



Diplomarbeit

Dreieckiges, konformes Kirchhoff-Plattenelement nach Hsieh, Clough und Tocher

Ausgeführt zur Erlangung des
akademischen Grades des Diplom-Ingenieurs

der Studienrichtung Maschinenbau
im Studiengang Mechatronik im Maschinenbau

am Institut für Festigkeitslehre
der Technischen Universität Graz

unter der Leitung von
Dipl.-Ing. Dr. techn. Stefan Hollerer und
O.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Christian C. Celigoj

Eingereicht von
Wolfgang Mader

Graz, Mai 2013

für Josef & Theresia Mader

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Celigoj für die ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit und die ungezählten Stunden, in denen er sich meinen Fragestellungen angenommen hat. Besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Celigoj, da er es mir ermöglicht hat, meinen Interessen folgend, mich neben statischen Problemen der Festkörpermechanik auch ausführlich mit der Strukturdynamik zu befassen.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Dr. Hollerer am Institut für Festigkeitslehre, der mir stets Ansprechpartner war und ohne dessen Anregungen und Lösungsansätze ein fristgerechter und erfolgreicher Abschluß dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Dank gebührt meinen Arbeitgebern, für die Möglichkeit, mir mein Studium finanzieren zu können und für das entgegengebrachte Vertrauen, mein erlerntes Wissen schon vor dem Studienabschluß umzusetzen. Bedanken möchte ich mich bei meinen Vorgesetzten und Kollegen, dass sie mir unzählige Male bei Terminen entgegengekommen sind, und es mir so erst ermöglicht haben, mein Studium konsequent voranzutreiben.

Zu guter Letzt, gebührt meiner Mutter, meiner Familie, meinen Großeltern und Freunden herzlicher Dank für den Rückhalt den sie mir während des Studiums gegeben haben.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 15. Mai 2013

Wolfgang Mader

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der klassischen Plattentheorie nach KIRCHHOFF. Dabei wird neben einer numerischen Behandlung des Plattenproblems auch eine analytische Untersuchung mit symbolischen Rechenmethoden durchgeführt. Die numerischen und analytischen Berechnungen erstrecken sich auf statische und dynamische Probleme der Plattenmechanik.

Für die numerische Lösung der Plattendifferentialgleichung wird ein von Hsieh 1963 vorgeschlagenes, dreieckiges finites Element mit 12 Freiheitsgraden verwendet. Dieses Element entsteht durch Unterteilung in drei dreieckige Subelemente. Das von Hsieh vorgeschlagene Element wurde von Clough und Tocher abgeleitet und 1965 vorgestellt, jedoch wurde das Element von 1965 durch die Annahme linearer Stetigkeit der Normalenableitung an den Elementkanten auf neun Freiheitsgrade reduziert. In der vorliegenden Arbeit wird ein dreieckiges Plattenelement mit vollständig kubischem Polynomansatz mit zehn Freiheitsgraden nach Brebbia und Connor für jedes Subelement verwendet. Nach der Assemblierung erhält man das von Hsieh vorgeschlagene dreieckige, konforme KIRCHHOFF-Plattenelement mit 12 Freiheitsgraden und quadratischem Verlauf der Normalenableitungen entlang der äußeren Elementkanten. Das Element erfüllt neben den ersten beiden Konvergenzkriterien, Abbildung der Starrkörperverschiebungen und konstanter Dehnungszustände, auch das Konformitätskriterium.

Für die analytische Lösung der Plattengleichung wird das Beispiel der Kreisplatte nach Parkus verwendet. Statisch werden zwei verschiedene Arten der Lagerung unter konstanter Belastung untersucht. Die Lösungen für rotationssymmetrische Biegeschwingungen der Kreisplatte können mit Hilfe der BESSEL-Funktionen gefunden werden. Zur Beurteilung des implementierten finiten Elementes werden die numerischen Ergebnisse den Ergebnissen aus der symbolischen Berechnung gegenübergestellt.

Abstract

The present thesis deals with the plate bending theory by KIRCHHOFF. In addition to the numerical investigation of the plate bending problem an analytical investigation with symbolic simulation methods is carried out. Both investigations focus on static and dynamic problems of the plate bending theory.

For the numerical solution of the plate bending differential equation, a triangular finite element with 12 degrees-of-freedom is used, which was proposed by Hsieh in 1963. This conforming element is generated by a subdivision into three triangular elements. The element proposed by Hsieh was reduced to 9-degrees-of-freedom by Clough and Tocher in 1965 by suppressing the mid-side rotations. Therefore its normal derivatives vary linearly along the exterior boundaries. In this thesis a triangle with a complete cubic polynomial and with 10 degrees-of-freedom as presented by Brebbia and Connor is used for each sub-triangle. The element assembling results in an element with 12 degrees-of-freedom and a quadratic normal slope variation along the exterior edges of the triangle as proposed by Hsieh. The element fulfills the rigid body requirement, the constant strain requirement as well as the conformity criterion.

For the analytical solution of the plate bending differential equation the example of the circular plate as presented by Parkus was used. For the static simulation two different kinds of boundary conditions are used by applying a constant load on the surface of the plate. Using BESSEL functions, the rotational-symmetric bending modes of the circular plate are calculated. For the assessment of the implemented finite element, the numerical solutions are compared with the solutions of the symbolic calculations.

Abkürzungsverzeichnis

a, b, c	Kennzeichnung der Subelemente
a	Beschleunigung
a	Plattenradius
a_n	Lastkoeffizient
b, l	Plattenabmessungen
c_n	Verschiebungskoeffizient
f^B	Volumenkraftdichte
f^S	Oberflächenkraftdichte
h	Plattendicke
h	Höhe des Dreiecks
l	Plattenlänge
l	Elementkantenlänge
m, n	lokale Koordinaten
m	längenbezogenes Schnittmoment
p	Flächenlast
q	längenbezogene Schnittkraft
r, s	natürliche Koordinaten
t	Zeit
u, v, w	Verschiebungen in kartesische Koordinatenrichtungen
x, y, z	kartesische Koordinaten
A, S	Fläche
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft
K	Plattensteifigkeit

M	Anzahl der Elemente
N	Anzahl der Knotenfreiheitsgrade
R	Eigenform
V	Volumen
W	Arbeit
$\underline{\underline{B}}$	B-Matrix
$\underline{\underline{C}}$	Spannungs-Verzerrungs-Matrix
$\underline{\underline{D}}$	Differentialoperatormatrix
$\underline{\underline{H}}$	Matrix der Ansatzfunktionen
$\underline{\underline{J}}$	JACOBI-Matrix
$\underline{\underline{K}}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$\underline{\underline{Q}}$	Matrix der kinematischen Zwangsbedingungen
α	Polynomkoeffizient, Verschiebungskoeffizient
ϵ	Dehnung
ϕ	skalare Feldgröße
φ	Polarkoordinate
ν	POISSONSche Querdehnungszahl
θ	Winkel
ρ	Dichte
σ	Spannung
τ	Schubspannung
ω	Eigenfrequenz
Θ	Temperaturmoment
Ω	Anregungsfrequenz
$\underline{\underline{\Phi}}$	Modale Matrix
$\underline{\underline{P}}$	Trägheitsmatrix
$\underline{\underline{\Omega}}$	Diagonalmatrix der Eigenwerte

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Finite-Elemente-Methode für schubstarre Platten	3
2.1. Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	3
2.1.1. Das Grundgesetz der Dynamik	3
2.1.2. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	5
2.2. Prinzip der virtuellen Verschiebungen für schubstarre Platten	6
2.2.1. Theorie der schubstarren Platte	6
2.2.2. Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte	8
2.2.3. Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte	9
2.2.4. Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte	9
2.3. Finite-Elemente-Methode für schubstarre Platten	11
2.3.1. Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte	12
2.3.2. Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte	12
2.3.3. Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte	13
3. Konformes, dreieckiges Kirchhoff-Plattenelement	15
3.1. Plattenelemente mit 9 generalisierten Koordinaten	15
3.2. Plattenelement mit 10 generalisierten Koordinaten	17
3.3. Plattenelement mit 12 generalisierten Koordinaten	21
4. Analytische Lösung der Plattengleichung	25
4.1. Die Plattengleichung	25
4.2. Die Plattengleichung für rotationssymmetrische Probleme	30
4.3. Kreisplatte unter statischer Gleichlast	30
4.3.1. Die eingespannte Kreisplatte	31
4.3.2. Die frei drehbar gelagerte Kreisplatte	32
4.4. Biegeschwingungen der eingespannten Kreisplatte	32
4.4.1. Freie Biegeschwingungen der eingespannten Kreisplatte	32
4.4.2. Erzwungene Biegeschwingung der eingespannten Kreisplatte	34
5. Zusammenfassung	36
Literaturverzeichnis	39
A. Kreisplatte unter statischer Gleichlast	40
B. Konvergenzverhalten	46
C. Sensitivitätsstudie	48

D. Biegeeigenschaften der eingespannten Kreisplatte	50
E. Verwendete Modelle	60

Abbildungsverzeichnis

2.1. Volumselement in kartesischen Koordinaten	3
2.2. CAUCHYscher Tetraeder	4
2.3. Kinematik der schubstarren Platte	6
2.4. Spannungen an der schubstarren Platte	8
3.1. Dreieckiges Plattenelement mit neun generalisierten Koordinaten	15
3.2. Dreieckiges Plattenelement mit zehn generalisierten Koordinaten	17
3.3. Dreieckiges Plattenelement mit Kantenfreiheitsgraden	19
3.4. Dreieckiges Plattenelement mit zwölf generalisierten Koordinaten	21
4.1. Kinematik der schubstarren Platte	25
4.2. Spannungen an der schubstarren Platte	27
4.3. Mittelebene der Platte mit längenbezogenen Schnittgrößen	28
4.4. Kreisplatte unter statischer Gleichlast	31
4.5. Moden der freien Plattenschwingung	34
A.1. Kreisplatte unter statischer Gleichlast	40
A.2. Verschiebungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die eingespannte Kreisplatte	41
A.3. Verschiebungsableitungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die eingespannte Kreisplatte	42
A.4. Verschiebungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte	43
A.5. Verschiebungsableitungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte	44
A.6. Axonometrische Darstellung der rotationssymmetrischen Lösung	45
A.7. Rotationssymmetrische Lösung der Kreisplatte	45
B.1. Konvergenz für die eingespannte Kreisplatte	47
B.2. Konvergenz für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte	47
C.1. Anordnung des Koppelpunktes für die Sensitivitätsstudie	48
C.2. Empfindlichkeit für die eingespannte Kreisplatte	49
C.3. Empfindlichkeit für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte	49
D.1. Vergleich der Eigenfrequenzen	51
D.2. Eigenform 1 der eingespannten Kreisplatte	52
D.3. Eigenform 2 der eingespannten Kreisplatte	53
D.4. Eigenform 3 der eingespannten Kreisplatte	54
D.5. Eigenform 4 der eingespannten Kreisplatte	55
D.6. Eigenform 5 der eingespannten Kreisplatte	56

D.7. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)	57
D.8. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte	57
D.9. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)	58
D.10. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte	58
D.11. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)	59
D.12. Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte	59
E.1. Überlegungen zur Ableitung eines Netzgenerators	60
E.2. Modell mit einer radialen Elementreihe	62
E.3. Modell mit zwei radialen Elementreihen	62
E.4. Modell mit vier radialen Elementreihen	63
E.5. Modell mit sechs radialen Elementreihen	63
E.6. Modell mit acht radialen Elementreihen	64
E.7. Modell mit 20 radialen Elementreihen	64

Tabellenverzeichnis

4.1. Nullstellen der Frequenzgleichung	33
D.1. Eigenfrequenzen der eingespannten Kreisplatte	51
E.1. Eigenschaften der verwendeten Modelle	61

1. Einleitung

Platten sind 2d-Bauteile unter Biegebeanspruchung. Sie grenzen sich zu den anderen 2d-Bauteilen insofern ab, als sie im Vergleich zu Schalen in der unverformten Konfiguration eben sind und im Gegensatz zu Scheiben keine Belastungen in dieser Ebene übertragen. Den Platten ist wie auch den anderen Flächentragwerken gemein, dass die geometrische Ausdehnung in der Dickenrichtung klein gegenüber den Ausdehnungen in den beiden anderen Richtungen ist. Sie lassen sich somit zwischen den 1d-Bauteilen, Stab und Balken, und den 3d-Bauteilen einordnen.

In der mathematischen Beschreibung des Plattentragwerkes, unterscheidet man zwischen der klassischen Plattentheorie, auch als KIRCHHOFFsche Plattentheorie oder Normalentheorie bezeichnet, und der REISSNERSchen Plattentheorie oder MINDLINSchen Plattentheorie. Die KIRCHHOFFsche Theorie geht vom schubsteifen Verhalten der Platte aus, wohingegen MINDLIN und REISSNER Schubverformungen in der Platte berücksichtigen [21].

Mitte der fünfziger Jahre begann, ausgehend von der amerikanischen Luft- und Raumfahrtindustrie die Entwicklung einer numerischen Methode zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen. Clough führte 1960 den Begriff *finite element* ein. Durch die Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer, gab es in den 1960er Jahren eine rasche Entwicklung der Methodik. Maßgebliche Arbeiten kamen unter anderen von Clough in Berkeley (USA), Zienkiewicz in Swansea (Großbritannien) und Argyris in Stuttgart [21].

Mit dem Aufkommen der Methode der finiten Elemente, begann auch die Entwicklung verschiedener Plattenelemente, sowohl für die schubstarre, als auch für die schubweiche Plattentheorie. Motivation für die ausführliche Behandlung der Plattentheorie, war die hohe praktische Bedeutung, die man der Ermittlung von dynamischen Erscheinungen und Stabilitätseffekten für Platten- und Schalentragwerkskonstruktionen zuschrieb [13]. Eine äußerst umfangreiche Zusammenstellung von Veröffentlichungen zur numerischen Behandlung von Plattenproblemen findet man beispielsweise in Werkle [21] oder Steinke [18].

Bezugnehmend auf die ersten Entwicklungen im Bereich der Plattenelemente, behandelt die vorliegende Arbeit ein von Hsieh 1963 vorgeschlagenes KIRCHHOFF-Plattenelement. Hsieh's grundlegende Theorie basiert darauf, das dreieckige Element durch Assemblierung von drei Subelementen auf Elementebene zu generieren. Diese Idee wurde als *triangle element subdivision* bekannt. Ein Element dieser Gattung wurde erstmals von Clough und Tocher assembliert und 1965 auf der *Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* auf der Wright-Patterson AFB in Ohio der Öffentlichkeit vorgestellt. Clough und Tocher reduzierten das von Hsieh mit zwölf generalisierten Koordinaten vorgeschlagene Element auf neun Freiheitsgrade, ohne jedoch die Konformität des dreieckigen Elementes zu verlieren [3, 9].

Ziel dieser Arbeit ist, das von Hsieh vorgeschlagene Element in der Version mit zwölf generali-

sierten Koordinaten abzuleiten. Hierfür wird ein dreieckiges Element mit zehn Freiheitsgraden nach Brebbia und Connor [4] für das Subelement verwendet.

Eine grundlegende Abhandlung zur Methode der finiten Elemente speziell für das KIRCHHOFFSche Plattenproblem findet man in Kapitel 2 dieser Arbeit. In Kapitel 3 werden Probleme der ersten dreieckigen Plattenelemente, die unter Anleitung von R.W. Clough Anfang der 1960er Jahre entwickelt wurden, dargestellt. Hierauf aufbauend folgt die Ableitung eines finiten Elementes, welches durch das Hinzufügen eines zehnten Freiheitsgrades, die Verwendung eines vollständigen kubischen Polynomansatzes für das Verschiebungsfeld ermöglicht. Aufbauend darauf wird das dreieckige, konforme Plattenelement, welches Thema dieser Arbeit ist, vorgestellt. In Kapitel 4 wird näher auf die Mechanik der schubstarren Platte eingegangen und die Plattengleichung vorgestellt. Weiters werden statische und dynamische Lösungen der Plattendifferentialgleichung angegeben. Ein Vergleich der analytischen und numerischen Lösung wird im Anhang dieser Arbeit, zur Verifikation des dreieckigen Elementes nach Hsieh, Clough und Tocher, angegeben.

2. Finite-Elemente-Methode für schubstarre Platten

Ausgehend vom dynamischen Grundgesetz werden in Kapitel 2.1, mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit, Ausdrücke für die virtuelle Arbeit innerhalb des Körpers und der virtuellen Arbeit der am Körper aufgebracht äußeren Kräfte vorgestellt. In Kapitel 2.2 werden Ausdrücke der virtuellen Arbeit für die KIRCHHOFFSche Platte vorgestellt und mittels Methode der finiten Elemente in Kapitel 2.3 diskretisiert.

2.1. Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

2.1.1. Das Grundgesetz der Dynamik

Wir beschreiben die Bewegung des in Abb. 2.1 dargestellten Freikörperbildes eines aus einem festen Körper geschnittenen Volumenelements bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem. Das kartesische Koordinatensystem muss ein Inertialsystem sein.

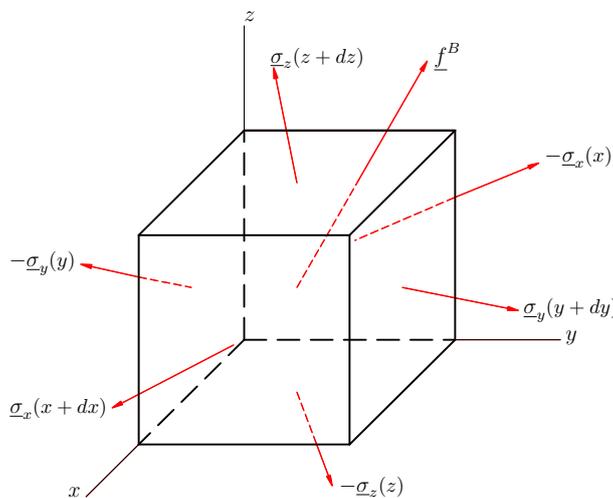


Abbildung 2.1.: Volumenelement in kartesischen Koordinaten

Das Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement liefert mit den Spannungsvektoren je Seitenfläche des Quaders

$$-\underline{\sigma}_x(x) dy dz + \underline{\sigma}_x(x + dx) dy dz - \underline{\sigma}_y(y) dz dx + \underline{\sigma}_y(y + dy) dz dx - \underline{\sigma}_z(z) dx dy + \underline{\sigma}_z(z + dz) dx dy + \underline{f}^B dV - \rho \underline{a} dV = 0.$$

Der vorletzte Ausdruck stellt eine örtliche Volumskraft mit der Volumskraftdichte \underline{f}^B dar, und der letzte Ausdruck die auf das Volumen bezogene Trägheitskraft mit der örtlichen Be-

schleunigung \underline{a} . Nach der TAYLOR-Reihenentwicklung für die Spannungsvektoren am positiven Schnittufer

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_x(x+dx) &= \underline{\sigma}_x(x) + \frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} \Big|_x dx + \dots \\ \underline{\sigma}_y(y+dy) &= \underline{\sigma}_y(y) + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} \Big|_y dy + \dots \\ \underline{\sigma}_z(z+dz) &= \underline{\sigma}_z(z) + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z} \Big|_z dz + \dots\end{aligned}$$

folgen nach Vereinfachung und Division durch $dV = dx dy dz$ und Grenzübergang $dx, dy, dz \rightarrow 0$ die NAVIERSchen Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \underline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\sigma}_z}{\partial z} + \underline{f}^B = \rho \underline{a}. \quad (2.1)$$

Mit Gl. (2.1) ist das Gleichgewicht im Inneren des Körpers gegeben. Das Gleichgewicht der an der Körperoberfläche angreifenden äußeren Kräfte mit den im Körper wirkenden Spannungen folgt aus der CAUCHYSchen Formel.

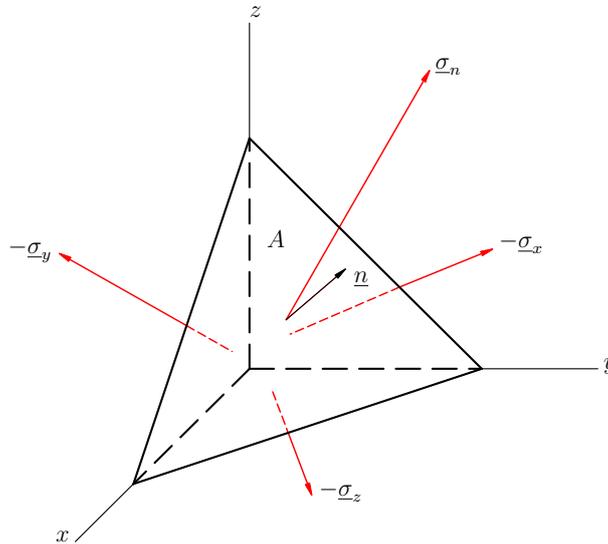


Abbildung 2.2.: CAUCHYScher Tetraeder

Mit dem Normalenvektor auf die Fläche A

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \angle(\underline{n}, \underline{e}_x) \\ \cos \angle(\underline{n}, \underline{e}_y) \\ \cos \angle(\underline{n}, \underline{e}_z) \end{bmatrix}$$

ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$\underline{f}^B V + \underline{\sigma}_n A - \underline{\sigma}_x A n_x - \underline{\sigma}_y A n_y - \underline{\sigma}_z A n_z = \rho \underline{a} V$$

des in Abb. 2.2 dargestellten Tetraeders in kartesischen Koordinaten, nach Division durch die Fläche A

$$\underline{f}^B \frac{h}{3} + \underline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_x n_x - \underline{\sigma}_y n_y - \underline{\sigma}_z n_z = \rho \underline{a} \frac{h}{3}$$

und Grenzübergang $h \rightarrow 0$ zu

$$\underline{\sigma}_n = \underline{\sigma}_x n_x + \underline{\sigma}_y n_y + \underline{\sigma}_z n_z. \quad (2.2)$$

2.1.2. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Gl. (2.1) und Gl. (2.2) werden im folgenden in Indexnotation geschrieben

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ji,j} + f_i^B - \rho a_i) dV + \int_S \delta u_i (f_i^S - \sigma_{ji} n_j) dS = 0, \quad (2.3)$$

wobei für die Spannung $\underline{\sigma}_n$ aus Gl. (2.2) der Vektor der Oberflächenkräfte \underline{f}^S eingesetzt wird. In Gl. (2.3) bildet das Integral über das Volumen die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte und das Integral über die Oberfläche die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte. Sei Φ eine im Gebiet V stetige Größe des Tensorfeldes beliebiger Stufe, so gilt der GAUSSsche Integralsatz [17], in der Form

$$\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dV = \int_S \Phi n_i dS. \quad (2.4)$$

Mit dem GAUSSschen Integralsatz lässt sich der erste Ausdruck des Volumsintegrals in Gl. (2.3) umwandeln in

$$\int_V \delta u_i \sigma_{ji,j} dV = \int_V (\delta u_i \sigma_{ji})_{,j} dV - \int_V (\delta u_i)_{,j} \sigma_{ji} dV = \int_S \delta u_i \sigma_{ji} n_j dS - \int_V \frac{1}{2} [\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}] \sigma_{ji} dV.$$

Mit den virtuellen Verzerrungen

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}]$$

ergibt sich nach dem Rückeinsetzen in Gl. (2.3) und Zusammenfassen der entsprechenden Integrale

$$\underbrace{- \int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV}_{\delta W_{int}} + \underbrace{\int_V \delta u_i f_i^B dV + \int_S \delta u_i f_i^S dS}_{\delta W_{ext}} + \underbrace{\int_V \delta u_i \rho (-a_i) dV}_{\delta W_{inertia}} = 0. \quad (2.5)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist eine Spezialisierung des D'ALEMBERTSchen Prinzips:

Bei einer virtuellen Verschiebung eines Systems aus einer Momentanlage heraus ist die von den inneren, den äußeren und den Trägheitskräften insgesamt geleistete Arbeit gleich Null [16].

Die integrale Darstellung der NAVIERSchen Bewegungsgleichung, Gl. (2.5), enthält gegenüber der klassischen Darstellung der Gl. (2.1) keine zweiten Ableitungen mehr. Gl. (2.5) wird daher auch als schwache Formulierung der Differentialgleichung bezeichnet, Gl. (2.1) als die klassische oder starke Formulierung [11].

2.2. Prinzip der virtuellen Verschiebungen für schubstarre Platten

2.2.1. Theorie der schubstarrten Platte

Nachdem mittels Variationsformulierung allgemein gültige Ausdrücke für die virtuellen Arbeiten in Kapitel 2.1.2 gefunden wurden, werden diese für die schubstarre Platte spezialisiert und danach mittels Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Dabei werden die Annahmen der klassischen Plattentheorie, auch als Normalentheorie oder KIRCHHOFFSche Plattentheorie bezeichnet, zu Grunde gelegt.

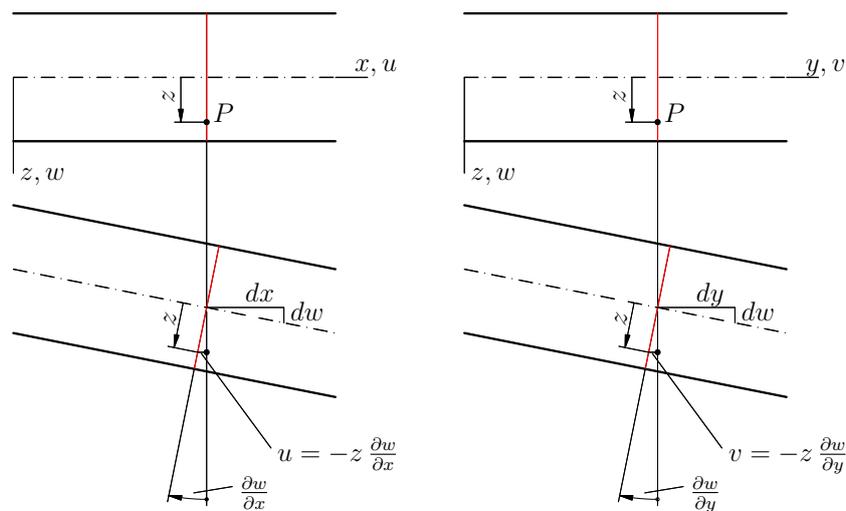


Abbildung 2.3.: Kinematik der schubstarrten Platte

Die kinematischen Annahmen sind zum einen die Normalenhypothese, zum anderen die Annahme, dass die Mittelfläche unverzerrt bleibt. Wie in Abb. 2.3 veranschaulicht, bedeutet Normalenhypothese, dass Querschnitte die vor der Verformung senkrecht auf die Mittelebene orientiert sind, auch nach der Verformung normal auf die Mittelebene stehen. Dies stellt, wie sich zeigen lässt, für dünne Platten mit

$$h \ll l, b \quad (2.6)$$

eine gute Näherung dar. Die Forderung, dass die Mittelebene unverzerrt bleibt, ist bei Einhaltung der Bedingung $w \ll h$ ebenso erfüllt [5, 6].

