

Positions- und Richtungsbestimmung von Flugzeug-Transpondern durch Messung von Laufzeit-Unterschieden

Diplomarbeit

durchgeführt von

Mehdi Stiebler

Institut für Breitbandkommunikation
der Technischen Universität Graz

Leiter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gernot Kubin

in Zusammenarbeit mit dem
Institut für Weltraumforschung der
Österreichischen Akademie der Wissenschaft
am Observatorium Lustbühel in Graz

Begutachter: Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Erich Leitgeb

Betreuer: Dr.techn. Dipl.-Ing. Georg Kirchner

Graz, im März 2011

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

Zusammenfassung

Die Satellite Laser Ranging (SLR) Station am Observatorium Lustbühel in Graz misst die Entfernung zu (mit Retroreflektoren ausgestatteten) Satelliten unter Verwendung kurzer Laserimpulse (2 kHz Nd:Vanadate Laser: 532 nm; 10 ps Pulslänge; 0,4 mJ / Schuss). Um das Durchfliegen von Flugzeugen durch den Laserstrahl zu verhindern wurde ein aus fünf omni-direktionalen Stabantennen bestehendes System zur Detektion von Flugzeug-Transpondersignalen (1090 MHz) am Dach des Observatoriums montiert. Aufgrund der unterschiedlichen Entfernungen zum Flugzeug, wird das Transpondersignal von den fünf Antennen zu verschiedenen Zeitpunkten (Epochezeiten; 1 ns Auflösung) detektiert. Die Lage des Flugzeugs kann unter Zuhilfenahme der Antennenkoordinaten aus den Epochezeit-Differenzen ermittelt werden.

Die vorliegende Diplomarbeit ist in vier Kapitel gegliedert. Im einleitenden Teil werden die SLR-Technologie und der Hardwareaufbau erläutert. Der Hauptteil (Kapitel 2 und 3) setzt sich mit der Entwicklung verschiedener Algorithmen zur Positions- bzw. Richtungsbestimmung von Flugzeugen auseinander. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die Auswirkungen der endlichen Genauigkeit der Epochezeiten gelegt. Das letzte Kapitel widmet sich der im Rahmen der Diplomarbeit entwickelten Software.

Abstract

The Satellite Laser Ranging (SLR) Station at the observatory Lustbühel in Graz measures the distances to retroreflector equipped satellites using short laser pulses (2 kHz Nd:Vanadate Laser: 532 nm; 10 ps pulse length; 0,4 mJ / Shot). To prevent aircrafts from flying through the laser beam a transponder signal detection system consisting of five omni-directional rod antennas has been mounted on the observatory roof. Due to the different distances to the aircraft, the transponder signal is detected by the five antennas at different time instances (epoch times; 1 ns resolution). The aircraft location can be determined using the epoch time differences in conjunction with the antenna coordinates.

This diploma thesis is structured into four chapters. The first chapter contains a brief description of the SLR-technology and the hardware architecture. The main part (chapter 2 and 3) of the diploma thesis focuses on the development of diverse algorithms for position and direction determination of aircrafts. In this part particular attention is directed to the consequences of the limited accuracy of the epoch times. The last chapter is dedicated to the software which was developed throughout the diploma thesis.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung.....	5
1.1 Motivation.....	5
1.2 Aufbau.....	6
2. Transponder Positionsbestimmung.....	9
2.1 Koordinatentransformation.....	9
2.1.1 Umrechnung von geographischen in kartesische Koordinaten.....	9
2.1.2 Umrechnung von kartesischen in geographische Koordinaten.....	10
2.1.3 Rotation und Translation des regionalen Koordinatensystems.....	11
2.2 Algorithmus zur Positionsbestimmung.....	14
2.2.1 Graphische Darstellung potentieller Transponderpositionen.....	14
2.2.2 Positionsbestimmung mit mindestens 5 Antennen.....	16
2.2.3 Positionsbestimmung mit mindestens 4 Antennen.....	20
2.3 Winkel zwischen Transponder und Laserstrahl.....	23
2.4 Fehleranalyse.....	24
2.4.1 Simulation einer Transponderstrecke.....	26
2.4.2 Auswirkung der Auflösung auf die Positionsabweichung.....	27
2.4.3 Auswirkung der Antennenabstände auf die Positionsabweichung.....	27
3. Transponder Richtungsbestimmung.....	29
3.1 Algorithmus zur Richtungsbestimmung.....	29
3.1.1 Graphische Darstellung potentieller Transponderrichtungen.....	29
3.1.2 Richtungsbestimmung mit mindestens 3 Antennen.....	31
3.2 Fehleranalyse.....	35
3.2.1 Winkelfehler (Antennenpaar).....	35
3.2.2 Winkelfehler (Antennentriplett).....	38
3.3 Korrelation.....	46
3.4 Gewichtung.....	49
3.5 Transponderzuweisung.....	54
3.6 Extrapolation.....	56
3.7 Winkel zwischen Transponder und Laserstrahl.....	58
4. Implementierung der Software.....	60
4.1 Entwicklungsumgebung.....	60
4.2 Graphische Bedienungsoberfläche.....	60
5. Schlussfolgerungen.....	68
Literaturverzeichnis.....	69

1. Einführung

Die Aufgabe der vorliegenden Diplomarbeit besteht darin, verschiedene Algorithmen zur Positions- bzw. Richtungsbestimmung von Flugzeugen, unter Berücksichtigung der endlichen Präzision der zur Verfügung stehenden Hardware, zu entwickeln.

1.1 Motivation

Satellite Laser Ranging (SLR, [3]) ist ein Zweiwegmessverfahren, bei dem die Distanz zu mit Retroreflektoren ausgestatteten Satelliten mit einer Genauigkeit von wenigen Millimetern gemessen werden kann. Hierfür wird im Laserraum der SLR-Bodenstation ein kurzer Laserimpuls hoher Energiedichte generiert und über ein aus mehreren Spiegeln bestehendes Strahlführungssystem zum Laserteleskop geleitet. Der am anvisierten Satelliten reflektierte Laserimpuls wird an der SLR-Bodenstation von einem optischen Detektor registriert und anschließend in der Empfangseinrichtung analysiert. Die Entfernung des Satelliten von der Bodenstation (d) lässt sich, unter Zuhilfenahme der Lichtgeschwindigkeit (c), aus der Kenntnis des Sende- und Empfangszeitpunktes des Laserimpulses (t_t und t_r) berechnen.

$$d = \frac{t_r - t_t}{2} c = \frac{\Delta t}{2} c \quad (1.1)$$

Anwendung findet die SLR-Technologie vor allem bei der Bestimmung der Erd- und Meereszeiten. Zusätzlich lassen sich Rückschlüsse auf die Rotation und das Schwerfeld der Erde, sowie auf die Bewegung der Pole und Kontinentalplatten ziehen.

Weltweit gibt es derzeit über 45 aktive SLR-Stationen, die vom International Laser Ranging Service (ILRS, [6]) koordiniert werden. Eine dieser Stationen befindet sich am Observatorium Lustbühel in Graz und wird vom Institut für Weltraumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaft (IWF ÖAW, [5]) betrieben. Für die Entfernungsmessungen wurde zunächst ein 10 Hz Nd:YAG Laser (532 nm) verwendet, der 35 ps kurze Pulse produzierte und mit einer Energie von 30 - 50 mJ (nominell: 100 mJ) pro Schuss betrieben wurde. Zusätzlich dazu wurde für etwa zwei Jahre ein Rubin Laser (Pulslänge 6 ns, bis zu 4 J pro Schuss) für das LASSO-Experiment (Zeitsynchronisierung über geostationären METEOSAT P2) eingesetzt. Diese beiden Lasersysteme wurden Ende 2003 durch einen 2

kHz Nd:Vanadate Laser (532 nm) ersetzt, welcher sich besonders durch die sehr kurze Pulslänge von 10 ps und der relativ geringen Energie von 400 μJ pro Schuss auszeichnet. Bedingt durch die ständige Verbesserung der verwendeten Technologien konnten im Laufe der Jahre zahlreiche Fortschritte erzielt werden. Unter anderem konnte die Genauigkeit der Entfernungsmessung von anfangs 5 cm auf derzeit 2 - 3 mm reduziert, und die Maximaldistanz zum Satelliten von 6.000 km auf über 20.000 km erweitert werden.

Trotz der niedrigen Schussenergie des zurzeit verwendeten Lasersystems soll aus Sicherheitsgründen verhindert werden, dass zu den Satelliten geschossene Laserimpulse auf vorbeifliegende Flugzeuge treffen. Um dies gewährleisten zu können, müssen allerdings alle im Umkreis des Observatoriums befindlichen Flugzeuge geortet werden. Dabei wird von der Tatsache, dass zum Zwecke der Luftraumüberwachung heutzutage in nahezu allen Flugzeugen ein aktiver Transponder eingebaut ist, Gebrauch gemacht [9]. Wird ein solcher Transponder durch das von einem rotierenden Abfragegerät (Interrogator) ausgesendete Abfragesignal (1030 MHz) getriggert, strahlt dieser unmittelbar danach ein kodiertes Antwortsignal (1090 MHz) über seine rundstrahlende Antenne aus. Da dieses Antwortsignal von jeder herkömmlichen 1090 MHz Antenne empfangen werden kann, bietet sich an, die Lage der sich im interessierenden Bereich des Laserteleskops aufhaltenden Flugzeuge, aus den Signallaufzeitdifferenzen mehrerer am Dach des Observatoriums montierter Antennen, zu berechnen.

1.2 Aufbau

In der nachfolgenden Abbildung wird die Lage des Laserteleskops und der fünf am Dach des Observatoriums befestigten Antennen in der x-y-Ebene des regionalen kartesischen Koordinatensystems (x' , y' , z') dargestellt.



Abbildung 1.1: Regionales Koordinatensystem

Für die regionalen kartesischen Koordinaten des Laserteleskops (\mathbf{l}') bzw. der fünf Antennen (\mathbf{a}_i') gilt dabei:

$$\mathbf{l}' = [x'_l \quad y'_l \quad z'_l]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_i' = [x'_i \quad y'_i \quad z'_i]^T \quad \text{für } i = 1, \dots, 5 \quad (1.2)$$

Um die Dachfläche optimal auszunutzen, wurden drei Antennen möglichst weit voneinander am Geländer des Gebäudes fixiert. Die zwei weiteren Antennen befinden sich in einer Höhe von etwa 3,5 m über der von den ersten drei Antennen aufgespannten Ebene.

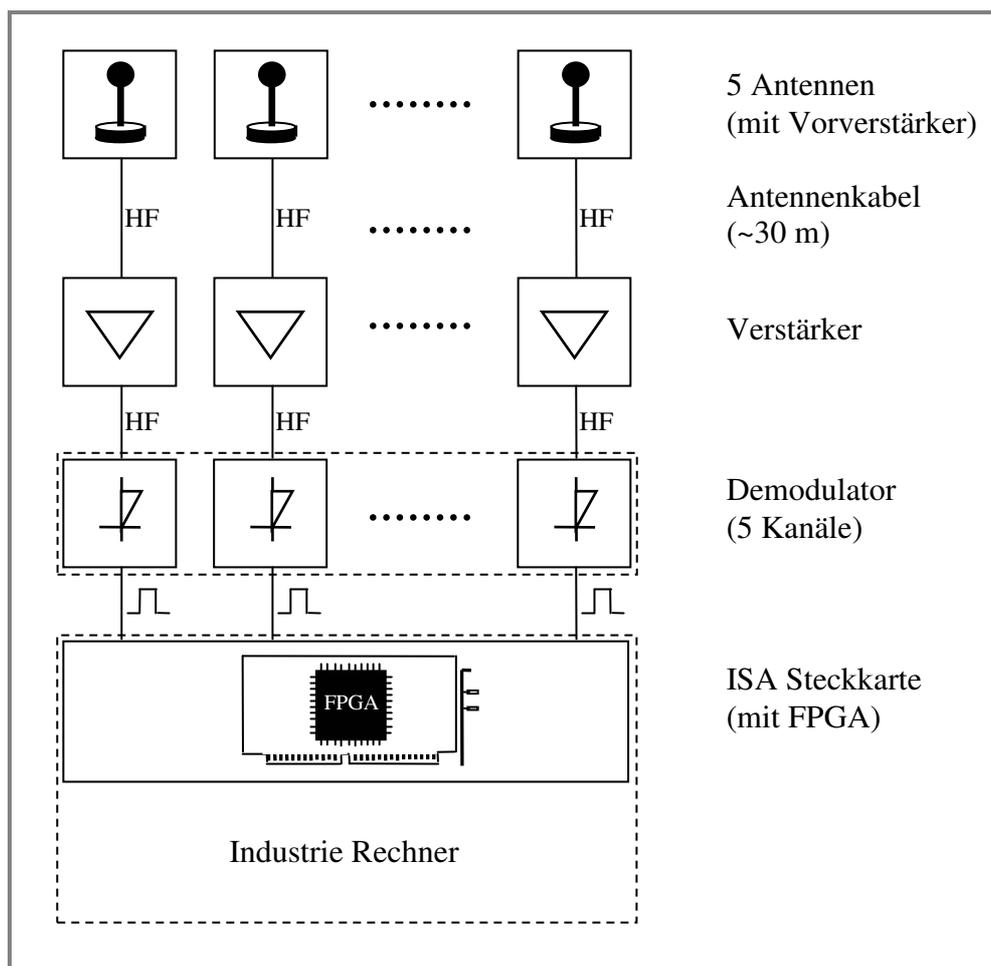


Abbildung 1.2: Aufbau

Das Blockdiagramm in Abbildung 1.2 veranschaulicht den wesentlichen Aufbau der verwendeten Hardware. Die zirka 6 cm langen, omni-direktionalen 1090 MHz Stabantennen (Abb. 1.3a) sind mit jeweils einem sehr rauscharmen Vorverstärker (Frequenzbereich: 1070...1110 MHz; Rauschmaß @ 18 °C: < 0,6 dB; Gewinn: > 30 dB) direkt verbunden. Das von dieser Empfangseinheit verstärkte Transpondersignal wird über ein etwa 30 m langes Antennenkabel in einen Zwischenraum des Observatoriums geleitet, durch einen weiteren Verstärker regeneriert und anschließend einem Demodulator zugeführt. Nachdem dieser das hochfrequente Transpondersignal in eine TTL-Pulsfolge umgewandelt hat, wird das nunmehr

digitale Signal an eine ISA-Steckkarte (Abb. 1.3b), die mit einem FPGA Baustein bestückt ist, weitergeleitet. Innerhalb dieses FPGA Bausteins befindet sich ein Event-Timer, mit dem der Empfangszeitpunkt des Transpondersignals, durch Auswertung der Impulsflanken des Digitalsignals, gemessen werden kann. Die gemessenen Zeiten werden auf der ISA-Steckkarte gespeichert und können über den ISA-Bus vom Industrie-Rechner ausgelesen werden.

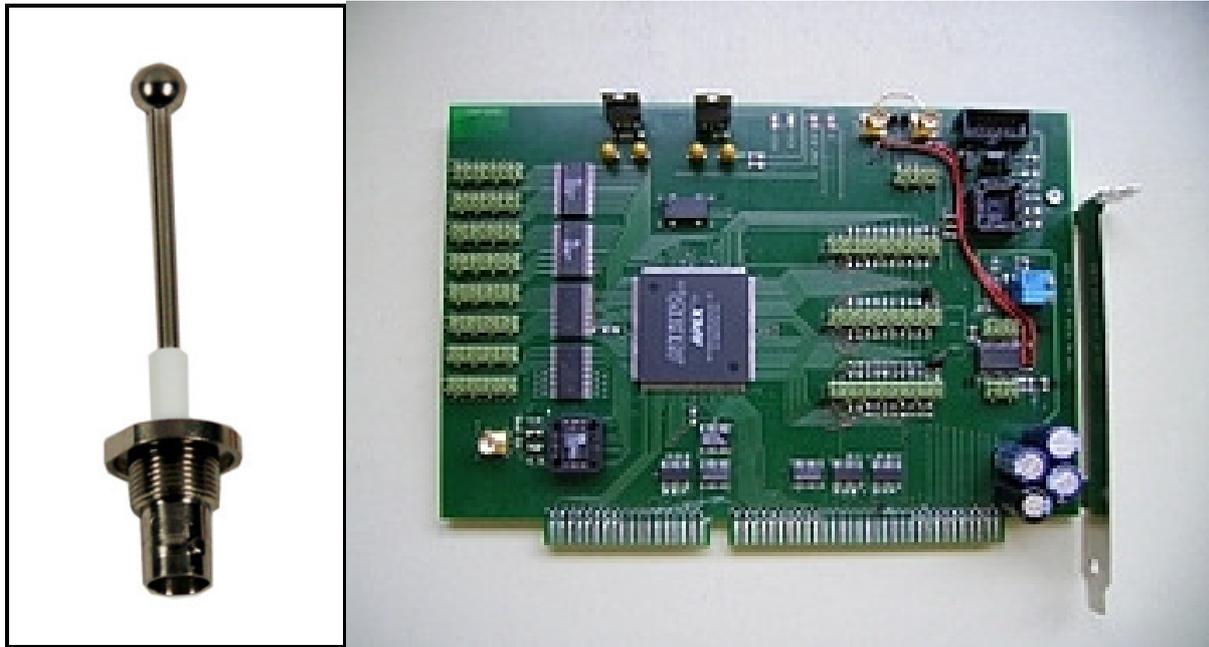
**a)****b)**

Abbildung 1.3: a) 1090 MHz Stabantenne, b) ISA Steckkarte (mit FPGA)

2. Transponder Positionsbestimmung

Dieser Abschnitt setzt sich mit der Positionsbestimmung von Transpondern auseinander. Da hierbei unterschiedliche Koordinatensysteme zum Einsatz kommen, werden zunächst die notwendigen Formeln für die Transformation zwischen kartesischen und geographischen Koordinaten [4], sowie für die Rotation und Translation von Koordinatensystemen [1] hergeleitet.

2.1 Koordinatentransformation

Die geographische Lage eines Punktes auf der Erde wird durch die geographischen (ellipsoidischen) Koordinaten festgelegt. Da diese Koordinaten für mathematische Berechnungen und Messungen jedoch ungeeignet sind, ist in den meisten Fällen eine Transformation in kartesische Koordinaten unumgänglich.

2.1.1 Umrechnung von geographischen in kartesische Koordinaten

Aufgrund der starken Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche ist dessen exakte und einheitliche mathematische Modellierung nicht realisierbar, weshalb in Abhängigkeit des betrachteten Gebietes unterschiedliche regional angepasste Referenzsysteme zum Einsatz kommen. Für globale Positionsangaben auf der Erde, sowie im erdnahen Weltraum, wird derzeit das internationale Referenzsystem WGS84 (World Geodetic System 1984) verwendet. Die beiden darin definierten Halbachsen bilden ein Referenzellipsoid, dessen Mittelpunkt mit dem Massenmittelpunkt der Erde und dem kartesischen Koordinatenursprung zusammenfällt. Mit der geographischen Länge λ ($-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$) und Breite φ ($-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) lässt sich jeder Punkt auf der Oberfläche dieses Ellipsoids darstellen. Die Höhe h gibt zusätzlich den Abstand des Punktes von der Ellipsoidoberfläche an. Die kartesischen Koordinaten (Gl. 2.3) können direkt aus den in Abbildung 2.1 illustrierten geometrischen Zusammenhängen zwischen den beiden zu transformierenden Koordinatensystemen abgeleitet werden.

WGS84:

große Halbachse: $a = 6378137 \text{ m}$

kleine Halbachse: $b = 6356752,315 \text{ m}$

Exzentrizität:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.1)$$

Erdradius ($b \leq r_E \leq a$):

$$r_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (2.2)$$

Transformation $\lambda, \varphi, h \rightarrow x, y, z$:

$$\begin{aligned} x &= (r_E + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ y &= (r_E + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ z &= ((1 - e^2)r_E + h) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

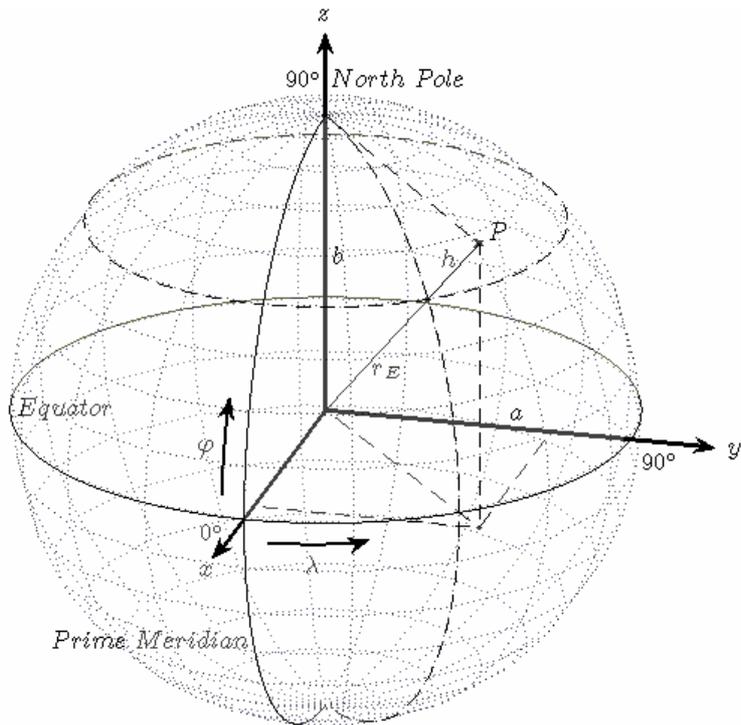


Abbildung 2.1: Koordinatentransformation

2.1.2 Umrechnung von kartesischen in geographische Koordinaten

Die Rücktransformation von kartesischen in geographische Koordinaten führt zu keiner geschlossenen Lösung. Zwar lässt sich die geographische Länge λ sehr einfach aus dem Verhältnis der y- und x-Koordinate herleiten (Gl. 2.4), für die zwei anderen geographischen Koordinaten ist hingegen eine iterative Berechnung erforderlich.

$$\frac{y}{x} = \frac{(r_E + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda)}{(r_E + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda)} = \tan(\lambda) \rightarrow \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.4)$$

Zur Herleitung der geographischen Breite φ und der Höhe h wird zunächst durch Kombination der x- und y-Koordinate die geographische Länge λ aus Gleichung 2.3 eliminiert.

$$x^2 + y^2 = (r_E + h)^2 \cos^2(\varphi) \underbrace{(\cos^2(\lambda) + \sin^2(\lambda))}_1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = (r_E + h) \cos(\varphi) \quad (2.5)$$

Dividiert man die z-Koordinate durch diesen Ausdruck erhält man nach Umformung schließlich die geographische Breite φ .

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{((1 - e^2)r_E + h)\sin(\varphi)}{(r_E + h)\cos(\varphi)} = \left(1 - e^2 \frac{r_E}{r_E + h}\right) \tan(\varphi) \rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 - e^2 \frac{r_E}{r_E + h}} \right) \quad (2.6)$$

Die Höhe h kann ebenfalls aus Gleichung 2.5 ermittelt werden.

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos(\varphi)} - r_E \quad (2.7)$$

Da die geographische Breite $\varphi = f(h)$ und die Höhe $h = f(\varphi)$ miteinander verknüpft sind, können diese Koordinaten lediglich iterativ bestimmt werden. Aufgrund der Tatsache, dass der Flugverkehr ausschließlich in der Troposphäre stattfindet, kann die Höhe h gegenüber dem Erdradius r_E vernachlässigt werden, woraus sich folgender Startwert für die geographische Breite ergibt:

$$r_E \gg h: \frac{r_E}{r_E + h} \approx 1 \rightarrow \varphi_0 = \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 - e^2} \right) \quad (2.8)$$

Die Iteration (Gl. 2.9) wird nun, ausgehend vom Startwert φ_0 , solange durchlaufen, bis sich die Werte für die geographische Breite von zwei aufeinander folgenden Iterationsschritten nur noch unwesentlich unterscheiden ($|\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \varepsilon$).

$$r_{Ei} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin(\varphi_i)^2}}, \quad h_i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos(\varphi_i)} - r_{Ei}, \quad \varphi_{i+1} = \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 - e^2 \frac{r_{Ei}}{r_{Ei} + h_i}} \right) \quad (2.9)$$

2.1.3 Rotation und Translation des regionalen Koordinatensystems

Voraussetzung für die Umrechnung der regionalen kartesischen Koordinaten (x', y', z') in die globalen kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist die Kenntnis der geographischen Koordinaten von einem in der Nähe der regionalen Koordinaten liegendem Punkt, welcher im Übrigen den Ursprung des regionalen Koordinatensystems festlegt ($x' = y' = z' = 0$). Bevor der Ursprung des regionalen Koordinatensystems in den Ursprung des globalen Koordinatensystems verschoben werden darf, müssen die Koordinatenachsen der beiden Koordinatensysteme zuerst gleichgerichtet werden. Demzufolge ist eine Drehung des regionalen Koordinatensystems erforderlich.

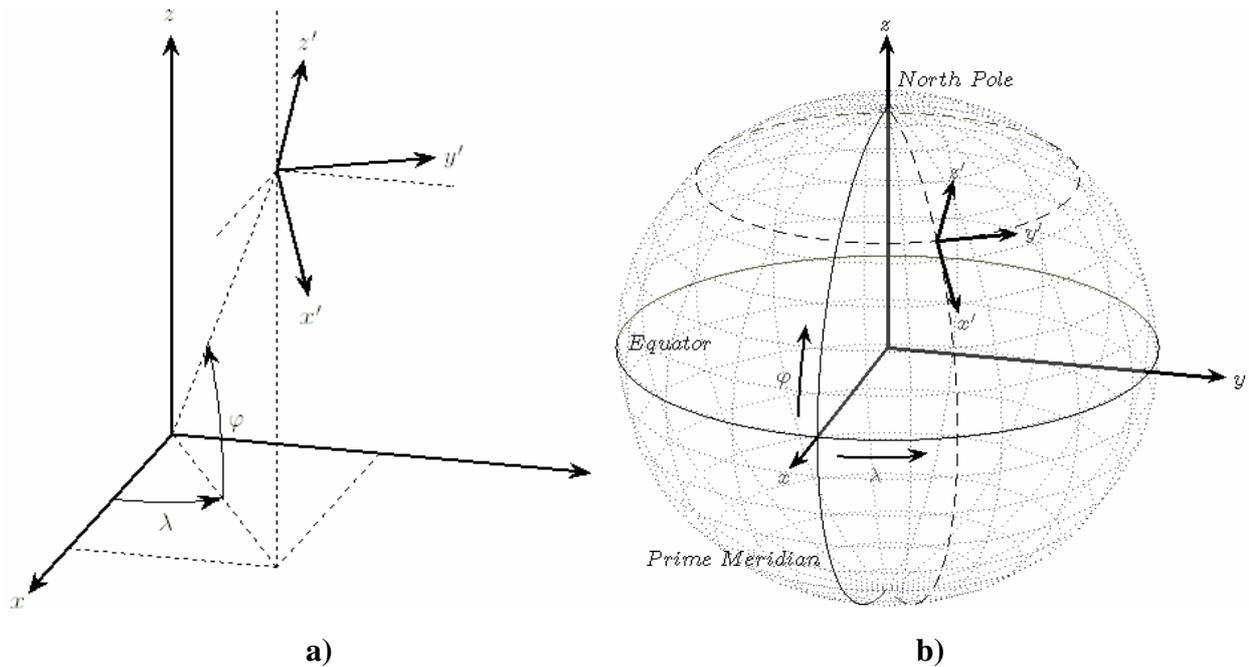


Abbildung 2.2: Zusammenhänge zwischen dem regionalem (x', y', z') und dem globalem (x, y, z) Koordinatensystem

Abbildung 2.3 demonstriert die Rotation des Koordinatensystems $S_1 (x_1, y_1, z_1)$ gegen das Koordinatensystems $S_2 (x_2, y_2, z_2)$. Hierbei erfolgt eine Drehung der z-Achse im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) um den Winkel α . Ein Punkt im Koordinatensystem S_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 und z_1 kann entsprechend Gleichung 2.11 ebenfalls mithilfe des Koordinatensystems S_2 durch die Koordinaten x_2, y_2 und z_2 beschrieben werden.

