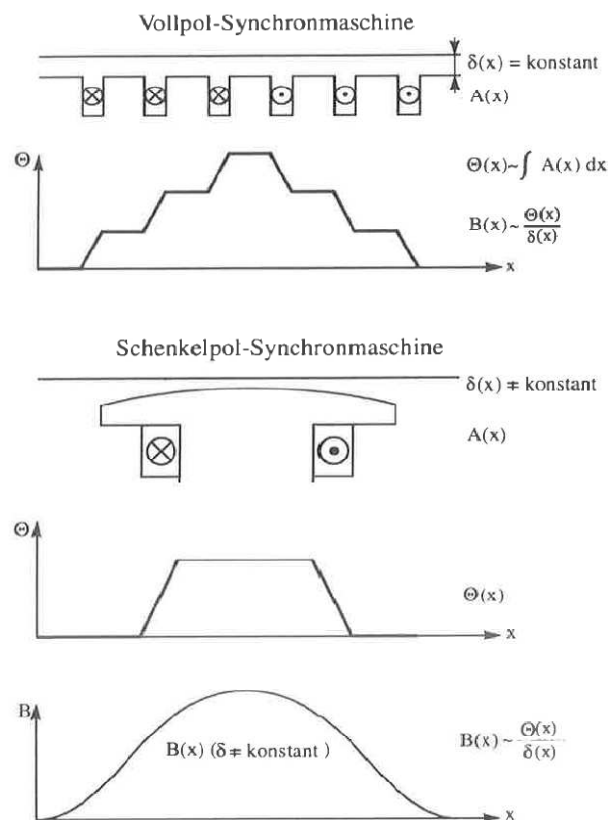


Abbildung 1-7 Durchflutungsverläufe für Vollpol- und Schenkelpol- Synchronmaschine

Bei der Innenpolmaschine (übliche Bauform) trägt der Läufer die Erregerwicklung, die mit Gleichstrom gespeist wird. Die Stromzufuhr zur Erregerwicklung erfolgt meist über Schleifringe. Es gibt auch verschleißfreie Lösungen mit rotierenden Gleichrichtern und transformatorischer Übertragung der Erregerleistung. Der durch die Erregerwicklung fließende Gleichstrom erzeugt ein magnetisches Feld, das zeitlich gesehen konstant ist und bei ruhendem Läufer im Raum stillsteht. Beginnt man nun den Läufer zu drehen, so wird mit ihm auch das magnetische Feld der Pole umlaufen. Dieses umlaufende Feld schneidet nun die im Ständer liegenden Wicklungen zeitlich aufeinanderfolgend, entsprechend ihren räumlichen Abständen von $\frac{120^\circ}{p}$ (p...Polpaarzahl). Die Folge davon ist, dass in den drei Wicklungsteilen durch Bewegungsinduktion Spannungen induziert werden, die zeitlich um 120° (unabhängig von p) verschoben sind.

Außenpolmaschinen werden manchmal für kleinere Leistungen ausgeführt; dazu ist es notwendig, dass die „Drehstromleistung“ mit Hilfe von drei Schleifringen nach außen geführt wird. Bei größeren Leistungen wird dieses Prinzip unwirtschaftlich, weil die Drehstromleistung ein Vielfaches der Gleichstrom = Erregerleistung beträgt. Häufig trägt der Rotor noch eine weitere Wicklung in Form der Dämpferwicklung, die eine Käfigwicklung darstellt. Bei Schenkelpolmaschinen besteht diese Wicklung aus üblicherweise blanken, massiven Rundstäben, die axial in die Nuten der Pole eingeschoben und durch sogenannte Dämpferinge an den Enden des Läufers zu einer Käfigwicklung verbunden werden. Bei Maschinen mit Vollpolläufern bestehen meist die Nutverschleißkeile aus gut leitfähigem Material (= "Stäbe" der Dämpferwicklung), und auf besondere Ringverbindungen an den Läuferenden kann verzichtet werden, da ein tangentialer Stromfluß durch den Kontakt der blanken Nutverschleißkeile mit den stählernen Rotorkappen in ausreichendem Maße möglich ist. Die Dämpferwicklung übernimmt bei unsymmetrischer Belastung die Kompensation der gegenläufigen Durchflutung und bei mechanischen Pendelungen (Drehschwingungen) die Dämpfung derselben. In einigen Fällen wird die Dämpferwicklung der Synchronmaschine so groß dimensioniert, daß ein asynchroner Anlauf möglich ist.

Der Ständer der Synchronmaschine ist aus Blechen geschichtet, die an ihrem Umfang eingestanzte Nuten besitzen. Diese Nuten dienen zur Aufnahme der Ständerwicklung. Die Ständerwicklung ist meist eine Drehstromwicklung und besteht bei 3-phasigen Maschinen - und solche werden in der Überzahl verwendet - aus 3 Wicklungen, die räumlich um jeweils $120^\circ/p$ versetzt symmetrisch angeordnet sind.

Elektromagnetischer Zug (Hütte, 1978)

Eine exzentrische Verlagerung des Läufers in der Maschine hat eine Reihe von Exzentrizitätsfeldern zur Folge, welche einseitige magnetische Zugkräfte verursachen. Diese Kräfte wirken der Rückstellkraft der Welle entgegen; sie wirken wie eine negative Feder (elektromagnetische Federzahl) und beeinflussen damit die biegekritische Drehzahl. Es müssen die Fälle statischer und dynamischer Exzentrizität unterschieden werden: Statische Exzentrizität liegt bei exzentrischer Lagerung des Läufers vor. Bei synchronem Lauf der Maschine induzieren die Exzentrizitätsfelder die Ständerwicklung mit der Nennfrequenz, den Läufer mit der

Frequenz — wobei p der Anzahl der Pole entspricht. Dynamische Exzentrizität liegt vor, wenn der Läufer nicht vollständig ausgewuchtet ist. Diese Exzentrizitätsfelder induzieren nur die Ständerwicklungen.

1.3 Aufbau des Rotors - Derzeitiger Stand der Technik

Da ich mich im Zuge meiner Diplomarbeit speziell mit dem Rotor beschäftige, möchte ich dessen Aufbau etwas genauer erläutern.

Man unterscheidet prinzipiell folgende drei Rotorbauarten: (siehe Abbildung 1-8)

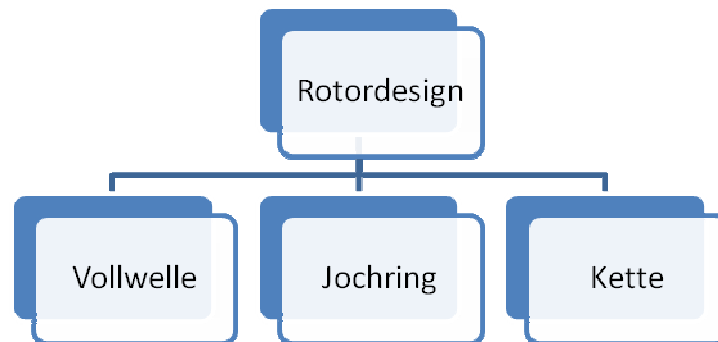


Abbildung 1-8 Verschiedene Rotorbauarten

Bei der Ausführung als Vollwelle werden die Pole direkt in die Welle mittels Schwalbenschwänzen oder Hammerköpfen eingehängt (siehe Abbildung 1-9). Dies ist jedoch nur für schnelllaufende, schlanke Rotoren möglich. Bei Generatoren mit einer größeren Anzahl von Polen wird aufgrund der geringeren Drehzahl ein größerer radialer Abstand der Pole erforderlich. Um diesen Abstand gewährleisten zu können, verwendet man z.B. Rotorwellen mit aufgeschweisten Rippen, sogenannte „Nabensternrotoren“, auf welche über Passleisten das sogenannte „Joch“ aufgeschraubt wird.

Da massive Jochringe (siehe Abbildung 1-10) relativ schwer herzustellen sind, greift man auf geschichtete Jochs (Blechkpaket), sogenannte „Ketten“ (siehe Abbildung 1-11), zurück. Ein weiteres Argument für geschichtete Ketten ist, dass sie nicht in einem Stück geliefert werden müssen. Eine Kette kann durchaus erst vor Ort zusammengebaut werden, was den Transport von großen Rotoren erheblich vereinfacht. Diese bestehen aus vielen Blechsegmenten, welche übereinander gelegt werden. Sie haben weiters den Vorteil, dass sie einfacher lieferbar sind, da sie vor Ort zusammengebaut werden können.



Abbildung 1-9 Ausführung des Rotors als Vollwelle



Abbildung 1-10 Ausführung des Rotors als massiver Jochring

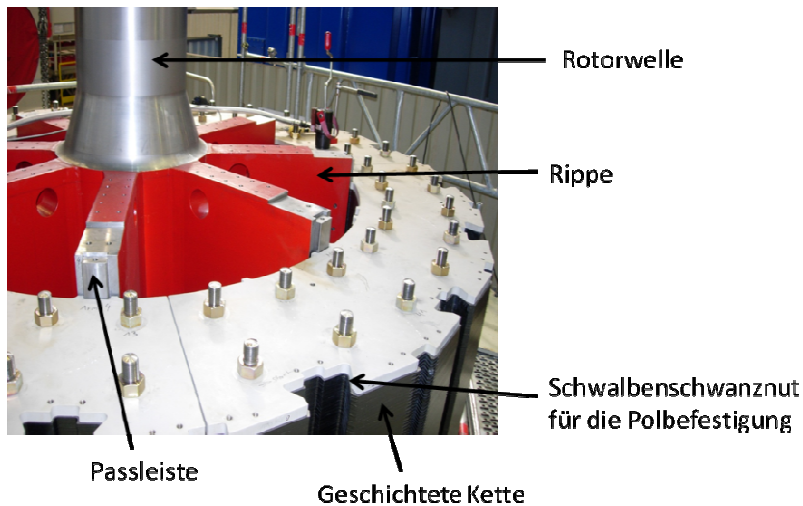


Abbildung 1-11 Hydrogenerator mit Nabenstern und aufgeschumpfter „Kette“

Ein Hydrogenerator mit Nabenstern besteht im Wesentlichen aus der Rotorwelle mit aufgeschweißten Rippen (Rippenwelle), der geschichteten (oder massiven) Kette, der Passleiste sowie den Polen (siehe Abbildung 1-11). Die Pole werden über Schwalbenschwänze in die Kette eingehängt. Vollwellen-Hydrogeneratoren besitzen keine Rippen und geschichtete Ketten. Hier werden die Pole direkt in die Vollwelle eingehängt. Sie werden jedoch nur für schlanke Wellen, also Generatoren mit niedrigen Polzahlen eingesetzt. Derzeit wird bei Nabenstern- Hydrogeneratoren die Kette über die Passleiste auf die Rippenwelle aufgeschumpft. Die Passleiste überträgt das Drehmoment. In radialer Richtung gibt es jedoch keine formschlüssige Verbindung zwischen Kette und Rippe bzw. Passleiste. Das hat den Nachteil, dass die Kette die gesamte Belastung in Form von Umfangsspannung aufnehmen muss und es kommt bei höheren Drehzahlen durch die Wirkung der Fliehkraft zu einem Abheben der Kette. Dadurch kann diese nichts mehr zur Biegesteifigkeit des Rotors beitragen. Außerdem bewirkt das Abheben der Kette einen unruhigen Lauf bei hohen Drehzahlen, da die Kette zur Rippenwelle nicht mehr zentrisch läuft. Des Weiteren ist das Aufschumpfen der Kette sehr zeit- und kostenintensiv. Durch die Entwicklung der eingehängten Kette gehen wir davon aus, dass einige dieser Faktoren beseitigt bzw. minimiert werden können.

1.4 Erklärung des Prinzips der „Eingehängten Kette“

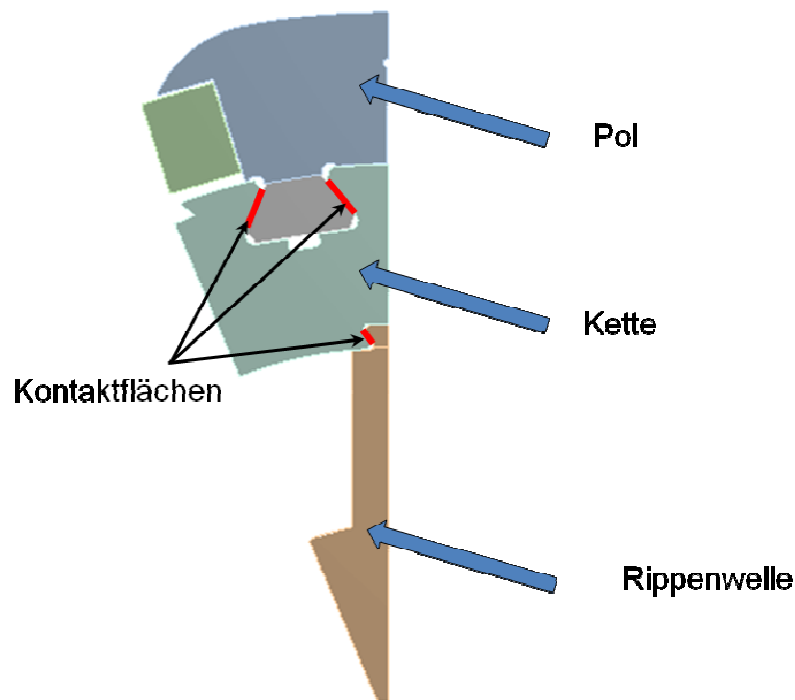


Abbildung 1-12 Symmetriemodell

Die Kette wird mittels Schwalbenschwanz an der Rippenwelle eingehängt. Dadurch hat man auch bei hohen Drehzahlbereichen, immer einen definierten Kontakt in den Schwalbenschwanzkontaktflächen (siehe Abbildung 1-12; die roten Linien symbolisieren die reibungsbehafteten Kontaktflächen). Die auftretenden Fliehkräfte werden nun nicht mehr ausschließlich in Form von Umfangsspannungen in die Kette übertragen, sondern zum Teil über den Schwalbenschwanz in die Rippe und weiter in die Welle geleitet. Das sollte den Vorteil haben, dass die Kettenbelastung sinkt wodurch man entweder die Qualität des Kettenbleches senken kann oder aber auch die Höhe der Kette verringern kann. Letzteres hätte den Vorteil, dass eine Verringerung der Kettenhöhe ein Erhöhen der Rippenlänge in radialer Richtung ermöglichen würde. Dadurch würde sich die Biegesteifigkeit der Rippenwelle erhöhen. Praktisch wird man einen Kompromiss aus Senken der Blechqualität und Verlängern der Rippen ausführen. Jedoch bringt man durch das Einhängen der Kette zusätzliche Biegespannungen in die Kette. Diese Biegespannungen könnten dem erhofften positiven Effekt kontraproduktiv entgegenwirken. Daher ist eine analytische, detaillierte Berechnung der Spannungssituation in der Kette vorzunehmen. Weiters trägt die Kette aufgrund des definierten Kontaktes (Abbildung 1-12) über der gesamten Nabensternlänge in den Schwalbenschwanzkontaktflächen zur Biegesteifigkeit des Rotors bei.

Der Rotor wird bei kleinen Polzahlen (bis zu 6 Polen) als Vollwelle ausgeführt. Um diesen Rotor als Welle mit zusätzlicher eingehängter Kette ausführen zu können, muss die Welle im Durchmesser kleiner gebaut werden um Platz für das Kettenblech zu schaffen. Dies hätte den Vorteil, dass schlankere Wellen gekauft

werden könnten, welche kostengünstiger und auch schneller verfügbar sind. Jedoch muss zuerst die Wellendynamik untersucht werden, da eine Welle mit kleinerem Querschnitt aber gleicher Baulänge „weicher“ ist und dadurch die kritischen Drehzahlen sinken.

1.5 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Diplomarbeit ist eine Machbarkeitsstudie der eingehängten Kette. Es soll anhand eines vereinfachten Modells eine parametrisierte analytische Berechnung der nominellen Spannungen in der Kette erstellt werden, um schnell und effektiv die qualitativen und quantitativen Veränderungen diverser Spannungen bei Variation bestimmter geometrischer Parameter errechnen zu können. Damit soll man in der Lage sein, qualitative Aussagen über die Auswirkung von geometrischen Änderungen auf den Spannungszustand abzugeben. Weiters soll ein passendes 2d- FE-Modell erstellt werden. Die analytischen Ergebnisse des stark vereinfachten Modells sollen mit den FE-Ergebnissen verglichen werden. Die FE-Ergebnisse stimmten in der Vergangenheit mit den Messungen zusammen. Solche Messungen zur Überprüfung der FE- Berechnungen wurden im Zuge anderer Projekte laufend durchgeführt. Das analytische Modell soll einfach zu bedienen sein, sodass auch Mitarbeiter ohne tiefgehendes, strukturmechanisches Vorwissen, schnell nominelle Spannungen abrufen können.

Des Weiteren müssen die vom Kunden geforderten Sicherheitsabstände zu den kritischen Drehzahlen eingehalten werden. Dazu ist eine rotordynamische Berechnung und Beurteilung des neuen Konzepts durchzuführen. Dabei sollen sowohl Biege- als auch Torsionseigenfrequenzen berechnet werden.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen eingegangen, die für das Verständnis dieser Diplomarbeit erforderlich sind und zum Teil auch im Zuge der Machbarkeitsstudie angewendet wurden.

2.1 Grundlagen Rotordynamik (Gasch, Nordmann, & Pfützner, 2002)

Den prinzipiellen Aufbau von Maschinen mit rotierenden Wellen wollen wir zunächst an zwei Beispielen erläutern. Abbildung 2-1 zeigt in Explosionsdarstellung einen größeren Asynchronmotor. Der von den magnetischen Kräften in Rotation versetzte Kurzschlußläufer ist entweder wälzgelagert oder gleitgelagert. Für das rechte Lager ist alternativ zur Wälzlagerversion eine Ausführung in Gleitlagern dargestellt. Die Lagereinsätze sind in den Lagerschilden rechts und links befestigt, die die Gewichtskräfte auf den Rahmen des Gehäuses übertragen. Bei großen Maschinen wird das Gehäuse über ein Fundament abgestützt. Kleine Maschinen benötigen kein Fundament.

Die einstufige Radialpumpe (Abbildung 2-2) besitzt einen Läufer, der sich aus dem von innen nach außen durchströmten Laufrad und der schlanken Welle zusammensetzt. Die Welle ist rechts und links in Kugellagern gelagert. Die Abdichtung zwischen der rotierenden Welle und dem Gehäuse erfolgt durch Stopfbuchsen, deren Packungen die Welle berühren und damit den Austritt von Flüssigkeit verhindern.

An diesen beiden Beispielen erkennt man schon den grundsätzlichen Aufbau von Maschinen mit rotierenden Wellen, seien es nun Elektromaschinen (Motoren, Generatoren, Umformer, Phasenschieber), Strömungsmaschinen (Dampf- und Gasturbinen, Turbopumpen, Turboverdichter, Ventilatoren, Windturbinen) oder sonstige Anlagen wie beispielsweise Zentrifugen. Die wesentlichen Elemente sind stets

- Läufer (Trommelläufer, Scheibenläufer, gesternte Läufer),
- Gehäuse, bei Elektromaschinen spricht man vom Ständer,
- Lager (Gleit-, Wälz-, Gas-, Magnetlager, hydrostatische Lager, usw.),
- Lagerschilde oder Lagerböcke,
- Dichtungen (berührende Packungen oder berührungsfreie Labyrinth) zwischen der rotierenden Welle und dem Gehäuse, falls Druckdifferenzen zwischen innen und außen auftreten.

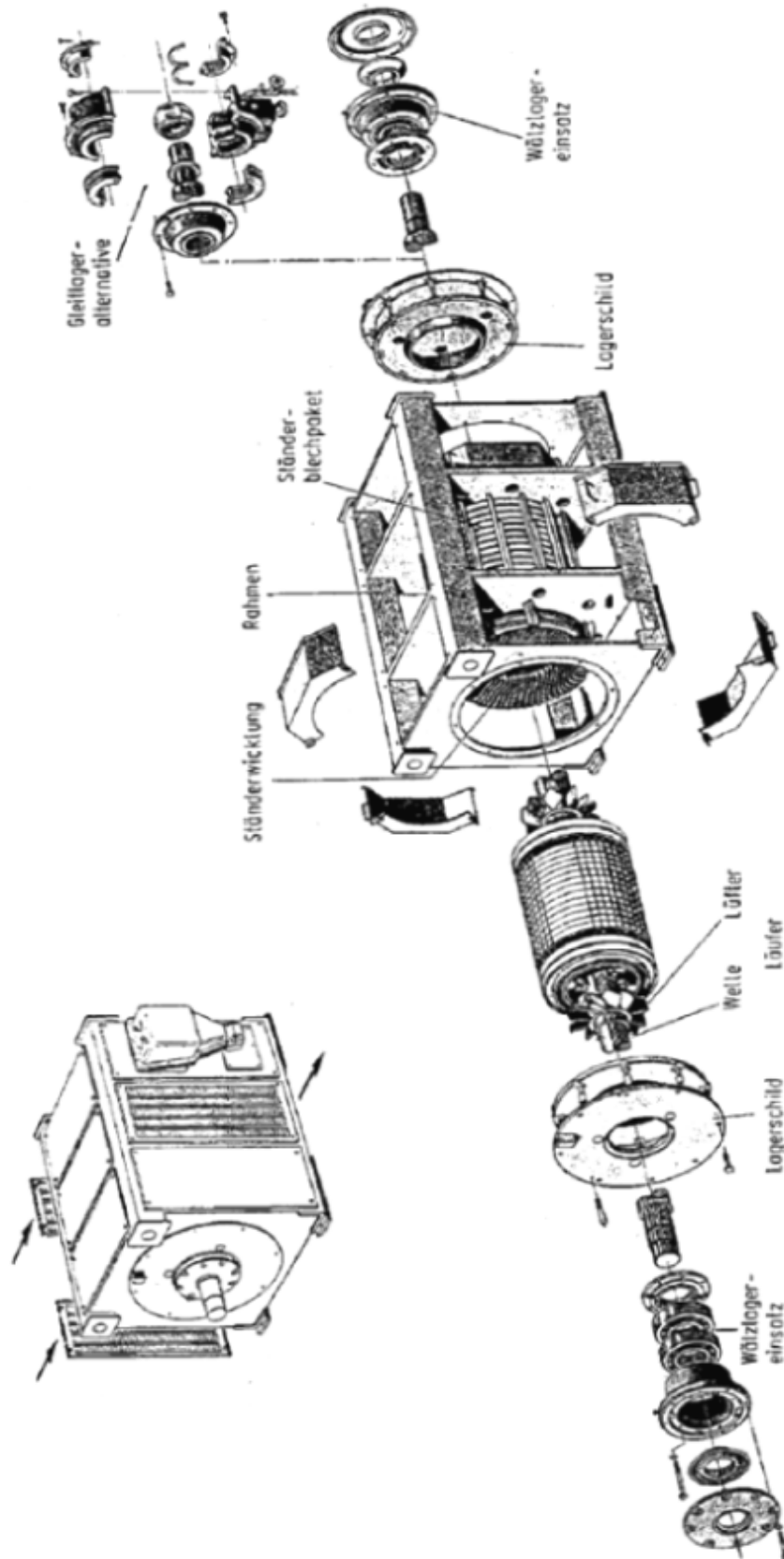


Abbildung 2-1 Aufbau eines Asynchronmotors (Werkbild Siemens)

Sind zwei oder mehrere Maschinen gekuppelt, wie z. B. in Abbildung 2-3 die antreibende Kaplan turbine mit dem angetriebenen Generator, dann entsteht ein Wellenstrang, in dem als weitere Elemente Kupplungen auftreten. Sie können starr sein wie bei großen Wasser- und Dampfturbinen oder elastisch wie bei kleineren Maschinen. Letzteres erleichtert die Aufstellung, weil kleinere Fluchtungsfehler in elastischen Kupplungen toleriert werden.

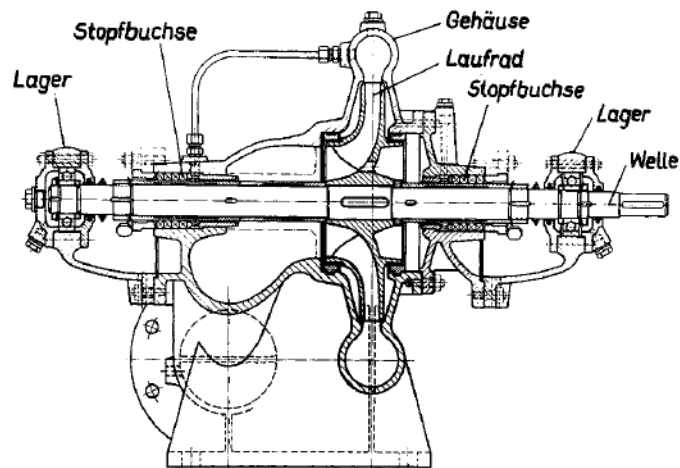


Abbildung 2-2 Querschnitt durch eine einstufige Radialpumpe

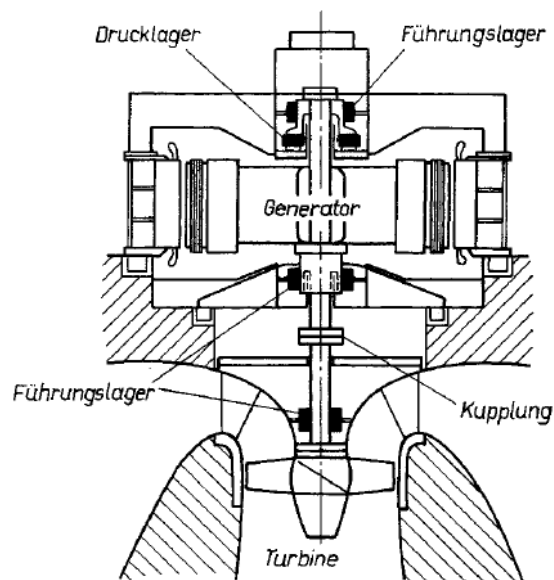


Abbildung 2-3 Senkrecht stehender Wellenstrang, Kaplan turbine mit Generator

Die Lager bestimmen sehr stark das dynamische Verhalten des Rotors, weil sie je nach Typus sehr verschiedene Feder-, Dämpfungs- und gegebenenfalls Anfachungseigenschaften haben.

2.1.1 Starre und biegeelastische Rotoren unter Unwucht

Biegestarke Läufer

Ein rotationssymmetrischer Läufer scheint auf den ersten Blick vom dynamischen Verhalten her unproblematisch zu sein. Verglichen mit Kolbenmaschinen, bei denen einzelne Triebwerksteile (Kolben, Pleuel) sehr komplizierte Bewegungen ausführen, sind die Verhältnisse bei starren Turbo- oder Elektromaschinenläufern in der Tat wesentlich einfacher. Der Drehmomentenhaushalt ist weitgehend ausgeglichen, d. h. es treten keine oder nur geringe Drehmomentenschwankungen auf. Die durch die Rotation geweckten Fliehkräfte gleichen sich wechselseitig aus. Allenfalls ist durch die Fertigungsungenauigkeiten und Restunwuchten die Massenverteilung nicht völlig rotationssymmetrisch. Die am versetzten Schwerpunkt S angreifende Fliehkraft der Größe $F = \varepsilon * m * \Omega^2$ ruft dann umlaufende Lagerkräfte F_1 und F_2 hervor, (Abbildung 2-4).

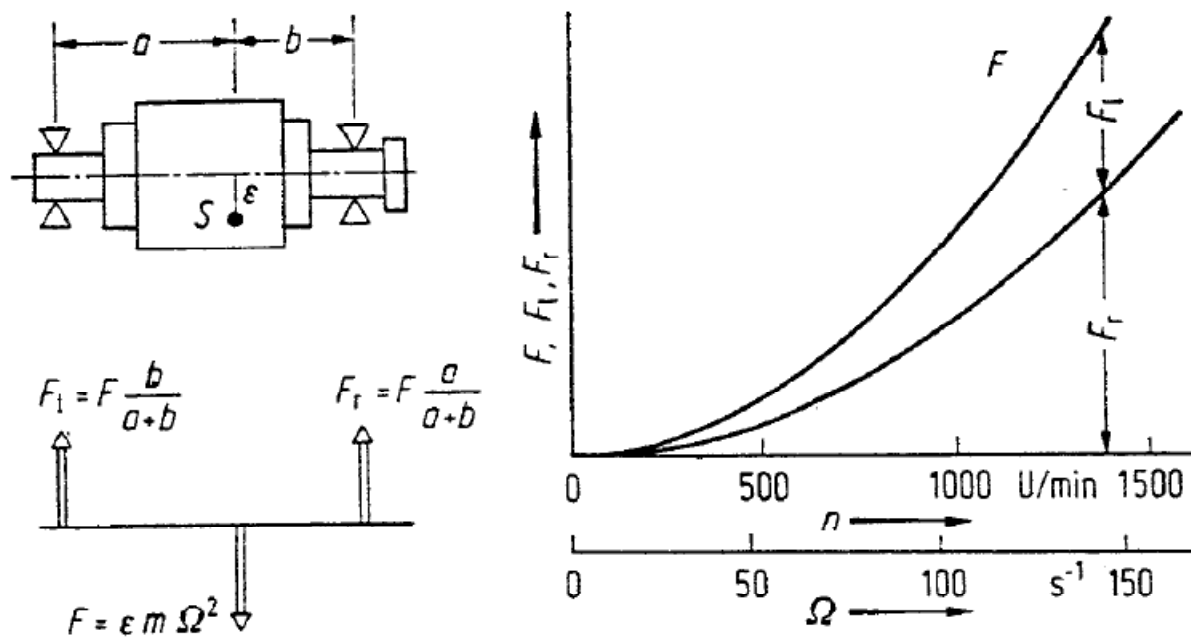


Abbildung 2-4 Umlaufende Fliehkraft F und Lagerreaktionen F_1 und F_2 beim ungewichtigen starren Rotor (m Rotormasse, ε Exzentrizität)

Die Größe dieser Kräfte wächst quadratisch mit der Drehzahl, d.h. der Winkelgeschwindigkeit Ω_1 . Die Lagerkräfte sind von einem feststehenden Beobachter aus gesehen periodisch. Sie sind die Ursache für das Vibrieren, an dem man - neben der Geräuschbildung - erkennen kann, ob eine Maschine läuft oder nicht.

Biegeelastischer Einscheibenläufer (Laval-Läufer)

Starre Rotoren laufen in einem Bereich, in dem die Fliehkraftverformung der Welle kleiner ist als die Exzentrizität. Bei höheren Drehzahlen bezeichnet man den Läufer als elastisch. Zur Erklärung des elastischen Läufers eignet sich der Laval-Läufer sehr gut.

Der Laval-Läufer ist das einfachste Modell eines Läufers und besteht aus einer massebehafteten Scheibe, welche zentrisch auf einer elastischen aber masselos gedachten Welle sitzt. Die Lager werden in der Regel, verglichen mit der Welle, als unendlich steif angenommen, was das System weiter vereinfacht.

Steigert man die Drehzahl des Laval-Läufers, so wächst auch die Fliehkraft. Irgendwann wird der Punkt erreicht, von dem an man die elastischen Verformungen ρ_w , des Läufers unter der Fliehkraft berücksichtigen muß, weil durch sie zusätzliche Fliehkräfte entstehen. Die Gesamtliehkraft beträgt dann

$$F = (\varepsilon + \rho_w) * m\Omega^2. \quad (2.1)$$

Dabei wird angenommen, dass sich die Welle in Richtung der Schwerpunktexzentrizität ausbiegt. Einen kleinen Einblick in das Verhalten des biegeelastischen Laval-Läufers erhält man, wenn man an einem mit einer Scheibe besetzten Rotor (siehe Abbildung 2-5) das Kräftegleichgewicht aufstellt.

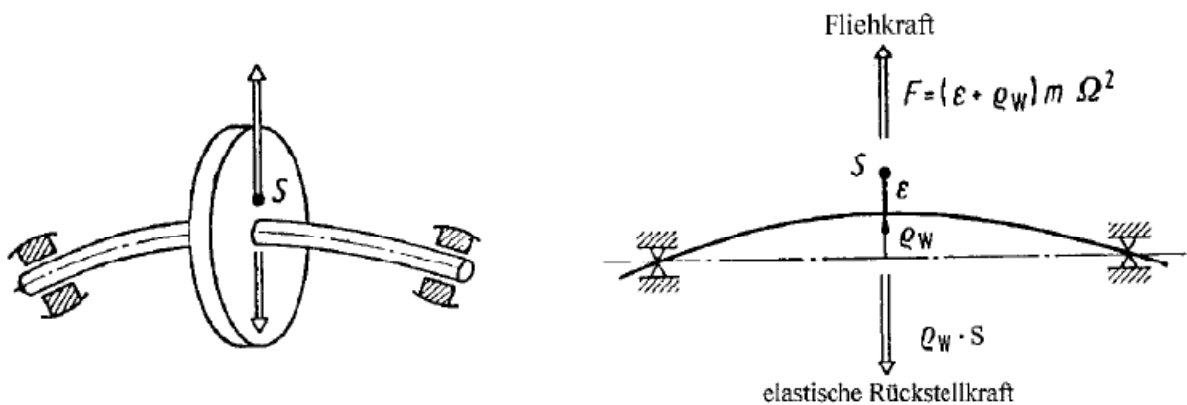


Abbildung 2-5 Kräftegleichgewicht bei unwuchterregter Wellenschwingung

Die elastische Rückstellkraft $s\rho_w$, der Welle (mit der Biegesteifigkeit s) hält der Fliehkraft nach Formel (2.1) das Gleichgewicht, so dass sich aus

$$s\rho_w = F = (\varepsilon + \rho_w) * m\Omega^2. \quad (2.2)$$

die Wellenverformung

$$\rho_w = \varepsilon \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}. \quad (2.3)$$

ergibt.

Für $\sqrt{\frac{s}{m}}$ wurde abkürzend ω geschrieben. Dieser Wert stellt die Eigenkreisfrequenz eines Schwingers dar, bestehend aus Scheibenmasse m und der Wellenfedersteifigkeit s . Sie kennzeichnet wesentlich das Verhalten des Rotors. Bei niedriger Drehzahl ($\Omega < 0,5\omega$) wächst die Wellenausbiegung zunächst proportional mit dem Fliehkraftanteil $\varepsilon m \Omega^2$, weil der Anteil $\rho_w m \Omega^2$ in Formel (2.1) noch sehr klein ist, (Abbildung 2-6, links). Bei $\Omega = \omega \sqrt{\frac{1}{2}}$ erreicht die Wellendeformation gerade die Größe der Exzentrizität ε . Bei $\Omega = \omega$ liegt die kritische Drehzahl, in der die Wellenauslenkungen unendlich groß werden, vor. Durchfährt man die kritische Drehzahl, was bei genügend hoher Drehbeschleunigung möglich ist, weil der Läufer dann keine Zeit hat, die sehr großen Wellenauslenkungen aufzubauen, die beim stationären Betrieb eintreten würden, dann erreicht man jenseits der kritischen Drehzahl den Bereich geringer Wellenauslenkungen. Für sehr hohe Drehzahlen erreicht die Wellenauslenkung ρ_w asymptotisch den Wert der Exzentrizität ε : der Schwerpunkt S liegt auf der Drehachse. Man spricht daher von der „Selbstzentrierung“ der Rotormasse.

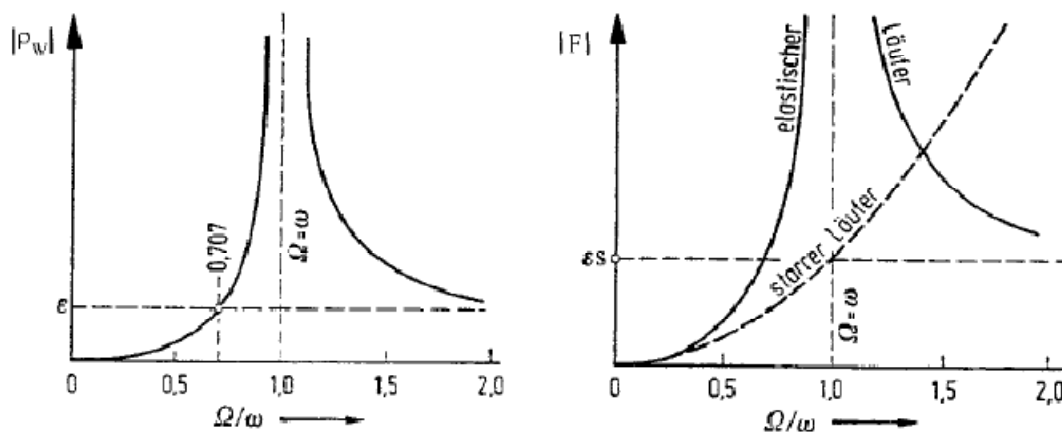


Abbildung 2-6 Wellenauslenkung und umlaufende Fliehkräfte beim elastischen Rotor

Unsere Kräftebilanz, Formel (2.2) haben wir in mitrotierenden Koordinaten ausgeführt. Die Wellenausbiegung ρ_w , Formel (2.3), ergab sich deshalb als zeitunabhängiger Festwert. Vom raumfesten Standpunkt aus betrachtet, führt die Welle eine Kreisbahn aus, die im Wellendreh Sinn (gleichläufig) einmal pro Umdrehung der Welle durchfahren wird. In der Projektion sieht der raumfeste Beobachter daher eine harmonische Bewegung $W(t) = \rho_w * \cos(\Omega t)$ mit der Urnauflauffrequenz Ω des Rotors, (Abbildung 2-7).

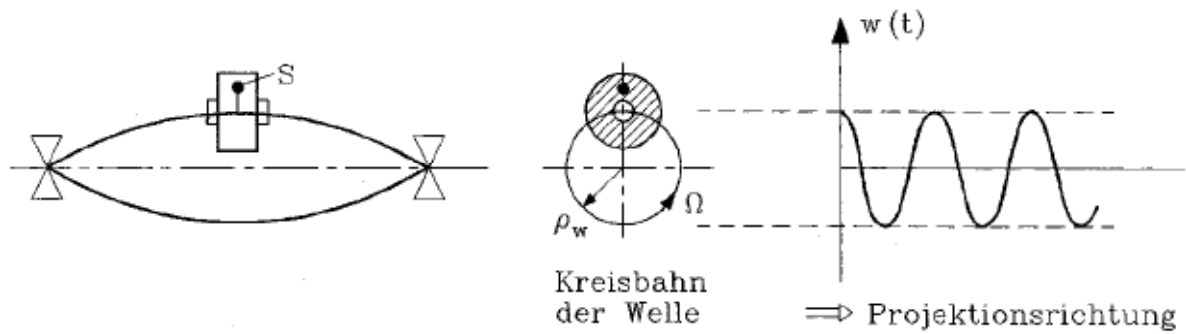


Abbildung 2-7 Schwingungsbewegung der elastischen Welle aus der Sicht eines raumfesten Beobachters

Im Ingenieursjargon bezeichnet man Rotoren, die unterhalb der kritischen Drehzahl laufen, als unterkritische Läufer; solche, die im Bereich oberhalb der kritischen Drehzahl laufen, als überkritische Läufer. Starr nennt man Rotoren, die im Bereich $\Omega < \omega \sqrt{\frac{1}{2}}$ laufen, weil in diesem Bereich die Fliehkraftverformung der Welle kleiner ist als die Exzentrizität. Bei höheren Drehzahlen bezeichnet man den Läufer als elastisch.

Für uns heute ist es selbstverständlich, dass es unterkritisch und überkritisch laufende Rotoren gibt. Aber die Frage, ob der überkritische Lauf überhaupt stabil ist und wenn ja warum, hat Ingenieure und Theoretiker ein halbes Jahrhundert lang bewegt.

Überlegt man sich nämlich genauer, was Formel (2.3) im überkritischen Drehzahlbereich aussagt, kommt man schnell ins Grübeln: für überkritische Drehzahlen $\Omega > \omega$ wird die Wellenauslenkung ρ_w negativ, d. h. die Welle biegt sich elastisch entgegen der Richtung ε der Exzentrizität aus. Abbildung 2-8 zeigt diesen Zustand, bei dem der Schwerpunkt S „innen“ liegt.

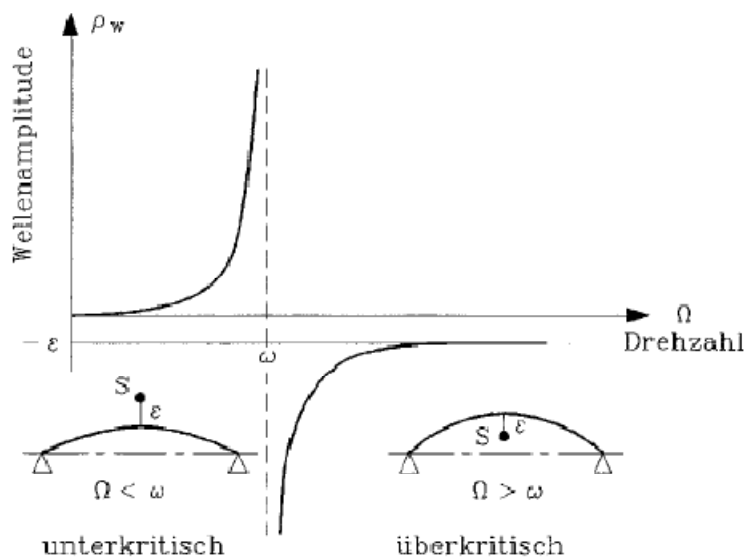


Abbildung 2-8 Lage des Schwerpunktes S im unterkritischen und überkritischen Drehzahlbereich

2.1.2 Drehschwingungen (Marn, 2010)

Abbildung 2-9 zeigt einen einseitig eingespannten Drehschwinger (gefesselter Schwinger). In Abbildung 2-10 ist offensichtlich, daß es nur zu einem Moment kommen kann, wenn $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ist.

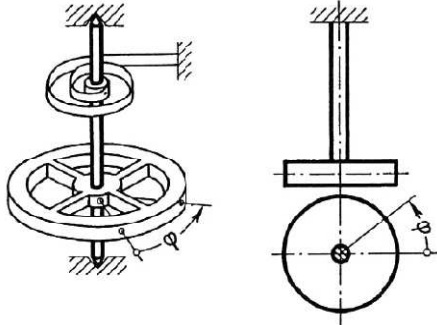


Abbildung 2-9 einseitig eingespannter Drehschwinger

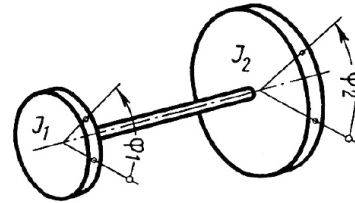


Abbildung 2-10 nicht eingespannter Drehschwinger

Ungedämpfte freie Drehschwingung

Betrachten wir zuerst das Beispiel in Abbildung 2-9 und schneiden das System frei. Auch hier gibt die Bewegungsrichtung die positive Momentenrichtung vor. Wir wissen, daß das Torsionsmoment $M_d = c\varphi$ ist. Schreiben wir nun den Drallsatz (für konstantes Massenträgheitsmoment) unter Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\theta \ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (2.4)$$

Führen wir auch hier die Abkürzung $\omega_0^2 = \frac{c}{\theta}$ ein, dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (2.5)$$

Wenn wir das Beispiel in Abbildung 2-10 betrachten, müssen zuerst die beiden Scheiben getrennt betrachtet werden. Hier muß die Differenz der beiden Winkel gebildet werden. Natürlich kann dieser Schwingung auch eine reine gemeinsame Drehbewegung überlagert sein. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\theta_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.6)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.7)$$

Dividieren durch θ_1 bzw. θ_2 und subtrahieren von (2.6) und (2.7), sowie Ersetzen von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ durch ψ ergibt eine einzelne Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad (2.8)$$

Wobei in (2.8) $\omega_0 = \sqrt{c(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2})}$ ist.

2.1.3 Die biegekritische Drehzahl (Markert, 2003)

Auf einer Welle ist eine Scheibe der Masse m so angebracht, daß deren Schwerpunkt S nicht auf der Wellenachse liegt. Selbst bei sorgfältig ausgewuchteten Rädern ist kein „perfekter“ Ausgleich möglich und es bleibt eine Restunwucht. Um keinen Einfluß des Eigengewichts (daher keine Durchbiegung der Welle infolge der Massen) zu erhalten, betrachten wir eine vertikale Welle. Die Exzentrizität sei e (Abbildung 2-11 links). Welle und Scheibe rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_W . Die Trägheitswirkung der Drehung wird durch die Fliehkraft dargestellt. Die Welle erfährt eine quasistationäre Ausbiegung x .

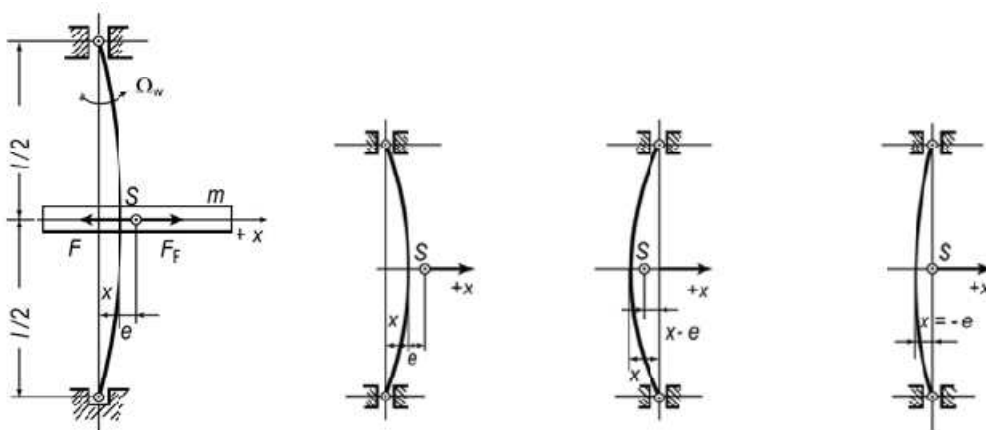


Abbildung 2-11 Rotor mit Exzentrizität (links), unter- und überkritischer Zustand bzw. Selbstzentrierung (rechts)

In den drei Darstellungen in Abbildung 2-11 rechts erkennt man auf der rechten Seite (von links nach rechts) den unterkritischen Zustand $\Omega_W < \omega_0$, den überkritischen Zustand $\Omega_W > \omega_0$ und ganz rechts außen ist die

Selbstzentrierung des überkritischen Rotors $\Omega_W = \omega_0$ dargestellt. Berechnen wir die Fliehkraft für den ganz links dargestellten Fall, der sich aus der Auslenkung der Welle und der Exzentrizität zusammen setzt.

$$F_F = m(e + x)\Omega_W^2 \quad (2.9)$$

Die Rückstellkraft aus der Verformung der Welle beträgt $F = -cx$. Beide Kräfte müssen im Gleichgewicht sein. Daraus folgt:

$$m(e + x)\Omega_W^2 = cx \quad (2.10)$$

Nach der Verformung x aufgelöst

$$x = \frac{me\Omega_W^2}{c - m\Omega_W^2} = \frac{\Omega_W^2}{\omega_0^2 - \Omega_W^2} e \quad (2.11)$$

In (2.11) ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ die Eigenkreisfrequenz des Systems für Schwingungen in x -Richtung. Die Ähnlichkeit läßt die Aussage zu, daß die (quasistationäre) umlaufende Auslenkung (konstante Biegung) derselben Formel genügt wie die Amplitude einer in x -Richtung erzwungenen Schwingung. Auch hier geht die Auslenkung für $\Omega_W = \omega_0$ gegen unendlich. Mann nennt deshalb $\Omega_W = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \Omega_{\text{krit}}$ die kritische Winkelgeschwindigkeit.

2.1.4 Selbstzentrierung des überkritischen Rotors (Marn, 2010)

Bei unterkritischem Betrieb addieren sich x und e , da beide in die gleiche Richtung (gleichphasig) zeigen. Der Lauf ist relativ unruhig. Bei überkritischem Betrieb ist der Ausschlag x entgegen der Exzentrizität e . Der Ausschlag x wird nach Gleichung (2.11) negativ. Der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse wird kleiner. Erhöht man die Drehzahl weiter, so wandert der Schwerpunkt in die Drehachse. Dabei gilt

$$\lim_{\Omega_W \rightarrow \infty} \frac{me\Omega_W^2}{c - m\Omega_W^2} = \lim_{\Omega_W \rightarrow \infty} \frac{me}{\frac{c}{\Omega_W^2} - m} = -e \quad (2.12)$$

Abbildung 2-8 zeigt nochmals die Lage des Schwerpunktes bei unter- und überkritischem Betrieb. Bei unterkritischem Betrieb liegt der Schwerpunkt „außen“ und bei überkritischem Betrieb liegt er „innen“ bis er bei genügend hoher Drehzahl in die Drehachse wandert und die Auslenkung gerade so groß ist wie die Exzentrizität e.

Der Lauf im überkritischen Betrieb ist relativ ruhig. Man nennt dies die Selbstzentrierung des überkritischen Rotors. Es stellt sich ein neuer stabiler Betriebszustand ein. Dies war der Weg, den de Laval mit seiner „biegsamen Welle“ (Abbildung 2-12) beschritten hat. Bei kleinstem Durchmesser und großen Lagerabständen waren Winkelgeschwindigkeiten des Betriebes von etwa dem 7-fachen der kritischen Winkelgeschwindigkeiten möglich. Die damaligen, relativ ungenauen Fertigungsverfahren und die begrenzten Auswuchtmöglichkeiten hatten recht große Restunwuchten zur Folge. Dennoch konnte mit Hilfe der Selbstzentrierung ein ruhiger stabiler Betrieb gewährleistet werden.

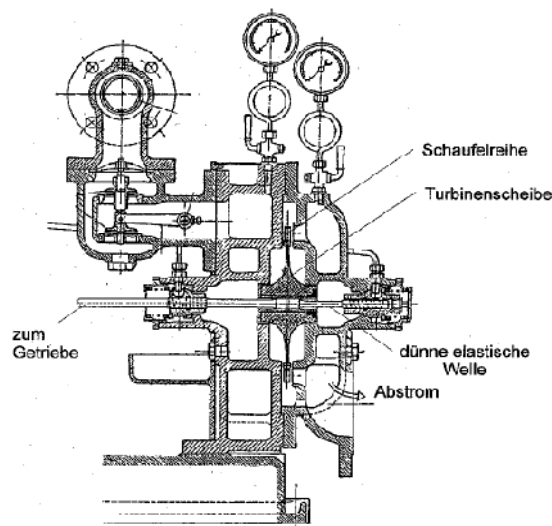


Abbildung 2-12 Laval's Turbine mit dünner biegsamer Welle

Jedoch ist eine genügend große Drehbeschleunigung notwendig, um die Resonanzstelle zu durchlaufen, denn dann hat der Läufer keine Zeit die großen Wellenauslenkungen aufzubauen, die sich im stationären Zustand ausbilden würden.