Um die virtuellen Arbeiten aus Gl. (2.5) abzuleiten, werden die kinematische Größen, Verschiebungen und Verzerrungen benötigt, und des weiteren besteht die Notwendigkeit, Spannungen als Funktion der Verzerrungen mittels Werkstoffgesetz zu ermitteln.

Mit der angenommenen kleinen Plattendicke gilt für die Kinematik der Verformung, mit den genannten Hypothesen

$$\begin{aligned} u(x, y, z; t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z; t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z; t) &= w(x, y, 0; t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die gesuchten Verzerrungen ergeben sich durch entsprechendes Ableiten der Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Zur Ermittlung der Spannungen muss noch eine dritte Annahme getroffen werden. Und zwar werden Normalspannungen in Schnitten parallel zur Mittelebene vernachlässigt [16], d.h. es wird

$$|\sigma_{zz}| \ll |\sigma_{xx}|, |\sigma_{yy}|. \quad (2.9)$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Annahme für dünne Platten, für die Gl. (2.6) gilt, erfüllt ist. Für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen wird von einem isotropen, homogenen Material ausgegangen, welches dem HOOKEschen Gesetz genügt und sich für den ebenen Spannungszustand ohne Temperaturfeld, zu

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (+\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (2.10)$$

ergibt [16].

Löst man die Gl. (2.10) nach den Spannungen auf, so ergeben sich mit Gl. (2.8) die Spannungen des ebenen Spannungszustandes an der KIRCHHOFFSchen Platte zu

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (+\epsilon_{xx} - \nu \epsilon_{yy}) &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (-\nu \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left(2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).\end{aligned}\quad (2.11)$$

Die Ergebnisse aus Gl. (2.11) in VOIGTScher Notation zusammengefasst

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^{ESZ}} \underbrace{\begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}}_{\underline{\epsilon}} \quad (2.12)$$

ergeben den Vektor der Spannungen $\underline{\sigma}$, den Vektor der Dehnungen $\underline{\epsilon}$ und die Spannungs-Verzerrungs-Matrix $\underline{\underline{C}}$ für den ebenen Spannungszustand

$$\underline{\underline{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

mit dessen Hilfe das Werkstoffgesetz in der Form

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} \underline{\epsilon} \quad (2.14)$$

geschrieben werden kann.

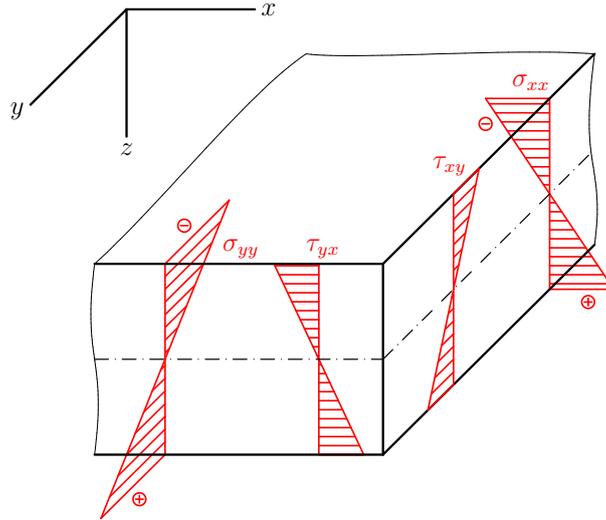


Abbildung 2.4.: Spannungen an der schubstarr deformierten Platte

Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es in der Plattenmechanik üblich ist, mit längenbezogenen Schnittgrößen zu arbeiten. Diese Darstellung wird für die Ableitung der virtuellen Arbeiten jedoch nicht explizit benötigt und daher aus Gründen der Übersichtlichkeit an dieser Stelle nicht wiedergegeben. Eine Darstellung der längenbezogenen Schnittgrößen findet man bei der analytischen Ableitung der Plattengleichung in Kapitel 4.1.

2.2.2. Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

Setzt man die oben gefundenen Beziehungen für die Dehnungen, Gl. (2.8), und Spannungen, Gl. (2.10), in den Ausdruck der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV$$

ein, so erhält man den Ausdruck

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \left\{ z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \right\} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dV$$

und nach dem Aufspalten des Integrals $dV = dA dz$

$$\delta W_{int} = - \int_A \delta \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} z dz}_{\underline{C}_b} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dA$$

erhält man die verallgemeinerte Spannungs-Verzerrungs-Beziehung $\underline{\underline{C}}_b$ für die KIRCHHOFFSche Platte unter Biegebeanspruchung

$$\underline{\underline{C}}_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Mit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.16)$$

wird die Plattensteifigkeit eingeführt. Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte lautet also

$$\delta W_{int} = - \int_A \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{C}}_b \underline{\underline{\epsilon}} dA. \quad (2.17)$$

2.2.3. Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

Einsetzen der gefundenen Beziehungen für die Verschiebungen in den Ausdruck der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte ergibt unter der Annahme, dass in der dünnen Platte keine Volumkräfte vorhanden sind:

$$\delta W_{ext} = \int_A \delta \underline{u}^T p dA. \quad (2.18)$$

2.2.4. Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

Mit den Verschiebungen aus Gl. (2.7) ergibt sich der Beschleunigungsvektor

$$\underline{\underline{\ddot{u}}} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \ddot{w} \end{bmatrix}$$

durch zweimaliges Ableiten nach der Zeit. Mit dem in Matrizen aufgespaltenen Vektor der Verschiebungen Gl. (2.7)

$$\underline{u}^T = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad w \right] \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

ergibt die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_{inertia} = \int_V \delta \underline{u}^T \rho (-\underline{\underline{\ddot{u}}}) dV$$

$$\delta W_{inertia} = - \int_V \delta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad w \right] \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \ddot{w} \end{bmatrix} dV.$$

Nach Aufspalten der Integration in $dV = dA dz$

$$\delta W_{inertia} = - \int_A \delta \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & w \end{array} \right] \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\begin{array}{ccc} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array} \right] \rho \left[\begin{array}{ccc} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array} \right] dz}_{P} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \ddot{w} \end{array} \right] dA$$

erhält man die Trägheitsmatrix P

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\begin{array}{ccc} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array} \right] \rho \left[\begin{array}{ccc} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{array} \right] dz = \rho h \left[\begin{array}{ccc} \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Die ersten beiden Einträge repräsentieren die beiden rotatorischen Trägheiten der Platte und der letzte Eintrag die translatorische Trägheit. Zusammenfassend lautet die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_{inertia} = - \int_A \delta \underline{u}^T \underline{P} \underline{\ddot{u}} dA. \quad (2.19)$$

Abschließend sei noch angemerkt, das sich der Ausdruck für die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte unter Vernachlässigung der rotatorischen Trägheiten auf die Form

$$\delta W_{inertia} = - \int_A \delta w \rho h \ddot{w} dA \quad (2.20)$$

reduzieren lässt. Diese Vereinfachung wird später noch zum Vergleich mit der analytischen Lösung benötigt werden.

Zusammenfassend lässt sich die virtuelle Arbeit der KIRCHHOFFSchen Platte

$$\underbrace{- \int_A \delta \underline{\epsilon}^T \underline{C}_b \underline{\epsilon} dA}_{\delta W_{int}} + \underbrace{\int_A \delta \underline{u}^T p dA}_{\delta W_{ext}} + \underbrace{\int_A \delta \underline{u}^T \underline{P} (-\underline{\ddot{u}}) dA}_{\delta W_{inertia}} = 0 \quad (2.21)$$

schreiben.

2.3. Finite-Elemente-Methode für schubstarre Platten

Nachdem die physikalischen Zusammenhänge für die schubstarre Platte in das Prinzip der virtuellen Arbeit eingearbeitet wurde, ist nun das Ziel, die mit Gl. (2.21) gegebenen Ausdrücke für die virtuellen Arbeiten, mittels der Methode der finiten Elemente zu diskretisieren. Die Diskretisierung soll an dieser Stelle jedoch ohne Bezug zu einem speziellen finiten Element durchgeführt werden. Der Bezug zu speziellen finiten Elementen für die KIRCHHOFFSche Platte, wird dann ausführlich in Kapitel 3 gegeben.

Bei der Methode der finiten Elemente für Plattentragwerke wird die Plattenmittelebene durch eine endliche Anzahl ($1 \leq m \leq M$) an finiten Elementen in kleine, jedoch endlich große (finite) Bereiche unterteilt. Für diese Gebietsdiskretisierung werden in dieser Arbeit nur dreieckige Bereiche zugelassen, obwohl auch rechteckige Bereiche möglich sind. Die Elemente sind an Knotenpunkten miteinander gekoppelt, wobei die Weggrößen in den Knotenpunkt \hat{u} die Unbekannten des diskreten Systems darstellen. Diese Unbekannten werden im weiteren auch als Freiheitsgrade bezeichnet. Innerhalb des abgegrenzten Elementvolumens $V^{(m)}$ werden die Verschiebungen oder allgemein Weggrößen durch entsprechende Ansatzfunktionen mit den Knotenpunktfreiheitsgraden verknüpft [6]. Die Wahl der Elementfreiheitsgrade und die Ermittlung der dazugehörigen Ansatzfunktionen, kann als elementspezifisch gesehen werden und wird daher ausführlich in Kapitel 3 behandelt.

Für die Plattendurchbiegung $w(x, y, 0; t)$ innerhalb eines finiten Elementes nach der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie führt dies auf

$$w(x, y, 0; t)^{(m)} = \underline{\underline{H}}(x, y)^{(m)} \hat{u}(t)^{(m)}. \quad (2.22)$$

Die Matrix $\underline{\underline{H}}(x, y)^{(m)}$ ist die Matrix der Ansatzfunktionen und ist bei der KIRCHHOFFSchen Platte von der Dimension $[1 \times N]$, wobei mit N die Anzahl der Knotenfreiheitsgrade je Element bezeichnet werden soll. Die Anzahl der Elementfreiheitsgrade ist, wie später noch gezeigt wird, vom Element abhängig. Der Vektor $\hat{u}(t)$ hat dementsprechend die Dimension $[N \times 1]$ und enthält die generalisierten Knotenfreiheitsgrade des jeweiligen Elementes [6, 9].

Setzt man nun den Verschiebungsansatz, Gl. (2.22), in Gl. (2.8) ein, erhält man die Elementdehnungen in Matrizennotation

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}(x, y, z; t)^{(m)} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = (-z) \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}(x, y, z)} w(x, y, 0; t)^{(m)} \\ &= \underline{\underline{D}}(x, y, z) \underline{\underline{H}}(x, y)^{(m)} \hat{u}(t)^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Matrix $\underline{\underline{D}}(x, y, z)$ wird als Differentialoperatormatrix bezeichnet. Mit der Abkürzung

$$\underline{\underline{B}}(x, y, z)^{(m)} = \underline{\underline{D}}(x, y, z) \underline{\underline{H}}(x, y)^{(m)} \quad (2.24)$$

lassen sich die Elementdehnungen verkürzt schreiben als

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x, y, z; t)^{(m)} = \underline{\underline{B}}^{(m)}(x, y, z) \hat{u}(t)^{(m)}. \quad (2.25)$$

Die Matrix $\underline{B}(x, y, z)$ wird im allgemeinen als B-Matrix bezeichnet [6]. Für die Elementspannungen ergibt sich nach Einsetzen in Gl. (2.14)

$$\underline{\sigma}(x, y, z; t)^{(m)} = \underline{C} \underline{B}(x, y, z)^{(m)} \hat{\underline{u}}(t)^{(m)}. \quad (2.26)$$

Die diskreten Ausdrücke für die Elementverzerrungen und Elementspannungen, werden nun in die Ausdrücke der virtuellen Arbeit der KIRCHHOFFSchen Platte, Gl. (2.21), eingesetzt. Bei der Ableitung der Ausdrücke der virtuellen Arbeiten wird im Folgenden darauf verzichtet, die unabhängigen Größen anzugeben.

2.3.1. Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

Mit den Ausdrücken für das diskrete System, Gl. (2.25) und Gl. (2.26), wird die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte für die Vereinigung aller Elemente

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV = - \bigcup_{(m)V^{(m)}} \int \delta \underline{\epsilon}^{(m)T} \underline{\sigma}^{(m)} dV^{(m)} = - \delta \hat{\underline{u}}^T \underbrace{\bigcup_{(m)V^{(m)}} \int \underline{B}^{(m)T} \underline{C}^{(m)} \underline{B}^{(m)} dV^{(m)}}_{\underline{K}^{(m)}} \hat{\underline{u}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{K}}$$

oder mit der Abkürzung der Systemsteifigkeitsmatrix \underline{K}

$$\delta W_{int} = - \delta \hat{\underline{u}}^T \underline{K} \hat{\underline{u}}.$$

Dabei ergibt sich der Vektor der generalisierten Koordinaten $\hat{\underline{u}}$ aus der Vereinigung der Knotenpunktverschiebungsvektoren für die einzelnen Elemente

$$\hat{\underline{u}} = \bigcup_{(m)} \hat{\underline{u}}^{(m)}.$$

Die Matrix

$$\underline{K}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \underline{B}^{(m)T} \underline{C}^{(m)} \underline{B}^{(m)} dV^{(m)} \quad (2.27)$$

wird als Elementsteifigkeitsmatrix bezeichnet und dessen Ableitung für spezielle finite Platenelemente ist Inhalt des Kapitels 3.

2.3.2. Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

Die analoge Vorgangsweise liefert einen Ausdruck für die virtuelle Arbeit der äußeren Kraftgrößen

$$\delta W_{ext} = \int_A \delta \underline{u}^T p dA = \bigcup_{(m)A^{(m)}} \int \delta \hat{\underline{u}}^{(m)T} \underline{H}^{(m)T} p dA^{(m)} = \delta \hat{\underline{u}}^T \underbrace{\bigcup_{(m)A^{(m)}} \int \underline{H}^{(m)T} p dA^{(m)}}_{\underline{F}_{ext}^{(m)}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{F}_{ext}}$$

des diskretisierten Systems, wobei die Belastung eine Funktion des Ortes $p(x, y)$ sein kann. Mit der Bezeichnung des Vektors der äußeren Kraftgrößen \underline{F}_{ext} lässt sich die virtuelle Arbeit in der Form

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{\underline{u}}^T \underline{F}_{ext}$$

angeben. Die Ableitung der Elementkraftgrößen

$$\underline{F}_{ext}^{(m)} = \int_{A^{(m)}} \underline{H}^{(m)T} p dA^{(m)} \quad (2.28)$$

wird in Kapitel 3 gezeigt.

2.3.3. Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

Die selbe Vorgangsweise auf die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte angewandt, ergibt

$$\delta W_{inertia} = \int_V \delta \underline{u}^T P (-\ddot{\underline{u}}) dV = - \bigcup_{(m)V^{(m)}} \int \delta \underline{u}^{(m)T} P \ddot{\underline{u}}^{(m)} dV^{(m)} = -\delta \hat{\underline{u}}^T \underbrace{\bigcup_{(m)V^{(m)}} \underline{H}^{(m)T} \underline{P}^{(m)} \underline{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{\underline{\overline{M}}^{(m)}} \hat{\underline{u}}.$$

$\underline{\overline{M}}$

Die Matrix $\underline{\overline{H}}$ unterscheidet sich zur Matrix \underline{H} aus Gl. (2.22) durch die Berücksichtigung der Verschiebungen u und v

$$\underline{u}(x, y, z; t)^{(m)} = \begin{bmatrix} u(x, y, z; t) \\ v(x, y, z; t) \\ w(x, y, 0; t) \end{bmatrix} = \underline{\overline{H}}(x, y, z)^{(m)} \hat{\underline{u}}(t)^{(m)},$$

wodurch die rotatorischen Trägheiten berücksichtigt werden. Entgegen obiger Konvention, erfolgt hier die Angabe der unabhängigen Größen. Es wird besonders darauf hingewiesen, dass im Unterschied zur Matrix der Ansatzfunktionen \underline{H} aus Gl. (2.22), die Matrix $\underline{\overline{H}}$ zusätzlich von der z -Koordinate des Systems abhängig ist. Hierin wird ausgedrückt, dass der Arbeitsweg der äußeren Lasten nur in z -Richtung, die Arbeitswege der Trägheitskräfte allerdings in alle drei Raumrichtungen wirken. Das Ableiten der Elementmassenmatrix

$$\underline{\overline{M}} = \int_{V^{(m)}} \underline{\overline{H}}^{(m)T} \underline{P}^{(m)} \underline{\overline{H}}^{(m)} dV^{(m)} \quad (2.29)$$

ist wieder Aufgabe des Kapitels 3. Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte lautet mit der Elementmassenmatrix $\underline{\overline{M}}$

$$\delta W_{inertia} = -\delta \hat{\underline{u}}^T \underline{\overline{M}} \ddot{\underline{u}}. \quad (2.30)$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass es wieder möglich ist, die rotatorischen Trägheiten zu vernachlässigen, wobei sich die virtuelle Arbeit

$$\delta W_{inertia} = \int_V \delta \underline{u} \rho (-\ddot{\underline{u}}) dV = - \bigcup_{(m)} \int_{V^{(m)}} \delta \underline{u}^{(m)T} \rho \ddot{\underline{u}}^{(m)} dV^{(m)} = -\delta \hat{\underline{u}}^T \underbrace{\bigcup_{(m)} \int_{V^{(m)}} \underline{\underline{H}}^{(m)T} \rho \underline{\underline{H}}^{(m)} dV^{(m)}}_{\underline{\underline{M}}^{(m)}} \hat{\underline{u}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\underline{M}}}$$

$$\delta W_{inertia} = -\delta \hat{\underline{u}}^T \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}$$

und die Elementmassenmatrix

$$\underline{\underline{M}} = \int_{V^{(m)}} \underline{\underline{H}}^{(m)T} \rho \underline{\underline{H}}^{(m)} dV^{(m)} \quad (2.31)$$

analog ergeben.

Zusammenfassend lässt sich die virtuelle Arbeit der KIRCHHOFFSchen Platte nach der Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente

$$\underbrace{-\delta \hat{\underline{u}}^T \underline{\underline{K}} \hat{\underline{u}}}_{\delta W_{int}} + \underbrace{\delta \hat{\underline{u}}^T \underline{\underline{F}}_{ext}}_{\delta W_{ext}} + \underbrace{-\delta \hat{\underline{u}}^T \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}}_{\delta W_{inertia}} = 0$$

bzw.

$$\delta \hat{\underline{u}}^T \left(-\underline{\underline{K}} \hat{\underline{u}} + \underline{\underline{F}}_{ext} - \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} \right) = 0 \quad (2.32)$$

schreiben [2, 6]. Gl. (2.32) muss für jede beliebige virtuelle Verschiebung $\delta \hat{\underline{u}}$ erfüllt sein, was dann - und nur dann - möglich ist wenn der Ausdruck in der Klammer verschwindet [6]. Hieraus folgt das lineare, inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\underline{\underline{K}} \hat{\underline{u}} + \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}_{ext}. \quad (2.33)$$

3. Konformes, dreieckiges Kirchhoff-Plattenelement

Nach der Einführung des Verschiebungsansatzes, Gl. (2.22), und der Diskretisierung der virtuellen Arbeit, wird die in Kapitel 2.3 vorgestellte Matrix der Ansatzfunktionen für das in dieser Arbeit behandelte KIRCHHOFF-Plattenelement abgeleitet. Die Ausführungen beginnen mit dem einfachsten Ansatz für dreieckige Elemente und baut die Inhalte für das von Hsieh, Clough und Tocher vorgestellte Element schrittweise auf.

3.1. Plattenelemente mit 9 generalisierten Koordinaten

Wir gehen für die folgenden Ableitungen von natürlichen Koordinaten r und s aus, wie sie in Abb. 3.1 für ein einfaches dreieckiges Plattenelement mit allgemeiner Lage im kartesischen Koordinatensystem dargestellt sind [6, 22].

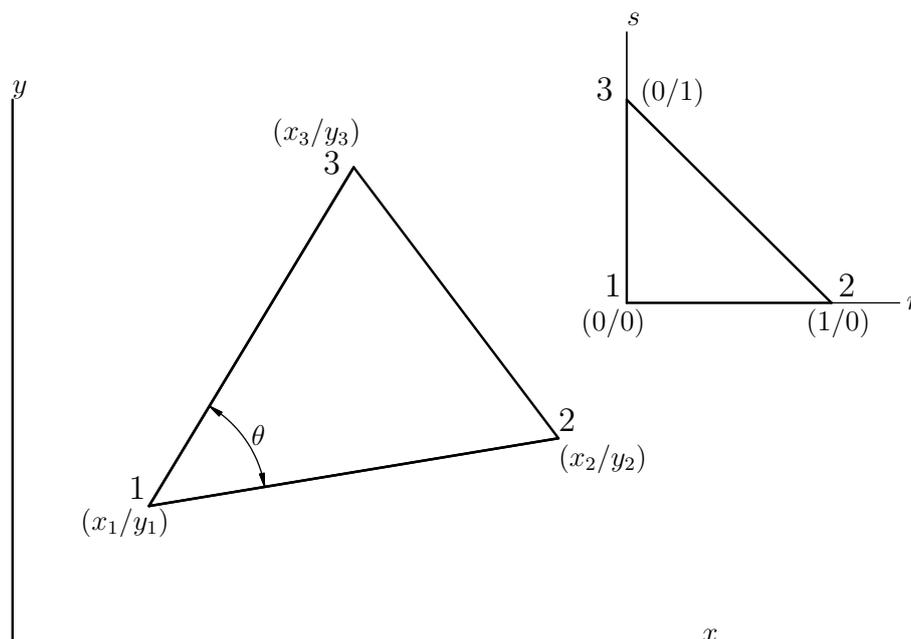


Abbildung 3.1.: Dreieckiges Plattenelement mit neun generalisierten Koordinaten

Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist innerhalb des Dreieckes durch

$$\begin{aligned} x(r, s) &= (1 - r - s)x_1 + r x_2 + s x_3 \\ y(r, s) &= (1 - r - s)y_1 + r y_2 + s y_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

gegeben. Ableitungen von Funktionen $h = h(x, y)$ nach den natürlichen Koordinaten erfolgen dann unter Beachtung der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} (-x_1 + x_2) + \frac{\partial}{\partial y} (-y_1 + y_2) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} (-x_1 + x_3) + \frac{\partial}{\partial y} (-y_1 + y_3). \quad (3.3)$$

Die Umkehrtransformation führt mit der JACOBI-Matrix

$$\underline{J}_{=1} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -x_1 + x_3 \\ -y_1 + y_2 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c_3 & -c_2 \\ -b_3 & +b_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

bzw. deren Inversen

$$\underline{J}_{=1}^{-1} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_1 + y_3 & +x_1 - x_3 \\ +y_1 - y_2 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +b_2 & +c_2 \\ +b_3 & +c_3 \end{bmatrix}$$

auf

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left(+b_2 \frac{\partial}{\partial r} + b_3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (3.5)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left(+c_2 \frac{\partial}{\partial r} + c_3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (3.6)$$

wobei die Abkürzungen

$$b_i = y_j - y_k \quad \text{und} \quad c_i = -(x_j - x_k) \quad (3.7)$$

eingeführt werden [4]. A ist die Fläche des Dreiecks und ergibt sich mit den Abkürzungen zu

$$2A = c_3 b_2 - c_2 b_3 = \det \underline{J}_{=1}. \quad (3.8)$$

Die minimale Anzahl an Freiheitsgraden ist mit der Verschiebung w , und den Verschiebungsableitungen $w_{,x}$ und $w_{,y}$ nach den jeweiligen Koordinatenrichtungen je Elementknoten gegeben. Um die drei Freiheitsgrade als Funktion der Freiheitsgrade in den Elementknoten ausdrücken zu können, wird ein vollständig kubisches Polynom mit 10 Termen gewählt. Da für die Geometrieapproximation mit Gl. (3.1) ein linearer Ansatz vorliegt, für die Verschiebungen aber ein Polynom dritter Ordnung, spricht man auch von einem subparametrischen Element [6]. Obwohl die Verschiebungsableitungen nach x und y gefordert werden, wird folgende Darstellung der Einfachheit halber in natürlichen Koordinaten durchgeführt, wobei der Zusammenhang mit dem kartesischen Koordinatensystem durch Gl. (3.5) und Gl. (3.6) gegeben ist.

Bestimmt man die zehn Koeffizienten des kubischen Polynoms

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 r s + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^3 + \alpha_8 r^2 s + \alpha_9 r s^2 + \alpha_{10} s^3 \quad (3.9)$$

unter Berücksichtigung der Ableitung in natürlichen Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= +\alpha_2 & + 2\alpha_4 r & + \alpha_5 s & + 3\alpha_7 r^2 & + 2\alpha_8 r s & + \alpha_9 s^2 \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= & +\alpha_3 & + \alpha_5 r & + 2\alpha_6 s & + \alpha_8 s^2 & + 2\alpha_9 r s & + \alpha_{10} s^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

durch Auswertung an den Elementknoten, so werden die Koeffizienten α_5 , α_8 und α_9 nicht vollständig bestimmt.

