

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR GEOMETRIE

Modellieren von Knoten aus kongruenten Prismenstücken

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra rerum naturalium

verfasst und vorgelegt von
Claudia Lassbacher

betreut von
Univ.Prof. Dr. Otto Röschel

Graz, 27. Oktober 2014

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlichst bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. *Otto Röschel* bedanken. Erst durch ihn bin ich auf das Thema meiner Diplomarbeit aufmerksam geworden.

Danke für die Zeit die Sie sich für mich und meine Arbeit genommen haben. Sie waren mir bei der Erstellung dieser Arbeit die größte und beste Hilfe die man sich vorstellen kann.

Mein tiefster Dank gilt natürlich auch meinen Eltern und meinem Bruder, die mich die ganzen Jahre meiner Studienzeit unterstützt und immer wieder aufgebaut haben.

Des Weiteren danke ich meinem Freund Johannes für sein Verständnis und seine Geduld, die er mir immer entgegenbringt. Abschließend bedanke ich mich bei allen Lehrenden, Freunden, Mitstudierenden und Bekannten, die mich im Verlauf meines Studiums unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

Kurzfassung

Kürzlich wurden von *M. ZAWIDZKI* und *K. NISHINARI* sogenannte modulare Rohrsysteme vorgestellt, die aus kongruenten Prismenstücken bestehen, deren Normalschnitte nicht mehr regulär sind, die aber trotzdem reguläre k -Ecke als „schräge“ Schnitte besitzen. Diese Schnitte werden als Gehrungsschnitte zu Nachbarn verwendet. Damit können Nachbarn um die Drehachse dieses k -Ecks nachgedreht werden. Damit haben die Autoren Modelle einfacher Knoten erzeugt. Des Weiteren gelang es *O. RÖSCHEL*, dieses Konzept mit Hilfe von kongruenten Prismenteilen, die den Kanten eines Basiswürfels folgen, zu realisieren. Dadurch wurde die bis dorthin nicht sichergestellte Schließung der Knoten garantiert.

Diese interessanten Resultate wurden in dieser Arbeit verwendet und erweitert. So wurde ein Algorithmus entwickelt, der es möglich macht, jeden Knoten durch kongruente Prismenstücke zu erzeugen, die Kanten eines Würfels als Grundlagen haben. Um dies zu gewährleisten wurde das obige Konzept verallgemeinert. Die Prismenstücke folgen nunmehr den Kanten eines Quadratnetzes, und die Überkreuzungen des Knotens werden durch Brücken aufgelöst, die aus kongruenten Prismenstücken bestehen.

Als Vertiefung in das Thema wurde der entwickelte Algorithmus modifiziert, so dass Knoten aus kongruenten Prismenstücken, die Kanten eines Oktaeders als Grundlage haben, erzeugt werden können. Auch hier kommen Quadratnetz und Brücken zum Einsatz.

Abstract

Recently, *M. ZAWIDZKI* and *K. NISHINARI* introduced the so-called modular Pipe-Z system. This interesting idea enabled them to follow a prescribed path and create a physical model using congruent pieces of prisms. Instead of regular orthogonal profiles they have regular polygons as their miter cuts of some angle. These miter cuts which they share with their neighbors can be turned around the rotation axis of the regular k -gon. This way the authors also constructed physical models of simple knots. In the case of a closed knot, though, it was not always possible to guarantee the closure of the prism model. *O. RÖSCHEL* developed and refined the idea with the aid of congruent pieces of prisms following the edges of a base cube. This way also closed knots can be addressed without any problem.

The method is being used and extended in this thesis. An algorithm is developed enabling the user to construct any spatial knot with congruent pieces of prisms, that have edges of a cube as their basis. The pieces of prisms follow the edges of a square grid and the crossovers of the knots are unwound by bridges also consisting of pieces congruent to the given prism.