2.2 Verfahren nach Holzer (Markert, 2003)

Das Verfahren von Holzer gestattet die Berechnung der Eigenkreisfrequenz und der Eigenschwingungsformen in einem gewissen Frequenzbereich. Ausgangspunkt sind die

Bewegungsgleichungen. Mit dem Ansatz $\varphi_p = \hat{\varphi}_p \cos(\omega t - \psi)$, und $\ddot{\varphi}_p = -\omega^2 \varphi_p$ sucht man eine Eigenschwingung (Hauptschwingung). Betrachten wir folgenden Drehschwinger in Abbildung 2-13:

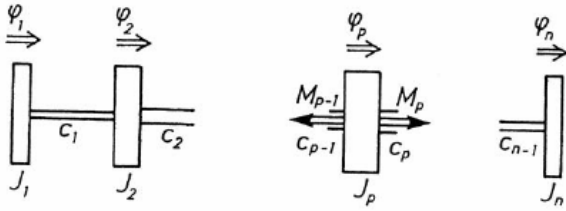


Abbildung 2-13 Drehschwinger

Schneiden wir die p-te Masse frei, ergibt sich

$$\theta_p \ddot{\varphi}_p = M_p - M_{p-1} = c_p(\varphi_{p+1} - \varphi_p) - c_{p-1}(\varphi_p - \varphi_{p-1}) \quad (2.13)$$

Setzt man den Ansatz $\varphi_p = \hat{\varphi}_p \cos(\omega t - \psi)$, und $\ddot{\varphi}_p = -\omega^2 \varphi_p$ in (2.13) ein, so folgt unter Berücksichtigung der Randbedingungen $M_0 = M_n = 0$ die Gleichungen für jede Masse (für n Massen n Gleichungen)

$$p = 1: \theta_1 \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \theta_1 \varphi_1 = M_1 \quad (2.14)$$

$$p = 2: \theta_2 \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \theta_2 \varphi_2 = -M_1 + M_2 \rightarrow M_2 = -\omega^2 \sum_{i=1}^2 \theta_i \varphi_i$$

$$p = 3: \theta_3 \ddot{\varphi}_3 = -\omega^2 \theta_3 \varphi_3 = -M_2 + M_3 \rightarrow M_3 = -\omega^2 \sum_{i=1}^3 \theta_i \varphi_i$$

$$p = n: \theta_n \ddot{\varphi}_n = -\omega^2 \theta_n \varphi_n = -M_{n-1} + M_n \rightarrow M_n = -\omega^2 \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i$$

Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen ist das Erregermoment $M_0 = M_n = 0$. Setzt man die nun bekannten Momente in $M_p = c(\varphi_{p+1} - \varphi_p)$ ein und löst nach φ_{p+1} auf, hat man eine Rekursionsformel für die Amplitudenfaktoren $\hat{\varphi}$.

$$\hat{\varphi}_{p+1} = \hat{\varphi}_p - \frac{\omega^2}{c_p} \sum_{i=1}^p \theta_i \hat{\varphi}_i \quad (2.15)$$

An den freien Enden eines Drehschwingers sind die Federkonstanten $c_0 = c_n = 0$. (2.13) läßt sich selbstverständlich auch wieder in Matrixschreibweise darstellen. Da die Amplitudenfaktoren nur bis auf einen unbestimmten Faktor festliegen, kann $\hat{\varphi}_1 = 1$ gesetzt und damit die Rekursion begonnen werden.

Beim Restgrößenverfahren startet man mit einem Näherungswert für ω und ermittelt beginnend mit $\hat{\varphi}_p$ rekursiv die Amplitudenfaktoren θ_p . Man bessert den angenommenen Wert für ω solange nach, bis die Restgröße am Rand null wird. Dann hat man einen Wert für die Eigenkreisfrequenz ω gefunden. Am besten geschieht das anhand einer Tabelle (siehe Tabelle 2-1), die wie folgt aussieht:

Tabelle 2-1 Holzer- Tabelle

p	θ_p	$\theta_p \omega^2$	$\hat{\varphi}_p$	$\theta_p \omega^2 \hat{\varphi}_p$	$\sum \theta_p \omega^2 \hat{\varphi}_p$	c_p	$\frac{1}{c_p} \sum \theta_p \omega^2 \hat{\varphi}_p$
1	→	→	1	→	→	→	→
2	→	→	$\hat{\varphi}_2$	→	→	→	→
3							
4							
5							
p							

Spalte 1 ist die Nummer der betreffenden Scheibe. In 2 werden die Massenträgheitsmomente der jeweiligen Scheibe eingetragen. Um Spalte 3 zu berechnen wird für ω zuerst ein Schätzwert angenommen. Dabei ist zu beachten, daß ω in rad/s sein muß. Spalte 4 berechnet sich aus Gleichung (2.15). Wobei für die erste Zeile $\hat{\varphi}_1 = 1$ gilt. Spalte 5 ist das Produkt aus Spalte 3 und 4. Wobei man aufpassen muß- ist bei vermaschten Antrieben schon ein Moment vom anderen Strang vorhanden dann ist das in Zeile 1 dazuzuzählen. Spalte 6 ist die Summe der Werte aus Spalte 5. In Spalte 7 wird die Torsionsfedersteifigkeit eingetragen. Spalte 8 ist der Quotient aus den Werten aus Spalte 6 und 7. Dieser stellt den relativen Verdrehwinkel zwischen zwei Scheiben dar. Meist kann Spalte 2 und 7 sofort ausgefüllt werden, wenn die Geometrie bekannt ist.

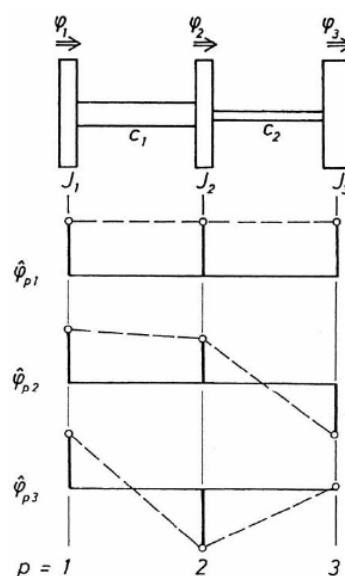


Abbildung 2-14 Eigenschwingungsformen eines Drehschwingers

Abbildung 2-14 zeigt die Eigenschwingungsformen einer Drehschwingerkette mit drei Massen. Die Grundschiwingung ($i=1$) entspricht der Starrkörperdrehung. In der ersten Oberschiwingung ($i=2$) schwingen die Massen 1 und 2, die durch eine steife Feder verbunden sind gleichphasig und mit fast gleicher Amplitude. Die dritte Masse schwingt entgegengesetzt. Zwischen der zweiten und dritten Massen liegt ein Schwingungsknoten. In der zweiten Oberschiwingung schwingen die erste und zweite Masse gegenphasig, während die dritte mit dem größten Massenträgheitsmoment fast in Ruhe bleibt. Hier liegen zwei Schwingungsknoten vor.

Das Verfahren von Holzer eignet sich sehr gut zur Programmierung für elektronische Rechenmaschinen. Ein entsprechendes Flussdiagramm zeigt den Ablauf der Berechnung in Abbildung 2-15

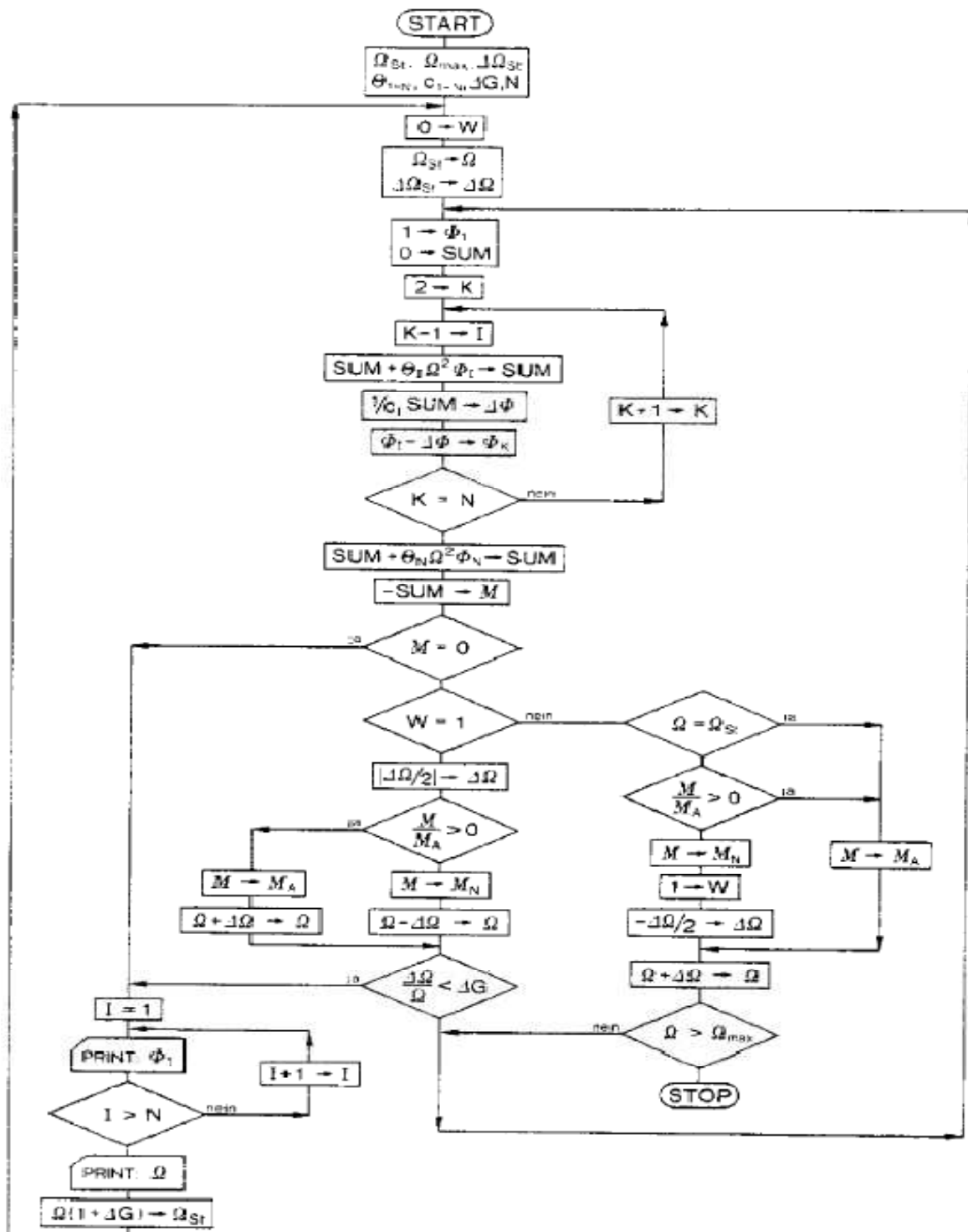


Abbildung 2-15: Flussdiagramm zum Verfahren von Holzer

2.2.1 Berechnung der Torsionseigenfrequenzen nach dem Verfahren von Holzer am Beispiel eines 8-poligen Generators mit dem Verfahren von Holzer

Im Folgenden wird das Holzer-Verfahren für die Welle eines 8-poligen Generators angewendet. Dazu wird die Holzer-Tabelle (Tabelle 2-2) wie im vorigen Kapitel beschrieben, ausgefüllt. Die polaren Massenträgheitsmomente werden aus dem vorhandenen Abschnittdatenblatt für das Programm Wellendynamik Beta 2 übernommen. Die Torsionssteifigkeit errechnet sich wie folgt:

$$(2.16)$$

Die Amplitudenfaktoren werden gemäß Formel (2.15) berechnet. Zur Vereinfachung wird die Welle in 8 Wellenstücke () aufgeteilt (Abbildung 1-4 und Abbildung 2-16).

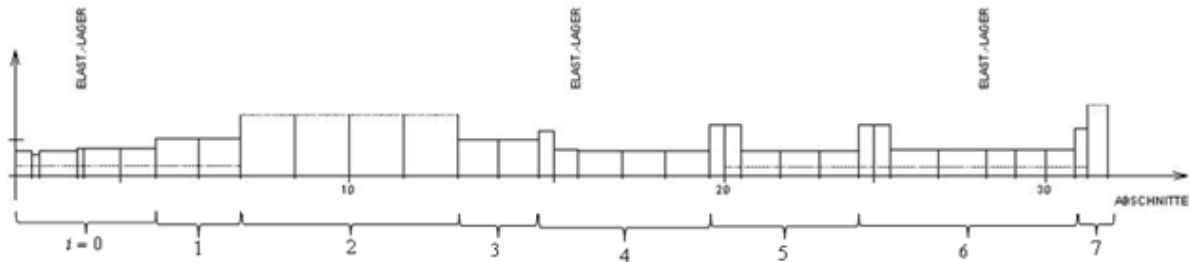


Abbildung 2-16 Aufteilung der Welle in Wellenabschnitte

Tabelle 2-2 Holzer-Tabelle für den Rotor eines 8-poligen Generators

i	Θ_i [kgm ²]	[Nm] $\Theta_i \cdot \omega^2$	$\hat{\varphi}_p$	[Nm] $\Theta_i \cdot \omega^2 \cdot \hat{\varphi}_p$	[Nm] $\Sigma \Theta_i \cdot \omega^2 \cdot \hat{\varphi}_p$	c_i [Nm]	$\Delta \hat{\varphi}_p$	D_{tors} [mm]	l_i [mm]
0,00	718,72	5,56E+07	1,00	5,56E+07	5,56E+07	1,76E+08	0,32	450,00	1815,00
1,00	84,86	6,56E+06	0,68	4,49E+06	6,01E+07	1,86E+09	0,03	634,40	680,00
2,00	38893,80	3,01E+09	0,65	1,96E+09	2,02E+09	2,44E+09	0,83	860,00	1750,00
3,00	64,62	5,00E+06	-0,18	-8,88E+05	2,02E+09	1,56E+09	1,29	600,00	647,00
4,00	108,97	8,43E+06	-1,47	-1,24E+07	2,01E+09	1,94E+08	10,34	420,00	1248,90
5,00	123,02	9,52E+06	-	-1,12E+08	1,90E+09	2,51E+08	7,55	418,30	950,10
6,00	147,16	1,14E+07	-	-2,20E+08	1,68E+09	2,12E+08	7,92	448,60	1492,50
7,00	781,07	6,04E+07	-	-1,65E+09	2,72E+07				

Durch Variation der Kreisfrequenz ω ergeben sich nach dem Verfahren von Holzer folgende Momente am rechten Wellenrand (Tabelle 2-3):

Tabelle 2-3 Moment in Abhängigkeit der Kreisfrequenz

ω	M [Nm]
0	0
50	9,77E+07
100	3,38E+08
150	5,78E+08
200	6,35E+08
225	5,43E+08
250	3,54E+08
275	6,91E+07
285	-6,93E+07
300	-2,98E+08
350	-1,14E+09

Die erste Torsionseigenfrequenz liegt dort, wo das Moment verschwindet, also zu Null wird. Dazu wird das Moment über der Kreisfrequenz ω aufgetragen was in Abbildung 2-17 zu sehen ist.

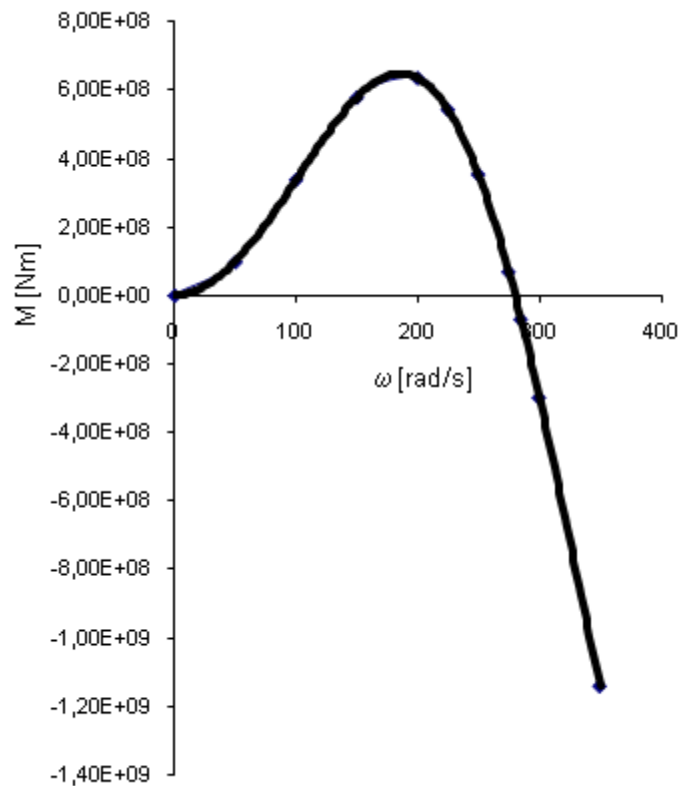


Abbildung 2-17 Moment am rechten Wellenende in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω

Mit Hilfe folgender angenäherten Polynomfunktion 5. Grades wird die dazugehörige Gleichung der Kurve interpoliert:

$$M(x) = 0,0023x^5 - 1,5015x^4 + 122,99x^3 + 31537x^2 + 256425x - 109726$$

Die Nullstelle dieser Funktion ist die erste Torsionseigenfrequenz. Sie liegt bei $\omega = 278,125$ bzw. $f = 44,3$ Hz.

Tabelle 2-4 Holzer vs. Wellendynamik Beta 2

	Holzer	Wellendynamik	
1.Eigenfrequenz	44,3	44,4	Hz
ω	278,125	278,97	1/s

Tabelle 2-4 stellt die mit Wellendynamik Beta 2 berechnete Torsionseigenfrequenz (siehe Abbildung 2-18) jener, vereinfacht nach Holzer berechneten Eigenfrequenz gegenüber. Das Programm Wellendynamik Beta 2 rechnet mit dem Übertragungsmatrizenverfahren und 34 Wellenabschnitten was zu einer genaueren Lösung führt. Trotzdem beträgt die Abweichung zwischen den beiden Ergebnissen nur 0,2%. Wie man sieht eignet sich das Verfahren von Holzer sehr gut, um z.B. ein numerisch berechnetes Ergebnis ohne großen zeitlichen und rechnerischen Aufwand nachzuprüfen.

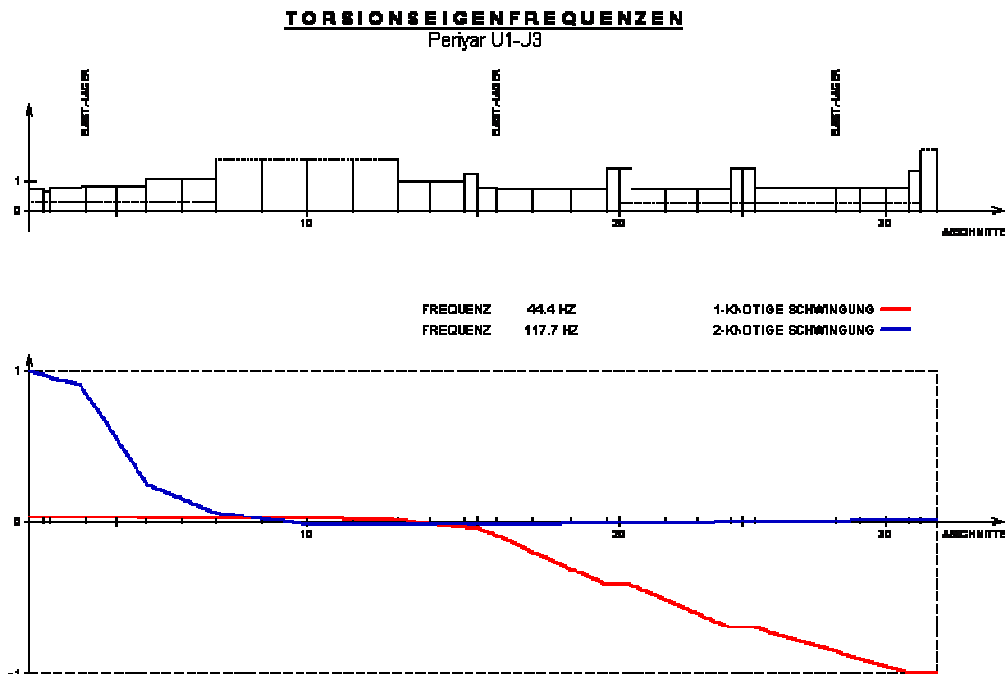


Abbildung 2-18 Torsionseigenfrequenz und Torsionseigenform mit Wellendynamik Beta2 berechnet

2.3 Übertragungsmatrizenverfahren (Markert, 2003)

2.3.1 Übertragungsmatrizen für Drehschwingungen

Die Idee des Verfahrens der Übertragungsmatrizen besteht in einer Aufteilung der Struktur in gleichartige Felder (z.B. Torsionsfeder, Drehmasse) und der Definition von Zustandsvektoren, die sowohl kinematische als auch kinetische Zustandsgrößen enthalten und das Systemverhalten an den Endpunkten der Felder beschreiben. Beim Übertragungsmatrizenverfahren werden auch die Trägheits- und Steifigkeitseigenschaften der „Zwischenelemente“ erfasst. Die Elemente des Schwingungssystems werden durch Matrizen erfasst und die Schwingerkette durch ein Matrizenprodukt beschrieben. Die Indizes R und L bezeichnen die Orte rechts bzw. links der betrachteten Drehmasse. Die kinematische Verträglichkeitsbedingung lautet $\varphi_p^R = \varphi_p^L = \varphi_p$ und der Drallsatz für die Drehmasse p $M_p^R - M_p^L = -\theta_p \omega^2 \varphi_p$. Die Größen Verdrehwinkel und Schnittmoment faßt man hier für die Orte R und L (Abbildung 2-19) zu Zustandsvektoren $\mathbf{z}_p^L = \begin{bmatrix} \varphi_p^L \\ M_p^L \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_p^R = \begin{bmatrix} \varphi_p^R \\ M_p^R \end{bmatrix}$ zusammen.

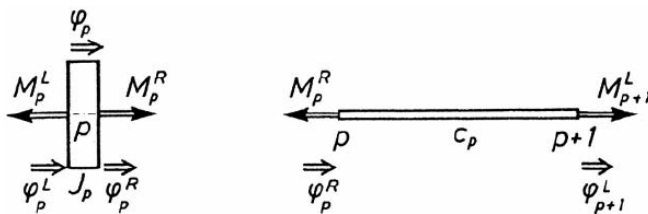


Abbildung 2-19: Drehmasse (links) und Stab (rechts)

Übertragungsmatrix einer starren Drehmasse

Die Verträglichkeitsbedingung und der Drallsatz lassen sich dann in Matrixschreibweise wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \varphi_p^R \\ M_p^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_p \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_p^L \\ M_p^L \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_p \omega^2 & 1 \end{bmatrix}$ wird als Punktmatrix P_p bezeichnet.

Übertragungsmatrix einer masselosen Drehfeder

Aus dem Gleichgewicht und dem Stoffgesetz für eine masselose Drehfeder folgt $M_{p+1}^L = M_p^R$ und $M_{p+1}^L = c_p(\varphi_{p+1}^L - \varphi_p^R)$. In Matrixschreibweise schaut dies wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} \varphi_{P+1}^L \\ M_{P+1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c_P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{P+1}^R \\ M_P^R \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c_P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wird als Feldmatrix F_P bezeichnet.

Massebehaftete Drehfeder

Aus der Differentialgleichung für das Wellenstück

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

mit dem harmonischen Ansatz $\varphi = \hat{\varphi} \cos \omega t$ folgt die gewöhnliche Differentialgleichung $\hat{\varphi}'' + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \hat{\varphi} = 0$.

mit $\frac{\lambda}{l} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$. Diese Gleichung hat folgende Lösung:

$$\hat{\varphi} = A \cos \lambda \frac{x}{l} + B \sin \lambda \frac{x}{l} \quad (2.20)$$

Damit gelten für das Feld die Übertragungsgleichungen

$$\hat{\varphi}_j = \cos \lambda_j \hat{\varphi}_{j-1} + \frac{1}{c_j \lambda_j} \sin \lambda_j \hat{M}_{j-1} \quad (2.21)$$

$$\hat{M}_j = -c_j \lambda_j \sin \lambda_j \hat{\varphi}_{j-1} + \cos \lambda_j \hat{M}_{j-1}$$

In Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j \\ \hat{M}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_j & \frac{1}{c_j \lambda_j} \sin \lambda_j \\ -c_j \lambda_j \sin \lambda_j & \cos \lambda_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{j-1} \\ \hat{M}_{j-1} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Nun geht man wie folgt vor. Zum Beispiel die Serienschaltung einer Drehfeder und einer Drehmasse lässt sich mit den Gleichungen (2.17) und (2.18) wie folgt beschreiben

$$z_{p+1}^L = F_p z_p^R = F_p P_p z_p^L = U_p z_p^L \quad (2.23)$$

Dabei ist $U_p = F_p P_p$ die Übertragungsmatrix mit den Elementen $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ und stellt den Zusammenhang zwischen den Zuständen links der p-ten und links der (p+1)-ten Drehmasse her.

2.3.2 Übertragungsmatrizen für Biegeschwingungen

Das Verfahren wird auch nach Myklestad und Prohl benannt. Zur Beschreibung des Zustandes an einem Ort x benötigt man bei ebener Biegung vier Zustandsgrößen, nämlich die Durchbiegung $w(x, t)$, Neigung des Balkenquerschnitts $\psi(x, t)$, das Biegemoment im Balken $M(x, t)$ und die Querkraft im Balken $Q(x, t)$. Die Amplituden dieser vier Größen faßt man zu einem Spaltenvektor, dem sogenannten Zustandsvektor

$y = \begin{pmatrix} -w \\ \psi \\ M \\ Q \end{pmatrix}$ zusammen. Das negative Vorzeichen bei w wurde gewählt, damit die Elemente der

Übertragungsmatrix eines masselosen, elastischen Feldes positiv sind. Man teilt das biegeschwingungsfähige System in einzelne Wellenstücke auf (Felder). Der linke Rand des Feldes j wird als Stelle $j-1$ und der rechte Rand als Stelle j bezeichnet. Der Zustand an jedem Rand j eines Feldes wird durch den Zustandsvektor y_j beschrieben (Abbildung 2-20).

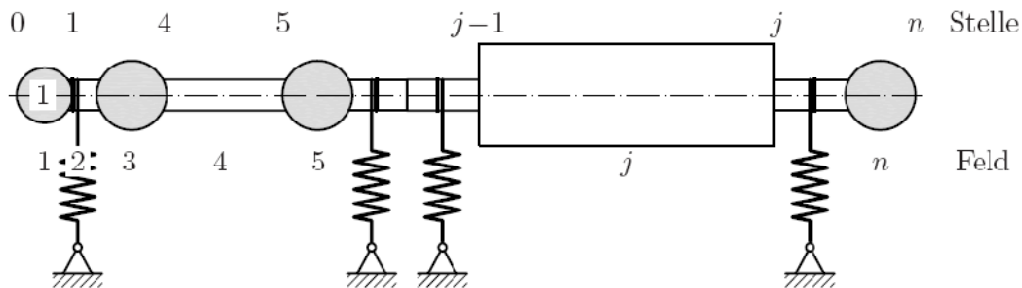


Abbildung 2-20 Stellen- und Feldnummerierung einer Welle

Ausgangspunkt des Verfahrens sind die elastischen und kinetischen Gleichungen für die einzelnen Rotorabschnitte. Für die freien Schwingungen wird ein harmonischer Ansatz $w = \hat{w} \sin \omega t$ zur Lösung gewählt. Die Beschleunigung ergibt sich damit zu

$$\ddot{w} = -\omega^2 w = -\omega^2 \hat{w} \sin \omega t \quad (2.24)$$

Die Lösung jedes Feldes wird dann in einer frequenzabhängigen Matrix $A_j(\omega)$ (manchmal auch F oder \ddot{U}) zusammengefaßt. Sie beschreibt dann das Übertragungsverhalten des Feldes vom linken bis zum rechten Rand.

$$y_j = A_j y_{j-1} \quad (2.25)$$

Die Amplituden am rechten Rand hängen auch hier nach obiger Gleichung linear von den Größen am linken Rand ab. Wie bei den Torsionsschwingungen läßt sich nun auch hier der Zustand am rechten Rand dadurch berechnen, dass man die Eigenfrequenz schätzt und so lange variiert bis die Randbedingungen am rechten Rand erfüllt sind. Vorausgesetzt ist auch hier die Kenntnis des Zustandes am linken Rand. Schauen wir uns nun die Übertragungsmatrizen für verschiedene Feldtypen an.

Elastisches Rotorlager

Ein elastisches Lager mit der Steifigkeit c_j in radialer Richtung und der Drehsteifigkeit c_{ψ_j} in Neigungsrichtung erfaßt man mit einem idealisierten Rotorelement der Länge $l_j=0$ (siehe Abbildung 2-21).

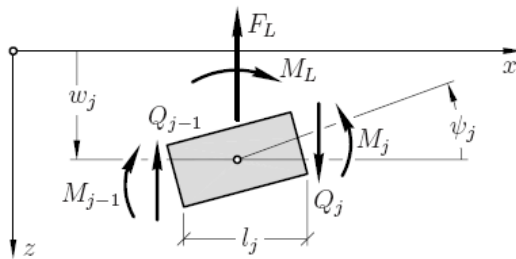


Abbildung 2-21 Lagerelement

Die Lagerkraft und das Lagermoment (Rückstellmoment) berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_L &= c_j w_j \\ M_L &= c_{\psi_j} \psi_j \end{aligned} \quad (2.26)$$

Bei verschwindender Lagerlänge des Rotorelementes besteht zwischen den Zuständen am linken und rechten Rand folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} w_j &= w_{j-1} \\ \psi_j &= \psi_{j-1} \\ M_j &= M_{j-1} + M_L = M_{j-1} + c_{\psi_j} \psi_{j-1} \\ Q_j &= Q_{j-1} + F_L = Q_{j-1} + c_j w_{j-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit einem harmonischen Ansatz gilt dann für den Zustandsvektor der lineare Zusammenhang

$$y_j = \begin{pmatrix} -\hat{w}_j \\ \hat{\psi}_j \\ \hat{M}_j \\ \hat{Q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\psi j} & 1 & 0 \\ -c_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{w}_{j-1} \\ \hat{\psi}_{j-1} \\ \hat{M}_{j-1} \\ \hat{Q}_{j-1} \end{pmatrix} = A_j y_{j-1} \quad (2.28)$$

Punktförmige Rotormasse

Abbildung 2-22 zeigt das ausgelenkte Element einer punktförmigen Rotormasse. Die Länge l_j geht auch hier wieder gegen 0.

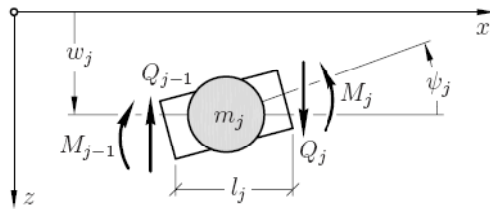


Abbildung 2-22 Punktförmige Rotormasse

Aus der Geometrie folgen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} w_j &= w_{j-1} \\ \psi_j &= \psi_{j-1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Kräfte und Momente dieser Punktmasse sind

$$\begin{aligned} M_j - M_{j-1} &= 0 \\ m_j \ddot{w}_j &= Q_j - Q_{j-1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bei harmonischer Bewegung folgt auch hier wieder wegen $\ddot{w}_j = -\omega^2 w_j$ die Amplituden im Zustandsvektor

$$y_j = \begin{pmatrix} -\hat{w}_j \\ \hat{\psi}_j \\ \hat{M}_j \\ \hat{Q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_j \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{w}_{j-1} \\ \hat{\psi}_{j-1} \\ \hat{M}_{j-1} \\ \hat{Q}_{j-1} \end{pmatrix} = A_j y_{j-1} \quad (2.31)$$

Masseloses, biegeelastisches Wellenstück

Abbildung 2-23 zeigt ein masseloses, biegeelastisches Wellenstück, für das wir nun die Übertragungsmatrix aufstellen wollen. Das Wellenstück besitzt die Biegesteifigkeit EI_j und die Länge l_j .

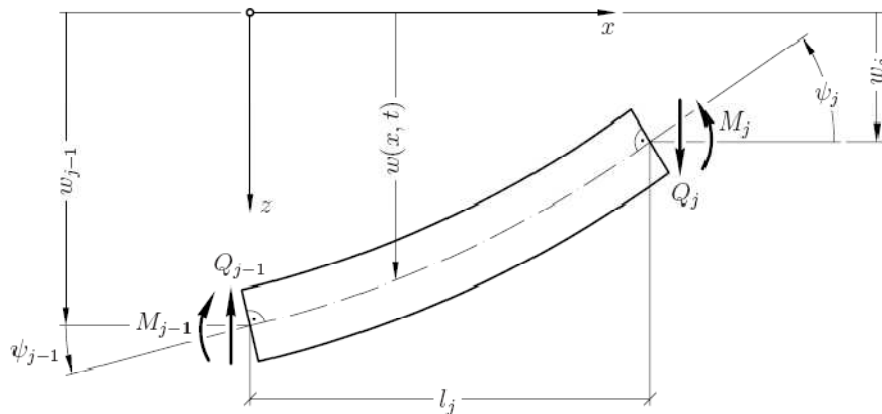


Abbildung 2-23 Masseloses, biegeelastisches Wellenstück mit den zugehörigen Schnittgrößen

Ausgehend von der Differentialgleichung der Biegelinie $EI w^{IV} = 0$ mit der Lösung $w(x, t) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$ stellen wir die Zusammenhänge mit den Schnittgrößen auf.

$$\begin{aligned} \psi &= -w' = -(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2) \\ M &= -EI_j w'' = -EI_j (2C_2 + 6C_3 x) \\ Q &= -EI_j w''' = -EI_j (6C_3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen am linken Rand bestimmt. Für die Amplituden ergibt sich dann

$$\begin{aligned} -\hat{w} &= -\hat{w}_{j-1} + \hat{\psi}_{j-1} x + \frac{\hat{M}_{j-1}}{2EI_j} x^2 + \frac{\hat{Q}_{j-1}}{6EI_j} x^3 \\ \hat{\psi} &= -\hat{w}' = \hat{\psi}_{j-1} + \frac{\hat{M}_{j-1}}{EI_j} x + \frac{\hat{Q}_{j-1}}{2EI_j} x^2 \\ \hat{M} &= -EI_j \hat{w}'' = \hat{M}_{j-1} + \hat{Q}_{j-1} x \\ \hat{Q} &= -EI_j \hat{w}''' = \hat{Q}_{j-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Daraus folgen für $x=l$ die Zustandsgrößen am rechten Feldrand.

$$y_j = \begin{pmatrix} -\hat{w}_j \\ \hat{\psi}_j \\ \hat{M}_j \\ \hat{Q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI_j} & \frac{l^3}{6EI_j} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI_j} & \frac{l^2}{2EI_j} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{w}_{j-1} \\ \hat{\psi}_{j-1} \\ \hat{M}_{j-1} \\ \hat{Q}_{j-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_j y_{j-1} \quad (2.34)$$

Kontinuierliches massebehaftetes Wellenstück

Abbildung 2-24 zeigt ein massebehaftetes kontinuierliches Wellenstück mit der Länge l_j , der Biegesteifigkeit EI_j und der Massebelegung μ_j .

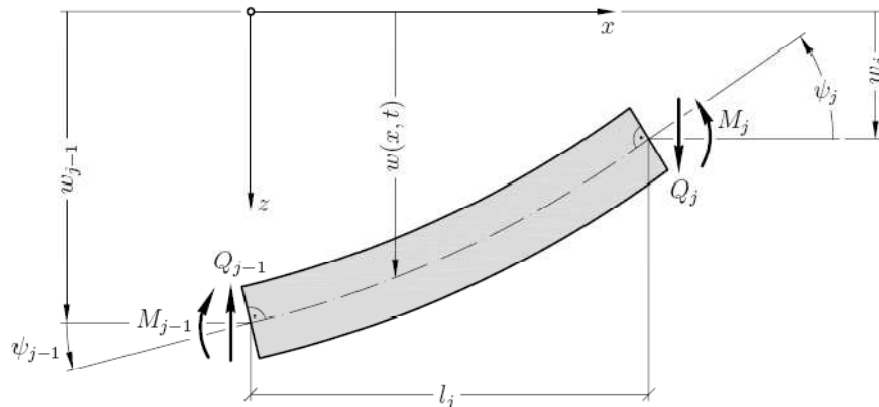


Abbildung 2-24 Kontinuierliches massebehaftetes Wellenstück

Die Ortsfunktion der Biegeschwingung wird durch die Differentialgleichung $\hat{w}^{IV} - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 \hat{w} = 0$ beschrieben.

Wobei $\lambda^4 = \frac{\mu_j l_j^4}{EI_j} \omega^2$ ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung kann man in folgender Form anschreiben

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \bar{A}_1 \cosh \lambda \frac{x}{l} + \bar{A}_2 \sinh \lambda \frac{x}{l} + \bar{A}_3 \cos \lambda \frac{x}{l} + \bar{A}_4 \sin \lambda \frac{x}{l} \\ \hat{w} &= A_1 \left(\cosh \lambda \frac{x}{l} + \cos \lambda \frac{x}{l} \right) + A_2 \left(\sinh \lambda \frac{x}{l} + \sin \lambda \frac{x}{l} \right) + A_3 \left(\cosh \lambda \frac{x}{l} - \cos \lambda \frac{x}{l} \right) \\ &\quad + A_4 \left(\sinh \lambda \frac{x}{l} - \sin \lambda \frac{x}{l} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Randbedingungen am linken Rand bei $x=0$ bestimmen. Setzt man diese Konstanten in die allgemeine Lösung ein und wertet die Gleichung für $x=l$ aus erhält man

$$y_j = \begin{pmatrix} -\widehat{w}_j \\ \widehat{\psi}_j \\ \widehat{M}_j \\ \widehat{Q}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C & Sl & \frac{cl^2}{EI_j} & \frac{sl^3}{EI_j} \\ \frac{s}{l}\lambda^4 & C & \frac{Sl}{EI_j} & \frac{cl^2}{EI_j} \\ \frac{cEI_j}{l^2}\lambda^4 & \frac{sEI_j}{l}\lambda^4 & C & Sl \\ \frac{SEI_j}{l^3}\lambda^4 & \frac{cEI_j}{l^2}\lambda^4 & \frac{s}{l}\lambda^4 & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\widehat{w}_{j-1} \\ \widehat{\psi}_{j-1} \\ \widehat{M}_{j-1} \\ \widehat{Q}_{j-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_j y_{j-1} \quad (2.36)$$

Mit den Abkürzungen in der Übertragungsmatrix

$$C = \frac{1}{2}(\cosh \lambda + \cos \lambda); S = \frac{1}{2\lambda}(\sinh \lambda + \sin \lambda) \quad (2.37)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda^2}(\cosh \lambda - \cos \lambda); s = \frac{1}{2\lambda^3}(\sinh \lambda - \sin \lambda)$$

In der Literatur werden diese Abkürzungen auch als Rayleigh'sche Funktionen bezeichnet.

Zusammenfassung verschiedener Randbedingungen

Abbildung 2-25 zeigt die wichtigsten Randbedingungen und die entsprechenden Zustandsvektoren.

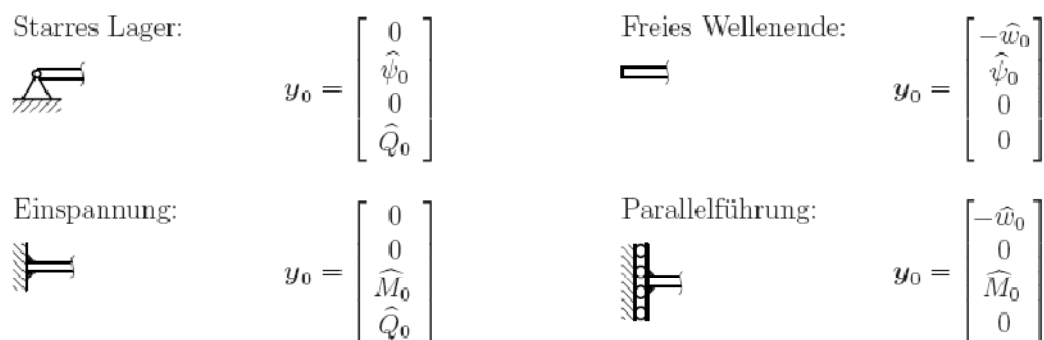


Abbildung 2-25 Randbedingungen und ihre Zustandsvektoren

Außerdem gibt es noch Zwischenbedingungen, die innerhalb eines Rotorstranges bestimmte Zustandsgrößen fixieren. Z.B. unterteilt eine starre Einspannung die Welle in zwei, in ihrem Verhalten unabhängige Einzelwellen. In Abbildung 2-26 sind solche Zwischenbedingungen dargestellt.

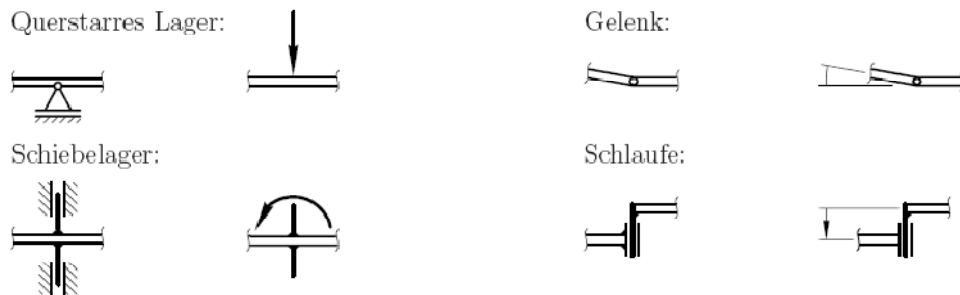


Abbildung 2-26 Zwischenbedingungen

Beim Übertragungsmatrizenverfahren können diese Zwischenbedingungen nicht durch Übertragungsmatrizen berücksichtigt werden. Es gibt allerdings Wege dies zu umgehen. Zum einen kann man diejenigen Größen, die z.B. durch ein Zwischenlager in das System eingebracht werden, als neue zusätzliche Unbekannte definieren. Bei einem starren Zwischenlager ist das die Lagerkraft, die sich beim Übergang über das Lager zur vorhandenen Querkraft addiert. Durch die Bedingung $\hat{w}_L = 0$ am Zwischenlager wird eine der unbekanntenen Zustandsgrößen eliminiert. Aber man kann auch diese Elimination vorerst lassen und dann am Ende die Bedingungen für das Zwischenlager und die der Ränder berücksichtigen. Man erhält dann ein Gleichungssystem, welches es zu lösen gilt. Die kritischen Drehzahlen erhält man wieder aus der Bedingung, daß die Koeffizientendeterminante verschwinden muß.

2.4 Einfluss der Kreiselwirkung (Gasch, Nordmann, & Pfützner, 2002)

Neigt sich die Scheibe im ausgelenkten Zustand, Abbildung 2-29, dann ist die bisherige Vernachlässigung der am Scheibensitz auf die Welle wirkenden Biegemomente nur dann brauchbar, wenn die Massenträgheitsmomente der Scheibe nicht allzu groß sind, so dass die Annahme einer Punktmasse noch ihre Berechtigung behält. Bei den meisten Läuferkonstruktionen ist diese vereinfachende Betrachtung, wie sich zeigen wird, durchaus zulässig und liefert gute Ergebnisse. Dennoch gibt es Fälle, in denen die Momentenwirkung und somit die Drehfreiheitsgrade der Scheibe berücksichtigt werden müssen, weil sie das Verhalten des Läufers deutlich beeinflussen. Das ist z.B. beim Läufer mit einer großen Scheibe auf überkragendem Wellenende der Fall, siehe Abbildung 2-29.

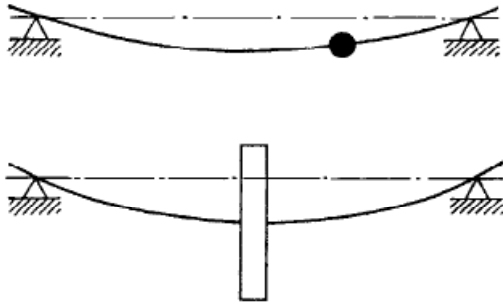


Abbildung 2-27 Läufer mit punktförmiger Masse (oben), Läufer mit Scheibe die sich nicht schrägstellt (unten)

Zur Bestimmung der Quer- und Winkelbewegungen des Rotors führen wir wie in Abbildung 2-28 (links), ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) ein. Die positiven Zählrichtungen für die Momente und Winkel sind als Rechtsschrauben um die betreffenden Koordinatenachsen festgelegt (siehe Abbildung 2-28, rechts).

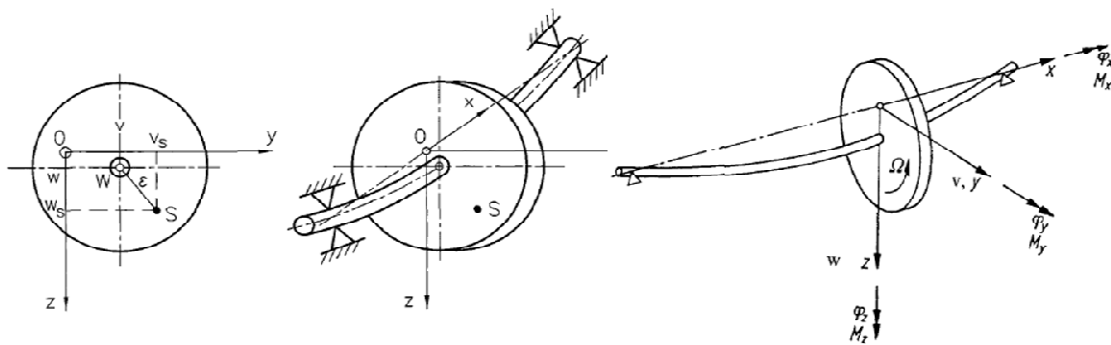


Abbildung 2-28 Ausgelenkte Welle in einem raumfesten Koordinatensystem (links) und Definition der positiven Zählrichtung der Winkel und Momente (rechts)

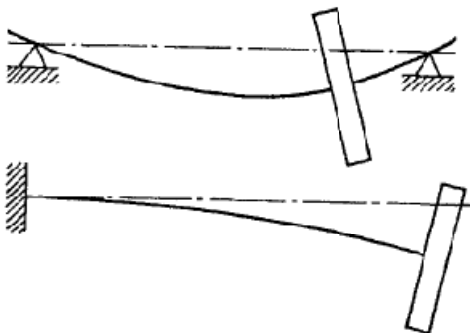


Abbildung 2-29 Schrägstellung der Scheibe bei ausgebogenem Läufer

Schon bei einer nicht rotierenden Welle bewirkt eine außermittig sitzende Scheibe eine Kopplung der Querauslenkung mit dem Winkel der Scheibenschrägstellung, indem sie sich auf Grund ihres axialen Massenträgheitsmomentes Θ_a , gegen eine Schrägstellung wehrt. Rotiert die Welle noch, so treten zusätzliche Effekte auf, an die der aus dem Physikunterricht bekannte Versuch, Abbildung 2-30, erinnert.

Dreht man die Welle, auf der das Rad um seine Achse mit der großen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_x = -\Omega$ rotiert, an dem Handgriff mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_z$ um die vertikale z-Achse, dann reagiert der Rotor mit einem positiven Moment um die y-Achse. Im folgenden werden wir zeigen, dass dieses Moment die Größe $\Theta_p \Omega \dot{\varphi}_z$ hat, wobei Θ_p , das polare Massenträgheitsmoment des Rades um die x-Achse darstellt. Je höher also die Drehzahl Ω , je größer das polare Trägheitsmoment Θ_p , und je größer die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}_z$, der Drehung um die Hochachse ist, um so spürbarer wird der Einfluss dieses Kreiselmomentes.

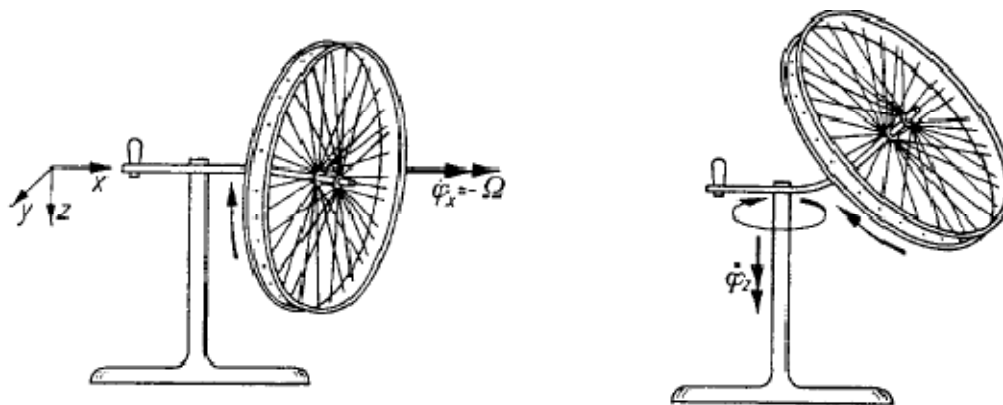


Abbildung 2-30 Versuch zur Demonstration des Kreiselmomentes

Außer diesem gyroskopischen Moment, das sich in der z, x-Ebene auswirkt, tritt natürlich in dieser Ebene auch ein Moment auf, wenn der Rotor um die y- Achse mit $\dot{\varphi}_y$, beschleunigt wird. Das Gesamtmoment M_y , das an der Welle in der z, x-Ebene angreift, setzt sich demnach aus den beiden Anteilen zusammen.

$$M_y = \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_z - \Theta_a \ddot{\varphi}_y \quad (2.38)$$

Durch den Einfluß des gyroskopischen Momentes werden die Eigenkreisfrequenzen des Läufers drehzahlabhängig $\omega_v = \omega_v(\Omega)$. Die kritische Drehzahl eines Läufers mit dünner Scheibe erhöht sich leicht - verglichen mit der vereinfachten Betrachtung ohne Kreiselwirkung. Ist die Läufermasse dagegen walzenförmig ($\Theta_a > \Theta_p$), dann erniedrigt sich die kritische Drehzahl gegenüber der vereinfachten Betrachtung. Darüber hinaus gibt es durch den Kippfreiheitsgrad noch eine zweite kritische Drehzahl, die wesentlich höher liegt. Gewöhnlich bleibt der Einfluss der Kreiselwirkung auf die Lage der ersten kritischen Drehzahl eines Läufers jedoch unter 5 %. Der Drall einer rotierenden Scheibe lässt sich leicht angeben, wenn er auf ein Hauptachsensystem bezogen wird. Die Drallkomponente in Richtung einer Hauptachse ist bekanntlich das Produkt aus Drehmasse und Winkelgeschwindigkeit um diese Hauptachse. Für unsere

Scheibe, die wir als rotationssymmetrisch annehmen, führen wir ein spezielles kartesisches Koordinatensystem (x', y', z') ein, dessen Ursprung im Scheibenschwerpunkt S liegt. Die x' -Achse stimmt mit der Symmetrieachse der Scheibe überein, und die beiden anderen Achsen liegen in der Mittelebene der Scheibe. Dieses Koordinatensystem führt die Translationsbewegungen w_s , und v_s , des Scheibenschwerpunktes und die Taumelbewegungen der Scheibe φ_{zs} , und φ_{ys} , mit aus, ohne allerdings die Rotation um die x' -Achse mitzumachen, Abbildung 2-31. Es ist, obwohl es nicht fest mit der Scheibe verbunden ist, für eine rotationssymmetrische Scheibe ein Hauptachsensystem.