Erste Lösungsansätze für dieses Problem findet man in den Arbeiten von Adini [1] und Tocher [20]. Adini versuchte das Problem durch die Annahme $\alpha_5 = 0$ zu lösen und erhielt ein Element, welches keine konstanten Verwindenzustände, für den Fall $\theta = 90^\circ$ (vergleiche Abb. 3.1), abbilden kann [4, 9]. Tocher erhielt mit der Annahme $\alpha_8 = \alpha_9$ eine Einschränkung der Knotenfreiheitsgrade $w_{2,s} - w_{1,s} = w_{3,r} - w_{1,r}$. Das Element zeigt auf Grund der schlecht konditionierten Elementsteifigkeitsmatrix sehr langsames Konvergenzverhalten [4]. Weitere Versuche von Tocher, im Schwerpunkt des Dreiecks einen zusätzlichen Verschiebungsfreiheitsgrad anzusetzen und diesen anschließend zu kondensieren, führten ebenso nicht zum Ziel [9].

3.2. Plattenelement mit 10 generalisierten Koordinaten

Nach den obigen Überlegungen ist nun das Ziel, einen weiteren Freiheitsgrad einzuführen, um die zehn Koeffizienten des kubischen Polynoms eindeutig bestimmen zu können. Da mit dem kubischen Polynomansatz ein quadratischer Verlauf der Tangentialfläche gegeben ist, erscheint es sinnvoll den zehnten Freiheitsgrad als die Normalenableitung w_n in der Mitte einer der Seitenkanten zu wählen.

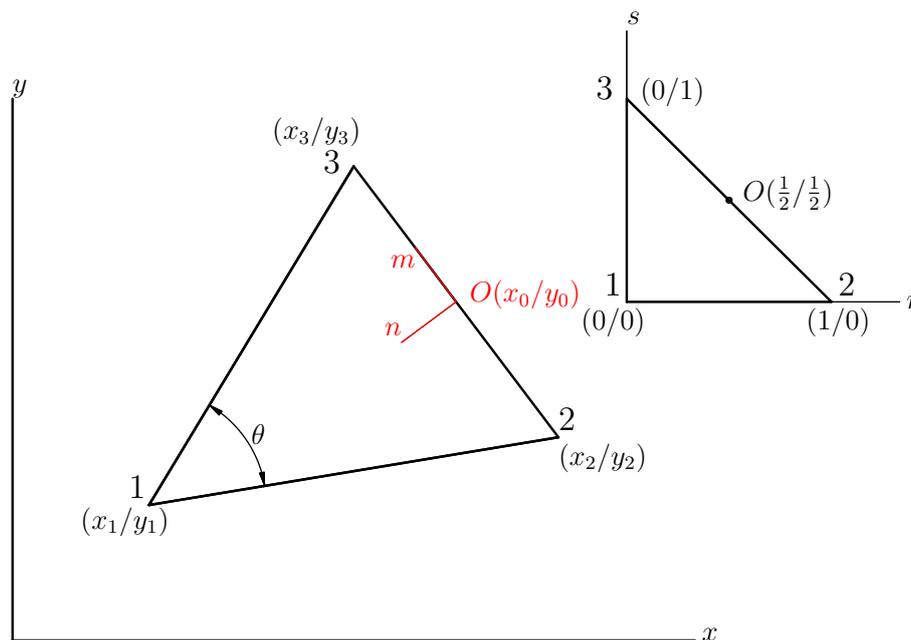


Abbildung 3.2.: Dreieckiges Plattenelement mit zehn generalisierten Koordinaten

Bevor wir einen solchen Freiheitsgrad einführen können, müssen wir einen Zusammenhang zwischen den im Mittelpunkt einer Seite befindlichen, lokalen jedoch rechtwinkligen m, n -Koordinatensystem und dem natürlichen Koordinatensystem, wie in Abb. 3.2 dargestellt herzustellen. Die Transformation der $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ -Koordinaten in m, n -Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} m(x, y) &= + \cos(m, x)(x - x_0) + \cos(m, y)(y - y_0) \\ n(x, y) &= + \cos(n, x)(x - x_0) + \cos(n, y)(y - y_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

und damit die JACOBI-Matrix

$$\underline{\underline{J}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(m, x) & \cos(m, y) \\ \cos(n, x) & \cos(n, y) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial}{\partial \underline{m}} \underline{\underline{J}}_2. \quad (3.13)$$

Einsetzen von Gl. (3.13) in die Definition der mit Gl. (3.4) gegebenen JACOBI-Matrix

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{\underline{J}}_1$$

ergibt den gesuchten Zusammenhang der Gradienten in natürlichen Koordinaten (r, s) und der Gradienten in lokalen Koordinaten (m, n)

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial}{\partial \underline{m}} \underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{J}}_1. \quad (3.14)$$

Die so entstandene JACOBI-Matrix führt auf

$$\underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{J}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial m}{\partial r} & \frac{\partial m}{\partial s} \\ \frac{\partial n}{\partial r} & \frac{\partial n}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und die Anwendung auf die mit Gl. (3.11) gegebene Koordinatentransformation liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial r} &= \cos(m, x)(-x_1 + x_2) + \cos(m, y)(-y_1 + y_2) = \cos(m, r) l_{12} \\ \frac{\partial m}{\partial s} &= \cos(m, x)(-x_1 + x_3) + \cos(m, y)(-y_1 + y_3) = \cos(m, s) l_{13} \\ \frac{\partial n}{\partial r} &= \cos(n, x)(-x_1 + x_2) + \cos(n, y)(-y_1 + y_2) = \cos(n, r) l_{12} \\ \frac{\partial n}{\partial s} &= \cos(n, x)(-x_1 + x_3) + \cos(n, y)(-y_1 + y_3) = \cos(n, s) l_{13}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Ableitungen der lokalen m, n -Koordinaten nach den natürlichen r, s -Koordinaten, stellen Projektionen der Elementkanten 1 – 2 und 1 – 3 auf die Kante, die den Knoten trägt (2 – 3) dar. Aus der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{m}} &= \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left(\underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{J}}_1 \right)^{-1} \\ \left(\underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{J}}_1 \right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial m} & \frac{\partial r}{\partial n} \\ \frac{\partial s}{\partial m} & \frac{\partial s}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \underbrace{\begin{bmatrix} -y_1 + y_3 & -(-x_1 + x_3) \\ -(-y_1 + y_2) & -x_1 + x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_1^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} +\cos(n, y) & -\cos(m, y) \\ -\cos(n, x) & +\cos(m, x) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_2^{-1}} \end{aligned}$$

folgt nach Ableiten entsprechend der Kettenregel

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial n} \quad (3.17)$$

und Abkürzung der auftretenden geometrischen Terme mit Gl. (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &= + \frac{\partial w}{\partial r} \left[\frac{(-y_1 + y_3)(-\cos(m, y)) - (-x_1 + x_3)(+\cos(m, x))}{2A} \right] \\ &+ \frac{\partial w}{\partial s} \left[\frac{(-y_1 + y_2)(-\cos(m, y)) + (-x_1 + x_2)(+\cos(m, x))}{2A} \right] \end{aligned}$$

der gesuchte Zusammenhang zwischen der Normalenableitung

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial r} \left[-\frac{l_{13} \cos(m, s)}{2A} \right] + \frac{\partial w}{\partial s} \left[+\frac{l_{12} \cos(m, r)}{2A} \right] \quad (3.18)$$

und der Ableitungen in Richtung der natürlichen Koordinaten.

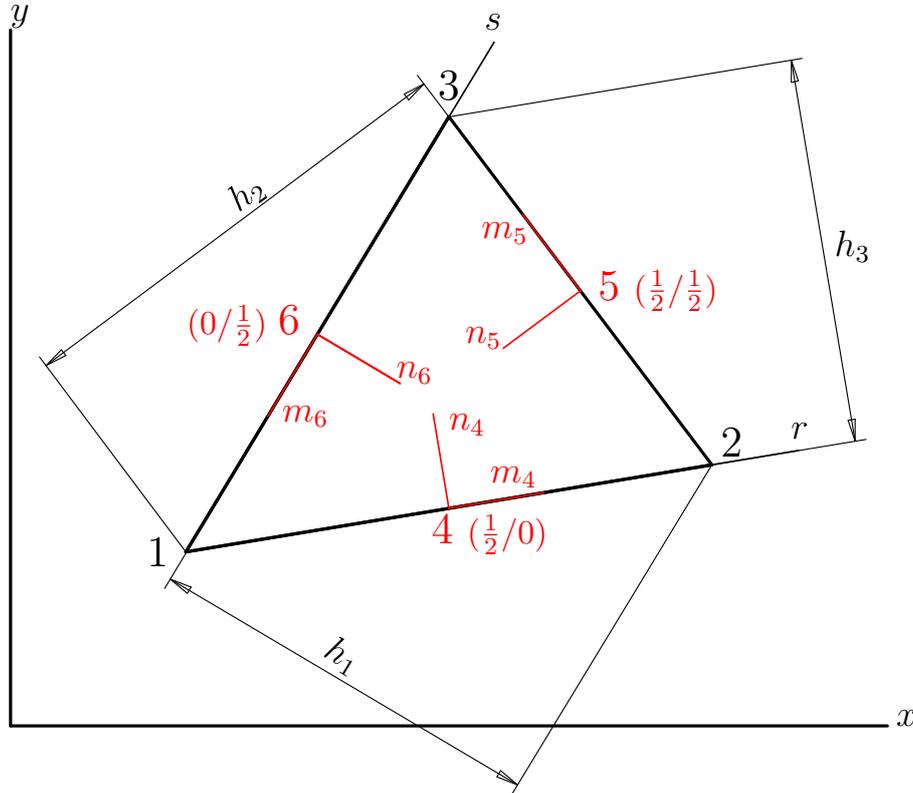


Abbildung 3.3.: Dreieckiges Plattenelement mit Kantenfreiheitsgraden

Setzt man in die oben gefundenen Beziehungen die Koordinaten der Knoten 4, 5 und 6 nach Abb. 3.3 ein, so lassen sich nach Multiplikation mit den entsprechenden Höhen des Dreiecks, die gefundenen Ausdrücke für die drei Knoten auf den Elementkanten weiter vereinfachen

$$\begin{aligned} w_{4,n} &= w_{4,r} \left[-\frac{l_{13} \cos(m_4, s)}{2A} \right] + w_{4,s} \left[+\frac{l_{12} \cos(m_4, r)}{2A} \right] \quad | \cdot h_3 \\ h_3 w_{4,n} &= -w_{4,r} \underbrace{\left[\frac{l_{13} \cos(m_4, s) h_3}{2A} \right]}_{d_3} + w_{4,s} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} w_{5,n} &= w_{5,r} \left[-\frac{l_{13} \cos(m_5, s)}{2A} \right] + w_{5,s} \left[+\frac{l_{12} \cos(m_5, r)}{2A} \right] \quad | \cdot h_1 \\ h_1 w_{5,n} &= -w_{5,r} \underbrace{\left[\frac{l_{13} \cos(m_5, s) h_1}{2A} \right]}_{d_1} - w_{5,s} \underbrace{\left[\frac{-l_{12} \cos(m_5, s) h_1}{2A} \right]}_{1-d_1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
w_{6,n} &= w_{6,r} \left[-\frac{l_{13} \cos(m_6, s)}{2A} \right] + w_{6,s} \left[+\frac{l_{12} \cos(m_6, r)}{2A} \right] \quad | \cdot h_2 \\
h_2 w_{6,n} &= w_{6,r} - w_{6,s} \underbrace{\left[\frac{-l_{12} \cos(m_6, s) h_2}{2A} \right]}_{d_2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Wählt man nun die Normalenableitung in Knoten 5, Gl. (3.20), als zehnten Freiheitsgrad, so lassen sich die Polynomkoeffizienten eindeutig bestimmen. Unter Berücksichtigung der folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned}
f_1 &= r^2(3 - 2r) \\
f_2 &= r^2(r - 1) \\
f_3 &= r^2 s \\
f_4 &= s^2(3 - 2s) \\
f_5 &= r s^2 \\
f_6 &= s^2(s - 1) \\
f_7 &= 1 - f_1 - f_4 \\
f_8 &= r[(r - 1)^2 - s^2] \\
f_9 &= s[(s - 1)^2 - r^2] \\
f_{10} &= r s(1 - r - s)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ergeben sich die Komponenten der in Kapitel 2.3 mit Gl. (2.22) eingeführten H-Matrix zu

$$\begin{aligned}
h_1 &= (f_7 - 6f_{10}) \\
h_2 &= [c_3(f_8 - 2f_{10}) - c_2(f_9 - 2f_{10})] \\
h_3 &= [-b_3(f_8 - 2f_{10}) + b_2(f_9 - 2f_{10})] \\
h_4 &= (f_1 + 6d_1 f_{10}) \\
h_5 &= \{c_3(f_2 - d_1 f_{10}) - c_2[f_3 + (1 + d_1) f_{10}]\} \\
h_6 &= \{-b_3(f_2 - d_1 f_{10}) + b_2[f_3 + (1 + d_1) f_{10}]\} \\
h_7 &= [f_4 + 6(1 - d_1) f_{10}] \\
h_8 &= \{c_3[f_5 + (2 - d_1) f_{10}] - c_2[f_6 - (1 - d_1) f_{10}]\} \\
h_9 &= \{-b_3[f_5 + (2 - d_1) f_{10}] + b_2[f_6 - (1 - d_1) f_{10}]\} \\
h_{10} &= 4h_1 f_{10}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Nach Transformation der gefundenen Komponenten in das x, y -Koordinatensystem mit Gl. (3.5) und Gl. (3.6), lässt sich die mit Gl. (2.22) gegebene Durchbiegung nun in der Gestalt

$$w = h_1 w_1 + h_2 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_1 + h_3 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_1 + h_4 w_2 + h_5 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_2 + h_6 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_2 + h_7 w_3 + h_8 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_3 + h_9 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_3 + h_{10} \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_5$$

als Funktion der Knotenfreiheitsgrade angeben.

Diese Vorgangsweise sichert die Stetigkeit der Verschiebungen entlang aller Elementkanten. Stetigkeit der Normalenableitung ist an der Elementkante 2-3 gegeben, jedoch nicht an den Kanten 1-2 und 1-3 [4].

3.3. Plattenelement mit 12 generalisierten Koordinaten

Das in Kapitel 3.2 vorgestellte Element mit zehn generalisierten Koordinaten, wird nun verwendet, um ein konformes, dreieckiges Plattenelement abzuleiten. Hierfür werden drei dieser Elemente, wie in Abb. 3.4 dargestellt, angeordnet [4, 9, 13]. Dabei muss darauf geachtet werden, dass sich die Ursprünge der natürlichen Koordinatensysteme der Subelemente im gemeinsamen Punkt C befinden.

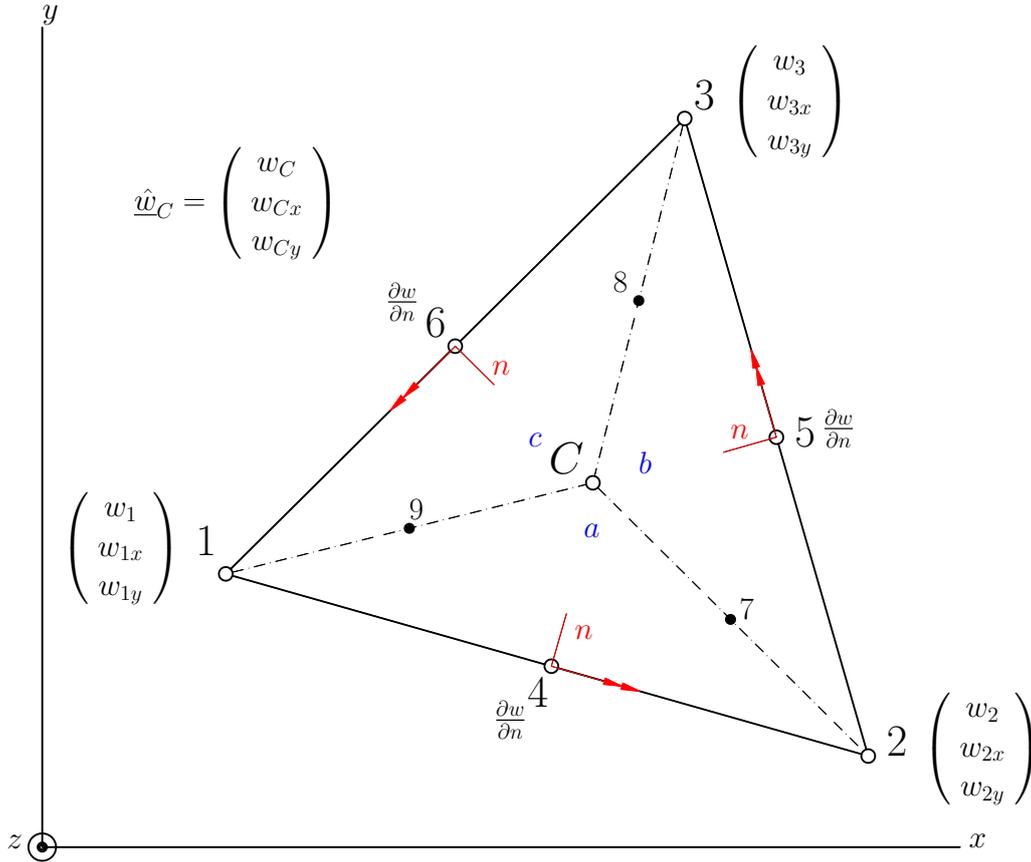


Abbildung 3.4.: Dreieckiges Plattenelement mit zwölf generalisierten Koordinaten

Die Koppelung der drei Subelemente a, b und c an den Eckknoten bedingt die Erfüllung der kinematischen Koppelbedingungen

$$\begin{aligned}
 w_1^c - w_1^a &= 0, & w_{1x}^c - w_{1x}^a &= 0, & w_{1y}^c - w_{1y}^a &= 0, \\
 w_2^a - w_2^b &= 0, & w_{2x}^a - w_{2x}^b &= 0, & w_{2y}^a - w_{2y}^b &= 0, \\
 w_3^b - w_3^c &= 0, & w_{3x}^b - w_{3x}^c &= 0, & w_{3y}^b - w_{3y}^c &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mit diesen neun Gleichungen reduzieren sich die Freiheitsgrade von den $3 \cdot 10 = 30$ Freiheitsgraden der 3 Subelemente, auf 21 noch zu bestimmende Freiheitsgrade. Sechs weitere Bestimmungsgleichungen können aus der kinematischen Koppelung der Subelemente im gemeinsamen Punkt C generiert werden

$$\begin{aligned}
 w_C^c - w_C^a &= 0, & w_{Cx}^c - w_{Cx}^a &= 0, & w_{Cy}^c - w_{Cy}^a &= 0, \\
 w_C^a - w_C^b &= 0, & w_{Cx}^a - w_{Cx}^b &= 0, & w_{Cy}^a - w_{Cy}^b &= 0, \\
 w_C^b - w_C^c &= 0, & w_{Cx}^b - w_{Cx}^c &= 0, & w_{Cy}^b - w_{Cy}^c &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Durch Einführung der Freiheitsgrade w_C , w_{Cx} und w_{Cy} im Punkt C können jedoch aus den neun Gleichungen nur sechs weitere Unbekannte eliminiert werden. Es verbleiben also noch 15 Freiheitsgrade [9]. Die Forderung, dass die Subelemente an den inneren Elementkanten auch einen stetigen Übergang der Normalenableitungen aufweisen müssen, wird unter Berücksichtigung der Gl. (3.19) und Gl. (3.21), durch drei weitere Gleichungen an den Punkten 7, 8 und 9

$$\begin{aligned} w_{7n}^a - w_{7n}^b &= 0, \\ w_{8n}^b - w_{8n}^c &= 0, \\ w_{9n}^c - w_{9n}^b &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

sichergestellt. Durch das mit Gl. (3.26) gegebene Gleichungssystem lassen sich die drei Freiheitsgrade im Punkt C durch die zwölf resultierenden Elementfreiheitsgrade ausdrücken [4, 9, 13]. Aufstellen der Gl. (3.19) und Gl. (3.21) für das jeweilige Subelement und Einsetzen in die mit Gl. (3.26) gegebenen kinematischen Zwangsbedingungen, führt nach Umordnung der entsprechenden Terme, unter Berücksichtigung des Vektors der generalisierten Koordinaten

$$\hat{\underline{u}}_A = [w_1 \ w_{1x} \ w_{1y} \ | \ w_2 \ w_{2x} \ w_{2y} \ | \ w_3 \ w_{3x} \ w_{3y} \ | \ w_{4n} \ w_{5n} \ w_{6n}]^T \quad (3.27)$$

auf ein Gleichungssystem der Form

$$\underline{\underline{A}} \hat{\underline{u}}_C = \underline{\underline{B}} \hat{\underline{u}}_A.$$

Nach Inversion

$$\begin{aligned} \hat{\underline{u}}_C &= \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{Q}}} \hat{\underline{u}}_A \\ \hat{\underline{u}}_C &= \underline{\underline{Q}} \hat{\underline{u}}_A \end{aligned} \quad (3.28)$$

erhält man mit der Matrix $\underline{\underline{Q}}$ Ausdrücke für die Freiheitsgrade des Punktes C als Funktion der zwölf generalisierten Koordinaten. Die Spalte $\hat{\underline{u}}_C$ enthält die Freiheitsgrade im Punkt C.

Die Freiheitsgrade des Punktes C können nun unter Berücksichtigung der mit Gl. (3.28) gegebenen kinematischen Nebenbedingungen kondensiert werden [4, 9, 13]. Die Kondensation ergibt für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte, mit dem Vektor der generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} \hat{\underline{u}} &= \underbrace{[w_1 \ w_{1x} \ w_{1y} \ | \ w_2 \ w_{2x} \ w_{2y} \ | \ w_3 \ w_{3x} \ w_{3y} \ | \ w_{4n} \ w_{5n} \ w_{6n}]}_{\hat{\underline{u}}_A^T} \underbrace{[w_C \ w_{Cx} \ w_{Cy}]}_{\hat{\underline{u}}_C^T} \\ \delta W_{int} &= - [\delta \hat{\underline{u}}_A^T \ \delta \hat{\underline{u}}_C^T] \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{AA} & \underline{\underline{K}}_{AC} \\ \underline{\underline{K}}_{CA} & \underline{\underline{K}}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_A \\ \hat{\underline{u}}_C \end{bmatrix} \\ \delta W_{int} &= - \left(\delta \hat{\underline{u}}_A^T \underline{\underline{K}}_{AA} + \delta \hat{\underline{u}}_C^T \underline{\underline{K}}_{CA} \right) \hat{\underline{u}}_A - \left(\delta \hat{\underline{u}}_A^T \underline{\underline{K}}_{AC} + \delta \hat{\underline{u}}_C^T \underline{\underline{K}}_{CC} \right) \hat{\underline{u}}_C \\ \delta W_{int} &= - \delta \hat{\underline{u}}_A^T \left(\underline{\underline{K}}_{AA} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{K}}_{CA} + \underline{\underline{K}}_{AC} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{K}}_{CC} \underline{\underline{Q}} \right) \hat{\underline{u}}_A \end{aligned} \quad (3.29)$$

wobei obiger Ausdruck wieder für beliebige virtuelle Verschiebungen gültig sein muss, woraus sich die Steifigkeitsmatrix für das Element nach Hsieh, Clough und Tocher, kurz HCT-Element, mit zwölf Freiheitsgraden ergibt

$$\underline{\underline{K}}_{HCT} = \underline{\underline{K}}_{AA} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{K}}_{CA} + \underline{\underline{K}}_{AC} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{K}}_{CC} \underline{\underline{Q}}. \quad (3.30)$$

Ohne explizite Herleitung ergibt sich auf analogem Weg, aus der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte die Massenmatrix des Elements, zu

$$\underline{\underline{M}}_{HCT} = \underline{\underline{M}}_{AA} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}}_{CA} + \underline{\underline{M}}_{AC} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}}_{CC} \underline{\underline{Q}}. \quad (3.31)$$

Aus der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= [\delta \hat{\underline{u}}_A^T \quad \delta \hat{\underline{u}}_C^T] \begin{bmatrix} \underline{F}_A \\ \underline{F}_C \end{bmatrix} \\ \delta W_{ext} &= \delta \hat{\underline{u}}_A^T \left(\underline{F}_A + \underline{\underline{Q}}^T \underline{F}_C \right) \hat{\underline{u}}_A \end{aligned}$$

folgen die Elementkraftgrößen

$$\underline{F}_{HCT} = \underline{F}_A + \underline{\underline{Q}}^T \underline{F}_C. \quad (3.32)$$

Das so entstandene Element ist das von Hsieh 1963 vorgeschlagene Element mit zwölf generalisierten Koordinaten. Die Methodik der Assemblierung ist jene, die von Clough und Tocher 1965 vorgestellt wurde. Unter der Annahme eines linearen Verlaufes der Normalenableitung entlang der äußeren Elementkanten, lässt sich eine auf neun Freiheitsgrade reduzierte Version ableiten [4, 9].

Eine weitere Modifikation des Elementes nach Hsieh, Clough und Tocher wurde 1968 von Clough und Felippa auf der *Second Conference on Matrix Methods in Structural Analysis* auf der Wright-Patterson AFB vorgestellt [7]. Bei diesem Element handelt es sich um ein rechteckiges Plattenelement, das in vier Subdreiecke unterteilt ist, wobei für jedes Subdreieck das von Hsieh vorgeschlagene dreieckige Element mit drei Subdreiecken verwendet wird. Die Assemblierung des Rechteckelementes benutzt wieder kinematische Zwangsbedingungen innerhalb des Elementes zur Kondensation des Koppelpunktes der vier Subdreiecke [7, 13].