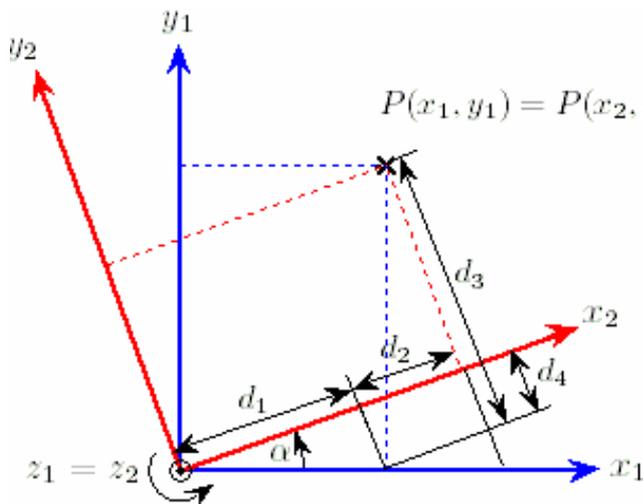


Abbildung 2.3: Koordinatenrotation

$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_1 \cos(\alpha) \\
 d_2 &= y_1 \sin(\alpha) \\
 d_3 &= y_1 \cos(\alpha) \\
 d_4 &= x_1 \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Rotation $x_1, y_1, z_1 \rightarrow x_2, y_2, z_2$:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= d_1 + d_2 = x_1 \cos(\alpha) + y_1 \sin(\alpha) \\
 y_2 &= d_3 - d_4 = y_1 \cos(\alpha) - x_1 \sin(\alpha) \\
 z_2 &= z_1
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Eine etwas übersichtlichere Darstellung dieser linearen Gleichungen erhält man mittels Matrixschreibweise, wobei \mathbf{R} als Drehmatrix oder Rotationsmatrix bezeichnet wird.

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_z \mathbf{x}_1 \quad (2.12)$$

Analog dazu ergeben sich, durch zyklisches Vertauschen der Koordinatenachsen, die Drehmatrizen für eine Drehung der x- bzw. y-Achse um den Winkel α zu:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Um nun die z-Achse des regionalen Koordinatensystems parallel zur z-Achse des globalen Koordinatensystems auszurichten (Abb. 2.2a), muss zunächst eine Drehung der y-Achse des regionalen Koordinatensystems im mathematisch negativen Sinn um $\pi - \varphi$ vorgenommen werden.

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \pi) & 0 & -\sin(\varphi - \pi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi - \pi) & 0 & \cos(\varphi - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Anschließend ist, zur Gleichrichtung der x- und y-Achsen beider Koordinatensysteme, nur noch eine Drehung der z-Achse des regionalen Koordinatensystems im mathematisch negativen Sinn um die geometrische Länge λ erforderlich.

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(-\lambda) & \sin(-\lambda) & 0 \\ -\sin(-\lambda) & \cos(-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & 0 \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Die aktuelle Lage der Koordinatenachsen des regionalen Koordinatensystems wird durch die drei gestrichelten Linien in Abbildung 2.2a dargestellt. Letzten Endes muss der Ursprung des regionalen Koordinatensystems in den Ursprung des globalen Koordinatensystems um den Translationsvektor \mathbf{t} (Vektor vom Ursprung des globalen Koordinatensystems zum Ursprung des regionalen Koordinatensystems) verschoben werden. Hierfür müssen lediglich die geographischen Koordinaten des regionalen Koordinatenursprungs gemäß Gleichung 2.3 in kartesische Koordinaten transformiert werden. Folglich kann jeder beliebige Punkt des regionalen Koordinatensystems ($\mathbf{x}' = [x' \ y' \ z']^T$) ebenso als Punkt des globalen Koordinatensystems ($\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$) dargestellt werden.

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{x}' + \mathbf{t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}' + \mathbf{t} \quad (2.16)$$

2.2 Algorithmus zur Positionsbestimmung

Zur Berechnung der Transponderposition stehen ausschließlich die Epochezeiten der vorhandenen Antennen zur Verfügung. Darunter versteht man jene Zeit, zu der das Transpondersignal mit einer Genauigkeit von etwa einer Nanosekunde an der jeweiligen Antenne empfangen wird. Dabei ist allerdings nicht gewährleistet, dass das Transpondersignal von allen Antennen detektiert wird.

2.2.1 Graphische Darstellung potentieller Transponderpositionen

Abbildung 2.4 veranschaulicht die Berechnung einer möglichen Position des Transponders durch Verwendung eines Antennenpaares (a_j und a_k) und der dazugehörigen Epochezeiten (t_j und t_k). Die bekannten Längen $d_{a_{jk}}$ (Distanz zwischen den beiden Antennen) und $d_{t_{jk}}$ (Strecke, die das Licht während der Epochezeitdifferenz t_{jk} zurücklegt) sind mittels durchgezogener Linien abgebildet. Der dazwischen liegende Winkel α gibt die Richtung des Transponders gegenüber der Antennenachse an und kann einen willkürlichen Wert zwischen 0 und dem kritischen Winkel α_{crit} annehmen.

$$0 \leq \alpha < \alpha_{crit} \quad \text{mit} \quad \alpha_{crit} = \arccos\left(\frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}}\right) \quad \text{und} \quad d_{t_{jk}} = ct_{jk} = c(t_j - t_k) \quad (2.17)$$

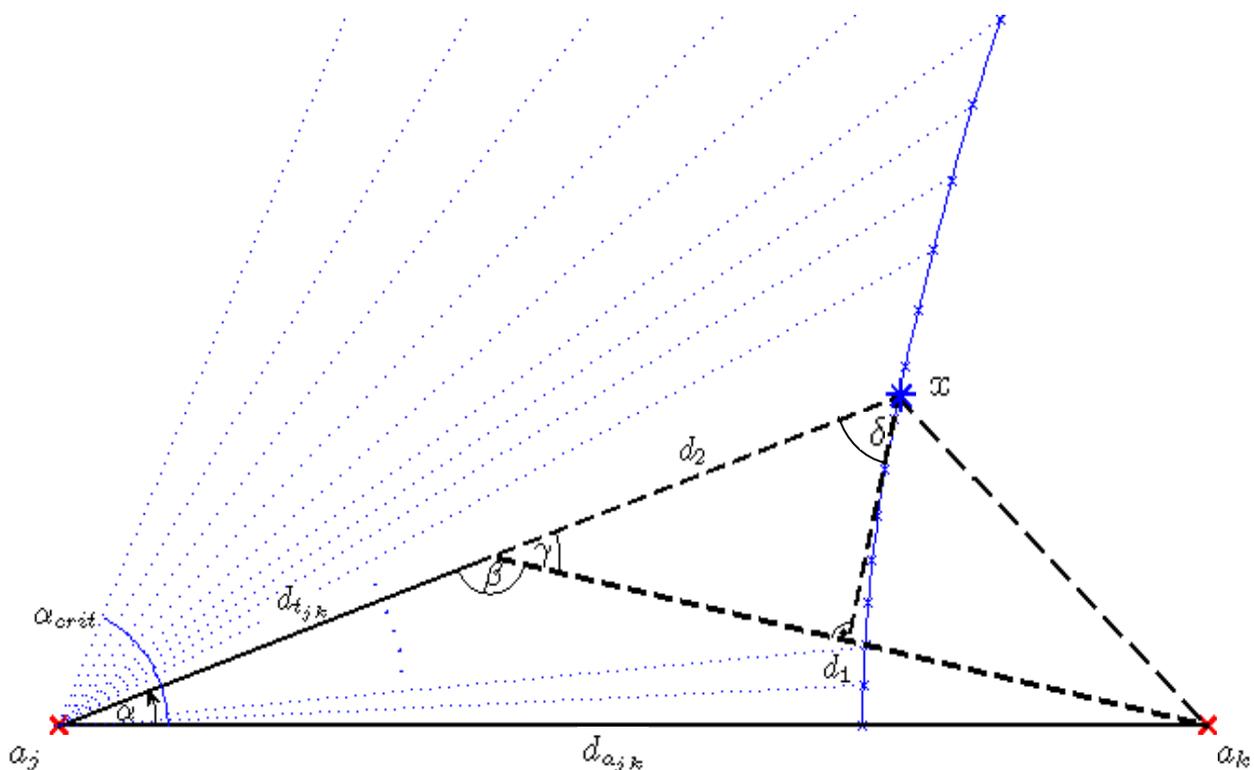


Abbildung 2.4: Berechnung potentieller Transponderpositionen

Unter Zuhilfenahme des Kosinussatzes ergibt sich die gegenüber dem Winkel α liegende Länge d_1 zu:

$$d_1 = \sqrt{d_{a_{jk}}^2 + d_{t_{jk}}^2 - 2d_{a_{jk}}d_{t_{jk}}\cos(\alpha)} \quad (2.18)$$

Da die Signallaufzeiten vom Transponder zu beiden Endpunkten dieser Länge identisch sind, können, durch Auftragung einer vom Mittelpunkt der Länge d_1 ausgehenden Linie, zwei aneinander grenzende rechtwinklige Dreiecke gebildet werden. Der von den Längen $d_{t_{jk}}$ und d_1 eingeschlossene Winkel β kann nach Umformung des Kosinussatzes ermittelt werden.

$$\beta = \arccos\left(\frac{d_{a_{jk}}^2 - d_{t_{jk}}^2 - d_1^2}{-2d_{t_{jk}}d_1}\right) \quad (2.19)$$

Mithilfe dieses Winkels können die Winkel γ und δ des rechtwinkligen Dreiecks ausgedrückt werden.

$$\gamma = \pi - \beta \quad \text{und} \quad \delta = \pi/2 - \gamma = \pi/2 - (\pi - \beta) = \beta - \pi/2 \quad (2.20)$$

Durch Anwendung des Sinussatzes lässt sich schließlich die Hypotenuse d_2 des rechtwinkligen Dreiecks berechnen.

$$d_2 = \frac{d_1}{2\sin(\delta)} = \frac{d_1}{2\sin(\beta - \pi/2)} = -\frac{d_1}{2\cos(\beta)} \quad (2.21)$$

Demzufolge befindet sich, vom Winkel α gegenüber der Antennenachse ausgehend, eine potentielle Position des Transponders im Abstand $d_{t_{jk}} + d_2$ von der Antenne a_j . Die blaue Kurve in Abbildung 2.4 illustriert weitere mögliche Aufenthaltsorte des Transponders, die sich durch Variation des Winkels α innerhalb des zulässigen Intervalls (Gl. 2.17) ergeben. Führt man nun eine vollständig Drehung dieser Kurve um die Antennenachse durch, so erhält man ein elliptisches Paraboloid (Abb. 2.5), dessen Oberfläche alle möglichen Transponderpositionen darstellt.

Für den Sonderfall, dass die Zeit, die das Licht benötigt um den Antennenabstand zu durchlaufen, mit der Epochezeitdifferenz t_{jk} übereinstimmt, liegen alle Transponderpositionen auf einer mit der Antennenachse zusammenfallenden Geraden (Winkel $\alpha = 0$), die sich von der Antenne a_k ausgehend in das Unendliche erstreckt. Ein weiterer Sonderfall tritt auf, wenn das Transpondersignal von beiden Antennen gleichzeitig detektiert wird ($t_{jk} = 0$). In diesem Fall würden alle Transponderpositionen auf einer Ebene normal zur Antennenachse liegen.

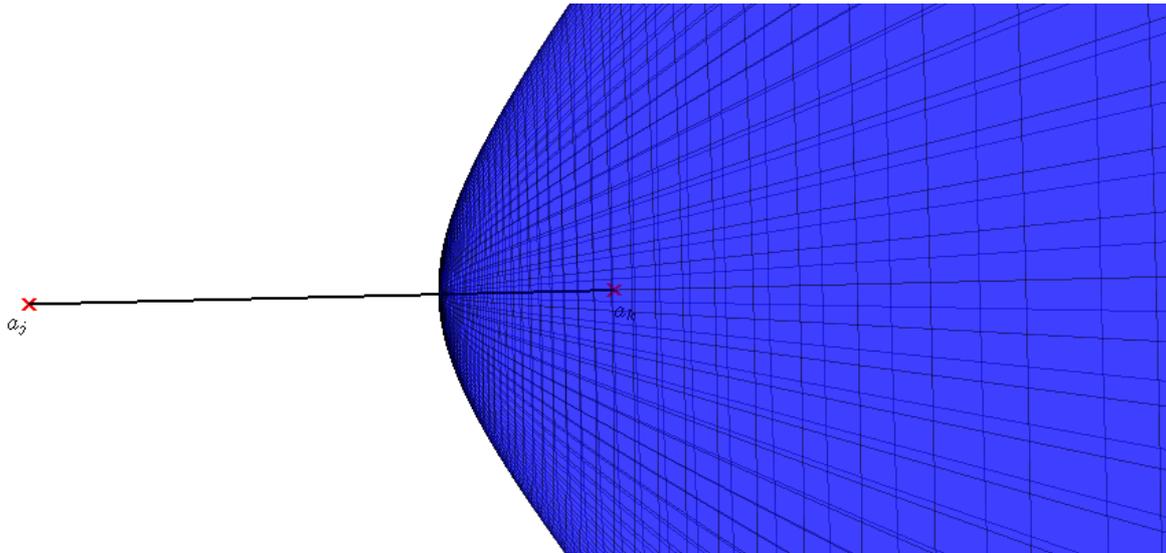


Abbildung 2.5: Elliptisches Paraboloid

Da Abbildung 2.4 ausschließlich für nichtnegative Epochezeitdifferenzen ($t_{jk} \geq 0$) zu gültigen Ergebnissen führt, ist im Falle negativer Epochezeitdifferenzen ($t_{jk} < 0$) der Winkel α an der gegenüberliegenden Antenne (a_k) aufzutragen. Auf diese Weise ist die zu betrachtende Epochezeitdifferenz nicht mehr t_{jk} , sondern t_{kj} ($t_{kj} = -t_{jk} > 0$), wodurch sich eine vertikal, um den Mittelpunkt der Antennenachse, gespiegelte Darstellung von Abbildung 2.4 ergibt.

Die endgültige Transponderposition erhält man letzten Endes aus dem Schnittpunkt mehrerer, durch unterschiedliche Antennenpaare entstehenden Flächen. Aufgrund der hiermit verbundenen Komplexität wird im nächsten Kapitel ein wesentlich einfacheres Berechnungsverfahren vorgestellt.

2.2.2 Positionsbestimmung mit mindestens 5 Antennen

Abbildung 2.6 stellt eine mathematisch sehr simple Methode zur Berechnung der Transponderposition dar. Das vom Transponder (x) ausgesendete Signal breitet sich mit der Lichtgeschwindigkeit (c) in alle Richtungen (kugelförmig) aus und wird von den Antennen (a_j, a_k, a_l), aufgrund der unterschiedlichen Entfernungen zum Transponder, zu verschiedenen Zeitpunkten (Epochezeiten t_{Ej}, t_{Ek}, t_{El}) detektiert.

Zur Bestimmung der drei Transponderkoordinaten (x, y, z) wird die Signallaufzeit vom Transponder zur nächstliegenden Antenne (t) als vierte Unbekannte eingeführt. Die zusätzlichen Laufzeiten zu allen weiteren Antennen ergeben sich aus den Differenzen der Epochezeit der jeweiligen Antenne zur kleinsten (ältesten) Epochezeit aller Antennen ($t_{E \min}$).

$$t_i = t_{Ei} - t_{E \min} \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (t_i \dots \text{Epochezeitdifferenz, } N \dots \text{Antennenanzahl}) \quad (2.22)$$

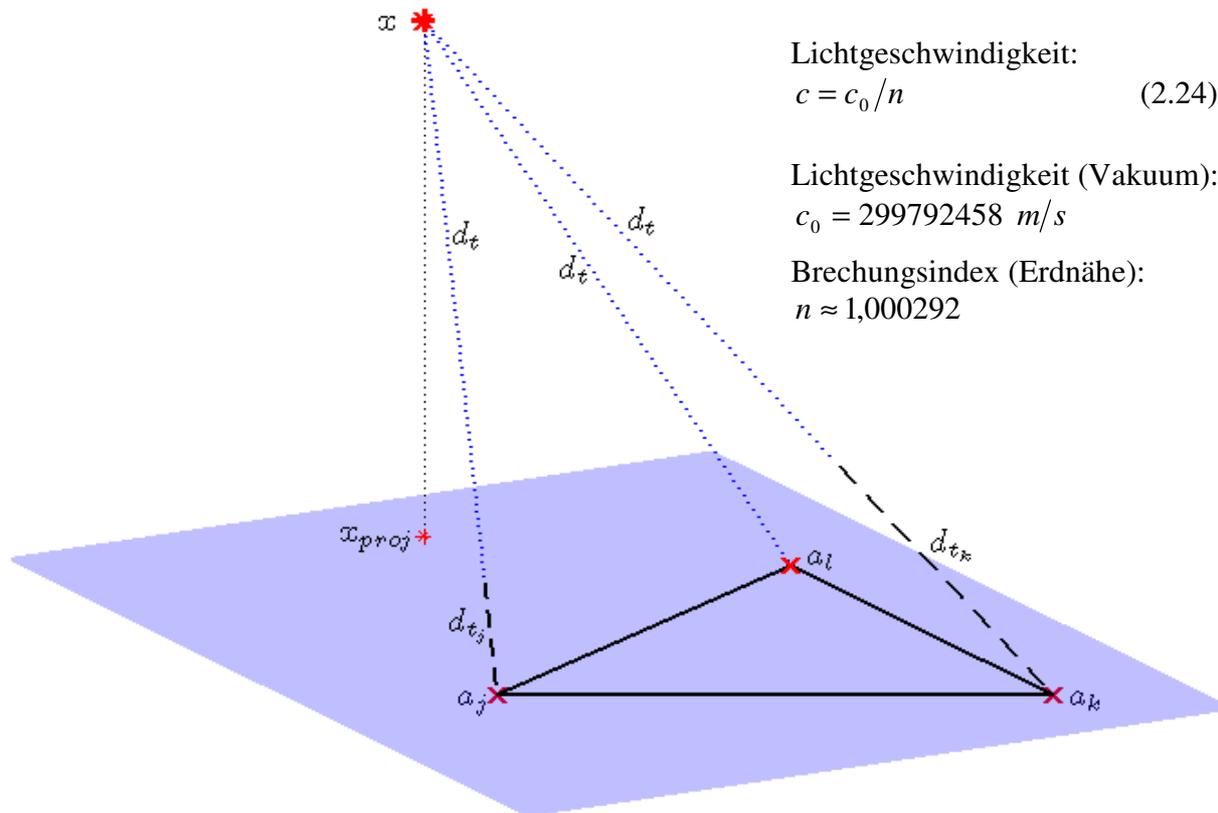


Abbildung 2.6: Transponder Positionsbestimmung

Die in der Zeichnung abgebildeten Abstände erhält man durch Multiplikation der entsprechenden Laufzeiten mit der Lichtgeschwindigkeit c .

$$d_i = ct \text{ bzw. } d_{t_i} = ct_i \text{ für } i = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

Um die spätere Transformation der kartesischen Transponderkoordinaten in geographische Koordinaten vereinfachen zu können, sollte als Endergebnis die Transponderposition bereits in globalen kartesischen Koordinaten ($\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$) vorliegen. Zu diesem Zweck müssen die regionalen kartesischen Koordinaten aller benötigten Antennen (\mathbf{a}_i') zunächst gemäß Gleichung 2.16 in globale kartesische Koordinaten (\mathbf{a}_i) umgewandelt werden.

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{a}_i' + \mathbf{t} \text{ für } i = 1, \dots, N \text{ mit } \mathbf{a}_i' = [x_i' \ y_i' \ z_i']^T \text{ und } \mathbf{a}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T \quad (2.25)$$

Die räumlichen Verhältnisse zwischen dem Transponder und den verfügbaren Antennen in Abbildung 2.6 können unter Zuhilfenahme von Gleichung 2.23 auch in mathematischer Form ausgedrückt werden. Allgemein betrachtet ergeben sich für N Antennen ebenso viele quadratische Gleichungen (Q_1, \dots, Q_N). Im Folgenden wird ein Lösungsverfahren beschrieben, das in ähnlicher Weise auch bei dem Global Positioning System (GPS) zum Einsatz kommt (vgl. GPS Gleichungen [8]).

$$\begin{aligned}
Q_1 &: (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = (c(t_1 + t))^2 \\
Q_2 &: (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 = (c(t_2 + t))^2 \\
&\vdots \\
Q_N &: (x_N - x)^2 + (y_N - y)^2 + (z_N - z)^2 = (c(t_N + t))^2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Nach ausmultiplizieren dieser Gleichungen wird verdeutlicht, dass jede Gleichung die vier quadratischen Unbekannten x , y , z und t mit denselben Koeffizienten beinhaltet.

$$\begin{aligned}
Q_1 &: x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 + z_1^2 - 2z_1z + z^2 = c^2(t_1^2 + 2t_1t + t^2) \\
Q_2 &: x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2 + z_2^2 - 2z_2z + z^2 = c^2(t_2^2 + 2t_2t + t^2) \\
&\vdots \\
Q_N &: x_N^2 - 2x_Nx + x^2 + y_N^2 - 2y_Ny + y^2 + z_N^2 - 2z_Nz + z^2 = c^2(t_N^2 + 2t_Nt + t^2)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Daher können alle unbekannt quadratischen Terme durch Subtraktion von jeweils zwei verschiedenen quadratischen Gleichungen eliminiert werden.

$$M = \binom{N}{2} = \frac{N!}{(N-2)!2!} \tag{2.28}$$

Folglich erhält man aus den N quadratischen Gleichungen, in Übereinstimmung mit dem Binomialkoeffizienten (Gl. 2.28), M lineare Gleichungen, von denen allerdings lediglich $N-1$ Gleichungen linear unabhängig sind. Der Grund weshalb dennoch alle möglichen Kombinationen verwendet werden, liegt in der Tatsache, dass im Vorhinein nicht bekannt ist welche der N Antennen das Transpondersignal überhaupt empfangen.

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i] \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \tag{2.29}$$

Mithilfe des Skalarproduktes (Gl. 2.29) können die linearen Gleichungen (L_1, \dots, L_M) ein wenig kompakter formuliert werden.

$$\begin{aligned}
L_1(Q_1 - Q_2) &: 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + 2c^2(t_2 - t_1)t = c^2(t_1^2 - t_2^2) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\
L_2(Q_1 - Q_3) &: 2(x_3 - x_1)x + 2(y_3 - y_1)y + 2(z_3 - z_1)z + 2c^2(t_3 - t_1)t = c^2(t_1^2 - t_3^2) + \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\
&\vdots \\
L_M(Q_{N-1} - Q_N) &: 2(x_N - x_{N-1})x + 2(y_N - y_{N-1})y + 2(z_N - z_{N-1})z + 2c^2(t_N - t_{N-1})t = c^2(t_{N-1}^2 - t_N^2) + \mathbf{a}_N^T \mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1}^T \mathbf{a}_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann mittels Matrizenschreibweise noch übersichtlicher dargestellt werden. Hierzu werden alle Koeffizienten der vier gesuchten Variablen in der $M \times 4$ Koeffizientenmatrix \mathbf{A} zusammengefasst.

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) & c^2(t_2 - t_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) & c^2(t_3 - t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_N - x_{N-1}) & (y_N - y_{N-1}) & (z_N - z_{N-1}) & c^2(t_N - t_{N-1}) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^T - \mathbf{a}_1^T & c^2(t_2 - t_1) \\ \mathbf{a}_3^T - \mathbf{a}_1^T & c^2(t_3 - t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_N^T - \mathbf{a}_{N-1}^T & c^2(t_N - t_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Der 4×1 Lösungsvektor \mathbf{x}_e entspricht dem um die vierte Unbekannte t erweiterten Transponderkoordinatenvektor \mathbf{x} . Die Terme auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems werden in einem $M \times 1$ Spaltenvektor, dem so genannten Konstantenvektor \mathbf{b} , eingetragen.

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} c^2(t_1^2 - t_2^2) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\ c^2(t_1^2 - t_3^2) + \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ c^2(t_{N-1}^2 - t_N^2) + \mathbf{a}_N^T \mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1}^T \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Somit kann das lineare Gleichungssystem in Gleichung 2.30 ebenfalls durch die folgende Matrixgleichung ausgedrückt werden:

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_e = \mathbf{b} \quad (2.33)$$

Da es sich bei der Koeffizientenmatrix im Allgemeinen um eine überbestimmte Matrix (Zeilenanzahl \neq Spaltenanzahl) handelt, kann eine Matrizeninversion ohne weiteres nicht durchgeführt werden. Multipliziert man Gleichung 2.33 von links mit der transponierten Koeffizientenmatrix (\mathbf{A}^T), so entspricht das Matrixprodukt auf der linken Seite des Lösungsvektors einer quadratischen Matrix (notwendige Bedingung zur Inversion einer Matrix).

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_e = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.34)$$

Nach Multiplikation des inversen Matrixproduktes $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ von links erhält man schließlich den Lösungsvektor.

$$\mathbf{x}_e = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (2.35)$$

Der gesamte Ausdruck auf der linken Seite des Konstantenvektors in Gleichung 2.35 wird als Pseudoinverse der Koeffizientenmatrix (\mathbf{A}^+) bezeichnet. Die gesuchten globalen kartesischen Transponderkoordinaten sind in den ersten drei Elementen des Lösungsvektors enthalten und können mit dem in Kapitel 2.1.2 beschriebenen Iterationsverfahren in geographische Koordinaten umgerechnet werden. Zur Ermittlung weiterer Transponderpositionen müssen nur die Epochezeitdifferenzen im Konstantenvektor sowie in der vierten Spalte der Koeffizientenmatrix modifiziert werden.

Um die vier Unbekannten x , y , z und t zu bestimmen sind mindestens vier linear unabhängige Gleichungen erforderlich. Zur Bildung dieser vier linear unabhängigen Gleichungen benötigt man wiederum fünf quadratische Gleichungen. Demnach sollten zumindest fünf Antennen zur eindeutigen Positionsbestimmung des Transponders zur Verfügung stehen. Gesetzt den Fall, dass mehr als vier linear unabhängige Gleichungen vorliegen, wird der Lösungsvektor nicht exakt, sondern mithilfe der Pseudoinversen nach der Methode der kleinsten Quadrate (Summe der Fehlerquadrate e_i^2 wird minimiert) gelöst.

$$\sum_{i=1}^M e_i^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_e\|^2 \rightarrow \min \quad (2.36)$$

2.2.3 Positionsbestimmung mit mindestens 4 Antennen

Im letzten Kapitel wurden, aufgrund der vierten Unbekannten t , fünf Antennen benötigt um die Position des Transponders zu ermitteln. Durch welche Maßnahme es ermöglicht wird, die Anzahl der erforderlichen Antennen auf vier zu reduzieren, wird im Folgenden demonstriert.

Definiert man die drei Transponderkoordinaten x , y und z als lineare Funktionen der vierten Unbekannten t , so lässt sich diese Laufzeit aus den linearen Gleichungen (Gl. 2.30) eliminieren.

$$x = x(t) = x_0 + x_t t, \quad y = y(t) = y_0 + y_t t, \quad z = z(t) = z_0 + z_t t \quad (2.37)$$

Jede der Transponderkoordinaten besteht aus einem konstantem (x_0 , y_0 , z_0) sowie einem von der vierten Unbekannten t abhängigen Anteil (x_t , y_t , z_t). Setzt man diese drei Ansätze nun in Gleichung 2.30 anstelle der Transponderkoordinaten ein, kann das lineare Gleichungssystem in zwei voneinander getrennte Untersysteme mit jeweils drei Unbekannten aufgespaltet werden. Das erste Untersystem beinhaltet alle von der Laufzeit unabhängigen Terme.

$$\begin{aligned}
L_1 &: 2(x_2 - x_1)x_0 + 2(y_2 - y_1)y_0 + 2(z_2 - z_1)z_0 = c^2(t_1^2 - t_2^2) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\
L_2 &: 2(x_3 - x_1)x_0 + 2(y_3 - y_1)y_0 + 2(z_3 - z_1)z_0 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\
&\vdots \\
L_M &: 2(x_N - x_{N-1})x_0 + 2(y_N - y_{N-1})y_0 + 2(z_N - z_{N-1})z_0 = c^2(t_{N-1}^2 - t_N^2) + \mathbf{a}_N^T \mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1}^T \mathbf{a}_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Die linearen Gleichungen des zweiten Untersystems bestehen aus den von der Laufzeit abhängigen Termen.

$$\begin{aligned}
L_1 &: 2(x_2 - x_1)x_t + 2(y_2 - y_1)y_t + 2(z_2 - z_1)z_t = 2c^2(t_1 - t_2) \\
L_2 &: 2(x_3 - x_1)x_t + 2(y_3 - y_1)y_t + 2(z_3 - z_1)z_t = 2c^2(t_1 - t_3) \\
&\vdots \\
L_M &: 2(x_N - x_{N-1})x_t + 2(y_N - y_{N-1})y_t + 2(z_N - z_{N-1})z_t = 2c^2(t_{N-1} - t_N)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Wirft man einen genaueren Blick auf die linken Seiten beider Untersysteme, kann man erkennen, dass sowohl die unabhängigen Variablen x_0 , y_0 und z_0 als auch die abhängigen Variablen x_t , y_t und z_t dieselben Koeffizienten aufweisen. Demzufolge ist die $M \times 3$ Koeffizientenmatrix \mathbf{A} für beide Untersysteme identisch.