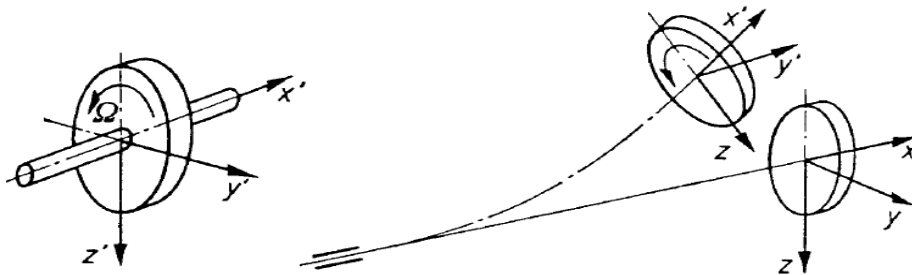


Abbildung 2-31 x', y', z' -Hauptachsensystem an einer rotationssymmetrischen Scheibe

Somit lauten die Drallkomponenten

$$L_{x'} = \theta_D \dot{\varphi}_{xs} \quad (2.39)$$

$$L_{y'} = \theta_a \dot{\varphi}_{ys}$$

$$L_{z'} = \theta_a \dot{\varphi}_{zs}$$

wobei φ_{zs} und φ_{ys} und φ_{xs} die Winkel an der Scheibe sind. Ihre Projektionen auf die Achsen des raumfesten Koordinatensystems (x, y, z) , in dem die Bewegungsgleichungen formuliert werden, sind gemäß Abbildung 2-32 unter Annahme kleiner Winkel

$$L_y = L_{y'} + L_{x'} \varphi_{zs} \quad (2.40)$$

$$L_z = L_{z'} - L_{x'} \varphi_{ys}$$

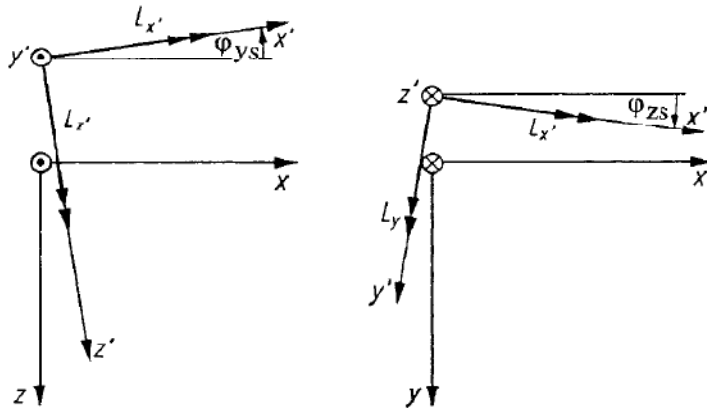


Abbildung 2-32 Drallkomponenten im raumfesten Koordinatensystem

Die Komponente L_x die für kleine Winkel praktisch gleich $-\Theta_p \Omega$ ist, interessiert

uns im Folgenden nicht weiter, da wir $\Omega = const.$ voraussetzen.

Setzt man in den Gleichungen (2.40) die Ausdrücke (2.39) ein, so folgt daraus mit $\dot{\phi}_{xs} = -\Omega$

$$L_y = \Theta_a \dot{\phi}_{ys} - \Omega \Theta_p \phi_{zs} \quad (2.41)$$

$$L_z = \Theta_a \dot{\phi}_{zs} - \Omega \Theta_p \phi_{ys}$$

Da nach dem Drallsatz die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem Moment ist, folgt aus Gleichung (2.41) durch Ableiten nach der Zeit

$$M_y = \dot{L}_y = \Theta_a \ddot{\phi}_{ys} - \Omega \Theta_p \dot{\phi}_{zs} \quad (2.42)$$

$$M_z = \Theta_a \ddot{\phi}_{zs} - \Omega \Theta_p \dot{\phi}_{ys}$$

Die Glieder $\Theta_a \ddot{\phi}_{ys}$ bzw. $\Theta_a \ddot{\phi}_{zs}$ stellen die Momente infolge der Drehträgheit der Scheibe dar, die sich gegen eine Schrägstellung wehrt. Sie sind auch bei der nicht rotierenden Welle vorhanden. Die Glieder bzw. $-\Omega \Theta_p \dot{\phi}_{zs}$ bzw. $-\Omega \Theta_p \dot{\phi}_{ys}$ geben den sogenannten Kreiseinfluss wieder. Sie verschwinden bei $\Omega = 0$. Der Ausdruck für das Moment um die y-Achse wurde bereits in der Einleitung im Zusammenhang mit dem in Abbildung 2-30 dargestellten Versuch erwähnt. Da dort jedoch das auf die Welle wirkende Reaktionsmoment angegeben wurde - und nicht das an der Scheibe angreifende Moment - unterscheiden sich die Ausdrücke im Vorzeichen.

2.5 Anstrengungshypothesen (Celigoj, 2004)

Anstrengungshypothesen führen mehrachsiale Beanspruchungszustände auf einachsiale Beanspruchungszustände zurück. Die letzteren können dann auf Grenzzustände untersucht werden. Folgende Frage stellt sich: Führt ein bestimmter mehrachsialer Spannungszustand bei „zähen“ Körpern zum Fließen, bei „spröden“ Körpern zum Bruch bzw. allgemein zum Versagen?

Zum Beispiel reicht die Kenntnis der aus Zug- und Druckversuchen gewonnenen Fließgrenze allein nicht aus, um feststellen zu können, wann ein gegebener mehrachsialer Spannungszustand zum Fließen führt. Wir brauchen noch eine Hypothese, die es uns ermöglicht, aus den sechs Komponenten des allgemeinen dreiachsialen Spannungszustandes eine Vergleichsspannung zu berechnen, die wir mit der Beanspruchung beim einachsialen Versuch vergleichen können.

Abbildung 2-33 zeigt die Spannungsvektoren (links) und die Spannungskomponenten an einem infinitesimalen Quader ().

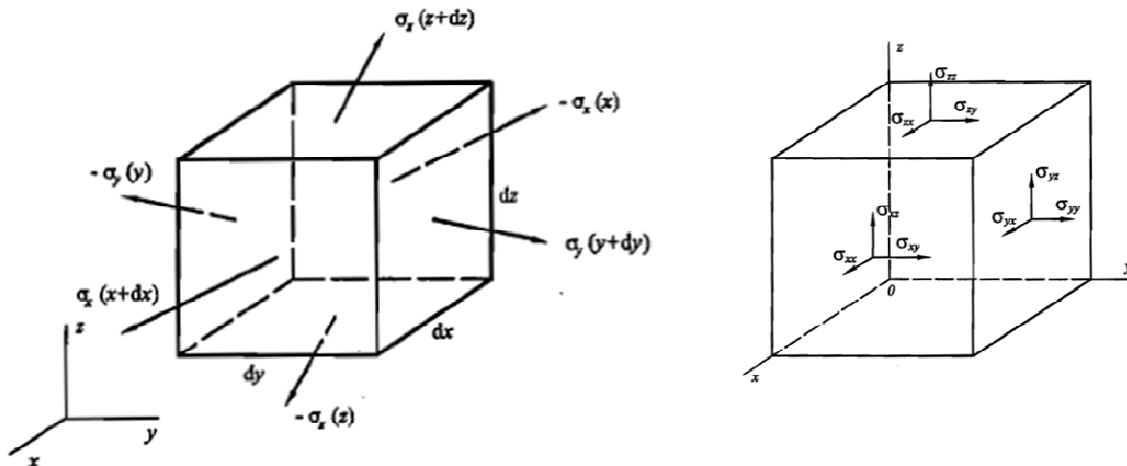


Abbildung 2-33 Spannungsvektoren (links) und Spannungskomponenten (rechts) an einem infinitesimalen Quader

2.5.1 Fließhypothesen

Die Anstrengungshypothesen nach Tresca und nach von-Mises sind in erster Linie für die Bestimmung des Fließeintritts bei zähplastischen Werkstoffen gedacht.

Hypothese nach Tresca

Sie besagt, dass der Spannungszustand und die Vergleichsspannung im Zugstab den Werkstoff gleich stark beanspruchen, wenn beide Spannungszustände dieselbe maximale Schubspannung erzeugen → Hypothese der maximalen Schubspannung. 1, 2, 3 sind Hauptachsenrichtungen.

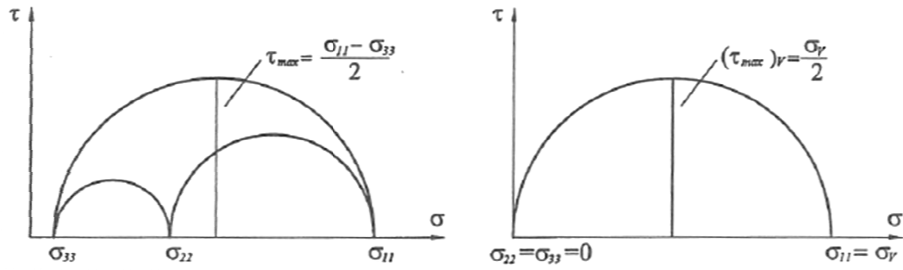


Abbildung 2-34 Mohrscher Spannungskreis

Allgemeiner Spannungszustand (siehe Abbildung 2-34):

$$(2.43)$$

$$(2.44)$$

Einachsiale Situation (Zugversuch):

,

$$(2.45)$$

—

$$(2.46)$$

Vergleich: Gleichsetzen von _____ und _____

_____ —

$$(2.47)$$

... Vergleichsspannung

$$(2.48)$$

Kritische einachsiale Situation (Zugversuch):

... Fließbedingung

$$(2.49)$$

Gleichung (2.49) ist die analytische Form der Fließbedingung.

Hypothese nach von- Mises (Hypothese der Oktaederschubspannung)

Zu Beginn muss die Oktaederschubspannung hergeleitet werden. Dazu betrachtet man einen spannungserfüllten Raum (z.B. Ausschnitt aus einem belasteten, festen Körper) und positioniert in diesem Körper ein Oktaeder (setzt sich aus acht gleichseitigen Dreiecken zusammen) so, dass die Koordinatenachsen 1,2,3 des Oktaeders die Hauptnormalspannungsrichtungen des Spannungsraumes sind. Nun schneidet man das Oktaeder frei und bestimmt die Normalspannungen und die Schubspannungen, die auf die Oktaederflächen angreifen (siehe Abbildung 2-35).

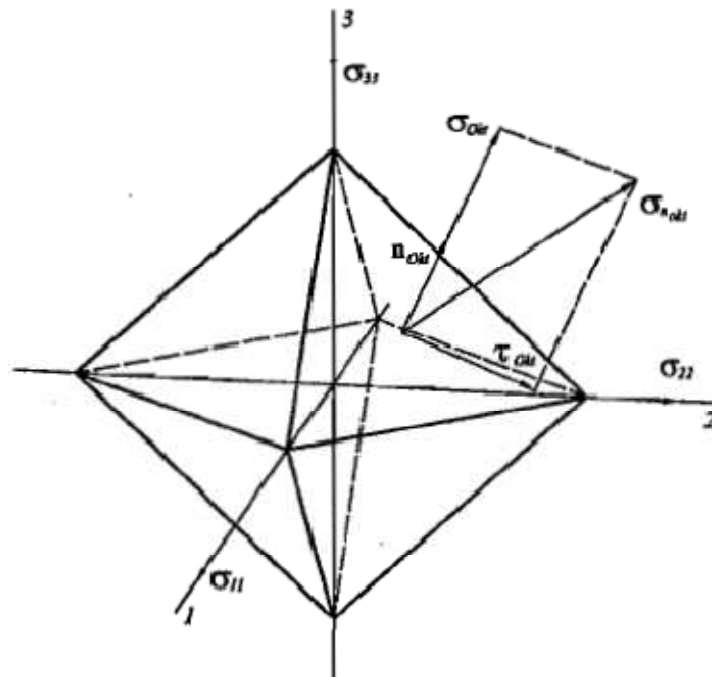


Abbildung 2-35 Oktaederschubspannungen

Die Spannungsmatrix \mathbf{S} und der Normalenvektor \mathbf{n}_{okt} lauten:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_{okt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Der Spannungsvektor, der auf diese Fläche angreift, wird gemäß der Cauchyschen Formel wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{S}^T \mathbf{n}_{okt} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Durch die Projektion auf die Flächennormale bestimmt man die Oktaedernormalspannung:

$$\sigma_{okt} = \boldsymbol{\sigma}_n^T \mathbf{n}_{okt} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.52)$$

Die Projektion auf die Fläche liefert die **Oktaederschubspannung**. Aus dem pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\tau_{okt}^2 = \boldsymbol{\sigma}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n - \sigma_{okt}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{1}{9} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \quad (2.53)$$

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2} \quad (2.54)$$

τ_{okt} stellt somit den allgemeinen Spannungszustand dar. Um auf die von- Mises- Vergleichsspannung zu kommen, wird nun der allgemeine Spannungszustand dem einachsialen Spannungszustand gegenübergestellt:

Einachsiale Situation (Zugversuch):

$$\sigma_{11} = \sigma_V \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (2.55)$$

$$(\tau_{okt})_V = \frac{1}{3} \sigma_V \sqrt{2} \quad (2.56)$$

Vergleich: Gleichsetzen von τ_{okt} und $(\tau_{okt})_V$:

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2} = \frac{1}{3} \sigma_V \sqrt{2} \quad (2.57)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]} = \sigma_V \dots \text{Vergleichsspannung} \quad (2.58)$$

Kritische einachsiale Situation (Zugversuch): $\sigma_V = \sigma_F$... Fließbedingung

$$\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] - \sigma_F^2 = 0 \quad (2.59)$$

Gleichung (2.59) stellt die analytische Form der Fließbedingung dar.

Die Hypothese der Oktaederschubspannung wird nach Huber und Hencky auch Hypothese der Gestaltänderungsenergie genannt.

2.5.2 Bruchhypothesen

Die Anstrengungshypothesen nach Tresca und nach von-Mises sind in erster Linie für die Bestimmung des Fließeintritts bei zähplastischen Werkstoffen gedacht. Zur Vorausberechnung des Bruches spröder Stoffe sind sie im allgemeinen nicht geeignet. Hier wird häufig die größte Hauptnormalspannung σ_{11} als Maß für die Anstrengung des Werkstoffs gewählt.

Es muss aber betont werden, dass die Benützung von Bruchhypothesen überhaupt nur dann sinnvoll ist, wenn die Spannungen knapp vor dem Bruch hinreichend genau bekannt sind. Die Verwendung der mit Hilfe der Elastizitätstheorie berechneten Spannungsverteilung ist nur dann zulässig, wenn der Werkstoff bis zum Bruch dem Hookschen Gesetz gehorcht.

Hypothese nach Rankine (Hypothese der größten Normalspannung)

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33} \quad (2.60)$$

$$\sigma_V = \sigma_{11} = \sigma_B \dots \text{Bruchspannung} \quad (2.61)$$

Hypothese nach de-Saint-Venant (Hypothese der größten Dehnung)

$$\varepsilon_{11} \geq \varepsilon_{22} \geq \varepsilon_{33} \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} = \varepsilon_B \dots \text{Bruchdehnung} \quad (2.63)$$

2.5.3 Versagenshypothesen

Des Weiteren gibt es auch Werkstoffe, die sich bei Druck zäh und bei Zug spröde verhalten: z.B. Geomaterialien. Dies wird durch die Versagenshypothese berücksichtigt.

2.6 Satz von Castigliano bzw. Menabrea (Parkus, 2005)

Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen vergleicht man die zu untersuchende Gleichgewichtslage mit Nachbarlagen, die geometrisch möglich sind, in Wirklichkeit aber nicht eintreten, weil zwar die zugehörigen Verzerrungen die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, der zugehörige Spannungszustand aber nicht den Gleichgewichtsbedingungen genügt. Nur der wirklich eintretende Zustand erfüllt beide Bedingungen.

Man kann nun auch umgekehrt verfahren. Anstatt Nachbarlagen zu betrachten, also den Verzerrungszustand zu variieren, kann man auch den Spannungszustand variieren, das heißt den tatsächlich eintretenden mit benachbarten Spannungszuständen vergleichen. Wir denken uns die auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte durch eine Anzahl von äquivalenten Einzelkräften $P_1 \dots P_n$ ersetzt. Wenn wir nun der Kraft P_i einen virtuellen Zuwachs δP_i erteilen, so werden sich die Spannungen ändern und damit die in den Spannungen ausgedrückte Verzerrungsenergie (innere Ergänzungsenergie) U^* um δU^* anwachsen. Die Änderungen mögen aber so beschaffen sein, dass auch der neue Spannungs- und Lastzustand statisch möglich ist, das heißt den Gleichgewichtsbedingungen genügt. Dann gilt auch für ihn und damit auch für die Zuwächse das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Als Verschiebungen wählen wir aber jetzt speziell die wirklich eingetretenen. Diese genügen ja den Verträglichkeits- und Stützungsbedingungen und sind, da die linearisierte Elastizitätstheorie gilt, hinreichend klein. Wir setzen also

$$\delta A^{(a)} = \sum_{i=1}^n a_i \delta P_i \quad (2.64)$$

Die Größe a_i ist der Arbeitsweg der Kraft P_i , nämlich die Projektion auf die Richtung von P_i der unter den Kräften P_1, \dots, P_n entstandenen Verschiebung des Angriffspunktes von P_i .

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lautet mit $\delta A^{(i)} = -\delta U^*$

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^n a_i \delta P_i \quad (2.65)$$

Drücken wir noch U^* anstatt durch die Spannungen durch die Kräfte P_i aus, so gilt

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \delta P_i \quad (2.66)$$

und damit

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = a_i. \quad (2.67)$$

Damit ist der Satz von Castigliano gewonnen:

„Die partielle Ableitung der inneren Ergänzungsenergie U^* nach einer Kraft gibt den Arbeitsweg dieser Kraft“.

Der Satz gilt übrigens auch für das Moment M_i eines Kräftepaars, wenn man beachtet, dass dessen Arbeitsweg ein Arbeitswinkel ist.

Der Satz von Castigliano kann auch zur Berechnung statisch unbestimmter Größen herangezogen werden. Deren Arbeitswege verschwinden nämlich. Für eine statisch unbestimmte äußere Kraft (statisch unbestimmte Auflagerreaktion) ist das unmittelbar einzusehen bzw. durch passende Abgrenzung des Systems stets erreichbar. Es gilt aber auch für eine statisch unbestimmte innere Kraft, wie etwa die Kraft in einem überzähligen Stab eines Fachwerkes. Denn denken wir uns die statisch unbestimmte Größe durch einen passend geführten Schnitt ausgeschaltet, so wird ein Klaffen der Schnitthufer eintreten, das durch Anbringen der statisch Unbestimmten wieder rückgängig gemacht werden muss. Deren Arbeitsweg ist im ursprünglichen System also Null. Drücken wir daher U^* mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen durch die Lasten und die statisch unbestimmten Größen X_1, X_2, \dots, X_n aus, so gilt

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.68)$$

In dieser speziellen Form wird der Satz von Castigliano auch als Satz von Menabrea bezeichnet. Es sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die in U^* auftretenden Kräfte statisch zulässig, d.h. im Gleichgewicht sein müssen. Vor Anwendung sind daher alle Zwangskräfte – die statisch unbestimmten natürlich ausgenommen – mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen aus U^* zu eliminieren.

3 Verwendete Software

3.1 Wellendynamik Beta 2

Die Biege- und Torsionseigenfrequenzen wurden mit Hilfe des Programms Wellendynamik Beta 2 unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung, Rotationsträgheit und Schubverformung berechnet. Zusätzlich wird der magnetische Zug sowie die durch die Turbine strömende Wassermasse berücksichtigt.

Die Beschreibung der Rechenmethode und der Fähigkeiten des Programms erfolgen in Anlehnung an folgende Quelle: Eickhoff H. Elin Union AG – Rotordynamik

3.1.1 Rechenmethode

Die Berechnung erfolgt nach dem so genannten Restgrößenverfahren mit Hilfe von Übertragungsmatrizen, die schon im Grundlagenteil genauer beschrieben wurde. Die Restgröße- eine zweireihige Determinante, abhängig von den Randbedingungen- wird als Funktion der Drehzahl berechnet. Die Nulldurchgänge der Frequenzdeterminante sind die gesuchten Eigenschwingungen (biegekritische Drehzahlen) der Welle. Durch schrittweise Erhöhung der Drehzahl und Abfragen auf Vorzeichenwechsel der zugehörigen Frequenzdeterminante werden die Nullstellen ermittelt.

3.1.2 Beschreibung der Fähigkeiten des Programms

Für einen beliebig abgesetzten und gelagerten Durchlaufträger bzw. Wellenstrang mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit, Eigenmasse, gleichmäßig verteilter Zusatzmasse und punktförmiger Zusatzmasse werden die Biegeeigenfrequenzen bzw. die biegekritischen Drehzahlen und die normierten Eigenformen ermittelt.

Außer Biegeelastizität und Massenträgheit kann wahlweise Rotationsträgheit, Kreiselwirkung, Schubverformung und magnetischer Zug berücksichtigt werden. Das Programm ist nicht in der Lage anisotrope Lagerungen sowie thermische Einflüsse zu berücksichtigen. Bei vorhandenen Angaben für magnetischen Zug werden die biegekritischen Drehzahlen mit Berücksichtigung des magnetischen Zuges und ohne magnetischen Zug getrennt berechnet und ausgegeben. Es können jedoch auf Wunsch nur die biegekritischen mit Berücksichtigung des magnetischen Zuges berechnet werden. Ferner können elastisch angekoppelte Punktmassen (z.B. mitschwingende Lagermassen) berücksichtigt werden (Abbildung 3-1). Die kontinuierliche Verteilung der Massen und Drehmassen ist berücksichtigt. Eine Reduktion auf punktförmige Massen und Drehmassen mit dazwischen liegenden masselosen und trägheitslosen Federn ist daher nicht notwendig.

3.1.3 Bedienungsanleitung für Wellendynamik Beta2

Die Welle wird in N Abschnitte unterteilt, mit den für den jeweiligen Abschnitt konstanten Eigenschaften. Bei veränderlichen Eigenschaften (z.B. Durchmesser konisch, E-Modul infolge Temperaturgradient in axialer Richtung veränderlich usw.) muss eine Unterteilung in mehrere Abschnitte vorgenommen werden, und für die jeweiligen Abschnitte entsprechende Mittelwerte der axial veränderlichen Daten eingesetzt werden.

Eine Abschnittsgrenze muss dort gelegt werden, wo sich einer der Abschnittswerte ändert, wo sich eine Einzelmasse, eine Einzeldrehmasse, eine Lagerstelle oder eine elastisch angekoppelte Punktmasse befindet. Will man jedoch auch mit dem Programm Biegelinie rechnen, dann ist es sinnvoll auch dort eine Abschnittsgrenze zu legen, wo sich eine äußere Kraft, ein äußeres Biegemoment oder eine punktförmige Unwucht befindet.

Bei punktförmigen Zusatzdrehmassen wird angenommen, dass sie in axialer Richtung keine Ausdehnung besitzen.

Bei Lagerelastizitäten wird vorausgesetzt, dass diese isotrop sind, d.h. die Lagersteifigkeiten sind in allen Richtungen gleich groß.

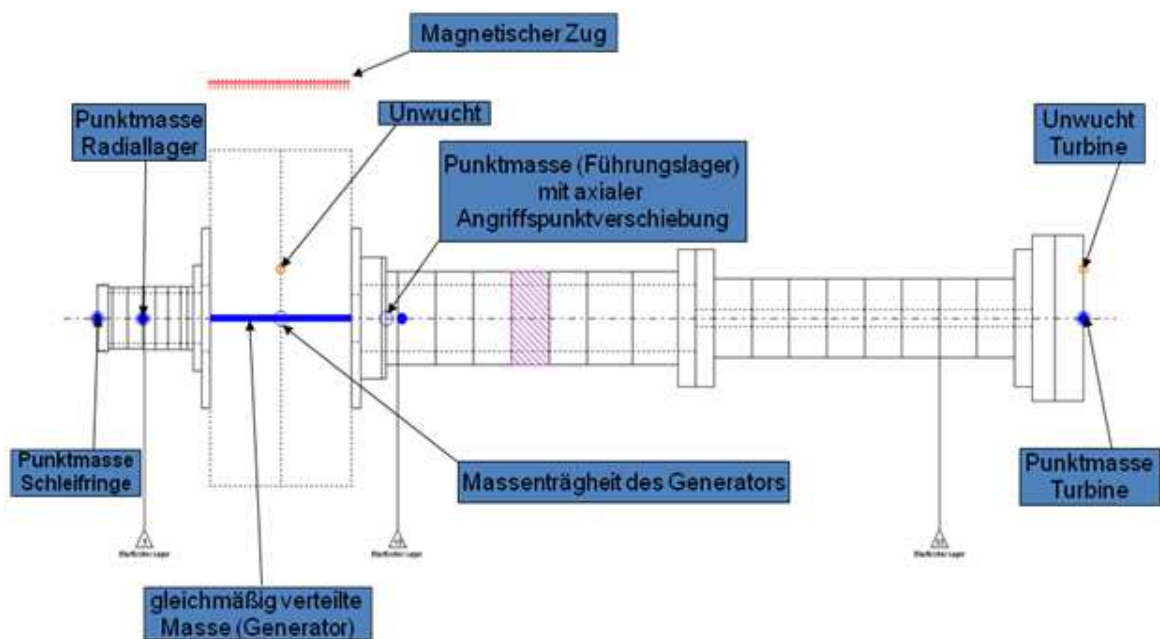


Abbildung 3-1 Unterteilung des Wellenstranges für die rotordynamische Berechnung

3.2 ANSYS Workbench v11

Da im Zuge dieser Diplomarbeit das FE- Programm Ansys ausschließlich als Berechnungswerkzeug verwendet wird, wird hier nur ein kurzer Überblick über die Fähigkeiten dieses Programmes gegeben.

ANSYS Workbench v11 ist ein Finite-Elemente-Programmpaket zur Modellierung gekoppelter, physikalischer Probleme. Es bietet Möglichkeiten für strukturmechanische, thermische, akustische und elektromagnetische Simulationen.

ANSYS Workbench v11 bietet umfangreiche physikalische Modelle für

Struktur Mechanik

- lineare Analysen
- geometrische Nichtlinearitäten
- nichtlineare Materialgesetze
- Kontaktanalysen
- statisch oder transient
- Topologie Optimierung

Thermische Analyse

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Strahlung
- Phasen Übergang via Enthalpie

Elektrostatik

Magnetostatik

- 2-d magnetische Vektor Potential Formulierung
- 3-d Kanten Element Formulierung
- 3-d Vektor Potential und skalare Element Formulierung

Nieder-Frequenz Elektromagnetik

Hoch-Frequenz Elektromagnetik (Full Wave)

Akustik

Multi-field Solver

- sequentiell gekoppelte Simulationen
- auch viele direkt gekoppelte Simulationen

ANSYS enthält als integriertes Paket neben dem Löser einen Prä- und Postprozessor sowie Schnittstellen zu externen Prä- und Postprozessoren und CAD-Programmen.

4 Eingehängte Kette

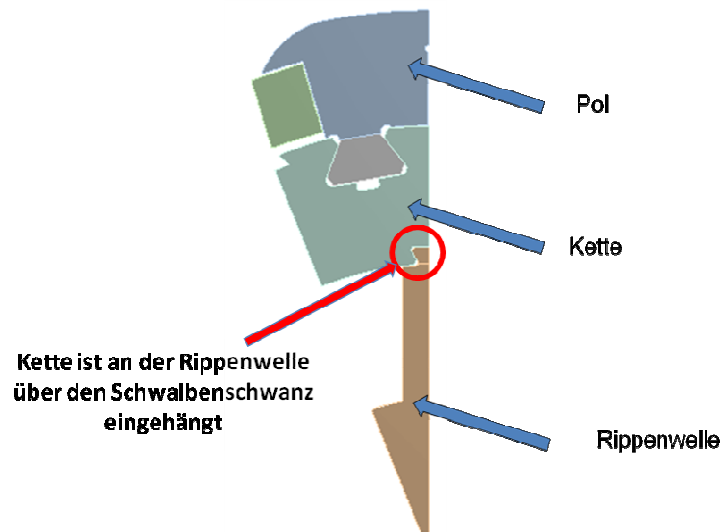


Abbildung 4-1 Symmetriemodell

Im Zuge dieser Machbarkeitsstudie der eingehängten Kette soll überprüft werden, wie sehr sich die Spannungssituation in der Kette verändert. Im Nennbetrieb sollen die Nennspannungen einen 0,6-fachen Wert der Streckgrenze nicht überschreiten. Spitzenspannungen sollen (im Nennbetrieb) die Streckgrenze nicht überschreiten. Des Weiteren muss die Rotordynamik des Wellenstranges überprüft werden. Der Mindestabstand zur biegekritischen Drehzahl muss mindestens 20 Prozent betragen. Der Mindestabstand zur Torsionseigenfrequenz sollte 5% nicht unterschreiten. Diese Fragen sollen in diesem Kapitel beantwortet werden. Des Weiteren soll die Machbarkeit der eingehängten Kette sowohl auf Rotoren mit Vollwelle (siehe Abbildung 1-9) als auch auf Rotoren mit Nabenstern (siehe Abbildung 1-11) überprüft werden.

4.1 Überprüfung der Machbarkeit der eingehängten Kette auf einen Rotor mit Vollwelle

Der Rotor wird bei kleinen Polzahlen (bis zu 6 Polen) als Vollwelle ausgeführt. Um diesen Rotor als Welle mit zusätzlicher eingehängter Kette ausführen zu können, muss die Welle im Durchmesser kleiner gebaut werden um Platz für das Kettenblech zu schaffen. Dies hätte den Vorteil, dass schlankere Wellen gekauft werden könnten, welche kostengünstiger und auch schneller verfügbar sind. Jedoch muss zuerst die Wellendynamik untersucht werden, da eine Welle mit kleinerem Querschnitt weicher ist und dadurch die kritischen Drehzahlen sinken. Die Überprüfung erfolgt mittels Berechnung der vorhandenen biegekritischen Drehzahl. Diese darf die vom Kunden geforderte Drehzahl (über der Durchgangsdrehzahl) nicht unterschreiten.

4.1.1 Untersuchung eines 6-poligen Generators

Biegekritische Drehzahlen des derzeitigen Rotors

Die wellendynamische Berechnung der derzeitigen Generatorwelle ergibt unter Berücksichtigung des magnetischen Zugs und der Wassermassen in der Turbine eine biegekritische Drehzahl von 1794 *rpm* (Abbildung 4-2).

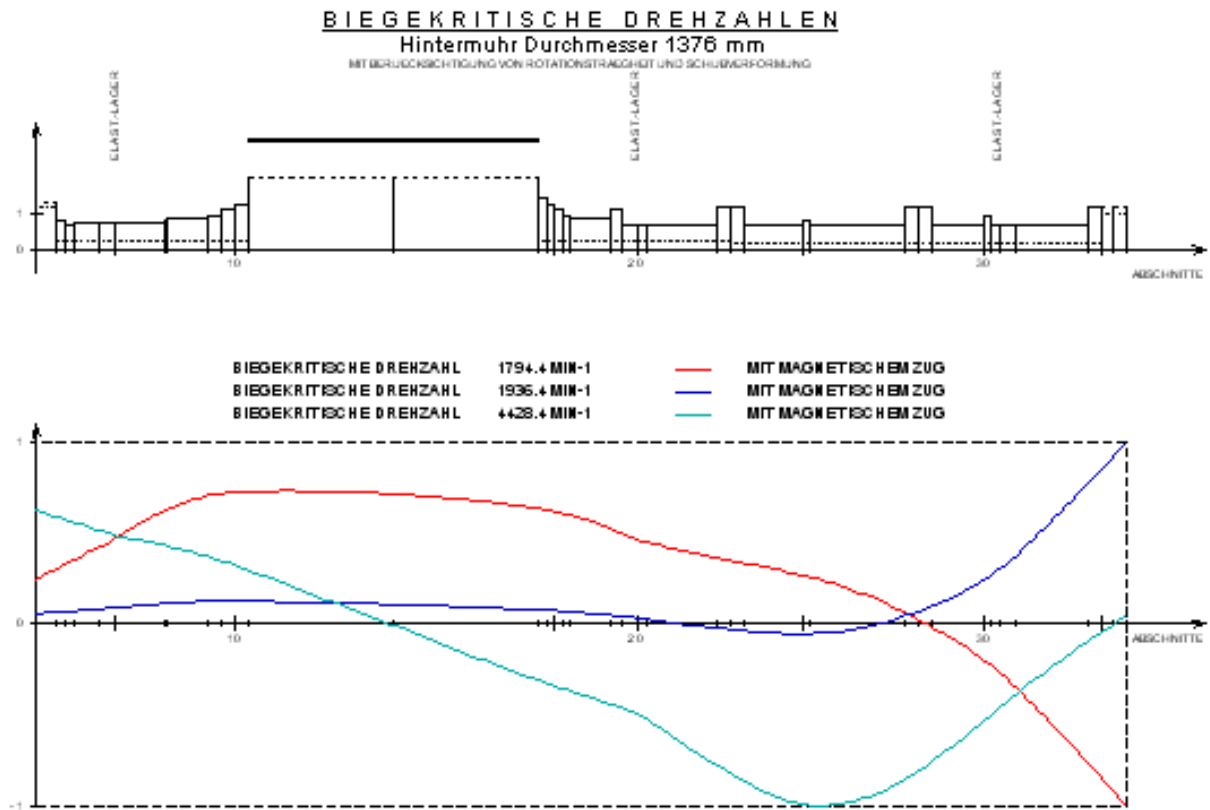


Abbildung 4-2: Biegekritische Drehzahlen des derzeitigen Rotors

Laut Vertrag wird (speziell in diesem Projekt) folgende Biegekritische Drehzahl gefordert:

$$n_{krit} \geq 1,2 \times n_{max} = 1,2 \times 1492 = 1791 \frac{U}{min}$$

n_{max} Durchgangsdrehzahl bei Lastabwurf

Die Forderung nach zwanzigprozentiger Sicherheit wird damit gerade noch eingehalten.

Biegekritische Drehzahlen des Rotors mit eingehängter Kette auf die Vollwelle

Um die eingehängte Kette an einer Vollwelle realisieren zu können, muss Platz für die Kette geschaffen werden. Dies erreicht man nur durch Verringern des Wellendurchmessers, da der Polinnendurchmesser aus elektrischen Gründen nicht verändert werden darf. Die theoretisch minimale radiale Kettenhöhe beträgt 0 mm (praktisch nicht realisierbar). Dies würde, bei einer Standard-Schwabenschwanz Nuttiefe von 130 mm , eine Verringerung des Wellendurchmessers von 1463 mm auf 1200 mm ergeben (Abbildung 4-4). Dadurch verringert sich die biegekritische Drehzahl auf 1749 rpm (Abbildung 4-3) womit der Sicherheitsabstand auf $17,2\%$ sinkt.

Die Auslegung als eingehängte Kette ist daher für diese 6-polige Maschine aufgrund der zu geringen biegekritischen Drehzahl **nicht realisierbar**.

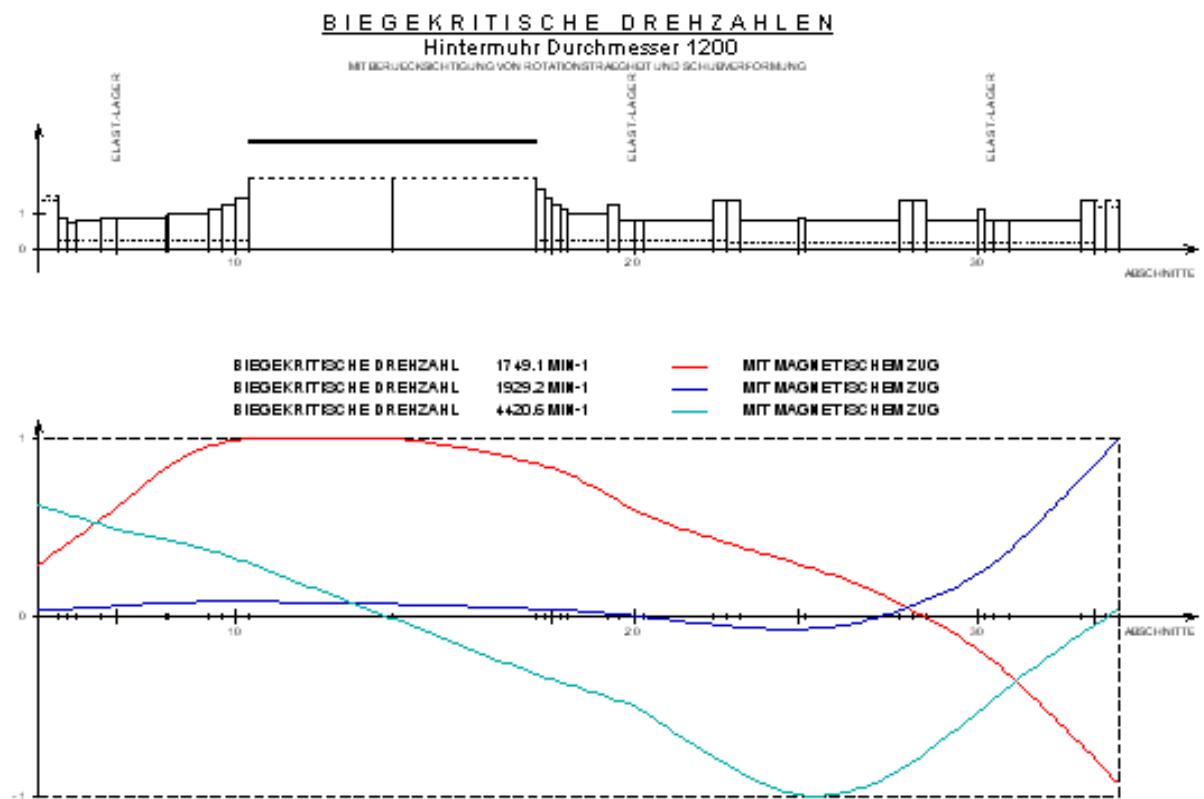


Abbildung 4-3: Biegekritische Drehzahlen des Rotors mit eingehängter Kette auf die Vollwelle

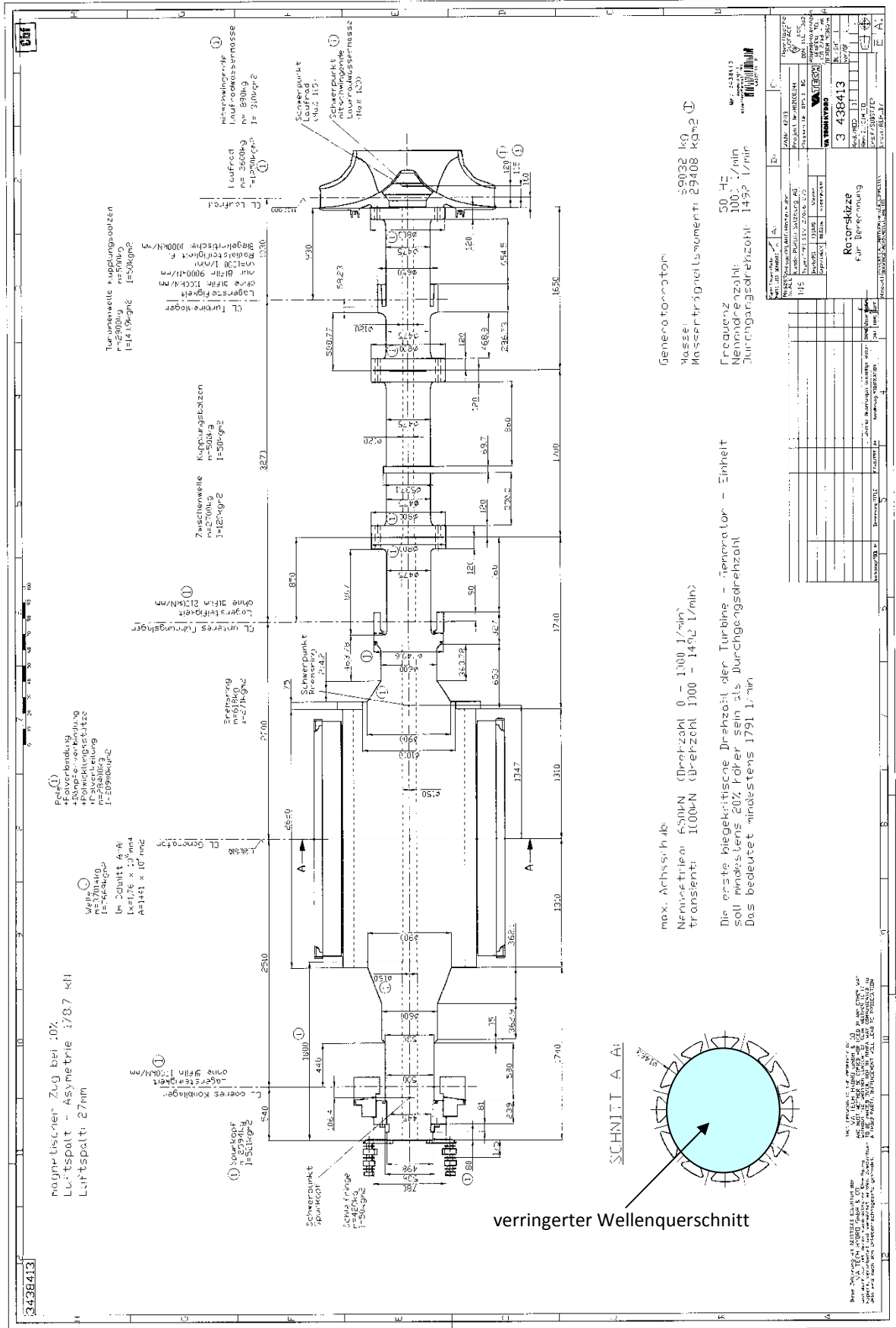


Abbildung 4-4: Rotorskizze Vollwelle

4.2 Einhängen der Kette mittels Schwalbenschwanz an der Rippenwelle

Derzeit wird in die aufgeschweiste Rippe am Außenradius eine rechteckige Nut gefräst, die sich über die gesamte axiale Länge erstreckt. Das Gegenstück zu dieser Nut befindet sich im Kettenblech. Beim folgenden Aufschumpf- Vorgang wird das Blechpaket erwärmt und über die Rippenwelle geschoben. In die Lücke, welche durch die exakt übereinanderliegenden Nuten entsteht, wird ein Keil eingeschoben. Durch das Abkühlen des Blechpakets über der Rippenwelle entsteht ein Schrumpf zwischen Rippenwelle und Kettenblechpaket. Dieser Schrumpf wird so ausgeführt, dass das Blechpaket bei Nenndrehzahl (Aufweitung aufgrund der Fliehkraftdehnung?) nicht abhebt. Ein Abheben des Blechpaketes findet aber bei der Durchgangsdrehzahl und manchmal auch bei der Lastabwurfsdrehzahl statt. Die Idee ist es nun, diese Verbindung nicht rechteckig, sondern trapezförmig (schwalbenschwanzförmig) auszuführen. Somit würde eine sogenannte Schwalbenschwanzverbindung zwischen Kette und Rippe entstehen.

Lastabwurfsdrehzahl

Das ist jene Drehzahl, bei welcher der Generator bewusst herunter geregelt wird, wenn die Maschine durch einen Störfall vom Netz fällt.

Durchgangsdrehzahl

Fällt die Regelungseinrichtung, welche den Generator bei Lastabwurfsdrehzahl regelt aus, so wird sich die Drehzahl abhängig vom Turbinentyp (Francis, Pelton, Kaplan) soweit erhöhen, bis sie die gesamte Hydraulische Energie des Wassers ausgereizt hat.

4.3 Analytisches Modell

Der erste Schritt meiner Berechnungen liegt in der Modellierung der eingehängten Kette. Dafür soll ein vereinfachtes Modell gefunden werden, welches die realen Bedingungen so gut wie möglich bzw. so genau wie nötig abbildet. Für die Finite Elemente Rechnung wurde aufgrund der Rotationssymmetrie schnell ein Symmetriemodell gefunden, welches in Abbildung 4-5 zu sehen ist.

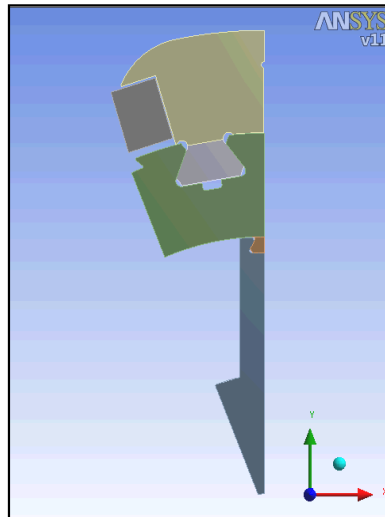


Abbildung 4-5 Rotationssymmetrisches Modell

Um einerseits die auftretenden Kräfte und Spannungen besser zu verstehen und um andererseits schnell und effektiv die qualitativen und quantitativen Veränderungen diverser Spannungen bei Variation bestimmter geometrischer Parameter errechnen zu können, habe ich ein geeignetes analytisches Modell gebildet (Abbildung 4-6). Dieses Modell ist zweifach statisch überbestimmt. Die Berechnung der Schnittgrößen erfolgt mit dem *Satz von Menabrea*.

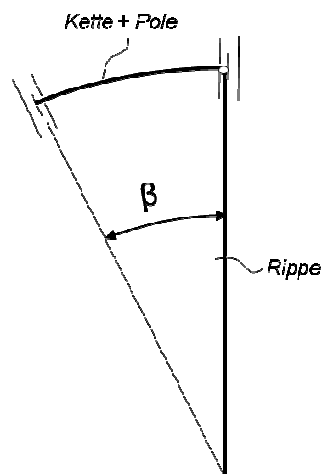


Abbildung 4-6 Vereinfachtes analytisches Symmetriemodell

4.3.1 Analytische Berechnung mit dem Satz von Menabrea

Freischnitt des statisch unbestimmten Symmetriemodells

Das Symmetriemodell besteht im Wesentlichen aus einem Bogenstück, welches die Kette modelliert und der Rippe, welche auf Grund der Symmetrie nur die halbe Rippenbreite aufweist. Diese beiden Elemente sind gelenkig miteinander verbunden. Die Masse der Pole wird vereinfacht als konstante Streckenlast angenommen. Abbildung 4-7 zeigt die auftretenden Reaktionskräfte und Momente.

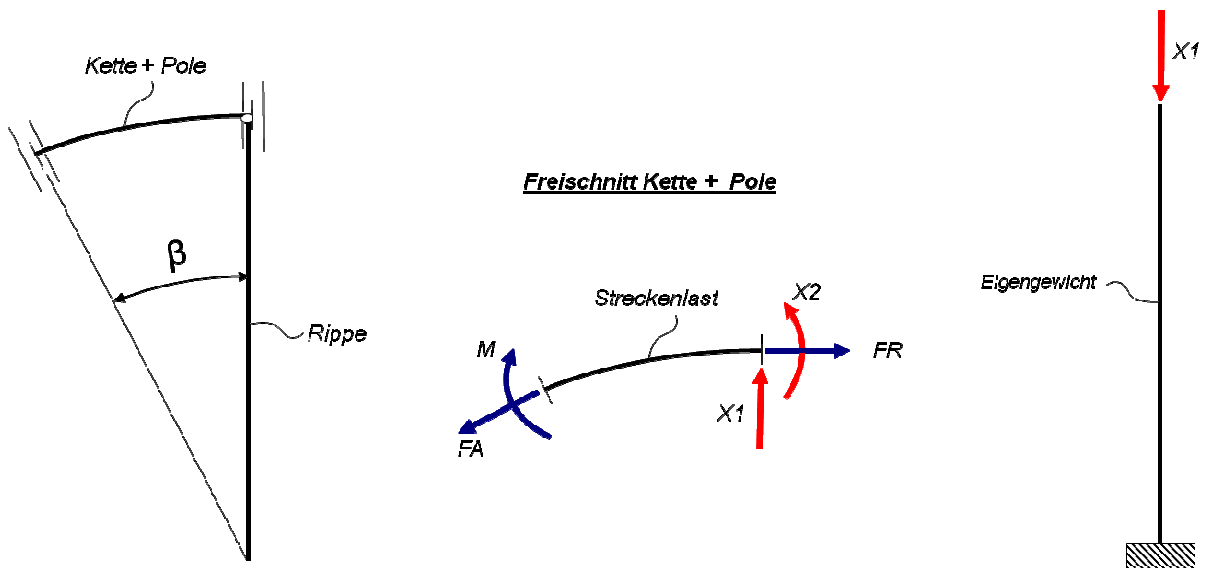


Abbildung 4-7 Freischnitt des statisch unbestimmten Symmetriemodells

Steifigkeitsmodell für das Design „Rippe mit Schwalbenschwanznut“

Die erste Variante beruht auf der Idee, die Schwalbenschwanznut in die Rippe zu fräsen, da es fertigungstechnisch nur einen Arbeitsschritt bedarf (siehe Abbildung 4-8). Die Nut kann mit einem Formfräser relativ einfach hergestellt werden. Da das Kettenblech gestanzt wird, stellt eine etwas kompliziertere Geometrie keinen nennenswerten Mehraufwand dar.