Further on, the basic ideas of the presented algorithm are applied to the edges of an octahedron. Again, congruent pieces of prisms establish the physical model of the knot while square grids and bridges are employed.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	iv
1 Einleitung	1
2 Knotentheorie	3
2.1 Grundlagen	3
2.1.1 Elementare Bewegungen	8
2.1.2 Zusammensetzung von Knoten	10
2.2 Reidemeister-Bewegungen	12
2.3 Verschlingungen	17
2.4 Jones-Polynom	21
2.4.1 Klammer-Polynom	21
2.4.2 Beispiele für das Jones-Polynom anhand bekannter Knoten	28
3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken	32
3.1 Kanten eines Würfels als Grundlage	33
3.2 Kanten eines Oktaeders als Grundlage	38
3.3 Brücken als allgemeine Lösung	42
3.3.1 Anwendung der Brücken	42
3.4 Algorithmus für Knoten aus kongruenten Prismenstücken entlang Würfelmanten	47
3.4.1 Beispiel für die Anwendung des Algorithmus	48
3.4.2 Weitere Beispiele für die Anwendung des Algorithmus	50

Inhaltsverzeichnis

3.5	Brücken für Knoten entlang Oktaederkanten	53
3.5.1	Anwendung der Brücken	54
3.6	Algorithmus für Knoten aus kongruenten Prismenstücken entlang Oktaederkanten	57
3.6.1	Beispiel für die Anwendung des Algorithmus	57
3.7	Brücken für Knoten entlang anderer Platonischer Polyeder	60
	Literaturverzeichnis	61

1 Einleitung

Schon seit einigen Jahren versuchen sich Designer und Künstler an Kreationen von Freiformen durch modulare Elemente. Jedoch stoßen sie immer wieder auf Grenzen, da die räumliche Komplexität des geometrischen Konzeptes mit der Praktikabilität seiner physikalischen Herstellung nicht immer vereinbar ist. Der große Vorteil von Gebilden aus kongruenten Elementen ist, dass sie ökonomisch und herstellbar sind [6].

M. ZAWIDZKI und *K. NISHINARI* stellten die Frage:

Ist es möglich, einen beliebigen räumlichen Knoten durch Kopieren eines kongruenten Elements zu erzeugen?

Über ein sogenanntes modulares Rohrsystem, das aus kongruenten Prismenstücken besteht, versuchten sie die Frage zu beantworten. Durch die besondere Wahl der Eigenschaften der Prismenstücke, deren Gehrungsschnitte reguläre k -Ecke sind, ist die gegenseitige Lage der Stücke sehr vielseitig. Darauf wird am Anfang des dritten Kapitels dieser Arbeit genauer eingegangen. Jedoch ergab sich aus diesem Konzept ein weiteres Problem: die exakte Schließung des Systems. Dennoch war es ihnen möglich, einfache Knoten zu modellieren.

Die Weiterentwicklung durch *O. RÖSCHEL* beseitigte das Problem der Schließung durch Verwendung kongruenter Prismenstücke, die den Kanten eines Basiswürfels folgen.

Um dieser Frage nachzugehen, wurden im zweiten Kapitel die grundlegenden Begriffe der Knotentheorie, die die Invarianz der Knoten behandelt, zusammengefasst. Dazu wurde auf die Elementaren Bewegungen und die Reidemeister-Bewegungen eingegangen, sowie vertiefend auch auf das Jones-Polynom.

1 Einleitung

Die bereits vorhandenen Resultate ermöglichten es, einen Algorithmus zu entwickeln, der die Frage, die sich *M. ZAWIDZKI* und *K. NISHINARI* stellten, bejahte. Dazu ging ich vom Basiswürfel weg hin zu einem Quadratnetz, wie im dritten Abschnitt des dritten Kapitels beschrieben, um möglichst viel in einer Ebene zu arbeiten und somit die Komplexität des Modells gering zu halten. Die entsprechenden Überkreuzungen des Knotens wurden durch Brücken, die ebenfalls aus kongruenten Prismenstücken bestehen, aufgelöst. Die Modellierung der bereits erwähnten kongruenten Prismenstücke findet im ersten und zweiten Abschnitt des dritten Kapitels statt.

Es konnte ein weiterer Algorithmus aus dem vorhandenen entwickelt werden. Dieser ermöglicht es, Knoten aus kongruenten Prismenstücken, die Kanten eines Oktaeders als Grundlage haben, zu modellieren. Die Ausrichtung findet wiederum auf einem Quadratnetz statt. Auch Brücken mit den entsprechenden kongruenten Prismenstücken finden ihre Anwendung. Dies wird im fünften und sechsten Abschnitt des dritten Kapitels genauer erläutert.