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_N - x_{N-1}) & (y_N - y_{N-1}) & (z_N - z_{N-1}) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^T - \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_3^T - \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T - \mathbf{a}_{N-1}^T \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Die 3×1 Lösungsvektoren \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_t bestehen aus den jeweiligen Variablen der zwei Untersysteme. Die $M \times 1$ Konstantenvektoren \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_t werden wiederum aus den rechten Seiten der beiden Untersysteme gebildet.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} c^2(t_1^2 - t_2^2) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\ c^2(t_1^2 - t_3^2) + \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ c^2(t_{N-1}^2 - t_N^2) + \mathbf{a}_N^T \mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1}^T \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = 2c^2 \begin{bmatrix} t_1 - t_2 \\ t_1 - t_3 \\ \vdots \\ t_{N-1} - t_N \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

In Matrizenform ergeben sich die linearen Gleichungssysteme in Gleichung 2.38 bzw. 2.39 somit zu:

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x}_t = \mathbf{b}_t \tag{2.42}$$

Zur Lösung dieser linearen Gleichungssysteme muss erneut die Pseudomatrix \mathbf{A}^+ herangezogen werden.

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_0 \text{ bzw. } \mathbf{x}_t = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_t \text{ mit } \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2.43)$$

Um die Transponderkoordinaten zu bestimmen muss nur noch die unbekannte Laufzeit t ermittelt werden. Zu diesem Zweck muss man auf die quadratischen Gleichungen (Gl. 2.26) zurückgreifen.

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 = (c(t_i + t))^2 \text{ für } i = 1, \dots, N \quad (2.44)$$

Nach Substitution der drei Transponderkoordinaten mit den Ansätzen aus Gleichung 2.37 erhält man eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten.

$$(x_i - x_0 - x_t)^2 + (y_i - y_0 - y_t)^2 + (z_i - z_0 - z_t)^2 = (c(t_i + t))^2 \quad (2.45)$$

Umgeformt ergibt sich diese Gleichung zu:

$$(x_i - x_0)^2 - 2(x_i - x_0)x_t + x_t^2 + (y_i - y_0)^2 - 2(y_i - y_0)y_t + y_t^2 + (z_i - z_0)^2 - 2(z_i - z_0)z_t + z_t^2 = c^2(t_i^2 + 2t_i t + t^2) \quad (2.46)$$

Sortiert man die Terme der quadratische Gleichung nun nach absteigender Potenz gelangt man zu der folgenden Darstellung.

$$c_1 t^2 - 2c_2 t + c_3 = 0 \quad (2.47)$$

Die Koeffizienten c_1 , c_2 und c_3 erhält man aus dem anschließenden Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} t^2 : c_1 &= x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 - c^2 = \mathbf{x}_t^T \mathbf{x}_t - c^2 \\ t^1 : c_2 &= (x_i - x_0)x_t + (x_i - x_0)x_t + (x_i - x_0)x_t + c^2 t_i = (\mathbf{a}_i + \mathbf{x}_0)^T \mathbf{x}_t \\ t^0 : c_3 &= (x_i + x_0)^2 + (y_i + y_0)^2 + (z_i + z_0)^2 - c^2 t_i^2 = (\mathbf{a}_i + \mathbf{x}_0)^T (\mathbf{a}_i + \mathbf{x}_0) - c^2 t_i^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Für jede der N quadratischen Gleichungen ergeben sich schließlich zwei mögliche Lösungen für die Laufzeit t (t_{i1} , t_{i2}).

$$t_{i1,2} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_1} \quad (2.49)$$

Die endgültigen Werte für t_1 und t_2 erhält man nach Mittelung über die Antennenanzahl N .

$$t_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{i_1} \quad \text{bzw.} \quad t_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{i_2} \quad (2.50)$$

Einer dieser Werte lässt sich sehr leicht eliminieren, da er entweder negativ ist, oder zu einer unrealistischen Position des Transponders innerhalb der Antennenanordnung führt. Die endgültigen Transponderkoordinaten können mithilfe der zweiten Lösung gemäß Gleichung 2.37 eindeutig bestimmt werden.

2.3 Winkel zwischen Transponder und Laserstrahl

Aus Sicherheitsgründen soll vermieden werden, dass Laserimpulse von einer SLR-Bodenstation auf vorbeifliegende Flugzeuge geschossen werden. Um gegebenenfalls den Laser zu unterbrechen, ist die Kenntnis des Winkels zwischen dem Laserstrahl und dem Transponder erforderlich. Hierfür müssen zunächst die regionalen kartesischen Laserkoordinaten (\mathbf{l}') laut Gleichung 2.16 in die globalen kartesischen Laserkoordinaten (\mathbf{l}) transformiert werden.

$$\mathbf{l} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{l}' + \mathbf{t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{l}' = [x'_i \quad y'_i \quad z'_i]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{l} = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \quad (2.51)$$

Der Richtungsvektor \mathbf{r}_x vom Laserstandort zur aktuellen Transponderposition lässt sich mittels simpler Vektorsubtraktion bestimmen. Dessen Einheitsvektor \mathbf{e}_x erhält man nach anschließender Normierung.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{x} - \mathbf{l} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_x}{\|\mathbf{r}_x\|} \quad (2.52)$$

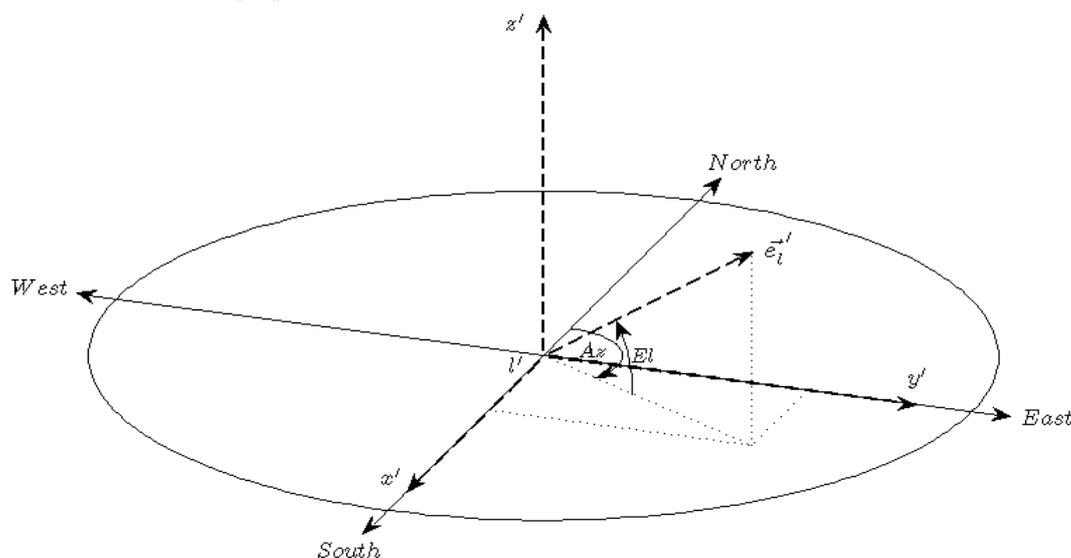


Abbildung 2.7: Bestimmung der Richtung des Laserstrahls

Die Richtung des Laserstrahls lässt sich unter Zuhilfenahme des Azimut- und Elevationswinkels des Laserteleskops durch den regionalen Einheitsvektor \mathbf{e}'_1 darstellen. Die kartesischen Koordinaten dieses Vektors können aus den in Abbildung 2.7 verdeutlichten räumlichen Verhältnissen zwischen dem regionalen Koordinatensystem und den Himmelsrichtungen bestimmt werden.

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{bmatrix} \sin(Az - \pi/2) \cos(El) \\ \cos(Az - \pi/2) \cos(El) \\ \sin(El) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(Az) \cos(El) \\ \sin(Az) \cos(El) \\ \sin(El) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Um diesen regionalen Einheitsvektor auf das globale kartesische Koordinatensystem zu beziehen, muss außerdem noch eine Rotation um die y- und z-Achse (Gl. 2.14 / 2.15) durchgeführt werden. Da es sich um keine Ortsangabe, sondern ausschließlich um eine Richtungsindikation handelt ist eine zusätzliche Translation hinfällig.

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{e}'_1 \quad (2.54)$$

Der Winkel θ zwischen den beiden Einheitsvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_1 ergibt sich schließlich zu:

$$\theta = \arccos(\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_1) \quad (2.55)$$

Für den Fall, dass dieser Winkel kleiner als der kritische Winkel θ_{crit} ist, wird der Laser durch Senden eines Interruptbefehls vorläufig unterbrochen.

2.4 Fehleranalyse

Da die Epochezeiten an den Antennen „nur“ mit einer Genauigkeit von einer Nanosekunde gemessen werden können, kommt es zu einer Abweichung der rechnerisch ermittelten Position des Transponders von seinem tatsächlichen Aufenthaltsort. Zur Positionsbestimmung des Transponders werden allerdings nicht die Epochezeiten selbst, sondern ausschließlich deren Differenzen herangezogen, wodurch sich im Endeffekt eine Schwankung der Epochezeitdifferenzen um ± 1 ns ergibt.

Abbildung 2.8a illustriert die maximale Schwankung der Transponderkennlinie eines Antennenpaares (siehe Kapitel 2.2.1) zufolge der endlichen Auflösung der Epochezeiten. Die schwarze Kurve gibt alle wahren Aufenthaltsorte des Transponders an und verläuft zu der um den kritischen Winkel α_{crit} gegenüber der Antennenachse geneigten Linie (punktirt eingezeichneten) näherungsweise parallel.

$$\alpha_{crit} = \arccos\left(\frac{d_{tjk}}{d_{ajk}}\right) \quad \text{mit } d_{tjk} = ct_{jk} \quad (2.56)$$

Die abgebildete Länge d_{tjk} wird, bedingt durch die begrenzte Zeitauflösung t_{res} , um die Länge $d_{res} = c \cdot t_{res}$ verkürzt bzw. verlängert, wodurch sich die Form des rechtwinkligen Dreiecks und infolgedessen auch der kritische Winkel ($\alpha_{crit \pm}$) verändert.

$$\alpha_{crit \pm} = \arccos\left(\frac{d_{tjk} \pm d_{res}}{d_{ajk}}\right) \quad \text{mit } d_{tjk} = ct_{jk} \quad \text{und} \quad d_{res} = ct_{res} \quad (2.57)$$

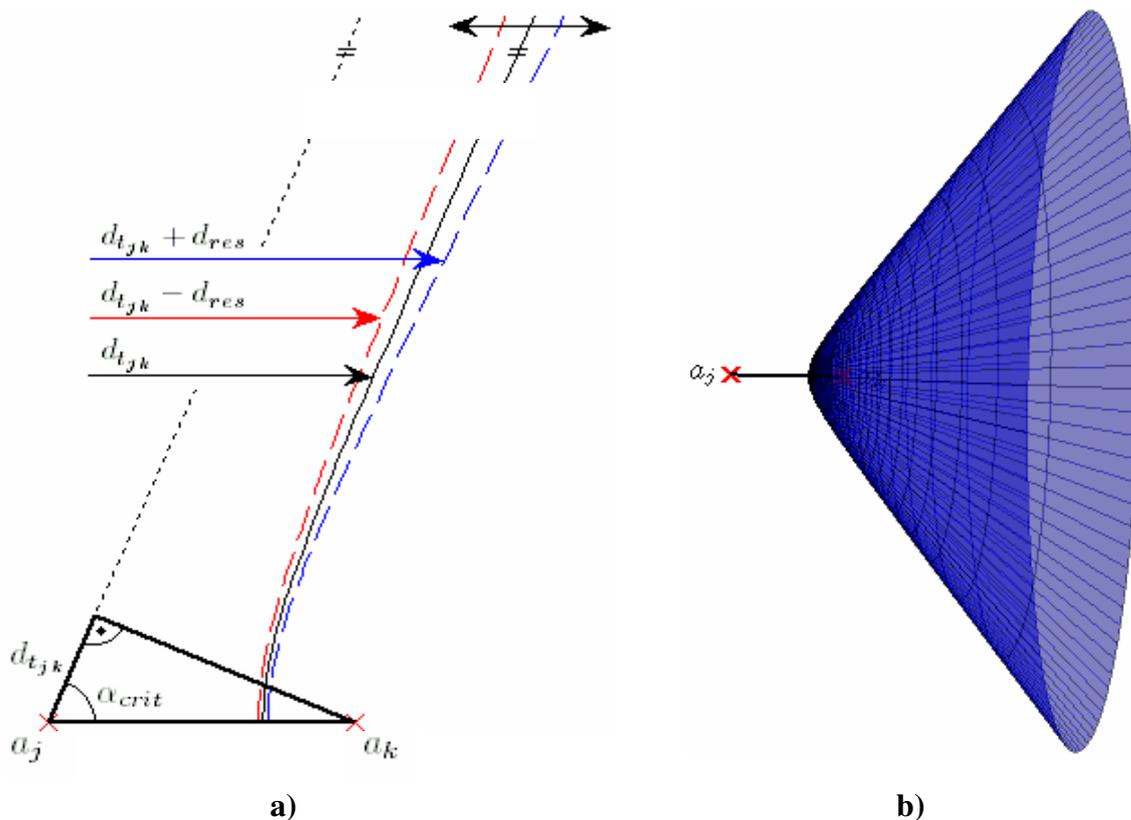


Abbildung 2.8: a) Schwankung der Transponderkennlinie, b) elliptisches Paraboloid

Diese beiden Extremfälle werden in der Abbildung durch die rot bzw. blau gestrichelte Kennlinie dargestellt. Weicht die Epochezeitdifferenz betragsmäßig um weniger als eine Nanosekunde ab, bewegt sich die Transponderkennlinie innerhalb dieser zwei farbig eingezeichneten Kurven.

Dadurch, dass das elliptische Paraboloid in Abbildung 2.8b, mit Ausnahme des Bereichs in der Nähe der Antennenachse, in etwa einem geraden Kreiskegel entspricht, verlaufen die aneinandergrenzenden Oberflächenabschnitte unterschiedlicher Antennenpaare über weite Strecken fast nahezu parallel (Abb. 2.9a). Aus diesem Grund kann bereits eine kleine

Veränderung der Epochezeitdifferenz eines einzigen Antennenpaares zu verheerenden Abweichungen der Transponderposition führen (Abb. 2.9b).

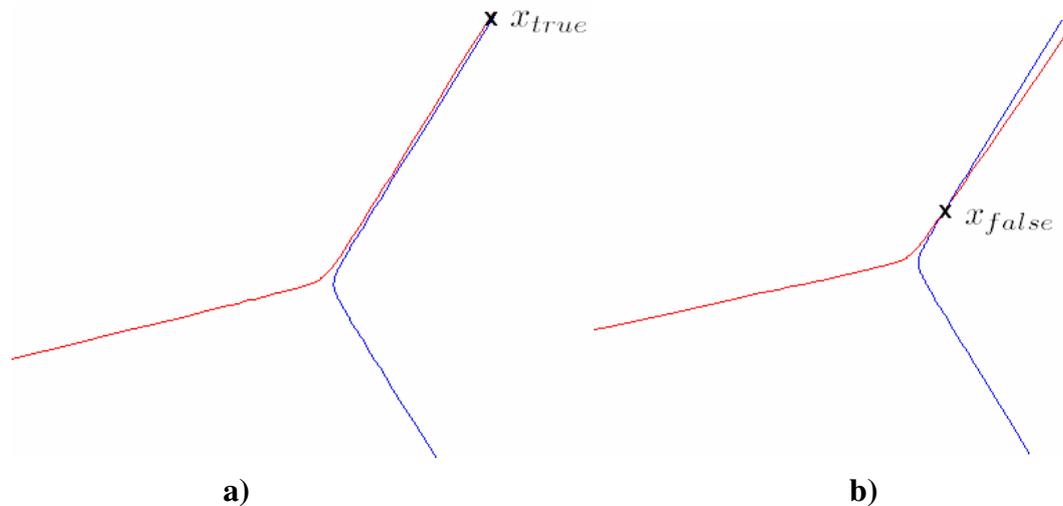


Abbildung 2.9: a) wahre Transponderposition, b) falsche Transponderposition

2.4.1 Simulation einer Transponderstrecke

Um die auftretenden Positionsabweichungen des Transponders abschätzen zu können, ist es zweckmäßig eine virtuelle Flugstrecke zu definieren. Hierfür wird angenommen, dass ein Flugzeug in einer Höhe von etwa 10 km von Südwesten zentral über das Laserteleskop nach Nordosten fliegt und dabei eine Distanz von cirka 50 km zurücklegt. Dieser Teststrecke werden in regelmäßigen Abständen insgesamt 100 Transponderpositionen entnommen, wobei die beiden äußersten Transponderpositionen etwa 26,5 km vom Laserteleskop entfernt sind. Geht man davon aus, dass das Transpondersignal von den Antennen im Abstand von zwei Sekunden detektiert wird entspricht dies einer Fluggeschwindigkeit von ungefähr 900 km/h.

Die exakten Epochezeitdifferenzen können aus den Entfernungen zwischen den Transponderpositionen und den fünf verfügbaren Antennen (siehe Abb. 1.1) ermittelt werden. Zur Berücksichtigung der Auflösung werden die Werte der Epochezeitdifferenzen mit einer im Intervall $I = [-10^{-9}, 10^{-9}]$ gleich verteilten Störung beaufschlagt. Im Anschluss können die Transponderpositionen mithilfe des in Kapitel 2.2.3 beschriebenen Algorithmus berechnet werden.

Mittelt man die Abweichungen der falschen Transponderpositionen von den wahren Transponderpositionen kommt man auf einen Wert von 15,7 km. Vergleichsweise beträgt der Abstand vom Laserteleskop zu den tatsächlichen Transponderpositionen im Schnitt etwas weniger als 16,5 km. Wie bereits aus Abbildung 2.9 ersichtlich, verschieben sich die Schnittpunkte der durch die unterschiedlichen Antennenpaare entstehenden Flächen in die unmittelbare Nähe der Antennenanordnung. Der vom Laserstandort berechnete Winkel

zwischen den falschen und wahren Positionen des Transponders liegt durchschnittlich bei ungefähr 40° . Besonders starke Winkelabweichungen ergeben sich für jene Transponderpositionen, die sich zentral über der Antennenanlage befinden.

2.4.2 Auswirkung der Auflösung auf die Positionsabweichung

Das nachfolgende Diagramm stellt die mittlere Abweichung der im letzten Kapitel definierten Transponderstrecke für unterschiedliche Auflösungen der Epochezeiten dar. Für die verwendete Antennenkonstellation ergibt sich erst bei Auflösungen im Bereich von 100 Femtosekunden eine zufrieden stellende maximale Positionsabweichung des Transponders von cirka 200 m. Die Winkelabweichungen können für die betrachtete Transponderstrecke bereits zwei Dekaden davor, im Bereich von zehn Pikosekunden, mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden (max. Winkelabweichung $< 1^\circ$).

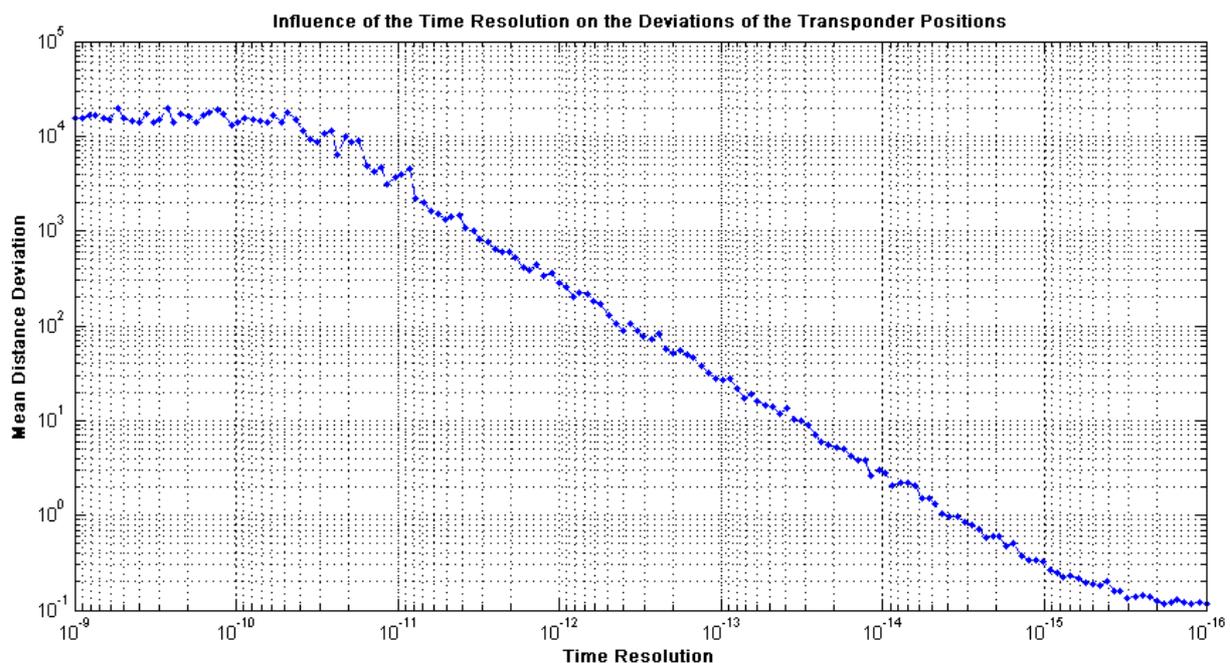


Diagramm 2.1: Mittlere Abweichung der Transponderpositionen in Abhängigkeit der Auflösung

2.4.3 Auswirkung der Antennenabstände auf die Positionsabweichung

Da sich mit zunehmenden Antennenabständen das Verhältnis zwischen den Längen d_{res} und $d_{a_{jk}}$ in Gleichung 2.57, und damit verbunden auch der maximale Schwankungsbereich der in Abbildung 2.8a dargestellten Kennlinien reduziert, bietet die Ausweitung der Antennenkonstellation eine andere Alternative zur Verringerung der Transponderabweichungen.

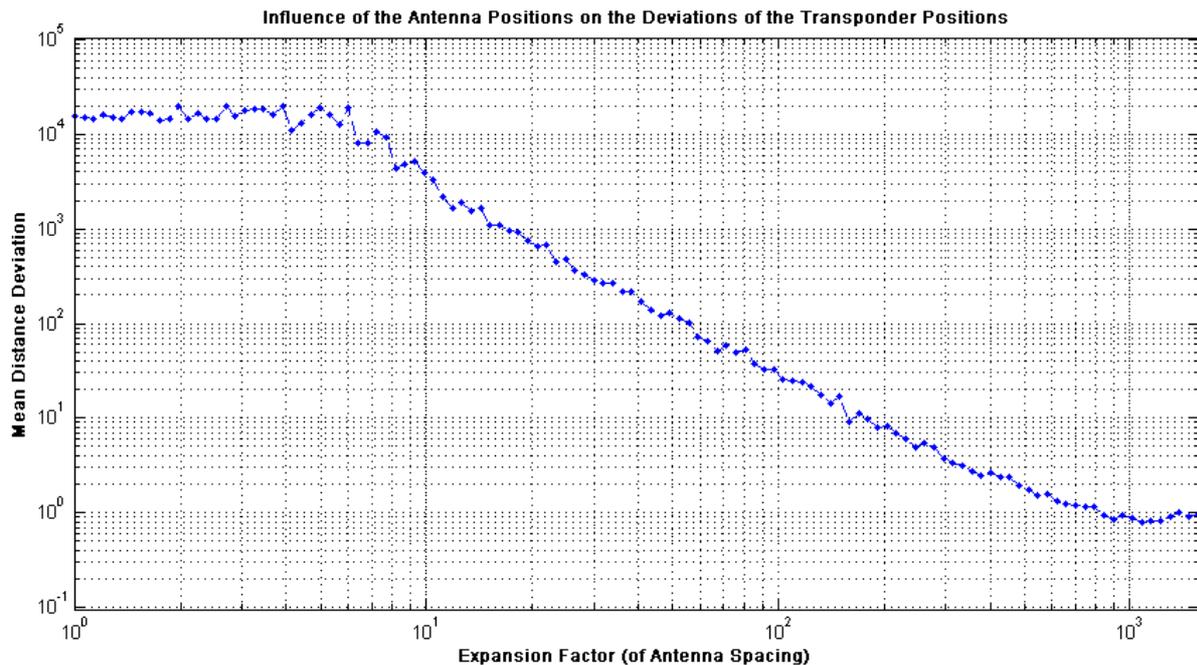


Diagramm 2.2: Mittlere Abweichung der Transponderpositionen in Abhängigkeit der Antennenabstände

Aus Diagramm 2.2 können die mittleren Abweichungen der in Kapitel 2.4.1 festgelegten Transponderstrecke für unterschiedliche Skalierungen der Antennenanordnung entnommen werden. Erst bei einem Skalierungsfaktor von 100 ergibt sich eine annehmbare maximale Abweichung der Transponderpositionen von ungefähr 200 m. Eine Winkelabweichung von maximal einem Grad kann bereits durch Verzehnfachung der Antennenabstände erreicht werden.

Durch eine Vergrößerung der Antennenabstände um den Faktor 10 bzw. 100 werden demnach ähnliche Ergebnisse erzielt wie durch eine Reduzierung der Zeitauflösung auf 10 respektive 0,1 Pikosekunden. Aufgrund der begrenzt nutzbaren Fläche des Geländes sowie der zur Durchführung dieser Diplomarbeit bereitgestellten Hardware kann allerdings keiner der beiden Parameter in ausreichendem Maße verändert werden.

3. Transponder Richtungsbestimmung

Da sich mit dem Algorithmus zur Positionsbestimmung weder die Position, noch die Richtung des Transponders mit ausreichender Zuverlässigkeit bestimmen lässt, wird in diesem Abschnitt ein Verfahren vorgestellt, das ausschließlich zur Richtungsbestimmung von Transpondern eingesetzt werden kann.

3.1 Algorithmus zur Richtungsbestimmung

Den Ausgangspunkt für die Ermittlung der Transponderrichtung stellt wiederum das regionale kartesische Koordinatensystem in Abbildung 1.1 dar, wobei die Apostrophe aller lokalen Koordinaten in weiterer Folge weggelassen werden.

3.1.1 Graphische Darstellung potentieller Transponderrichtungen

In Abbildung 3.1 wird zunächst die Bestimmung einer möglichen Richtung des Transponders anhand eines Antennenpaares (a_j und a_k) und der entsprechenden Epochezeiten (t_j und t_k) illustriert.

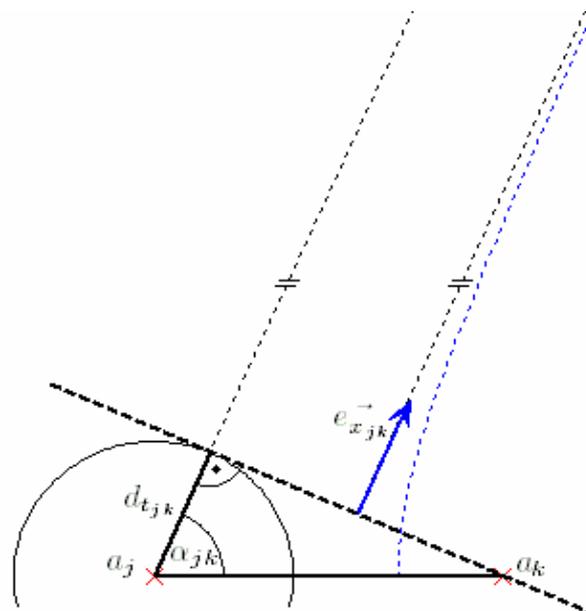


Abbildung 3.1: Bestimmung der Transponderrichtung

Platziert man den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius $r = d_{t_{jk}}$ an jene Antenne die das Transpondersignal zuletzt detektiert (a_j) und legt hinterher eine durch die erste Antenne (a_k) gehende Ebene auf die Kugeloberfläche, so stimmt der senkrecht auf diese Ebene stehende Einheitsvektor $\mathbf{e}_{x_{jk}}$, mit Ausnahme des Bereichs in der Nähe der Antennenachse, näherungsweise mit den reellen Transponderpositionen (blau punktierte Kennlinie) überein.

Die Antennenachse bildet gemeinsam mit der Ebene und dem Kugelradius das bereits bekannte rechtwinklige Dreieck, aus dem ersichtlich ist, dass der Richtungsvektor $\mathbf{e}_{x_{jk}}$ um den Winkel α_{jk} gegenüber der Antennenachse geneigt ist.

$$\alpha_{jk} = \arccos\left(\frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}}\right) \text{ mit } d_{t_{jk}} = ct_{jk} = c(t_j - t_k) \quad (3.1)$$

Eine äquivalente Darstellung erhält man wenn man diesen Richtungsvektor innerhalb einer Einheitskugel aufträgt (Abb. 3.2a).