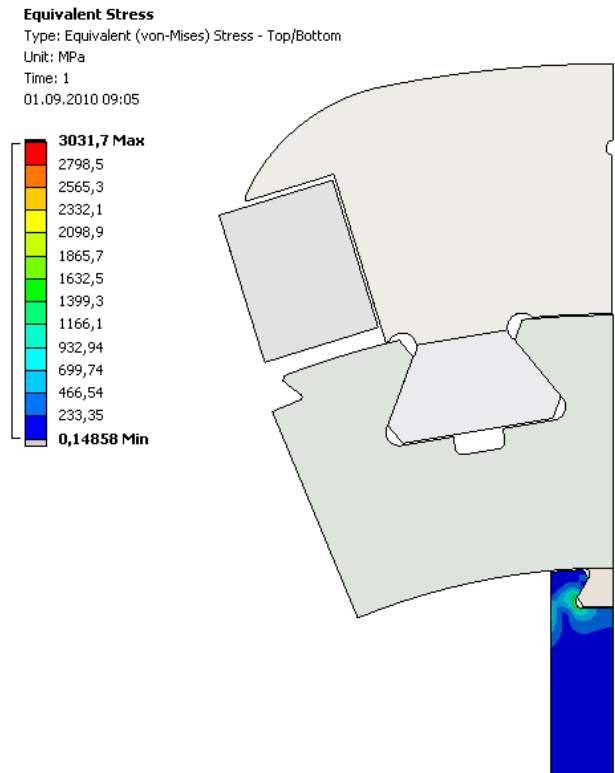


Abbildung 4-8 Schwalbenschwanznut in der Rippe

Nach Durchführung einer FE-Vergleichsspannungsanalyse nach von Mises (Erklärung zu diversen Anstrengungshypothesen siehe Kapitel 2.5 auf Seite 54) mit Ansys wird jedoch klar, dass dieses Design eine relativ weiche Rippenstruktur zur Folge hat (siehe Abbildung 4-8). Für das parametrisierte analytische Berechnungsmodell heißt das, dass die Dehnsteifigkeit der Rippe nicht mit $c = \frac{EA}{l}$ angenommen werden darf. Sie wird vermutlich um einiges kleiner sein. Um das in den Griff zu bekommen, wird die Rippe in zwei Teile unterteilt. Der obere Bereich wird stark von der Struktur der Schwalbenschwanznut beeinflusst. Daher wird diese Steifigkeit mit der Methode der finiten Elemente mit Ansys Workbench berechnet. Jener Teil der nicht so sehr von der Struktur der Schwalbenschwanznut beeinflusst ist, kann gemäß $c = \frac{EA}{l}$ berechnet werden.

Um heraus zu finden welcher Bereich der Rippe von der Struktur der Schwalbenschwanznut beeinflusst wird und welcher nicht, wird mit Ansys eine Variation der gesamten Rippenlänge durchgeführt, wobei die Rippe mit einer Deformation von einem Millimeter beaufschlagt wird. Nun wird die Reaktionskraft in der Rippe gemessen. Der Verlauf der Reaktionskraft in Abhängigkeit der Rippenlänge wird in Abbildung 4-9 dargestellt.

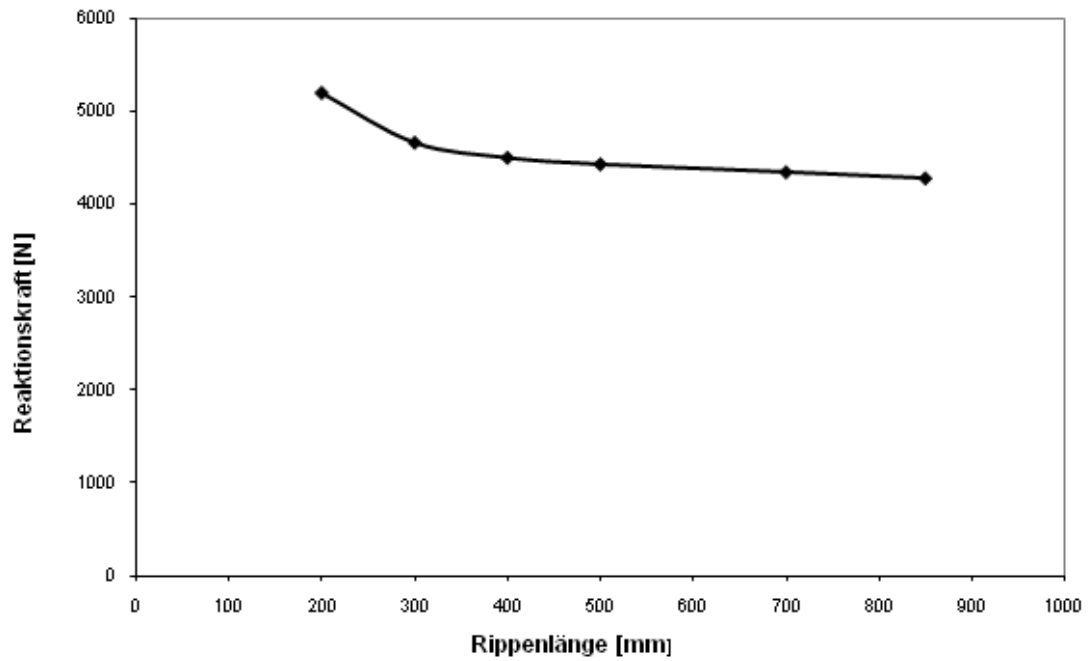


Abbildung 4-9 Verlauf der Reaktionskraft in Abhängigkeit der Rippenlänge

In Abbildung 4-9 ist deutlich zu erkennen, dass der Verlauf der Reaktionskraft bei einer Rippenlänge von ca. 400 mm in eine Gerade übergeht. Das bedeutet, dass die weiche Struktur der Schwalbenschwanznut nur die ersten 400 mm der Rippe beeinflusst. Das ist auch in Abbildung 4-10 gut zu erkennen. Die verschiedenen Farben stellen Bereiche konstanter Deformationen dar. Man sieht, dass ab einer Länge von ca. 400 mm kein markanter Farbwechsel mehr stattfindet.

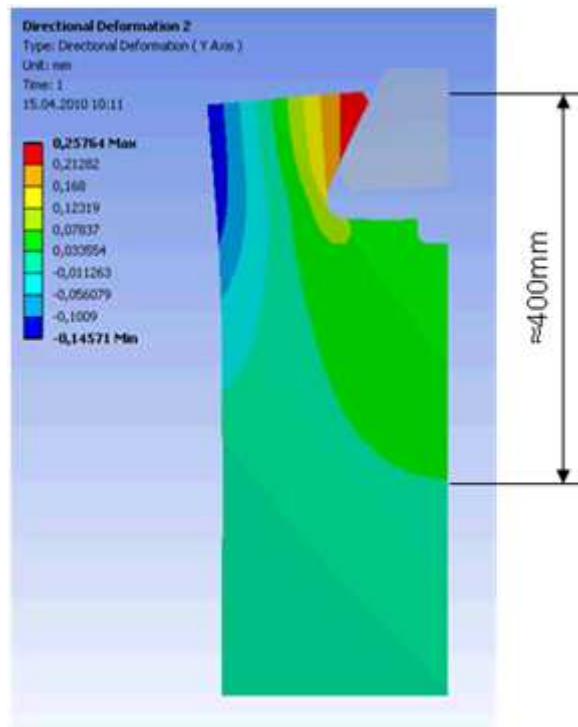


Abbildung 4-10 Bereiche konstanter radialer Deformation

Für die analytische Berechnung bedeutet das, dass sich die Steifigkeit innerhalb dieser 400 mm nur mit Ansys berechnen lässt. Um die Gesamtsteifigkeit der Rippe zu berechnen, wird diese Steifigkeit c_1 mit der Steifigkeit $c_2 = \frac{EA}{l}$ reziprok wie folgt addiert:

$$\frac{1}{c_{gesamt}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad (4.1)$$

Berechnung der Spitzenspannung

Im nächsten Schritt wurden im Zuge einer FE-Analyse die lokalen Spitzenspannungen berechnet (siehe Abbildung 4-11). Dazu wurde eine Parameterstudie mit drei verschiedenen Rippenlängen durchgeführt (1300mm, 1400mm, 1500mm).

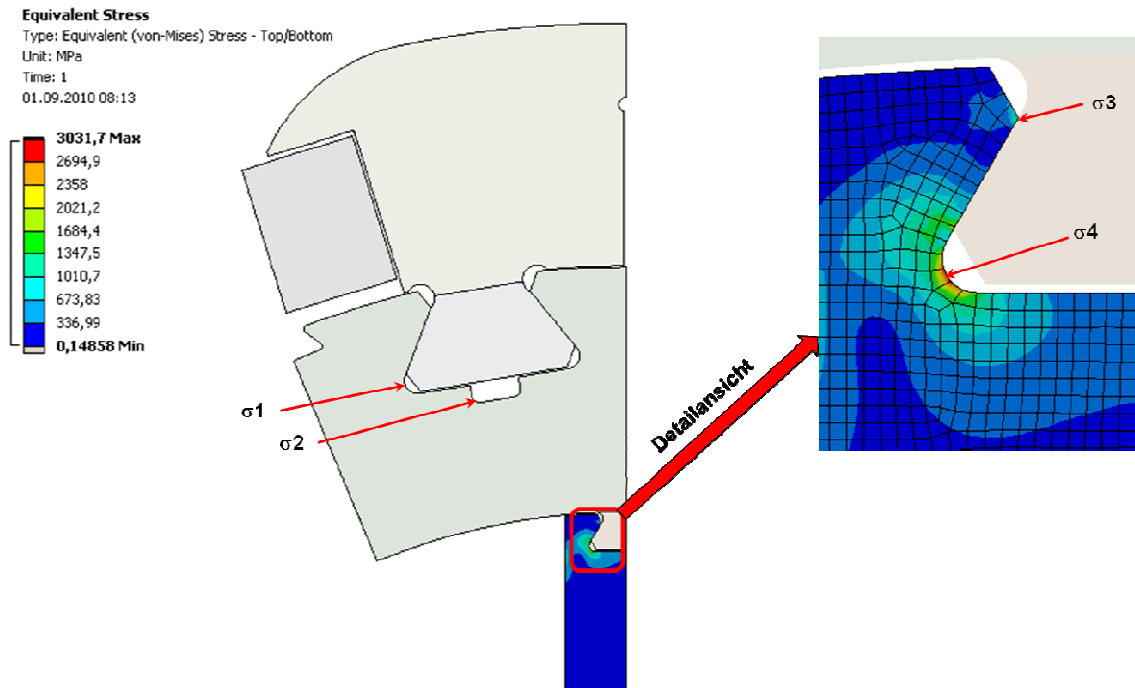


Abbildung 4-11 Lokale Spitzenspannungen

In Abbildung 4-12 findet man den Verlauf der lokalen Spitzenspannungen (Mises- Vergleichsspannung- siehe Kapitel 2.5.1 auf Seite 54) in Abhängigkeit der Rippenlänge. Mit zunehmender Rippenlänge wird der tragende Querschnitt der Kette kleiner was eine Zunahme der lokalen Spannungen mit sich bringt. Des Weiteren erreicht vor allem die lokale Spannung in der Schwalbenschwanznut einen Wert, der einem Vielfachen der Streckgrenze entspricht. Dies ist auf die sehr weiche Struktur dieses Designs zurückzuführen. Theoretisch könnte man dies durch eine breitere Rippe umgehen. Praktisch ist es jedoch nicht machbar, da die Rippe am Umfang der Welle angeschweist werden muss. Dazu muss ein gewisser Mindestabstand am Umfang der Welle zwischen einer Rippe und der nächsten vorhanden sein.

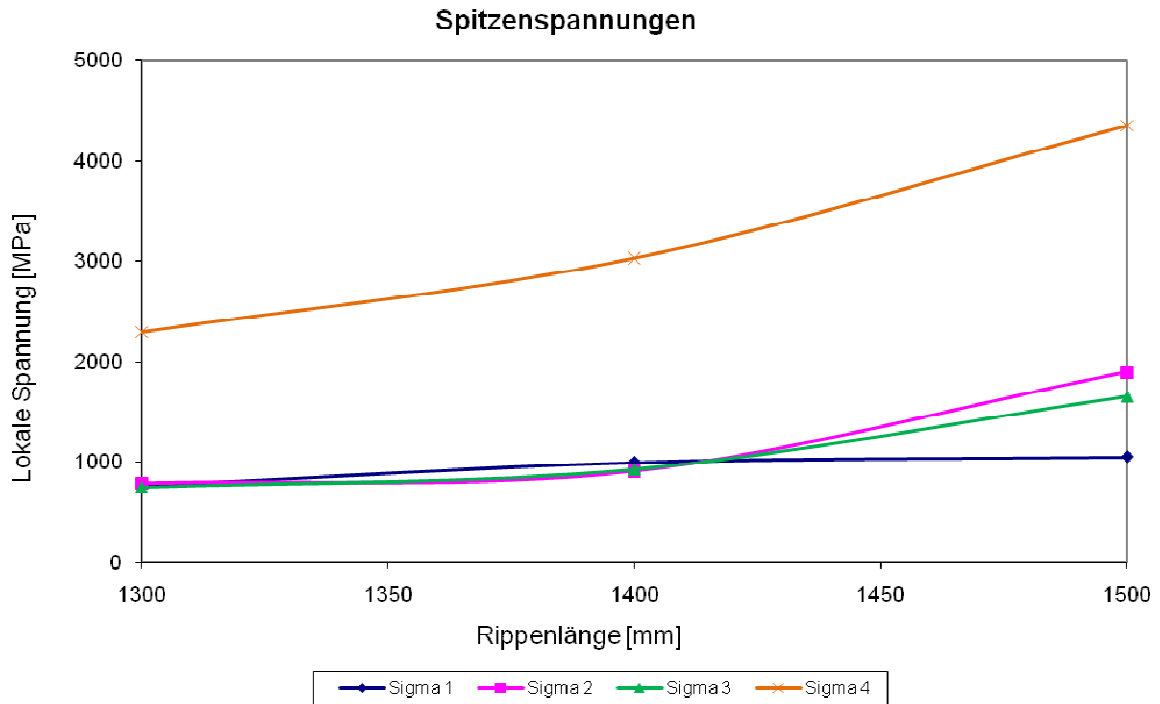


Abbildung 4-12 Lokale Spitzenspannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge

Aufgrund der sehr hohen lokalen Spannungen wird dieses Design wieder verworfen. Eine mögliche Lösung könnte folgende sein: Man fräst den Schwalbenschwanz auf die Rippe und hängt diesen in die Schwalbenschwanznut in der Kette ein.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass die berechneten Spannungswerte, welche mit Ansys nach der Methode der finiten Elemente berechnet wurden, mit einem linear elastischen Werkstoffverhalten berechnet wurden. Das bedeutet, dass beim Überschreiten der Streckgrenze kein plastisches Verformen eintritt, sondern numerisch so gerechnet wird, als würde man sich nach wie vor auf der Hookschen Gerade (siehe Abbildung 4-13, — bewegen. In der Realität wird es hier sehr wohl zu einer plastischen Verformung kommen und utopische Spannungswerte jenseits der Zugfestigkeit werden nie eintreten.

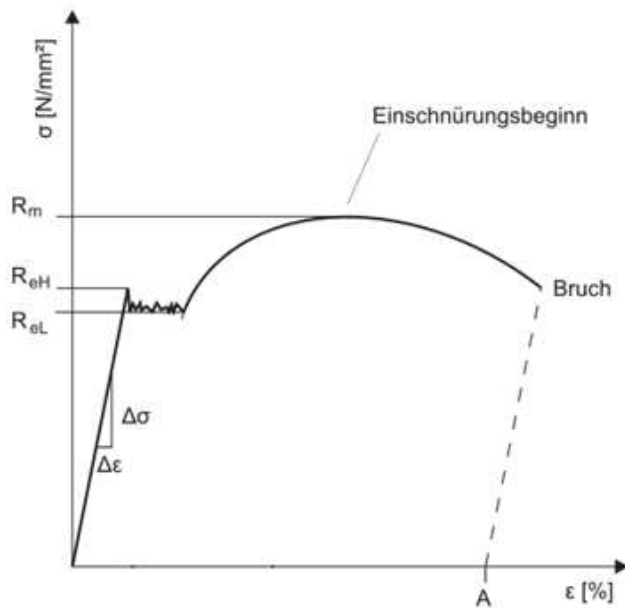


Abbildung 4-13 Spannungs- Dehnungsdiagramm

Erweitertes Steifigkeitsmodell für das Design „Rippe mit Schwalbenschwanz“

Dieses Design beruht auf der Idee den Schwalbenschwanz in die Rippe zu fräsen. Die Schwalbenschwanznut befindet sich im Kettenblech. Um das Steifigkeitsmodell der Rippe unabhängig von der Geometrie des Schwalbenschwanzes zu machen, wurde im Verlauf meiner Studien klar, dass ein erweitertes Steifigkeitsmodell erforderlich ist. Dazu wurde eine FE- Parameterstudie durchgeführt in der die Schwalbenschwanzhalsbreite x variiert wurde (30mm , 60mm , 90mm) (siehe Abbildung 4-14). Im nächsten Schritt werden die Randbedingungen für das Symmetriemodell bestimmt. Dazu wird an der Symmetrieebene mit der Bedingung „Frictionless Support“ die Aufrechterhaltung der Symmetrie gewährt. Im Fußbereich der Rippe wird mit der Bedingung „Fixed Support“ eine fixe Einspannung modelliert. Der Kontakt zwischen Rippe und Kette wird reibungsfrei also linear modelliert. Nun wird eine äußere Kraft aufgebracht und die radiale Deformation im Kontaktbereich der Schwalbenschwanznut berechnet. Da sich die Deformation in diesem Bereich linear verhält, wird für die Steifigkeitsberechnung der Mittelwert der Deformation herangezogen.

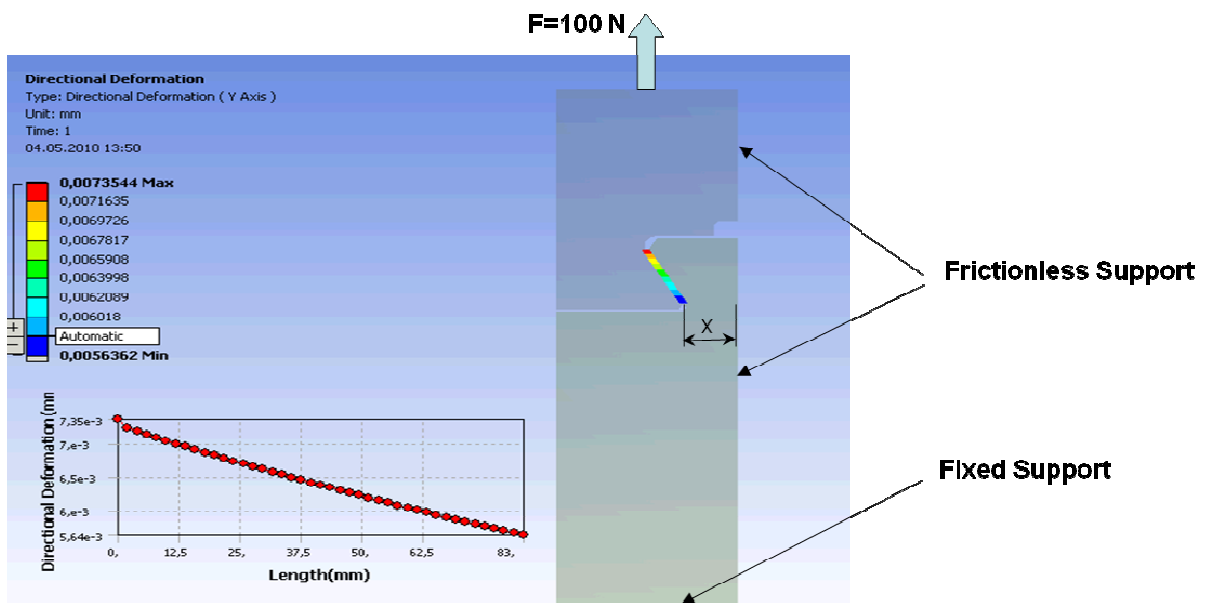


Abbildung 4-14 Erweitertes Steifigkeitsmodell

Die Steifigkeiten in Abhängigkeit der Halsbreite (siehe Abbildung 4-14) lassen sich nun gemäß — berechnen (siehe Tabelle 4-1).

Tabelle 4-1 Steifigkeit in Abhängigkeit der Halsbreite x

x..Halsbreite	Directional Deformation [mm]	Mittelwert [mm]	Kraft [N]	Steifigkeit [N/mm]
30	0,00991-0,113	0,0106	100	9433,96
60	0,00718-0,00849	0,007835	100	12763,24
100	0,00564-0,00735	0,006495	100	15396,46

In Abbildung 4-15 ist die radiale Deformation der Rippe dargestellt. Die auftretenden, radialen Verformungen der Kette sind in Abbildung 4-15 nicht eingeblendet. Die verschiedenen Farben stellen Bereiche konstanter Deformationen dar. Dass ab einer Rippenlänge von ca. — kein markanter Farbwechsel mehr stattfindet, lässt darauf hindeuten, dass die radiale Deformation ab hier über die gesamte Rippenbreite einen konstanten Wert aufweist. Daher kann man davon ausgehen, dass ab hier der Einfluss der weichen Schwalbenschwanzstruktur abgeklungen ist. In Folge dessen wird ab hier mit der Rippensteifigkeit — gerechnet.

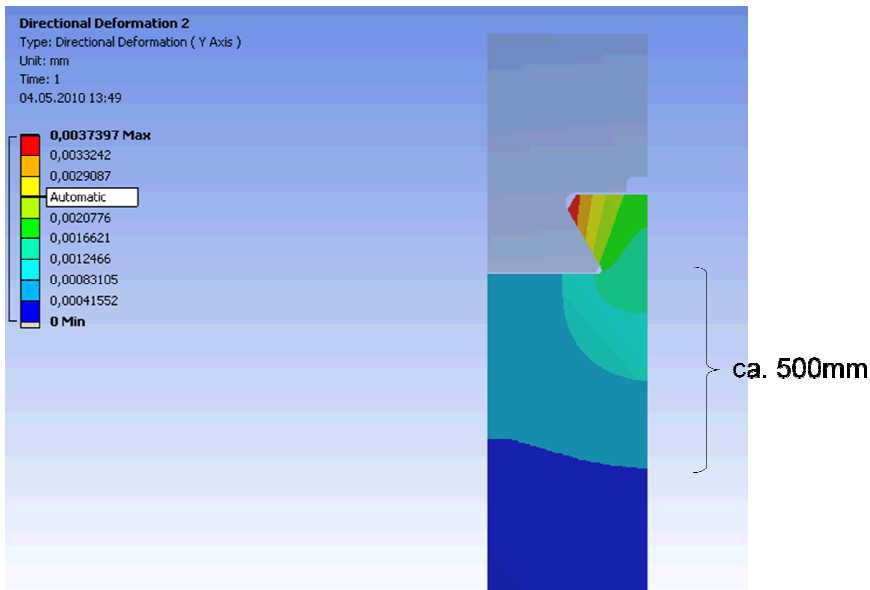


Abbildung 4-15 Radiale Deformation der Rippe

Um die weiche Struktur des Schwalbenschwanzes unabhängig von dessen Halsbreite (siehe Abbildung 4-14) berücksichtigen zu können, wird die Steifigkeit nun von 500 mm langen Stücken mit verschiedenen Halsbreiten mittels der Methode der finiten Elemente gerechnet. Weiters wird mit Hilfe von Excel mit einer Polynomfunktion 2. Grades eine passende Funktion gesucht, welche die Steifigkeit in Abhängigkeit der Halsbreite ausreichend genau repräsentiert (Siehe Abbildung 4-16).

(4.2)

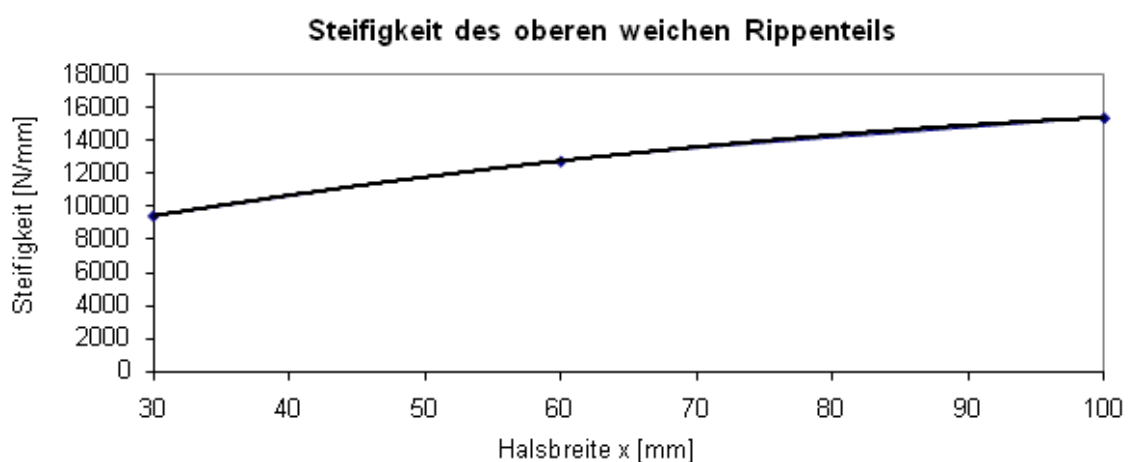


Abbildung 4-16 Einfluss der Halsbreite auf die Steifigkeit des weichen Rippbereichs

Um die Gesamtsteifigkeit der Rippe zu berechnen, wird diese Steifigkeit mit der Steifigkeit der restlichen Rippe gemäß Formel (4.1) reziprok wie folgt addiert:

$$\frac{1}{K_{\text{Gesamt}}} = \frac{1}{K_{\text{Rippe}}} + \frac{1}{K_{\text{Kette + Pole}}}$$

Das parametrisierte analytische Berechnungstool berechnet nun auf Basis dieser Erkenntnisse eine Gesamtsteifigkeit der Rippe. Damit konnte die weiche Struktur des oberen Rippenbereichs als Fehlerquelle der parametrisierten analytischen Berechnung erfolgreich eliminiert werden.

Parametrisiertes, analytisches Berechnungstool (Satz von Menabrea)

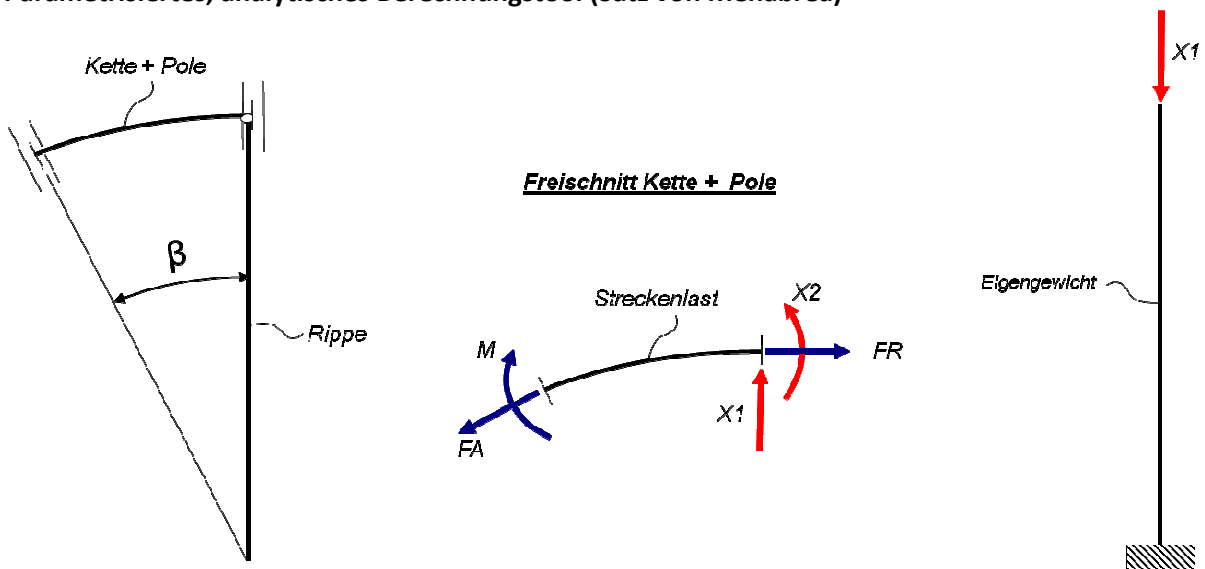


Abbildung 4-17 vereinfachtes Symmetriemodell und dessen Freischnitt

Da dieses System zweifach statisch überbestimmt ist, wurde es gemäß Kapitel 2.6 mit dem Satz von Menabrea berechnet.

Die Ergänzungsenergie errechnet sich wie folgt:

$$U_{\text{erg}} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Q^2}{kGA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{v^2}{kGA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{w^2}{kGA} dx \quad (4.3)$$

Die partielle Ableitung der Ergänzungsenergie nach der statisch unbestimmten Kraftgröße lautet:

$$\frac{\partial U_{\text{erg}}}{\partial X_i} = 0 \quad (4.4)$$

Da im Kontaktpunkt Kette – Rippe eine waagrechte Tangente sowie kein Klaffen zwischen Rippe und Kette gefordert ist wird gemäß Formel (2.68) der Satz von Menabrea angewendet:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial U^*}{\partial X_2} = 0$$

Des Weiteren werden Temperaturgradienten nicht berücksichtigt da sie sehr gering sind. Es werden sowohl Normalkraft, Biegemoment sowie Querkraft berücksichtigt. Dazu werden die Querkraft-, Normalkraft- sowie Biegemomentenverläufe in Abhängigkeit der Laufvariable φ (siehe Abbildung 4-18) benötigt. Da die Rippe nur auf Zug bzw. Druck belastet wird, ist hier der Normalkraftverlauf ausreichend.

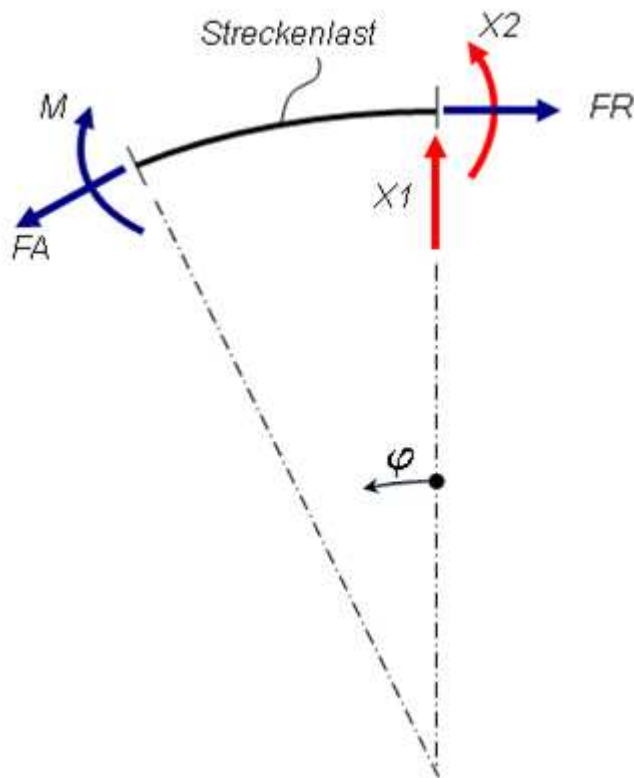


Abbildung 4-18 Freischnitt des Kettensymmetriestückes

Normalkraftverlauf in der Kette:

$$N(\varphi) = FR \cos(\varphi) + X_1 \sin(\varphi) + \left(\frac{m}{\beta} R \omega^2 + AR^2 \rho \omega^2 \right) * (1 - \cos \varphi) \qquad (4.5)$$

Querkraftverlauf in der Kette:

$$Q(\varphi) = X_1 \cos(\varphi) - \left(\frac{m}{\beta} R \omega^2 + AR^2 \rho \omega^2 + \frac{X_1}{\tan(\beta)} \right) \sin(\varphi) + \left(\frac{m}{\beta} R \omega^2 + AR^2 \rho \omega^2 \right) \sin(\varphi) \qquad (4.6)$$

Biegemomentenverlauf in der Kette:

$$M(\varphi) = -X_2 - X_1 R \sin(\varphi) + \left(\frac{m}{\beta} R \omega^2 + AR^2 \rho \omega^2 + \frac{X_1}{\tan(\beta)} \right) * R * (1 - \cos\varphi) \quad (4.7)$$
$$- R \left(\frac{m}{\beta} R \omega^2 + AR^2 \rho \omega^2 \right) (1 - \cos\varphi)$$

Normalkraftverlauf in der Rippe:

$$N(r) = -X_1 + A_{Rippe} \rho \omega^2 \left(R_R * x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (4.8)$$

m	kg	Masse der Pole, Wicklung, Lüfter
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte von Stahl
R	m	Mittlerer Kettenradius = $R_R + \frac{Kettenhöhe}{2}$
ω	$\frac{rad}{s}$	Winkelgeschwindigkeit (bei Durchgangsdrehzahl)
A	m^2	Querschnitt der Kette ($A = Kettenhöhe * Kettenlänge$)
R_R	m	Rippenlänge (auch R_Rippe)
A_{Rippe}	m^2	Querschnitt der Rippe (= <i>halbe Rippenbreite * Rippentiefe</i>)
r	m	Laufvariable der Rippe

Nun ist man in der Lage die Ergänzungsenergie U^* gemäß Formel (4.3) und deren Ableitung gemäß Formel (4.4) zu berechnen. Durch die Anwendung des Satzes von Menabrea gemäß Formel (2.68) erhält man die statisch unbestimmten Kraftgrößen X_1 und X_2 und in weiterer Folge die Verläufe der Schnittgrößen.

Diese Berechnungsschritte werden mit Hilfe des parametrisierten analytischen Berechnungsmodells in Microsoft Excel automatisiert durchgeführt. Man muss lediglich das Eingabefile (siehe Abbildung 4-19) ordnungsgemäß mit den erforderlichen Daten füttern. Ein wesentlicher Vorteil des parametrisierten analytischen Berechnungsmodells ist, dass dieses Excel File ohne „akademischem Hintergrundwissen“

bedient werden kann. Der User muss lediglich das in Abbildung 4-19 abgebildete Eingabefile ausfüllen. Dazu benötigt er Daten wie z.B. die Durchgangsdrehzahl, Anzahl der Pole, Anzahl der Rippen, Rippenlänge, Rippenbreite (Stegbreite) Rippentiefe, Kettenlänge, Kettenaußenradius sowie die Masse der Pole und des Lüfters. All diese Daten findet man im sogenannten „Radber- File“ bzw. im „T-Dat- File“.

Das automatisierte Berechnungsfile wird nun anhand eines 32- poligen Generators erläutert.

Allgemeine Eingabe		
n	360,00	rpm (Durchgangsdrehzahl)
Anzahl Pole	32,00	
Anzahl Rippen	12,00	
Geometrische Eingabedaten		
R_Rippe - Rippenlänge	3,635	m
R_Pol	4,41	m Schwerpunktsradius Pol
halbe Rippenbreite	0,093	m
Rippentiefe	2,29	m
Kettenlänge	2,29	m
Pol-Schwalbenschwanzhöhe	0,05	m
Kettenaußenradius	4,255	m...fix vorgegeben
Werkstoffdaten		
Dichte ρ	7.850,00	kg/m ³
E-Modul	2,07E+11	N/m ²
E-ModulRippe	2,07E+11	N/m ²
Dichte Rippe	7.850,00	kg/m ³
Poisson Zahl	0,30	
Massen		
Pole	124.672,00	kg
Lüfter	0,00	kg

Abbildung 4-19 Eingabemaske des parametrisierten analytischen Berechnungsmodells

Nachdem das Eingabefile erfolgreich ausgefüllt wurde, wird das sogenannte Zwischenausgabefile (siehe Abbildung 4-20) automatisiert erstellt. Dieses File beinhaltet für die weitere Berechnung erforderliche geometrische Daten. Des weiteren wurde hier unter dem Punkt „berechnete Steifigkeiten“ das erweiterte Steifigkeitsmodell für die Rippensteifigkeit implementiert. So errechnet sich unter dem Punkt „weicher SS“ (SS steht für Schwalbenschwanz) die Steifigkeit des oberen Bereiches der Rippe, welcher aufgrund des Schwalbenschwanzes relativ weich ist in Abhängigkeit der Schwalbenschwanzhalsbreite x gemäß Formel (4.9). Dazu muss hier die Schwalbenschwanzhalsbreite x ($Rippenbreite/4$) eingegeben werden. Im Anschluss errechnet sich die neue Gesamtsteifigkeit der Rippe gemäß Formel (4.1).

Geometrische Variablen		
R*	3,95	m...mittlerer Kettenradius
Winkel β	0,26	rad
ω	37,70	1/s
A	1,4210	m ²
A_Rippe	0,21	m ²
I	4,55E-02	m ⁴
Kettenhöhe	0,6200	m
Berechnete Werkstoffdaten		
G-Modul	7,95E+10	N/m ²
berechnete Massen		
mpol	124.672,00	Masse Pole+Lüfter
m	5.386,34	kg....reduzierte Polmasse
m_Kette	17.281,56	
m_Rippe	6.049,65	
reduzierteDichte Ring	10.296,70	
berechnete Steifigkeiten		
x	0,05	[m]...Rippenbreite/4
weicher SS	2,61E+10	c = -0,6449x ² + 169,02x + 4943,8 [N/m]
restliche Rippe	1,40E+10	N/m
Gesamtsteifigkeit der halben Rippe mit SS	9,10E+09	N/m
Nachgiebigkeit der halben Rippe mit SS	1,10E-10	m/N....R/(EA)
Gesamtsteifigkeit der halben Rippe ohne SS	1,21E+10	N/m
Nachgiebigkeit der halben Rippe ohne SS	8,29E-11	m/N....R/(EA)
Kontrolle		
φ	0,26	
dM/d φ	0,00	

Abbildung 4-20 Zwischenausgabefile

Zur Kontrolle muss die im Zwischenausgabefile definierte Ableitung des Momentes nach dem Winkel φ an der Symmetriestelle Null ergeben, da der Momentenverlauf hier eine waagrechte Tangente aufweisen muss.

Im Ausgabefile werden nun sowohl die statisch unbestimmten Kraftgrößen X_1 und X_2 (siehe Tabelle 4-2) als auch eine Tabelle mit sämtlichen Schnittreaktionen (siehe Abbildung 4-21) ausgegeben.

Tabelle 4-2 Berechnete statisch unbestimmte Kraftgrößen X_1 und X_2

X1	-35.995.232,6	Virtuelle Kraftgröße [N]
X2	12.448.935,9	Virtuelle Kraftgröße [Nm]

φ [rad]	0,000	0,033	0,065	0,098	0,131	0,164	0,196	0,229	0,262
$N(\varphi)$	227.754.208,8	226.648.403,0	225.687.631,8	224.872.923,8	224.205.151,6	223.685.030,2	223.313.116,8	223.088.808,0	223.015.346,6
$N(\varphi)$ Ring	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9	362.090.245,9
$M(\varphi)$	-12.448.935,9	-8.086.532,1	-4.296.289,3	-1.082.266,5	1.552.094,8	3.603.973,7	5.071.173,0	5.952.121,4	6.245.875,7
$M(\varphi)$ Ring	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$O(\varphi)$	-35.995.232,6	-31.580.608,4	-27.132.166,9	-22.654.671,6	-18.152.917,0	-13.631.723,9	-9.095.933,6	-4.550.403,1	0,0
$O(\varphi)$ Ring	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
σ_{M_0}	174,3	173,5	172,8	172,1	171,6	171,2	170,9	170,8	170,7
σ_{M_0}	-100,3	-65,2	-34,6	-8,7	12,5	29,0	40,9	48,0	50,3
$\sigma(\varphi)$ bei $r=R'+h/2$	74,0	108,3	138,1	163,4	184,1	200,3	211,8	218,7	221,0
$\sigma(\varphi)$ bei $r=R$ Rippe	274,6	238,6	207,4	180,8	159,1	142,2	130,1	122,8	120,4
$\sigma_{M_0, Ring}$	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2
$\sigma_{M_0, Ring}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\sigma(\varphi)$ Ring	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2	277,2

Abbildung 4-21 Schnittreaktionen in der Kette in Abhängigkeit von φ

In Abbildung 4-22 ist der Normalkraftverlauf in der Kette dargestellt. Man sieht, dass die Normalkraft in der Kette bei eingehängter Kette um einiges niedriger ist als bei aufgeschumpfter Kette.

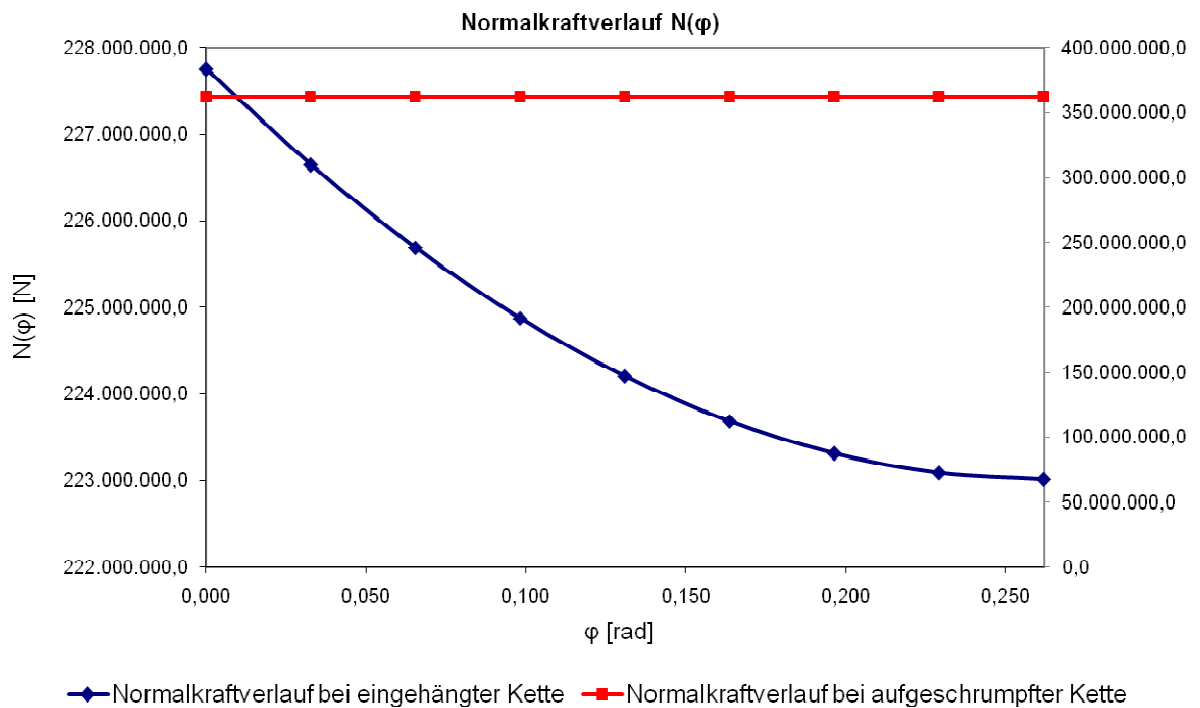


Abbildung 4-22 Normalkraftverlauf in der Kette

In Abbildung 4-22 ist der Verlauf des Biegemomentes in der Kette dargestellt. Das Biegemoment in der Kette bei „aufgeschumpfter Kette“ ist bei Durchgangsdrehzahl über den gesamten Umfang Null da die Kette in diesem Zustand zur Gänze abgehoben ist und die Belastung über den Umfang konstant angenommen wird. Bei aufgeschumpfter Kette hat das Biegemoment in der Kette den höchsten Wert im Stillstand, da hier die Rippen auf Druck belastet sind. Da das Biegemoment bei eingehängter Kette im Bereich über der Rippe negativ ist, wirkt es sich auf die Gesamt- Umfangsspannung (siehe Formel (4.10), welche aus der Spannung zufolge Biegemoment und der Spannung zufolge Normalkraft resultiert, am Ketteninnenradius kontraproduktiv aus, während es am Kettenaußenradius positive Auswirkungen hat.

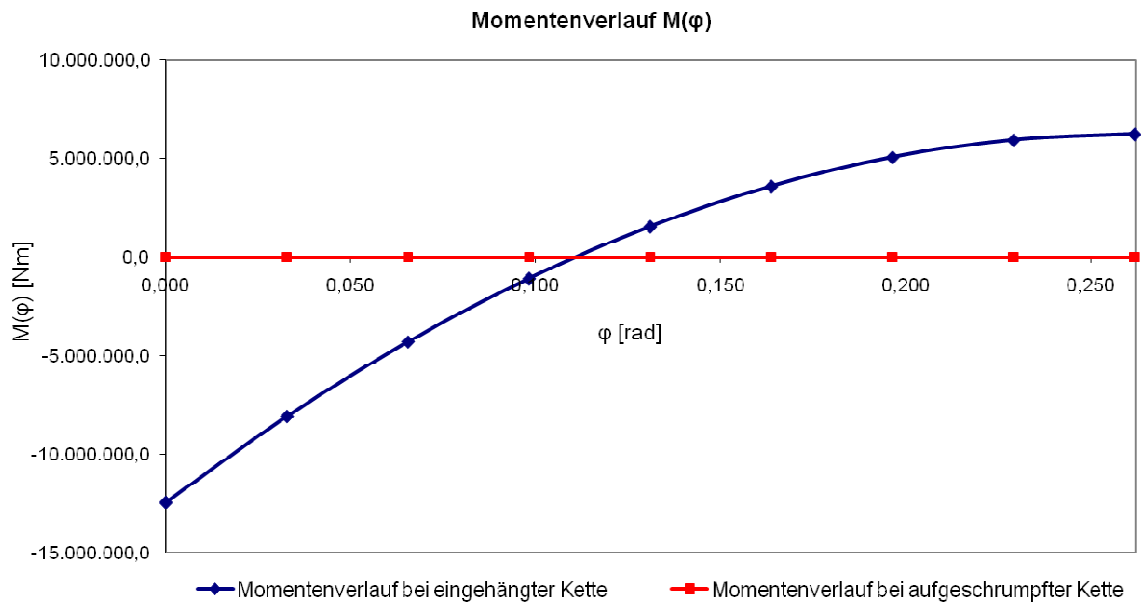


Abbildung 4-23 Biegemomentenverlauf in der Kette

Abbildung 4-24 zeigt den Verlauf der Tangentialspannung in der Kette zufolge Normalkraft. Da die Normalkraft in der aufgeschumpften Kette konstant ist, ist auch die Tangentialspannung zufolge Normalkraft konstant. Durch das Einhängen der Kette in die Rippen wird die Tangentialspannung zufolge Normalkraft um einiges geringer. Aber auch hier wird deutlich, dass der Bereich direkt über der Rippe (also bei $\varphi=0$), den am höchsten belasteten Bereich darstellt.

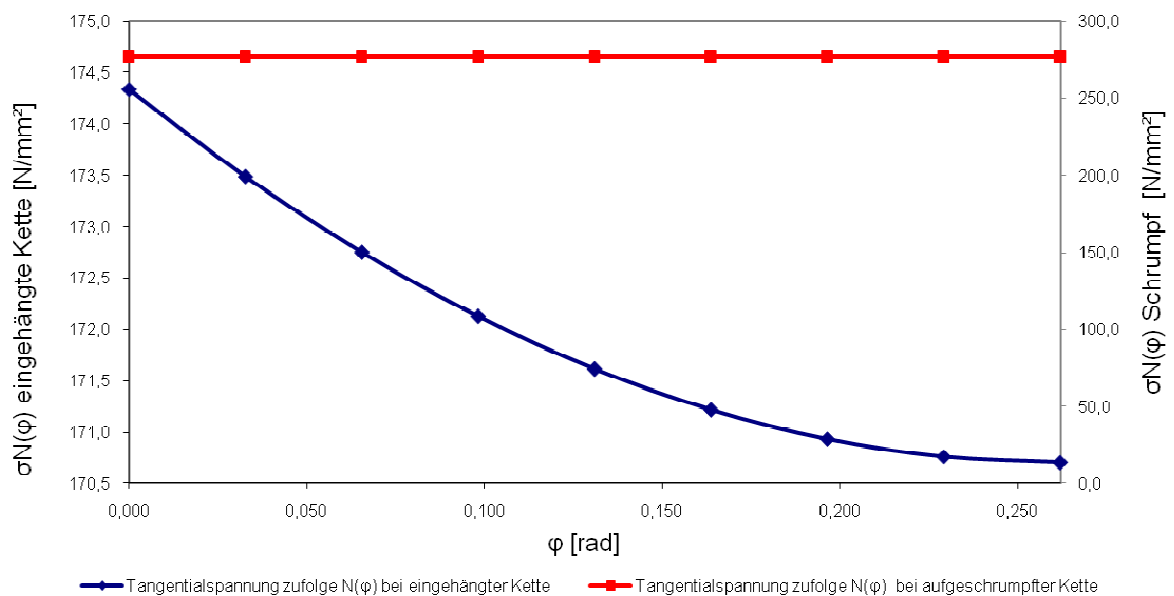


Abbildung 4-24 Tangentialspannung in der Kette zufolge Normalkraft

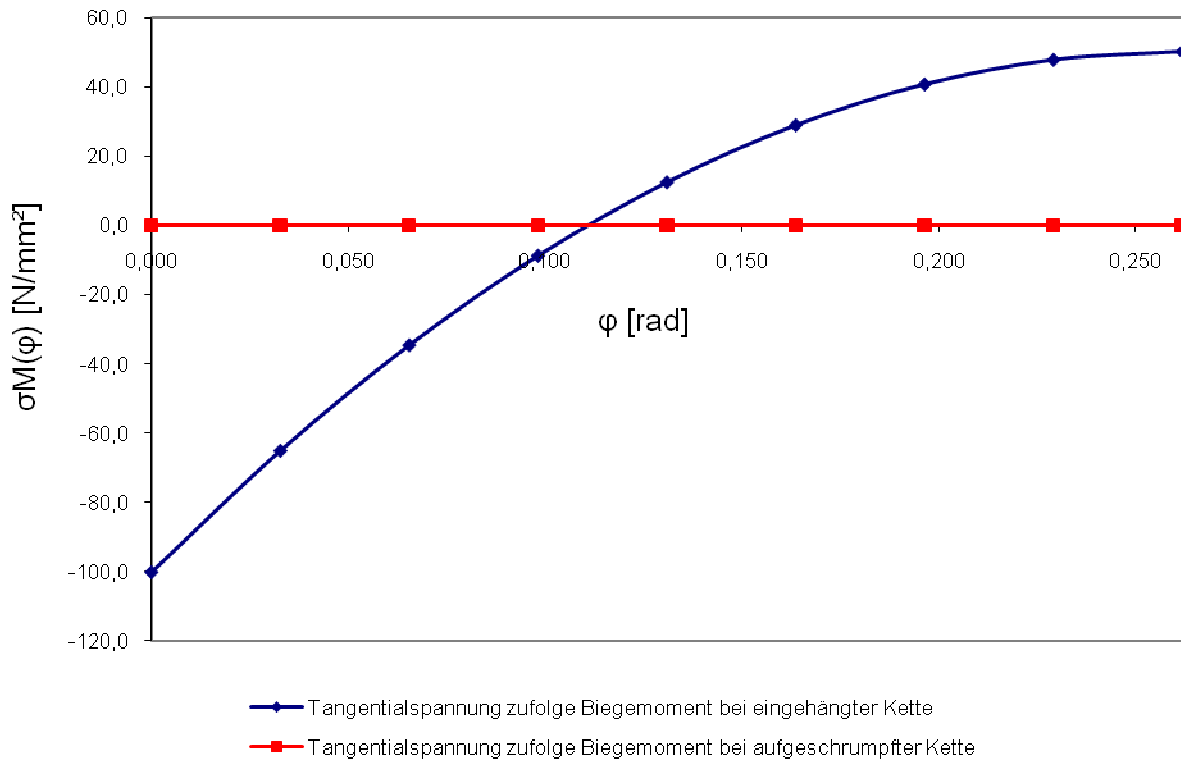


Abbildung 4-25 Tangentialspannung in der Kette zufolge Biegemoment

Abbildung 4-26 zeigt den Verlauf der Umfangsspannung in der Kette am Ketteninnenradius. Man sieht, dass sich im Bereich direkt über der Rippe (also bei $\varphi=0$) keine nennenswerte Verbesserung der Tangentialspannung verzeichnen lässt. Dies ändert sich aber, begibt man sich in Richtung Symmetriestelle ($\varphi=0,262$). Abbildung 4-27 zeigt den Verlauf der Umfangsspannung in der Kette am Kettenaußenradius. Hier ist eine deutliche Senkung der Tangentialspannung sichtbar, da sich die tangential Spannung zufolge Biegemoment am Kettenaußenradius positiv auf die Umfangsspannung auswirkt (siehe Formel (4.3)).