Gallagher [13] vervollständigt die Reihe der Elemente welche durch *triangular element subdivision* generiert werden, in dem er ein von Connor und Will [10] vorgeschlagenes dreieckiges Plattenelement zeigt. Dieses dreieckige Element wird nur aus zwei Subdreiecken assembliert. Für die Assemblierung lässt Connor die gemeinsame Kante der beiden Subdreiecke mit der geometrischen Höhe des Dreiecks zusammenfallen. Für die beiden Subdreiecke wird jeweils ein neungliedriger Polynomansatz gewählt, wobei sich beide Polynome einen gemeinsamen Satz an Koeffizienten teilen. Durch geeignete Wahl des lokalen Koordinatensystems, und Forderung eines linearen Verlaufes der Normalenableitung an zwei Elementaußenkanten, lassen sich die Koeffizienten eindeutig bestimmen.

Die Ergebnisse, die mit dem oben abgeleiteten Element am Beispiel der Kreisplatte unter statischer Gleichlast erhalten wurden, findet man mit einem Vergleich der analytischen Lösung im Anhang A dieser Arbeit. Das Konvergenzverhalten des HCT12-Elementes ist für die Kreisplatte unter Berücksichtigung zweier unterschiedlicher Lagerungen in Anhang B wiedergegeben. Eine mit dem Element gerechnete Eigenwertanalyse, und die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren, sind im Vergleich mit der analytischen Lösung im Anhang D wiedergegeben. Um die Güte des Elementes im Vergleich mit der analytischen Lösung zu messen,

wurde die vereinfachte Massenmatrix nach Gl. (2.31) verwendet, da keine analytische Lösung unter Berücksichtigung der rotatorischen Trägheiten bekannt war. Der Unterschied, der sich aus der Vernachlässigung der rotatorischen Trägheiten in der Elementmassenmatrix ergibt, ist ebenso im Anhang D zu finden.

Abschließend sei noch angemerkt, dass Brebbia und Connor [4] Punkt C in allgemeiner Lage skizzieren, jedoch, genauso wie Clough und Tocher [9], für die Lage des Punktes C den Schwerpunkt des Dreiecks vorschlagen. Dies stellt tatsächlich die günstigste Variante dar. Die Subelemente sind für die Lage im Schwerpunkt gleichseitige Dreiecke, und man erkennt in Gl. (3.20), dass sich dann - und nur dann - keine der beiden natürlichen Koordinaten bei der Bildung der Normalenableitung im lokalen Punkt 5 (vergleiche Abb. 3.3) bevorzugt wird. Eine sehr einfache Sensitivitätsstudie, die den Einfluß der Wahl des Punktes C auf die Güte der mit dem Element gefundenen Lösung zeigt, findet man in Anhang C.

4. Analytische Lösung der Plattengleichung

Die Plattengleichung wird vorerst in einem kartesischen Koordinatensystem unter Berücksichtigung von Temperaturmomenten sowie translatorischen und rotatorischen Trägheiten abgeleitet. Später erfolgt der Übergang auf ein Polarkoordinatensystem mit rotationssymmetrischer Belastung und Geometrie ohne Temperaturfeld. Die rotationssymmetrische Plattengleichung wird anschließend für statische und dynamische Aufgaben gelöst.

4.1. Die Plattengleichung

Abb. 4.1 zeigt zwei Schnitte parallel zur x, z - und y, z -Koordinatenebene in der unverformten und verformten Konfiguration einer dünnen Platte. Legt man die KIRCHHOFFSche Hypothese bei der Ableitung der Plattengleichung zu Grunde, so bleiben Querschnitte vor und nach der Verformung senkrecht auf die Mittelebene.

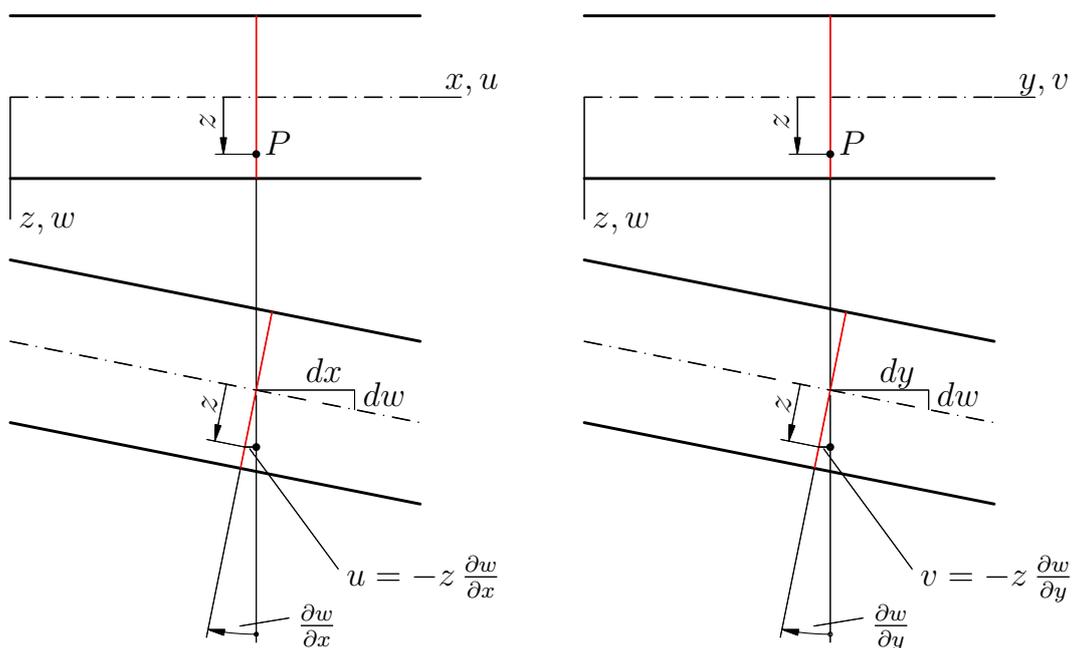


Abbildung 4.1.: Kinematik der Schubstarren Platte

Die kinematischen Größen ergeben

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z; t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v(x, y, z; t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 w(x, y, z; t) &= w(x, y, 0; t)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

wobei die Abhängigkeiten von den kartesischen Raumkoordinaten und der Zeit im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht weiter angeführt werden.

Die Verzerrungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= +\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Gleichungen für γ_{yz} und γ_{zx} in Gl. (4.2) drücken die KIRCHHOFFSche Hypothese von der Erhaltung des Winkels zwischen dem Querschnitt und der Mittelebene aus. Für die weitere Ableitung der Plattengleichung müssen neben der Normalenhypothese zwei weitere Modellannahmen zu Grunde gelegt werden [16]. Zum einen wird gefordert, dass die Mittelebene unverzerrt bleibt. Dies ist durch Einhalten der Bedingung $w \ll h$ erfüllt. Zudem wird noch gefordert, dass Normalspannungen in Schnitten parallel zur Mittelebene vernachlässigt werden dürfen, d.h. $\sigma_{zz} = 0$ [14, 16]. Dies wird durch Einhalten der Bedingung

$$h \ll l, b \tag{4.3}$$

erfüllt, wobei anzumerken ist, dass die Einhaltung der Bedingung Gl. (4.3) auch schon für die Normalenhypothese gefordert wird und somit keine weitere Einschränkung darstellt. Für dünne Platten lässt sich dieser Sachverhalt, ohne ihn explizit zu zeigen, in der Form

$$|\sigma_{zz}| \ll |\sigma_{xx}|, |\sigma_{yy}|$$

darstellen [5]. Für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen wird von einem isotropen, homogenen Material ausgegangen, welches dem HOOKEschen Gesetz genügt und sich für den ebenen Spannungszustand mit dem Temperaturfeld

$$T := {}^tT - {}^0T \tag{4.4}$$

zu

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (+\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) + \alpha T \\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha T \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ergibt [16]. Löst man die Gl. (4.5) nach den Kraftgrößen auf, so ergeben sich mit den Verzerrungen aus Gl. (4.2) die Spannungen der KIRCHHOFFSchen Platte

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_{xx} - \alpha T) + \nu(\epsilon_{yy} - \alpha T)] &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\nu(\epsilon_{xx} - \alpha T) + (\epsilon_{yy} - \alpha T)] &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

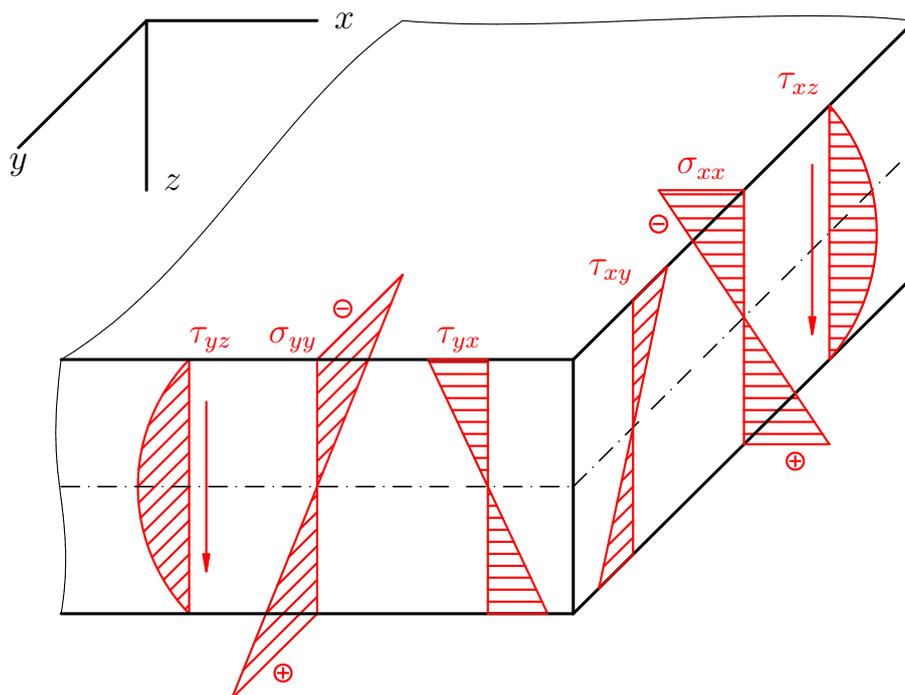


Abbildung 4.2.: Spannungen an der schubstarreren Platte

In der Plattentheorie ist es weiters üblich Schnittmomente

$$m_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_{xx} dz \quad m_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_{yy} dz \quad m_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \tau_{xy} dz \quad (4.7)$$

und Schnittkräfte

$$q_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz \quad q_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \quad (4.8)$$

bezogen auf die Längeneinheit einzuführen [5].

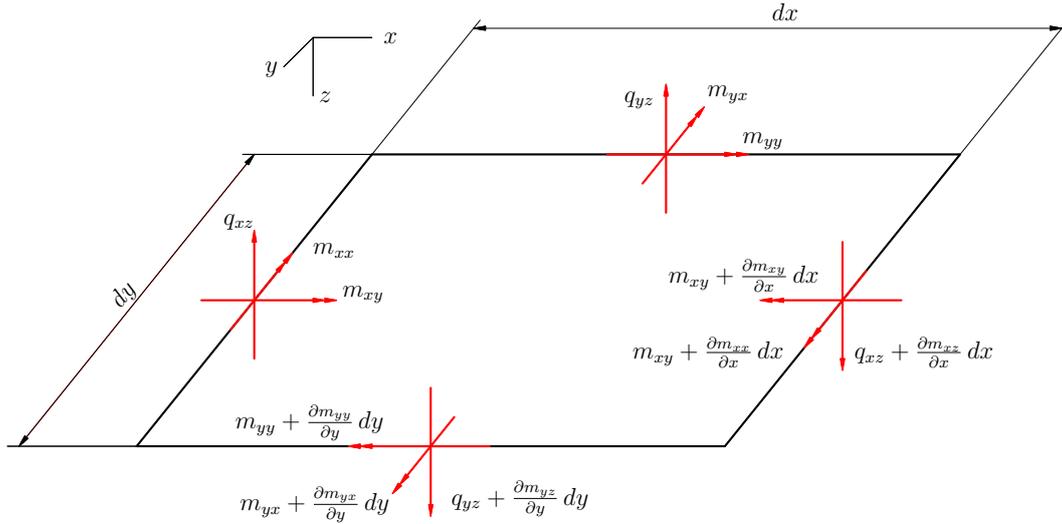


Abbildung 4.3.: Mittelenebene der Platte mit längenbezogenen Schnittgrößen

Obwohl sich in der Normalentheorie die Gleitungen γ_{yz} und γ_{zx} in Gl. (4.2) zu Null ergeben, bleiben die entsprechenden Spannungen τ_{xz} und τ_{yz} aus Gleichgewichtsgründen erhalten. Dass die Spannungen keine Gleitungen bewirken, ist gleichbedeutend mit einer gegen ∞ strebenden Schubsteifigkeit der Platte

$$\gamma_{xz} = \lim_{G_n \rightarrow \infty} \frac{\tau_{xz}}{G_n} \quad \gamma_{yz} = \lim_{G_n \rightarrow \infty} \frac{\tau_{yz}}{G_n}. \quad (4.9)$$

Dies führt in Analogie zum schubstarreren Balken zum Begriff der schubstarreren Platte [5, 14, 16]. Nach Einsetzen der Spannungskomponenten aus Gl. (4.6) in die längenbezogenen Schnittmomente, Gl. (4.7), und Durchführen der Integration ergeben sich die längenbezogenen Schnittmomente zu

$$\begin{aligned} m_{xx} &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 + \nu) \alpha \Theta \right] \\ m_{yy} &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + \nu) \alpha \Theta \right] \\ m_{xy} &= -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei mit der Abkürzung

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.11)$$

die Plattenbiegesteifigkeit eingeführt wird und mit

$$\Theta = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} zT dz \quad (4.12)$$

ein Temperaturmoment gegeben ist.

Der Drallsatz um die y -Achse des Koordinatensystems führt unter Berücksichtigung der rotatorischen Trägheit auf

$$-dx q_{xz} dy + \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad | : (dx dy)$$

bzw.

$$q_{xz} = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (4.13)$$

Analog ergibt der Drallsatz um die x -Achse des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} -dy q_{yz} dx + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dy dx + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} dx dy &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad | : (dx dy) \\ q_{yz} &= \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

die zweite vertikale Querkraft je Längeneinheit. Der Impulssatz in positiver z -Richtung ergibt unter Berücksichtigung der translatorischen Trägheit

$$-q_{xz} dy + (q_{xz} + \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} dx) dy - q_{yz} dx + (q_{yz} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} dy) dx + p dx dy - \rho h dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad | : (dx dy)$$

bzw.

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} = -p + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.15)$$

Ableiten der Gl. (4.13) partiell nach x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} | q_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 + \nu) \alpha \Theta \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= -K \frac{\partial}{\partial x} [\Delta w + (1 + \nu) \alpha \Theta] + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

und Ableiten der Gl. (4.14) partiell nach y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} | q_{yz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + \nu) \alpha \Theta \right] \right\} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= -K \frac{\partial}{\partial y} [\Delta w + (1 + \nu) \alpha \Theta] + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

ermöglicht das Einsetzen in Gl. (4.15)

$$-K \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Delta w + (1 + \nu) \alpha \Theta] - K \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\Delta w + (1 + \nu) \alpha \Theta] + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} = -p + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Zusammenfassen der entsprechenden Terme und Einführen des LAPLACE-Operators Δ ergibt die gesuchte Plattengleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{K} (p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2}) - (1 + \nu) \alpha \Delta \Theta \quad (4.18)$$

unter Berücksichtigung von flächenförmig verteilten Querbewegungen, der rotatorischen und translatorischen Trägheiten und Temperaturmomenten. Der LAPLACE-Operator Δ ist für das kartesische Koordinatensystem der Ebene mit der skalaren Feldgröße ϕ

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

gegeben. Für eine ausführliche Darstellung mathematischer Differentialoperatoren in kartesischen und krummlinigen Koordinaten wird, zum Beispiel, auf Spurr und Aksel [17] verwiesen.

4.2. Die Plattengleichung für rotationssymmetrische Probleme

Um das in Kapitel 3 vorgestellte finite Element mit einer analytischen Lösung vergleichen zu können, wurde das Beispiel der Kreisplatte gewählt. In Parkus [16] wird die Plattengleichung direkt für rotationssymmetrische Geometrie und rotationssymmetrische Belastung unter Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit und verschwindendem Temperaturfeld abgeleitet. Es wurde bewusst darauf verzichtet diese Form der Ableitung hier wiederzugeben, da sie zum einen der selben Vorgangsweise wie in Kapitel 4.1 folgt, und zum anderen, obwohl in kartesischen Koordinaten abgeleitet, in der Darstellung von Gl. (4.18) für beliebige Koordinatensysteme gültig ist. Der Wechsel des Koordinatensystems erfolgt durch Anwendung des entsprechenden LAPLACE-Operators für das jeweilige Koordinatensystem.

Ausgangspunkt für die Behandlung der rotationssymmetrischen Probleme ist die Plattengleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{K}(p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2}) - (1 + \nu)\alpha\Delta\Theta,$$

welche sich für verschwindendes Temperaturfeld und Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit auf

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{K}(p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \quad (4.19)$$

reduziert. Der LAPLACE-Operator für ein Polarkoordinatensystem ist mit

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

gegeben, wobei ϕ wieder eine skalare Feldgröße darstellt [17]. Für die rotationssymmetrische Plattengeometrie entfällt der mittlere Term und der LAPLACE-Operator vereinfacht sich auf

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (4.20)$$

Gl. (4.19) und Gl. (4.20) sind die Basis für die in Kapitel 4.3 und Kapitel 4.4 dargestellten analytischen Lösungen.

Eine umfangreiche Darstellung von analytischen Lösungen der Kreisplatte findet man in Girkmann [14] und Timoshenko und Woinowsky-Krieger [19].

4.3. Kreisplatte unter statischer Gleichlast

Für eine ruhende Belastung entfällt der Trägheitsterm in Gl. (4.19) und die Plattengleichung nimmt für konstante Belastung p die Form

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{K}.$$

an.

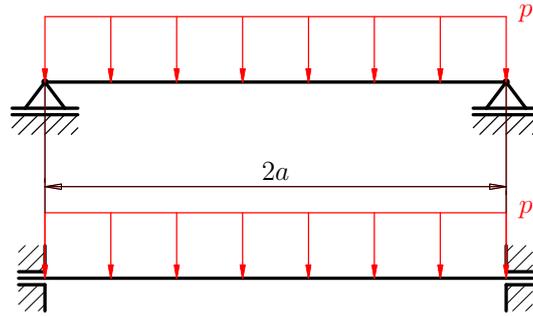


Abbildung 4.4.: Kreisplatte unter statischer Gleichlast

Eine allgemeine Lösung ist mit

$$w = c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln \frac{r}{a} + c_4 r^2 \ln \frac{r}{a} + w_1 \quad (4.21)$$

gegeben. Hierin sind c_1 bis c_4 Konstanten und w_1 das Partikulärintegral der inhomogenen Differentialgleichung. Für konstante Druckbelastung gilt für das Partikulärintegral

$$w_1 = \frac{p}{K} \int_0^a \frac{dr}{r} \int_0^a r dr \int_0^a \frac{dr}{r} \int_0^a r dr = \frac{p}{K} \frac{r^4}{64}. \quad (4.22)$$

Die Konstanten c_1 bis c_4 folgen aus den Randbedingungen, wobei c_3 und c_4 Null gesetzt werden, da die Durchbiegung in Plattenmitte beschränkt bleiben muss. Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich aus den Randbedingungen [16].

4.3.1. Die eingespannte Kreisplatte

Für die eingespannte Platte lauten die Randbedingungen zum Bestimmen der noch unbekanntenen Konstanten c_1 und c_2 bei $r = a$

$$w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dr} = 0.$$

Mit dem homogenen Lösungsteil von Gl. (4.21) ergeben sich die Konstanten zu

$$c_1 = \frac{p a^4}{64K} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{p a^2}{32K}.$$

Die geschlossene Lösung der eingespannten Platte unter konstanter Flächenlast lautet somit

$$w = \frac{p}{64K} (a^4 - 2a^2 r^2 + r^4).$$

Ein Beispiel und der Vergleich mit den Ergebnissen aus der Berechnung mit dem finiten Element aus Kapitel 3 ist in Anhang A gegeben.

4.3.2. Die frei drehbar gelagerte Kreisplatte

Für die frei drehbar gelagerte Platte lauten die Randbedingungen bei $r = a$

$$w = 0 \quad \text{und} \quad m_{rr} = 0.$$

Mit dem Moment aus Gl. (4.10) und dem LAPLACE-Operator nach Gl. (4.20) ergibt die zweite Randbedingung

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0$$

in $r = a$. Hieraus folgen mit dem homogenen Teil aus Gl. (4.21) die Konstanten

$$c_1 = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{p a^4}{64K} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{p a^2}{32K}.$$

Die geschlossene Lösung der frei drehbar gelagerten Platte unter konstanter Flächenlast lautet mit der partikulären Lösung, Gl. (4.22),

$$w = \frac{p}{64K} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^4 - 2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} a^2 r^2 + r^4 \right).$$

Ein Beispiel und der Vergleich mit den Ergebnissen aus der Berechnung mit dem finiten Element aus Kapitel 3 ist in Anhang A gegeben.

4.4. Biegeschwingungen der eingespannten Kreisplatte

4.4.1. Freie Biegeschwingungen der eingespannten Kreisplatte

Ausgehend von der in Parkus [16] gegebenen Plattengleichung für die rotationssymmetrische Kreisplatte, Gl. (4.19), und dem LAPLACE-Operator in Polarkoordinaten, Gl. (4.20), werden die freien Plattenschwingungen ermittelt. Für $p = 0$ wird die Plattengleichung mit dem Separationsansatz, oft auch als BERNOULLISCHER Ansatz bezeichnet,

$$w(r, t) = R(r) \cos(\omega t - \epsilon)$$

in die Form

$$\Delta \Delta R(r) - \lambda^4 R(r) = 0 \tag{4.23}$$

transformiert, wobei die Abkürzung

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{K} \omega^2} \tag{4.24}$$

eingeführt wird. ϵ stellt eine Phasenverschiebung zwischen der Anregung und der Schwingantwort dar. Gl. (4.23) muss noch die Randbedingungen der eingespannten Platte

$$R = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dR}{dr} = 0 \tag{4.25}$$

in $r = a$ erfüllen. Es lässt sich zeigen, dass jede Lösung einer der Gleichungen

$$\Delta R = +\lambda^2 R, \quad \Delta R = -\lambda^2 R$$

auch Lösung von Gl. (4.23) ist. Mit dem LAPLACE-Operator nach Gl. (4.20) erhalten wir eine BESSELSche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \pm \lambda^2 R = 0.$$

Die Lösung der Gleichung ergibt für das positive Vorzeichen $J_0(\lambda r)$ und $N_0(\lambda r)$, für das negative Vorzeichen $I_0(\lambda r)$ und $K_0(\lambda r)$. $J_0(\lambda r)$ und $N_0(\lambda r)$ sind die BESSELSchen Funktionen erster und zweiter Art der Ordnung Null, $I_0(\lambda r)$ und $K_0(\lambda r)$ sind die modifizierten BESSELSchen Funktionen erster und zweiter Art der Ordnung Null [16]. Da $N_0(\lambda r)$ und $K_0(\lambda r)$ für $r \rightarrow 0$ gegen ∞ streben, wird die gesuchte Lösungsfunktion als Linearkombination der beiden verbleibenden BESSELSchen Funktionen

$$R(r) = AJ_0(\lambda r) + BI_0(\lambda r) \quad (4.26)$$

festgelegt. Die Ableitung des Lösungsansatzes ergibt mit den Differentiationsformeln

$$\begin{aligned} \frac{J_0(r)}{dr} &= -J_1(r) & \text{und} & & \frac{I_0(r)}{dr} &= I_1(r) \\ \frac{dR}{dr} &= -\lambda AJ_1(\lambda r) + \lambda BI_1(\lambda r). \end{aligned} \quad (4.27)$$

$J_1(\lambda r)$ und $I_1(\lambda r)$ sind dabei die BESSELSche Funktion erster Art und die modifizierte BESSELSche Funktion erster Art der Ordnung Eins.

Mit den Randbedingungen nach Gl. (4.25) ergeben Gl. (4.26) und Gl. (4.27) ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} AJ_0(\lambda a) + BI_0(\lambda a) &= 0 \\ -AJ_1(\lambda a) + BI_1(\lambda a) &= 0 \end{aligned}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$J_0(\lambda a)I_1(\lambda a) + J_1(\lambda a)I_0(\lambda a) = 0, \quad (4.28)$$

welche durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems entsteht. Für das Nullstellenproblem der transzendenten Gleichung gilt:

Entsprechend den unendlich vielen Freiheitsgraden der Platte besitzt diese Gleichung abzählbar unendlich viele Wurzeln [16].

Die Nullstellen der transzendenten Gleichung wurden durch sukzessive Approximation mit dem durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

gegebenen klassischen NEWTON-Verfahren für skalare Gleichungen ermittelt. Für Details zum NEWTON-Verfahren wird auf Dahmen und Reusken [11] und spezielle Literatur zur numerischen Mathematik verwiesen.

Die ersten fünf Nullstellen sind in Tab.4.1 abgedruckt.

Tabelle 4.1.: Nullstellen der Frequenzgleichung

n	1	2	3	4	5
$\lambda_n a$	3.196	6.306	9.440	12.58	15.72

Aus den Nullstellen lassen sich mit der Abkürzung aus Gl. (4.24), die Eigenfrequenzen der Plattenschwingungen berechnen. Die entsprechenden Schwingungsformen sind durch Gl. (4.26) gegeben, wobei die Konstante A_n unbestimmt bleibt und die Konstante B_n durch

$$B_n = A_n \frac{J_1(\lambda_n a)}{I_1(\lambda_n a)}$$

ausgedrückt werden kann. Die ersten fünf Eigenformen sind in Abb. 4.5 dargestellt. Die Knotenlinien entsprechen den Nullstellen der charakteristischen Gleichung. Die n -te Eigenfunktion besitzt $(n - 1)$ - Knotenkreise [16].