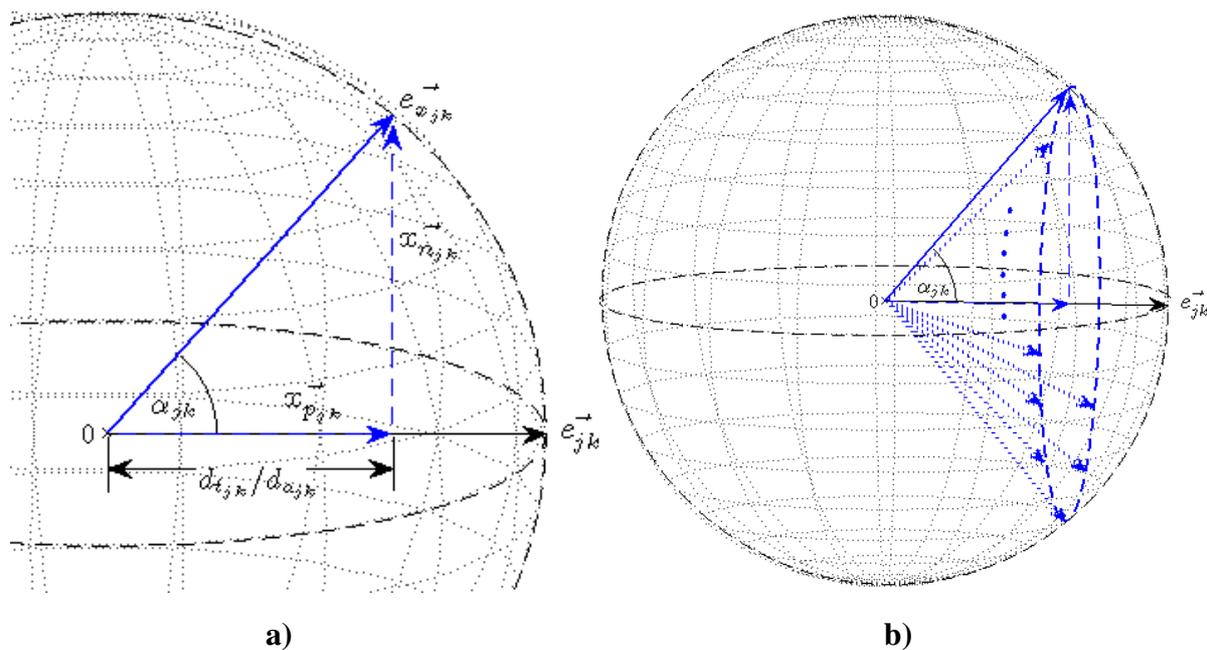


Abbildung 3.2: a) alternative Richtungsbestimmung, b) potentielle Transponderrichtungen

Der Vektor \mathbf{e}_{jk} stellt dabei den von der Antenne a_j zur Antenne a_k gerichteten und anschließend normierten Antennenvektor dar.

$$\mathbf{e}_{jk} = \frac{\mathbf{a}_{jk}}{d_{a_{jk}}} \text{ mit } \mathbf{a}_{jk} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j \text{ und } d_{a_{jk}} = \|\mathbf{a}_{jk}\| \quad (3.2)$$

Der Richtungsvektor des Transponders $\mathbf{e}_{x_{jk}}$ kann in einen auf den Antennenvektor projizierten Vektor ($\mathbf{x}_{p_{jk}}$) und einen normal auf den Antennenvektor stehenden Vektor ($\mathbf{x}_{n_{jk}}$) aufgeteilt werden.

$$\mathbf{e}_{x_{jk}} = \mathbf{x}_{p_{jk}} + \mathbf{x}_{n_{jk}} \quad (3.3)$$

Die Länge der Ankathete des von diesen drei Vektoren eingeschlossenen rechtwinkligen Dreiecks entspricht dem Betrag des projizierten Vektors $\mathbf{x}_{p_{jk}}$.

$$\mathbf{x}_{p_{jk}} = \frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}} \mathbf{e}_{jk} \quad da \quad \|\mathbf{x}_{p_{jk}}\| = \cos(\alpha_{jk}) = \cos\left(\arccos\left(\frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}}\right)\right) = \frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}} \quad (3.4)$$

Die Länge des Normalvektors $\mathbf{x}_{n_{jk}}$ kann mithilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt werden.

$$\sqrt{\|\mathbf{x}_{p_{jk}}\|^2 + \|\mathbf{x}_{n_{jk}}\|^2} = 1 \rightarrow \mathbf{x}_{n_{jk}} = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}_{p_{jk}}\|^2} \mathbf{e}_{n_{jk}} \quad mit \quad \mathbf{e}_{n_{jk}} \perp \mathbf{e}_{jk} \quad (3.5)$$

Durch Rotation des Einheitsvektor $\mathbf{e}_{x_{jk}}$ um den Antennenvektor erhält man schließlich einen auf der Kugeloberfläche liegenden Kreis (Abb. 3.2b), der alle möglichen Transponderrichtungen beschreibt.

3.1.2 Richtungsbestimmung mit mindestens 3 Antennen

Unter Zuhilfenahme einer dritten Antenne kann letztendlich die wirkliche Transponderrichtung aus dem Schnitt zweier auf der Kugeloberfläche liegenden Kreise berechnet werden (Abb. 3.3).

Sieht man von dem Fall ab, dass der Transponder sich in der vom Antennentriplett (a_j, a_k, a_l) aufgespannten Ebene befindet, entstehen zwar zwei gegenüber der Antennenebene symmetrische Lösungsvektoren, durch einen geringen Neigungswinkel zwischen der Antennenebene und der Erdoberfläche lässt sich jedoch der in die Erde gerichtete Lösungsvektor mit hoher Wahrscheinlichkeit ausschließen. Stehen mehrere Antennen zur Verfügung kann die endgültige Transponderrichtung durch Korrelation der von jeweils drei Antennen berechneten Lösungsvektoren eindeutig bestimmt werden (siehe Kapitel 3.3).

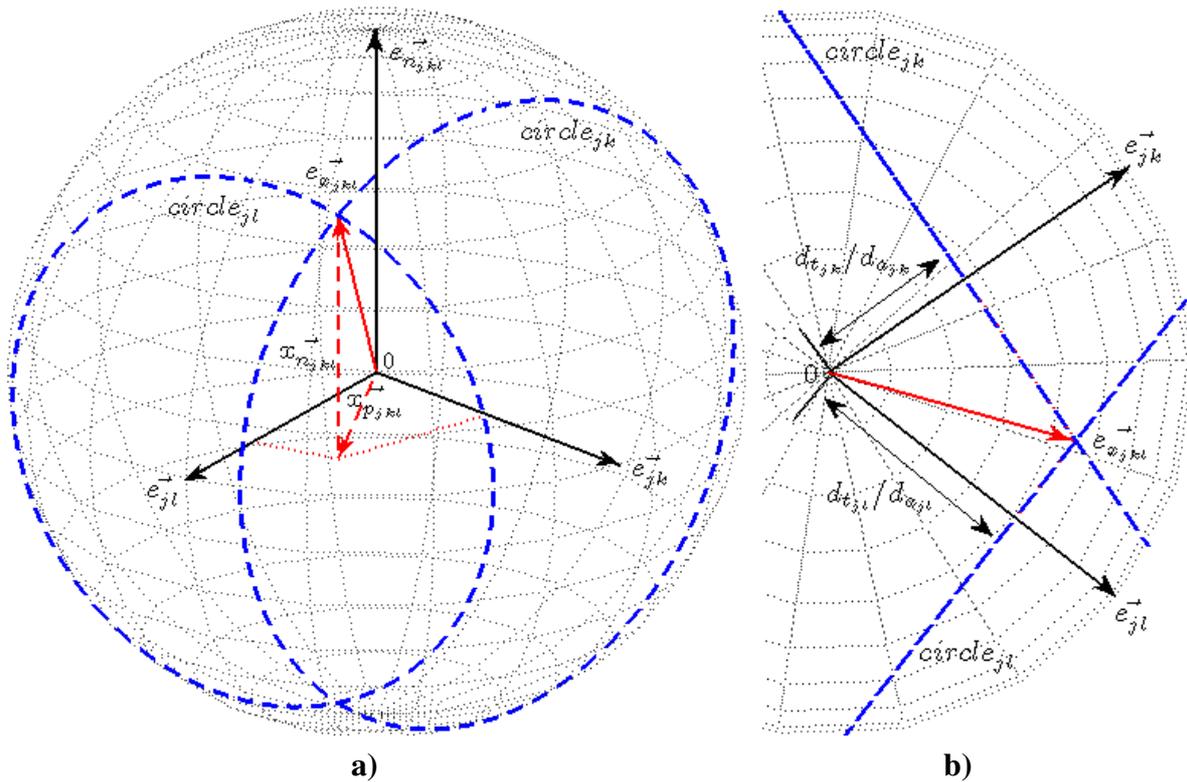


Abbildung 3.3: Bestimmung der Transponderrichtung durch Schnitt zweier Kreise

Da die Ermittlung der Schnittpunkte zweier Kreise im dreidimensionalen Raum nicht nur äußerst umständlich ist, sondern in Verbindung mit der begrenzten Auflösung der Epochezeiten auch zu keiner Lösung führen kann (näheres dazu in Kapitel 3.2.2), ist es sinnvoll Ebenen anstelle der Kreise einzusetzen.

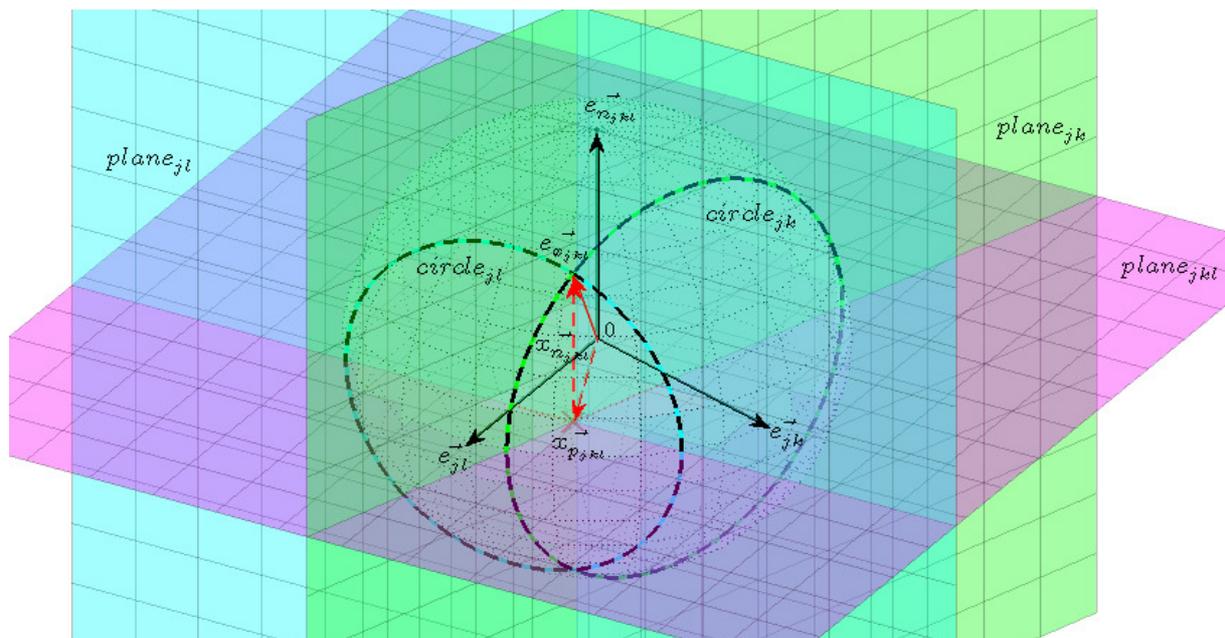


Abbildung 3.4: Bestimmung der Transponderrichtung durch Schnitt dreier Ebenen

Zur Beschreibung dieser Ebenen ist die Normalvektorform der Ebenengleichung am besten geeignet (Gl. 3.6). Neben dem Normalvektor der Ebene \mathbf{n} ist hierfür nur noch die Kenntnis eines beliebigen Punktes dieser Ebene, beschrieben durch den Ortsvektor \mathbf{x}_0 , erforderlich.

$$P : \mathbf{n}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (3.6)$$

Wirft man einen genaueren Blick auf Abbildung 3.4, erkennt man, dass die beiden Einheitsvektoren des Antennentriplets \mathbf{e}_{jk} und \mathbf{e}_{jl} orthogonal zu den zwei durch die Kreise gehenden Ebenen stehen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{jk} &= \frac{\mathbf{a}_{jk}}{d_{a_{jk}}} (= \mathbf{n}_1) \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_{jk} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j \quad \text{und} \quad d_{a_{jk}} = \|\mathbf{a}_{jk}\| \\ \mathbf{e}_{jl} &= \frac{\mathbf{a}_{jl}}{d_{a_{jl}}} (= \mathbf{n}_2) \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_{jl} = \mathbf{a}_l - \mathbf{a}_j \quad \text{und} \quad d_{a_{jl}} = \|\mathbf{a}_{jl}\| \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Ortsvektoren ergeben sich durch Multiplikation dieser Einheitsvektoren mit dem minimalen Abstand vom Ursprung der Einheitskugel zur jeweiligen Ebene (siehe Abb. 3.3b) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{01} &= \frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}} \mathbf{e}_{jk} \quad \text{mit} \quad d_{t_{jk}} = ct_{jk} = c(t_j - t_k) \\ \mathbf{x}_{02} &= \frac{d_{t_{jl}}}{d_{a_{jl}}} \mathbf{e}_{jl} \quad \text{mit} \quad d_{t_{jl}} = ct_{jl} = c(t_j - t_l) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Schneidet man nun diese zwei Ebenen, erhält man allerdings nicht die beiden Lösungsvektoren selbst, sondern lediglich eine Gerade, die durch die gesuchten Lösungen geht. Um die zwei möglichen Transponderrichtungen bestimmen zu können, muss deshalb ein zusätzlicher Schnitt dieser Gerade mit der Einheitskugel (quadratische Gleichung) durchgeführt werden.

Einen indirekten, aber wesentlich einfacheren Lösungsweg erhält man wenn man die von den drei Antennen aufgespannte Ebene (violette Ebene in Abbildung 3.4) statt der Einheitskugel verwendet. Der normal auf diese Ebene stehende Einheitsvektor $\mathbf{e}_{n_{jkl}}$ ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der zwei Antennenvektoren (Gl. 3.7) und anschließender Normierung, wobei die Reihenfolge der zu kreuzenden Vektoren so gewählt wird, dass der resultierende Vektor in den Himmel gerichtet ist.

$$\mathbf{e}_{n_{jkl}} = \frac{\mathbf{n}_{jkl}}{\|\mathbf{n}_{jkl}\|} (= \mathbf{n}_3) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_{jkl} = \mathbf{e}_{jl} \times \mathbf{e}_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}_{jkl} = \mathbf{e}_{jk} \times \mathbf{e}_{jl} \quad (3.9)$$

Da die Antennenebene durch den Ursprung der Einheitskugel geht, entspricht der dazugehörige Ortsvektor dem Nullvektor.

$$\mathbf{x}_{03} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen dieser Normal- und Ortsvektoren in Gleichung 3.6 erhält man letzten Endes die Gleichungen der drei in Abbildung 3.4 dargestellten Ebenen, deren gemeinsamer Schnittpunkt mit der Projektion der Transponderrichtung auf die Antennenebene übereinstimmt ($\mathbf{x}_{p,jkl}$).

$$\begin{aligned} P1: \mathbf{e}_{jk}^T \left(\mathbf{x}_{p,jkl} - \frac{d_{tjk}}{d_{ajk}} \mathbf{e}_{jk} \right) &= \mathbf{e}_{jk}^T \mathbf{x}_{p,jkl} - \frac{d_{tjk}}{d_{ajk}} \underbrace{\mathbf{e}_{jk}^T \mathbf{e}_{jk}}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{e}_{jk}^T \mathbf{x}_{p,jkl} = \frac{d_{tjk}}{d_{ajk}} \\ P2: \mathbf{e}_{jl}^T \left(\mathbf{x}_{p,jkl} - \frac{d_{tjl}}{d_{ajl}} \mathbf{e}_{jl} \right) &= \mathbf{e}_{jl}^T \mathbf{x}_{p,jkl} - \frac{d_{tjl}}{d_{ajl}} \underbrace{\mathbf{e}_{jl}^T \mathbf{e}_{jl}}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{e}_{jl}^T \mathbf{x}_{p,jkl} = \frac{d_{tjl}}{d_{ajl}} \\ P3: \mathbf{e}_{n,jkl}^T \mathbf{x}_{p,jkl} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist eine Darstellung in Matrixschreibweise von Vorteil. Hierzu werden die Normalvektoren der drei Ebenen in die Zeilen der 3×3 Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_{jkl} eingetragen. Der 3×1 Konstantenvektor \mathbf{b}_{jkl} beinhaltet die kleinstmöglichen Abstände der jeweiligen Ebene vom Ursprung der Einheitskugel.

$$\mathbf{A}_{jkl} = \begin{bmatrix} x_{jk} & y_{jk} & z_{jk} \\ x_{jl} & y_{jl} & z_{jl} \\ x_{n,jkl} & y_{n,jkl} & z_{n,jkl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{jk}^T \\ \mathbf{e}_{jl}^T \\ \mathbf{e}_{n,jkl}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{jkl} = \begin{bmatrix} d_{tjk}/d_{ajk} \\ d_{tjl}/d_{ajl} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Der auf die Antennenebene projizierte Vektor $\mathbf{x}_{p,jkl}$ ergibt sich schließlich aus der Multiplikation der inversen Koeffizientenmatrix mit dem Konstantenvektor.

$$\mathbf{A}_{jkl} \mathbf{x}_{p,jkl} = \mathbf{b}_{jkl} \rightarrow \mathbf{x}_{p,jkl} = \mathbf{A}_{jkl}^{-1} \mathbf{b}_{jkl} \quad (3.13)$$

Da das dritte Element des Konstantenvektors immer eine Null enthält, ist die dritte Spalte der inversen Koeffizientenmatrix belanglos. Aus diesem Grund ist es sinnvoll eine 3×2 Matrix (\mathbf{C}_{jkl}), die aus den ersten zwei Spalten der inversen Koeffizientenmatrix besteht, und einen 2×1 Spaltenvektor (\mathbf{d}_{jkl}), der die ersten zwei Elemente des Konstantenvektors beinhaltet, einzuführen. Das reduzierte Gleichungssystem ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{x}_{p,jkl} = \mathbf{C}_{jkl} \mathbf{d}_{jkl} \quad (3.14)$$

Den normal auf die Antennenebene stehenden Vektor $\mathbf{x}_{n,jkl}$ erhält man wiederum aus dem Satz des Pythagoras.

$$\sqrt{\|\mathbf{x}_{p,jkl}\|^2 + \|\mathbf{x}_{n,jkl}\|^2} = 1 \rightarrow \mathbf{x}_{n,jkl} = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}_{p,jkl}\|^2} \mathbf{e}_{n,jkl} \quad (3.15)$$

Die beiden möglichen Transponderrichtungen lassen sich im Anschluss durch Addition bzw. Subtraktion dieser zwei senkrecht zueinander stehenden Vektoren ermitteln.

$$\mathbf{e}_{x,jkl\pm} = \mathbf{x}_{p,jkl} \pm \mathbf{x}_{n,jkl} \quad (3.16)$$

3.2 Fehleranalyse

Aufgrund der Auflösung der Epochezeiten von etwa einer Nanosekunde ist die rechnerisch bestimmte Richtung des Transponders nur mit Vorsicht zu gebrauchen. Im Folgenden wird untersucht in welchem Maße sich diese Zeitauflösung auf die mittels eines Antennenpaares bzw. Antennentriplets berechnete Transponderrichtung auswirkt.

3.2.1 Winkelfehler (Antennenpaar)

Abbildung 3.5 stellt die zwei maximalen Winkelabweichungen (rot bzw. blau gestrichelter Einheitsvektor) der tatsächlichen Transponderrichtung ($\mathbf{e}_{x,jk}$) bei einer betragsmäßigen Schwankung der Epochezeitdifferenz (t_{jk}) um genau eine Nanosekunde (t_{res}) dar.

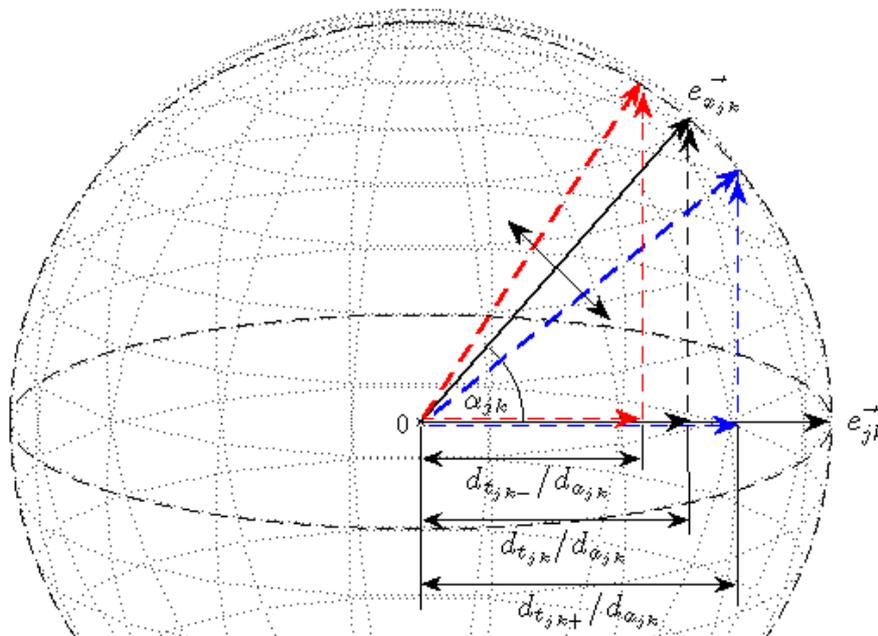


Abbildung 3.5: Schwankung der Transponderrichtung

$$d_{t_{jk\pm}} = d_{t_{jk}} \pm d_{res} = c(t_{jk} \pm t_{res}) \quad (3.17)$$

Je größer der Abstand des betrachteten Antennenpaares ist, desto geringer verändert sich die Länge des auf den Antennenvektor \mathbf{e}_{jk} projizierten Vektors, wodurch wiederum der mögliche Schwankungsbereich der Transponderrichtung reduziert wird. Befindet sich der Transponder in einem geringen Neigungswinkel (α_{jk}) gegenüber der Antennenachse, kann es angesichts der begrenzten Zeitauflösung durchaus vorkommen, dass die an den Antennen gemessenen Epochezeiten zu einem auf den Antennenvektor projizierten Vektor führen, der außerhalb der Einheitskugel liegt. Deshalb muss die Strecke, die das Licht während der Epochezeitdifferenz durchläuft, vor ihrer ersten Verwendung gegebenenfalls auf den entsprechenden Antennenabstand verkürzt werden.

$$|d_{t_{jk}}| \leq d_{a_{jk}} \quad (3.18)$$

Diese Längenbeschränkung hat nebenbei den vorteilhaften Effekt, dass zumindest ein Teil des Auflösungsfehlers beseitigt werden kann. Berechnet man die maximalen Winkelfehler für alle im ersten Quadranten des gestrichelt eingezeichneten Einheitskreises möglichen Transponderrichtungen ($0^\circ \leq \alpha_{jk} \leq 90^\circ$), gelangt man zu der nachfolgenden Winkelfehler-Neigungswinkel-Kennlinie.

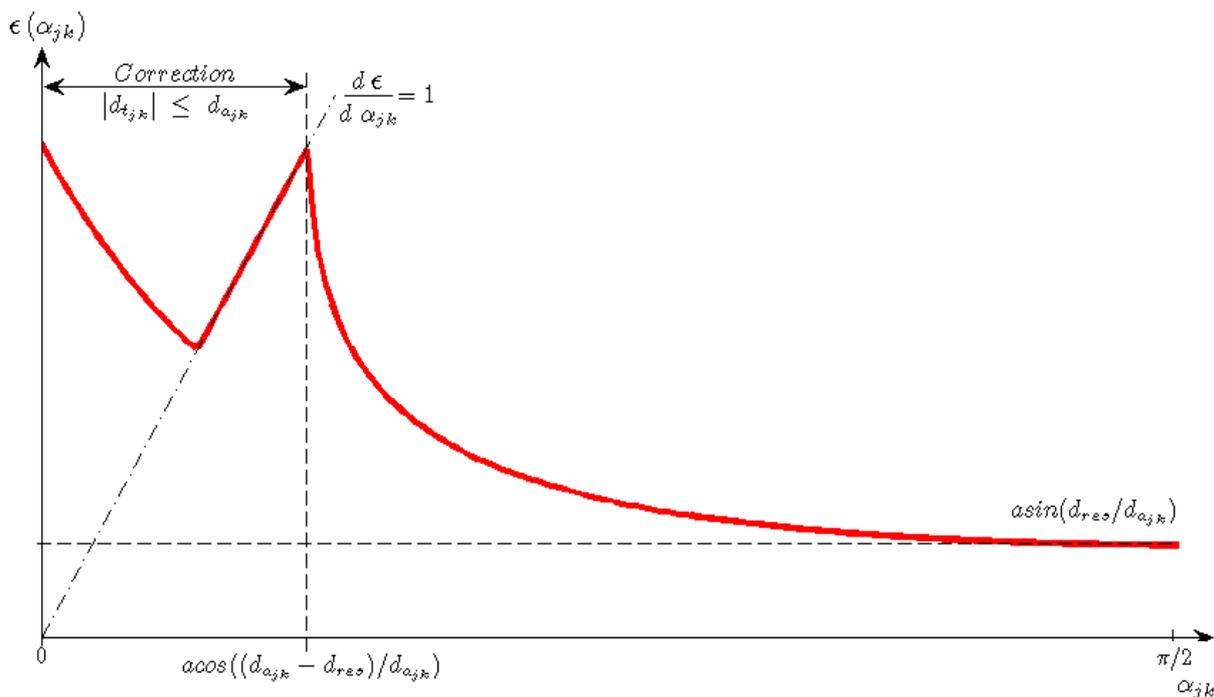


Abbildung 3.6: Winkelfehler-Neigungswinkel-Kennlinie

Wie bereits in Abbildung 3.5 zu erkennen ist, nimmt mit abnehmendem Neigungswinkel α_{jk} die Steigung des Einheitskreises an der Spitze des Richtungsvektors $\mathbf{e}_{x,jk}$, und infolgedessen

der Winkelfehler ε zu. Der Unstetigkeitsbereich der Kennlinie kommt durch die zuvor beschriebene Längenkorrektur zustande.

$$0 \leq \alpha_{jk} \leq \arccos\left(\frac{d_{a_{jk}} - d_{res}}{d_{a_{jk}}}\right) \dots \text{Unstetigkeitsbereich} \quad (3.19)$$

Besonders gute Ergebnisse erhält man wenn der Richtungsvektor des Transponders überwiegend aus einer senkrecht zum Antennenvektor stehenden Komponente besteht. Mit zunehmendem Neigungswinkel ($\alpha_{jk} \rightarrow \pi / 2$) konvergiert der Winkelfehler gegen den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{\alpha_{jk} \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon(\alpha_{jk}) = \arcsin\left(\frac{d_{res}}{d_{a_{jk}}}\right) \quad (3.20)$$

Diagramm 3.1 stellt die Winkelfehler-Neigungswinkel-Kennlinien der im regionalen Koordinatensystem befindlichen Antennenpaare (siehe Abb. 1.1) dar. Die Antennenabstände der eingezeichneten Kennlinien können aus der Legende entnommen werden. Da der maximale Schwankungsbereich der Transponderrichtung durch das Antennenpaar mit dem geringsten Abstand bestimmt wird, ist eine Maximierung des minimalen Antennenabstandes empfehlenswert.