2 Knotentheorie

Hier finden sich, als Zusammenfassung, die für das Folgende wichtigen Begriffe der Knotentheorie. Dieser Abschnitt folgt im Wesentlichen den Darstellungen in [1] und [4].

2.1 Grundlagen

Definition 1. *Eine Raumkurve ist eine stetig differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei I ein offenes Intervall ist. Eine Kurve ist C^k , wenn sie k mal stetig differenzierbar ist. Eine geschlossene Kurve wird durch $I = \mathbb{R}$ und c periodisch, d.h. $c(t + L) = c(t)$ mit festem $L > 0$ für alle t beschrieben. Alle anderen Punkte mit $c(t_1) = c(t_2)$ bezeichnet man als Doppelpunkte der Kurve.*

Definition 2. *Eine geschlossene Raumkurve $c(t)$ ist $\in [0, L)$ der Klasse C^1 , die höchstens an endlich vielen Stellen C^0 ist und keine Doppelpunkte besitzt, heißt Knoten K im \mathbb{R}^3 .*

Bemerkung 0.1.

- Ein Knoten kann als ein geschlossenes Stück Schnur aufgefasst werden, das in sich verschlungen sein kann und dabei keine Stärke besitzt, d.h. im Raum eine geschlossene Kurve erzeugt, die sich selbst nicht durchdringt.
- Durch die obige Definition eines Knotens im \mathbb{R}^3 sind auch geschlossene Polygonzüge zulässig. Sie werden in der Arbeit später eine große Rolle spielen. Die einzelnen Stellen t_i , für die $c(t_i)$ nur der Klasse C^0 angehört, heißen „Ecke“ des Knotens K .

Definition 3. *Ein Kreis ist der einfachste Knoten und wird als Unknoten oder trivialer Knoten bezeichnet.*

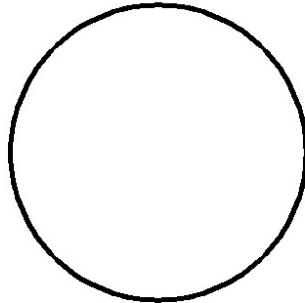


Abbildung 2.1: Unknoten

Als Beispiel für besondere Knoten seien die *Kleeblattschlinge* (siehe Abb. 2.2) und der *Achterknoten* (siehe Abb. 2.4) erwähnt.

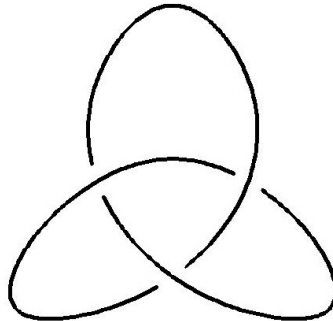


Abbildung 2.2: Rechte Kleeblattschlinge

Von der Kleeblattschlinge gibt es zwei verschiedene Arten, die in Abb. 2.2 dargestellte rechte Kleeblattschlinge und die linke Kleeblattschlinge, da diese durch keine Transformation im \mathbb{R}^3 ineinander übergeführt werden können. Anschaulich kann man sich die rechte Kleeblattschlinge als Spiegelbild der linken oder umgekehrt vorstellen [2].

Definition 4. *Sei K ein Knoten und p die Parallelprojektion des \mathbb{R}^3 mit Projektionsrichtung \vec{s} (Bildebene $\pi \perp \vec{s}$). Die Projektion p bildet K auf $p(K) \subset \pi$ ab. Falls die Bedingungen erfüllt sind:*

2 Knotentheorie

- In der Ebene π gibt es höchstens Doppelpunkte von $p(K)$ (aber keine Schnittpunkte mit höherer Vielfachheit)
- In der Ebene π gibt es endlich viele Doppelpunkte von $p(K)$
- In der Ebene π gibt es niemals einen Doppelpunkt von $p(K)$, der von einem Eckpunkt von K im Raum herrührt

heißt die Projektion $p : K \rightarrow p(K)$ regulär. $p(K)$ heißt dann Knotendiagramm oder Projektion von K .