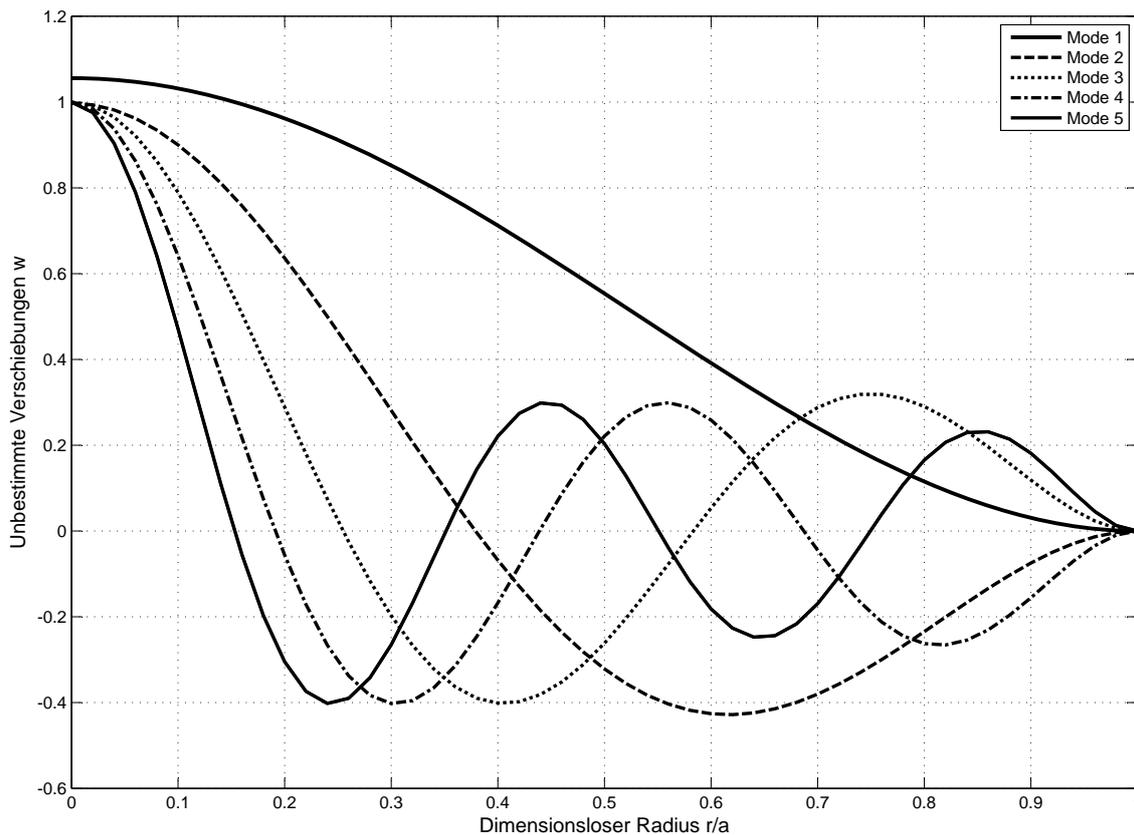


Abbildung 4.5.: Moden der freien Plattenschwingung

Ein Beispiel und der Vergleich mit den Ergebnissen aus der Berechnung mit dem finiten Element aus Kapitel 3 ist in Anhang D gegeben.

4.4.2. Erzwungene Biegeschwingung der eingespannten Kreisplatte

Für die erzwungenen, rotationssymmetrischen Biegeschwingungen nach Parkus [16] wird für die Lösung der Plattengleichung

$$\Delta\Delta w(r, t) = \frac{1}{K} (p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \quad (4.30)$$

wieder ein Separationsansatz der Form

$$p = p_0(r) \cos(\Omega t)$$

zu Grunde gelegt. Da nur der eingeschwingene, stationäre Zustand von Interesse ist, sucht man nur die partikuläre Lösung. Für die Anregung $p_0(r)$ wird eine Reihenentwicklung mit den in Kapitel 4.4.1 gefundenen Eigenschwingungsformen nach Gl. (4.26) angesetzt

$$p_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(r).$$

Die Entwicklungskoeffizienten folgen ohne Beweis aus der Orthogonalitätsbeziehung der Eigenformen

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_0^a p_0(r) R_n(r) dr$$

mit

$$N_n = \int_0^a R_n^2(r) dr.$$

Der resultierende Separationsansatz für die Last

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(r) \cos(\Omega t) \quad (4.31)$$

wird auch für die Verschiebung gewählt

$$w_p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(r) \cos(\Omega t). \quad (4.32)$$

Zweifache Anwendung des LAPLACE-Operators auf Gl. (4.32)

$$\Delta \Delta w_p = \lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n \cos(\Omega t)$$

und zweimaliges Ableiten nach der Zeit

$$\ddot{w}_p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(-\Omega^2) \cos(\Omega t)$$

ermöglicht das Einsetzen in Gl. (4.30), unter Berücksichtigung des Ansatzes für die Anregung aus Gl. (4.31), was auf

$$K \lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n \cos(\Omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n \cos(\Omega t) - \rho h \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(-\Omega^2) \cos(\Omega t)$$

führt. Kürzen und Zusammenfassen führt unter Berücksichtigung des Zusammenhanges aus Gl. (4.24) auf die Koeffizienten des Verschiebungsansatzes

$$c_n = \frac{a_n}{K \lambda_n^4 - \rho h \Omega^2} = \frac{a_n}{\rho h \omega_n^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)}. \quad (4.33)$$

Die gesuchte Lösung für die erzwungene Schwingung ergibt mit den Koeffizienten aus Gl. (4.33)

$$w_p(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(r) \cos(\Omega t). \quad (4.34)$$

5. Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Ableitung und Implementierung des von Hsieh vorgeschlagenen und von Clough und Tocher assemblierten, dreieckigen, konformen KIRCHHOFF-Plattenelements mit zwölf generalisierten Koordinaten. Das implementierte Element wurde für die Simulation von statischen und dynamischen Problemen der Plattenmechanik verwendet. Zur Verifikation sind die analytischen Lösungen der Beispiele ermittelt worden.

In der Statik wurde das vorliegende Element an der gleichförmig belasteten Kreisplatte verifiziert. Für die Lagerung des Randes der Kreisplatte wurde zum einen die einfache Lagerung auf einer Kante und zum anderen die feste Einspannung gewählt. Die Simulation zeigt für beide Randbedingungen sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen, sowohl für die Verschiebungsfreiheitsgrade, wie auch für die Verdrehungen der Plattenmittelebene. Die Ergebnisse findet man in Anhang A.

Das Konvergenzverhalten des implementierten Elementes wurde für beide Randbedingungen untersucht. Das Konvergenzverhalten wurde, wie in der Literatur [4, 9] üblich, mit dem dimensionslosen Verschiebungskoeffizienten des Plattenmittelpunktes und der Anzahl der Elementreihen in radialer Richtung gemessen. Der dimensionslose Verschiebungskoeffizient erlaubt den Vergleich unabhängig vom gewählten Beispiel. Das Element zeigte für beide Randbedingungen ein ausgesprochen gutes Konvergenzverhalten. Für den freien Rand zeigt das Element ein Konvergenzverhalten ähnlich einem hybriden Plattenelement. Dieses Verhalten folgt aus den arbeitsäquivalenten Biegemomenten am freien Plattenrand, welche die Plattendurchbiegung erhöhen und so zu einer rascheren Konvergenz des Elementes führen. Das Konvergenzverhalten ist in Anhang B dargestellt.

Der in der Ableitung des Elementes ersichtlich gewordene Einfluß der Wahl des Punktes C, an dem sich die drei Subelemente vereinigen, konnte durch eine sehr einfach gehaltene Sensitivitätsstudie, als sehr schwach quantifiziert werden. Die Ergebnisse dieser Studie findet man in Anhang C.

Für die Elementverifikation in der Dynamik wurden die rotationssymmetrischen Biegeeigen-schwingungen der eingespannten Kreisplatte untersucht. Da für die analytische Lösung nur ein Modell unter Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit vorhanden war, musste dieses vereinfachte Modell auch numerisch umgesetzt werden. Um die entsprechenden Biegeeigenformen noch eindeutig zu identifizieren, musste das Finite-Elemente-Modell an die Wellenlänge der höchsten Eigenfrequenz angepasst werden.

Das Element zeigt für die Eigenfrequenzen, sowie für die Eigenformen eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Die Fehlerschranken sind für die Eigenfrequenzen kleiner als für die Eigenformen, und nehmen mit steigender Frequenz leicht zu. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse findet man in Anhang D.

Der Unterschied zwischen dem physikalisch exakten Massenmodell unter Berücksichtigung der rotatorischen Trägheiten, und dem vereinfachten Massenmodell mit Vernachlässigung der rotatorischen Trägheiten, konnte eindeutig nachgewiesen werden. Infolge der kubischen Abhängigkeit der rotatorischen Trägheiten von der Plattendicke und der linearen Abhängigkeit der translatorischen Trägheit von der Plattendicke, ist der Unterschied für sehr dünne Platten nach KIRCHHOFFscher Theorie als gering anzusehen.

Literaturverzeichnis

- [1] ADINI, A.: *Analysis of Shell Structures by the Finite Element Method*. PhD-thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1961.
- [2] BATHE K.-J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [3] BAZELEY G.P., CHEUNG Y.K., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C.: *Triangular Elements in Plate Bending - Conforming and Non-conforming Solutions*. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- [4] BREBBIA C.A., CONNOR J.J.: *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*. Butterworths, London, 1973.
- [5] CELIGOJ, C.C.: *2d-Bauteile (Scheiben, Platten, Schalen)*. Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Graz, Graz, 2000.
- [6] CELIGOJ, C.C., SCHMIDT M.O.: *Methode der Finiten Elemente*. Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Graz, Graz, 1998.
- [7] CLOUGH, R.W., FELIPPA, C.A.: *A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending*. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- [8] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J.: *Dynamics of Structures*. 6. edition, McGraw-Hill, Auckland, 1985.
- [9] CLOUGH, R.W., TOCHER, J.L.: *Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending*. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- [10] CONNOR, J., WILL, G.: *A Triangular Flat Plate Bending Element*. Department of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge Mass., 1968.
- [11] DAHMEN, W., REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2.Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [12] EWINS, D.J.: *Modal Testing - Theory, Practice and Application*. Second edition, Research Studies Press Ltd., Baldock, England, 2000.
- [13] GALLAGHER R.H.: *Finite-Element-Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [14] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke - Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*. 6.Auflage, unveränderter Nachdruck, Springer Verlag, Wien, 1986.

-
- [15] KNOTHE, K., WESSELS, H.: *Finite Elemente - Eine Einführung für Ingenieure*. 1. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [16] PARKUS, H.: *Mechanik der festen Körper*. 2. Auflage, Springer Verlag, Wien, 1966.
- [17] SPURK, J.H., AKSEL, N.: *Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [18] STEINKE, P.: *Finite-Elemente-Methode - Rechnergestützte Einführung*. 4. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2012.
- [19] TIMOSHENKO S.P., WOINOWSKY-KRIEGER S.: *Theory of Plates and Shells*. Second edition, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [20] TOCHER, J.L.: *Analysis of Plate Bending using Triangular Elements*. PhD-thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1962.
- [21] WERKLE, H.: *Finite Elemente in der Baustatik - Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. 3. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [22] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.: *The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems*. Fourth edition, McGraw-Hill, Maidenhead, England, 1989.

A. Kreisplatte unter statischer Gleichlast

Für den Vergleich der in Kapitel 4.3 gefundenen Lösungen der Plattengleichung unter rotationssymmetrischer Belastung und Geometrie und den numerisch gefundenen Lösungen mit dem finiten Element aus Kapitel 3 wurden folgende Annahmen gemacht.

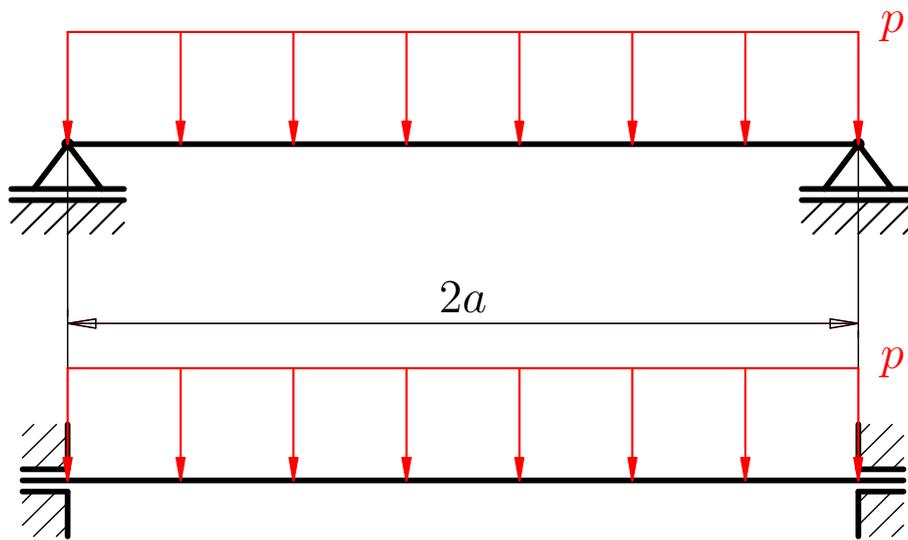


Abbildung A.1.: Kreisplatte unter statischer Gleichlast

Belastung:

$$p = 0.1 \text{ MPa}$$

Geometrie:

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$h = 1.5 \text{ mm}$$

Werkstoff:

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie musste nur ein Viertel der in Abb. A.1 dargestellten Kreisplatte modelliert werden. Die verwendeten Modelle und deren Eigenschaften findet man in Anhang E. Der Vergleich der numerischen Ergebnisse ist in Abb. A.2 bis Abb. A.5 dargestellt. Abb. A.6 und Abb. A.7 zeigen die Verschiebungen für die eingespannte Platte und bestätigt die rotationssymmetrische Lösung der Plattengleichung.

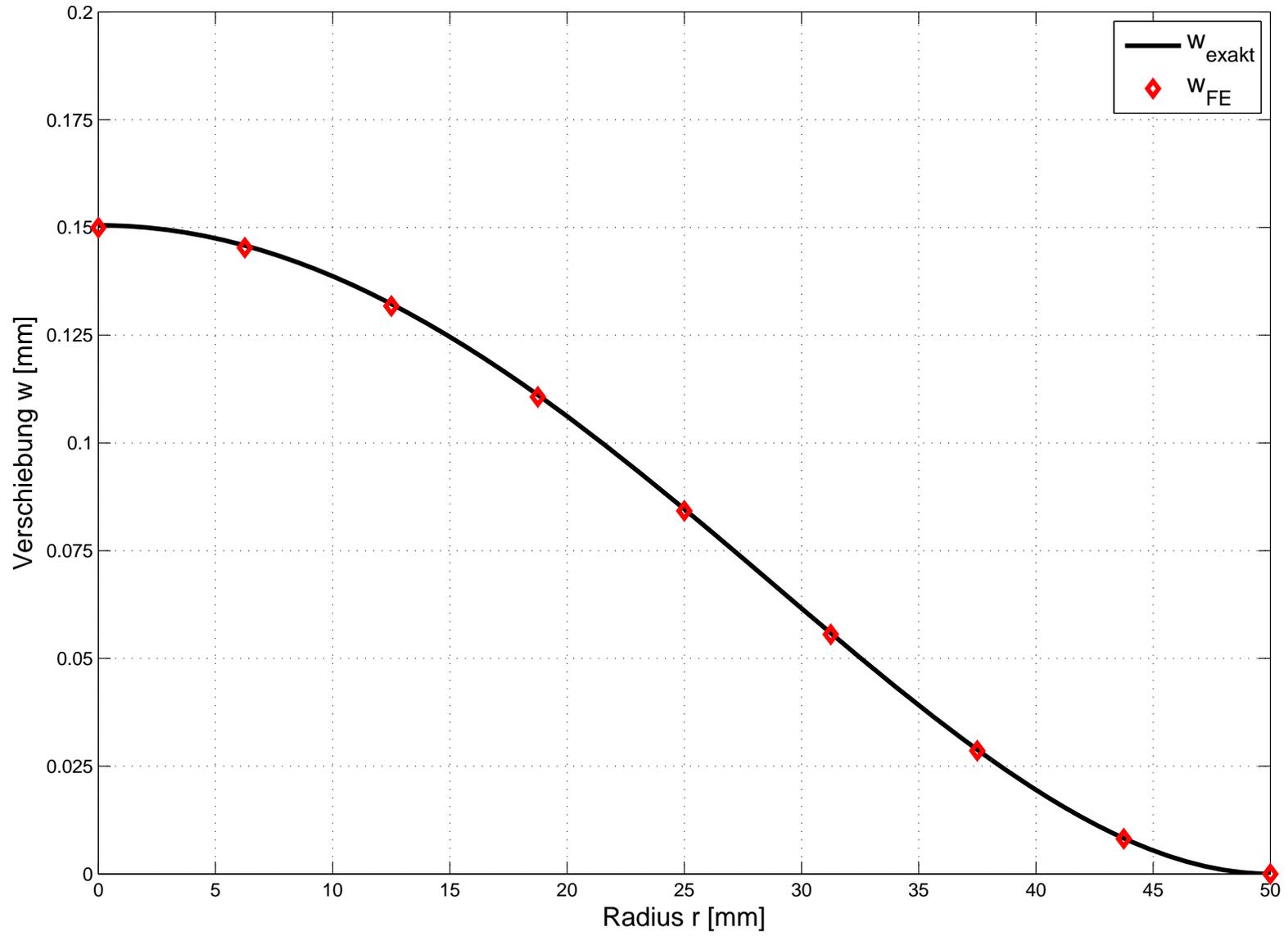


Abbildung A.2.: Verschiebungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die eingespannte Kreisplatte

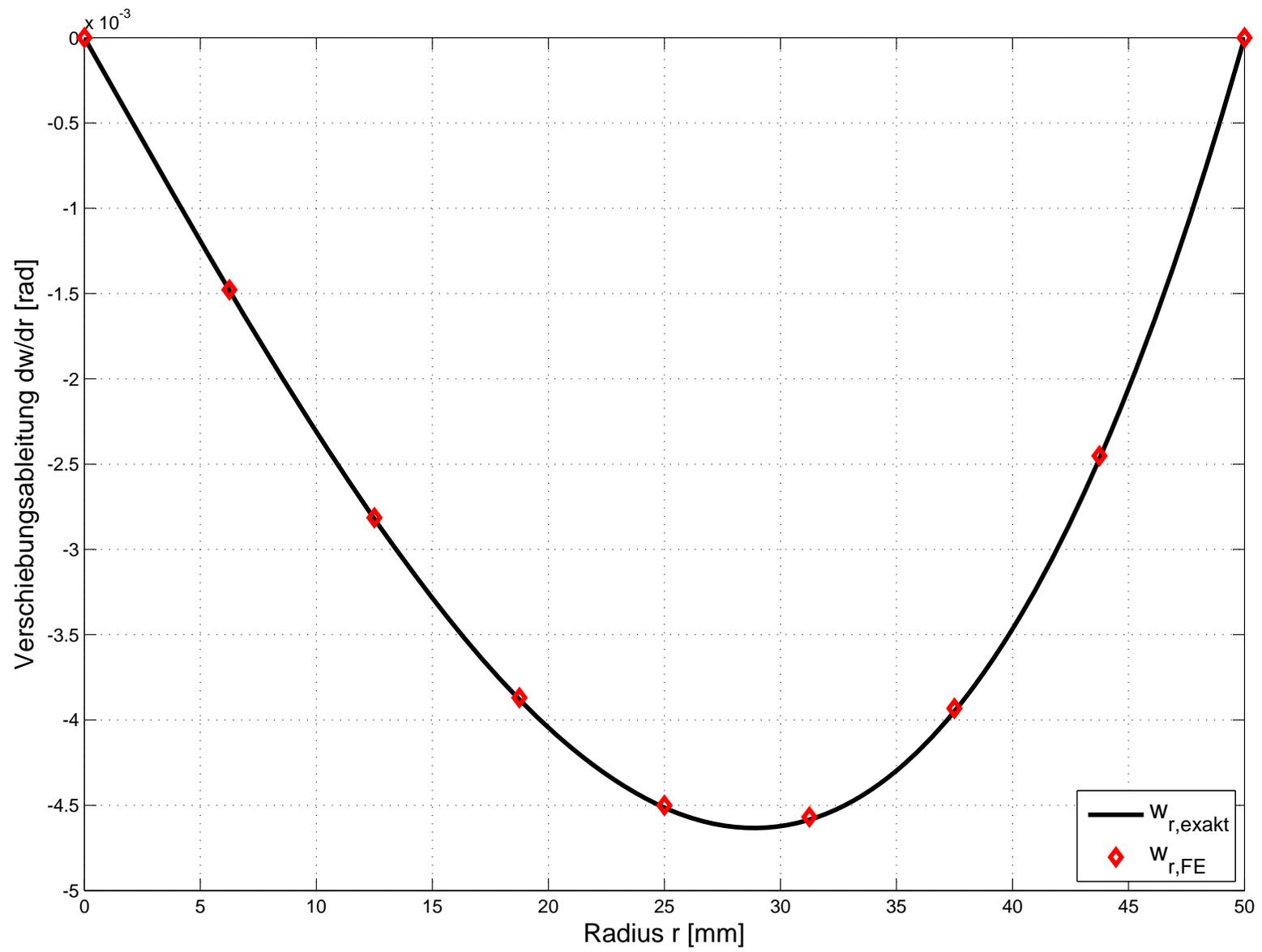


Abbildung A.3.: Verschiebungsableitungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die eingespannte Kreisplatte

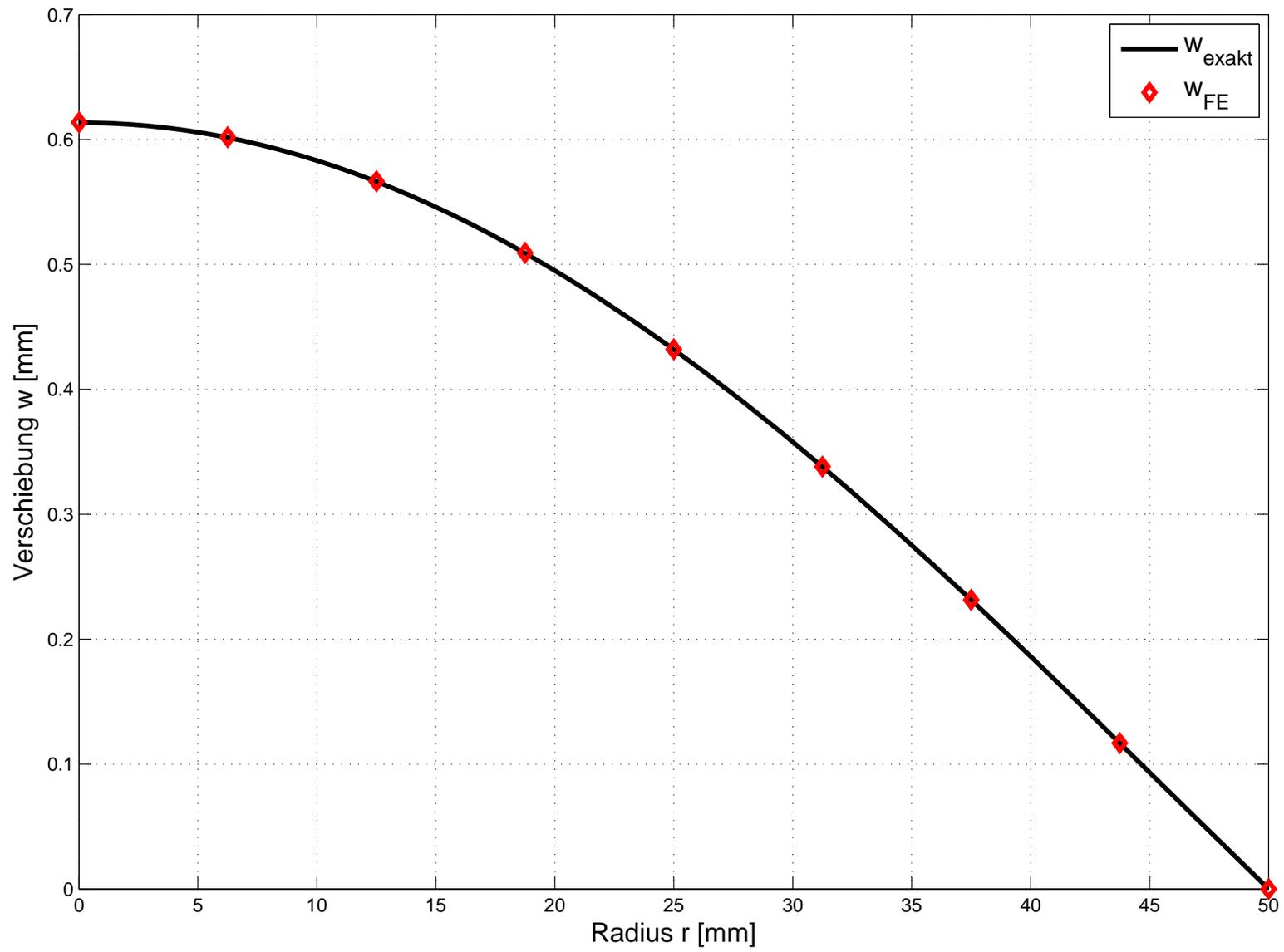


Abbildung A.4.: Verschiebungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte