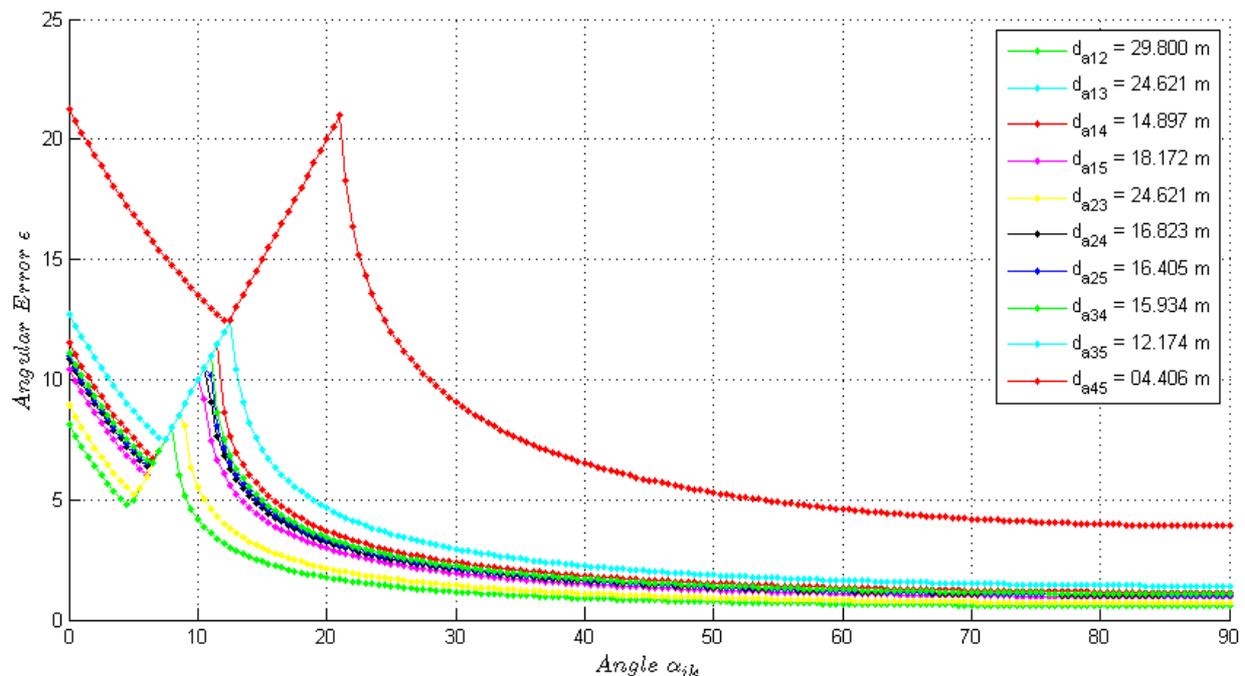


Diagramm 3.1: Maximale Winkelfehler der regionalen Antennenpaare

3.2.2 Winkelfehler (Antennentriplett)

Auf ähnliche Weise lässt sich die maximale Winkelabweichung der mittels eines Antennentriplets ermittelten Richtung des Transponders von seiner eigentlichen Lage bestimmen (Abb. 3.7). Aufgrund der fehlerbehafteten Längen in Gleichung 3.21 kommt es zu einer beidseitigen Verschiebung der zwei schwarz gestrichelt eingezeichneten Kreise entlang der jeweiligen Antennenachse, wodurch auf der Einheitskugeloberfläche ein im Allgemeinen parallelogrammförmiger Schwankungsbereich für die wahre Transponderrichtung (\vec{e}_{xjk}) entsteht.

$$d_{t_{jk\pm}} = d_{t_{jk}} \pm d_{res} = c(t_{jk} \pm t_{res}) \quad \text{und} \quad d_{t_{jl\pm}} = d_{t_{jl}} \pm d_{res} = c(t_{jl} \pm t_{res}) \quad (3.21)$$

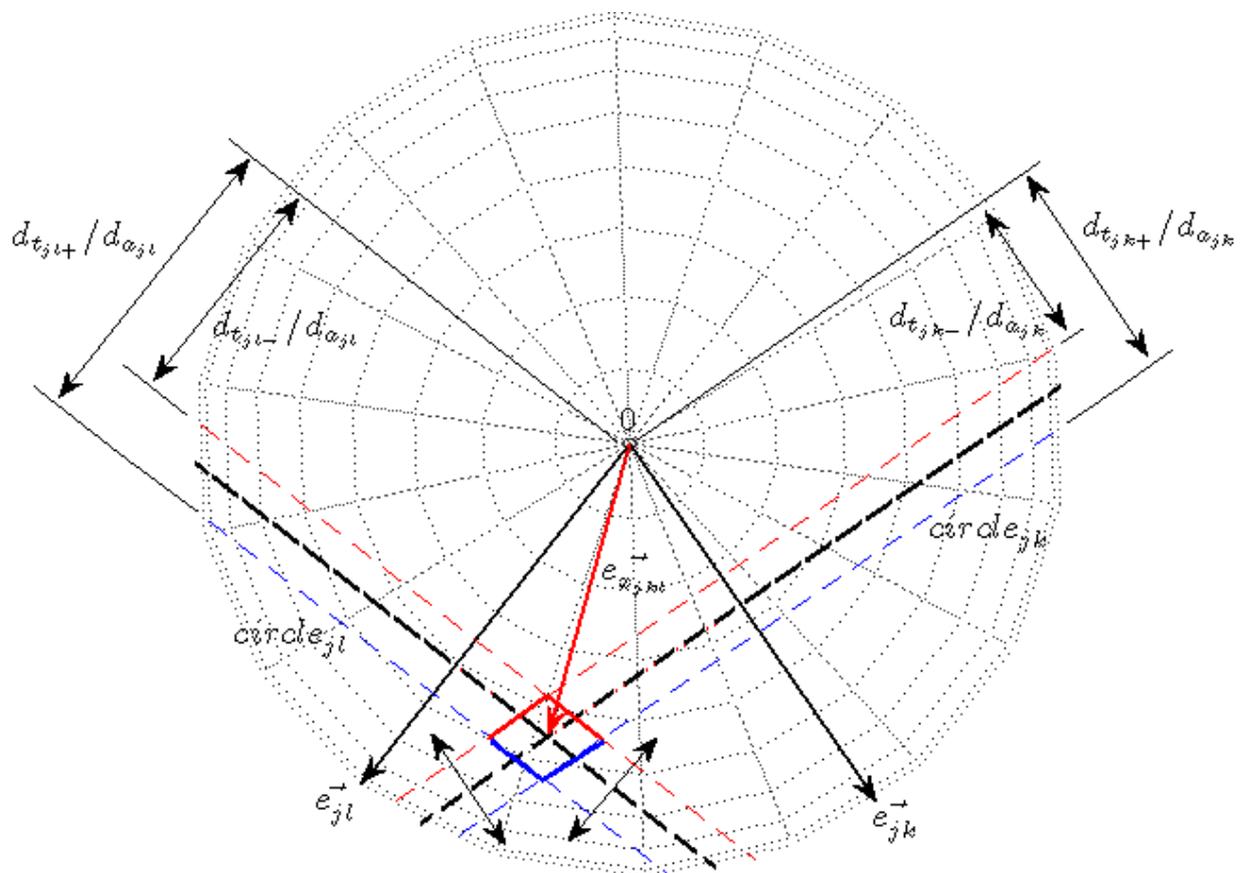


Abbildung 3.7: Schwankung der Transponderrichtung

Führen die aus den gemessenen Epochezeiten berechneten Längen $d_{t_{jk}}$ bzw. $d_{t_{jl}}$ zu Kreisen, die rein theoretisch außerhalb der Einheitskugel liegen müssten, ist wiederum eine Korrektur der betroffenen Längen auf die entsprechenden Antennenabstände durchzuführen.

$$|d_{t_{jk}}| \leq d_{a_{jk}} \quad \text{und} \quad |d_{t_{jl}}| \leq d_{a_{jl}} \quad (3.22)$$

Trotz dieser Längenkorrekturen kann es unter Umständen dazu kommen, dass die beiden auf der Kugeloberfläche liegenden Kreise keinen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Ersetzt man die zwei Kreise, wie in Kapitel 3.1.2 beschrieben, durch drei Ebenen, so erhält man einen außerhalb der Einheitskugel liegenden Schnittpunkt. Eventuell ist also eine Normierung des auf die Antennenebene projizierten Vektors $\mathbf{x}_{p,jkl}$ (entspricht diesem Schnittpunkt) von Nöten.

$$\|\mathbf{x}_{p,jkl}\| \leq 1 \quad (3.23)$$

Für den Fall, dass diese Ungleichung nicht erfüllt ist, erhält man einen Richtungsvektor, der auf der durch das Antennentriplett aufgespannten Ebene liegt.

$$\mathbf{x}_{p,jkl} = \frac{\mathbf{x}_{p,jkl}}{\|\mathbf{x}_{p,jkl}\|} \rightarrow \mathbf{e}_{x,jkl} = \mathbf{x}_{p,jkl}, \text{ da } \mathbf{x}_{n,jkl} = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}_{p,jkl}\|^2} \mathbf{e}_{n,jkl} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

In den zwei nachstehenden Diagrammen wird die maximale Winkelabweichung des Transponders in Abhängigkeit seiner Neigung zu den Antennenachsen anhand zweier Antennentriplets des regionalen Koordinatensystems veranschaulicht. Zuerst wird jenes Antennentriplett, das sowohl die größte Grundfläche als auch den größten Umfang besitzt, betrachtet (Antennen a_1, a_2, a_3).

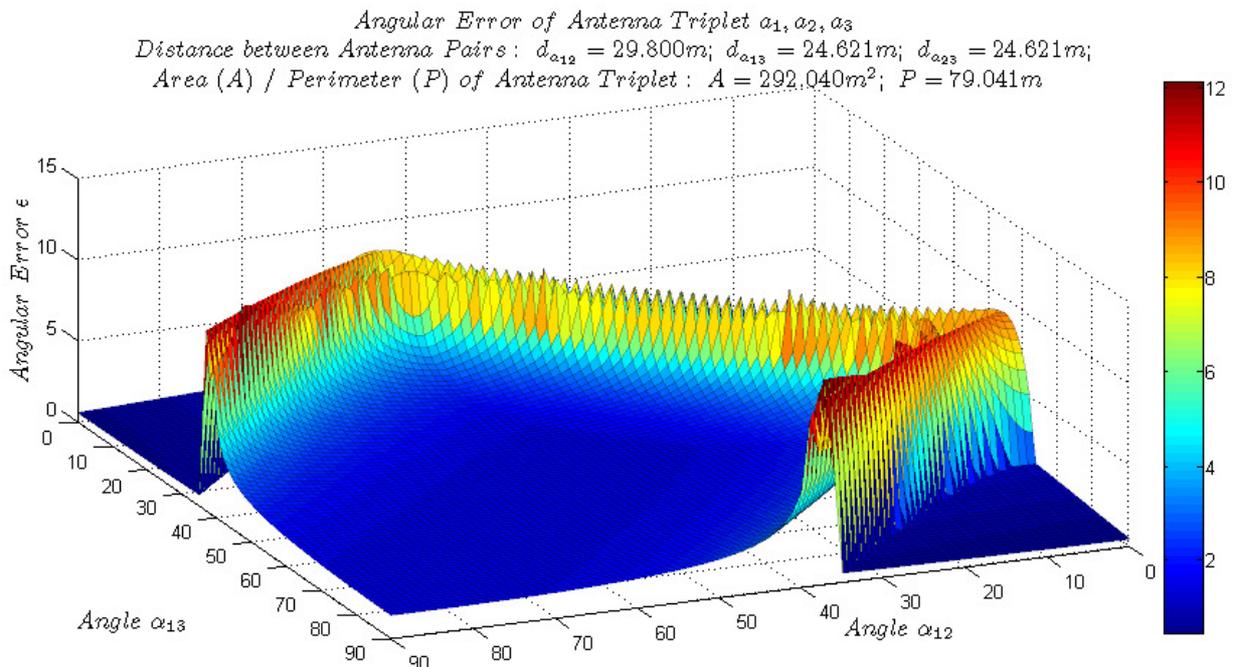


Diagramm 3.2: Maximaler Winkelfehler der Transponderrichtung (Antennentriplett a_1, a_2, a_3)

In Übereinstimmung mit den im letzten Kapitel untersuchten Antennenpaaren gilt, dass die Werte des maximalen Winkelfehlers umso kleiner sind, je senkrechter der Richtungsvektor des Transponders auf die Antennenebene steht. Mit abnehmender Neigung dieses

Richtungsvektors gegenüber der Antennenebene, steigt der maximale Winkelfehler zunächst monoton an, betritt anschließend einen Unstetigkeitsbereich (vgl. Diagr. 3.1) und fällt schließlich auf Null ab. Der bei geringen Neigungswinkeln auftretende Unstetigkeitsbereich wird durch die in Gleichung 3.22 und 3.23 formulierten Längenkorrekturen verursacht. Der plötzliche Abfall des maximalen Winkelfehlers auf den Wert Null ist das Resultat unrealistischer Kombinationen der beiden Neigungswinkel.

$$\alpha_{jk} = \arccos\left(\frac{d_{t_{jk}}}{d_{a_{jk}}}\right) \text{ und } \alpha_{jl} = \arccos\left(\frac{d_{t_{jl}}}{d_{a_{jl}}}\right) \quad (3.25)$$

Beachtung ist demnach ausschließlich dem von Null verschiedenen Bereich zu schenken.

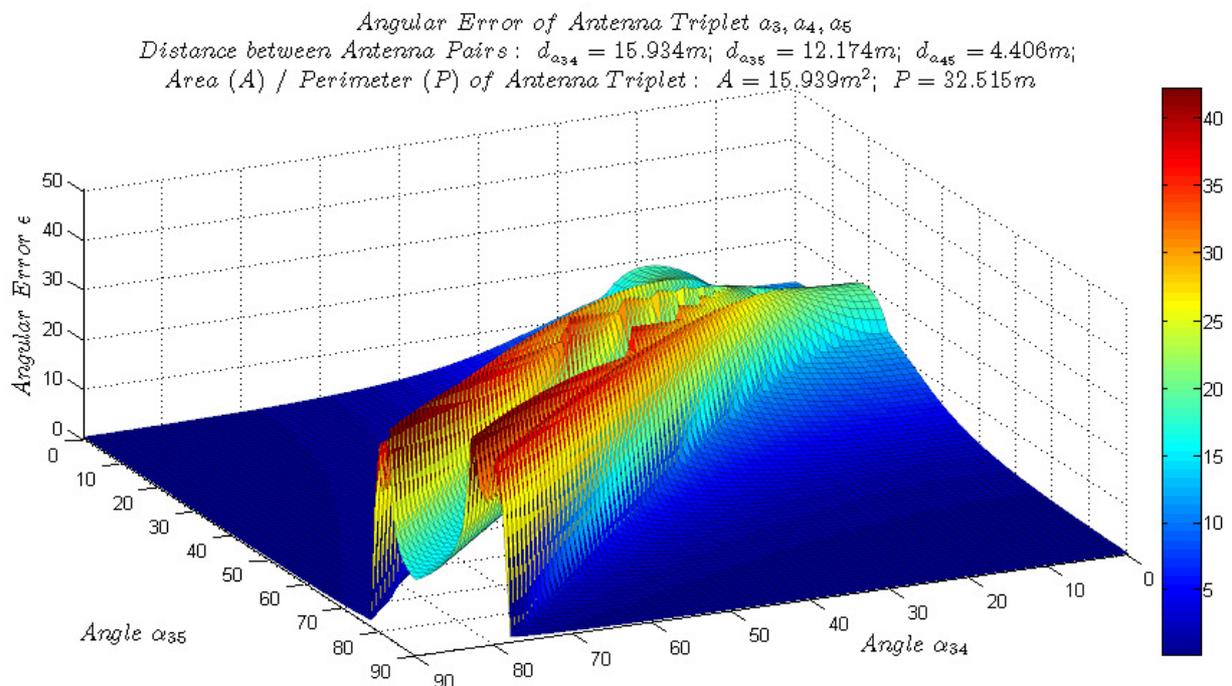


Diagramm 3.3: Maximaler Winkelfehler der Transponderrichtung (Antennentriplett a_3, a_4, a_5)

Zur Gegenüberstellung wird in Diagramm 3.3 die maximale Winkelabweichung der Transponderrichtung für das Antennentriplett mit der kleinsten Grundfläche und dem kleinstem Umfang dargestellt (Antennen a_3, a_4, a_5). Da die Fläche gegenüber dem zuvor betrachteten Antennentriplett um den Faktor 20 kleiner ist, kommt es zu einer erheblichen Erhöhung des maximalen Winkelfehlers. Aufgrund des relativ spitzen Winkels zwischen den beiden Antennenachsen, wird die Anzahl der möglichen Neigungswinkelkombinationen und somit auch der interessierende Bereich des maximalen Winkelfehlers stark eingegrenzt.

$$\angle(\mathbf{e}_{34}, \mathbf{e}_{35}) = \arccos(\mathbf{e}_{34}^T \mathbf{e}_{35}) \approx 0,165 \hat{=} 9,45^\circ \quad (3.26)$$

Demnach hängt der maximale Winkelfehler nicht nur von der Fläche, sondern auch von der geometrischen Form des Antennentriplets ab.

Projiziert man den Schwankungsbereich der tatsächlichen Transponderrichtung ($\mathbf{e}_{x_{jkl}}$) auf die Antennenebene, erhält man im Allgemeinen ein Parallelogramm (Abb. 3.8), dessen Mittelpunkt der auf die Antennenebene projizierten Transponderrichtung ($\mathbf{x}_{p_{jkl}}$) entspricht. Die rot bzw. blau eingezeichneten Linien stellen die zufolge der endlichen Auflösung auftretenden maximalen Schwankungen entlang der zwei betrachteten Antennenachsen dar (vgl. Abb. 3.7).

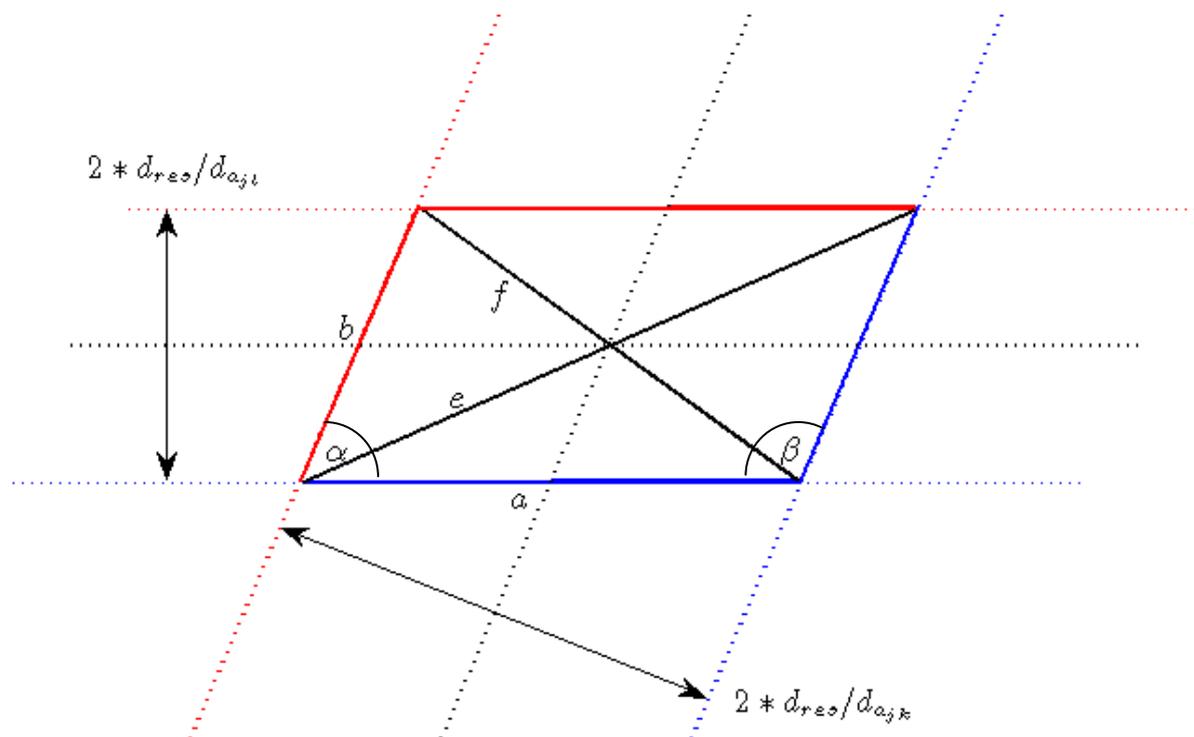


Abbildung 3.8: Untersuchung des Schwankungsbereiches

Da die Sinusfunktion eine schiefsymmetrische Funktion ist, ist die Kenntnis eines beliebigen Winkels des Parallelogramms ausreichend um dessen Seiten bestimmen zu können.

$$a = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jk}}}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jk}}}{\sin(\alpha)} \left(= \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jk}}}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jk}}}{\sin(\beta)} \right) \quad (3.27)$$

$$b = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jl}}}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jl}}}{\sin(\alpha)} \left(= \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jl}}}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{2 \cdot d_{res} / d_{a_{jl}}}{\sin(\beta)} \right)$$

Ebenso einfach lässt sich im Anschluss die Fläche des Parallelogramms berechnen.

$$A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha) (= a \cdot b \cdot \sin(\beta)) \quad (3.28)$$

Zur Ermittlung der Diagonalen des Parallelogramms muss der Kosinussatz angewendet werden.

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} \quad \left(= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)} \right) \\ f &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} \quad \left(= \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die maximale Abweichung $\varepsilon_{p \max}$ der auf die Antennenebene projizierten Transponderrichtung stimmt mit der halben Hauptdiagonale e des Parallelogramms überein.

$$\varepsilon_{p \max} = \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}}{2} \quad \left(= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}}{2} \right) \quad (3.30)$$

Wirft man einen genaueren Blick auf Abbildung 3.7, erkennt man, dass der Winkel ϕ_j zwischen den zwei betrachteten Antennenvektoren (\mathbf{e}_{jk} und \mathbf{e}_{jl}) dem kleineren der beiden Winkel des Parallelogramms entspricht.

$$\phi_j = \angle(\mathbf{e}_{jk}, \mathbf{e}_{jl}) = \arccos(\mathbf{e}_{jk}^T \mathbf{e}_{jl}) \quad (3.31)$$

Dies ist allerdings nur der Fall, solange der Winkel zwischen den beiden Antennenachsen 90° nicht überschreitet.

$$\phi_j = \begin{cases} \beta & \phi_j > \pi/2 \\ \alpha & \phi_j \leq \pi/2 \end{cases} \quad (3.32)$$

Demzufolge muss jedes Mal, wenn die Kosinusfunktion verwendet wird eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Für die maximale Abweichung $\varepsilon_{p \max}$ der auf die Antennenebene projizierten Transponderrichtung gilt somit:

$$\varepsilon_{p \max}(\phi_j) = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\phi_j)} / 2 & \phi_j > \pi/2 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\phi_j)} / 2 & \phi_j \leq \pi/2 \end{cases} \quad \text{mit } a = \frac{2 \cdot d_{res}}{d_{a_{jk}} \cdot \sin(\phi_j)}, b = \frac{2 \cdot d_{res}}{d_{a_{jl}} \cdot \sin(\phi_j)}$$

bzw.

$$\varepsilon_{p \max}(\phi_j) = \begin{cases} \frac{d_{res}}{\sin(\phi_j)} \sqrt{\frac{1}{d_{ajk}^2} + \frac{1}{d_{ajl}^2} - \frac{2 \cdot \cos(\phi_j)}{d_{ajk} \cdot d_{ajl}}} & \phi_j > \pi/2 \\ \frac{d_{res}}{\sin(\phi_j)} \sqrt{\frac{1}{d_{ajk}^2} + \frac{1}{d_{ajl}^2} + \frac{2 \cdot \cos(\phi_j)}{d_{ajk} \cdot d_{ajl}}} & \phi_j \leq \pi/2 \end{cases} \quad (3.33)$$

Da zur Bestimmung der Transponderrichtung nur zwei Seiten (Antennenvektoren) des vom Antennentriplett gebildeten Dreiecks betrachtet werden, sollte zur Minimierung der maximalen Abweichung jene Antenne als Bezugsantenne verwendet werden, die zu einem möglichst rechteckigen Schwankungsbereich führt. Aufgrund der Tatsache, dass die Winkelsumme eines Dreiecks stets 180° beträgt, ist dies mit der Suche nach der Antenne mit dem größten Antennenwinkel (ϕ_{\max}) gleichbedeutend.

$$\phi_{\max} = \max\{\phi_j; \phi_k; \phi_l\} \quad (3.34)$$

Zur Ermittlung der Transponderrichtung werden infolgedessen die zwei kürzesten Seiten des Antennentriplets herangezogen.

Abbildung 3.9 stellt die unter Verwendung verschiedener Antennenkonstellationen desselben Antennentriplets (Antennen a_3, a_4, a_5) entstehenden Schwankungsbereiche gegenüber. Den rechteckigsten Schwankungsbereich (Abb. 3.9b) erhält man, wenn die Antenne a_5 als Bezugsantenne definiert wird ($\phi_{\max} = \phi_5$).

$$\phi_5 > \phi_4 > \phi_3 \rightarrow \varepsilon_{p \max}(\phi_5) < \varepsilon_{p \max}(\phi_4) < \varepsilon_{p \max}(\phi_3) \quad (3.35)$$

Die Flächen der unterschiedlichen Schwankungsbereiche ergeben sich in Übereinstimmung mit Gleichung 3.28 zu:

$$A_{Err \ jkl} = a \cdot b \cdot \sin(\phi_j) = \frac{2 \cdot d_{res}}{d_{ajk} \cdot \sin(\phi_j)} \frac{2 \cdot d_{res}}{d_{ajl} \cdot \sin(\phi_j)} \sin(\phi_j) = \frac{4 \cdot d_{res}^2}{d_{ajk} \cdot d_{ajl} \cdot \sin(\phi_j)} \quad (3.36)$$

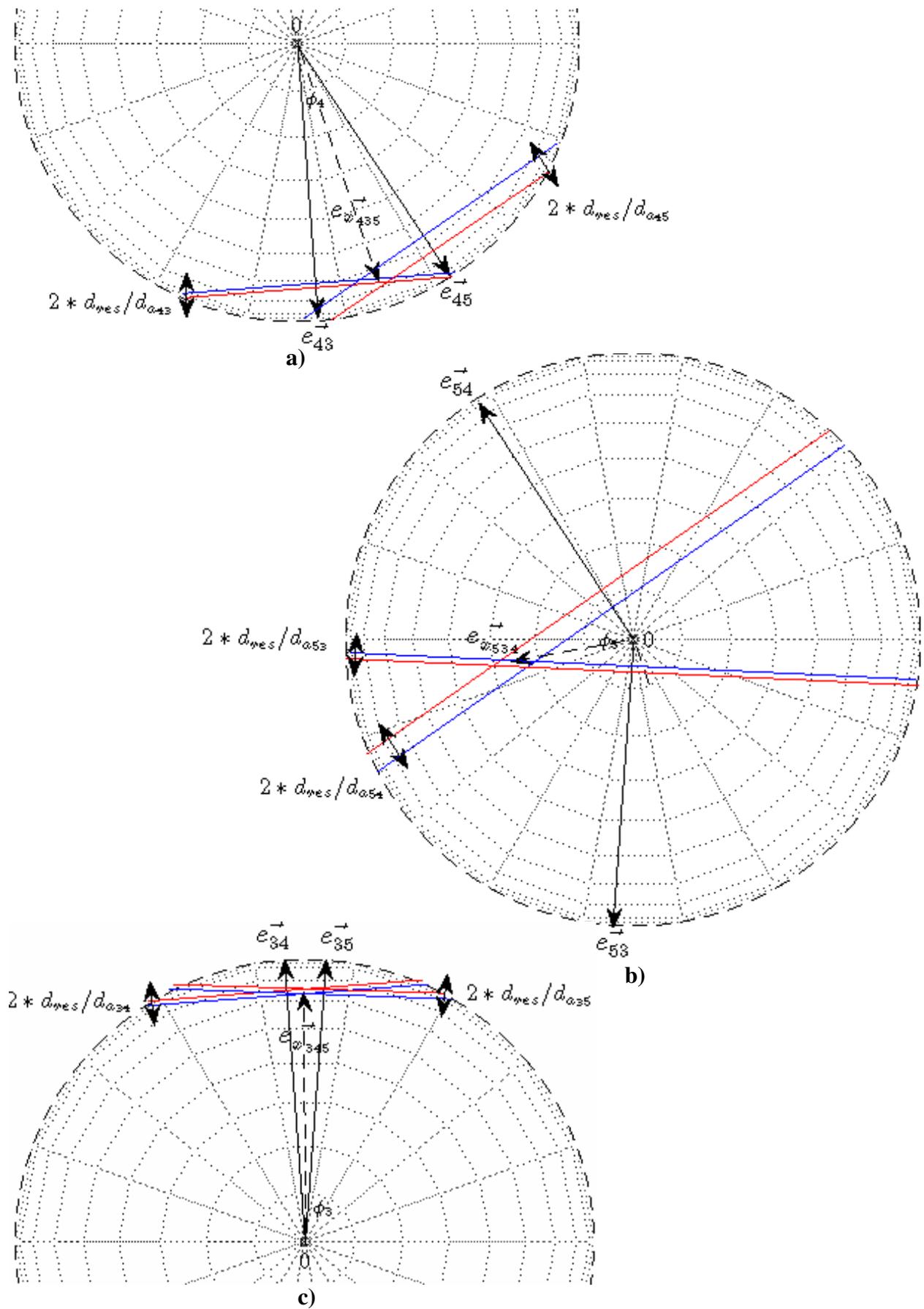


Abbildung 3.9: Unterschiedliche Schwankungsbereiche desselben Antennentriplets (Antennen a_3, a_4, a_5)

Da der Ausdruck im Nenner immer der doppelten Grundfläche des betrachteten Antennentriplets entspricht (näheres dazu in Kapitel 3.4), ist die Fläche des Schwankungsbereiches von der Antennenkonstellation unabhängig.

$$\left. \begin{aligned}
 A_{Err\ 345} &= \frac{4 \cdot d_{res}^2}{d_{a34} \cdot d_{a35} \cdot \sin(\phi_3)}, \phi_3 = \angle(\mathbf{e}_{34}, \mathbf{e}_{35}) = \arccos(\mathbf{e}_{34}^T \mathbf{e}_{35}) \\
 A_{Err\ 435} &= \frac{4 \cdot d_{res}^2}{d_{a43} \cdot d_{a45} \cdot \sin(\phi_4)}, \phi_4 = \angle(\mathbf{e}_{43}, \mathbf{e}_{45}) = \arccos(\mathbf{e}_{43}^T \mathbf{e}_{45}) \\
 A_{Err\ 534} &= \frac{4 \cdot d_{res}^2}{d_{a53} \cdot d_{a54} \cdot \sin(\phi_5)}, \phi_5 = \angle(\mathbf{e}_{53}, \mathbf{e}_{54}) = \arccos(\mathbf{e}_{53}^T \mathbf{e}_{54})
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 A_{Err\ 345} &= A_{Err\ 435} = A_{Err\ 534} \\
 \phi_3 &< \phi_4 < \phi_5
 \end{aligned}$$

(3.37)

Berechnet man die maximalen Winkelabweichungen für die Antennentriplets mit der größten bzw. kleinsten Grundfläche unter Berücksichtigung der Antennenkonstellation, erhält man die zwei nachfolgenden Diagramme (vgl. Diagr. 3.2 und 3.3).