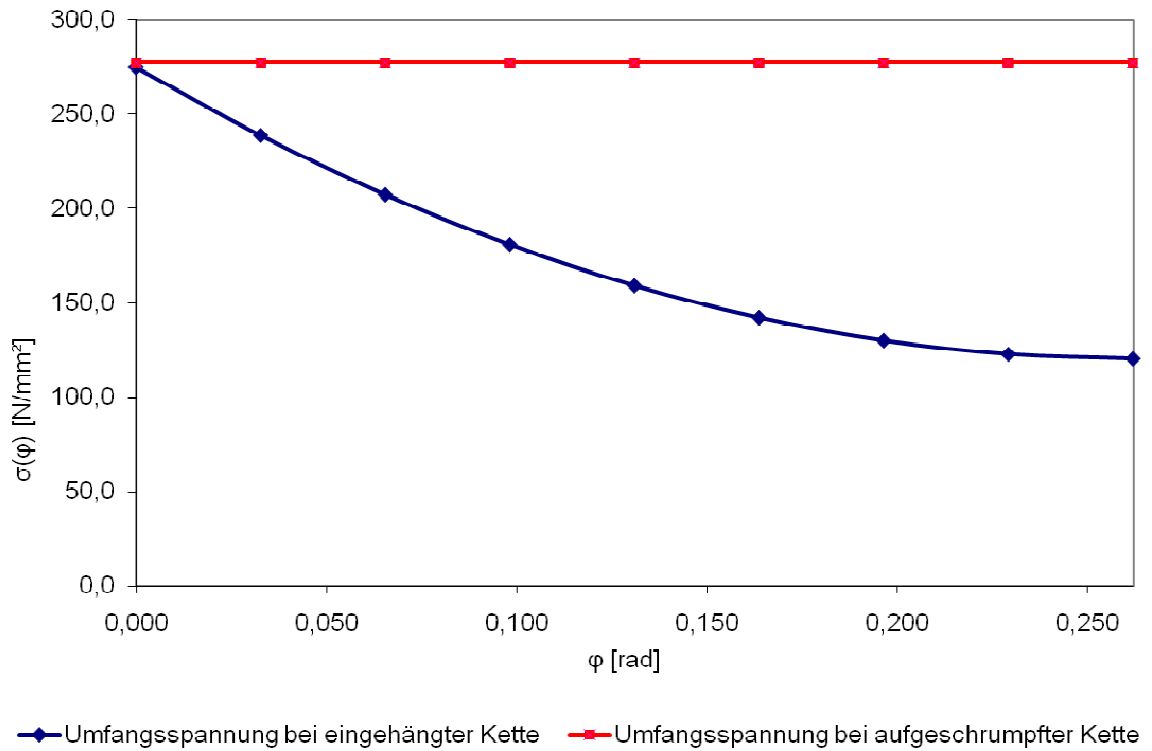


Abbildung 4-26 Umfangsspannung in der Kette am inneren Radius der Kette bei $R=R_{\text{Rippe}}$

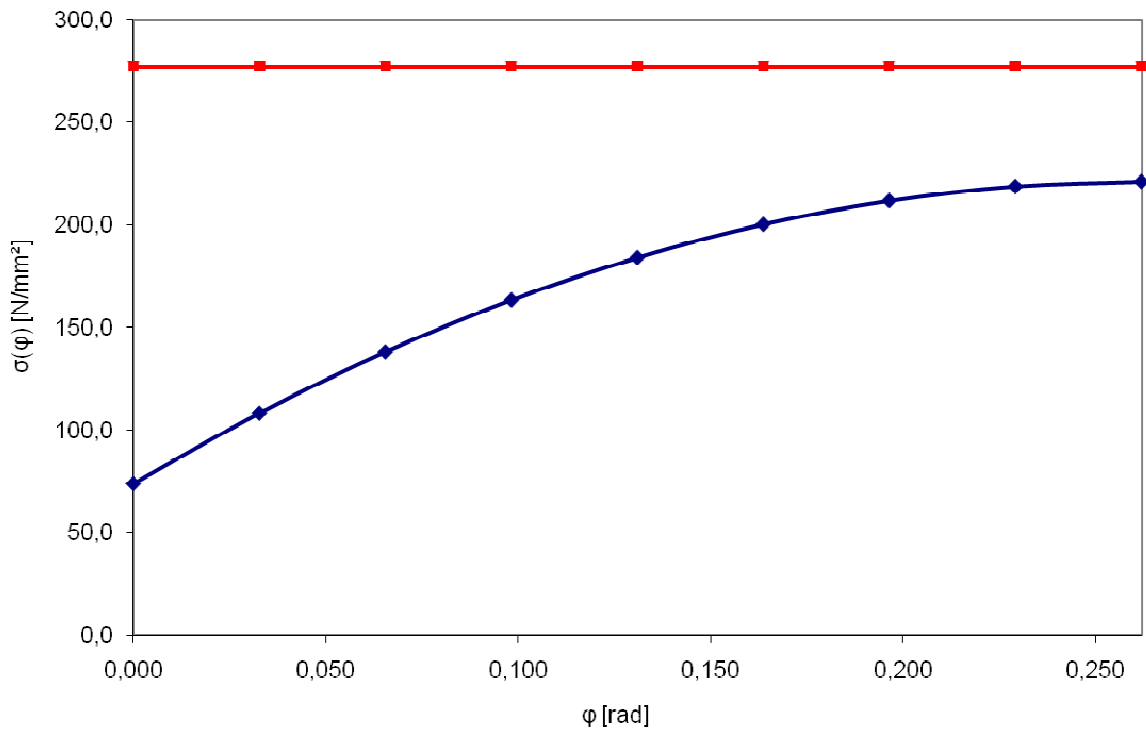


Abbildung 4-27 Umfangsspannung in der Kette am Kettenaußenradius

4.3.2 Überprüfung des parametrisierten analytischen Berechnungstools

Vergleich des parametrisierten analytischen Berechnungstools mit einem entsprechenden vereinfachten FE-Modell mit „Beam-3“ Elementen

Zur Kontrolle wurde mit Ansys Klassik ein Modell mit sogenannten Stabelementen (Elementtyp Beam-3) erzeugt, welches dem vereinfachten analytischen Symmetriemodell (siehe Abbildung 4-6) entspricht. Die Rippe wurde mit 10 Elementen und die Kette mit 40 Elementen modelliert. Diese Stabelemente können sowohl Normal- und Querkräfte als auch Biegemomente übertragen. Es wurden die Normalkraft (FX), Querkraft (FY) sowie das Biegemoment (MZ) für einen fiktiven Generator berechnet und in Form einer Excel- Tabelle festgehalten (siehe Tabelle 4-3). Zum Vergleich wurde dieser fiktive Generator zusätzlich mit Hilfe des parametrisierten, analytischen Berechnungsmodells durchgerechnet. Die Ergebnisse der beiden Rechnungen wurden zur Kontrolle gegenüber gestellt um die Abweichung sichtbar zu machen. In Tabelle 4-4 wurde die Abweichung für das erste Element der Kette (also direkt über der Rippe bei $\varphi=0$) und das letzte Element der Kette an der Symmetriestelle festgehalten. Mit einer maximalen Abweichung von 1,4% ist die Richtigkeit des parametrisierten, analytischen Berechnungsmodells festgestellt.

Tabelle 4-3 Outputfile aus Ansys Klassik für das vereinfachte analytische Symmetriemodell

Element	phi [rad]	FX [N]	FY [N]	MZ [Nm]
1	0,009817477	48.204.000,00	13.331.000,00	1.299.200.000,00
2	0,019634954	48.079.000,00	13.019.000,00	1.203.900.000,00
3	0,029452431	47.956.000,00	12.707.000,00	1.111.000.000,00
4	0,039269908	47.837.000,00	12.393.000,00	1.020.300.000,00
5	0,049087385	47.721.000,00	12.077.000,00	931.930.000,00
6	0,058904862	47.607.000,00	11.761.000,00	845.890.000,00
7	0,068722339	47.497.000,00	11.444.000,00	762.180.000,00
8	0,078539816	47.390.000,00	11.125.000,00	680.810.000,00
9	0,088357293	47.287.000,00	10.806.000,00	601.780.000,00
10	0,09817477	47.186.000,00	10.485.000,00	525.100.000,00
11	0,107992247	47.089.000,00	10.164.000,00	450.790.000,00
12	0,117809725	46.994.000,00	9.841.400,00	378.840.000,00
13	0,127627202	46.903.000,00	9.518.100,00	309.260.000,00
14	0,137444679	46.815.000,00	9.193.900,00	242.060.000,00
15	0,147262156	46.730.000,00	8.868.900,00	177.260.000,00
16	0,157079633	46.649.000,00	8.543.100,00	114.840.000,00
17	0,16689711	46.570.000,00	8.216.400,00	54.824.000,00
18	0,176714587	46.495.000,00	7.889.000,00	-2.786.600,00
19	0,186532064	46.423.000,00	7.560.900,00	-57.987.000,00
20	0,196349541	46.354.000,00	7.232.100,00	-110.770.000,00
21	0,206167018	46.289.000,00	6.902.600,00	-161.130.000,00
22	0,215984495	46.226.000,00	6.572.500,00	-209.070.000,00
23	0,225801972	46.167.000,00	6.241.900,00	-254.580.000,00
24	0,235619449	46.111.000,00	5.910.600,00	-297.650.000,00
25	0,245436926	46.059.000,00	5.578.800,00	-338.280.000,00
26	0,255254403	46.010.000,00	5.246.500,00	-376.470.000,00
27	0,26507188	45.964.000,00	4.913.800,00	-412.220.000,00
28	0,274889357	45.921.000,00	4.580.600,00	-445.510.000,00
29	0,284706834	45.881.000,00	4.247.000,00	-476.350.000,00
30	0,294524311	45.845.000,00	3.913.000,00	-504.740.000,00
31	0,304341788	45.812.000,00	3.578.700,00	-530.660.000,00
32	0,314159265	45.783.000,00	3.244.100,00	-554.120.000,00
33	0,323976742	45.756.000,00	2.909.200,00	-575.120.000,00
34	0,333794219	45.733.000,00	2.574.100,00	-593.660.000,00
35	0,343611696	45.713.000,00	2.238.800,00	-609.720.000,00
36	0,353429174	45.697.000,00	1.903.300,00	-623.320.000,00
37	0,363246651	45.684.000,00	1.567.600,00	-634.450.000,00
38	0,373064128	45.674.000,00	1.231.800,00	-643.100.000,00
39	0,382881605	45.667.000,00	895.980,00	-649.290.000,00
40	0,392699082	45.664.000,00	560.070,00	-653.000.000,00

Tabelle 4-4 Abweichungsanalyse

	Element 1	Element 40
N	0,7%	1,0%
M	-1,3%	1,4%

In Abbildung 4-28 bis Abbildung 4-30 sind die Schnittgrößenverläufe in der Kette, welche am Modell mit Beam- Elementen errechnet wurden dargestellt. Diese stimmen nicht nur, wie in Tabelle 4-4 sichtbar, quantitativ überein, sondern sind auch qualitativ mit jenen Verläufen aus dem parametrisierten,

analytischen Berechnungsmodell fast deckungsgleich. Auf den ersten Blick erkennt man z.B. die waagrechte Tangente des Biegemomentenverlaufs an der Symmetriestelle in Abbildung 4-29. Des Weiteren ist die Querkraft an der Symmetriestelle gleich Null was in Abbildung 4-30 zu sehen ist und aus Symmetriegründen auch so sein muss.

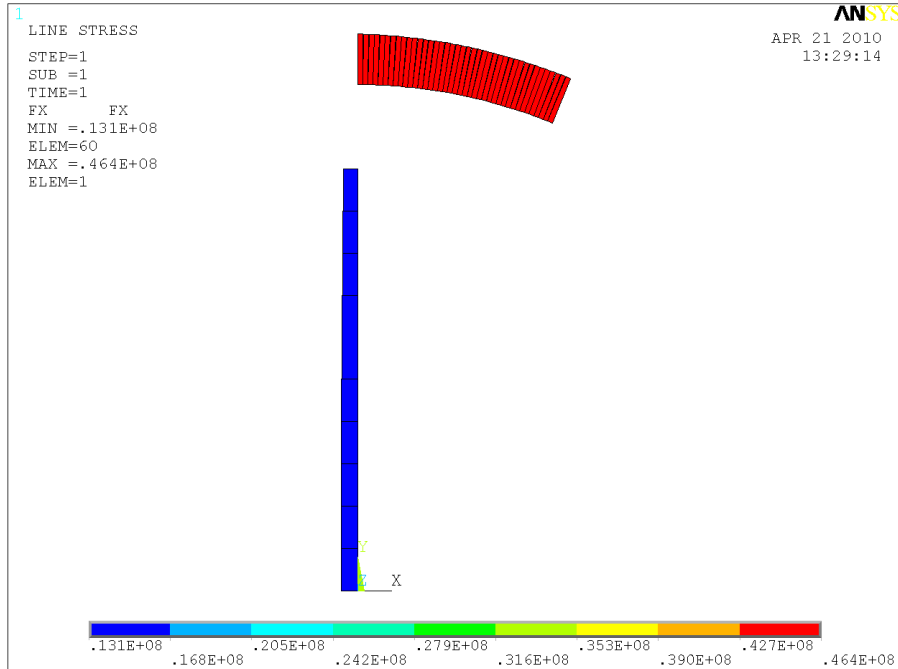


Abbildung 4-28 Normalkraftverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen

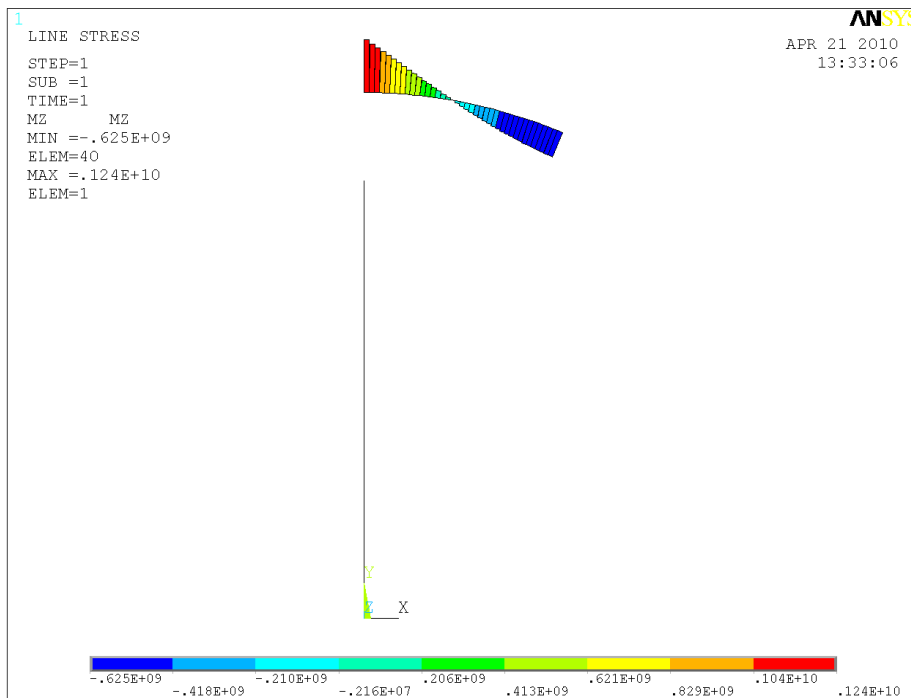


Abbildung 4-29 Biegemomentenverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen

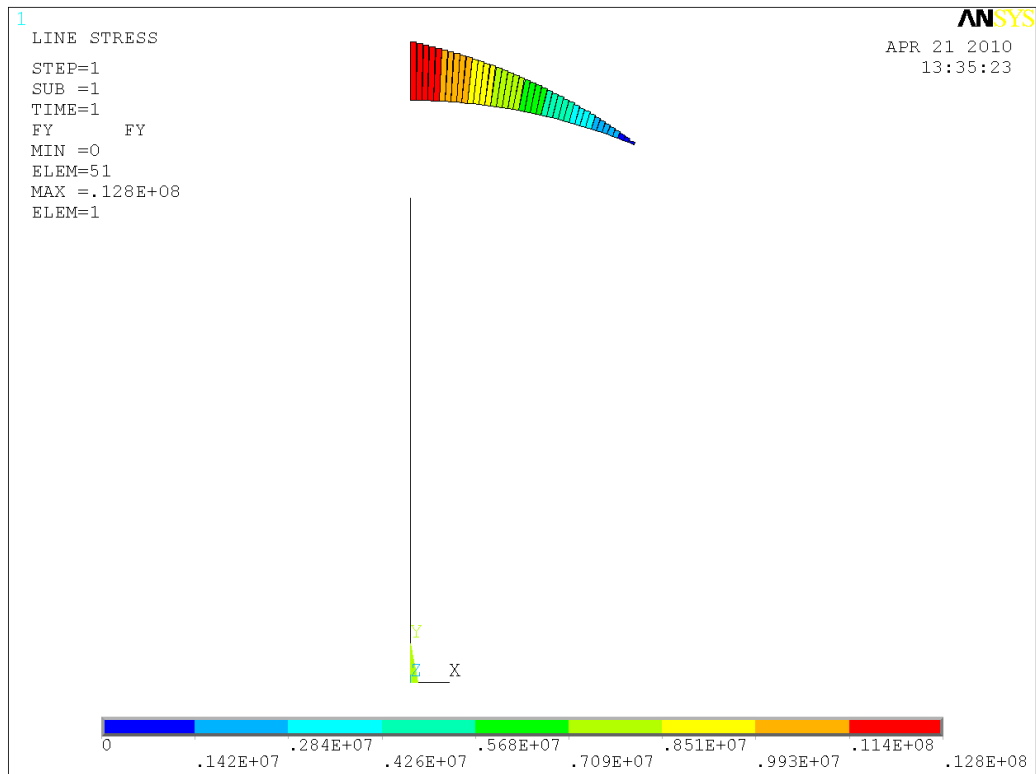


Abbildung 4-30 Querkraftverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen

Vergleich des parametrisierten analytischen Berechnungstools mit dem FE-Modell mit realer Geometrie

Um die Qualität der analytischen Berechnung des stark vereinfachten Modells zu gewährleisten, wurden vier Generatoren mit unterschiedlichen Polzahlen (8, 16, 32, 64) mittels FE- Analyse nachgerechnet und die Ergebnisse jenen, aus dem parametrisierten, analytischen Berechnungsmodell in Excel gegenüber gestellt. Das Ergebnis dieser Studie ist in Tabelle 4-5 zu finden. Wenn man bedenkt, welche Vereinfachungen getroffen wurden, ist die Qualität des Modells mit Abweichungen zwischen 15 und 30 Prozentpunkten in jeder Hinsicht ausreichend.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass beim Modell mit „aufgeschrumpfter Kette“, die Kette immer im abgehobenen Zustand betrachtet wird, da dies bei Durchgangsdrehzahl auch immer der Fall ist.

Tabelle 4-5 Vergleich diverser Spannungen bei einer konstanten Rippenbreite von 120mm (Excel vs. Ansys)

Anzahl Pole	8	16	32	64
Kette eingehängt				
Kettenhöhe [mm]	311,50	730,60	579,00	163,00
Force Reaction (tangential in der Kette) [N]	58.843,00	143.200,00	148.730,00	17.848,00
Nominelle Kettenumfangsspannung zufolge Normalkraft aus Ansys [MPa]	217,94	196,00	256,87	109,50
Nominelle Kettenumfangsspannung zufolge Normalkraft aus analytischem Modell mit Excel [MPa]	184,60	162,70	193,70	74,80
Abweichung Excel /Ansys	0,85	0,83	0,75	0,68
Spitzenspannung bei phi=0 und R= Rippe (ANSYS) [MPa]	800,97	631,14	804,00	264,50
Kette aufgeschumpft				
Force Reaction (tangential in der Kette) [N]	62.155,00	147.220,00	165.460,00	18.588,00
Nominelle Kettenumfangsspannung aus ANSYS [MPa]	199,53	201,51	285,77	114,04
Nominelle Kettenumfangsspannung aus Excel [MPa]	208,00	191,40	274,70	106,40
Abweichung Excel /Ansys	1,04	0,95	0,96	0,93
Spitzenspannung bei phi=0 und R= Rippe (ANSYS) [MPa]	728,45	488,86	580,60	189,10

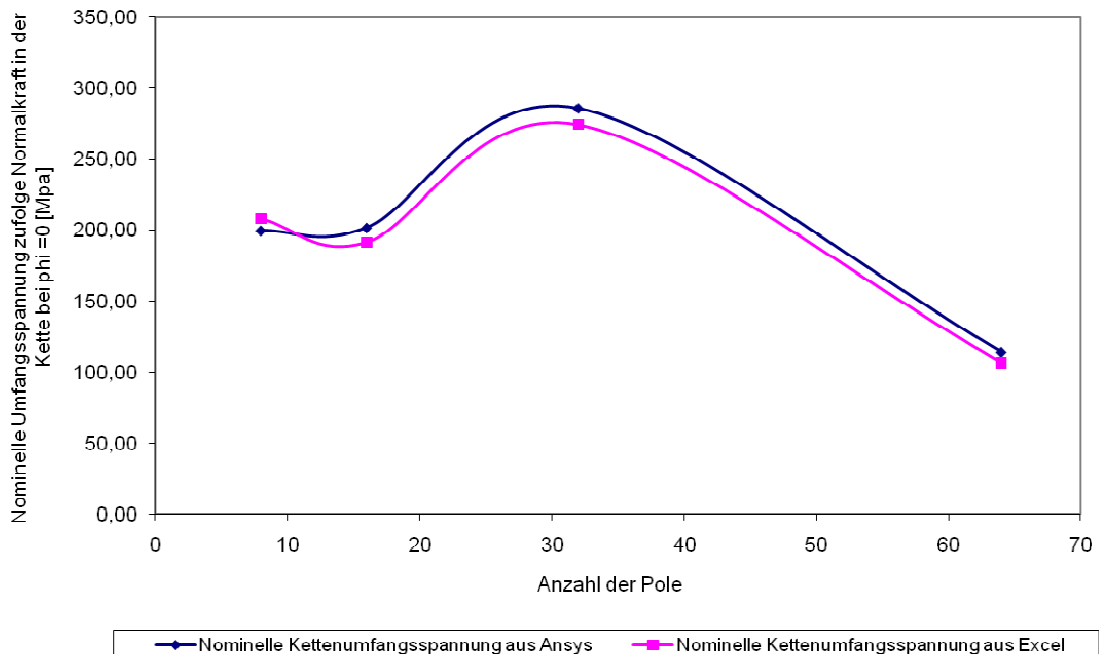


Abbildung 4-31 Nominelle Umfangsspannung in der Kette direkt über der Rippe bei aufgeschumpfter Kette

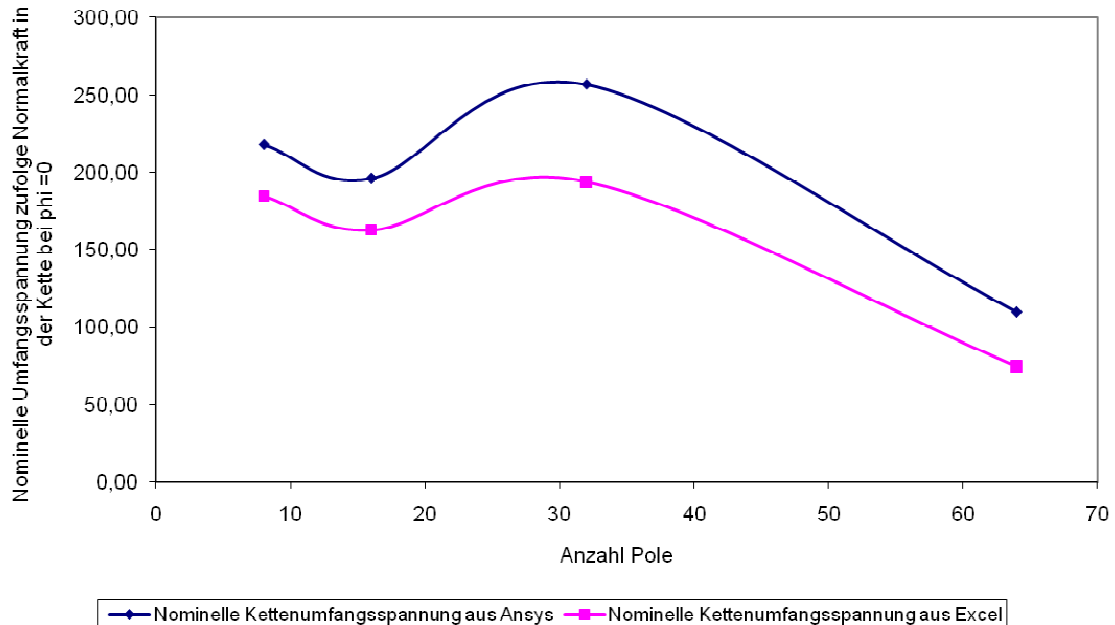


Abbildung 4-32 Nominelle Umfangsspannung in der Kette direkt über der Rippe bei eingehängter Kette

Anhand der Nominellen Umfangsspannung zufolge Normalkraft in der Kette ist ersichtlich, dass der qualitative Verlauf der beiden Kurven in Abbildung 4-31 und Abbildung 4-32 sehr gut übereinstimmt. Die Abweichung der berechneten Werte bei aufgeschrumpfter Kette liegt im Bereich von 4 bis 7 Prozentpunkten. Die Abweichung bei der Ausführung mit eingehängter Kette liegt aufgrund des zusätzlichen Fehlers, durch die Näherung der Rippensteifigkeit, mit 15 bis 32 Prozent etwas höher. Für die Abweichung der Nominellen Spannung in der Kette von 25 Prozent beim 32- poligen Generator (siehe Abbildung 4-32) ist außer der angenäherten Rippensteifigkeit noch ein Fehler des Symmetriemodells verantwortlich. Diese Asymmetrie ist in Abbildung 4-33 zu sehen. Sie beruht darauf, dass man für das Symmetriemodell immer den Bereich zwischen zwei Rippen symmetrisch halbiert und für die Berechnung heranzieht. Beim 32- poligen Generator führt dies aber aufgrund der Rippenanzahl von 12 (32 ist kein natürliches Vielfaches von 12) dazu, dass die Anzahl der Pole über das Symmetriemodell keine gerade Zahl ist. Im Ansys wird dies berücksichtigt, in dem man die Fliehkraftbelastung der Pole händisch berechnet, und die asymmetrische Pol- Schwalbenschwanzlücke mit dem realen Anteil der Fliehkraftbelastung beaufschlagt. So kommt auf die drei Pol- Schwalbenschwanzlücken nicht die Belastung von drei Polen, sondern nur jene von 2,66 Polen. Daher werden die ersten beiden Lücken mit der Fliehkraft von jeweils einem Pol beaufschlagt und die dritte asymmetrische Lücke mit der Fliehkraft von 0,66 Polen.

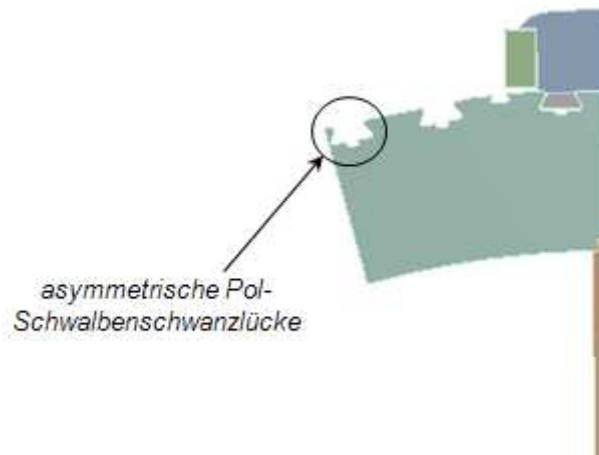


Abbildung 4-33 Asymmetrie des 32- poligen Symmetriemodells

Um die hohe Qualität des parametrisierten analytischen Berechnungsmodells nachzuweisen wurde der tangentialen Spannungsverlauf in der Kette mittels Ansys berechnet (siehe Abbildung 4-34). Dieser wurde anschließend ins Excel importiert und in einem Diagramm dargestellt (siehe Abbildung 4-35). Es zeigt, dass sowohl Absolutwert als auch der qualitative Verlauf der nominell berechneten Spannungswerte sehr gut übereinstimmen. Die rote Linie stellt den nominellen Spannungsverlauf aus der analytischen Berechnung dar. Die Steigung der Geraden ist charakteristisch für die Biegespannung in der Kette und stimmt sehr gut mit jenen Werten aus Ansys (blaue Kurve) überein. Die nominelle Spannung zufolge Normalkraft in der Kette bestimmt die absolute Lage der Geraden. Würde man die Biegespannung in der Kette konstant halten und die Spannung zufolge Normalkraft variieren, so würde sich die rote Gerade parallel nach oben bzw. nach unten verschieben.

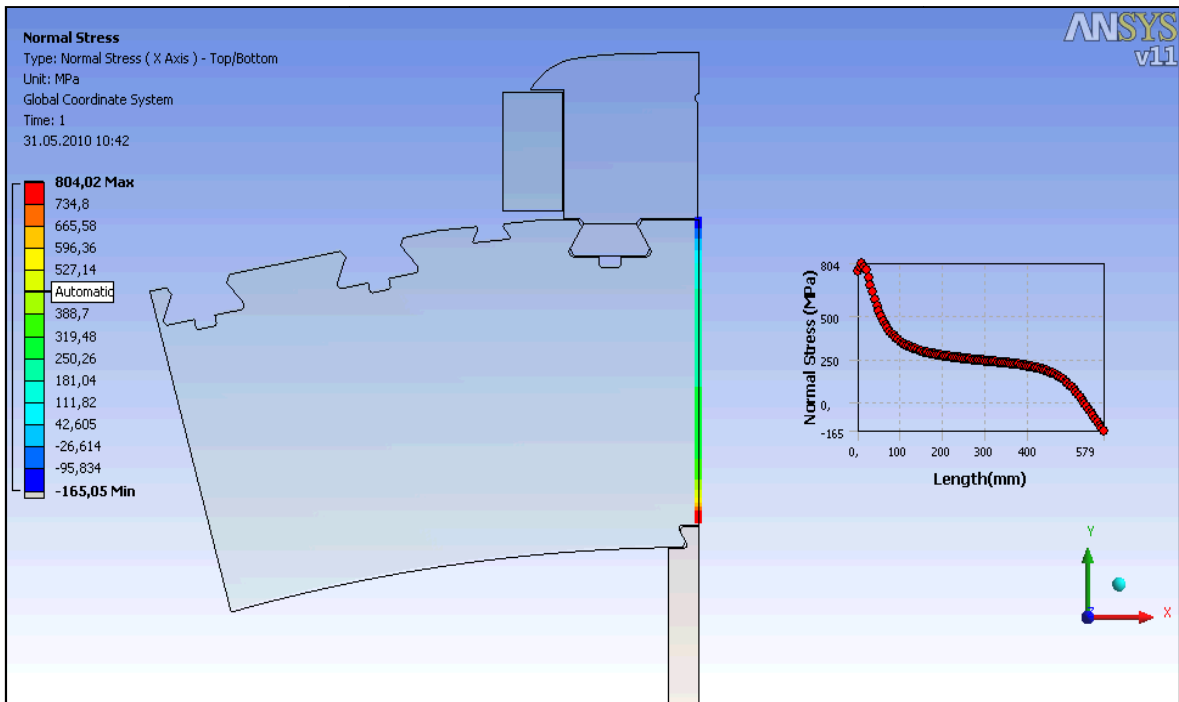


Abbildung 4-34 Tangentialer Spannungsverlauf in der Kette aus Ansys

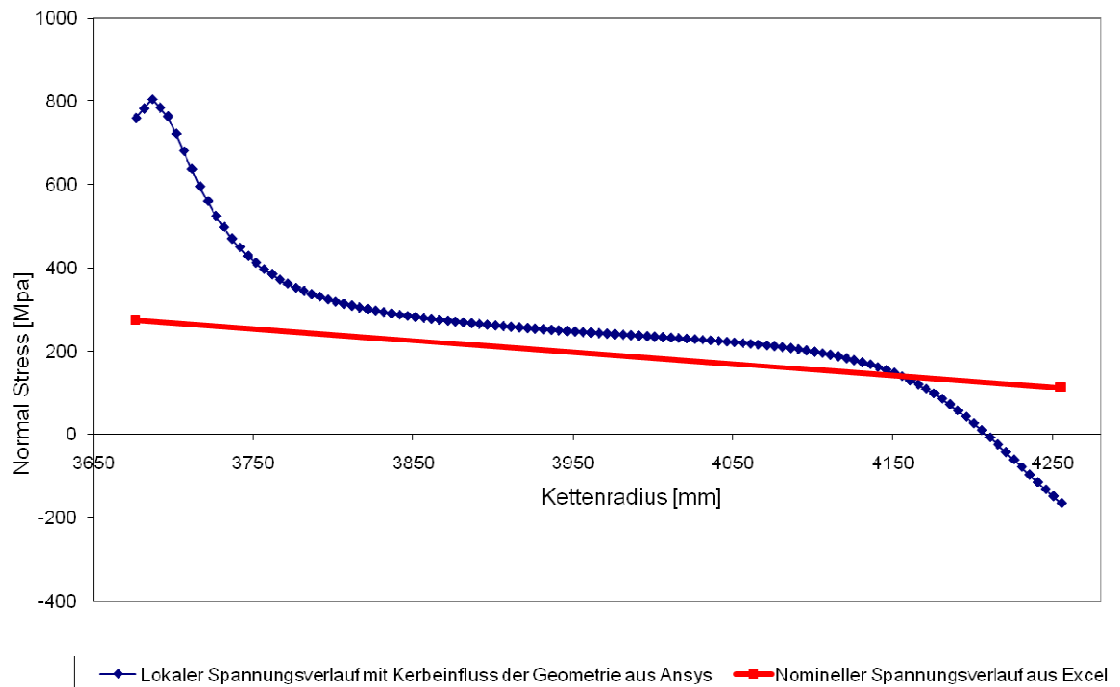


Abbildung 4-35 Tangentialer Spannungsverlauf in der Kette bei

Des Weiteren ist aus diesem Verlauf gut ersichtlich, dass die Schwalbenschwanznut, in welche die Rippe eingehängt wird, einen Kerbfaktor β von ungefähr 3 hervorruft.

$$\beta = \frac{\text{lokale Spitzenspannung}}{\text{nominelle Spannung}} = \frac{804 \text{ MPa}}{280 \text{ MPa}} = 2,87 \quad (4.9)$$

Der Kerbfaktor β ist wie folgt definiert:

Der Kerbfaktor β ist das Verhältnis der Ausschlagfestigkeit des glatten Probestabes zur Ausschlagfestigkeit des gekerbten Probestabes unter jeweils gleichen Bedingungen.

(Matek, Wittel, Becker, & Muhs, 1995)

4.3.3 Analyse der auftretenden Kräfte und Spannungen am Beispiel eines 8-poligen Generators

In Tabelle 4-6 sind die Spannungen und Kräfte in der Kette und Rippe quantitativ festgehalten. Es ist auf den ersten Blick eine Tendenz dahingehend festzustellen, dass sich sowohl die lokalen Spitzenspannungen als auch die nominellen Spannungen mit steigender Rippenlänge erhöhen. So nimmt auch mit steigender Rippenlänge die tangentialen Reaktionskraft in der Kette ab und die Reaktionskraft im Hals der Rippe zu. Der Grund dafür ist, dass die Steifigkeit der Kette in tangentialer Richtung mit zunehmender Rippenlänge stark herab gesetzt wird, während sich die Steifigkeit der Rippe nur minimal (linear) verringert ($c = \frac{EA}{l}$). Dies resultiert aus der Abnahme der Kettenhöhe und damit des beanspruchten Querschnittes mit zunehmender Rippenlänge. Der Verlauf der Reaktionskräfte in Kette und Rippe ist in Abbildung 4-36 dargestellt. Des Weiteren sieht man in Abbildung 4-36 den Unterschied der tangentialen Reaktionskraft in der Kette bei eingehängter Kette (blaue Linie) und bei nicht eingehängter Kette (rote Linie). Die Differenz rührt daher, dass durch das Einhängen der Kette ein Teil des Kraftflusses über die Rippe in die Welle geleitet wird.

	Werte aus Ansys mit Rippe			Werte aus analytischem Modell			Werte aus Ansys (ohne Rippe)		
	1300	1400	1500	1300	1400	1500	1300	1400	1500
Rippenlänge [mm]									
$\sigma(\varphi)$ bei $r=R$, Rippe, $\varphi=0$ [Mpa]	785,00	1109,00	1858,00				714,00	1006,00	1728,00
Tangentiale Reaktionskraft in Kette [N]	57752,00	53711,00	48462,00				61015,00	57428,00	52499,00
tangentialer Spannungsquerschnitt [mm ²]	270,00	220,00	170,00				270,00	220,00	170,00
$\sigma(\varphi)$ Nominell zufolge Normalkraft [Mpa]	213,90	244,14	285,07	211,00	254,00	329,00	225,98	261,04	308,82
Reaktionskraft im Hals bezogen auf 1mm Dicke [N]	4757,00	5351,00	5589,00	6065,00	6688,00	7338,00			
Halsquerschnitt [mm ²]	23,17	23,17	23,17	23,17	23,17	23,17			
σ Hals [Mpa] Nominell	205,30	230,95	240,35	262,62	288,65	316,70			
Flankenpresskraft [N]	9515,00	10703,00	11139,00						
Flankenlänge [mm]	22,46	22,46	22,46						
Flankenpressung Nominell [Mpa]	423,72	476,62	496,04						
σ 1 [Mpa]	2586,00	3382,50	5492,00						
σ 2 [Mpa]	853,00	981,21	1113,00						

Tabelle 4-6 Kräfte und Spannungen in der Rippe und Kette eines 8- poligen Generators

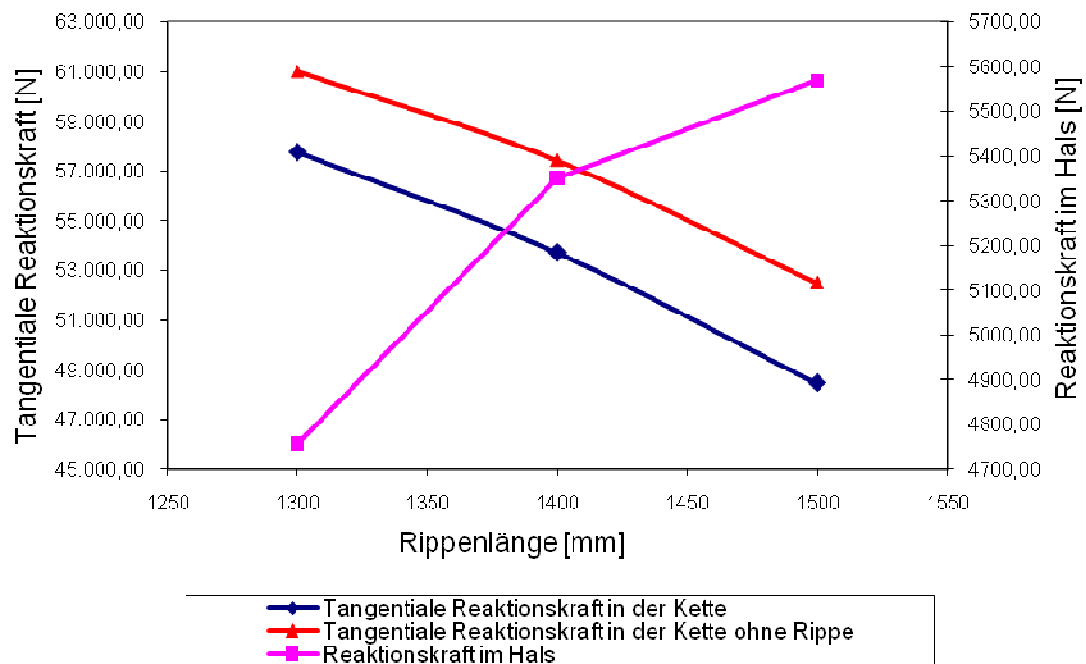


Abbildung 4-36 Reaktionskräfte in Abhängigkeit der Rippenlänge

Abbildung 4-37 zeigt den Plot der von Mises Vergleichsspannung in der Kette. Der rote Pfeil signalisiert das lokale Spannungsmaximum σ_1 welches sich im Radius der Schwalbenschwanznut befindet.

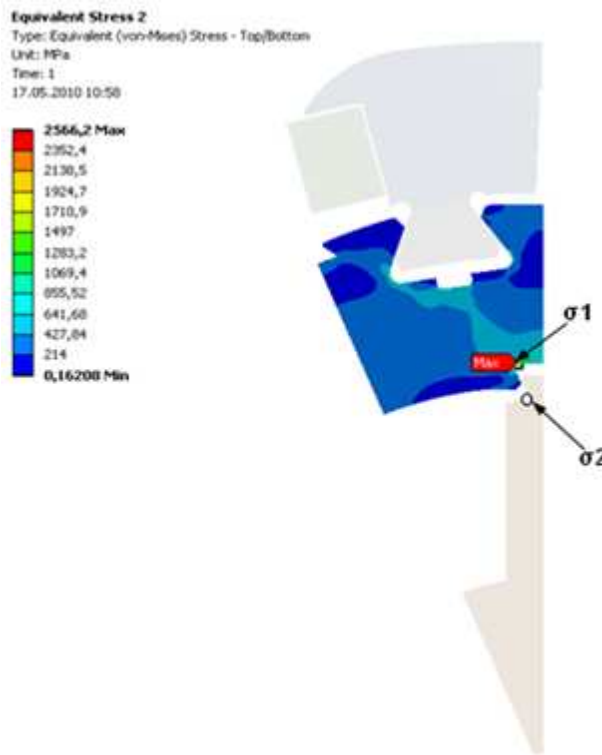


Abbildung 4-37 Von-Mises Vergleichsspannungsplot in der Kette

σ_1 weist einen theoretischen Wert (das finite Elemente Programm berücksichtigt keine plastische Verformung) von σ_1 bei einer Rippenlänge von l auf (siehe Tabelle 4-6. Wird die Rippe auf 1500 mm verlängert, so erhöht sich σ_1 auf $2\sigma_1$, also auf fast den doppelten Wert. Der Verlauf der lokalen Spannungsmaxima in Rippe und Kette in Abhängigkeit der Rippenlänge ist in Abbildung 4-38 dargestellt. In der Rippe tritt die maximale Vergleichsspannung nach von- Mises im Radius der Schwalbenschwanz- Hinterschneidung, im sogenannten Halsgrund, auf (siehe Abbildung 4-37). Die ausgeprägte Kerbwirkung in den Radien der Schwalbenschwanzgeometrie erfordert ein durchdachtes Design der Radien bzw. deren Übergänge. Die Radien sollten so groß wie möglich und die Übergänge so weich wie möglich gestaltet werden. Dadurch können Kerbfaktoren verringert werden und somit Spitzenspannungen minimiert werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass ein größerer Radius eine kleinere Schwalbenschwanz- Kontaktfläche zu Folge hat, was die Flächenpressung in der Schwalbenschwanz Flanke erhöht.

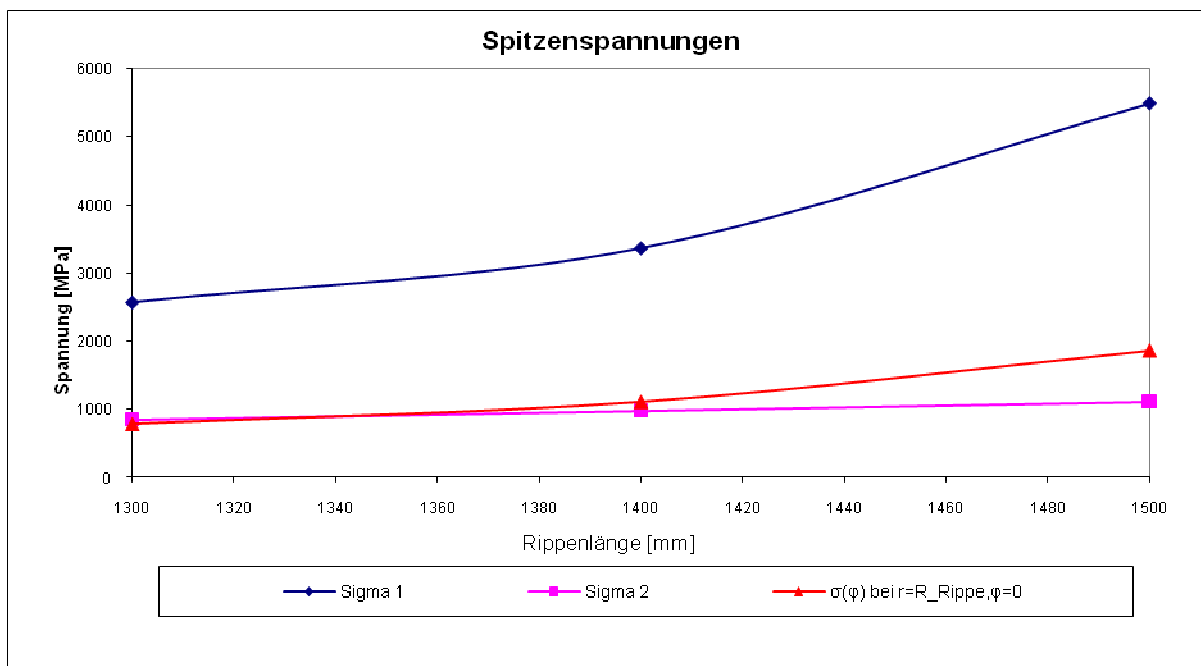


Abbildung 4-38 Verlauf der Spitzenspannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge

In Abbildung 4-40 ist der Verlauf der nominellen Spannungen zufolge Normalkraft bei eingehängter Kette (blaue Linie) und bei nicht eingehängter Kette (rote Linie) sowie der Verlauf der nominellen Halsspannung im Schwalbenschwanz-Halsquerschnitt der Rippe dargestellt. Die Spannungswerte wurden mit Ansys berechnet und sind in Tabelle 4-6 zu finden. Aufgrund der vorhandenen Geometrie muss jedoch auf die lokalen Spannungswerte Acht gegeben werden da die Schwalbenschwanznut eine Kerbwirkung mit sich bringt (siehe Abbildung 4-39).