Bemerkung 0.2. Die Ebene π kann auch variiert werden (so lange sie nicht \parallel zu \vec{s} ist) und liefert verschiedene Projektionen des Knotens K , die sich in einer regulären Affinität entsprechen. Solche Projektionen werden wir als gleichwertig ansehen. Sie unterscheiden sich in ihrer Topologie nicht. Dieses Vorgehen soll im Folgenden immer mitgedacht werden. Die folgende Abb. 2.3 zeigt nicht reguläre Projektionen eines Knotens.

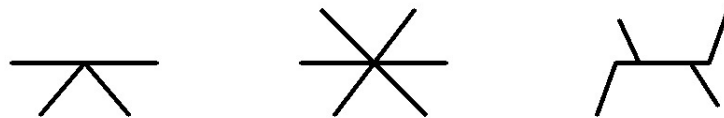


Abbildung 2.3: Keine regulären Projektionsrichtungen, daher keine Knotenprojektionen

Bemerkung 0.3.

- Als *Kreuzung* der Projektion $p(K)$ bezeichnet man die Stellen, an denen die Projektion einen Doppelpunkt besitzt, das heißt, an der sich der Knoten im Bild überschneidet. Dabei kann man diese bei Kenntnis des räumlichen Objekts als Über- oder Unterkreuzen markieren.

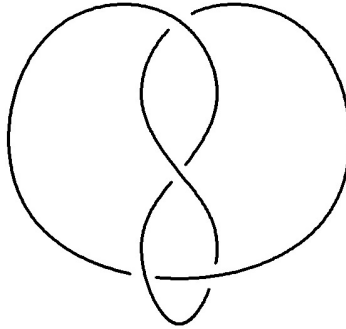


Abbildung 2.4: Achterknoten in Projektion 1

- Je nach Wahl der Richtung \vec{s} der regulären Projektion $p(K)$ kann ein Knoten topologisch verschiedene Projektionen besitzen (siehe Abb. 2.4 und Abb. 2.5). Beide Abbildungen stammen als Projektion von ein-und demselben Knoten.

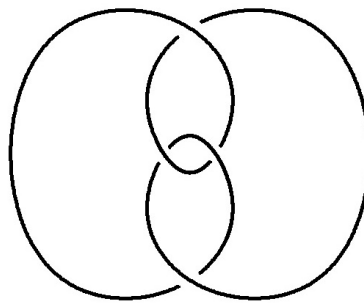


Abbildung 2.5: Achterknoten in Projektion 2

Um als nichttrivialer Knoten (siehe Bsp. in Abb. 2.2) zu gelten, muss der entsprechende Knoten in jeder regulären Projektion mehr als eine Kreuzung besitzen. Würde er nur eine solche besitzen, könnte er durch Deformation und Elimination der Kreuzung zu einem Unknoten werden.

Definition 5. Ein Knoten heißt *alternierend*, wenn eine Projektion derart existiert, dass im Knotenverlauf die Fäden bei den Kreuzungen abwechselnd oben und unten liegen.

Bemerkung 0.4.

- Abb. 2.2 zeigt die sogenannte *rechte Kleeblattschlinge* in einer Projektion. Sie stellt einen alternierenden Knoten dar.

2 Knotentheorie

- Abb. 2.4 zeigt eine Projektion des sogenannten *Achterknotens*. Er ist ebenfalls ein alternierender Knoten.