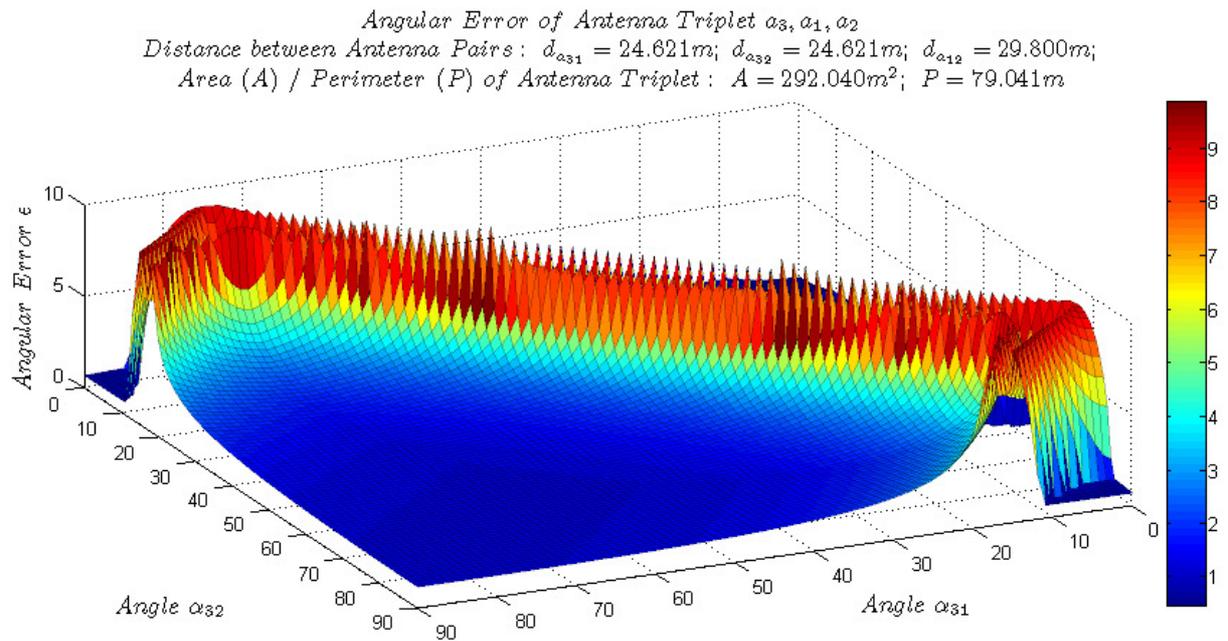


Diagramm 3.4: Maximaler Winkelfehler der Transponderrichtung (Antennentriplett a_3, a_1, a_2)

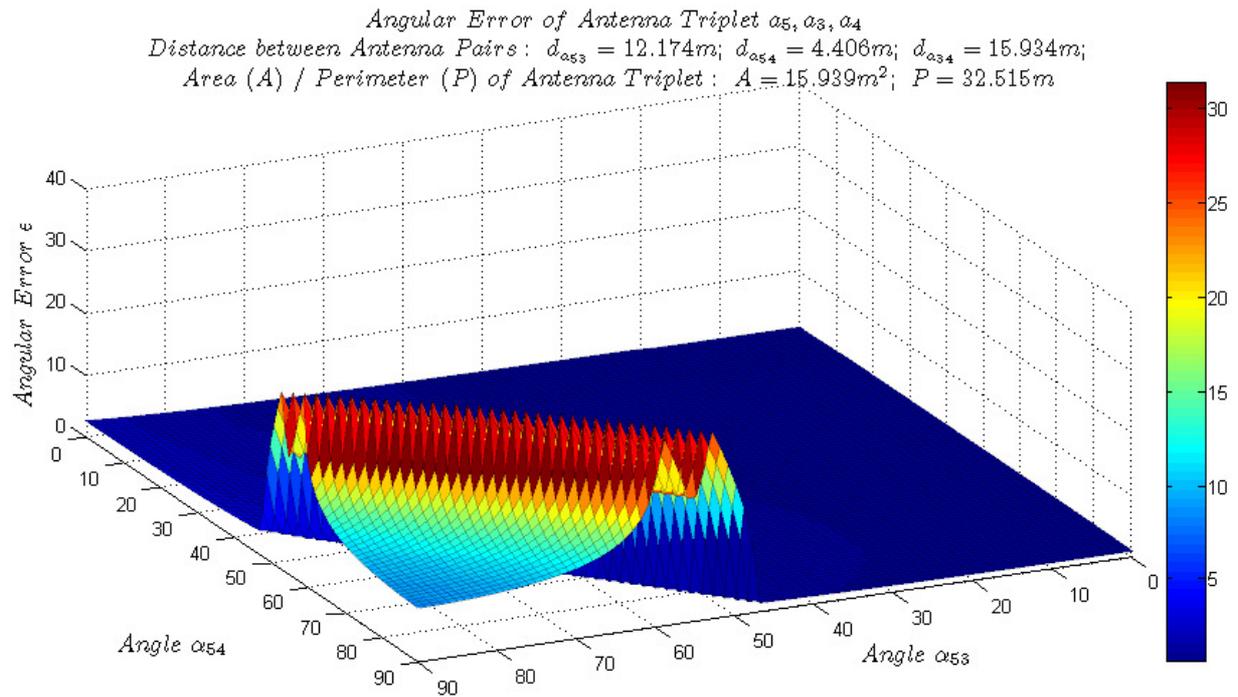


Diagramm 3.5: Maximaler Winkelfehler der Transponderrichtung (Antennentriplett a_5, a_3, a_4)

3.3 Korrelation

Da das Verfahren zur Ermittlung der Transponderrichtung (Kapitel 3.1.2) im Allgemeinen zu zwei gegenüber der Antennenebene symmetrischen Lösungsvektoren führt, müssen zur Bestimmung der endgültigen Transponderrichtung mehrere verschiedene Antennentriplets betrachtet werden. Voraussetzung hierfür ist, dass die von jeweils drei Antennen aufgespannten Ebenen möglichst unterschiedliche Neigungen zueinander aufweisen.

Um gleichzeitig den Winkelfehler zu verringern sollte allerdings auch berücksichtigt werden, dass sich die an der Antennenanlage vorbeifliegenden Flugzeuge in einem günstigen Winkel zu den verfügbaren Antennenebenen befinden. Zur optimalen Platzierung der Antennen ist demnach die Kenntnis des regionalen Flugverkehrs von Nutzen.

Abbildung 3.8 illustriert die Bestimmung der endgültigen Richtung des Transponders unter Zuhilfenahme von zwei unterschiedlich geneigten Antennenebenen ($i = 1, 2$). Die zwei berechneten Lösungsvektoren \mathbf{e}_{i+} und \mathbf{e}_{i-} (eigentlich $\mathbf{e}_{x_{jkl} i+}$ und $\mathbf{e}_{x_{jkl} i-}$) sind um den Winkel α_i gegenüber der jeweiligen Antennenebene geneigt.

$$\mathbf{e}_{i+} = \mathbf{x}_{p_i} + \mathbf{x}_{n_{i+}} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{i-} = \mathbf{x}_{p_i} + \mathbf{x}_{n_{i-}} = \mathbf{x}_{p_i} - \mathbf{x}_{n_{i+}} \quad (3.38)$$

Da es sich bei diesen Vektoren um Einheitsvektoren handelt, kann der statistische Zusammenhang zwischen den Lösungsvektoren unterschiedlicher Antennentriplets mithilfe des Skalarproduktes untersucht werden.

$$1 \geq \langle \mathbf{e}_{1+}, \mathbf{e}_{2+} \rangle = \mathbf{e}_{1+}^T \mathbf{e}_{2+} > \langle \mathbf{e}_{1+}, \mathbf{e}_{2-} \rangle = \mathbf{e}_{1+}^T \mathbf{e}_{2-} \geq -1 \quad (3.39)$$

Je größer der Neigungsunterschied zwischen den betrachteten Antennenebenen ist, desto größer ist auch der Winkel α_i und umso zuverlässiger lässt sich der richtige Lösungsvektor bestimmen.

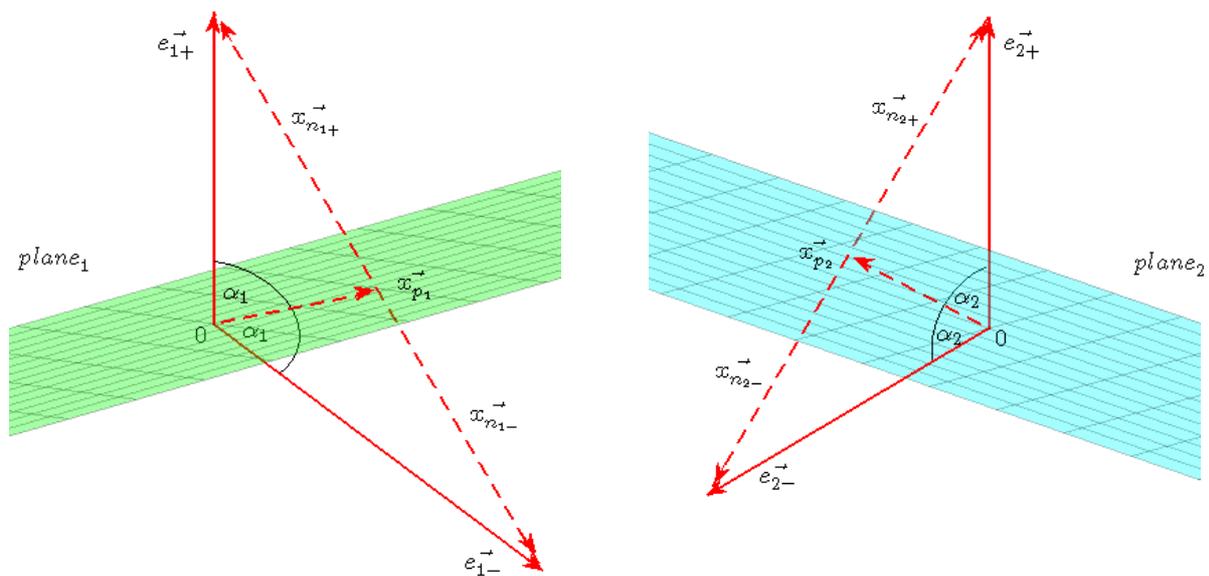


Abbildung 3.10: Bestimmung der endgültigen Transponderrichtung

Laut Binomialkoeffizient erhält man für N Antennen M unterschiedliche Antennentriplets (Gl. 3.40). Für die in Kapitel 1.2 beschriebene Antennenanordnung entstehen demnach zehn verschiedene Antennentriplets, dessen Grundflächen unterschiedlich zueinander geneigt sind (Erfüllung der notwendigen Bedingung).

$$M = \binom{N}{3} = \frac{N!}{(N-3)!3!} \quad (3.40)$$

Um die von jeweils drei Antennen berechneten Lösungsvektoren miteinander korrelieren zu können, wird die $M \times 6$ Lösungsmatrix \mathbf{X} definiert, die sich aus der positiven Submatrix \mathbf{X}_+ ($M \times 3$) und der negativen Submatrix \mathbf{X}_- ($M \times 3$) zusammensetzt. Dabei werden die oberhalb der Antennenebenen liegenden Einheitsvektoren (\mathbf{e}_{i+}) in die positive Submatrix und die unterhalb der Antennenebenen liegenden Einheitsvektoren (\mathbf{e}_{i-}) in die negative Submatrix eingetragen. Befindet sich der Transponder genau in der von einem Antennentriplett aufgespannten Ebene, enthalten beide Submatrizen in der entsprechenden Zeile denselben Richtungsvektor.

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_+ | \mathbf{X}_-] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1+}^T & \mathbf{e}_{1-}^T \\ \mathbf{e}_{2+}^T & \mathbf{e}_{2-}^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_{M+}^T & \mathbf{e}_{M-}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1+} & y_{1+} & z_{1+} & x_{1-} & y_{1-} & z_{1-} \\ x_{2+} & y_{2+} & z_{2+} & x_{2-} & y_{2-} & z_{2-} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M+} & y_{M+} & z_{M+} & x_{M-} & y_{M-} & z_{M-} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Durch Multiplikation der positiven Submatrix mit ihrer Transponierten entsteht die so genannte positive Korrelationsmatrix \mathbf{K}_+ . Die Elemente dieser symmetrischen $M \times M$ Matrix berücksichtigen die geometrischen Beziehungen zwischen allen positiven Einheitsvektoren.

$$\mathbf{K}_+ = \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_+^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1+}^T \\ \mathbf{e}_{2+}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{M+}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1+} & \mathbf{e}_{2+} & \cdots & \mathbf{e}_{M+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1+}^T \mathbf{e}_{1+} & \mathbf{e}_{1+}^T \mathbf{e}_{2+} & \cdots & \mathbf{e}_{1+}^T \mathbf{e}_{M+} \\ \mathbf{e}_{2+}^T \mathbf{e}_{1+} & \mathbf{e}_{2+}^T \mathbf{e}_{2+} & \cdots & \mathbf{e}_{2+}^T \mathbf{e}_{M+} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{M+}^T \mathbf{e}_{1+} & \mathbf{e}_{M+}^T \mathbf{e}_{2+} & \cdots & \mathbf{e}_{M+}^T \mathbf{e}_{M+} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Unter Verwendung der negativen Submatrix ergibt sich in gleicher Weise die negative Korrelationsmatrix \mathbf{K}_- ($M \times M$) zu:

$$\mathbf{K}_- = \mathbf{X}_- \mathbf{X}_-^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1-}^T \\ \mathbf{e}_{2-}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{M-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1-} & \mathbf{e}_{2-} & \cdots & \mathbf{e}_{M-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1-}^T \mathbf{e}_{1-} & \mathbf{e}_{1-}^T \mathbf{e}_{2-} & \cdots & \mathbf{e}_{1-}^T \mathbf{e}_{M-} \\ \mathbf{e}_{2-}^T \mathbf{e}_{1-} & \mathbf{e}_{2-}^T \mathbf{e}_{2-} & \cdots & \mathbf{e}_{2-}^T \mathbf{e}_{M-} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{M-}^T \mathbf{e}_{1-} & \mathbf{e}_{M-}^T \mathbf{e}_{2-} & \cdots & \mathbf{e}_{M-}^T \mathbf{e}_{M-} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Als zusätzliche statistische Hilfsgrößen werden die beiden Korrelationsmittelwerte m_+ und m_- eingeführt. Hierzu werden alle Elemente der positiven bzw. negativen Korrelationsmatrix gemittelt.

$$m_+ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M k_{ij+} \right) \quad \text{und} \quad m_- = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M k_{ij-} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_\pm = \begin{bmatrix} k_{11\pm} & k_{12\pm} & \cdots & k_{1M\pm} \\ k_{21\pm} & k_{22\pm} & \cdots & k_{2M\pm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M1\pm} & k_{M2\pm} & \cdots & k_{MM\pm} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Zur Reduzierung der Rechenzeit wird jene Submatrix herangezogen, die die größere Anzahl an wahren Transponderrichtungen beinhaltet. Den Ausgangspunkt bildet dementsprechend die Korrelationsmatrix mit dem höheren Korrelationsmittelwert.

$$\begin{aligned} m_+ &\geq m_- \rightarrow \mathbf{X}_+ \text{ und } \mathbf{K}_+ \\ m_+ &< m_- \rightarrow \mathbf{X}_- \text{ und } \mathbf{K}_- \end{aligned} \quad (3.45)$$

Zur Eliminierung der falschen Transponderrichtungen ist ein iterativer Ansatz erforderlich. Zu diesem Zweck werden die Zeilenelemente der betrachteten Korrelationsmatrix gemittelt und in den entsprechenden $M \times 1$ Mittelwertvektor (\mathbf{m}_+ oder \mathbf{m}_-) eingetragen.

$$\mathbf{m}_+ = [k_{1+} \quad k_{2+} \quad \dots \quad k_{M+}]^T \quad \text{oder} \quad \mathbf{m}_- = [k_{1-} \quad k_{2-} \quad \dots \quad k_{M-}]^T \quad \text{mit} \quad k_{i\pm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M k_{ij\pm} \quad (3.46)$$

Ermittelt man den Index des kleinsten Mittelwertvektorelementes und tauscht anschließend die zwei möglichen Einheitsvektoren in der zutreffenden Zeile der Lösungsmatrix aus, so wird simultan die betrachtete Submatrix erneuert. Bevor diese Submatrix definitiv übernommen werden kann, muss allerdings noch überprüft werden, ob sich die Modifikation der Submatrix überhaupt in einer Erhöhung des Korrelationsmittelwertes widerspiegelt. Zuvor muss also sowohl die Korrelationsmatrix als auch der Korrelationsmittelwert aus der abgeänderten Submatrix neu berechnet werden. Für den Fall, dass sich der neue Korrelationsmittelwert gegenüber dem alten Korrelationsmittelwert verbessert hat, wird dieser iterative Lösungsvektoraustausch solange fortgesetzt, bis der Korrelationsmittelwert nicht mehr steigt. Am Ende dieses Iterationsverfahrens sind die wahren Transponderrichtungen (\mathbf{e}_i) aller Antennentriplets in derselben Submatrix, der so genannten Transponderrichtungsmatrix \mathbf{X}_t ($M \times 3$), enthalten.

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_{jkl}1}^T \\ \mathbf{e}_{x_{jkl}2}^T \\ \vdots^T \\ \mathbf{e}_{x_{jkl}M}^T \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{x_{jkl}i} = \begin{cases} \mathbf{e}_{i+} \\ \text{oder} \\ \mathbf{e}_{i-} \end{cases} \quad (3.47)$$

3.4 Gewichtung

Da die von jeweils drei Antennen berechneten Transponderrichtungen mit unterschiedlichen Schwankungsbereichen behaftet sind, ist vor ihrer Mittelung eine Gewichtung der einzelnen Richtungsvektoren empfehlenswert. Dabei sollte der Einfluss des betrachteten Richtungsvektors auf das Endergebnis umso bedeutender sein, je geringer die maximal mögliche Winkelabweichung für die ermittelte Lage des Transponders ist.

Eine wesentliche Rolle in der Bestimmung der Gewichtungsfaktoren spielen hierbei die Grundflächen der verwendeten Antennentriplets.

$$area_{jkl} = \frac{\|\mathbf{a}_{jk} \times \mathbf{a}_{jl}\|}{2} = \frac{\|\mathbf{a}_{jk}\| \cdot \|\mathbf{a}_{jl}\| \cdot \sin(\phi_j)}{2} = \frac{d_{ajk} \cdot d_{ajl} \cdot \sin(\phi_j)}{2} \quad (3.48)$$

Aus Gleichung 3.36 ist zu erkennen, dass diese Fläche lediglich umgekehrt proportional zu der auf die Antennenebene projizierten Fläche des Schwankungsbereiches ist.

$$area_{jkl} = \frac{d_{ajk} \cdot d_{ajl} \cdot \sin(\phi_j)}{2} = \frac{2 \cdot d_{res}^2}{A_{Err_{jkl}}} \sim \frac{1}{A_{Err_{jkl}}} \quad (3.49)$$

Um den auf der Kugeloberfläche liegenden Schwankungsbereich berücksichtigen zu können, wird daher die Grundfläche des Antennentriplets mit dem Skalarprodukt zwischen dem normal zur Antennenebene stehenden Einheitsvektor ($\mathbf{e}_{n_{jkl}}$) und der ermittelten Transponderrichtung ($\mathbf{e}_{x_{jkl}}$) multipliziert.

$$\langle \mathbf{e}_{n_{jkl}}, \mathbf{e}_{x_{jkl}} \rangle = \mathbf{e}_{n_{jkl}}^T \mathbf{e}_{x_{jkl}} \quad (3.50)$$

Zur Berücksichtigung der geometrischen Form des Antennentriplets wird zusätzlich ein aus zwei Termen bestehender Geometriefaktor eingeführt.

$$geom_{jkl} = geom_{jkl_1} \cdot geom_{jkl_2} \quad (3.51)$$

Der erste Teil bezieht sich dabei ausschließlich auf den Winkel ϕ_j zwischen den zwei betrachteten Antennenvektoren (\mathbf{e}_{jk} und \mathbf{e}_{jl}). In Übereinstimmung mit den in Kapitel 3.2 gewonnenen Erkenntnissen, erreicht dieser Faktor bei einem Winkel von 90° seinen Maximalwert.

$$geom_{jkl_1} = 1 + \sin(\phi_j) \quad \text{mit } \phi_j \geq \phi_k, \phi_l \quad (3.52)$$

Um Bezug auf die verschiedenen Längen der beiden Antennenvektoren zu nehmen, werden die zwei weiteren Winkel des Antennentriplets (ϕ_k und ϕ_l) verwendet. In Abbildung 3.11 werden zwei unterschiedliche Antennentriplets miteinander verglichen, die dieselbe Grundfläche besitzen. Aus den über den Dreiecken eingezeichneten Schwankungsbereichen wird deutlich, dass im Falle eines gleichschenkligen Dreiecks die maximale Abweichung vom Mittelpunkt des Schwankungsbereiches ($\epsilon_{p_{max}}$) minimiert wird. Dementsprechend ist der zweite Term des Geometriefaktors umso größer, je ähnlicher die Längen der betrachteten Antennenvektoren sind.

$$geom_{jkl_2} = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{\pi - \phi_j} \phi_k\right) \sin\left(\frac{\pi}{\pi - \phi_j} \phi_l\right) \quad (3.53)$$

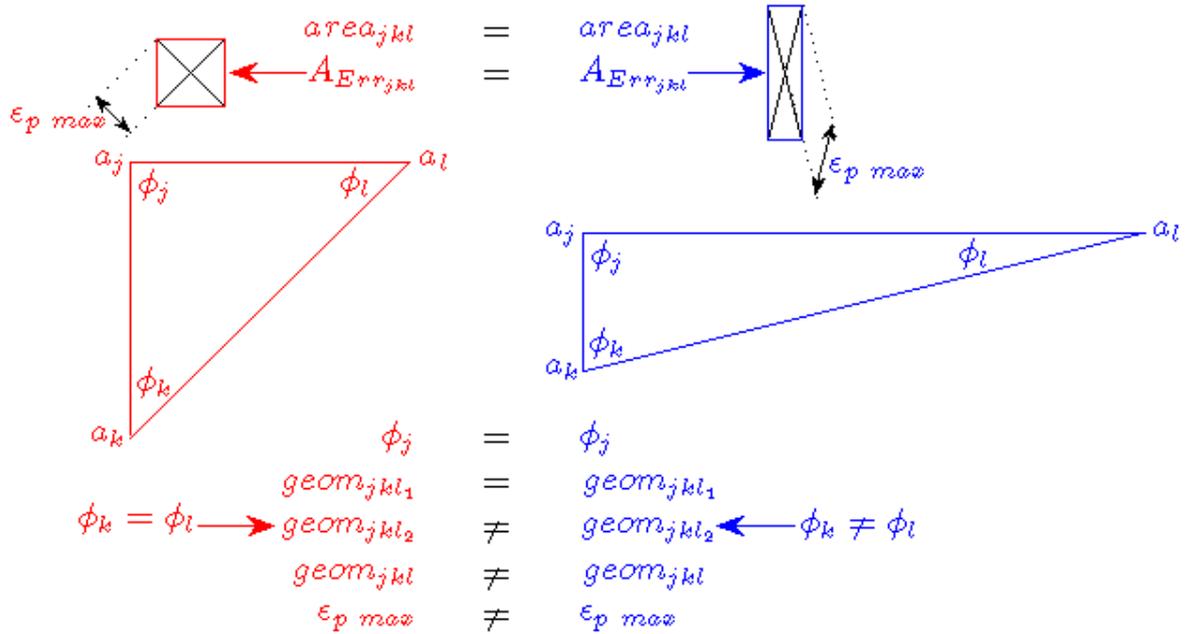


Abbildung 3.11: Gegenüberstellung zweier Antennentriplets

Der vom Winkel der Bezugsantenne abhängige Vorfaktor in den Klammern der Sinusfunktionen bezieht den Maximalwert der Sinusfunktion auf den optimalen Wert der zwei anderen Winkel des Antennentriplets. Somit ergibt sich der Geometriefaktor zu:

$$geom_{jkl} = geom_{jkl_1} \cdot geom_{jkl_2} = \left(1 + \sin(\phi_j)\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{\pi - \phi_j} \phi_k\right) \sin\left(\frac{\pi}{\pi - \phi_j} \phi_l\right)\right) \quad (3.54)$$

Diagramm 3.6 stellt die möglichen Werte der beiden Terme des Geometriefaktors in Abhängigkeit der vom Antennentriplett eingeschlossenen Winkel dar.

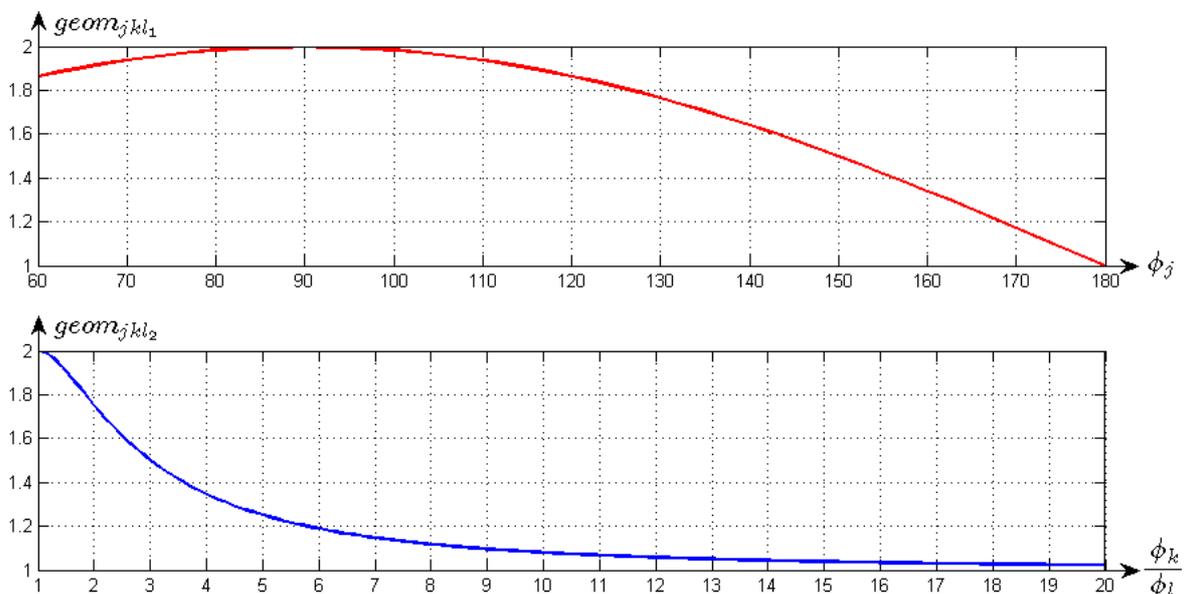


Diagramm 3.6: Geometriefaktoren

Der maximale Geometriefaktor ergibt sich unter Verwendung eines rechtwinkligen Dreiecks mit gleichlangen Katheten (entspricht linkem Dreieck in Abbildung 3.11) zu:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_j = \pi/2 \quad \rightarrow \text{geom}_{jkl_1} = 2 \\ \phi_k = \phi_l = \pi/4 \rightarrow \text{geom}_{jkl_2} = 2 \end{array} \right\} \text{geom}_{jkl} = \text{geom}_{jkl_1} \cdot \text{geom}_{jkl_2} = 4 \quad (3.55)$$

Kombiniert man die in den Gleichungen 3.48, 3.50 und 3.54 formulierten Faktoren erhält man schließlich den Gewichtungsfaktor w_{jkl} .

$$w_{jkl} = b + \text{area}_{jkl}^a \text{geom}_{jkl}^g \mathbf{e}_{n_{jkl}}^T \mathbf{e}_{x_{jkl}} \quad (3.56)$$

Da das Skalarprodukt zwischen dem normal zur Antennenebene stehenden Einheitsvektor und der ermittelten Transponderrichtung zu Null wird, wenn der Transponder in der vom Antennentriplett aufgespannten Ebene liegt, wurde das Produkt in der Gleichung des Gewichtungsfaktors um den Parameter b (Bias) erweitert. Dieser stellt sicher, dass jeder Richtungsvektor zumindest b -Mal im Endergebnis enthalten ist. Um den Einfluss des Flächenfaktors bzw. des Geometriefaktors steuern zu können wurden außerdem noch die Exponenten a und g als zusätzliche Parameter eingeführt.

$$1 \leq b \leq 10, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq g \leq 1 \quad (3.57)$$

Multipliziert man die in den Zeilen der Transponderrichtungsmatrix \mathbf{X}_t (Gl. 3.47) eingetragenen Richtungsvektoren ($\mathbf{e}_{x_{jkl_i}}$) mit den entsprechenden Gewichtungsfaktoren (w_{jkl_i}) und bildet im Anschluss deren Summe erhält man den Summenvektor \mathbf{x}_Σ . Für den Fall, dass keine Gewichtung der einzelnen Transponderrichtungen durchgeführt wird, können die Richtungsvektoren direkt summiert werden.

$$\mathbf{x}_\Sigma = \begin{cases} \sum_{i=1}^M (w_{jkl_i} * \mathbf{e}_{x_{jkl_i}}) & \text{mit Gewichtung} \\ \sum_{i=1}^M (\mathbf{e}_{x_{jkl_i}}) & \text{ohne Gewichtung} \end{cases} \quad (3.58)$$

Die mithilfe aller verfügbaren Antennen berechnete Transponderrichtung \mathbf{e}_x ergibt sich letztendlich nach Normierung dieses Summenvektors zu:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{x}_\Sigma}{\|\mathbf{x}_\Sigma\|} \quad (3.59)$$

Die Winkelabweichung dieses Einheitsvektors von der tatsächlichen Transponderrichtung kann wiederum unter Verwendung der in Kapitel 2.4.1 definierten Teststrecke abgeschätzt werden. Die zwei nachfolgenden Diagramme stellen die maximale bzw. mittlere Winkelabweichung der rechnerisch ermittelten Transponderstrecke von der wahren Transponderstrecke in Abhängigkeit der beiden Gewichtungsexponenten a und g (Bias b bleibt unverändert) dar.