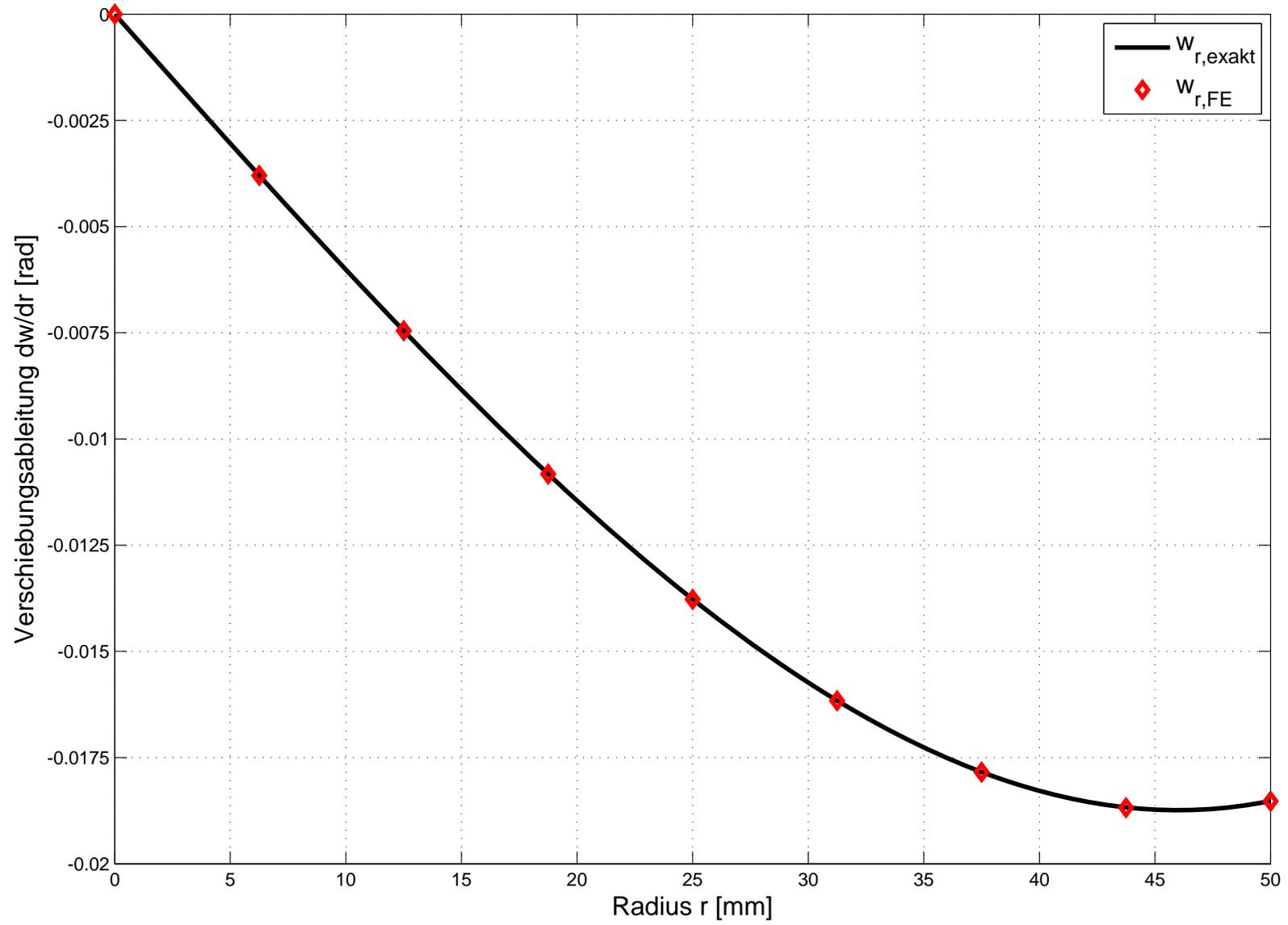


Abbildung A.5.: Verschiebungsableitungen der analytischen Lösung und der FE-Methode für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte

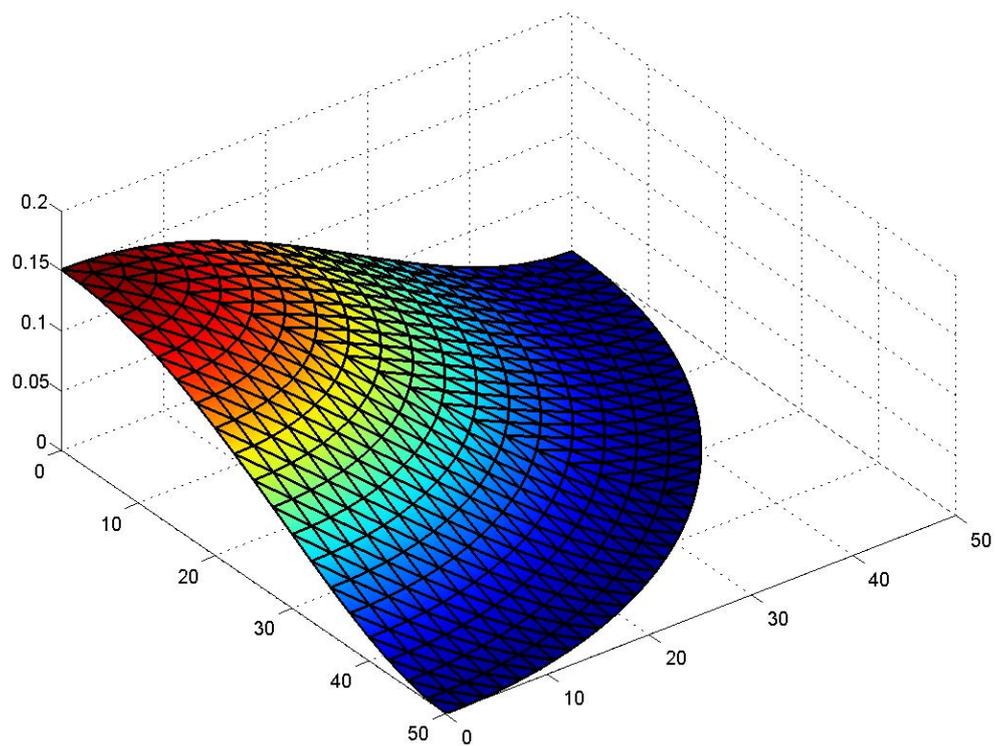


Abbildung A.6.: Axonometrische Darstellung der rotationssymmetrischen Lösung

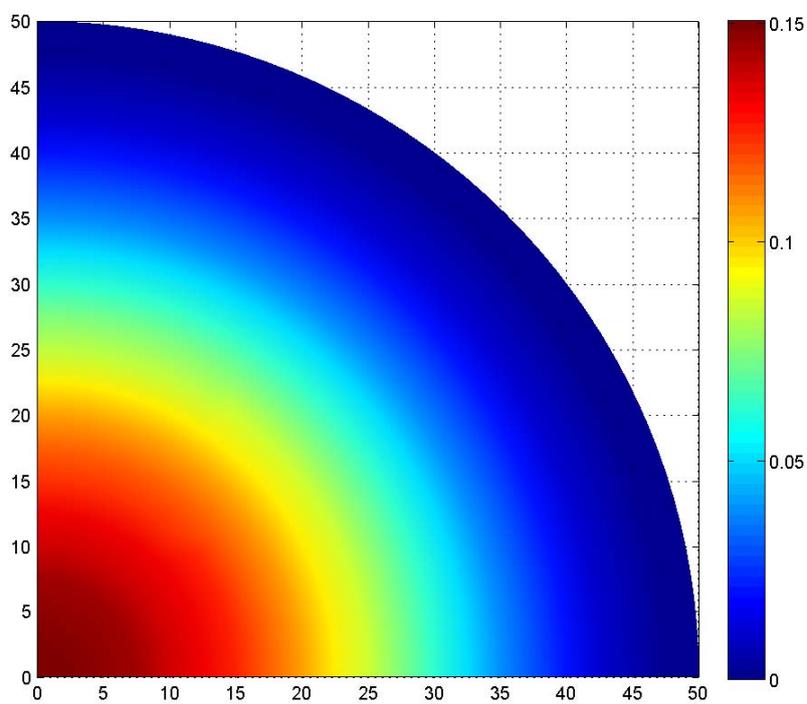


Abbildung A.7.: Rotationssymmetrische Lösung der Kreisplatte

B. Konvergenzverhalten

Für das in Anhang A vorgestellte Beispiel wurde ein Konvergenzstudie durchgeführt. Es wurden Modelle mit einem, zwei, vier, sechs und acht Elementreihen in radialer Richtung verwendet. Diese sind in Anhang E ausführlich beschrieben. Für die verschiedenen Modelle wurde die Verschiebung des Mittelpunktes der Kreisplatte mit der exakten Lösung aus Kapitel 4.3 verglichen.

Die Darstellungen in Abb. B.1 für die eingespannte Kreisplatte und Abb. B.2 für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte zeigen das Konvergenzverhalten in einer für die Plattenmechanik üblichen dimensionslosen Darstellung. Beide Abbildungen zeigen den selben Wertebereich von $\alpha = 0.02$ auf der Ordinate. Der dimensionslose Verschiebungskoeffizient α ist definiert durch

$$\alpha := \frac{w(0)}{p a^4 / K}. \quad (\text{B.1})$$

Das Element zeigt, wie in Abb. B.2 dargestellt, für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte ein Konvergenzverhalten von der steiferen Seite. Dieses Verhalten findet man neben nicht-konformen Elementen mit Verschiebungsansatz bei Elementen, die entweder aus dem Prinzip der stationären Komplementärenergie abgeleitet wurden, oder sogenannten hybriden Elementen. Bei hybriden Elementen wird neben dem Ansatz für das Verschiebungsfeld innerhalb des Elementes ein davon unabhängiger Ansatz für das Verschiebungs- und/oder das Spannungsfeld auf dem Elementrand gewählt. Das Konvergenzverhalten der hybriden Elemente ist jedoch nicht-monoton [13, 21]. Das Element in dieser Arbeit ist weder nicht-konform, noch handelt es sich um ein aus einer Kraftgrößenvariation abgeleitetes Element. Die Konvergenz von der steiferen Seite wird durch die am freien Rand aufgeprägten Randmomente, welche sich aus der arbeitsäquivalenten Lastaufnahme nach Gl. (2.28) ergeben, erklärt. Das Element zeigt für den freien Rand hybrides Verhalten.

Weitere Konvergenzstudien für dreieckige und viereckige KIRCHHOFF-Plattenelemente findet man beispielsweise in Clough und Tocher [9] für die Rechteckplatte. Eine Konvergenzstudie für verschiedene Plattenelemente, unter anderem auch das von Clough und Tocher [9] 1965 vorgestellte Element, sowie das in dieser Arbeit behandelte dreieckige Element, findet man in Brebbia und Connor [4] oder Knothe und Wessels [15]. Alle genannten Quellen stellen das Konvergenzverhalten von verschiedenen Elementen vergleichend gegenüber.

Die ausführlichste Darstellung findet man in Gallagher [13], der neben einer getrennten Behandlung für rechteckige und dreieckige Plattenelemente, eine gesonderte Abhandlung über hybride Plattenelemente und eine Darstellung jener Elemente angibt, welche durch *triangular element subdivision* generiert werden.

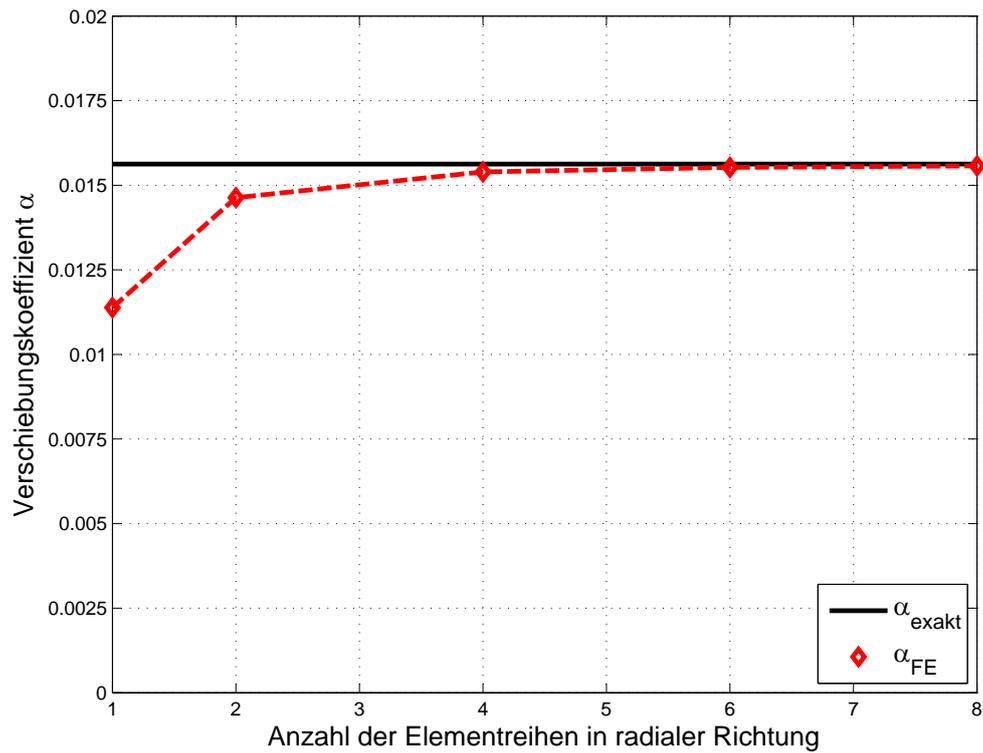


Abbildung B.1.: Konvergenz für die eingespannte Kreisplatte

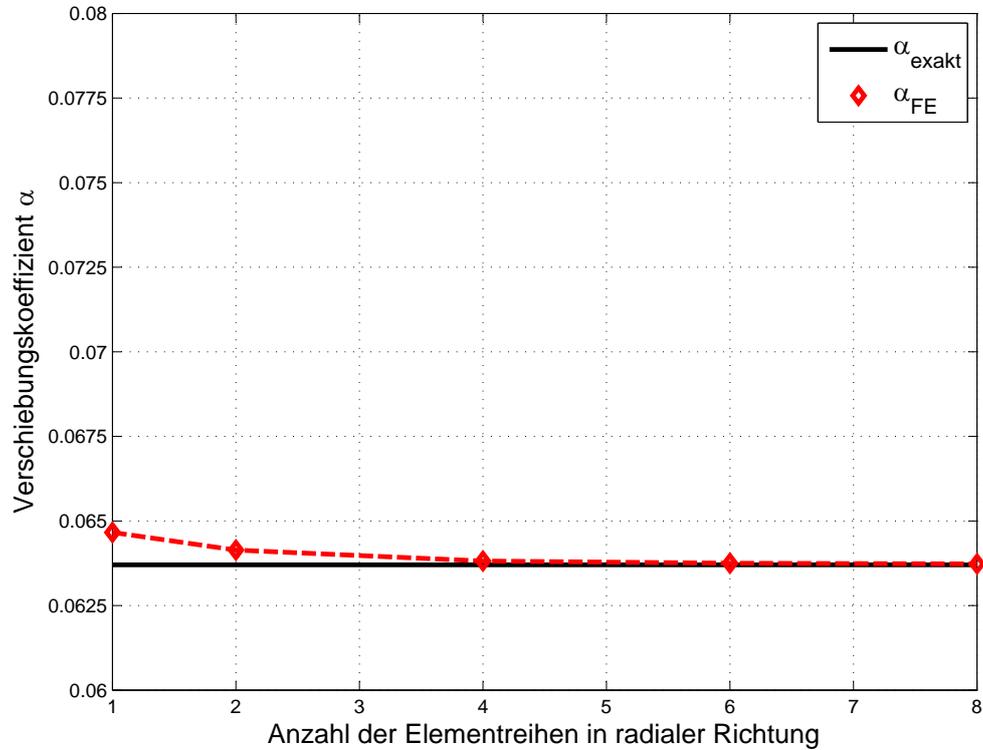


Abbildung B.2.: Konvergenz für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte

C. Sensitivitätsstudie

Die in Kapitel 3 ersichtlich gewordene Abhängigkeit der Güte der Lösung von der Wahl des Koppelpunktes der drei Subelemente, wurde in einer Studie untersucht. Wie in Abb. C.1 dargestellt, wurden die Koppelpunkte, ausgehend vom Schwerpunkt des Dreiecks, jeweils in Richtung der drei Eckknoten des Elementes verschoben. Der Betrag der Verschiebung wurde auf 90% des Abstandes des jeweiligen Knotens und des Schwerpunktes des Dreiecks festgelegt, so dass jeweils zwei der drei Elemente einen auffällig spitzen Winkel bilden. Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, wird mit einer schlechter werdenden Güte der Lösung gerechnet, je weiter sich der Koppelknoten aus dem Schwerpunkt entfernt. Der Grenzfall ist durch das Zusammenfallen der Lage des Koppelknotens mit einer der Elementkanten gegeben. Das Element wird in diesem Fall unbrauchbar.

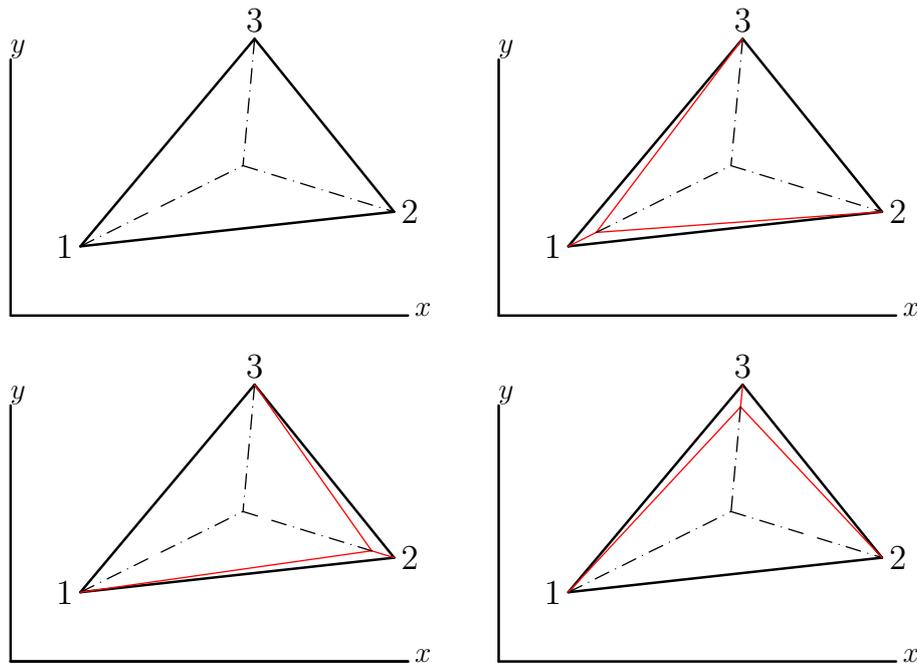


Abbildung C.1.: Anordnung des Koppelpunktes für die Sensitivitätsstudie

Um den Einfluß der lokalen Elementnummerierung in den in Anhang E dargestellten Modellen zu berücksichtigen, wurden die Ergebnisse, welche mit den jeweils in Richtung eines der Knoten verschobenen Kopplungen ermittelt wurden, gemittelt. Ein Vergleich der Konvergenz der gemittelten Werte mit der optimalen Lage im Dreiecksschwerpunkt ist in Abb. C.2 für die eingespannte Kreisplatte und Abb. C.3 für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte gegeben.

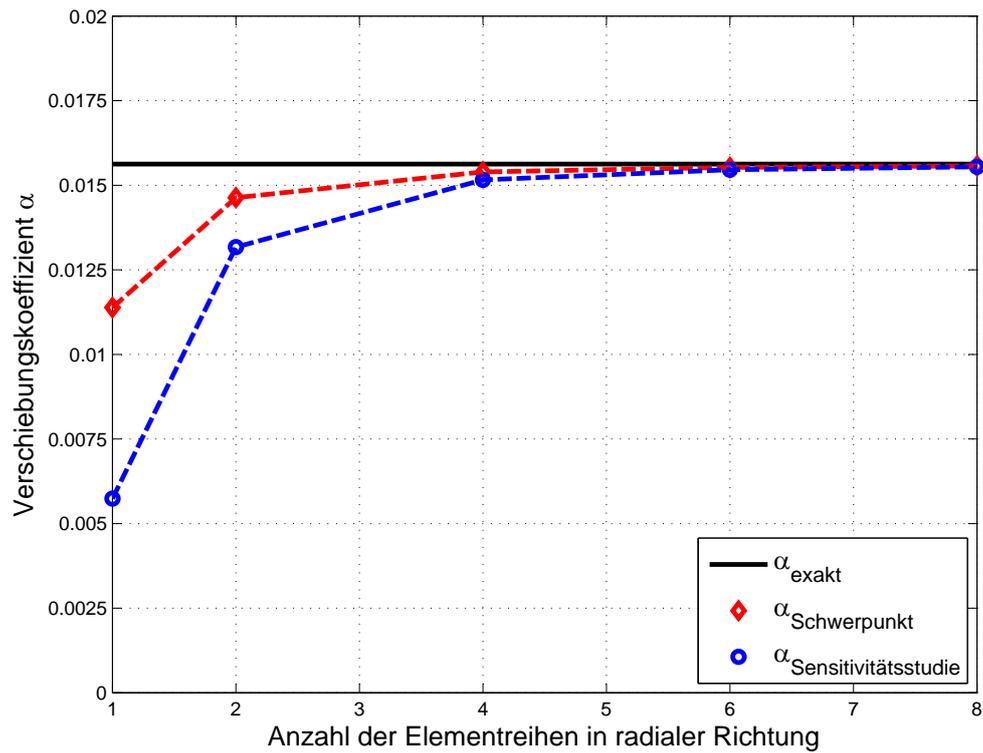


Abbildung C.2.: Empfindlichkeit für die eingespannte Kreisplatte

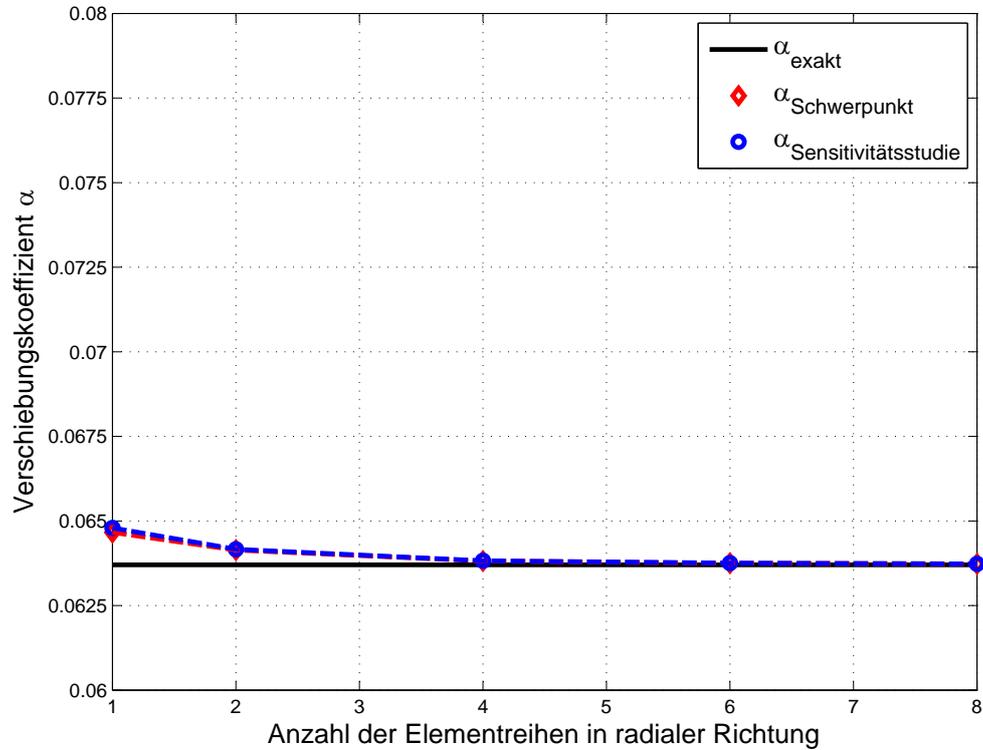


Abbildung C.3.: Empfindlichkeit für die frei drehbar gelagerte Kreisplatte

D. Biegeeigenschwingungen der eingespannten Kreisplatte

Obwohl im allgemeinen für dynamische Simulationen die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte unter Berücksichtigung der rotatorischen Trägheit (Gl. 2.30) erfolgen sollte, mussten für den direkten Vergleich mit der analytischen Lösung der Biegeeigenschwingungen nach Parkus [16] die rotatorischen Trägheiten vernachlässigt werden. Da jedoch beide Varianten mit dem Element aus Kapitel 3 implementiert wurde, kann neben der Verifikation des von Hsieh, Clough und Tocher vorgeschlagenen Elementes, der nicht zu vernachlässigende Einfluß der rotatorischen Trägheiten auf das Ergebnis von dynamischen Simulationen studiert werden.

Die Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenvektoren, auch als Eigenformen bezeichnet, ergeben sich nach Bathe [2] für das ungedämpfte System unter der durch die Finite-Elemente-Methode (Kapitel 2.3) gegebenen Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ und der Systemmassenmatrix $\underline{\underline{M}}$, aus dem Eigenwertproblem

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\Omega}}^2, \quad (\text{D.1})$$

worin die Matrix $\underline{\underline{\Phi}}$ die Eigenvektoren $\underline{\phi}_i$ enthält und die Matrix $\underline{\underline{\Omega}}^2$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenfrequenzen ω_i^2 auf der Hauptdiagonale darstellen. Für eine ausführliche Darstellung der linearen und nicht-linearen Schwingungsanalyse mit der Methode der finiten Elemente wird auf Clough und Penzien [8] verwiesen.

Die Eigenfrequenzen aus der analytischen Lösung und aus der numerischen Lösung mit den beiden Varianten, mit und ohne Berücksichtigung der rotatorischen Trägheiten, sind in Tab. D.1 gegenüber gestellt und in Abb. D.1 visualisiert.

Für den Vergleich von Eigenvektoren, die mit unterschiedlicher Verfahren ermittelt wurden, findet man beispielsweise in Ewins [12] verschiedene Möglichkeiten. Durch geeignete Modellierung (siehe Anhang E) konnte jedoch sichergestellt werden, dass die numerisch ermittelten Eigenformen direkt mit den analytisch ermittelten Eigenformen verglichen werden konnten. Die ersten fünf Eigenformen sind in Abb. D.2 bis Abb. D.6 dargestellt.