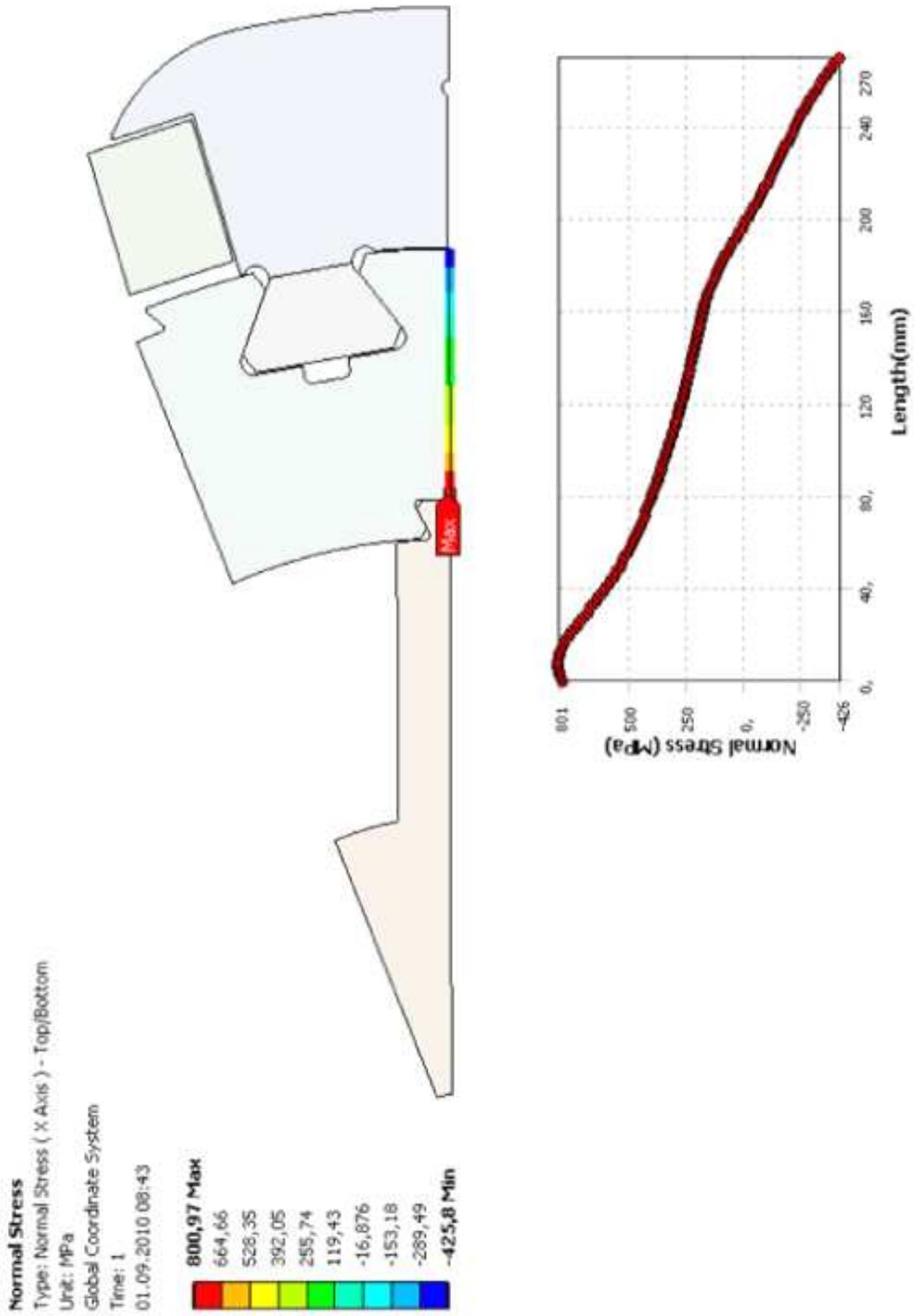


Abbildung 4-39 Normalspannungsverlauf in der Kette

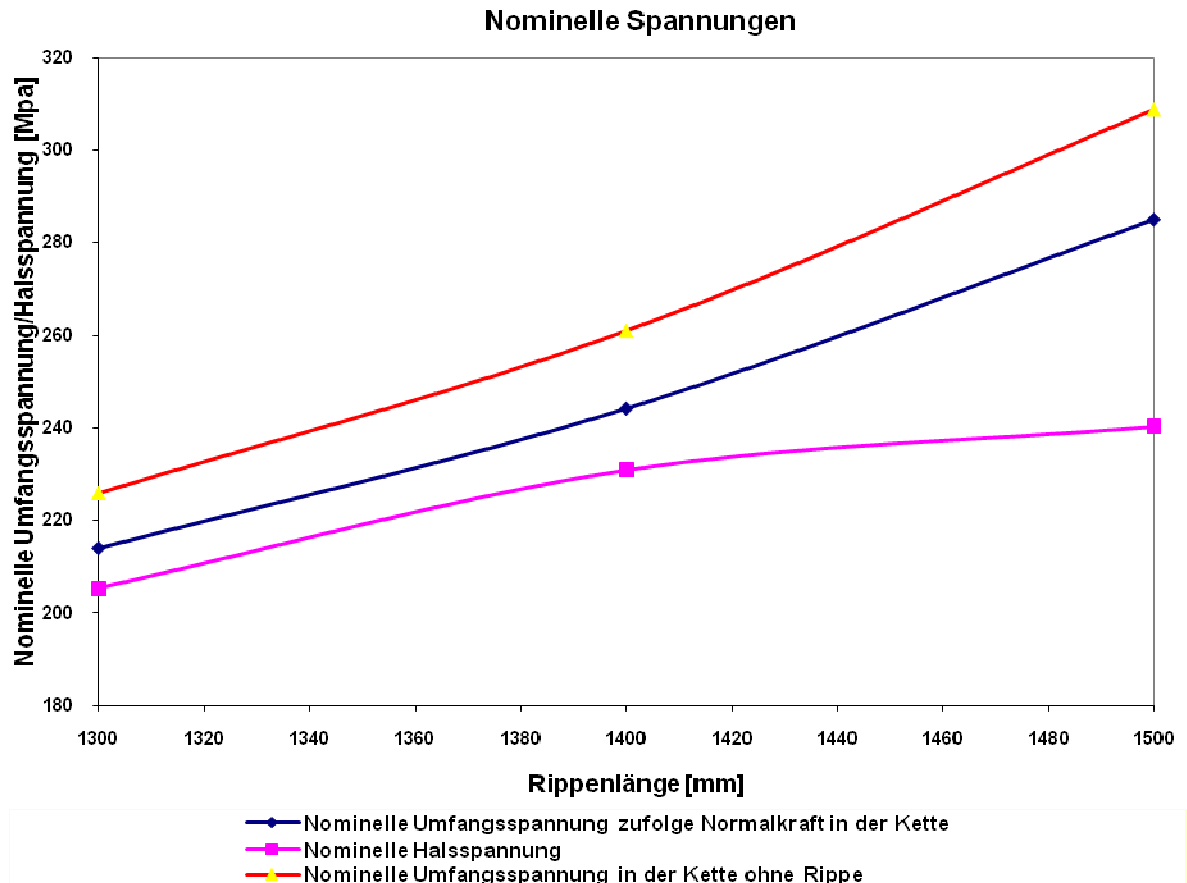


Abbildung 4-40 Verlauf der Nominellen Spannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge

Abbildung 4-41 zeigt den Verlauf von der Normalkraft in der Kette im Bereich direkt über der Rippe sowie die Reaktionskraft in der Rippe bei Variation der Rippenbreite (Rippensteifigkeit). Die Werte stammen aus dem parametrisierten analytischen Berechnungsmodell. Abbildung 4-42 zeigt den Verlauf des Biegemomentes in der Kette im Bereich direkt über der Rippe, also das statisch unbestimmte Moment (siehe Abbildung 4-7), bei Variation der Rippenbreite. Daraus ist ersichtlich, dass mit steigender Rippensteifigkeit sowohl das Moment in der Kette als auch die Reaktionskraft in der Rippe steigen. Die Normalkraft in der Kette nimmt qualitativ gegenläufig zur steigenden Rippenkraft ab.

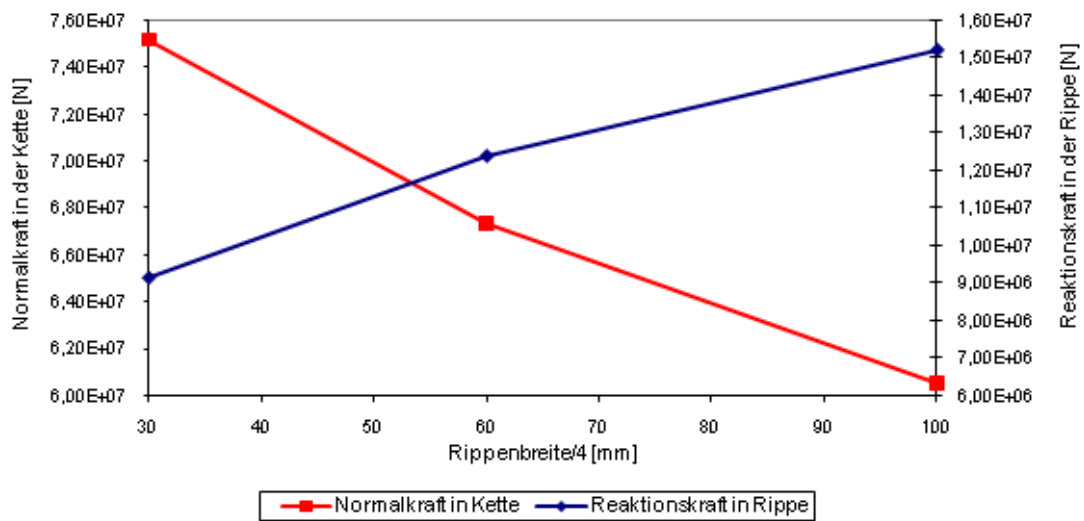


Abbildung 4-41 Reaktionskraft in der Rippe bzw. Normalkraft in der Kette bei Variation der Rippenbreite

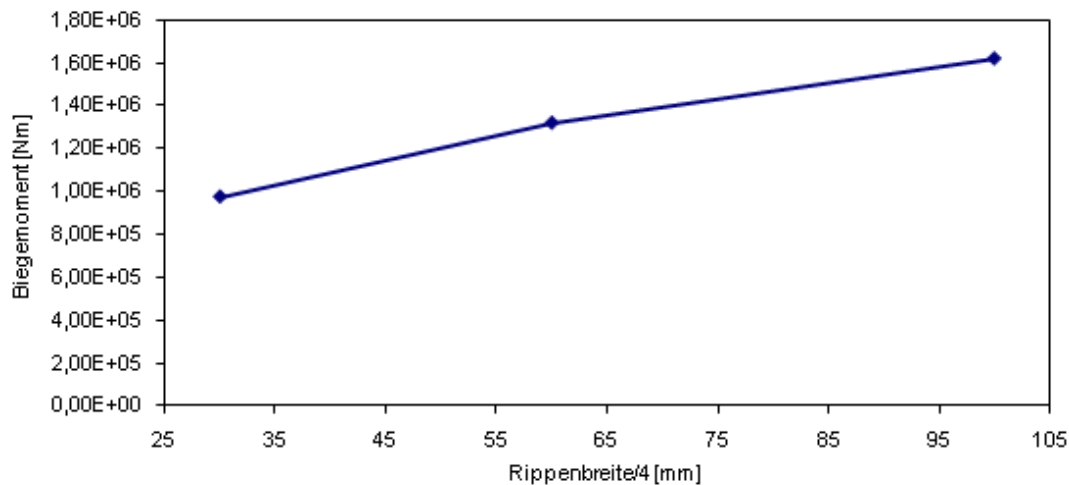


Abbildung 4-42 Biegemoment in der Kette bei Variation der Rippenbreite

Einfluss der Rippensteifigkeit auf die nominelle Umfangsspannung in der Kette

Mit zunehmender Rippenbreite, also mit zunehmender Steifigkeit der Rippe, sinkt die Normalspannung zufolge Normalkraft in der Kette wie erwartet. Jedoch steigt der Betrag des Biegemoments mit zunehmender Rippensteifigkeit, da die steifere Rippe die Kette stärker zurückhält. Diese Biegespannung wirkt sich am inneren Radius der Kette ($R = R_{Rippe}$) kontraproduktiv auf die Gesamtumfangsspannung $\sigma(\varphi)$ aus.

In Summe ändert sich die nominelle Gesamtumfangsspannung $\sigma(\varphi)$, welche sich aus Biege- und

$$\sigma(\varphi) = \sigma_N - \sigma_B \quad (4.10)$$

Normalspannung zusammensetzt nicht wesentlich was in Tabelle 4-7 ersichtlich ist.

Tabelle 4-7 Nominelle Tangentialspannung in der Kette bei $\varphi = 0$ und $R = R_{Rippe}$

Rippenbreite[mm]	80	120	160	200
σ_N [MPa]	265,8	250	237	226
σ_B [MPa]	-143,6	-169,4	-190,6	-208,5
$\sigma(\varphi)$ [MPa]	409,4	419,4	427,6	434,5

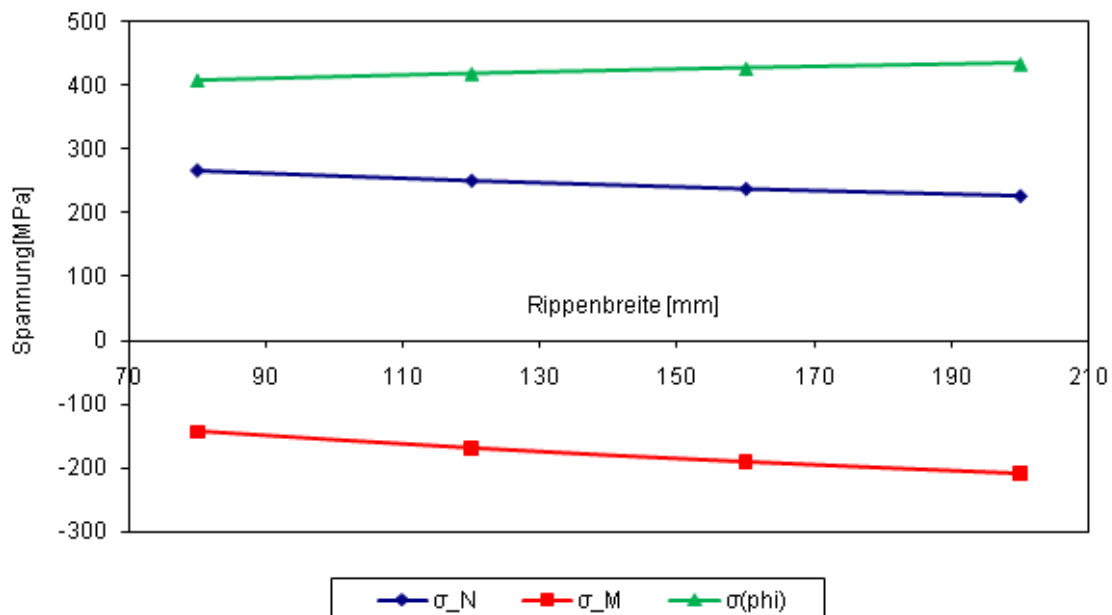


Abbildung 4-43 Einfluss der Rippensteifigkeit auf die nominelle Umfangsspannung in der Kette

4.3.4 Analyse der auftretenden Kräfte und Spannungen am Beispiel eines 32-poligen Generators

Um die Auswirkung der Einhängung der Kette in die Rippe sichtbar zu machen, wurde mit Ansys eine Spannungsanalyse durchgeführt, wobei einmal mit eingehängter Kette, einmal ohne eingehängter Kette und einmal mit unendlich steifer Rippe gerechnet wurde.

Für die Analyse der nicht eingehängten Kette (aufgeschrunpft Kette; Stand der Technik –siehe Abbildung 1-11) wurde die Rippe als Bauteil unterdrückt. Grund dafür ist, dass in dieser Machbarkeitsstudie davon ausgegangen wird, dass der Rotor mit Durchgangsdrehzahl läuft und in diesem Zustand die Kette zur Gänze abgehoben ist. Das heißt die Kette verhält sich wie ein Ring unter Fliehkraftbelastung.

Für die Analyse mit unendlich steifer Rippe wurde wiederum die Rippe unterdrückt und zusätzlich auf die Schwalbenschwanzflanken in der Kette die Randbedingung „Frictionless Support“ (reibungsfreie Auflage) aufgegeben. Die Ergebnisse dieser Analyse sind der Tabelle 4-8 zu entnehmen und in Abbildung 4-44 bzw. Abbildung 4-45 grafisch dargestellt.

Tabelle 4-8 Vergleich der eingehängten Kette, nicht eingehängter Kette und der Kette mit theoretisch unendlich steifer Rippe (Spannungswerte wurden mit Ansys berechnet)

	eingehängte Kette	nicht eingehängte Kette	Rippensteifigkeit $\rightarrow \infty$
Lokale Umfangsspannung $\sigma(\varphi)$ bei $r=R_{\text{Rippe}}, \varphi=0$ [Mpa]	804,00	580,60	1301,00
Tangentiale Reaktionskraft in Kette bei $\varphi=0$ [N]	148740,00	165500,00	114500,00
tangentiale Spannungsquerschnitt [mm ²]	579,00	579,00	579,00
Nominelle Umfangsspannung $\sigma(\varphi)$ bei $\varphi=0$ [Mpa] zufolge Normalkraft	256,89	285,84	197,75
Reaktionskraft im Hals [N]	8438,50		25712,00
Halsquerschnitt [mm ²]	23,46		23,46
Nominelle Halsspannung [Mpa]	359,74		1096,13

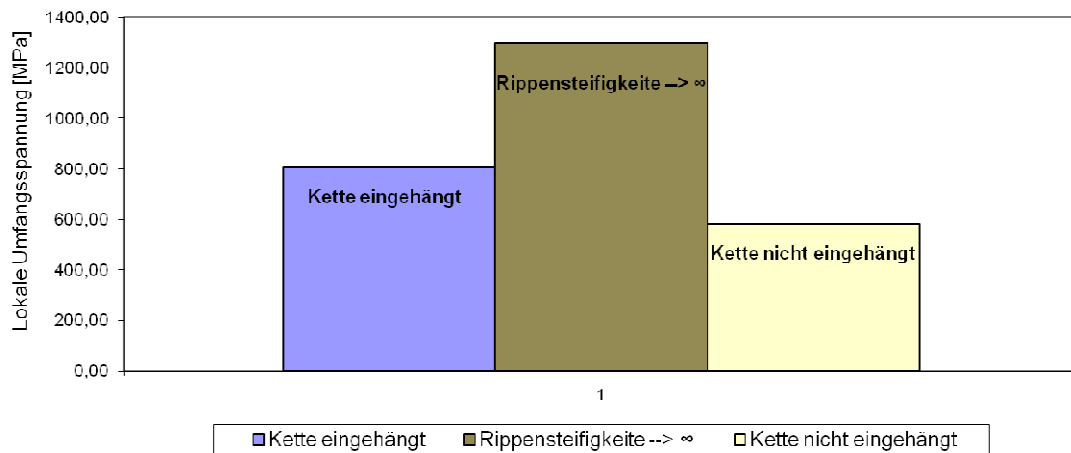


Abbildung 4-44 Lokale Umfangsspannung in der Kette am Innenradius

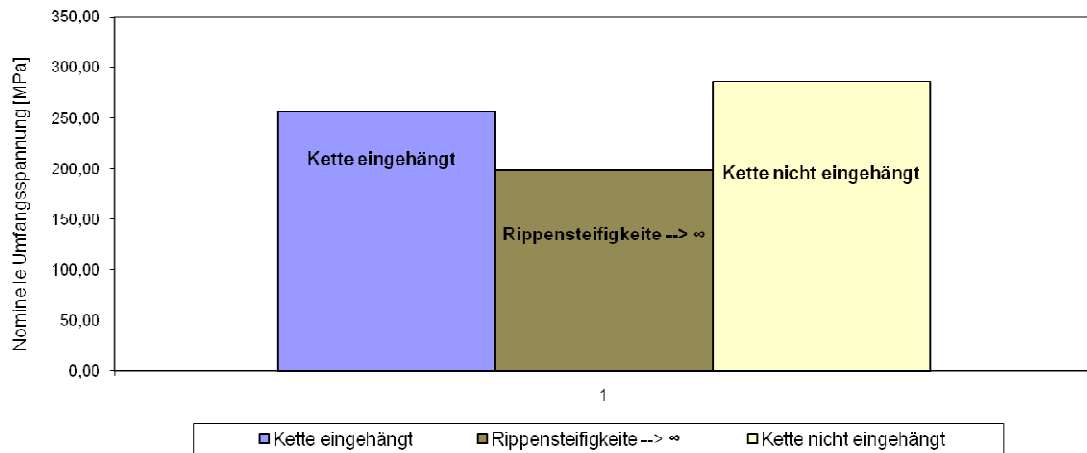


Abbildung 4-45 Nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft in der Kette

Tabelle 4-9 zeigt die Verbesserung bzw. Verschlechterung der nominellen bzw. lokalen Tangentialspannung in der Kette. Man sieht, dass sich die nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft im Vergleich zur aufgeschumpften (abgehobenen) Kette um 11,3% verbessert. Jedoch verschlechtert sich die lokale Spannung am Innenring um 27,8% da die zusätzliche Biegespannung am Innenring kontraproduktiv wirkt.

Tabelle 4-9 Verbesserung bzw. Verschlechterung der nominellen bzw. lokalen Tangentialspannung

Verbesserung/Verschlechterung der Spannungssituation durch Einhängen der Kette	
relative Erhöhung der lokalen Umfangsspannung $\sigma(\varphi)$ bei $r=R_{\text{Rippe}}, \varphi=0$	27,8%
relative Verringerung der nominellen Umfangsspannung $\sigma(\varphi)$ bei $\varphi=0$	11,3%

In Tabelle 4-10 ist der Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen ersichtlich. Die Spannungswerte wurden mit dem parametrisierten analytischen Berechnungsmodell berechnet.

ist die nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft eines Fliehkraft- belasteten Ringes. Dieser Ring stellt vereinfacht die aufgeschumpfte Kette im abgehobenen Zustand dar. ist die nominelle Umfangsspannung zufolge Biegemoment. Da der Ring jedoch frei von Biegemomenten ist (die Krümmung bleibt konstant), ist auch .

Die gesamte Umfangsspannung setzt sich aus und zusammen und wird gemäß Formel (4.10) wie folgt berechnet:

=

Tabelle 4-10 Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen aus dem analytischen Modell

halbe Rippenbreite [mm]	$\varphi=0$			$\varphi=0,262 \text{ rad}$		
	40	70	100	40	70	100
$\sigma_{N(\varphi)}$ [Mpa]	258,8	246,8	236,7	258,1	245,7	235,2
$\sigma_{M(\varphi)}$ [Mpa]	-15,3	-24,5	-32,2	7,7	12,3	16,1
$\sigma(\varphi)$ [Mpa]	274,1	271,3	268,9	250,4	233,4	219,1
$\sigma_{N(\varphi)\text{ Ring}}$ [Mpa]	278,8	278,8	278,8	278,8	278,8	278,8
$\sigma_{M(\varphi)\text{ Ring}}$ [Mpa]	0	0	0	0	0	0

Der Verlauf dieser Spannungen ist in Abbildung 4-46 zu sehen. Mit zunehmender Rippenbreite (Rippensteifigkeit) nimmt die Tangentialspannung zufolge Normalkraft in der Kette bei und ab und die Spannung zufolge Moment erhöht sich betragsmäßig ins Negative. Da jedoch am Ketteninnenradius die Spannung zufolge Moment subtrahiert wird, hat das ins negative sinkende Moment eine negative Auswirkung auf die Gesamttangentialspannung welche sich gemäß (4.10) errechnet. Daher verbessert sich die Tangentialspannung in der Kette im Vergleich zur Ausgangssituation ohne eingehängter Kette nicht wesentlich.

Einfluss der Rippenbreite bei $R=R_{\text{Rippe}}$ $\varphi=0$

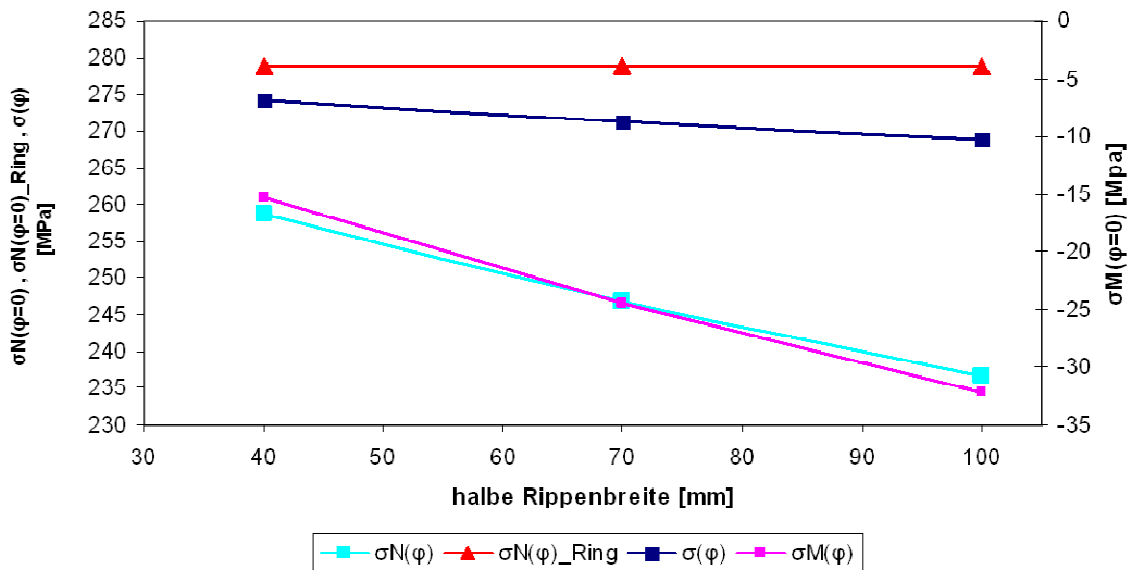


Abbildung 4-46 Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen am Ketteninnenradius bei

In Abbildung 4-47 ist der Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen zwischen zwei Rippen, also bei dargestellt. Mit zunehmender Rippenbreite (Rippensteifigkeit) wird auch hier die Tangentialspannung zufolge Normalkraft in der Kette bei und niedriger. Die Spannung zufolge Moment erhöht sich jedoch ins Positive. Da am Ketteninnenradius die Spannung zufolge Moment gemäß Formel (4.10) subtrahiert wird, hat das ins Positive ansteigende Moment eine

positive Auswirkung auf die Gesamttangentialspannung. Diese nimmt mit zunehmender Rippenbreite leicht ab (siehe Abbildung 4-47 blaue Linie).

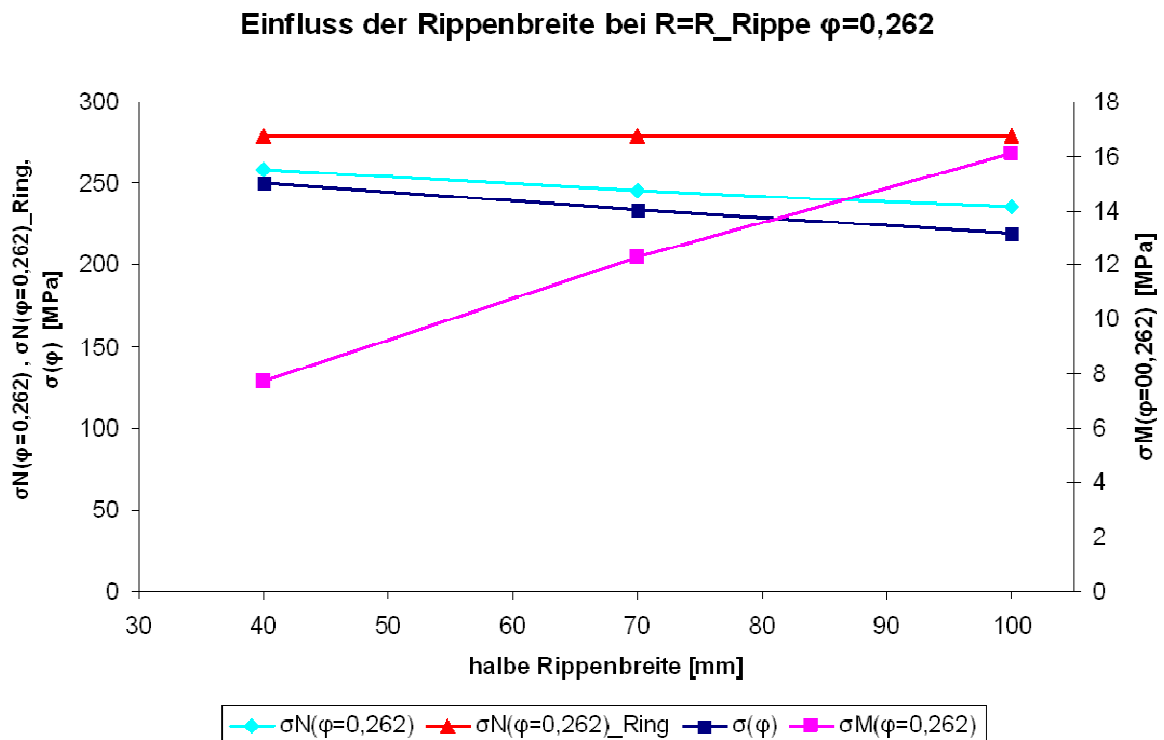


Abbildung 4-47 Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen am Ketteninnenradius bei $\varphi=0,262$ rad

Veränderung der Spannungssituation bei unterschiedlichen Generatoren mit verschiedenen Polzahlen durch das Einhängen der Kette

Um die Auswirkungen des Einhängens der Kette in die Rippe mittels Schwalbenschwanzverbindung über ein größeres Spektrum von Polzahlen zu verdeutlichen, wurde mit Hilfe des analytischen parametrisierten Berechnungsmodells eine Analyse der Kräfte und Spannungen durchgeführt. Als Vergleichsbasis für die Verbesserung bzw. Verschlechterung der eingehängten Kette zur derzeitigen, aufgeschrumpften Kette dient als vereinfachtes Modell der fliehkraftbelastete Ring und dessen Normalspannung . Parallel dazu wurden die Spannungen und Kräfte für diverse Polzahlen auch numerisch mit Ansys berechnet. Die Ergebnisse dieser Studie sind in Tabelle 4-11 zu finden.

Tabelle 4-11 Analyse bei konstanter Rippenbreite (120 mm)

Anzahl Pole	8	16	32	64
Eingehängte Kette				
Kettenhöhe [mm]	311,50	730,60	579,00	163,00
Force Reaction (tangential in der Kette) [N]	58.843,00	143.200,00	148.730,00	17.848,00
Nominelle Kettenumfangsspannung zufolge Normalkraft aus Ansys [MPa]	217,94	196,00	256,87	109,50
Nominelle Kettenumfangsspannung zufolge Normalkraft aus Excel [MPa]	184,60	162,70	193,70	74,80
Abweichung Excel /Ansys	15,30%	16,99%	24,59%	31,69%
Spitzenspannung bei $\varphi=0$ und $R= R_Rippe$ [MPa]	800,97	631,14	804,00	264,50
ohne eingehängte Kette				
Force Reaction (tangential in der Kette)	62.155,00	147.220,00	165.460,00	18.588,00
Nominelle Kettenumfangsspannung aus ANSYS	199,53	201,51	285,77	114,04
Nominelle Kettenumfangsspannung aus Excel	208,00	191,40	274,70	106,40
	1,04	0,95	0,96	0,93
Spitzenspannung bei $\varphi=0$ und $R= R_Rippe$ [MPa]	728,45	488,86	580,60	189,10

In Abbildung 4-48 wird der Verlauf der nominellen Umfangsspannung zufolge Normalkraft in der Kette dargestellt. Dieses Bild zeigt die Verbesserung bzw. die Verschlechterung der nominellen Umfangsspannung zufolge Normalkraft zwischen eingehängter und aufgeschumpfter Kette. Diese Spannung wird wie folgt berechnet:

$$\sigma_N(\varphi = 0) = \frac{N(\varphi = 0)}{A} \quad (4.11)$$

$N(\varphi = 0)$ ist die tangentielle Reaktionskraft in der Kette (siehe Tabelle 4-11- Force Reaktion) direkt über der Rippe. A ist der beanspruchte Spannungsquerschnitt.

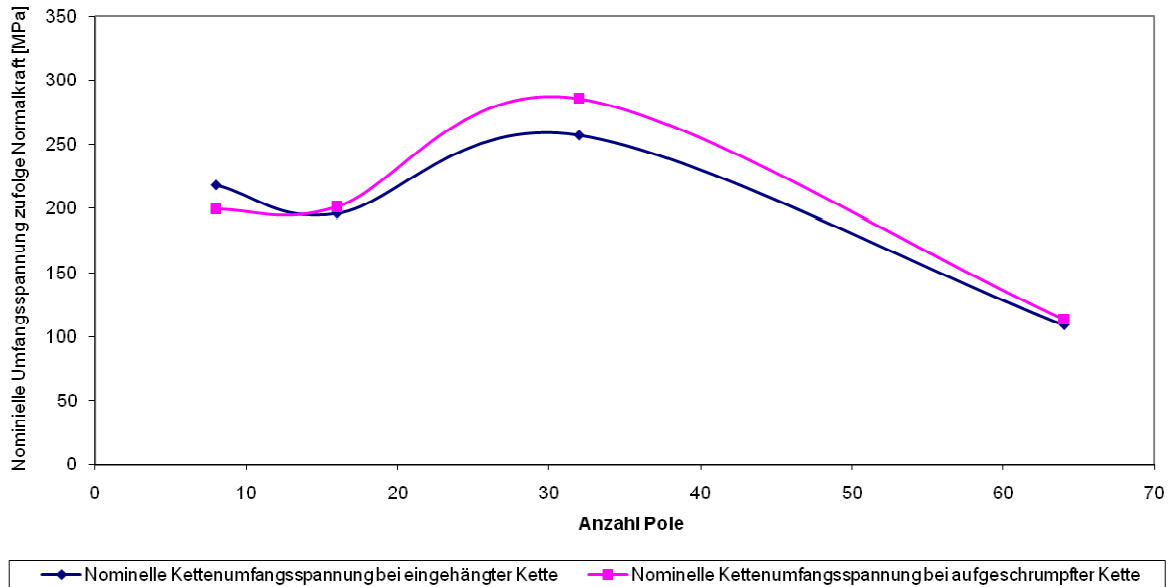


Abbildung 4-48 Nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft Eingehängte Kette vs. Schrumpf (Spannungswerte aus Ansys)

In Abbildung 4-49 wird der Verlauf der lokalen Spitzenspannung bei $\phi_h = 0$ und $R = R_r$ in der Kette dargestellt (siehe Abbildung 4-39, Spannungsmaximum wurde mit rotem Pfeil gekennzeichnet). Dieses lokale Spannungsmaximum weicht von der nominellen Spannung an dieser Stelle aufgrund der Kerbwirkung der Schwalbenschwanznut ab. In Abbildung 4-49 ist eine Erhöhung der lokalen Spannung durch das Einhängen der Kette erkennbar.

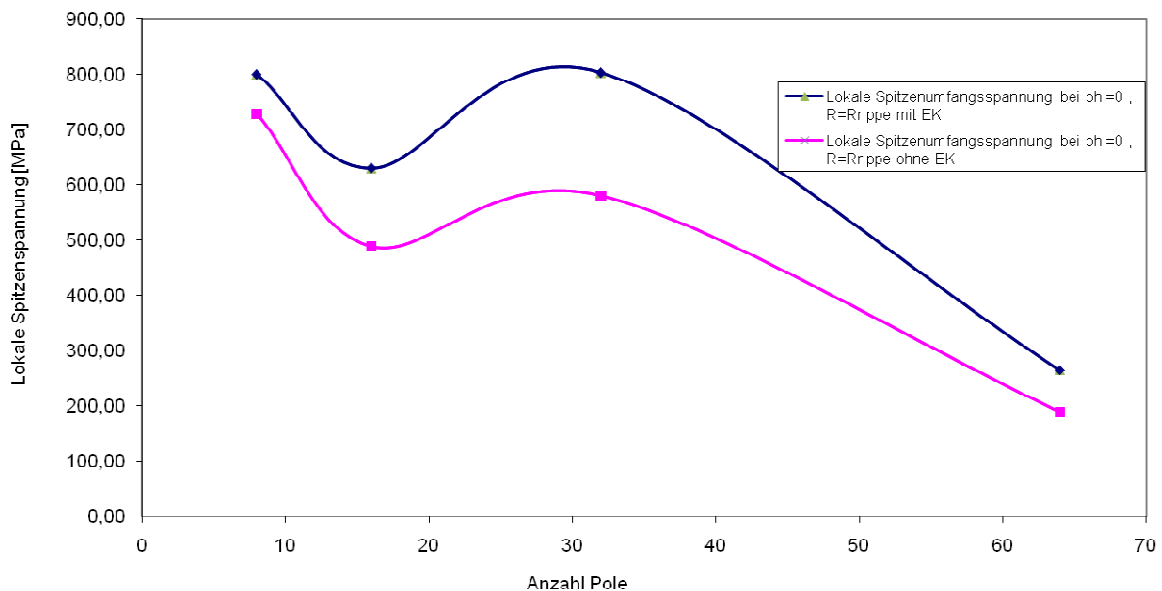


Abbildung 4-49 Lokale Spitzenspannung bei div. Polzahlen; Eingehängte Kette vs. Schrumpf

Um der Ursache für die erhöhten Spitzenspannungen (im Vergleich zur geschrumpften Kette) in tangentialer Richtung im Bereich der Schwalbenschwanznut auf den Grund zu gehen, wurde eine Analyse

der Biegespannungen sowie der Normalspannungen durchgeführt. Dazu wurde die Umfangsspannung in der Kette mit Ansys berechnet und der radiale Verlauf der Umfangsspannung ins Excel exportiert. Ein typischer Verlauf dieser Umfangsspannung ist in Abbildung 4-39 zu sehen. Mit Hilfe einer Trendlinie konnte ein linearer, nomineller Spannungsverlauf angenähert werden. Dieser setzt sich theoretisch aus der Spannung zufolge Normalkraft und der Spannung zufolge Biegemoment zusammen. Die Spannung zufolge Normalkraft ist als Mittelspannung und die Spannung zufolge Biegemoment als Ausschlagspannung zu interpretieren. Die Normal- bzw. Biegespannung wurde wie folgt berechnet:

$$(4.12)$$

In Abbildung 4-50 bis Abbildung 4-56 wird der tangentielle Normalspannungsverlauf in der Kette dargestellt. Dieser wurde mit Ansys numerisch berechnet (siehe Abbildung 4-39) und anschließend ins Microsoft Excel importiert. Im Excel wurde eine Trendlinie interpoliert und deren Geradengleichung errechnet. Diese Geradengleichung beschreibt den Verlauf der nominellen Spannung in der Kette sehr gut. Jedoch beinhaltet sie, aufgrund der Kerbwirkung, erhöhte Spannungswerte im Bereich der Schwalbenschwanznuten. Daher sollte man nicht von einer echten nominellen Spannung sprechen, sondern von einem linearisierten Spannungsverlauf.

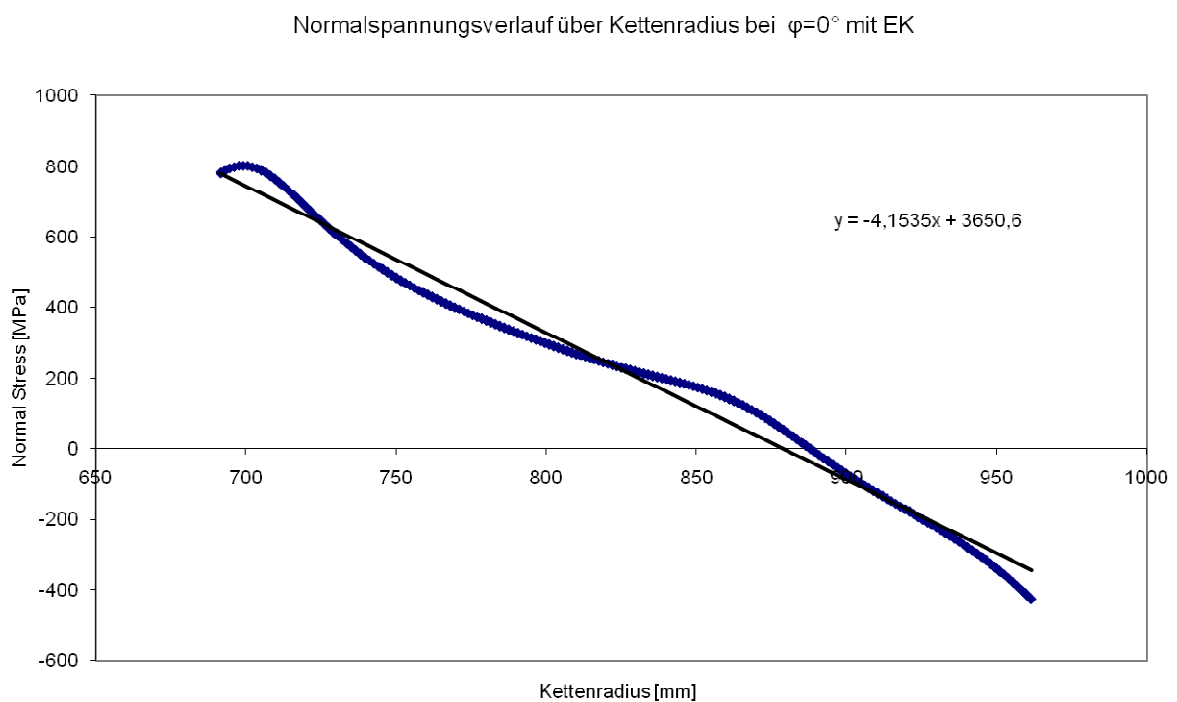


Abbildung 4-50 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 8 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ ohne EK

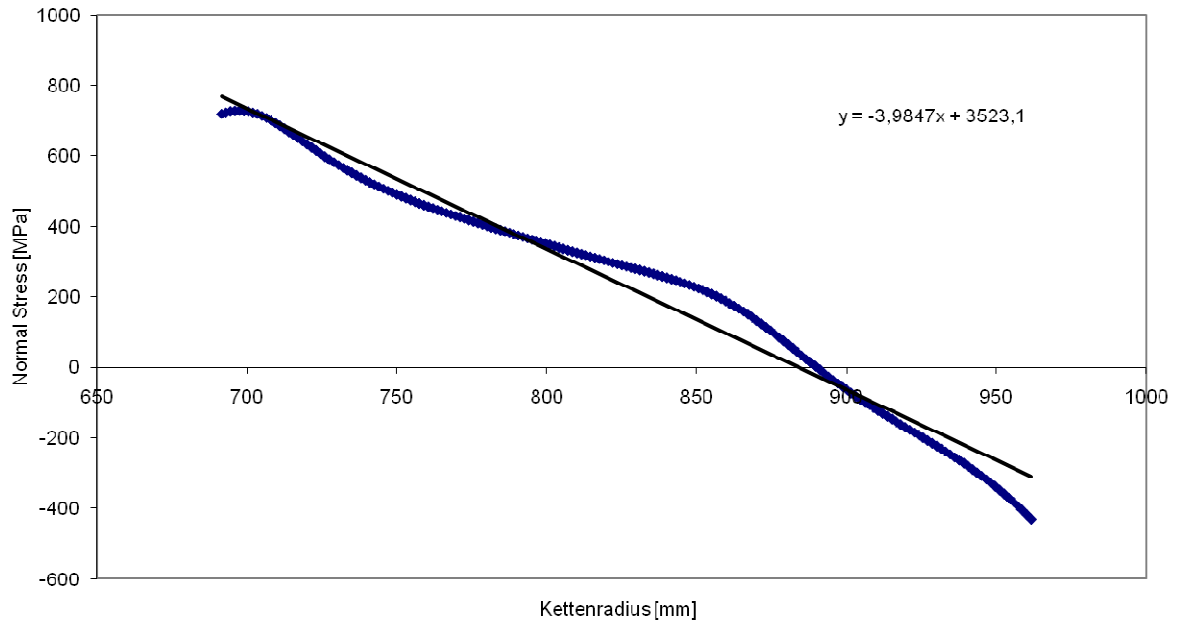


Abbildung 4-51 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 8 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ mit EK

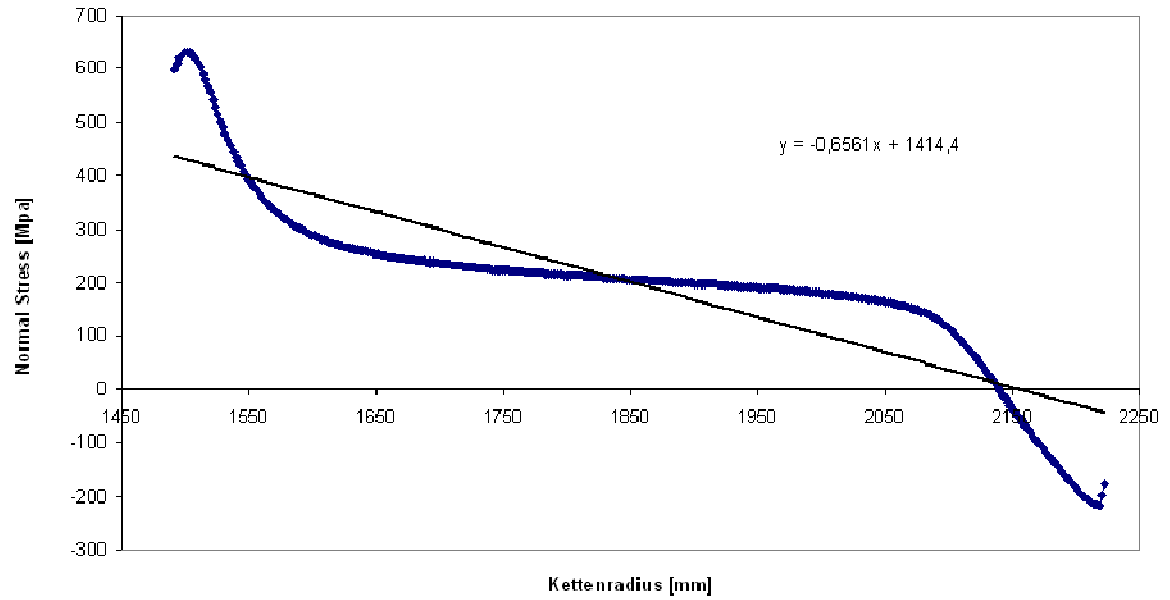


Abbildung 4-52 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 16 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ ohne EK

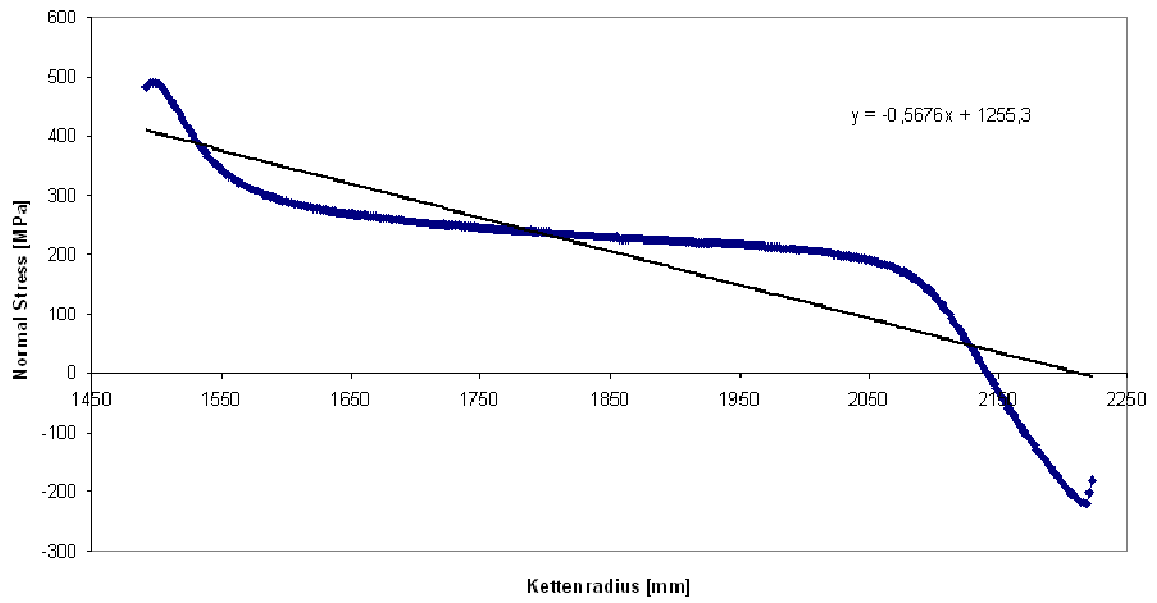


Abbildung 4-53 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 16 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ mit EK

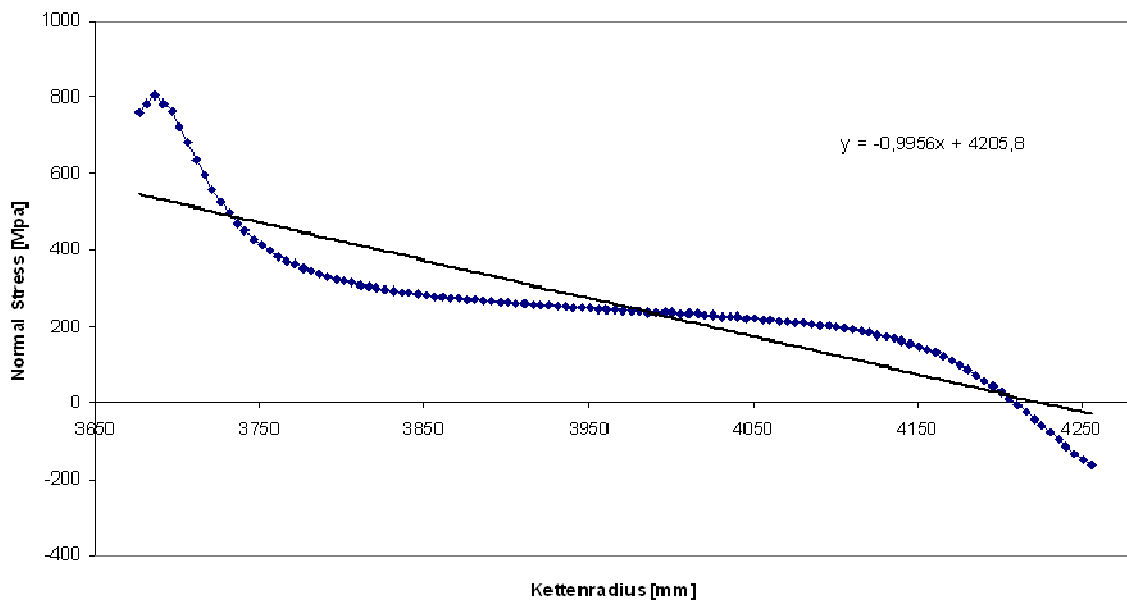


Abbildung 4-54 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 32 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ ohne EK

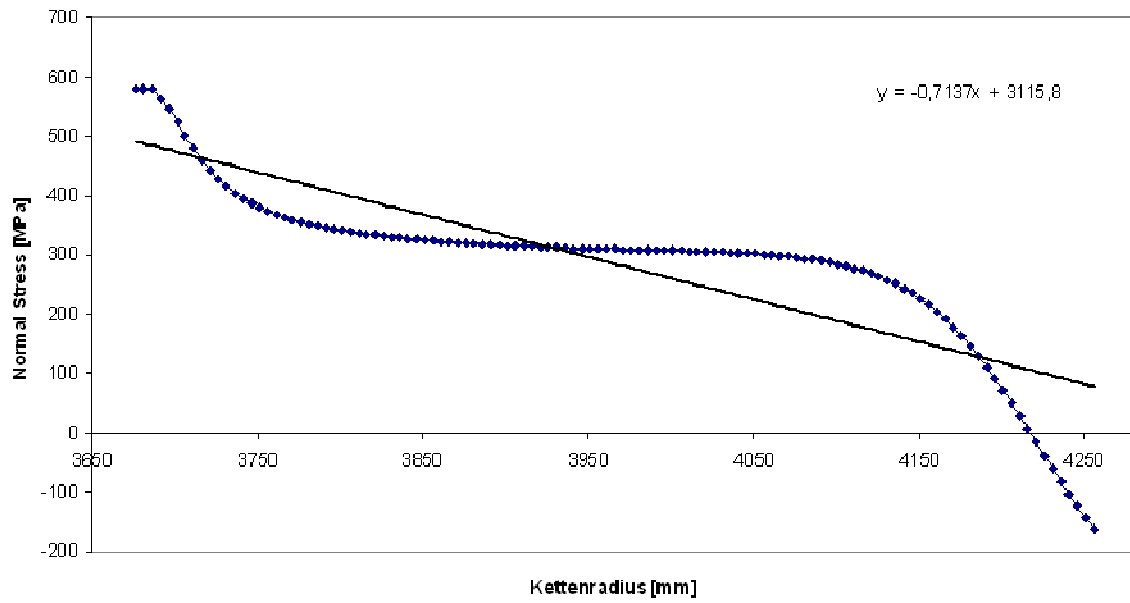


Abbildung 4-55 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 32 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ ohne EK

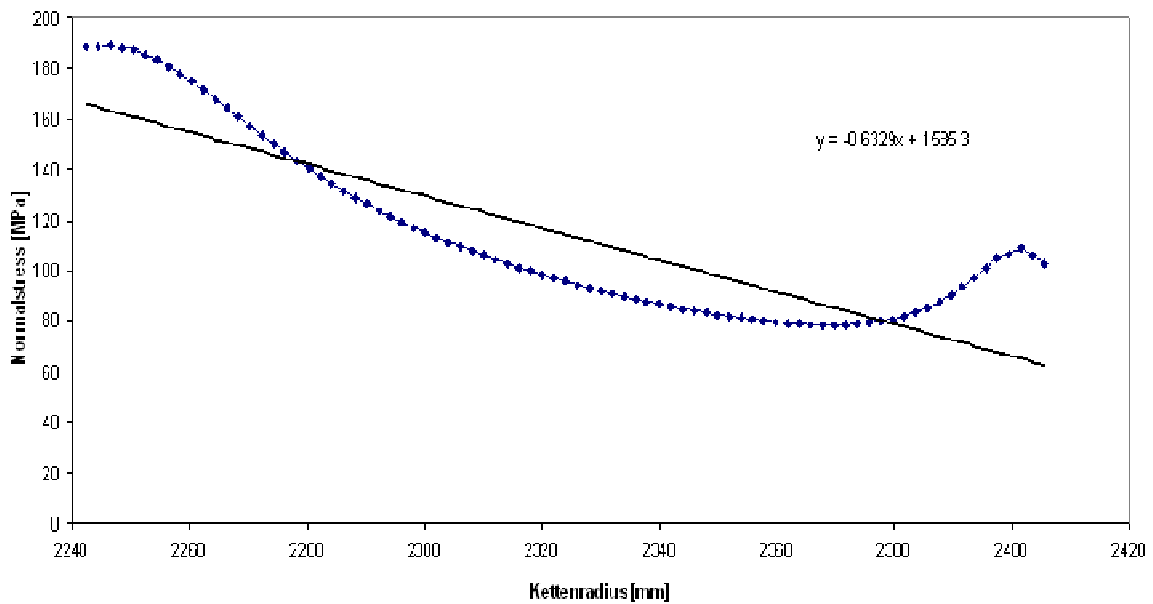


Abbildung 4-56 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 64 Pole

Normalspannungsverlauf über Kettenradius bei $\varphi=0^\circ$ ohne EK

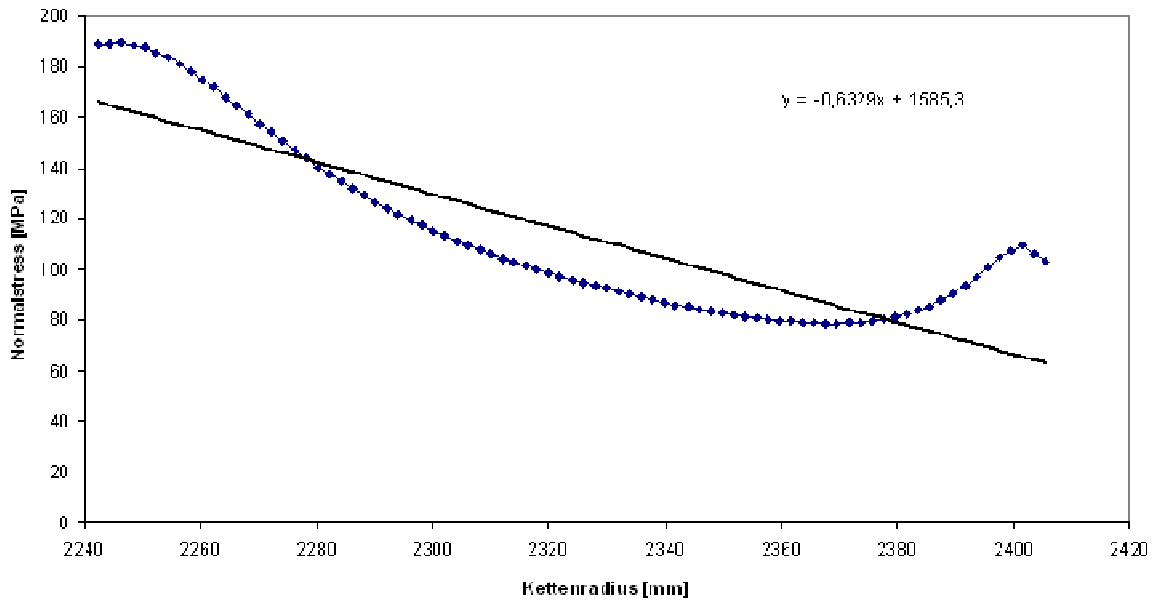


Abbildung 4-57 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 64 Pole

Anhand der gefundenen Geradengleichungen konnte die Spannung zufolge Normalkraft in der Kette sowie die Spannung zufolge Biegemoment in der Kette für diverse Polzahlen, sowohl für das Modell mit eingehängter Kette, als auch für jenes ohne eingehängter Kette (aufgeschrumpfte Kette), gemäß Formel (4.14) berechnet werden. Die berechneten Spannungswerte für 8-, 16-, 32-, 64- polige Generatoren sind in Tabelle 4-12 zusammengefaßt.