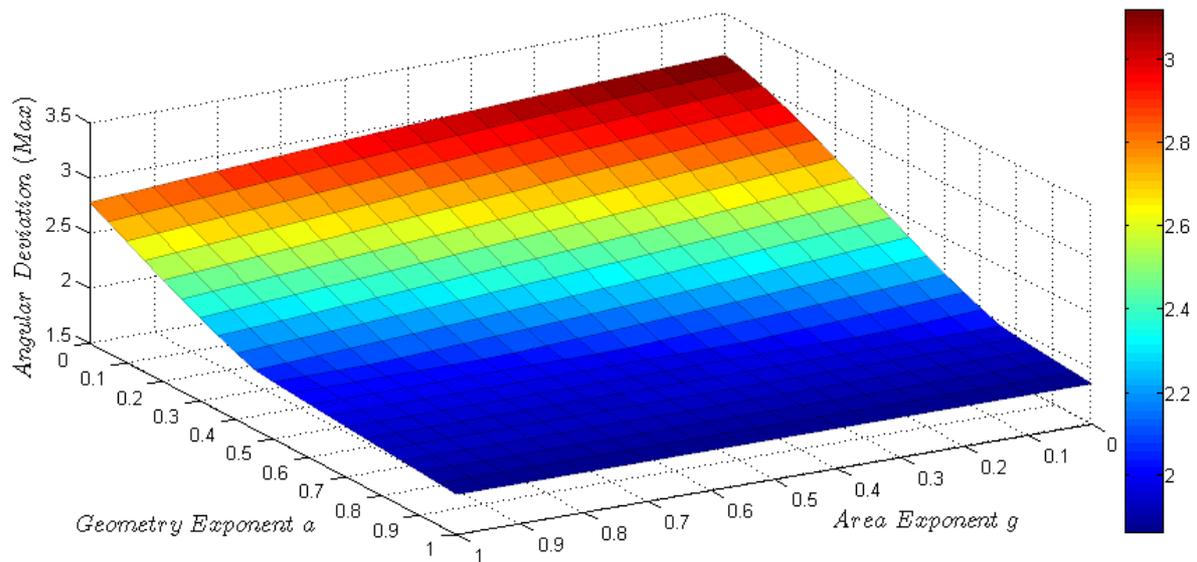


Diagramm 3.7: Maximale Winkelabweichung der Transponderstrecke in Abhängigkeit der Gewichtungsexponenten a und g (Bias $b = 1$)

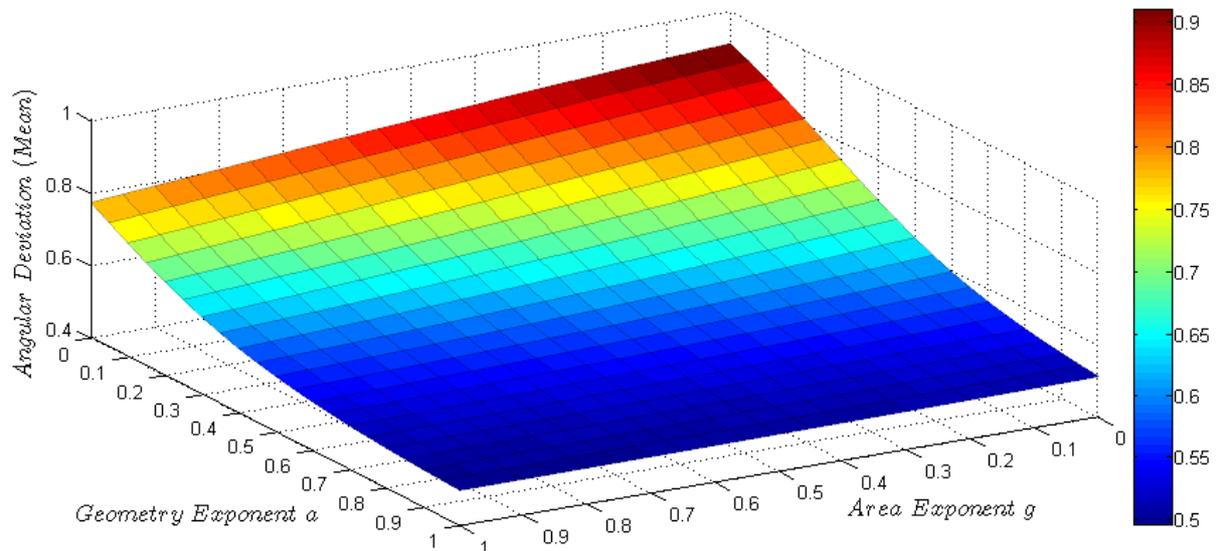


Diagramm 3.8: Mittlere Winkelabweichung der Transponderstrecke in Abhängigkeit der Gewichtungsexponenten a und g (Bias $b = 1$)

Für die betrachtete Transponderstrecke erhält man die geringsten Winkelabweichungen bei vollständiger Berücksichtigung des Flächen- und Geometriefaktors ($a = g = 1$). Dies ist allerdings nicht allgemein gültig, sondern auf die günstigen Winkel aller

Transponderpositionen der Transponderstrecke gegenüber dem einflussreichsten Antennentriplett (siehe Diagr. 3.4) zurückzuführen. Demzufolge sollten die beiden Gewichtungsexponenten auf den innerhalb des interessierenden Bereiches des Laserteleskops auftretenden Flugverkehr abgestimmt werden.

Wird keine Gewichtung der von jeweils drei Antennen berechneten Transponderrichtungen vorgenommen ergibt sich für die festgelegte Transponderstrecke eine maximale Winkelabweichung von $3,33^\circ$ sowie eine mittlere Winkelabweichung von $0,99^\circ$.

3.5 Transponderzuweisung

Um den aus allen verfügbaren Antennen berechneten Richtungsvektor (\mathbf{e}_x) dem richtigen Transponder zuweisen zu können, muss neben der Zeit, die für eine vollständige Umdrehung der Abfragestation benötigt wird (t_{rev}), nur noch die vom Standort des Laserteleskops gemessene maximale Winkelgeschwindigkeit ω_{max} der vorbeifliegenden Flugzeuge bekannt sein. Beispielsweise ergibt sich für ein Flugzeug, dass in einer Entfernung von 10 km mit einer (tangentialen) Geschwindigkeit von 900 km/h am Laserteleskop vorbeifliegt, eine Winkelgeschwindigkeit von:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r} \end{array} \right\} |\mathbf{v}| = v = \boldsymbol{\omega} \cdot r \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{v}{r} = \frac{900/3,6}{10000} = 0,025 \frac{rad}{s} \hat{=} 1,43 \frac{^\circ}{s} \quad (3.60)$$

Zur ungefähren Bestimmung der maximalen Winkelgeschwindigkeit werden sowohl die maximalen Geschwindigkeiten als auch die minimalen Entfernungen der sich im interessierenden Gebiet aufhaltenden Flugzeuge benötigt.

In Abbildung 3.12 wird einem Transponder, dessen ungefähre Flugroute durch die ihm bereits zugewiesenen Richtungsvektoren $\mathbf{e}_{x\ n-1}$, $\mathbf{e}_{x\ n-2}$, ... veranschaulicht wird, der aktuell berechnete Richtungsvektor $\mathbf{e}_{x\ n}$ zugewiesen. Da ein mit der maximalen Winkelgeschwindigkeit fliegender Transponder in der für eine Umdrehung der Abfragestation notwendigen Zeit sich theoretisch um den maximalen Winkel φ (übertrieben eingezeichnet) von seinem ursprünglichem Standort entfernt haben kann, wird die maximale Zeit t_{max} definiert, die zwischen zwei aufeinander folgenden Richtungsvektoren desselben Transponders liegen darf.

$$t_{max} = \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) t_{rev} \quad \text{mit} \quad \varphi = \varphi_{max} = \omega_{max} \cdot t_{rev} \quad (3.61)$$

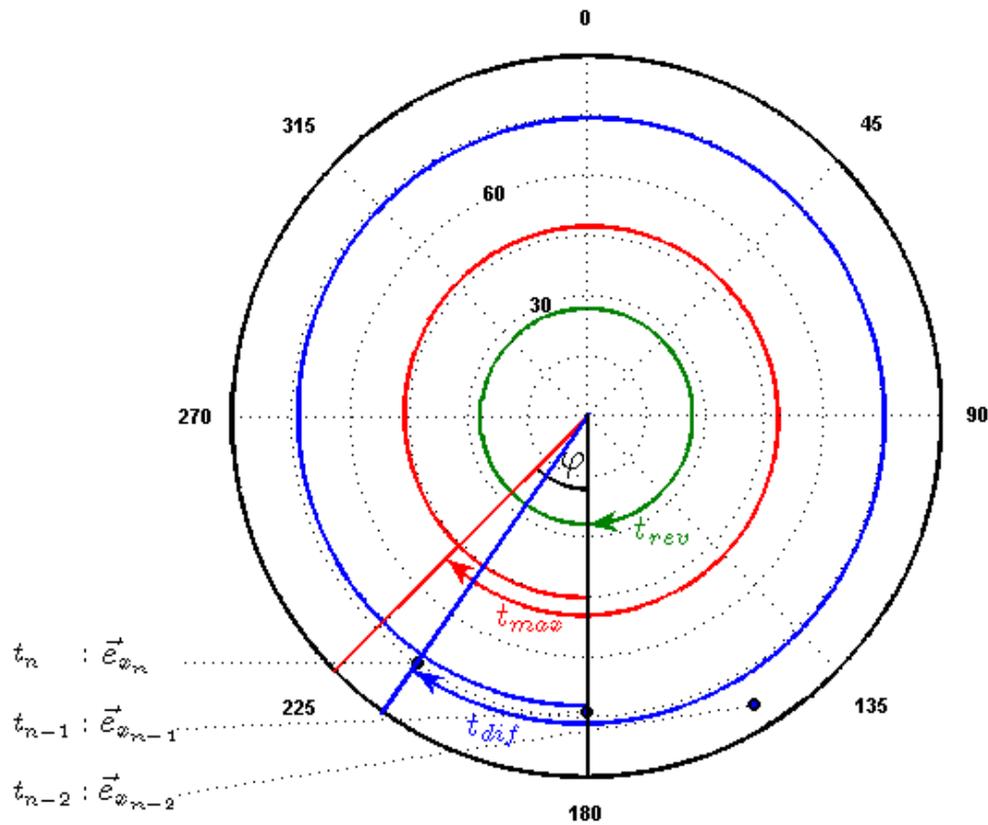


Abbildung 3.12: Zuweisung des Richtungsvektors

Aus den Empfangszeitpunkten des neu berechneten Richtungsvektors $\mathbf{e}_{x_n}(t_n)$ und des dem Transponder zuletzt zugewiesenen Richtungsvektors $\mathbf{e}_{x_{n-1}}(t_{n-1})$ lässt sich die Zeitdifferenz t_{dif} berechnen.

$$t_{dif} = t_n - t_{n-1} \quad (3.62)$$

Für eine erfolgreiche Zuweisung darf der Winkel zwischen den Richtungsvektoren \mathbf{e}_{x_n} und $\mathbf{e}_{x_{n-1}}$ den aus dieser Zeitdifferenz t_{dif} und der maximalen Winkelgeschwindigkeit ω_{max} berechneten Winkel nicht überschreiten (Gl 3.63). Bevor diese Ungleichung überhaupt untersucht werden darf, muss allerdings noch sichergestellt werden, dass die Zeitdifferenz t_{dif} nicht größer als die maximale Zeit t_{max} ist (notwendige Bedingung).

$$\angle(\mathbf{e}_{x_n}, \mathbf{e}_{x_{n-1}}) = \arccos(\mathbf{e}_{x_n}^T \mathbf{e}_{x_{n-1}}) \leq t_{dif} \cdot \omega_{max} \quad \text{für } t_{dif} \leq t_{max} \quad (3.63)$$

Unter Umständen kann es dazu kommen, dass ein Transponder, trotz seiner ständigen Präsenz in der unmittelbaren Nähe des Laserteleskops, zwischenzeitlich nicht detektiert werden kann. Um in diesem Fall zu ermöglichen, dass der erst nach einer weiteren Umdrehung der Abfragestation wieder detektierte Richtungsvektor dennoch seinem alten Transponder zugeordnet werden kann, wird eine weitere Fallunterscheidung durchgeführt.

$$\angle(\mathbf{e}_{x_n}, \mathbf{e}_{x_{n-1}}) = \arccos(\mathbf{e}_{x_n}^T \mathbf{e}_{x_{n-1}}) \leq (t_{\max} + (t_{dif} - t_{\max})(1 - p/100))\omega_{\max} \quad \text{für } t_{\max} < t_{dif} \leq 2 \cdot t_{\max} \quad (3.64)$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die zusätzlich verstrichene Zeit $t_{dif} - t_{\max}$ mit einer Reduktion von p Prozent in das Ergebnis einfließt. Wenn für den Transponder nach zwei erweiterten Umdrehung ($t_{dif} > 2 \cdot t_{\max}$) noch immer kein zugehöriger Richtungsvektor detektiert wird, ist für ihn die Zuweisung ein für alle Mal abgeschlossen.

Befinden sich im betrachteten Bereich des Laserteleskops mehrere Transponder, die eine der beiden Ungleichungen (Gl. 3.63 / 3.64) erfüllen, wird der aktuelle Richtungsvektor jenem Transponder zugewiesen, der zu dem verhältnismäßig besten Ergebnis führt.

3.6 Extrapolation

Aufgrund der begrenzten Winkelgeschwindigkeit der Abfragestation ist die auf die Zeit bezogene Anzahl der zum gleichen Transponder gehörigen Richtungsvektoren limitiert (Im Idealfall werden pro Sekunde etwa $1 / t_{rev}$ Richtungsvektoren desselben Transponders detektiert). Da bei der Bestimmung der Winkel zwischen dem Laserstrahl und den Transpondern die aktuellen Lagen aller im betrachteten Gebiet des Laserteleskops befindlichen Transpondern benötigt werden, ist in regelmäßigen Zeitintervallen eine Extrapolation der aus den gemessenen Epochezeiten der Antennen berechneten Richtungsvektoren von Nöten.

Zur Berechnung der extrapolierten Transponderrichtungen werden die kartesischen Koordinaten der dem Transponder zugewiesenen Richtungsvektoren \mathbf{e}_{x_i} voneinander getrennt betrachtet (Abb. 3.13).

$$\mathbf{e}_{x_i} = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \quad (3.65)$$

Für die Extrapolation werden aber nur jene Richtungsvektoren herangezogen, die innerhalb eines definierten Zeitlimits (t_{lim}) liegen (violett dargestellter Doppelpfeil).

$$t_e - t_i \leq t_{lim} \quad (3.66)$$

Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, muss die Anzahl der verbleibenden Richtungsvektoren gegebenenfalls noch reduziert werden. Wie aus dem in der Abbildung orange punktiert eingezeichneten Fenster ersichtlich ist, werden nur die E aktuellsten Richtungsvektoren verwendet.

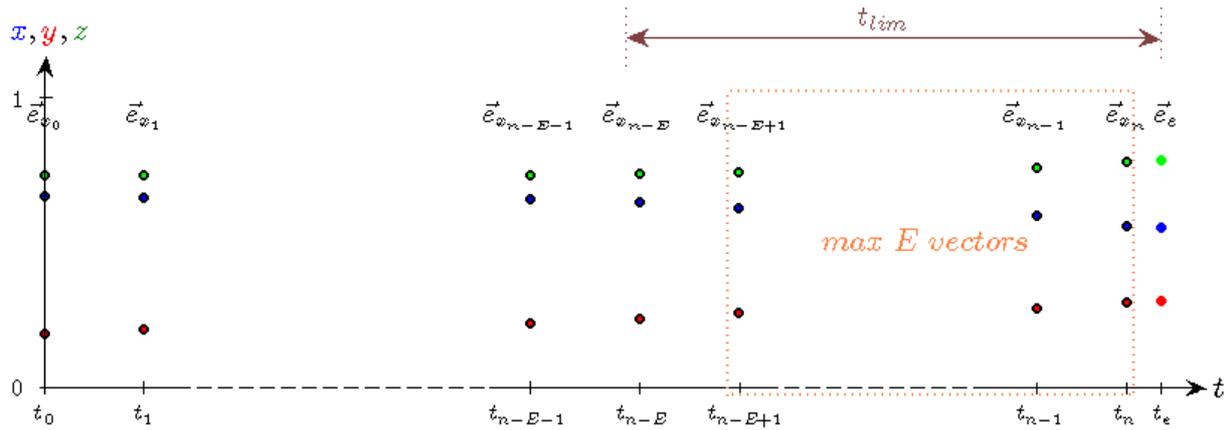


Abbildung 3.13: Extrapolation

Demnach sollte das Zeitlimit so gewählt werden, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$t_{\text{lim}} > E \cdot t_{\text{rev}} \quad (3.67)$$

Die kartesischen Koordinaten x_e , y_e und z_e des zum Zeitpunkt t_e extrapolierten Richtungsvektors lassen sich mithilfe der Interpolationsformel von Lagrange berechnen [1].

$$\begin{aligned} x_e(t_e) &= \sum_{i=0}^{E-1} x_{n-i} L_i(t_e) = x_n L_0(t_e) + x_{n-1} L_1(t_e) + \dots + x_{n-E+1} L_{E-1}(t_e) \\ y_e(t_e) &= \sum_{i=0}^{E-1} y_{n-i} L_i(t_e) = y_n L_0(t_e) + y_{n-1} L_1(t_e) + \dots + y_{n-E+1} L_{E-1}(t_e) \\ z_e(t_e) &= \sum_{i=0}^{E-1} z_{n-i} L_i(t_e) = z_n L_0(t_e) + z_{n-1} L_1(t_e) + \dots + z_{n-E+1} L_{E-1}(t_e) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Lagrangeschen Stützpolynome L_i (Grad $E-1$) ergeben sich dabei zu:

$$L_i(t_e) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{E-1} \frac{(t_e - t_{n-k})}{(t_{n-i} - t_{n-k})} = \frac{(t_e - t_n)(t_e - t_{n-1}) \dots (t_e - t_{n-i+1})(t_e - t_{n-i-1}) \dots (t_e - t_{n-E+1})}{(t_{n-i} - t_n)(t_{n-i} - t_{n-1}) \dots (t_{n-i} - t_{n-i+1})(t_{n-i} - t_{n-i-1}) \dots (t_{n-i} - t_{n-E+1})} \quad (3.69)$$

Da die extrapolierten Koordinaten in Gleichung 3.68 unabhängig voneinander ermittelt werden, muss der von ihnen gebildete Vektor (\mathbf{x}_e) im Allgemeinen noch normiert werden.

$$\mathbf{e}_e = \frac{\mathbf{x}_e}{\|\mathbf{x}_e\|} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_e = [x_e \quad y_e \quad z_e]^T \quad (3.70)$$

3.7 Winkel zwischen Transponder und Laserstrahl

Wie bereits im gleichnamigen Kapitel des zweiten Abschnitts erwähnt wurde, soll aus Sicherheitsgründen verhindert werden, dass in einer SLR-Bodenstation generierte Laserimpulse auf vorbeifliegende Flugzeuge geschossen werden.

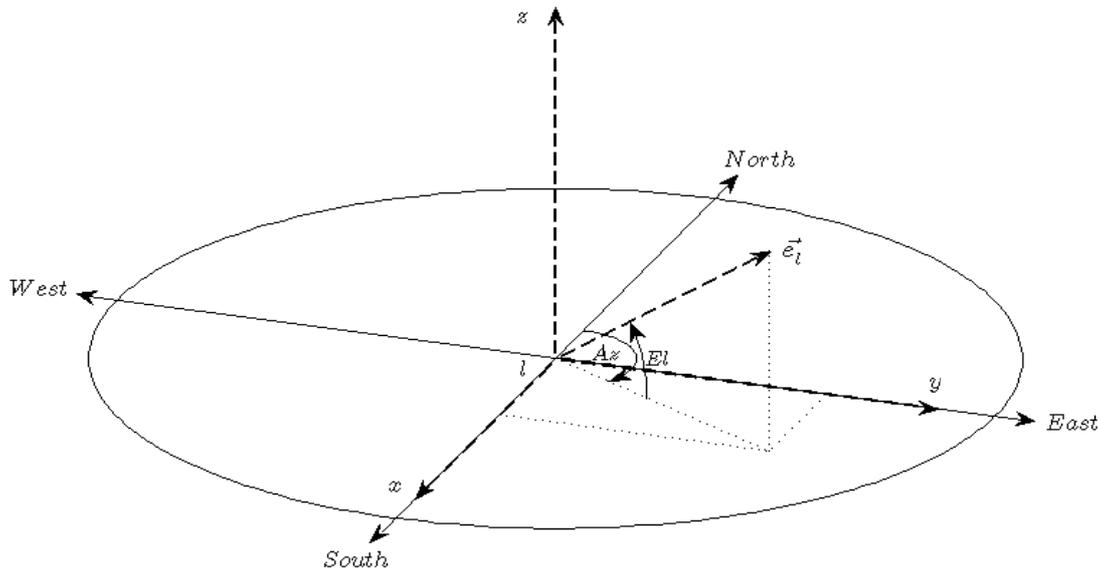


Abbildung 3.14: Bestimmung der Richtung des Laserstrahls

Hierzu muss die aktuelle Richtung des Laserstrahls (\mathbf{e}_l) regelmäßig mit allen Richtungsvektoren, der sich im Bereich des Laserteleskops aufhaltenden Transponder, verglichen werden. Dabei werden für die einzelnen Transponder entweder die aus den gemessenen Epochezeiten berechneten Richtungsvektoren (\mathbf{e}_x), oder, falls diese für den betrachteten Zeitpunkt nicht verfügbar sind, die mithilfe des Extrapolationsverfahrens bestimmten Richtungsvektoren (\mathbf{e}_e) verwendet.

Die Richtung des Laserstrahls lässt sich, unter Zuhilfenahme des Azimut- und Elevationswinkels des Laserteleskops, aus den in Abbildung 2.14 verdeutlichten räumlichen Verhältnissen zwischen dem regionalen Koordinatensystem und den Himmelsrichtungen bestimmen.

$$\mathbf{e}_l = \begin{bmatrix} \sin(Az - \pi/2) \cos(El) \\ \cos(Az - \pi/2) \cos(El) \\ \sin(El) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(Az) \cos(El) \\ \sin(Az) \cos(El) \\ \sin(El) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Der Winkel θ zwischen dem Transponder und dem Laserstrahl ergibt sich schließlich zu:

$$\theta = \arccos(\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_l) \quad \text{bzw.} \quad \theta = \arccos(\mathbf{e}_e^T \mathbf{e}_l) \quad (3.72)$$

Unterschreitet dieser Winkel den kritischen Winkel θ_{crit} , wird der Laser durch Senden eines Interruptbefehls vorläufig unterbrochen. Hat der entsprechende Transponder den kritischen Bereich verlassen, oder wird ein gewisses Zeitlimit überschritten, wird der SLR-Station die Erlaubnis erteilt wieder in Betrieb zu gehen. Während der Laser durch einen beliebigen Richtungsvektor (\mathbf{e}_x bzw. \mathbf{e}_e) unterbrochen werden kann, darf zur Aufhebung des Interrupts ausschließlich ein aus den gemessenen Epochezeiten ermittelter Richtungsvektor (\mathbf{e}_x) benutzt werden.

4. Implementierung der Software

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde für das Observatorium Lustbühel eine graphische Bedienungsfläche entwickelt. Hierfür wurde das im dritten Abschnitt beschriebene Verfahren zur Ermittlung der Transponderrichtung herangezogen, wobei ein besonderes Augenmerk auf die bei der Fehleranalyse gewonnen Erkenntnisse gelegt wurde.

4.1 Entwicklungsumgebung

Da bei der Transponderrichtungsbestimmung fast ausschließlich Vektoren bzw. Matrizen zum Einsatz kommen, wurde als Entwicklungsumgebung in erster Linie MATLAB (Version R2007a) verwendet. Die Routinen zur Kommunikation zwischen der ISA-Steckkarte und MATLAB wurden in der Programmiersprache C geschrieben. Hierzu musste auf dem Betriebssystem (Windows XP) zunächst ein Treiber (NTPort Library 2.8) installiert werden, der den direkten Zugriff auf die I/O-Ports des Computers ermöglicht (Windows verweigert aus Sicherheitsgründen den Zugriff auf die Schnittstellen). Außerdem musste in den C-Routinen eine zum Treiber gehörende Bibliothek (ntport.lib) eingebunden werden. Die kompilierten C-Routinen wurden anschließend mithilfe der Entwicklungsumgebung Microsoft Visual C++ 6.0 innerhalb von MATLAB in so genannte MEX (MATLAB EXECUTABLE) Dateien umgewandelt. Diese Dateien besitzen die positive Eigenschaft, dass sie von MATLAB wie gewöhnliche MATLAB Funktionen aufgerufen werden können.

4.2 Graphische Bedienungsfläche

Zur Programmierung der graphischen Bedienungsfläche wurde ebenfalls MATLAB verwendet. Bevor die Software benutzt werden kann, muss vorerst sichergestellt werden, dass sowohl MATLAB (Version R2007a) als auch der NTPort Treiber am verwendeten Rechner installiert ist. Grundsätzlich sollte das Programm aber auch mit aktuelleren Versionen von MATLAB funktionieren. Für den Fall, dass MATLAB nicht bzw. nur in einer inkompatiblen Version am Rechner installiert ist, kann alternativ die im Softwarepaket inkludierte MATLAB Compiler Runtime (MCRInstaller.exe, ~150 MB) benutzt werden. Dabei handelt es sich um eine von MATLAB bereitgestellte Bibliothek, die die wichtigsten MATLAB Funktionen unterstützt und zur Ausführung von in MATLAB entwickelten Applikationen dient.

Um das Programm schließlich zu starten muss die Datei „**atsd.exe**“ ausgeführt werden. Falls die MATLAB Compiler Runtime verwendet wird, muss die ein wenig modifizierte, aber dennoch voll funktionsfähige Datei „**atsd_mcr.exe**“ gestartet werden.

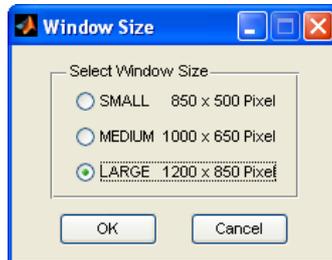


Abbildung 4.1: Wahl der Fenstergröße

Kurze Zeit später wird die Dialogbox „**Window Size**“ (Abb. 4.1) zur Auswahl der gewünschten Fenstergröße eingeblendet. Nach Bestätigung mit der „**OK**“-Taste wird das Hauptfenster „**Aircraft Transponder Signal Detector**“ geöffnet.