Zur Vollständigkeit sei noch erwähnt, dass die Kreisplatte natürlich auch Eigenformen besitzt, die nicht rotationssymmetrisch sind. Eine willkürliche Auswahl an antimetrischen Eigenformen ist in Abb. D.7 bis Abb. D.12 dargestellt.

Tabelle D.1.: Eigenfrequenzen der eingespannten Kreisplatte

Nr.	analytisch	FE	FE
	ohne rot. Trägheit	ohne rot. Trägheit	mit rot. Trägheit
	Hz	Hz	Hz
1	1531.778275	1531.669946	1531.272191
2	5963.353281	5963.052456	5955.590499
3	13360.426160	13360.197546	13320.473033
4	23718.408952	23719.789691	23591.339828
5	37036.563678	37044.300135	36727.141490

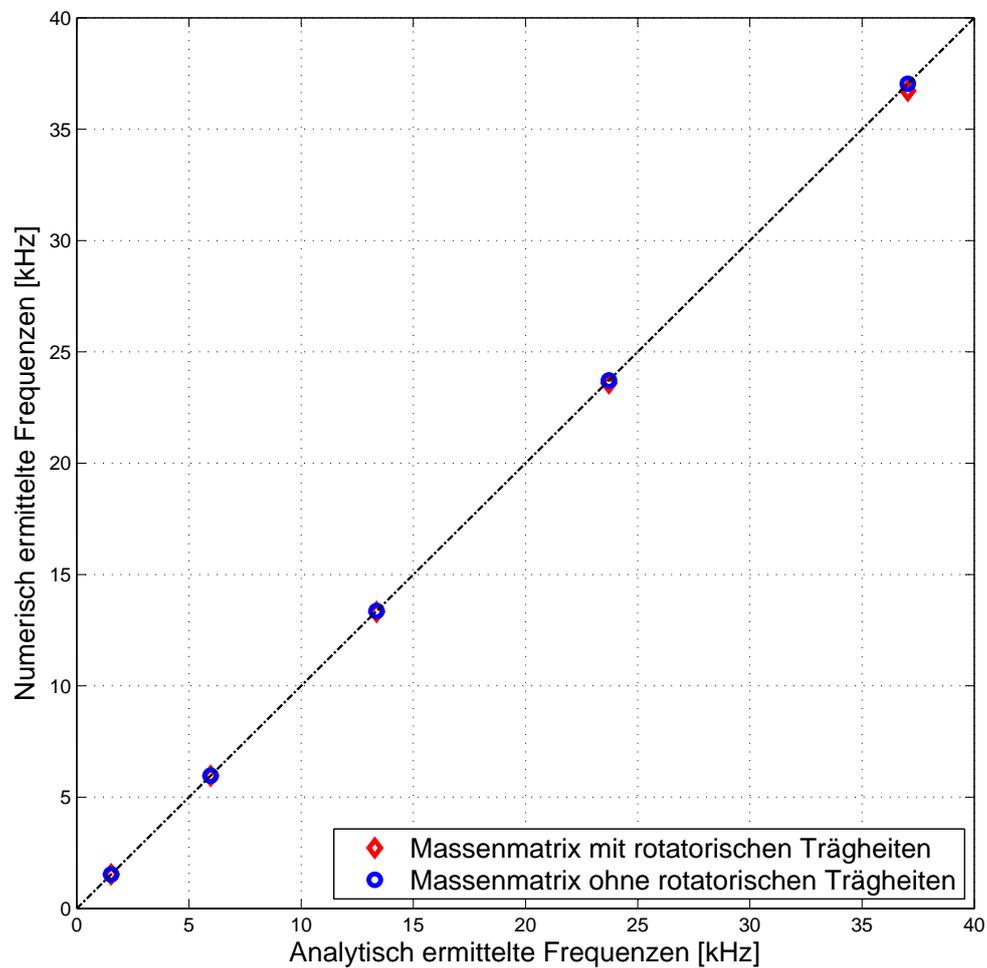


Abbildung D.1.: Vergleich der Eigenfrequenzen

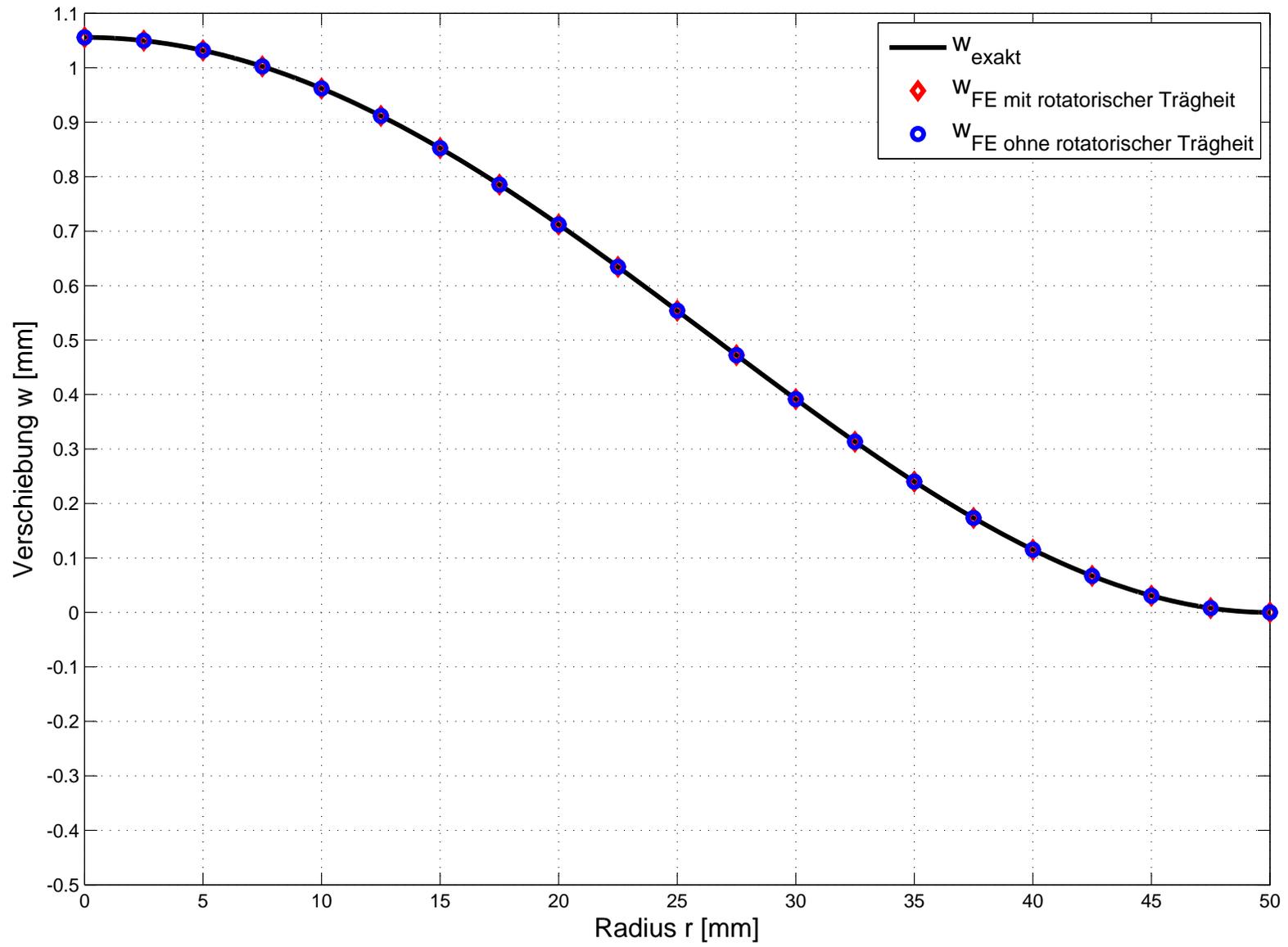


Abbildung D.2.: Eigenform 1 der eingespannten Kreisplatte

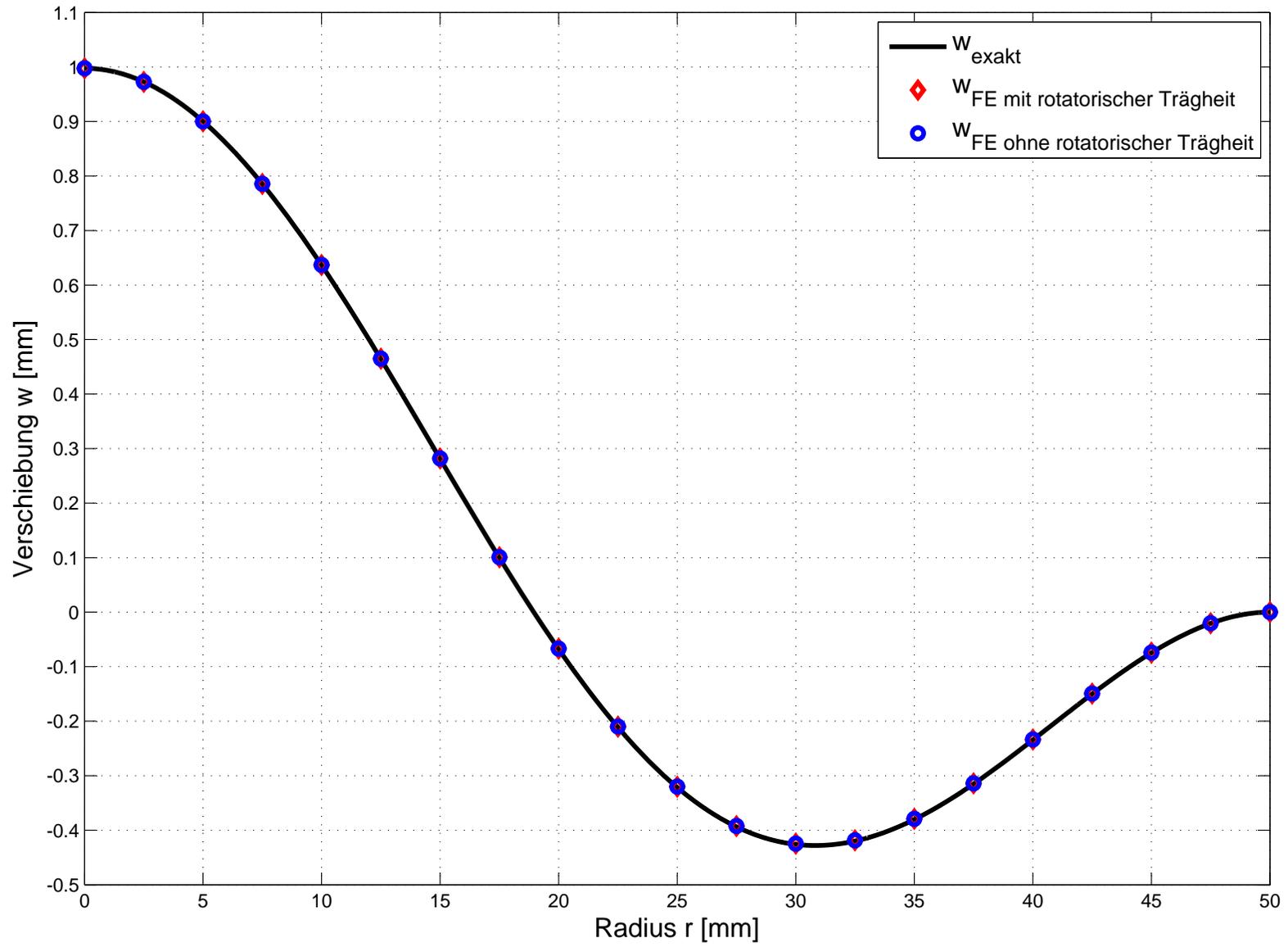


Abbildung D.3.: Eigenform 2 der eingespannten Kreisplatte

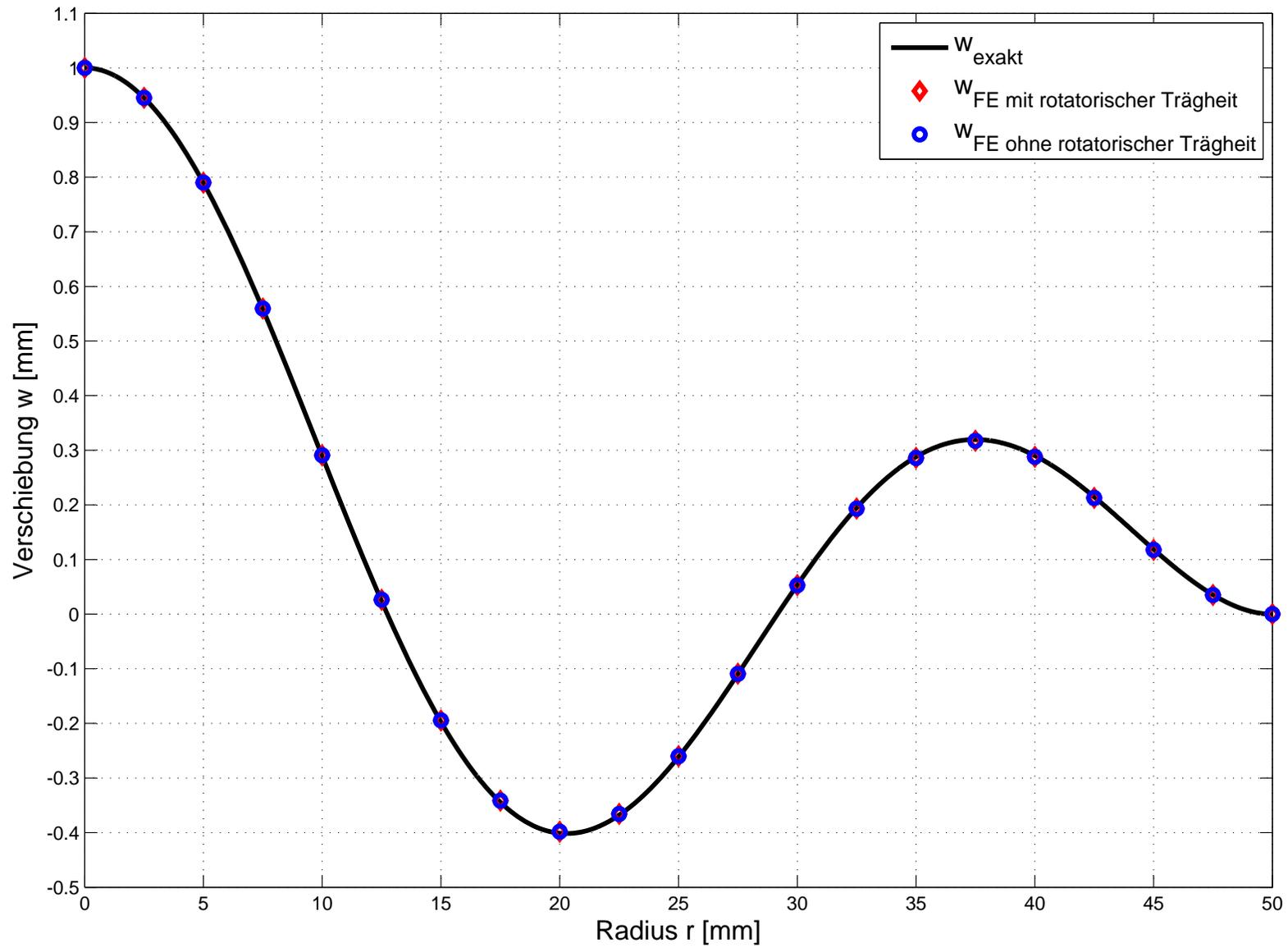


Abbildung D.4.: Eigenform 3 der eingespannten Kreisplatte

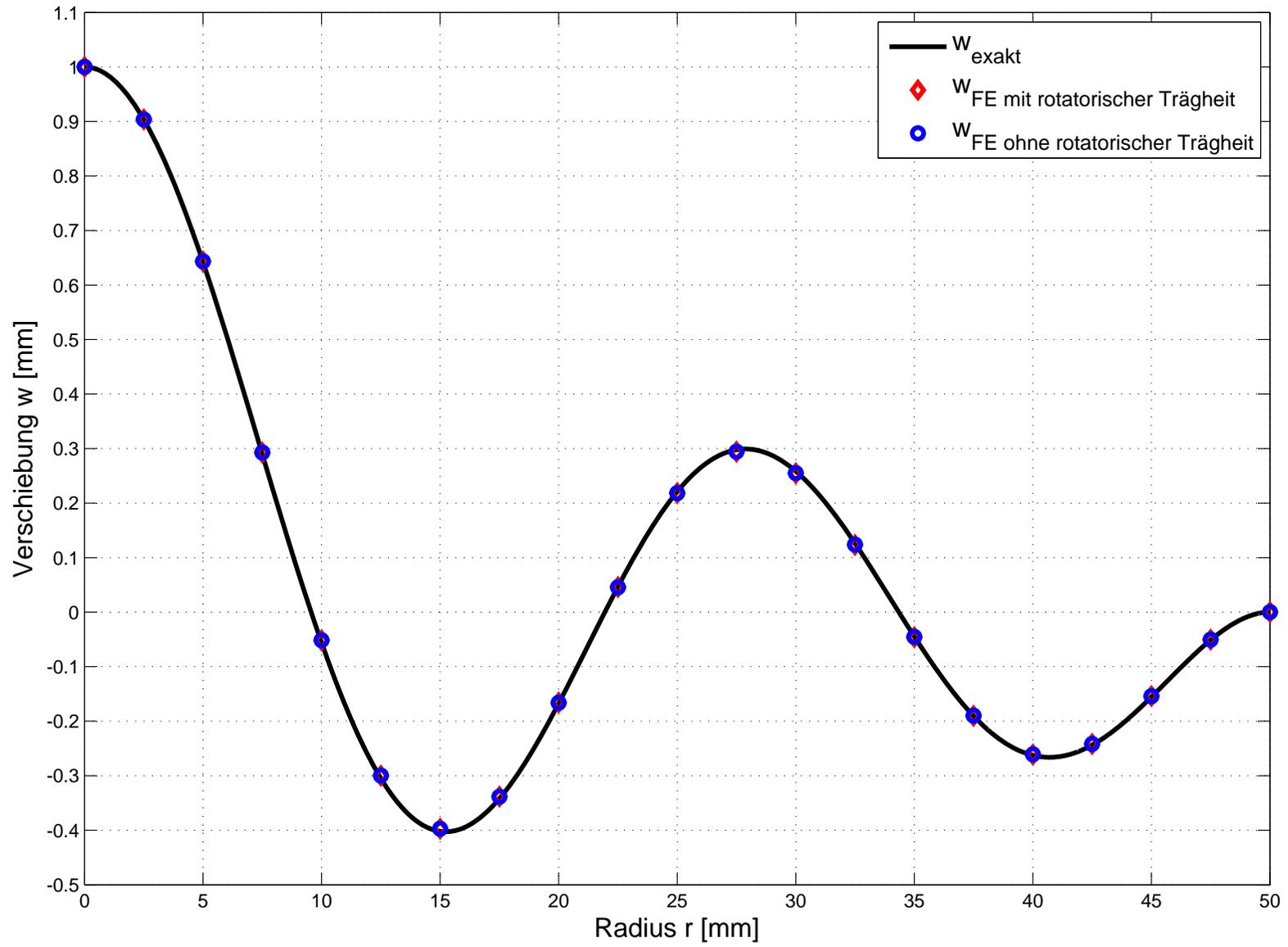


Abbildung D.5.: Eigenform 4 der eingespannten Kreisplatte

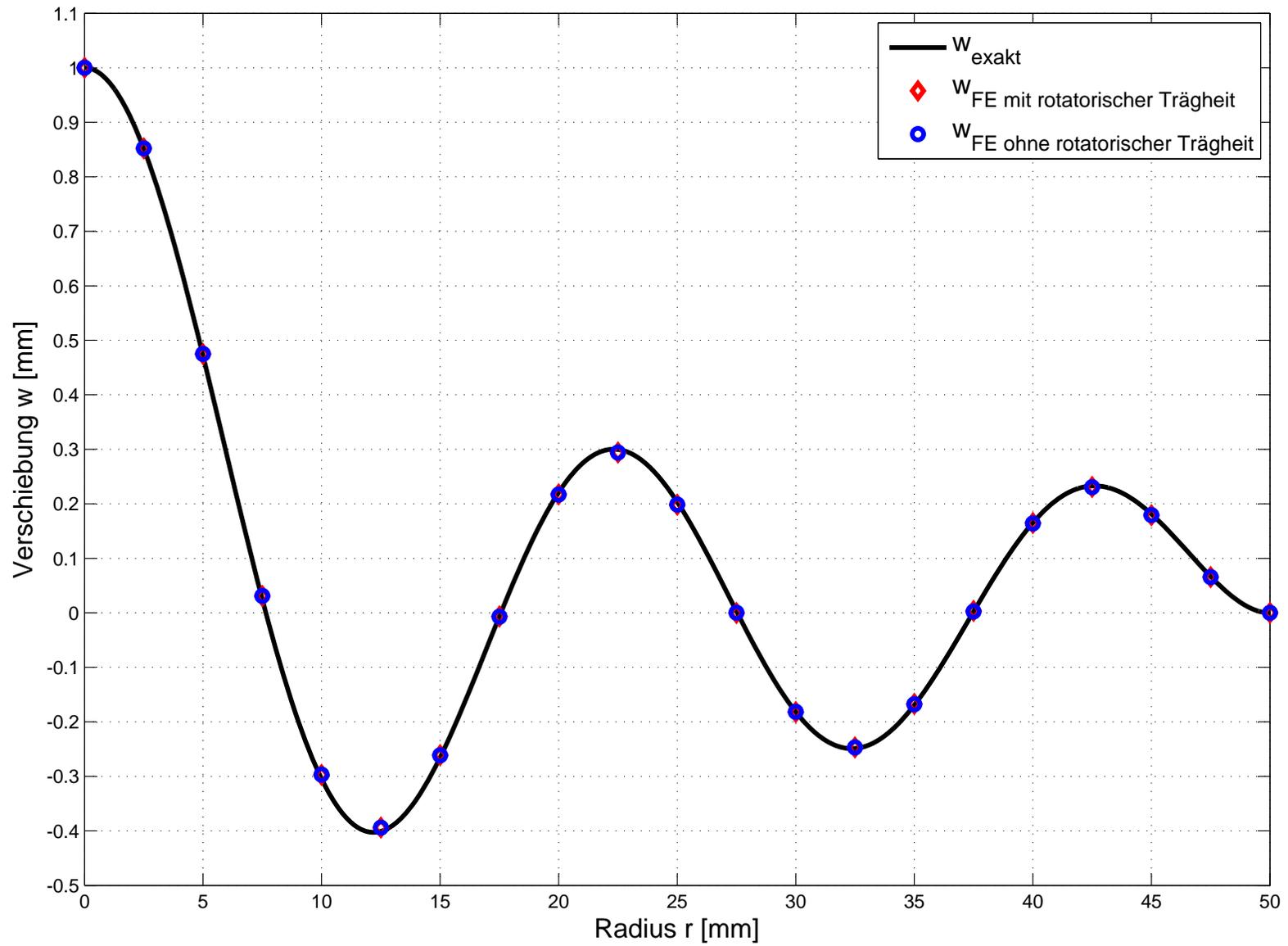


Abbildung D.6.: Eigenform 5 der eingespannten Kreisplatte

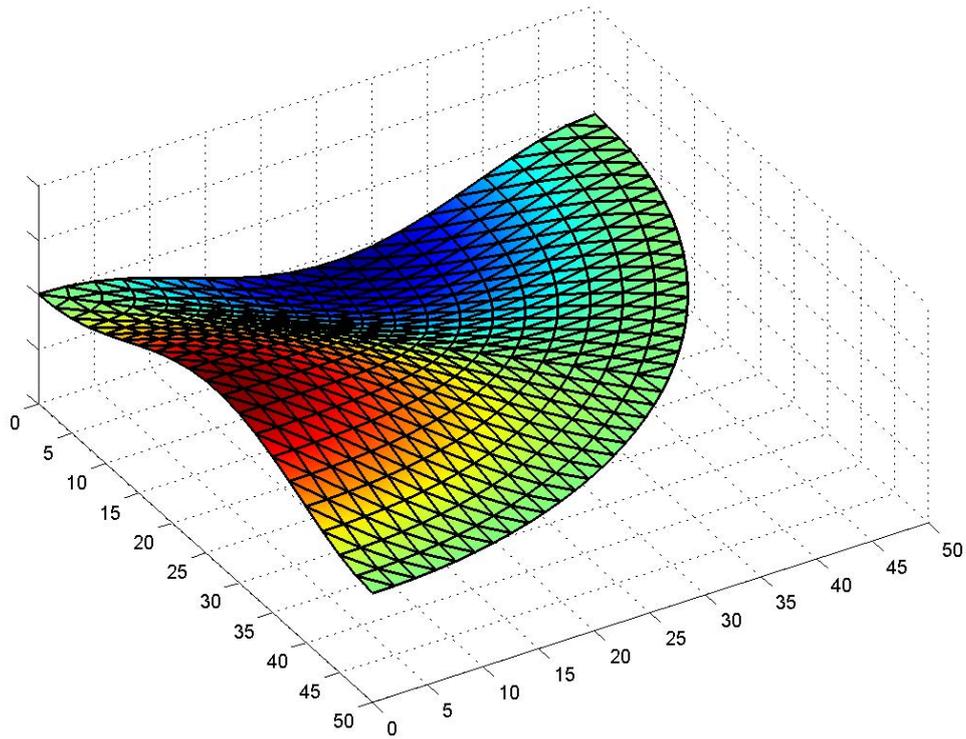


Abbildung D.7.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)