Tabelle 4-12 Spannung zufolge Normalkraft , Spannung zufolge Biegemoment

Anzahl Pole	8	16	32	64
σ_N mit EK [MPa]	217,73	196,32	257,25	109,70
σ_b mit EK [MPa]	560,72	239,84	288,23	138,25
σ_{max} mit EK [MPa]	778,45	436,15	545,48	247,95
σ_N Schrumpf [MPa]	229,70	201,38	285,27	114,44
σ_b Schrumpf [MPa]	537,93	207,34	206,62	51,58
σ_{max} Schrumpf [MPa]	767,68	408,72	491,88	166,02

In Abbildung 4-58 und Abbildung 4-59 ist der Verlauf der tangentialen Spannung zufolge Normalkraft bzw. zufolge Biegemoment in der Kette über der Anzahl der Pole aufgetragen. Da hier mit der tatsächlichen Geometrie der Kette und der realen Belastung gerechnet wurde, entsteht auch in der aufgeschrumpften Kette ein Biegemoment. Grund dafür ist, dass die Fliehkraft der Pole nicht über den gesamten Umfang gleichmäßig verteilt ist und auch die Geometrie variiert. Wie erwartet, ist die tangentiale Spannung zufolge

Normalkraft in der Kette bei eingehängter Kette niedriger als bei aufgeschumpfter Kette (siehe Abbildung 4-58). Die Biegespannung verhält sich umgekehrt. Sie ist bei eingehängter Kette höher (siehe Abbildung 4-59).

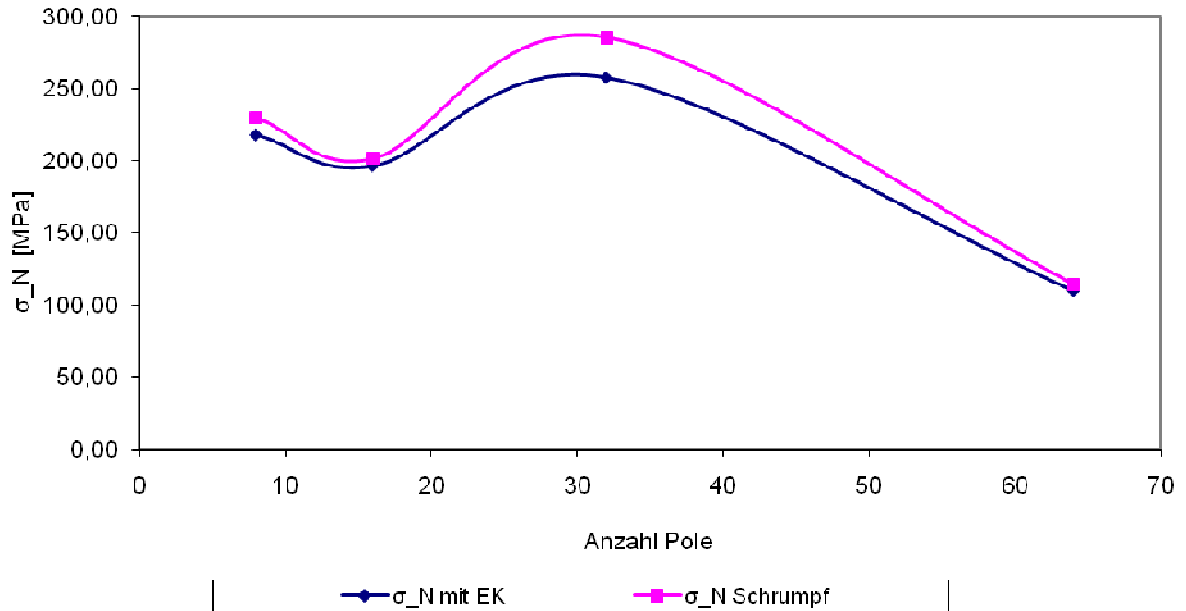


Abbildung 4-58 Spannung zufolge Normalkraft in der Kette, EK vs. Schrumpf bei verschiedenen Polzahlen

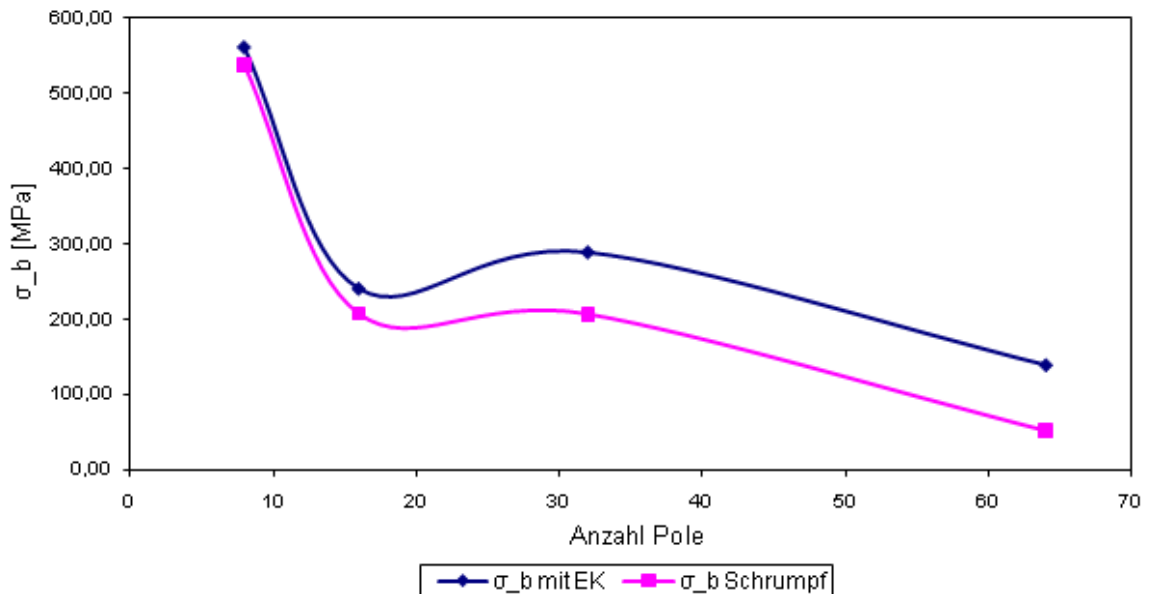


Abbildung 4-59 Spannung zufolge Biegemoment in der Kette, EK vs. Schrumpf bei verschiedenen Polzahlen

In Abbildung 4-60 ist sowohl die tangentielle Spannung in der Kette zufolge Normalkraft als auch jene zufolge Biegemoment über der Anzahl der Pole dargestellt.

Beim 8-poligen Generator ist im Vergleich zum 16-, 32-, 64-poligen Generator die Spannung zufolge Biegemoment sehr viel höher als die Spannung zufolge Normalkraft. Der Grund dafür ist, dass diese Berechnung für alle vier Modelle (8-, 16-, 32-, 64-polige) mit einer theoretischen Rippenbreite von gerechnet wurde. Während das für den 8-poligen Generator eine extrem steife Rippe bedeutet, ist das bei den drei anderen Modellen nicht der Fall. Das Verhältnis von radialer Rippensteifigkeit zu tangentialer Steifigkeit der Kette ist bei den anderen drei Generatoren (16-, 32-, 64-polig) um einiges kleiner, was in Abbildung 4-61 mit freiem Auge erkennbar und nachvollziehbar ist. Daher nimmt bei ihnen jener Belastungsanteil, welcher in die Rippe geleitet wird ab. Die Rippe hält sozusagen nicht so stark zurück, wodurch die Biegebeanspruchung niedriger ist.

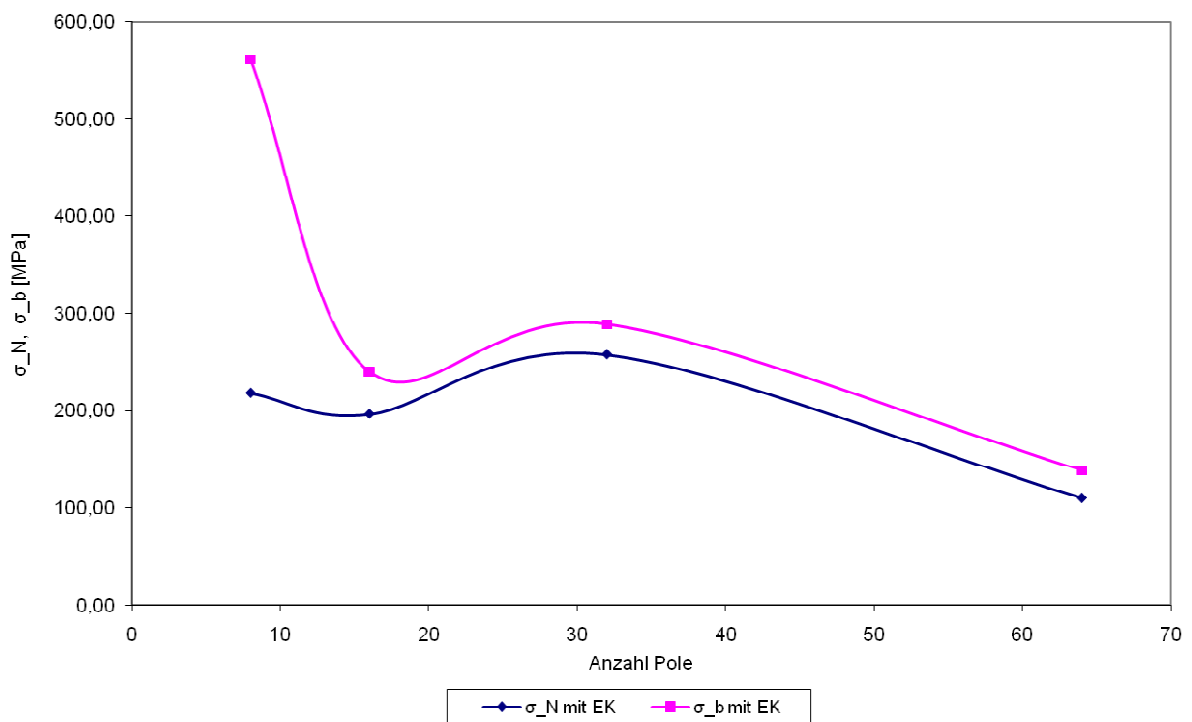


Abbildung 4-60 tangentielle Spannung zufolge Normalkraft bzw. Biegemoment in der Kette bei eingehängter Kette

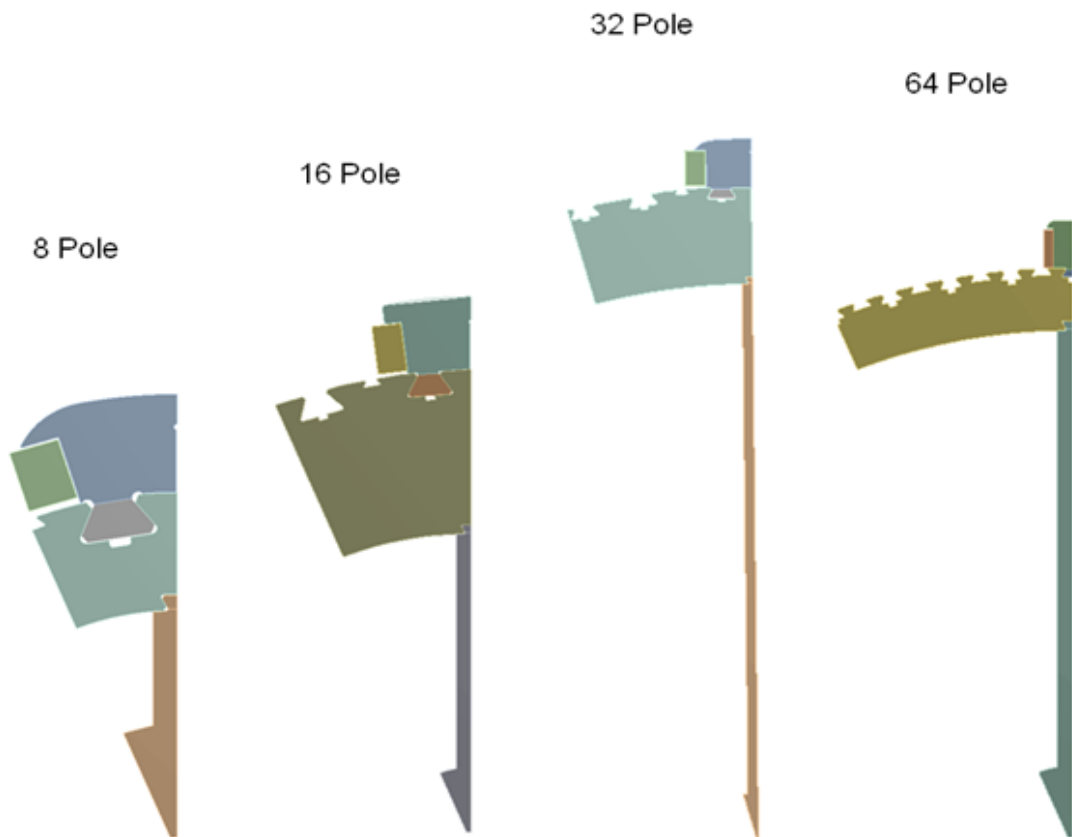


Abbildung 4-61 Symmetriemodell verschiedener Generatoren mit unterschiedlichen Polzahlen bei gleicher Rippenbreite 120 mm

4.4 Rotordynamische Auslegung am Beispiel eines 32-poligen Generators

Die rotordynamische Berechnung wurde für einen 8-, 16-, 32- und 64-poligen Generator durchgeführt. In diesem Kapitel wird die Vorgangsweise anhand der Berechnungen am 32-poligen Generator erklärt.

Die Biege- und die Torsionseigenfrequenzen, sowie die unwuchterzwungene Schwingungsberechnungen wurden mit dem Programm Wellendynamik Beta 2 berechnet. Die 2d- Modalanalyse wurde mit Ansys durchgeführt.

4.4.1 Steifigkeitsberechnung des Nabensterns

Durch das Einhängen der Kette ändert sich nur der Bereich des Nabensterns des Generators. Der restliche Wellenstrang bleibt unverändert. Daher muss für den Bereich des Nabensterns eine Ersatz-Torsionssteifigkeit sowie ein Ersatz- Flächenträgheitsmoment berechnet werden, da sämtliche Wellenabschnitte in der wellendynamischen Berechnung mit Wellendynamik Beta2 als zylindrische Wellenstücke modelliert werden. Um die hohe Steifigkeit der Kette in Umfangsrichtung abzubilden, wird im Ansys mit Hilfe eines so genannten „cp- Commands“ (Kopplungs- Command) eine konstante radiale bzw. tangentielle Knotenbewegung erzwungen. Programmintern funktioniert dies über sogenannte „Couple-

Equations“. Das führt dazu, dass alle Knoten an der Schwalbenschwanzflanke die gleiche Bewegung in der Richtung, in der gekoppelt wurde, durchführen.

Durch das Einhängen der Kette mittels Schwalbenschwänzen erhöht sich aber nicht nur wie bis dato die Steifigkeit in Umfangsrichtung sondern auch jene in radialer Richtung. Daher wird das cp- Command auf alle Knoten in den beiden Flanken sowohl in radialer als auch in tangentialer Richtung angewendet.

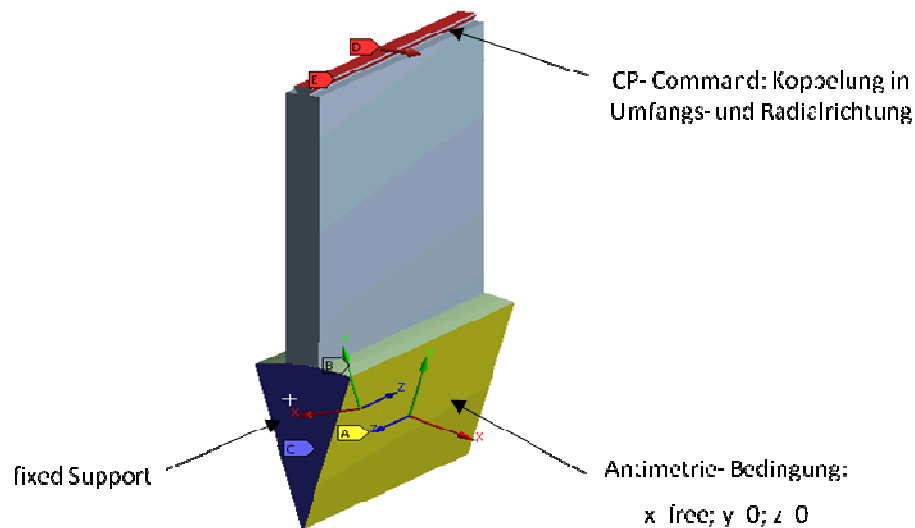


Abbildung 4-62 Antimetrie- Bedingung

Am Wellenende wird mittels fixed Support eine feste Einspannung simuliert. Hier könnte man auch die Deformation in axialer Richtung (um die Verwölbung des Wellenendes zu gewährleisten) und radialer Richtung zulassen, was aber keinen merklichen Einfluss auf die Torsionssteifigkeit hat, da hierfür hauptsächlich die Biegung in der Rippe verantwortlich ist. Zur Steifigkeitsberechnung wird eine tangential wirkende Kraft aufgegeben, die über die gesamte Länge am äußeren Radius angreift. Diese erzeugt das erforderliche Torsionsmoment.

Antimetrie Bedingung

Die Antimetrie Bedingung erlaubt die Verdrehung der Welle. Sie ist das Gegenstück zur Symmetrie. Sie ist jedoch eine sehr „harte“ Randbedingung, da Sie quasi jedem Knoten nur eine Bewegung in tangentialer Richtung erlaubt. Erwartet man große Verformungen führt sie zu relativ schlechten Ergebnissen. Man muss sich nur vorstellen - wenn man ein Handtuch zusammen dreht, wird es bei großem Verdrehwinkel kürzer und es wird im Durchmesser kleiner (Einschnürung). Diese Verkürzung und diese Einschnürung werden durch die Antimetrie- Bedingungen jedoch verhindert.

Rad Deformation

Type: Directional Deformation (X Axis)
Unit: mm
CYL16
Time: 1
16.06.2010 15:10

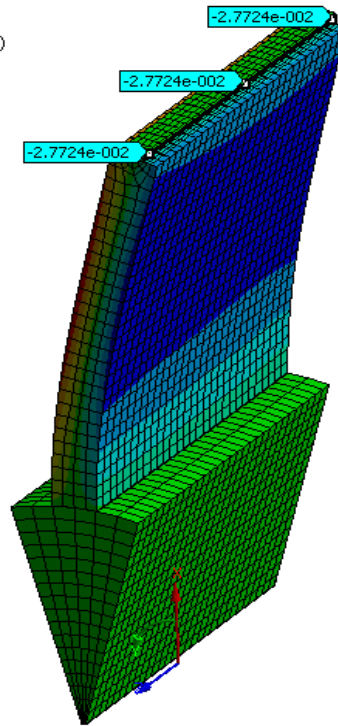
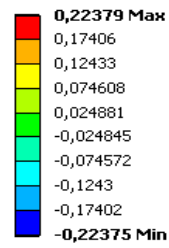


Abbildung 4-63 Konstante radiale Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke

Tang Deformation

Type: Directional Deformation (Y Axis)
Unit: mm
CYL16
Time: 1
15.06.2010 13:39

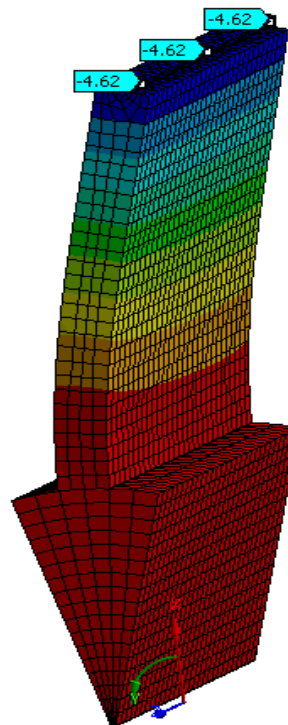
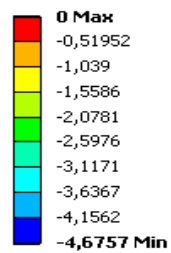


Abbildung 4-64 Konstante tangentielle Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke

Berechnung des Torsionsdurchmessers

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{n \times F \times r}{\frac{u}{r}} \quad (4.13)$$

$$c = \frac{G \times I_p}{l} \quad l = \frac{L}{2}$$

$$I_p = \frac{d_t^4 \times \pi}{32}$$

$$d_t = \sqrt[4]{\frac{32 \times c \times \frac{L}{2}}{G \times \pi}}$$

Tabelle 4-13 Berechnung des Torsionsdurchmessers

Rippenbreite in mm	255
Anzahl Rippen	12
Kraft [N]	1000000
Wirkradius [mm]	3695
Umfangsverschiebung aus ANSYS [mm]	4,62
Nabensternlänge [mm]	2290
Steifigkeit [Nmm]	3,54624E+13
Torsionsdurchmesser [mm]	1510,259773

In Tabelle 4-13 findet man den berechneten Torsionsdurchmesser für einen Rotor mit Rippenbreite 255mm, der nun in das Programm Wellendynamik Beta 2 eingegeben werden kann.

Zusätzlicher Biegesteifigkeitsanteil der Kette

Die Kette hat durch das Einhängen über die gesamte Nabensternlänge Kontakt mit der Rippenwelle was zusätzlich einen positiven Einfluss auf die Biegesteifigkeit hat. Bis dato wurde kein zusätzlicher Biegesteifigkeitsanteil der Kette berücksichtigt, da bei Durchgangsdrehzahl die Kette abgehoben ist und daher nichts mehr zur Biegesteifigkeit beiträgt. Die Kette besteht aus geschichteten Blechen, welche verspannt werden. Bei Biegebeanspruchung tritt jedoch ein Rutschen zwischen den Blechen in

Radialrichtung und im schlimmsten Fall auch ein Klaffen in axialer Richtung ein. Dieser Effekt wird bei der Berechnung der Biegeeigenfrequenz berücksichtigt, indem das errechnete Flächenträgheitsmoment verringert wird. Dazu wird ein Ersatz-Elastizitätsmodul gebildet, welches die Steifigkeit in axialer Richtung abbildet. Diese Reduzierung des Elastizitätsmoduls von 210.000 MPa auf 10.000 MPa im Bereich der geschichteten Bleche ist ein Erfahrungswert, mit welchem seit mehreren Jahren erfolgreich gerechnet wird und welcher auch durch zahlreiche Versuche bestätigt wurde. Das axiale Flächenträgheitsmoment wird im gleichen Verhältnis verringert wie sich der E-Modul verringert.

$$\frac{E}{E_{\text{ersatz}}} = \frac{I}{I_{\text{ersatz}}} \quad (4.14)$$

4.4.2 Torsionseigenfrequenzen

In das Wellendynamik Programm wird nun die Länge des Wellenabschnittes, der aus der Torsionssteifigkeit ermittelte Torsionsdurchmesser sowie das berechnete Flächenträgheitsmoment, für welches sich das Programm dann einen Ersatz- Außendurchmesser errechnet, eingegeben (Abbildung 4-65). Weiters muss noch der Elastizitätsmodul und der Schubmodul als Werkstoffkenngroße eingegeben werden. Aus dem Flächenträgheitsmoment berechnet sich das Programm automatisch einen Wellendurchmesser der diesem entspricht und verwendet ihn für die Berechnung der Biegekritischen Drehzahl. Für die Berechnung der torsionskritischen Drehzahl zieht das Programm den Torsionsdurchmesser heran.

Da der Nabensternbereich aus verschiedenen Werkstoffen besteht und eine relativ komplizierte Geometrie besitzt, wird die Dichte dieses Wellenabschnittes auf Null gesetzt und die analytisch berechnete Massenträgheit vereinfacht punktförmig in der Generatormitte angebracht.

Länge	<input type="text" value="1.122,50"/>	mm	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">Zusätzliche Massen</p> <hr/> <p style="text-align: center;">Zusätzliche Massenträgheitsmomente</p> <hr/> <p style="text-align: center;">Zusätzliche Wassermassen</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Magnetischer Zug</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Biegemoment</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Kräfte</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Lager</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Unwucht</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px;">Kontrolle</div> </div> <p><input type="checkbox"/> mit Wassermassen rechnen</p> </div>	
Durchmesser aussen	<input type="text" value="5.052,95"/>	mm		
Durchmesser innen	<input type="text"/>	mm		
Flächenträgheitsmoment	<input type="text" value="3,200E13"/>	mm ⁴		
Torsionsdurchmesser	<input type="text" value="1.622,30"/>	mm		
Dichte	<input type="text" value="0,00"/>	kg/m ³		
E-Modul	<input type="text" value="206.000,00"/>	N/mm ²		
Schubmodul	<input type="text" value="79.400,00"/>	N/mm ²		
<input type="button" value="einfügen (rechts)"/> <input type="button" value="OK [F12]"/>				

Abbildung 4-65 Wellendynamik Beta2- Eingabemaske

Berechnung des polaren Massenträgheitsmomentes des Nabensterns (Rippenwelle)

Der Nabenstern besteht aus den Polen, der Kette und der Rippenwelle, deren Massen bekannt sind. Das Massenträgheitsmoment der Rippenwelle und der Kette kann aufgrund vorhandener 3D- Modelle computergestützt berechnet werden. Das Massenträgheitsmoment der Pole wird händisch berechnet. Dafür benötigt man den Schwerpunktsradius der Pole und deren Masse.

$$m_{pole} = 187.008 \text{ kg}$$

$$\text{Schwerpunktsradius } r = 4.412 \text{ mm}$$

$$\theta_{pole} = m r^2 = 187.008 \times 4,412^2 = 3.640.250 \text{ kgm}^2 \quad (4.15)$$

$$\theta_{Rippenwelle} + \theta_{Kette} = 3.650.734 \text{ kgm}^2$$

$$\theta_{gesamt} = \theta_{Pole} + \theta_{Rippenwelle} + \theta_{Kette} = 7.290.984 \text{ kgm}^2 \quad (4.16)$$

Berechnung des axialen Flächenträgheitsmomentes des Nabensterns (Rippenwelle)

Das Flächenträgheitsmoment der Rippenwelle und der Kette wird aufgrund vorhandener 3D- Modelle computergestützt berechnet:

$$I_{Rippenwelle} = 2,667 \times 10^{13} \text{ mm}^4$$

$$I_{Kette} = 1,139 \times 10^{14} \text{ mm}^4$$

Da die Kette aus geschichteten Blechen besteht, welche verspannt werden, tritt wie schon erwähnt ein Rutschen zwischen den geschichteten Blechen in Radialrichtung und im schlimmsten Fall auch ein Klaffen in axialer Richtung auf. Dieser Effekt wird bei der Berechnung der Biegeeigenfrequenz berücksichtigt, indem das errechnete Flächenträgheitsmoment gemäß Formel (4.14) verringert wird. Dazu wird ein Ersatz-Elastizitätsmodul gebildet, welcher die Steifigkeit in axialer Richtung abbildet. Das axiale Flächenträgheitsmoment wird im gleichen Verhältnis verringert, wie sich der E-Modul verringert.

$$\frac{E}{E_{ersatz}} = \frac{I_{Kette}}{I_{Kette_ersatz}} \rightarrow I_{Kette_ersatz} = 1,139 \times 10^{14} \times \frac{10.000}{210.000} = 5,42 \times 10^{12} \text{ mm}^4$$

Bei rotationssymmetrischen Elementen ist das axiale Flächenträgheitsmoment halb so groß wie das polare Flächenträgheitsmoment da $I_p = I_x + I_y$ und $I_x = I_y$ (nur bei Rotationssymmetrie)

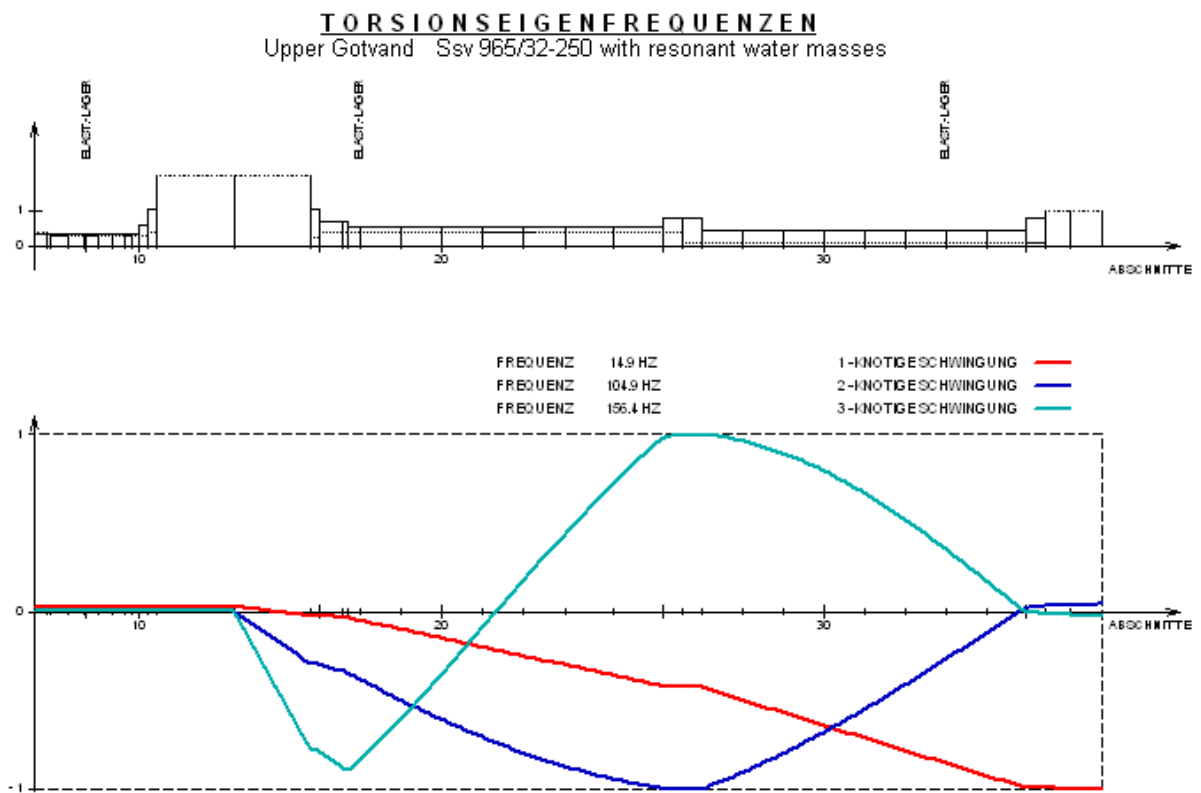


Abbildung 4-66 Torsionseigenfrequenz bei Rippenbreite 255mm

Erregerfrequenzen

Tabelle 4-14 zeigt eine Übersicht der biege- und torsionsrelevanten Erregerfrequenzen.

Tabelle 4-14 Erregerfrequenzen

Höchste biegerelevante Erregerfrequenz	360 U/min	Durchgangsdrehzahl
Torsionsrelevante Erregerfrequenz	6 Hz	Lastabwurfsdrehzahl
	50 Hz	Netzfrequenz
	100 Hz	doppelte Netzfrequenz

Erklärung zur Anregung durch die doppelte Netzfrequenz

Betrieibt man den Generator bei Schiefkast, so kommt es zu einem Magnetfeld, welches mit 50 Hz in entgegengesetzter Drehrichtung zum 50 Hz Erregerfeld rotiert. In Summe ergibt das ein zusätzliches 100 Hz Erregerfeld. Man spricht von Schiefkast, wenn die 3 Phasen unterschiedlich stark belastet werden. Da die 2. torsionskritische Drehzahl mit 104 Hz zu nahe an der doppelten Netzfrequenz liegt (in diesem Fall wird ein Mindestabstand zur doppelten Netzfrequenz von mindestens 5% gefordert), mit welcher bei Schiefkast angeregt wird, werden die Rippen von 255mm auf 295mm vergrößert. Dazu muss erneut mit Ansys eine Umfangverschiebung berechnet werden.

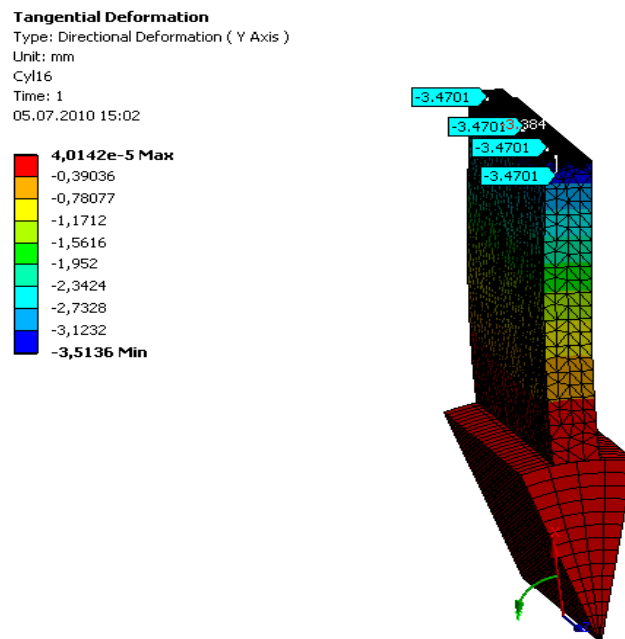


Abbildung 4-67 Konstante tangentielle Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke

Tabelle 4-15 Berechnung des Torsionsdurchmessers

Rippenbreite in mm	295
Anzahl Rippen	12
Kraft [N]	1000000
Wirkradius [mm]	3695
Umfangsverschiebung aus ANSYS [mm]	3,47
Nabensternlänge [mm]	2290
Steifigkeit [Nmm]	4,72151E+13
Torsionsdurchmesser [mm]	1622,29

In Tabelle 4-15 findet man den berechneten Torsionsdurchmesser für einen Rotor mit Rippenbreite 295mm . Durch die Erhöhung der Rippenbreite und damit der Rippensteifigkeit, verringert sich die Tangentiale Deformation von $4,62\text{ mm}$ auf $3,47\text{ mm}$ bei einer tangential aufgebrachten Last von 1.000 kN pro Rippe. Der Torsionsdurchmesser erhöht sich von 1510 mm auf 1622 mm und die zweite torsionskritische Frequenz erhöht sich von 104 Hz auf 109 Hz . Damit ist der Sicherheitsabstand zur doppelten Netzfrequenz ausreichend.

TORSIONSEIGENFREQUENZEN

Upper Gotvand Ssv 965/32-250 with resonant water masses

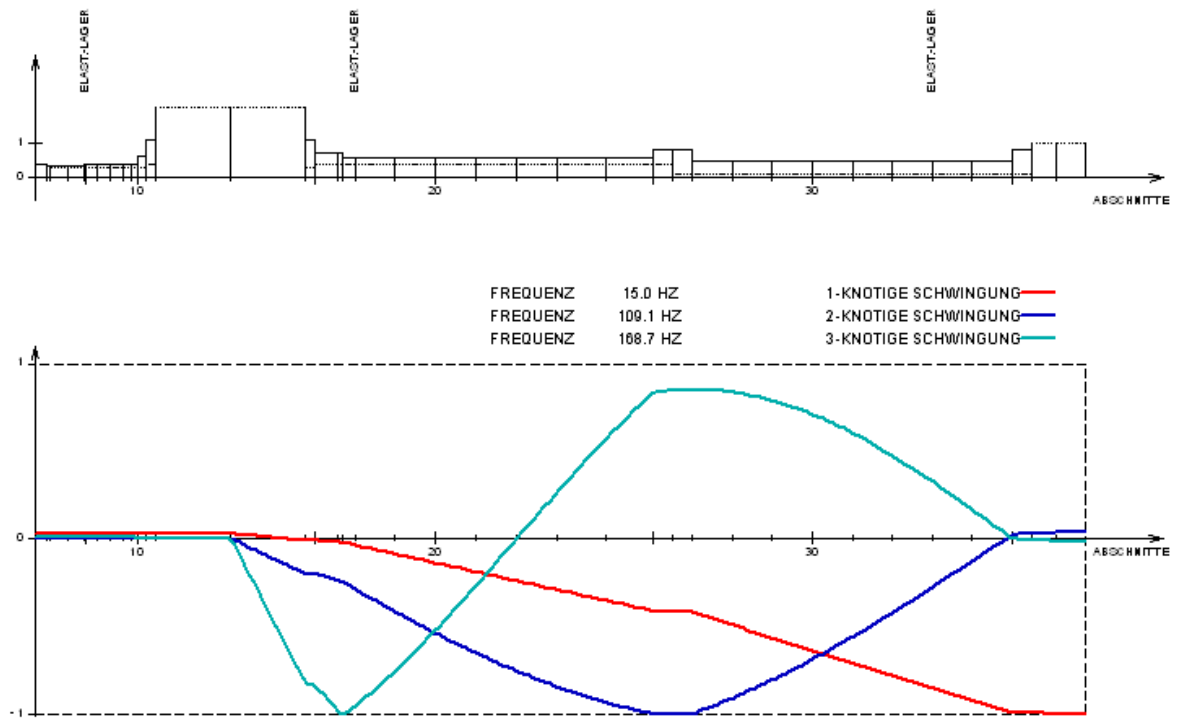


Abbildung 4-68 Torsionseigenfrequenz bei Rippenbreite 295mm

TORSIONSEIGENFREQUENZEN

Upper Gotvand Ssv 965/32-250 with resonant water masses

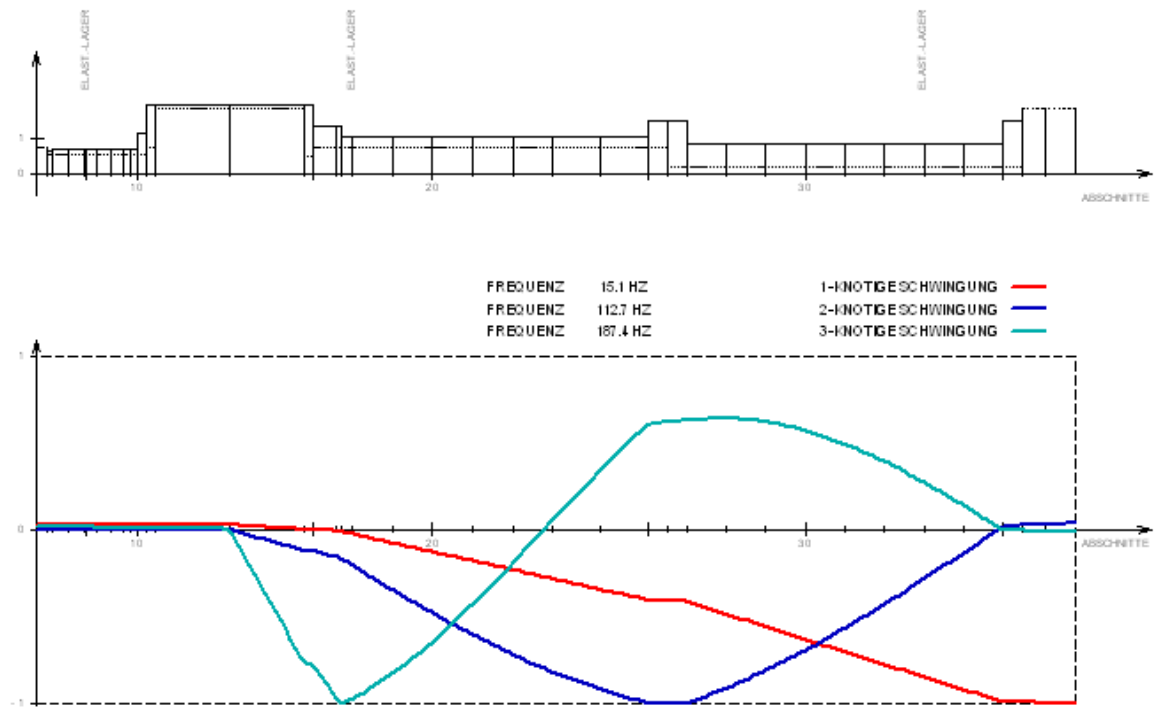


Abbildung 4-69 Torsionseigenfrequenz bei aufgeschumpfter Kette

Aus konstruktiven Gründen ist der Nabensternbereich bei aufgeschumpfter Kette etwas länger und die Rippen etwas kürzer was in Summe eine kleine Abweichung bei den Torsionseigenfrequenzen ergibt.

4.4.3 Biegekritische Drehzahl

Die Tabelle 4-16 zeigt die biege- und torsionskritischen Drehzahlen bzw. Frequenzen der originalen Maschine im Vergleich zur Maschine mit eingehängter Kette. Die erste biegekritische Drehzahl erhöht sich von 441 Hz auf 505 Hz. Grund dafür ist die steifere Struktur im Bereich des Nabensterns.

Da der Nabensternbereich sehr biegesteif ist, hat die Verbreiterung der Rippe von 255 mm auf 295 mm jedoch keine nennenswerte Auswirkung auf die biegekritischen Drehzahlen. Die zweite torsionskritische Drehzahl wird wie gewünscht von 104,9 Hz auf 109,1 Hz erhöht. Damit konnte der Sicherheitsabstand auf die 100 Hz Anregung vergrößert werden (Erklärung zur Anregung mit doppelter Netzfrequenz im Kapitel 4.4.2).