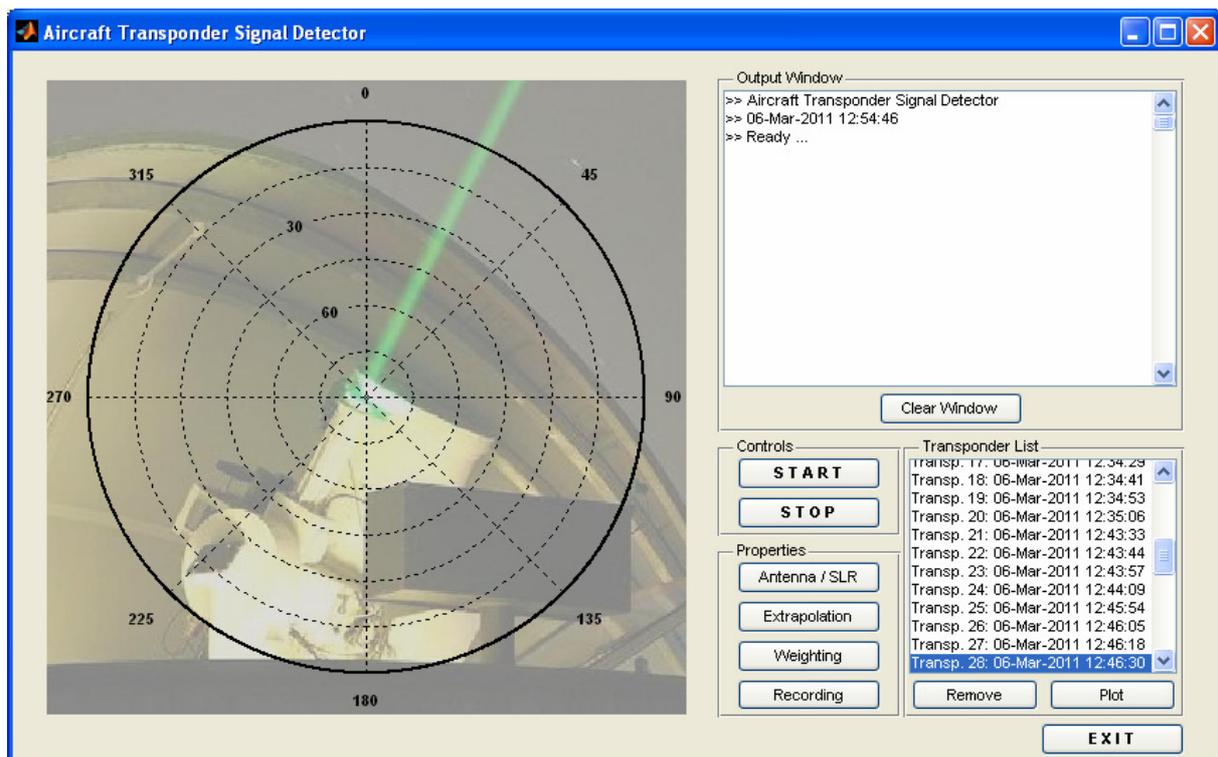


Abbildung 4.2: Hauptfenster der ATSD Software

Wie aus Abbildung 4.2 ersichtlich ist, besteht dieses Fenster im Wesentlichen aus einem Radarbildschirm zur Darstellung der in der Nähe des Observatoriums befindlichen Transponder sowie der aktuellen Richtung des Laserteleskops, einem Ausgabefenster zur Anzeige von Statusinformationen, einer Transponderliste mit den aufgezeichneten Transponderstrecken und zahlreichen Schaltflächen zur Bedienung der Software. Nachdem im Ausgabefenster der Status „**Ready...**“ erscheint, kann das gesamte ATSD-System

(Software und Hardware) durch Betätigung der „**START**“-Taste in Gang gesetzt werden (Abb. 4.3).

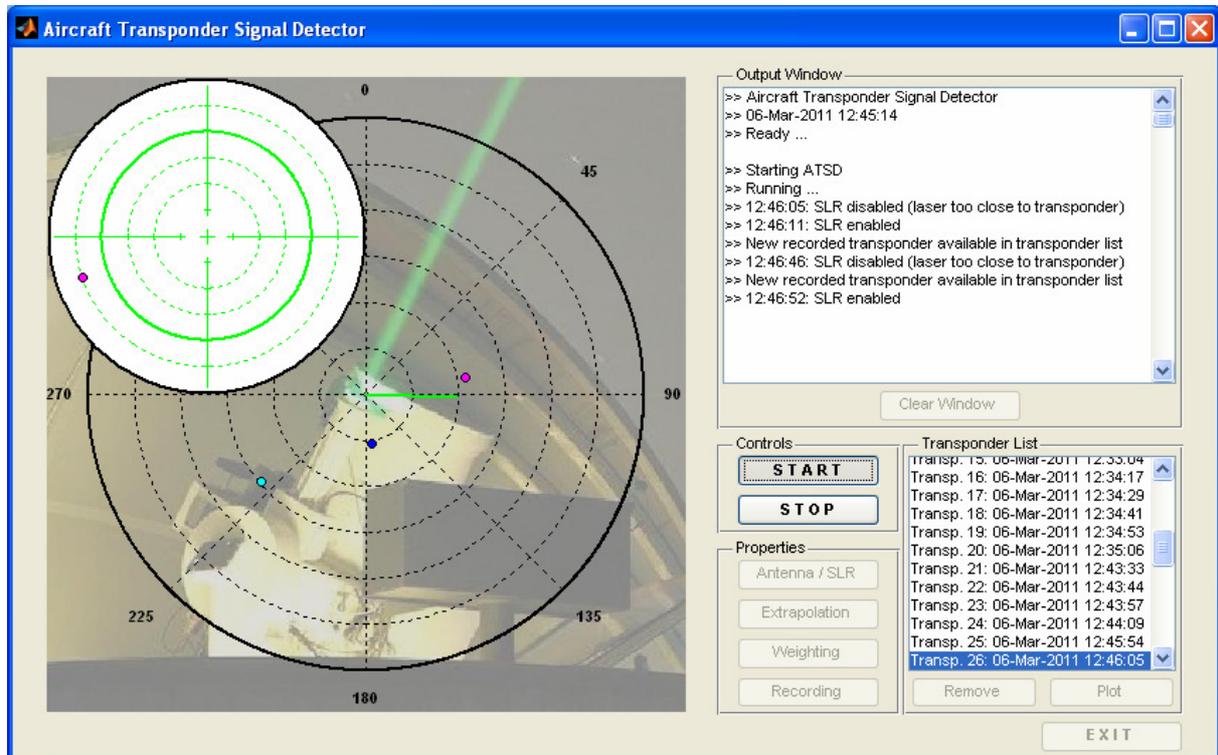


Abbildung 4.3: Darstellung des Flugverkehrs

Nach einer kurzen Initialisierungsphase wird im Ausgabefenster der Status „**Running...**“ angezeigt. Die sich im Bereich des Laserteleskops aufhaltenden Transponder werden durch Punkte unterschiedlicher Farbe am Radarbildschirm aufgetragen. Außerdem wird die aktuelle Richtung des Laserteleskops mittels einer grünen Linie dargestellt. Die Richtung des Laserteleskops bzw. der verschiedenen Transponder kann mithilfe der gestrichelt eingezeichneten Kreise (Elevationswinkel) und Linien (Azimutwinkel) abgelesen werden. Gelangt ein Transponder (\mathbf{e}_x bzw. \mathbf{e}_e) in die unmittelbare Nähe (Gl. 4.1) des Laserstrahls (\mathbf{e}_l), wird in einem Quadranten des Radarbildschirms ein Fadenkreuz eingeblendet, das die Lage des Transponders aus der Sicht des Laserteleskops veranschaulicht.

$$\arccos(\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_l) < 1,5 \cdot \theta_{crit} \quad \text{bzw.} \quad \arccos(\mathbf{e}_e^T \mathbf{e}_l) < 1,5 \cdot \theta_{crit} \quad (4.1)$$

Der Laserstrahl wird aber nur unterbrochen, wenn der Transponder sich innerhalb des grün hervorgehobenen Kreises befindet.

$$\arccos(\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_l) < \theta_{crit} \quad \text{bzw.} \quad \arccos(\mathbf{e}_e^T \mathbf{e}_l) < \theta_{crit} \quad (4.2)$$

Ist eine dieser Ungleichungen erfüllt wird zusätzlich die Meldung „**SLR disabled (laser too close to transponder)**“ im Ausgabefenster angezeigt. Diese Meldung wird gegebenenfalls

durch ein akustisches Warnsignal unterstützt (näheres dazu in den Antennen / SLR - Einstellungen). Hat der entsprechende Transponder den kritischen Bereich verlassen, kann der SLR-Betrieb wieder fortgesetzt werden und im Ausgabefenster wird die Meldung „**SLR enabled**“ ausgegeben. Wird einem Transponder kein Richtungsvektor mehr zugewiesen, wird dieser endgültig aus dem Radarbildschirm entfernt. Die von diesem Transponder zurückgelegte Route wird unter bestimmten Bedingungen (näheres dazu in den Extrapolationsoptionen) in der Transponderliste abgelegt. In diesem Fall wird die Meldung „**New recorded transponder available in transponder list**“ im Ausgabefenster angezeigt.

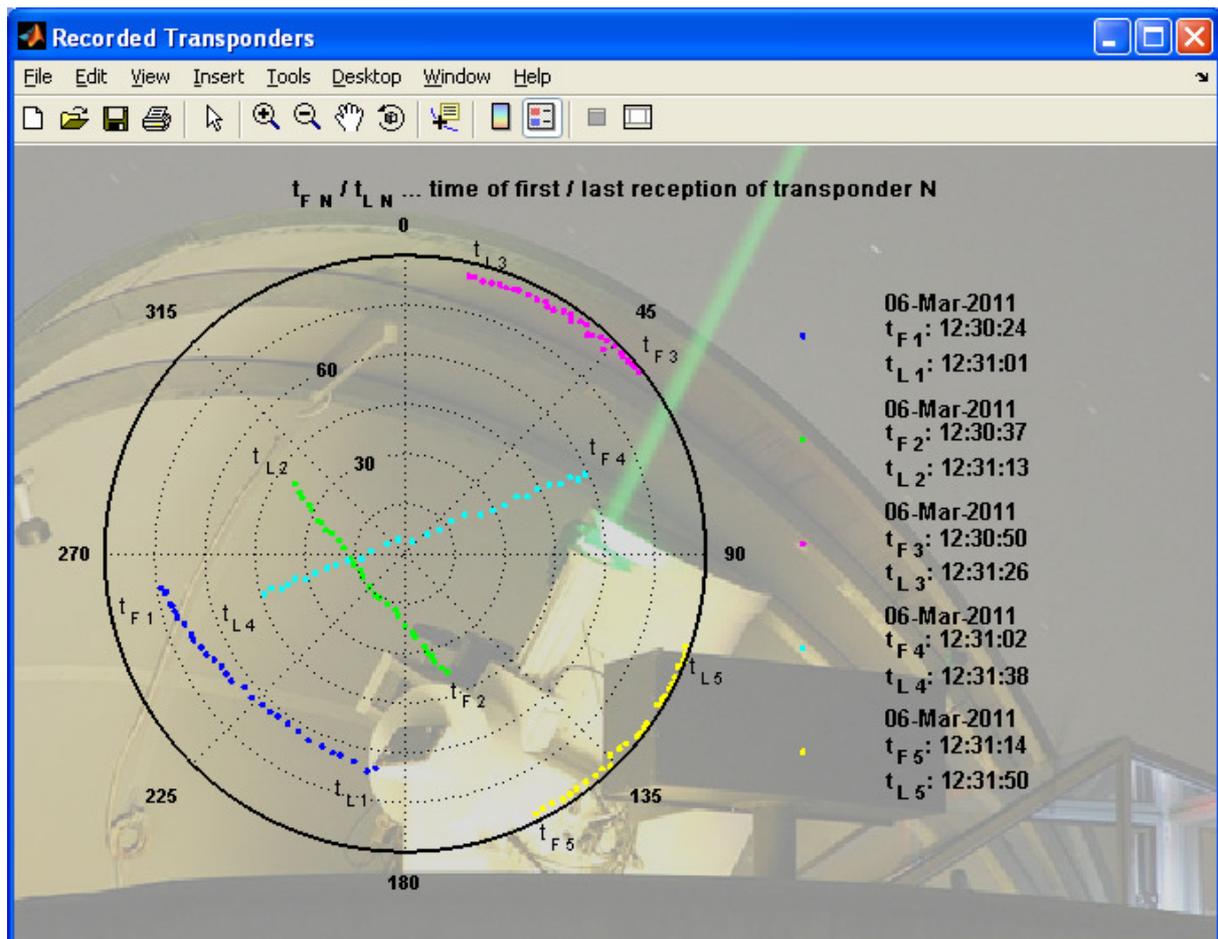


Abbildung 4.4: Aufgezeichnete Transponderstrecken

Befindet sich das ATSD-System nicht in Betrieb (z.B. durch Betätigung der „**STOP**“-Taste), stehen zusätzliche Schaltflächen zur Bedienung der Software zur Verfügung (Abb. 4.2). Beispielsweise können die in der Transponderliste ausgewählten Transponderstrecken durch Drücken der „**Plot**“-Taste in einem neuen Fenster (Abb. 4.4) dargestellt werden, oder durch Drücken der „**Remove**“-Taste unwiderruflich aus der Transponderliste gelöscht werden. Zur Vornahme diverser Einstellungen befinden sich außerdem vier Schaltflächen im „**Properties**“-Feld des ATSD-Hauptfensters.

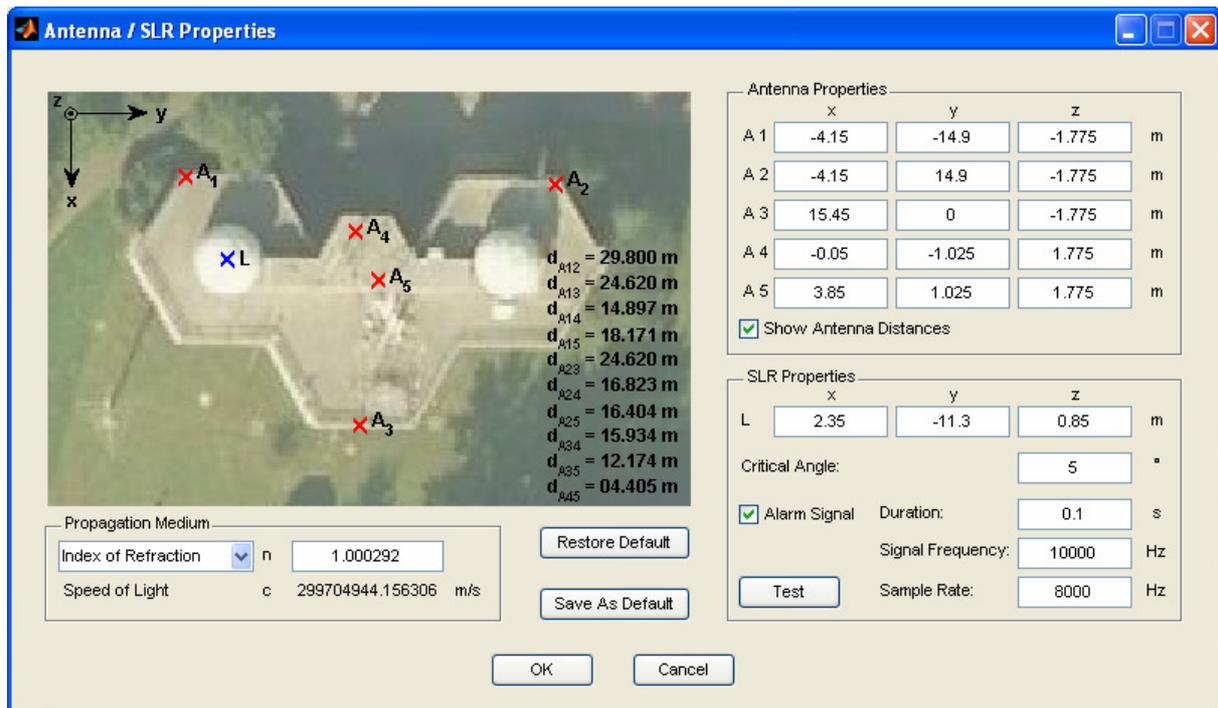


Abbildung 4.5: Antennen / SLR - Einstellungen

Wird die „Antenna / SLR“-Taste gedrückt, erscheint am Bildschirm das Fenster „Antenna / SLR Properties“ (Abb. 4.5). In diesem Fenster können die folgenden Einstellungen vorgenommen werden:

A1 - A5: Regionale kartesische Koordinaten der Antennen

Show Antenna Distances: Antennendistanzen in Abbildung ein- / ausblenden

L: Regionale kartesische Koordinaten des Laserteleskops

Critical Angle: Kritischer Winkel zwischen Laser und Transponder

Alarm Signal: Akustisches Warnsignal ein- / ausschalten

(Duration / Signal Frequency / Sample Rate: Signalparameter)

n / c: Brechungsindex / Lichtgeschwindigkeit des Ausbreitungsmedium

Für den Fall, dass die „Weighting“-Taste gedrückt wird, erscheint am Bildschirm das Fenster „Weighting Properties“ (Abb. 4.6). In diesem Fenster können die in Kapitel 3.4 (Gewichtung) beschriebenen Parameter des Gewichtungskoeffizienten modifiziert werden:

Weighting: Gewichtung der Richtungsvektoren ein- / ausschalten

(Bias / Area Exponent / Geometry Exponent: Gewichtungsparameter)

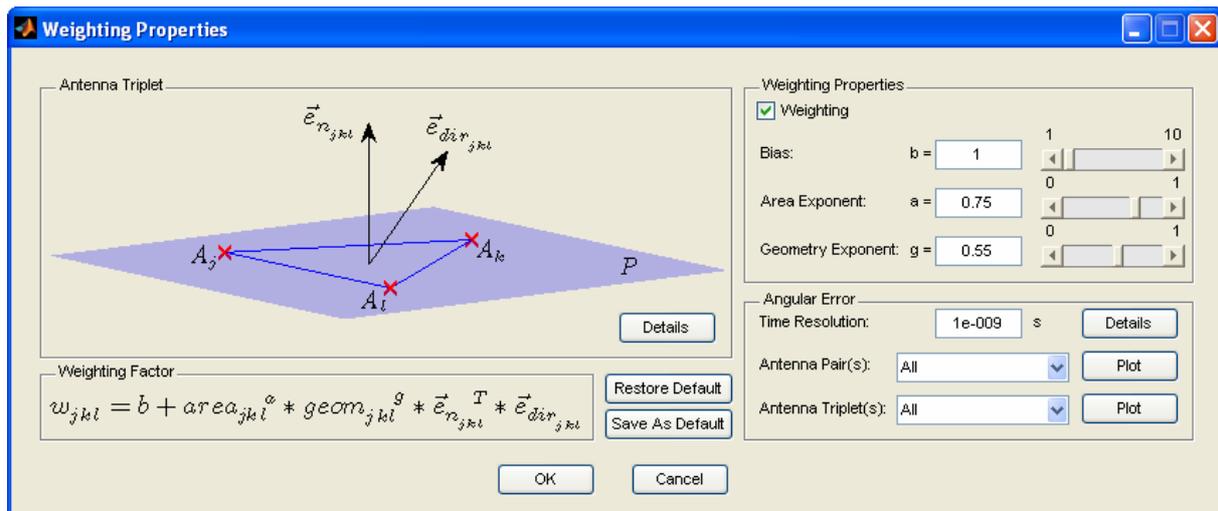


Abbildung 4.6: Gewichtungseinstellungen

Außerdem besteht die Möglichkeit, die bereits aus Kapitel 3.2 (Fehleranalyse) bekannten Winkelfehlerdiagramme der Antennenpaare bzw. Antennentriplets unter Zuhilfenahme der aktuellen Antennenkoordinaten darzustellen:

Time Resolution: Zeitauflösung der Epochezeiten

Antenna Pair(s): Auswahl der darzustellenden Antennenpaare

Antenna Triplet(s): Auswahl der darzustellenden Antennentriplets

Die aus diesen Diagrammen gewonnenen Erkenntnisse können anschließend zur optimalen Platzierung der Antennen verwendet werden (Minimierung des maximalen Winkelfehlers).

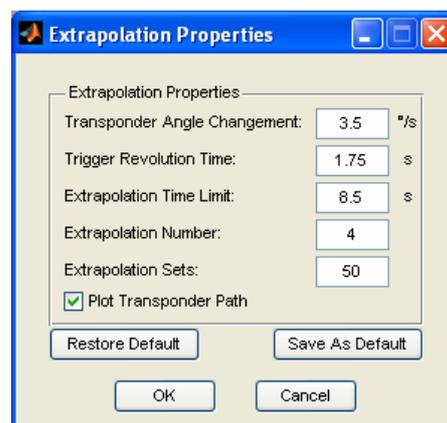


Abbildung 4.7: Extrapolationseinstellungen

Betätigt man die „**Extrapolation**“-Taste, wird am Bildschirm das Fenster „**Extrapolation Properties**“ (Abb. 4.7) eingeblendet. Da die Zuweisung der Richtungsvektoren zu den entsprechenden Transpondern (Kapitel 3.5) die Grundlage für die Extrapolation (Kapitel 3.6) darstellt, wurden die für die Zuweisung notwendigen Einstellungen mit den Extrapolationseinstellungen vereint.

Transponder Angle Changement: Maximale Winkelgeschwindigkeit der Transponder

Trigger Revolution Time: Zeit für eine Umdrehung der Abfragestation

Plot Transponder Path: Transponderstrecke im Hauptfenster ein- / ausblenden

Extrapolation Time Limit: Maximales Alter der zur Extrapolation verwendeten Richtungsvektoren

Extrapolation Number: Maximale Anzahl der zur Extrapolation verwendeten Richtungsvektoren

Extrapolation Sets: Maximale Anzahl von Transpondern, die sich zur selben Zeit im Empfangsgebiet der Antennen befinden (zur Vermeidung dynamischer Speicherverwaltung)

Wird das Kontrollkästchen „**Plot Transponder Path**“ aktiviert, werden am Radarbildschirm nicht nur die aktuellen Richtungsvektoren der im Empfangsbereich befindlichen Transponder, sondern auch alle ihnen bereits zugeordneten Richtungsvektoren aufgetragen (Abb. 4.8)

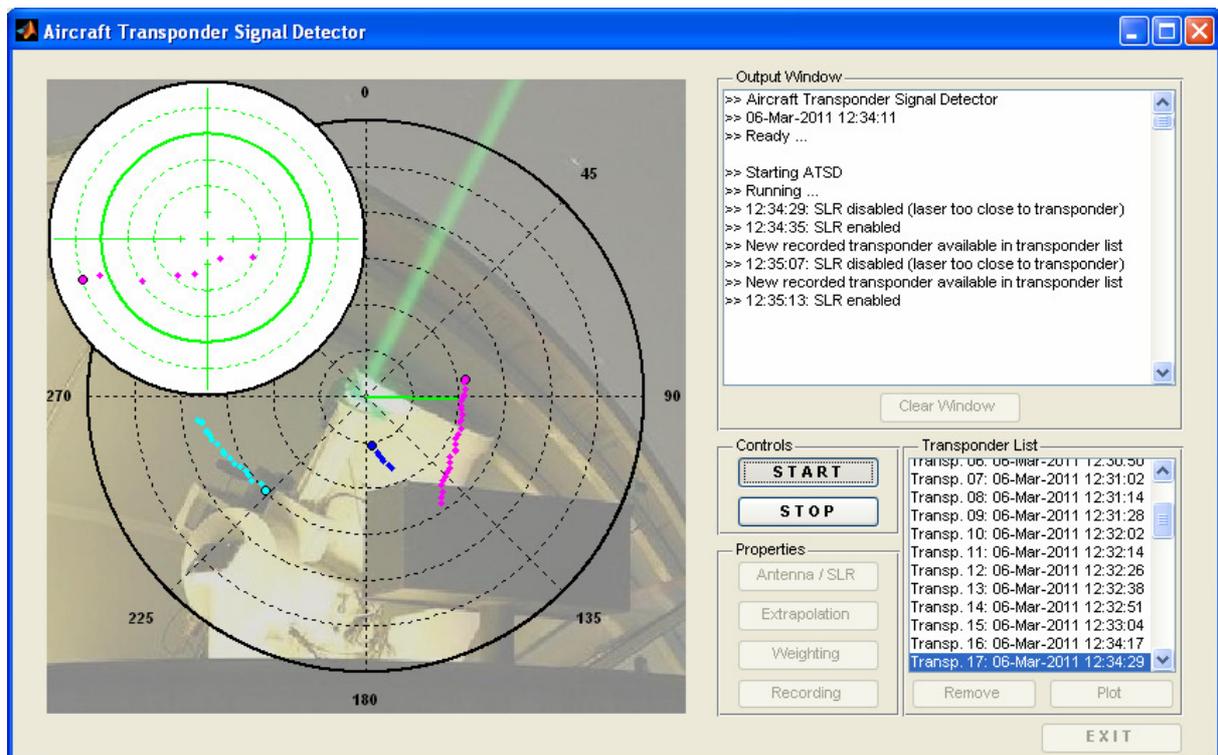


Abbildung 4.8: Alternative Darstellung des Flugverkehrs



Abbildung 4.9: Aufnahmeeinstellungen

Wird die „**Recording**“-Taste gedrückt, erscheint am Bildschirm das Fenster „**Recording Properties**“ (Abb. 4.9). In diesem Fenster können die folgenden Einstellungen vorgenommen werden:

Recording: Aufnahme der Transponderstrecken ein- / ausschalten

Delete Recordings on Startup: Automatisches Löschen der aufgezeichneten Transponderstrecken beim Programmstart ein- / ausschalten

List Entries: Maximale Anzahl von Aufzeichnungen in der Transponderliste

Required Direction Vectors: Erforderliche Mindestanzahl an Richtungsvektoren zur Aufnahme der Transponderstrecke

5. Schlussfolgerungen

Während das Verfahren zur Positionsbestimmung von Transpondern aufgrund der endlichen Auflösung der Epochezeiten sowie der begrenzt nutzbaren Fläche am Dach des Observatoriums zu verheerenden Positionsabweichungen führt (siehe Kapitel 2.4), liefert der Algorithmus zur Ermittlung der Transponderrichtung bereits mithilfe von nur drei Antennen sehr zufrieden stellende Winkelabweichungen (siehe Kapitel 3.2). Zur Reduzierung der maximalen Winkelabweichung ist es bei dem letzteren Verfahren besonders empfehlenswert, die verfügbaren Antennen derart zu positionieren, sodass zum einen der minimale Abstand zwischen zwei beliebigen Antennen maximiert wird, und zum anderen der Winkel zwischen den beiden betrachteten Antennenvektoren des jeweiligen Antennentriplets möglichst rechtwinklig wird. Dabei sollte außerdem darauf geachtet werden, dass die von jeweils drei Antennen aufgespannten Ebenen möglichst unterschiedliche Neigungen zueinander aufweisen (siehe Kapitel 3.3). Des Weiteren ist es sinnvoll, den Einfluss der einzelnen Antennentriplets durch Steuerung der Gewichtungparameter a , b und g des Gewichtungskoeffizienten auf den regionalen Flugverkehr abzustimmen (siehe Kapitel 3.4).

Als zusätzliche Erweiterung könnte das Antwortsignal des Transponders dekodiert werden, wodurch eine Identifikation des Flugzeugs ermöglicht, und in weiterer Folge die Transponderzuweisung (siehe Kapitel 3.5) verbessert werden könnte. Eine Vielzahl von Flugzeugen ist bereits mit Mode-S Transpondern ausgestattet. Mode-S Transponder zeichnen sich dadurch aus, dass neben der Flugzeugkennung unter anderem auch die Flugzeugposition im Antworttelegramm übermittelt wird. Diese Zusatzinformation könnte zur Kontrolle der berechneten Transponderrichtungen als auch zur Kalibrierung der Antennenpositionen herangezogen werden. Die Dekodierung und Auswertung des Transpondersignals könnte im Rahmen einer weiterführenden Dissertation realisiert werden.

Literaturverzeichnis

Allgemeine Lehr- und Fachbücher

- [1] **Bartsch Hans-Jochen:** *Taschenbuch Mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag Leipzig, 2004
- [2] **Schmaranz Klaus:** *Softwareentwicklung in C*, Springer, 2005
- [3] **Seeber Günter:** *Satellitengeodäsie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen*, de Gruyter, 1989
- [4] **Xu Guochang:** *GPS: Theory, Algorithms and Applications*, Springer, 2007

Internet

- [5] Institut für Weltraumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (IWF ÖAW) www.iwf.oeaw.ac.at
- [6] International Laser Ranging Service (ILRS) ilrs.gsfc.nasa.gov
- [7] MathWorks: MATLAB – The Language of Technical Computing www.mathworks.com/help/techdoc
- [8] Wikipedia: GPS-Technik de.wikipedia.org/wiki/GPS-Technik
- [9] Wikipedia: Sekundärradar de.wikipedia.org/wiki/Sekundärradar

Software

MATLAB R2007a

MATLAB Compiler Runtime 7.6

Microsoft Visual C++ 6.0

NTPort Library 2.8