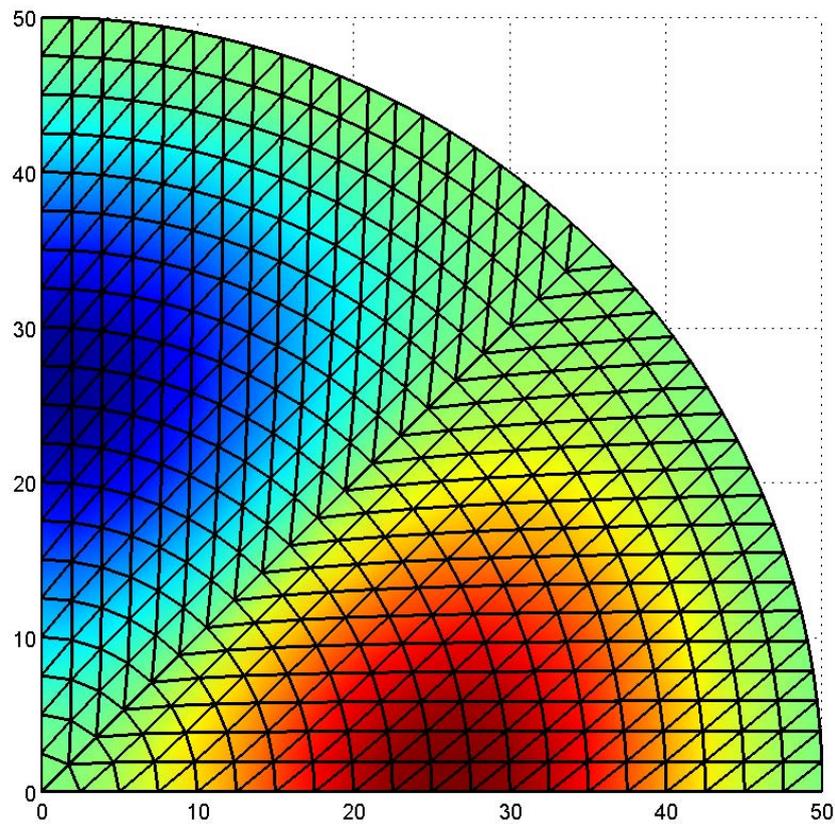


Abbildung D.8.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte

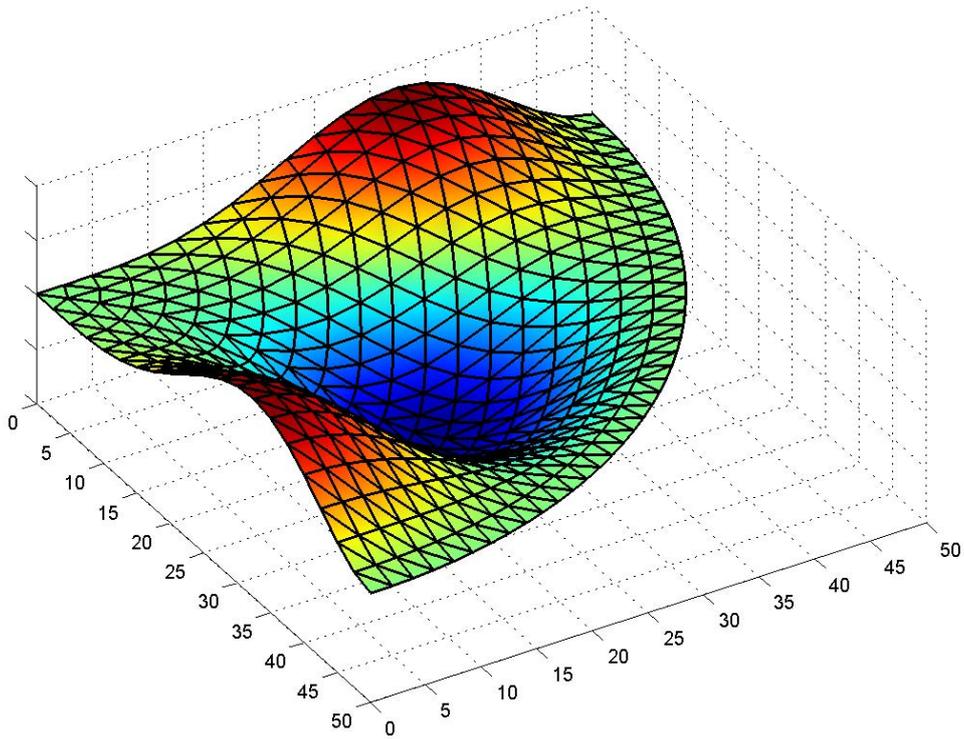


Abbildung D.9.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)

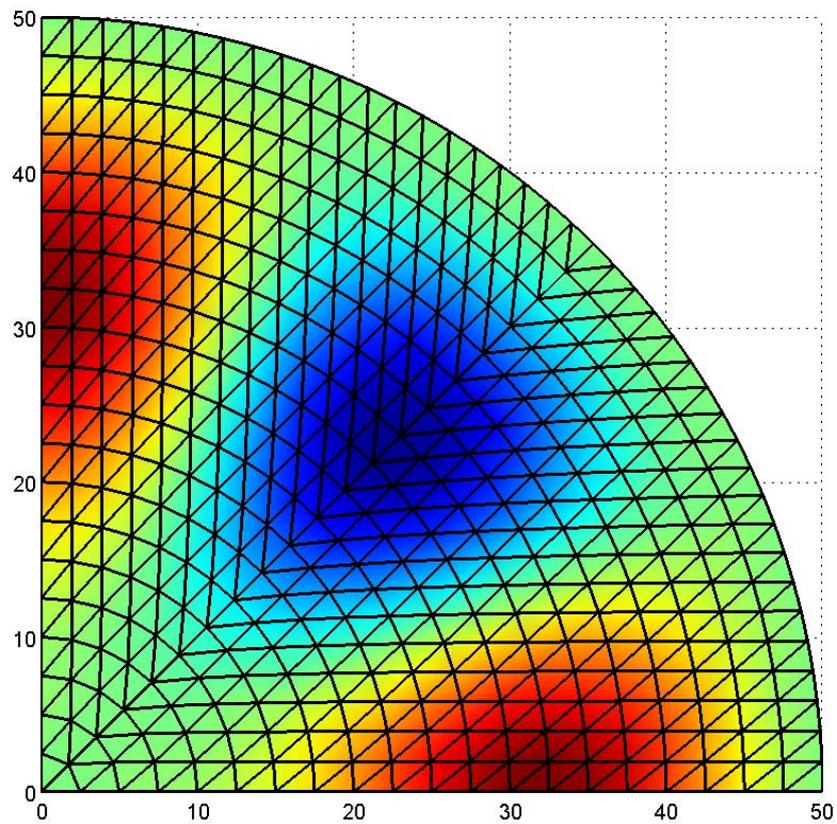


Abbildung D.10.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte

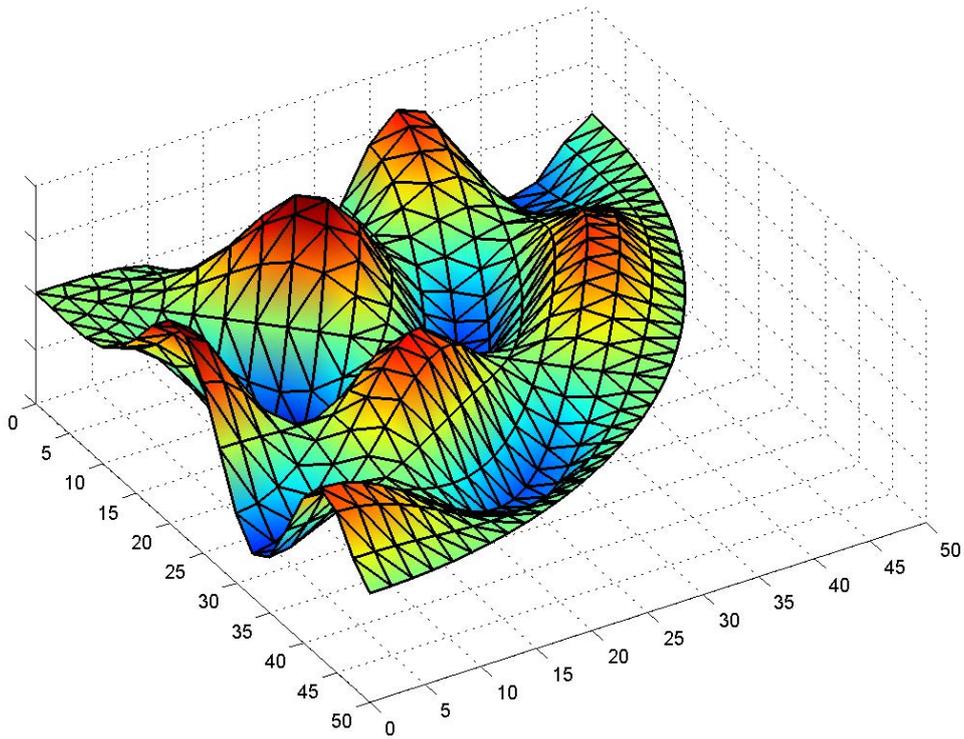


Abbildung D.11.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte (axonometrisch)

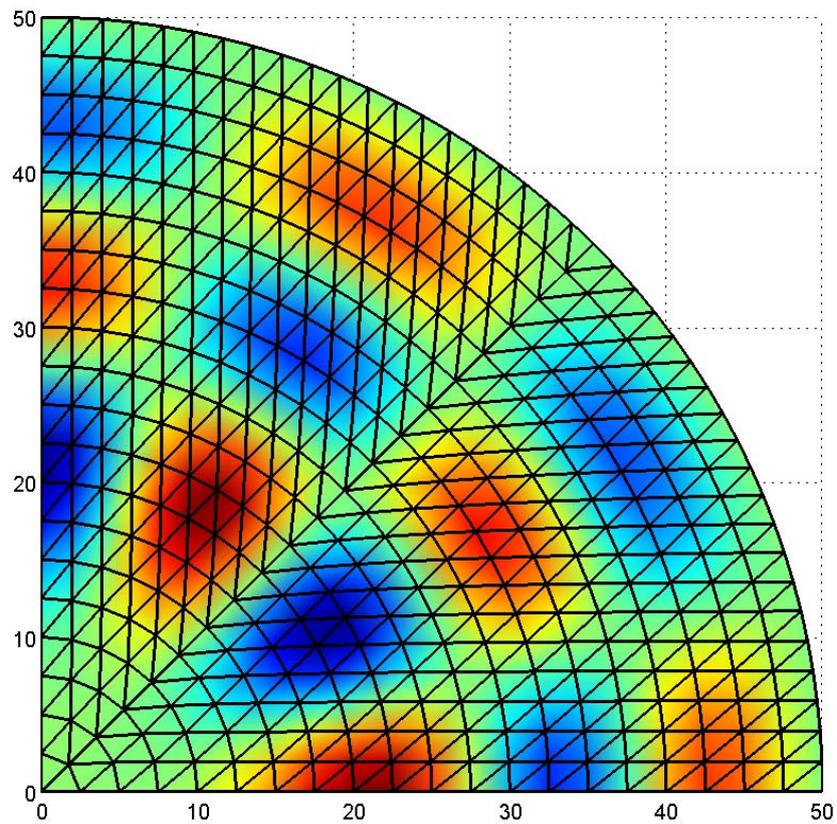


Abbildung D.12.: Antimetrische Eigenform der eingespannten Kreisplatte

E. Verwendete Modelle

Da zur Validierung des in Kapitel 3 vorgestellten Elementes, nur rotationssymmetrische Probleme der Kreisplatte behandelt wurden, war die Implementierung eines Netzgenerators vorteilhaft. Die mit dem Netzgenerator erstellten Netze wurden derart generiert, so dass

- auf Grund der Rotationssymmetrie nur ein Plattenviertel vernetzt wird,
- zum Abgleich mit der analytischen Lösung, je drei radiale Schnitte vorhanden sind, wobei der Schnitt unter 45° zudem frei von Randbedingungen ist,
- und das in diesen radialen Schnitten, beliebig viele, in radiale Richtung äquidistante Knotenpunkte für den Vergleich mit der analytischen Lösung zur Verfügung stehen.

Ermöglicht wurden diese Forderungen durch folgende Überlegung. Ausgehend von dem in Abb. E.1 schwarz dargestellten Grundnetz, bestehend aus zwei Elementen, wurden weitere radiale Elementreihen (blau) eingeführt und die so entstandenen Vierecke wurden wieder durch drei Dreiecke (rot) unterteilt. Durch Verallgemeinerung dieser Überlegung konnte die Anzahl der Knotenreihen und die Anzahl der Knotenpunkte je Knotenreihe, als Funktion einer vorgegebenen Anzahl an radialen Elementreihen, ermittelt werden. Für die Triangulierung der so vorgegebenen Knotenpunkte wurde dann der DELAUNEY-Algorithmus verwendet.

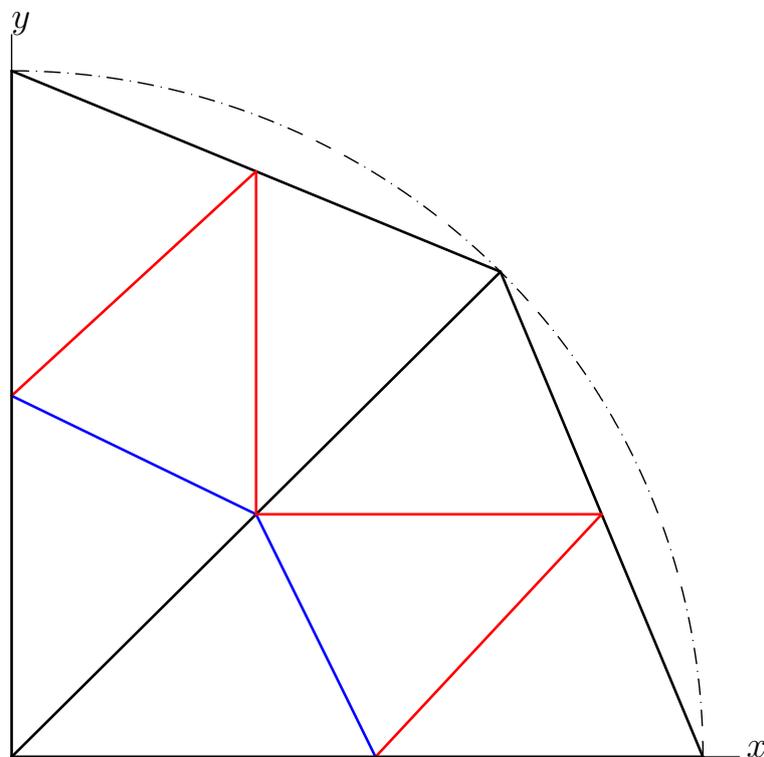


Abbildung E.1.: Überlegungen zur Ableitung eines Netzgenerators

Eine Übersicht über die so entstandenen und in dieser Arbeit verwendeten Modelle, ist mit Abb. E.2 bis Abb. E.7 gegeben. Eine Zusammenfassung der Modelleigenschaften ist in Tab. E.1 dargestellt.

Die Anzahl der radialen Elementreihen wurde dabei durch die Konvergenzanalyse für die statische Lösung vorgegeben. Für das Modell mit 20 radialen Elementreihen ergab sich die Anzahl unter Berücksichtigung der Biegewellenlänge der Art, das die fünfte Biegeeigenform noch eindeutig identifiziert werden konnte. Hierfür wurden mindestens drei Knotenkreise je Halbwelle der Biegeeigenform vorausgesetzt [12].

Tabelle E.1.: Eigenschaften der verwendeten Modelle

# Elementreihen	# Elemente	# Knoten	# Freiheitsgrade
1	2	4	17
2	8	9	43
4	32	25	131
6	72	49	267
8	128	81	451
20	800	441	2563

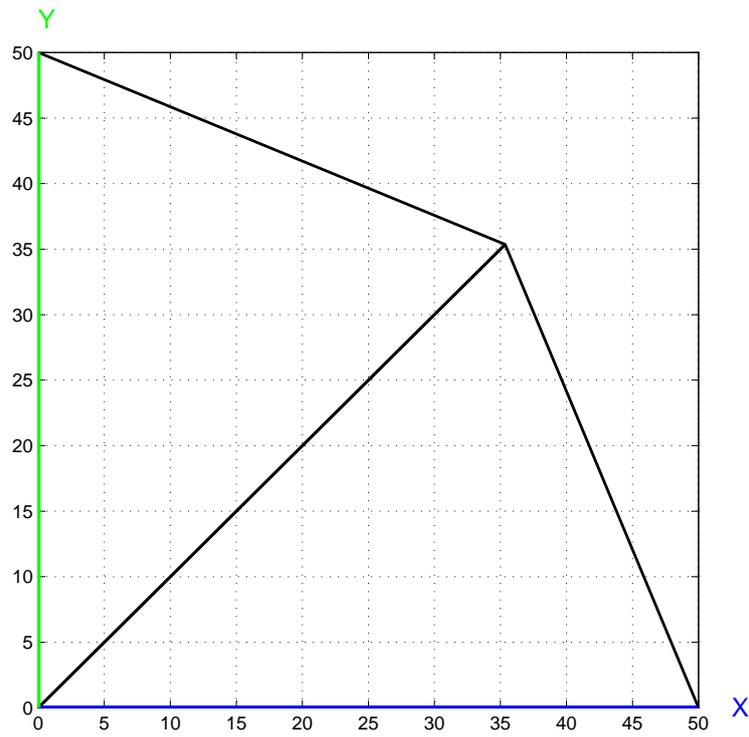


Abbildung E.2.: Modell mit einer radialen Elementreihe

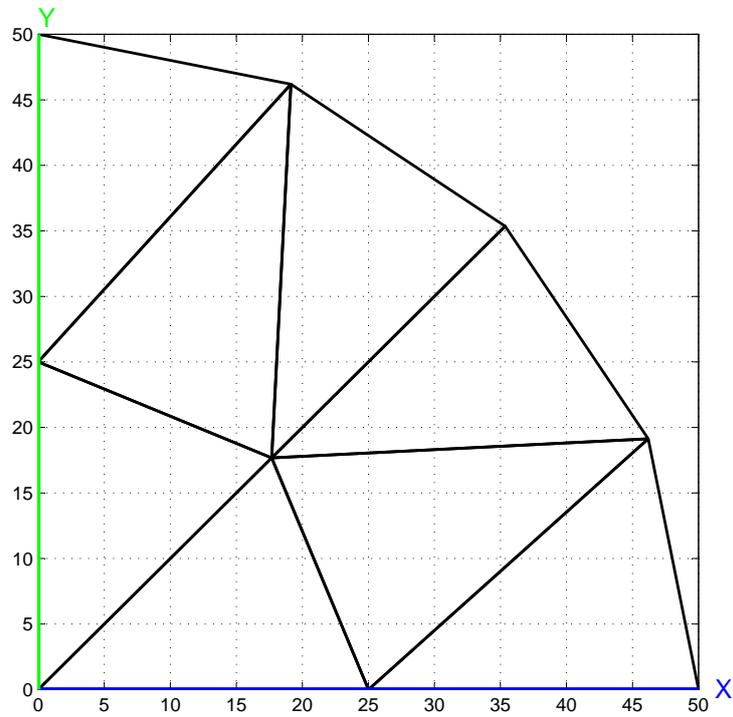


Abbildung E.3.: Modell mit zwei radialen Elementreihen

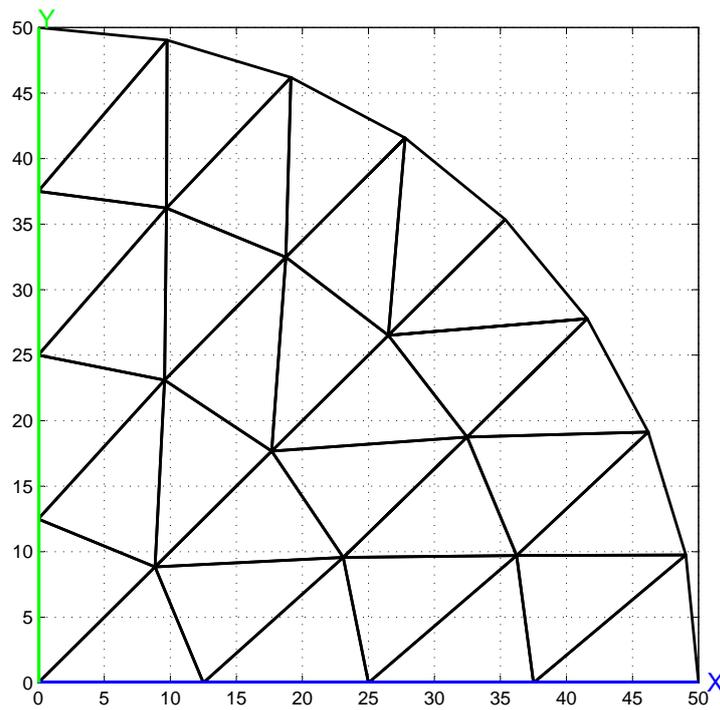


Abbildung E.4.: Modell mit vier radialen Elementreihen

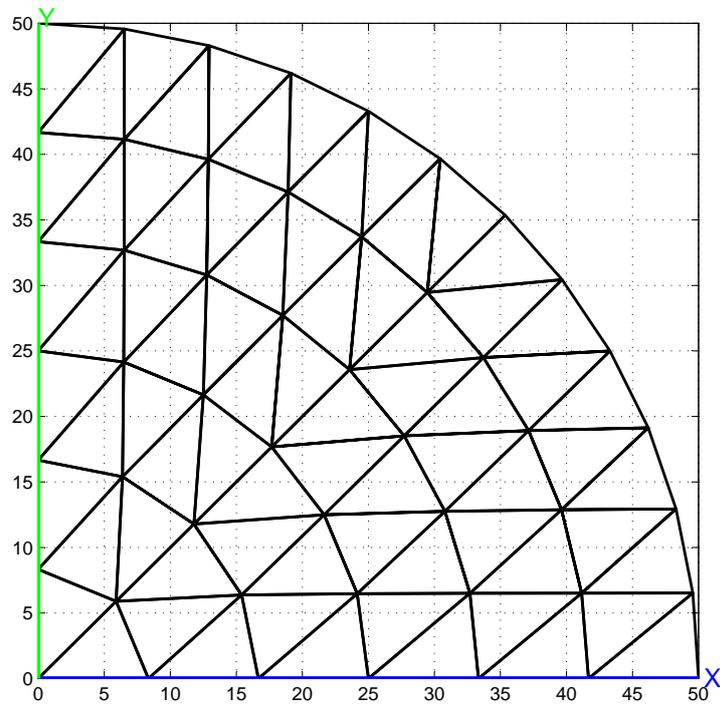


Abbildung E.5.: Modell mit sechs radialen Elementreihen

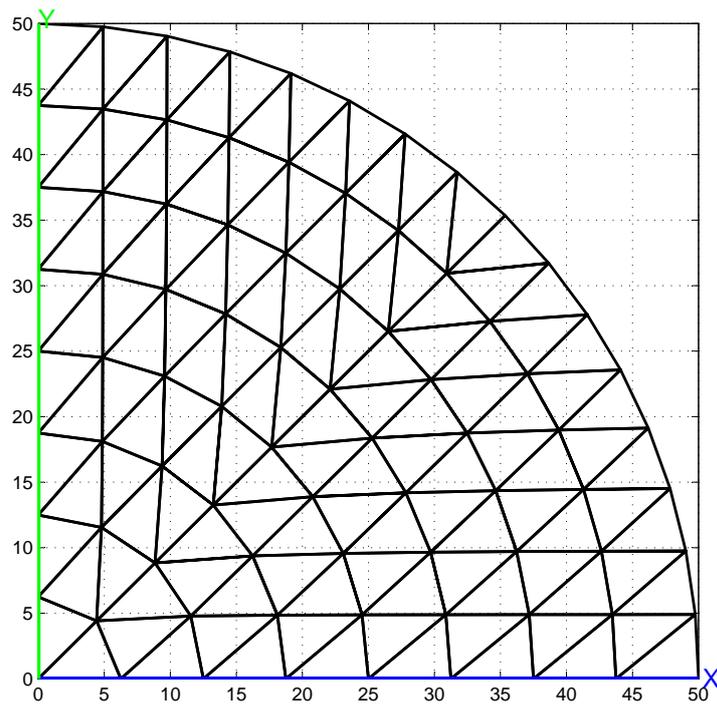


Abbildung E.6.: Modell mit acht radialen Elementreihen

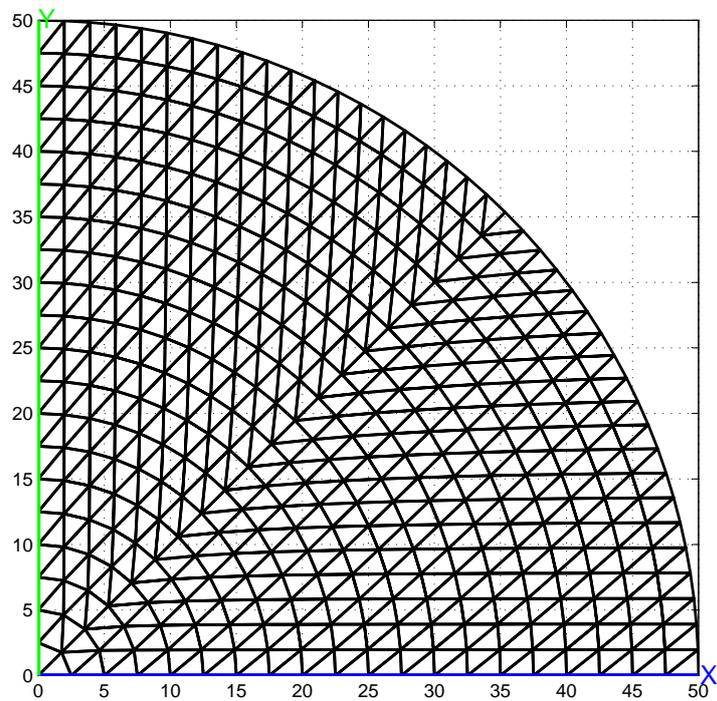


Abbildung E.7.: Modell mit 20 radialen Elementreihen