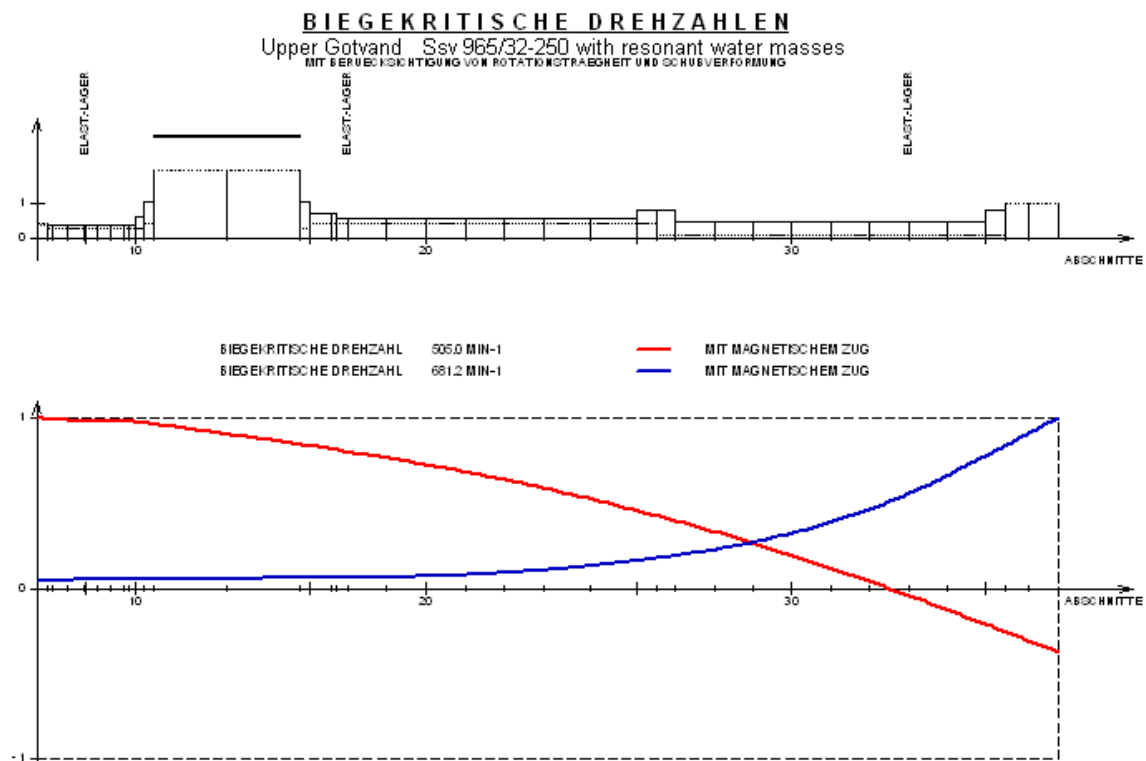


Abbildung 4-70 Biegekritische Drehzahlen mit eingehängter Kette

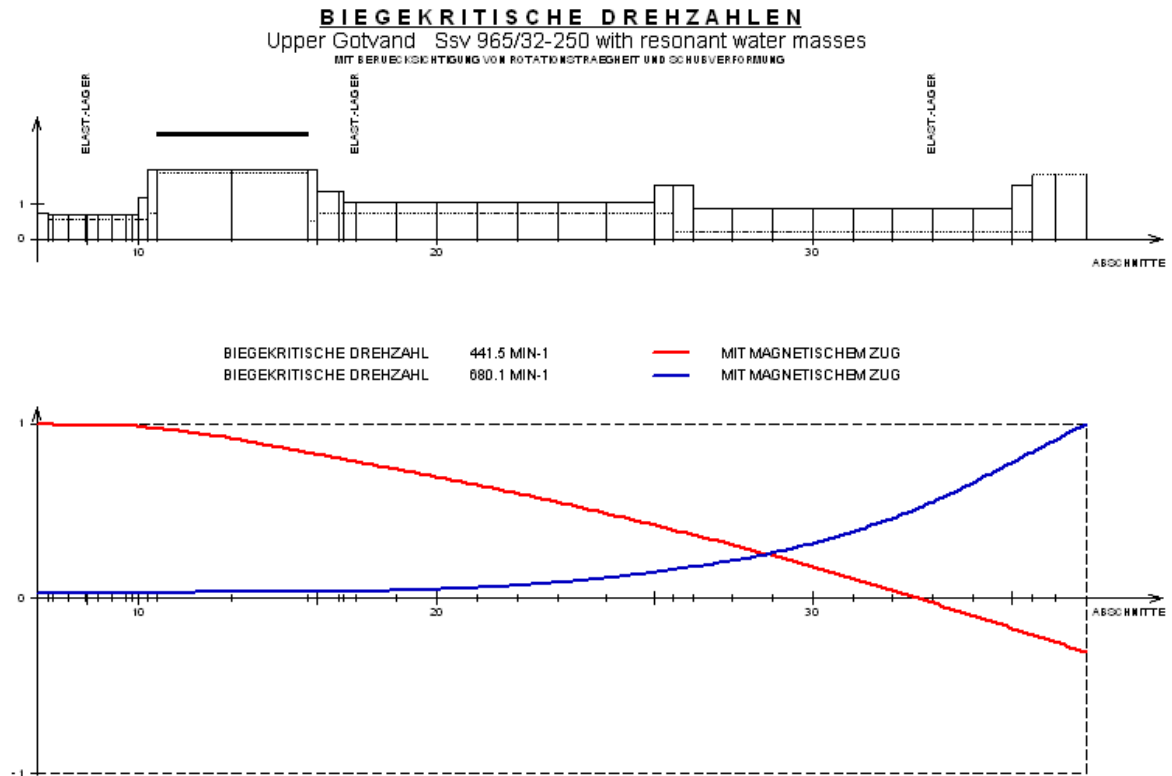


Abbildung 4-71 Biegekritische Drehzahlen mit aufgeschumpfter Kette

Tabelle 4-16 Zusammenfassung der kritischen Drehzahlen

	original Maschine	eingehängte Kette mit Rippendicke 255mm	eingehängte Kette mit Rippendicke 295mm
1. Biegekritische Drehzahl [U/min]	441,5	505,0	505,0
2. Biegekritische Drehzahl [U/min]	680,1	681,2	681,2
1. Torsionskritische Drehzahl [Hz]	15,1	14,9	15,0
2. Torsionskritische Drehzahl [Hz]	112,7	104,9	109,1

4.4.4 Unwuchterzwungene Schwingung

Um die zuvor errechneten Biegeeigenfrequenzen zu überprüfen, wurde mit dem Programm Wellendynamik in beliebigen Drehzahlsprüngen die Biegelinie bzw. Querkraft- und Momentverlauf berechnet (siehe Abbildung 4-73 - hier z.B. bei 470 U/min). Berücksichtigt wird neben der Schubverformung und Rotationsträgheit auch die Kreiselwirkung und der magnetische Zug. Die Berechnung erfolgt mit dem Übertragungsmatrizenverfahren. Die Unwucht wird vereinfacht punktförmig in der Generatormitte aufgegeben (siehe Abbildung 3-1)

Zulässige Restunwuchten

Restunwuchten innerhalb gewisser Grenzen sind vielfach durch Vorschriften festgelegt. Z.B. die Normen DIN ISO 1940-1, DIN ISO 11 342, ISO 19 499 oder OENORM S9032. Zur Kennzeichnung des Wuchtzustandes wird eine von der Masse des Wuchtkörpers unabhängige Größe benötigt. Man definiert dafür die so genannte Exzentrizität e .

$$e = \frac{U}{m} \quad (4.17)$$

Dabei ist U die Gesamtunwucht und m die Gesamtmasse des Rotors. An tief abgestimmten, also wegmessenden Auswuchtmaschinen wird e direkt durch die Auswuchtmaschine angegeben. Als Beurteilungsmaßstab gilt das Produkt $e\Omega$. Tabelle 4-17 zeigt eine detailliertere Aufstellung der oberen Tabelle.

Ausgehend von einer gewissen Auswucht Gütestufe G (Tabelle 4-17) kann die zulässige Restunwucht U_{zul} mit der folgenden Gleichung ermittelt werden:

$$U_{zul} = 1000 \times \frac{(e_{zul} \times \Omega)m}{\Omega} \quad (4.18)$$

Dabei ist: U_{zul}Zahlenwert der zulässigen Restunwucht in $g\ mm$

$G = e_{zul} \times \Omega$Zahlenwert der gewählten Auswuchtgütestufe in $\frac{mm}{s}$

mZahlenwert der Rotormasse in kg

ΩZahlenwert der Winkelgeschwindigkeit in $\frac{rad}{s}$

Für den 32- poligen Generator mit der für Generatoren üblichen Auswuchtgütestufe G4 errechnet sich die zulässige Restunwucht nach ISO 1940 wie folgt:

$$e_{zul} \times \Omega = 4 \frac{mm}{s}$$

$$m = 59.500kg$$

$$\Omega = 49,2 \frac{rad}{s}$$

$$U_{zul} = 4.837kgmm$$

Das heißt die Unwucht der Rotormasse entspricht der Unwucht einer Masse mit 4.837 kg welche mit einer Unwucht von 1 mm umläuft.

Die zulässige Exzentrizität ist unabhängig von der Rotormasse und errechnet sich wie folgt:

$$e_{zul} = \frac{G}{\Omega} = \frac{4}{49,2} = 0,08 \text{ mm}$$

Tabelle 4-17 Restunwuchten nach DIN ISO 1940

Auswucht-Gütestufe	Produkt der Beziehung ($e_{zul} \cdot \omega$) ^{1), 2)} mm/s	Rotortypen — Allgemeine Beispiele
G 4000	4000	Kurbeltriebe ³⁾ starr aufgestellter langsamlaufender Schiffsdieselmotoren mit ungerader Zylinderzahl ⁴⁾
G 1600	1600	Kurbeltriebe starr aufgestellter Zweitakt-Großmotoren
G 630	630	Kurbeltriebe starr aufgestellter Viertakt-Großmotoren Kurbeltriebe elastisch aufgestellter Schiffsdieselmotoren
G 250	250	Kurbeltriebe starr aufgestellter schnelllaufender 4-Zylinder-Dieselmotoren ⁴⁾
G 100	100	Kurbeltriebe schnelllaufender Dieselmotoren mit sechs und mehr Zylindern ⁴⁾ , komplette (Otto- oder Diesel-)PKW-, LKW-, Lok-Motoren ⁵⁾
G 40	40	Autoräder, Felgen, Radsätze, Gelenkwellen Kurbeltriebe elastisch aufgestellter schnelllaufender Viertaktmotoren (Otto oder Diesel) mit sechs und mehr Zylindern ⁴⁾ Kurbeltriebe von PKW-, LKW-, Lok-Motoren
G 16	16	Antriebswellen (Propellerwellen, Kardanwellen) mit besonderen Anforderungen Teile von Zerkleinerungs- und Landwirtschafts-Maschinen Einzelteile von PKW-, LKW-, Lok-Motoren (Otto oder Diesel) Kurbeltriebe von Motoren mit sechs und mehr Zylindern mit besonderen Anforderungen
G 6,3	6,3	Teile der Verfahrenstechnik; Zentrifugentrommeln Getriebe für Hauptturbine in Handelsschiffen Ventilatoren, Schwungräder, Kreiselpumpen Maschinenbau- und Werkzeugmaschinen-Teile Walzen von Papier- und Druckmaschinen Läufer von Strahltriebwerken Motoren-Einzelteile mit besonderen Anforderungen, mittlere und große Elektromotoren-Anker (von Elektromotoren mit mindestens 80 mm Wellenhöhe) ohne besondere Anforderungen Kleinmotoren-Anker, meist in Serientfertigung, bei schwingungsunempfindlichen Anwendungen und/oder bei schwingungsisolierter Aufstellung
G 2,5	2,5	Gas- und Dampfturbinen einschließlich Hauptturbinen in Handelsschiffen Turbogebälse, starre Turbogeneratorläufer; Werkzeugmaschinen-Antriebe, mittlere und größere Elektromotoren-Anker mit besonderen Anforderungen Pumpen mit Turbinenantrieb Computer-Speicher-Trommeln und -Platten Kleinmotoren-Anker, für die eine oder beide Voraussetzungen der Gütestufe G 6,3 nicht zutreffen
G 1	1	Magnetophon- und Phono-Antriebe Schleifmaschinen-Antriebe; Kleinmotoren-Anker mit besonderen Anforderungen
G 0,4	0,4	Feinstschleifmaschinen-Anker, -Wellen und -Scheiben; Kreisel

¹⁾ $\omega = \pi \cdot 2\pi / 60 \approx \pi / 10$ mit ω in rad/s und π in 1/min
²⁾ Hinsichtlich der Verteilung der zulässigen Restunwucht auf die Ausgleichsebenen siehe Abschnitt 7
³⁾ Unter Kurbeltrieb sei die Baugruppe: Kurbelwelle, Schwungrad, Kupplung, Riemenscheibe, Schwingungsdämpfer, rotierender Pleuelanteil usw. verstanden (siehe Abschnitt 3.5).
⁴⁾ In diesem Teil von ISO 1940 werden unter langsamen Dieselmotoren solche verstanden, in denen die Kolbengeschwindigkeit weniger als 9 m/s beträgt; schnelllaufende Dieselmotoren sind solche mit einer Kolbengeschwindigkeit über 9 m/s.
⁵⁾ Bei kompletten Motoren ist unter der Rotormasse die Summe der Massen der zum Kurbeltrieb gehörenden Teile zu verstehen (siehe Fußnote 3).

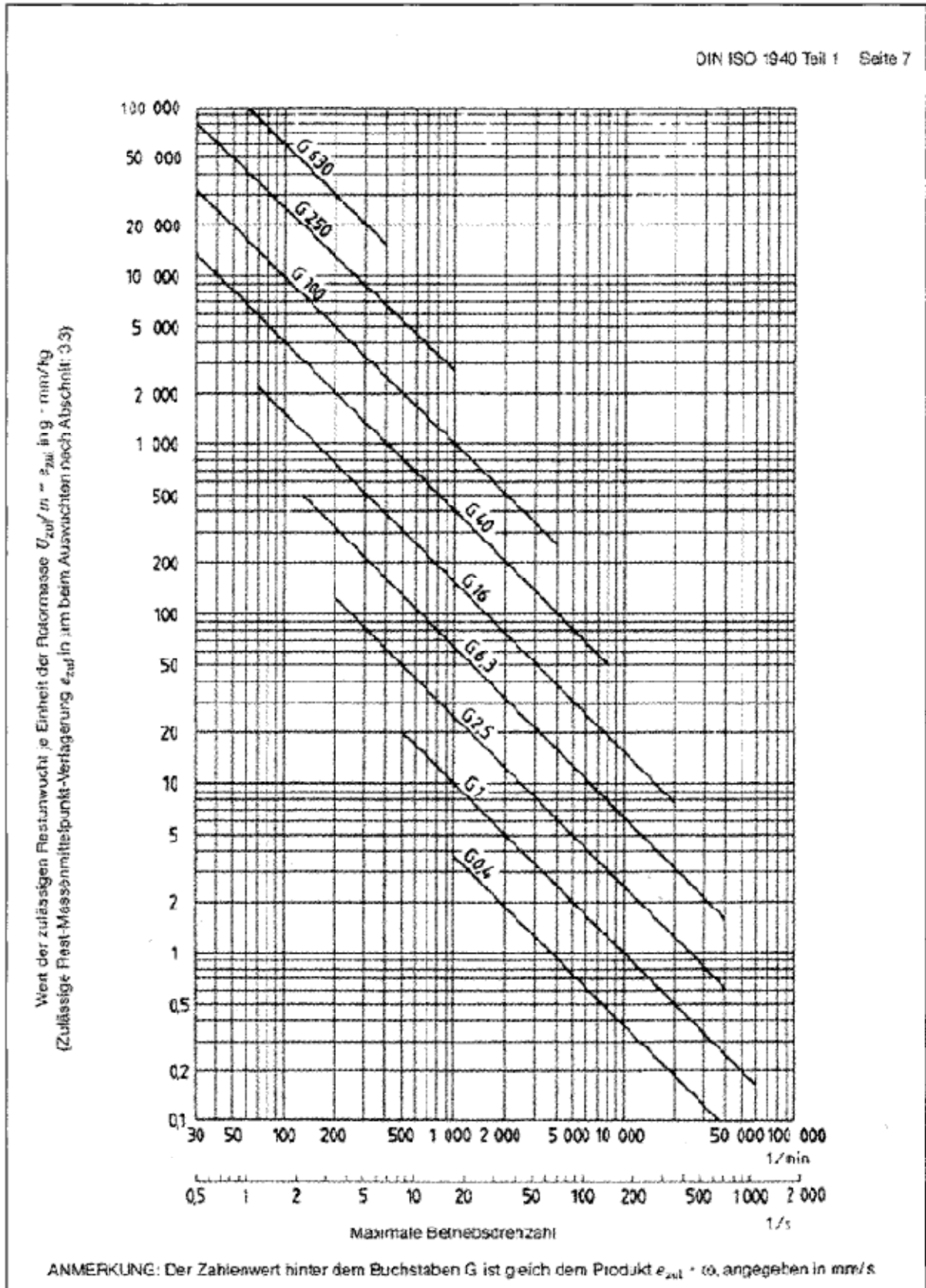


Abbildung 4-72 Zulässige bezogene Restunwucht in Abhängigkeit von der maximalen Betriebsdrehzahl für verschiedene Gütestufen G (DIN ISO 1940)

Die Biegelinie bzw. der Querkraft- und Momentenverlauf wird nun mit der zulässigen Unwucht mit dem Übertragungsmatrizenverfahren numerisch berechnet.

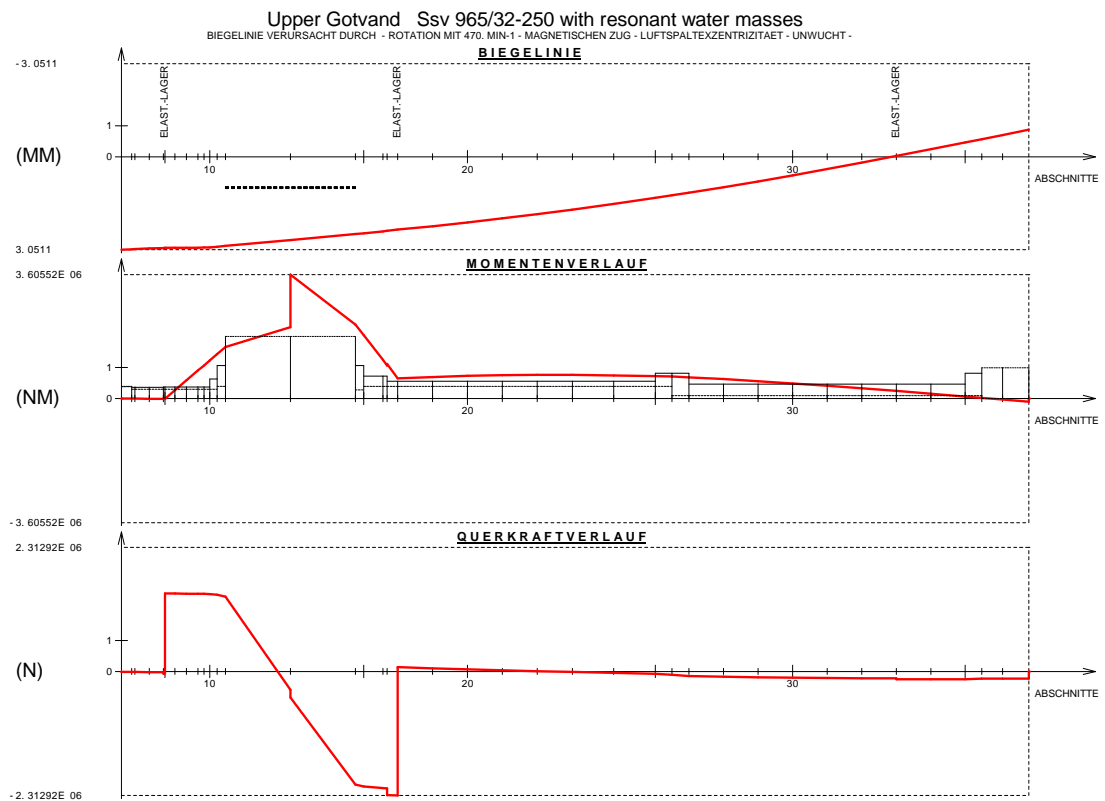


Abbildung 4-73 Biegelinie, Querkraftverlauf, Momentverlauf

Die größten Ausschläge der Biegelinie findet man am linken (Generatorseitig) bzw. am rechten (Turbinenseitig) Wellenrand. Der Momentensprung in der Mitte des Generators ist wie folgt zu erklären: Da die Dichte im Rippenwellenbereich auf den Wert Null gesetzt wurde, wurde die gesamte Massenträgheit in die Mitte des Generators gelegt. Diese Massenträgheit verursacht aufgrund der Rotationsenergie und der Kreiselmomente einen Momentensprung in der Mitte des Generators. Tabelle 4-18 beinhaltet die Werte der Durchbiegung der Welle in Abhängigkeit der Drehfrequenz.

Drehzahl U/min	Frequenz [Hz]	Durchbiegung am linken Wellenrand [mm]	Betrag der Durchbiegung am linken Wellenrand [mm]	Durchbiegung am rechten Wellenrand [mm]	Betrag der Durchbiegung am rechten Wellenrand [mm]
400	6,67	1,04	1,04	-0,21	0,21
470	7,83	3,05	3,05	-0,88	0,88
500	8,33	21,32	21,32	-7,59	7,59
502	8,37	35,66	35,66	-12,88	12,88
503	8,38	53,74	53,74	-19,56	19,56
504,9	8,42	1482,00	1482,00	-547,68	547,68
505	8,42	3708,78	3708,78	1371,63	1371,63
505,1	8,42	-823,75	823,75	304,87	304,87
506	8,43	-102,93	102,93	38,37	38,37
507	8,45	-52,18	52,18	19,60	19,60
508	8,47	-34,94	34,94	13,23	13,23
509	8,48	-26,26	26,26	10,03	10,03
510	8,50	-21,03	21,03	8,10	8,10
530	8,83	-4,20	4,20	1,93	1,93
560	9,33	-1,89	1,89	1,18	1,18
600	10,00	-1,08	1,08	1,15	1,15
630	10,50	-0,79	0,79	1,53	1,53
678	11,30	0,37	0,37	20,68	20,68
679	11,32	0,82	0,82	29,94	29,94
680	11,33	1,99	1,99	54,42	54,42
681,1	11,35	26,62	26,62	565,78	565,78
681,2	11,35	189,70	189,70	3953,03	3953,03
681,3	11,36	-38,78	38,78	-792,84	792,84
682	11,37	-4,66	4,66	-84,16	84,16
683	11,38	-2,38	2,38	-36,88	36,88
684	11,40	-1,74	1,74	-23,58	23,58
700	11,67	-0,72	0,72	-3,38	3,38

1. Biegekritische Drehzahl

2. Biegekritische Drehzahl

Tabelle 4-18 Durchbiegung der Welle in Abhängigkeit der Drehzahl

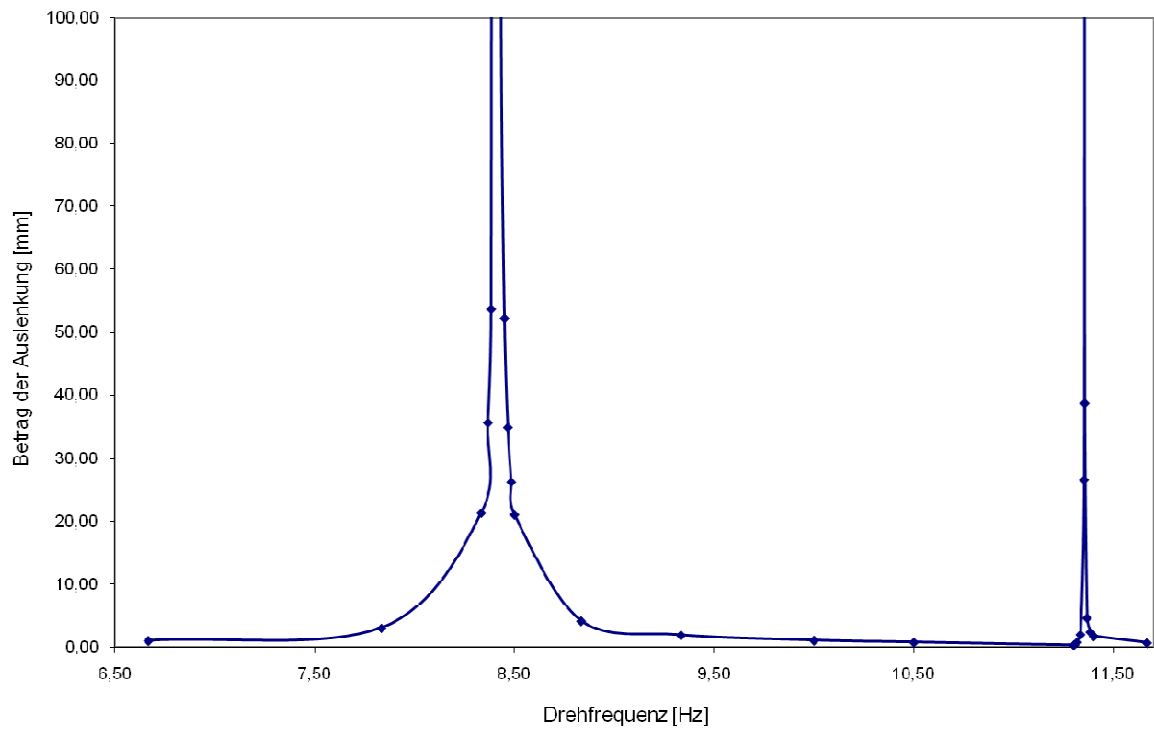


Abbildung 4-74 Unwuchterzwungene Auslenkung am generatorseitigen Rotorende

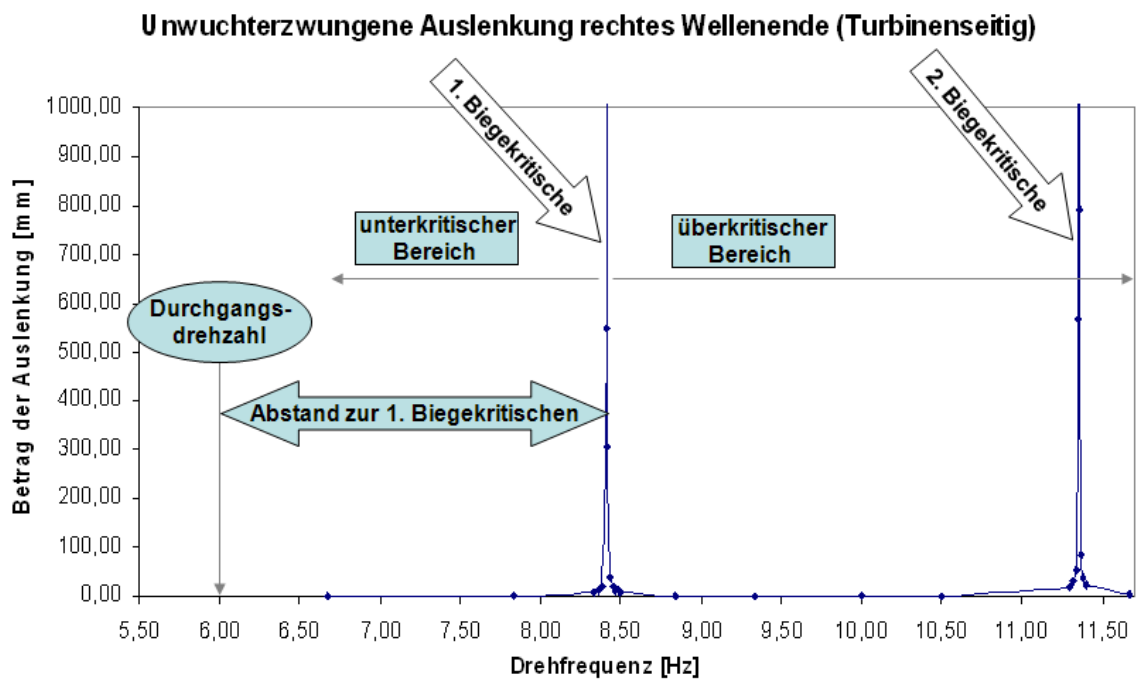


Abbildung 4-75 Unwuchterzwungene Auslenkung am turbinenseitigen Rotorende

Abbildung 4-74 und Abbildung 4-75 stellen die Amplituden der Biegelinie am turbinen- und generatorseitigen Rotorende dar. In diesen Diagrammen sind zwei markante Ausschläge (Peaks) zu sehen welche exakt mit der ersten und zweiten Biegeeigenfrequenz aus Wellendynamik Beta 2 übereinstimmen (siehe Abbildung 4-70).

4.4.5 Modalanalyse des Nabensterns

Diese Analyse soll tiefe Eigenfrequenzen zeigen, welche auf eine zu weiche Struktur des Nabensterns hinweisen. Durch die Wahl einer 2-dimensionalen Modalanalyse wird praktisch eine unendlich starre Welle simuliert. Dadurch schwingt die Welle gegen die Kette und Pole und man kann Strukturweichheiten der Rippen bzw. der Kette ersichtlich machen. Dazu wurden die ersten 15 Moden mit Ansys berechnet (siehe Abbildung 4-76). Die genaue Auflistung dieser Moden findet man in Tabelle 4-19.

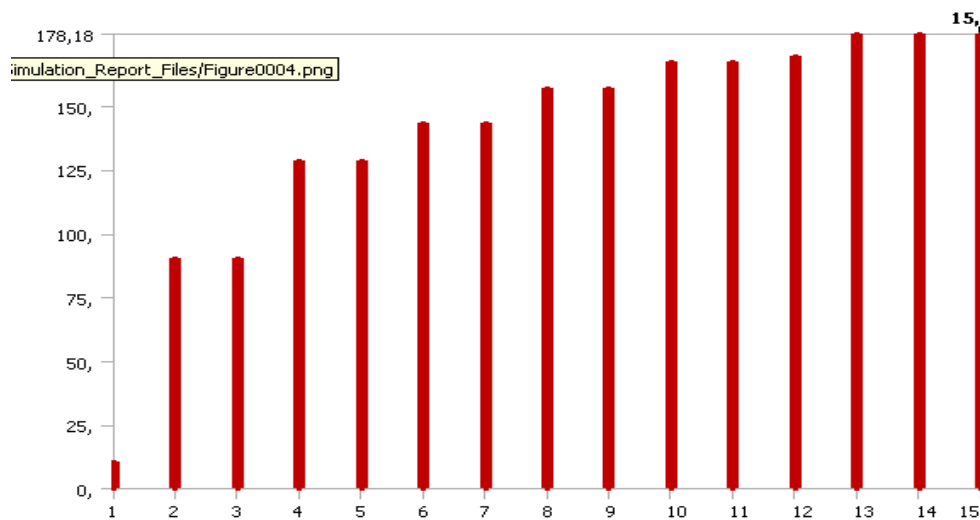


Abbildung 4-76 Modalanalyse der ersten 15 Moden

Tabelle 4-19 Auflistung der ersten 15 Moden

Mode	Frequency [Hz]
1,	10,245
2,	90,319
3,	90,322
4,	128,66
5,	128,69
6,	142,96
7,	142,97
8,	157,07
9,	157,11
10,	167,23
11,	167,23
12,	169,46
13,	178,03
14,	178,17
15,	178,18

Anregung des ersten Torsionsmodes

Sobald der Rotor exzentrisch liegt erfährt ein Punkt am Rotor innerhalb einer Umdrehung einen maximalen und einen minimalen Luftspalt und damit auch eine maximale und eine minimale Radial und Tangentialkraft. Das heißt die Umfangskraft wechselt innerhalb einer Rotordrehung von Minimum auf Maximum was eine drehfrequente Anregung mit Rotordrehzahl bedeutet.

Weiters muss man davon ausgehen, dass die polare Trägheitsachse nicht die Rotorachse ist und daher das polare Trägheitsmoment innerhalb einer Rotordrehung auch ein Minimum und ein Maximum durchläuft. Das heißt die Torsionsspannung erfährt wiederum auch innerhalb einer Umdrehung ein Minimum und ein Maximum.

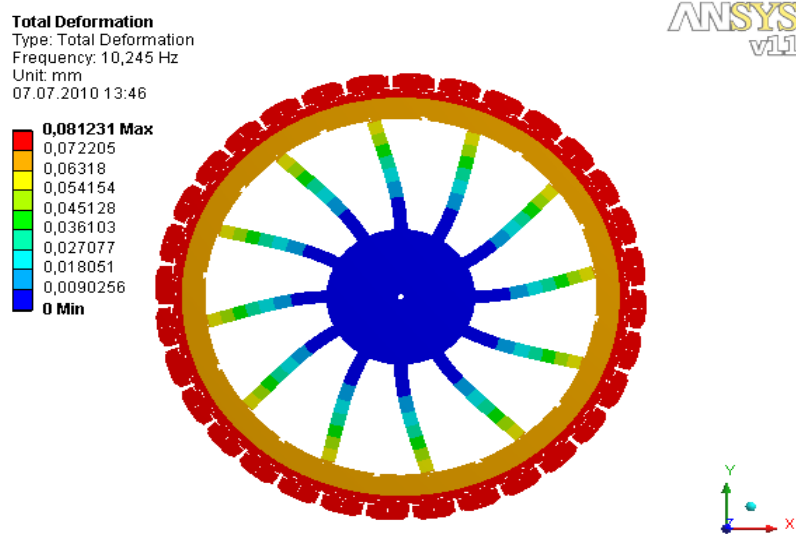


Abbildung 4-77 Erster torsionaler Mod bei 10,2 Hz

Da die Durchgangsdrehzahl bei 360 U/min also bei 6 Hz, und der erste Mod, welcher mit Rotordrehzahl drehfrequent angeregt wird bei 10,2 Hz liegt, konnte anhand der Modalanalyse kein gravierendes Strukturproblem des neuen Nabensterns festgestellt werden. In Abbildung 4-78 bis Abbildung 4-82 sind weitere Moden zu sehen. Diese sind jedoch keine torsionalen Moden und liegen bei Frequenzen über 90 Hz. Sie sind damit unbedeutend, da in diesem Frequenzbereich keine derartige Anregung statt findet.

Total Deformation 2
 Type: Total Deformation
 Frequency: 90,319 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:45

0,092006 Max
 0,081783
 0,07156
 0,061337
 0,051114
 0,040892
 0,030669
 0,020446
 0,010223
 0 Min

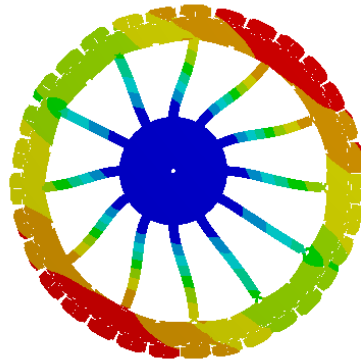


Abbildung 4-78 2. Mod bei 90,319 Hz

ANSYS
v11.1

Total Deformation 3
 Type: Total Deformation
 Frequency: 90,322 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:47

0,092006 Max
 0,081783
 0,07156
 0,061337
 0,051115
 0,040892
 0,030669
 0,020446
 0,010223
 0 Min

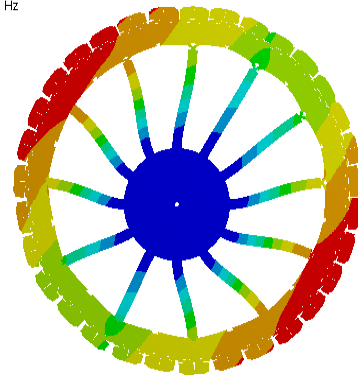


Abbildung 4-79 3. Mod bei 90,322 Hz

ANSYS
v11.1

Total Deformation 4
 Type: Total Deformation
 Frequency: 128,66 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:50

0,095288 Max
 0,084701
 0,074113
 0,063526
 0,052938
 0,04235
 0,031763
 0,021175
 0,010588
 0 Min

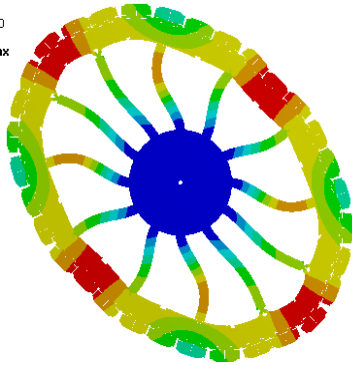


Abbildung 4-80 4. Mod bei 128,66 Hz

ANSYS
v11.1

Total Deformation 5
 Type: Total Deformation
 Frequency: 128,69 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:52

0,089622 Max
 0,079664
 0,069706
 0,059748
 0,04979
 0,039832
 0,029874
 0,019916
 0,009958
 0 Min

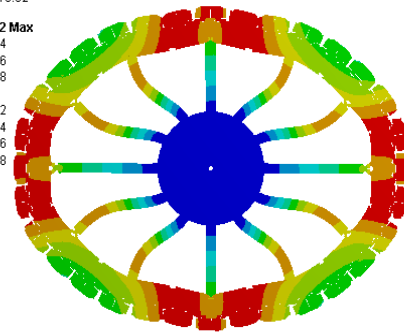


Abbildung 4-81 5. Mod bei 128,69 Hz

ANSYS
v11.1

Total Deformation 6
 Type: Total Deformation
 Frequency: 142,96 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:55

0,10308 Max
 0,091623
 0,08017
 0,068717
 0,057264
 0,045812
 0,034359
 0,022906
 0,011453
 0 Min

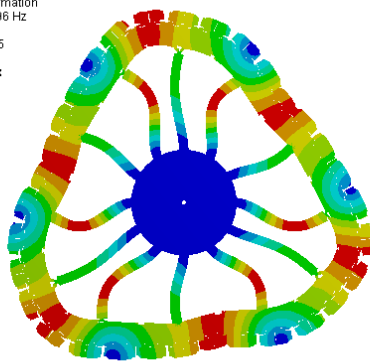


Abbildung 4-82 6. Mod bei 142,96 Hz

ANSYS
v11.1

Total Deformation 7
 Type: Total Deformation
 Frequency: 142,97 Hz
 Unit: mm
 07.07.2010 13:56

0,10307 Max
 0,091616
 0,080164
 0,068712
 0,05726
 0,045808
 0,034356
 0,022904
 0,011452
 0 Min

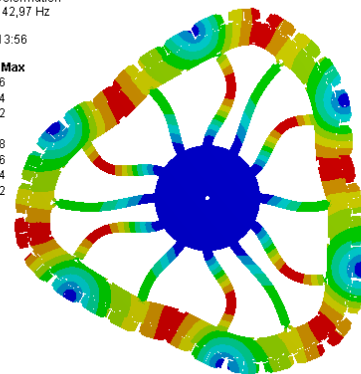


Abbildung 4-83 7. Mod bei 142,97 Hz

ANSYS
v11.1

5 Ausblick

Um das tatsächliche Laufverhalten dieses neuen Rotordesigns zu überprüfen, wäre es sinnvoll im Zuge eines zukünftigen Projektes, einen Prototypen anzufertigen. Anhand dieses Prototyps sollte man im Zuge eines Schleuderversuchs diverse Messungen anstellen, um damit die Ergebnisse aus dieser Konzeptstudie zu untermauern. Die Kettenbleche für diesen Prototypen sollten am Innenradius abwechselnd mit einer Schwalbenschwanznut und einer rechteckigen Nut versehen werden. Sollte sich das neue Rotordesign als untauglich herausstellen, müsste man lediglich die Kette so verdrehen, dass die rechteckigen Nuten über der Rippe liegen. Die Schwalbenschwanznuten wären dann zwar weiterhin vorhanden, würden den Betrieb des Generators aber in keinster Weise beeinflussen. Des Weiteren müsste man die aufgeschweißten Rippen an der Rotorwelle austauschen.

Um die lokalen Spannungsspitzen im Kerbgrund der Schwalbenschwanznut und damit den hier vorliegenden Kerbfaktor zu verringern, sollte man sich Gedanken über die Ausführung der Schwalbenschwanzgeometrie machen. In der Vergangenheit wurde bereits eine Vielzahl an Berechnungsstudien hinsichtlich lokaler Spitzenspannungen (Kerbstudien) für die Schwalbenschwanzverbindung zwischen Kette und Pol durchgeführt. Die Ergebnisse aus diesen Berechnungsstudien sollten als Basis für weitere Parameterstudien hinsichtlich der geometrischen Ausführung der Schwalbenschwanzverbindung zwischen Rippe und Kette herangezogen werden.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1 Schema eines Laufwasserkraftwerks	11
Abbildung 1-2 Prinzipieller Aufbau eines Pumpspeicherkraftwerkes	12
Abbildung 1-3 Aufbau eines österreichischen Pumpspeicherkraftwerks.....	13
Abbildung 1-4 Einteilung der Hydrogeneratoren	14
Abbildung 1-5 Prinzipieller Aufbau einer Synchronmaschine	15
Abbildung 1-6 Schematischer Querschnitt von Vollpol- (a) und Schenkelpol- Synchronmaschine (b)	16
Abbildung 1-7 Durchflutungsverläufe für Vollpol- und Schenkelpol- Synchronmaschine	16
Abbildung 1-8 Verschiedene Rotorbauarten.....	18
Abbildung 1-9 Ausführung des Rotors als Vollwelle.....	19
Abbildung 1-10 Ausführung des Rotors als massiver Jochring.....	19
Abbildung 1-11 Hydrogenerator mit Nabenstern und aufgeschumpfter „Kette“	20
Abbildung 1-12 Symmetriemodell.....	21
Abbildung 2-1 Aufbau eines Asynchronmotors (Werkbild Siemens)	24
Abbildung 2-2 Querschnitt durch eine einstufige Radialpumpe	25
Abbildung 2-3 Senkrecht stehender Wellenstrang, Kaplan turbine mit Generator	25
Abbildung 2-4 Umlaufende Fliehkraft F und Lagerreaktionen F_l und F_r beim unwuchtigen starren Rotor (m Rotormasse, ϵ Exzentrizität).....	26
Abbildung 2-5 Kräftegleichgewicht bei unwuchterregter Wellenschwingung	27
Abbildung 2-6 Wellenauslenkung und umlaufende Fliehkraft beim elastischen Rotor	28
Abbildung 2-7 Schwingungsbewegung der elastischen Welle aus der Sicht eines raumfesten Beobachters.	29
Abbildung 2-8 Lage des Schwerpunktes S im unterkritischen und überkritischen Drehzahlbereich	29
Abbildung 2-9 einseitig eingespannter Drehschwinger.....	30
Abbildung 2-10 nicht eingespannter Drehschwinger	30
Abbildung 2-11 Rotor mit Exzentrizität (links), unter- und überkritischer Zustand bzw. Selbstzentrierung (rechts)	31
Abbildung 2-12 Laval's Turbine mit dünner biegsamer Welle	33
Abbildung 2-13 Drehschwinger	34
Abbildung 2-14 Eigenschwingungsformen eines Drehschwingers.....	35

Abbildung 2-15: Flussdiagramm zum Verfahren von Holzer	37
Abbildung 2-16 Aufteilung der Welle in Wellenabschnitte[Nm]	38
Abbildung 2-17 Moment am rechten Wellenende in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω	39
Abbildung 2-18 Torsionseigenfrequenz und Torsionseigenform mit Wellendynamik Beta2 berechnet	40
Abbildung 2-19: Drehmasse (links) und Stab (rechts)	41
Abbildung 2-20 Stellen- und Feldnummerierung einer Welle.....	43
Abbildung 2-21 Lagerelement	44
Abbildung 2-22 Punktförmige Rotormasse	45
Abbildung 2-23 Masseloses, biegeelastisches Wellenstück mit den zugehörigen Schnittgrößen	46
Abbildung 2-24 Kontinuierliches massebehaftetes Wellenstück	47
Abbildung 2-25 Randbedingungen und ihre Zustandsvektoren	48
Abbildung 2-26 Zwischenbedingungen	49
Abbildung 2-27 Läufer mit punktförmiger Masse (oben), Läufer mit Scheibe die sich nicht schrägstellt (unten).....	50
Abbildung 2-28 Ausgelenkte Welle in einem raumfesten Koordinatensystem (links) und Definition der positiven Zählrichtung der Winkel und Momente (rechts)	50
Abbildung 2-29 Schrägstellung der Scheibe bei ausgebogenem Läufer.....	50
Abbildung 2-30 Versuch zur Demonstration des Kreiselmomentes.....	51
Abbildung 2-31 x' , y' , z' - Hauptachsensystem an einer rotationssymmetrischen Scheibe	52
Abbildung 2-32 Drallkomponenten im raumfesten Koordinatensystem	53
Abbildung 2-33 Spannungsvektoren (links) und Spannungskomponenten (rechts) an einem infinitesimalen Quader.....	54
Abbildung 2-34 Mohrscher Spannungskreis.....	55
Abbildung 2-35 Oktaederspannungen	56
Abbildung 3-1 Unterteilung des Wellenstranges für die rotordynamische Berechnung	62
Abbildung 4-1 Symmetriemodell.....	64
Abbildung 4-2: Biegekritische Drehzahlen des derzeitigen Rotors	65
Abbildung 4-3: Biegekritische Drehzahlen des Rotors mit eingehängter Kette auf die Vollwelle.....	66
Abbildung 4-4: Rotorskizze Vollwelle	67
Abbildung 4-5 Rotationssymmetrisches Modell	69

Abbildung 4-6 Vereinfachtes analytisches Symmetriemodell.....	69
Abbildung 4-7 Freischnitt des statisch unbestimmten Symmetriemodells.....	70
Abbildung 4-8 Schwalbenschwanznut in der Rippe	71
Abbildung 4-9 Verlauf der Reaktionskraft in Abhängigkeit der Rippenlänge.....	72
Abbildung 4-10 Bereiche konstanter radialer Deformation.....	73
Abbildung 4-11 Lokale Spitzenspannungen	74
Abbildung 4-12 Lokale Spitzenspannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge	75
Abbildung 4-13 Spannungs- Dehnungsdiagramm	76
Abbildung 4-14 Erweitertes Steifigkeitsmodell	77
Abbildung 4-15 Radiale Deformation der Rippe.....	78
Abbildung 4-16 Einfluss der Halsbreite auf die Steifigkeit des weichen Rippenbereichs.....	78
Abbildung 4-17 vereinfachtes Symmetriemodell und dessen Freischnitt.....	79
Abbildung 4-18 Freischnitt des Kettensymmetriestückes	80
Abbildung 4-19 Eingabemaske des parametrisierten analytischen Berechnungsmodells.....	82
Abbildung 4-20 Zwischenausgabefile	83
Abbildung 4-21 Schnittreaktionen in der Kette in Abhängigkeit von ϕ	84
Abbildung 4-22 Normalkraftverlauf in der Kette.....	85
Abbildung 4-23 Biegemomentenverlauf in der Kette.....	86
Abbildung 4-24 Tangentialspannung in der Kette zufolge Normalkraft.....	86
Abbildung 4-25 Tangentialspannung in der Kette zufolge Biegemoment.....	87
Abbildung 4-26 Umfangsspannung in der Kette am inneren Radius der Kette bei $R=R_{\text{Rippe}}$	88
Abbildung 4-27 Umfangsspannung in der Kette am Kettenaußenradius.....	88
Abbildung 4-28 Normalkraftverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen	91
Abbildung 4-29 Biegemomentenverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen	91
Abbildung 4-30 Querkraftverlauf aus Ansys Klassik am Modell mit Beam Elementen	92
Abbildung 4-31 Nominelle Umfangsspannung in der Kette direkt über der Rippe bei aufgeschumpfter Kette	93
Abbildung 4-32 Nominelle Umfangsspannung in der Kette direkt über der Rippe bei eingehängter Kette..	94
Abbildung 4-33 Asymmetrie des 32- poligen Symmetriemodells	95

Abbildung 4-34 Tangentialer Spannungsverlauf in der Kette aus Ansys	96
Abbildung 4-35 Tangentialer Spannungsverlauf in der Kette bei $\varphi = 0^\circ$	96
Abbildung 4-36 Reaktionskräfte in Abhängigkeit der Rippenlänge.....	99
Abbildung 4-37 Von-Mises Vergleichsspannungsplot in der Kette	99
Abbildung 4-38 Verlauf der Spitzenspannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge.....	100
Abbildung 4-39 Normalspannungsverlauf in der Kette	101
Abbildung 4-40 Verlauf der Nominellen Spannungen in Abhängigkeit der Rippenlänge.....	102
Abbildung 4-41 Reaktionskraft in der Rippe bzw. Normalkraft in der Kette bei Variation der Rippenbreite	103
Abbildung 4-42 Biegemoment in der Kette bei Variation der Rippenbreite	103
Abbildung 4-43 Einfluss der Rippensteifigkeit auf die nominelle Umfangsspannung in der Kette	104
Abbildung 4-44 Lokale Umfangsspannung in der Kette am Innenradius	105
Abbildung 4-45 Nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft in der Kette.....	106
Abbildung 4-46 Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen am Ketteninnenradius bei $\varphi = 0^\circ$	107
Abbildung 4-47 Einfluss der Rippenbreite auf die nominellen Spannungen am Ketteninnenradius bei $\varphi = 15^\circ (=0,262 \text{ rad})$	108
Abbildung 4-48 Nominelle Umfangsspannung zufolge Normalkraft Eingehängte Kette vs. Schrumpf (Spannungswerte aus Ansys).....	110
Abbildung 4-49 Lokale Spitzenspannung bei div. Polzahlen; Eingehängte Kette vs. Schrumpf	110
Abbildung 4-50 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 8 Pole	111
Abbildung 4-51 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 8 Pole	112
Abbildung 4-52 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 16 Pole	112
Abbildung 4-53 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 16 Pole	113
Abbildung 4-54 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 32 Pole	113
Abbildung 4-55 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 32 Pole	114
Abbildung 4-56 Normalspannungsverlauf bei eingehängter Kette; 64 Pole	114
Abbildung 4-57 Normalspannungsverlauf bei nicht eingehängter Kette; 64 Pole	115
Abbildung 4-58 Spannung zufolge Normalkraft in der Kette, EK vs. Schrumpf bei verschiedenen Polzahlen	116

Abbildung 4-59 Spannung zufolge Biegemoment in der Kette, EK vs. Schrumpfung bei verschiedenen Polzahlen	116
Abbildung 4-60 tangentielle Spannung zufolge Normalkraft bzw. Biegemoment in der Kette bei eingehängter Kette	117
Abbildung 4-61 Symmetriemodell verschiedener Generatoren mit unterschiedlichen Polzahlen bei gleicher Rippenbreite 120 mm.....	118
Abbildung 4-62 Antimetrie- Bedingung.....	119
Abbildung 4-63 Konstante radiale Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke	120
Abbildung 4-64 Konstante tangentielle Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke	120
Abbildung 4-65 Wellendynamik Beta2- Eingabemaske.....	122
Abbildung 4-66 Torsionseigenfrequenz bei Rippenbreite 255mm.....	124
Abbildung 4-67 Konstante tangentielle Deformation entlang der Schwalbenschwanz- Flanke	125
Abbildung 4-68 Torsionseigenfrequenz bei Rippenbreite 295mm.....	127
Abbildung 4-69 Torsionseigenfrequenz bei aufgeschrumpfter Kette	127
Abbildung 4-70 Biegekritische Drehzahlen mit eingehängter Kette	128
Abbildung 4-71 Biegekritische Drehzahlen mit aufgeschrumpfter Kette.....	129
Abbildung 4-72 Zulässige bezogene Restunwucht in Abhängigkeit von der maximalen Betriebsdrehzahl für verschiedene Gütestufen G (DIN ISO 1940)	132
Abbildung 4-73 Biegelinie, Querkraftverlauf, Momentverlauf.....	133
Abbildung 4-74 Unwuchterzwungene Auslenkung am generatorseitigen Rotorende.....	135
Abbildung 4-75 Unwuchterzwungene Auslenkung am turbinenseitigen Rotorende.....	135
Abbildung 4-76 Modalanalyse der ersten 15 Moden.....	136
Abbildung 4-77 Erster torsionaler Mod bei 10,2 Hz	137
Abbildung 4-79 3. Mod bei 90,322 Hz	138
Abbildung 4-81 5. Mod bei 128,69 Hz	138
Abbildung 4-83 7. Mod bei 142,97 Hz	138
Abbildung 4-78 2. Mod bei 90,319 Hz	138
Abbildung 4-80 4. Mod bei 128,66 Hz	138
Abbildung 4-82 6. Mod bei 142,96 Hz	138

7 Literaturverzeichnis

Celigoj, C. C. (2004). *Festigkeitslehre*.

Eickhoff, H. *Elin Union AG – Rotordynamik*.

Gasch, R., Nordmann, R., & Pfützner, H. (2002). *Rotordynamik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Hütte. (1978). *Elektrische Energietechnik*. Springer Verlag.

Jericha, H. (2002). *Maschinendynamik*. (H. a. GmbH, Hrsg., & H. Pirker, Übers.)

Markert, R. (2003). *Rotordynamik. (1.Auflage)*. Springer.

Marn, A. (2010). *Rotordynamik*.

Matek, Wittel, Becker, & Muhs. (1995). *Roloff/ Matek Maschinenelemente*. Vieweg.

Parkus, H. (2005). *Mechanik der festen Körper*. Springer Verlag.

Rentmeister, M. (1995). *Elektrische Maschinen*.

Wiedemann, & Kellenberger. (1967). *Konstruktion elektrischer Maschinen*.