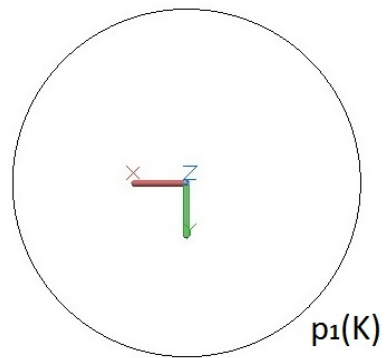


Abbildung 2.6: Knotenprojektion $p_1(K)$ des Knotens K aus Abb. 2.7

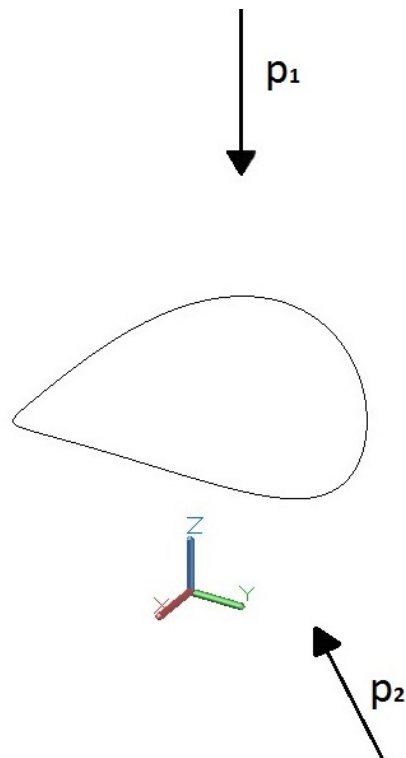


Abbildung 2.7: Abbildung eines Knoten des \mathbb{R}^3

2 Knotentheorie

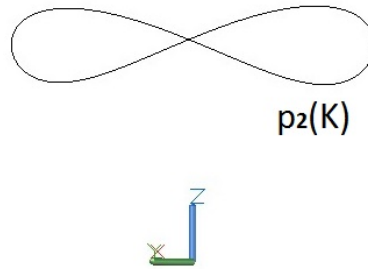


Abbildung 2.8: Knotenprojektion $p_2(K)$ des Knotens K aus Abb. 2.7

Die beiden Knotendiagramme in Abb. 2.6 und Abb. 2.8 stammen vom selben Knoten K , der in Abb. 2.7 dargestellt ist.

Daraus ergibt sich die Frage, ob festgestellt werden kann, wann zwei reguläre Projektionen vom selben Knoten stammen können. Diese Frage wird von der Theorie der Reidemeister-Bewegungen beantwortet, wobei es sich bei diesen Bewegungen um topologische Transformationen und nicht um Kongruenztransformationen handelt. Es taucht auch noch eine weitere Frage auf: wie kann festgestellt werden, dass zwei Knoten im \mathbb{R}^3 äquivalent sind? Diese Frage wird durch die sogenannten Elementaren Bewegungen beantwortet. Dazu benötigen wir vorab einen geeigneten Äquivalenzbegriff.

2.1.1 Elementare Bewegungen

Definition 6. *Zwei Knoten sind äquivalent, wenn sie durch eine stetige Verformung ineinander übergeführt werden können.*

Bemerkung 0.5. Jeder räumliche Knoten ist äquivalent zu einem geschlossenen Polygonzug.

Knoten des \mathbb{R}^3 sind nach der Bemerkung topologisch äquivalent zu geschlossenen Polygonzügen. Die folgende Definition für Polygonzüge [4] kann daher auch auf Knoten übertragen werden, die keine Polygonzüge sind:

2 Knotentheorie

Definition 7. Die folgenden Transformationen eines als geschlossener Polygonzug gegebenen Knotens heißen elementare Bewegungen Ω_0 .

- 1 Eine Kante AB wird in zwei Kanten AC und CB zerteilt, indem man einen Punkt C auf der Kante AB platziert (siehe Abb. 2.9)

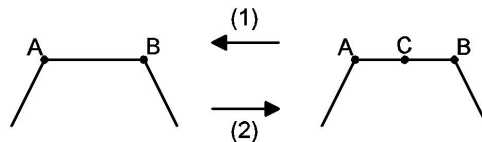


Abbildung 2.9: Elementare Bewegung 1 bzw. 2

- 2 Wenn AC und CB zwei aufeinanderfolgende Kanten eines Knotens derart sind, dass C auf der Kante AB liegt, dann wird der Punkt C entfernt (siehe Abb. 2.9)
- 3 Seien AB eine Kante des Knoten und C ein Punkt im Raum, der dem Polygonzug des Knotens nicht angehört. Wenn der Knoten keinen inneren Punkt des Dreiecks ABC und auch keine Seite enthält, die das Dreieck ABC trifft, wird die Kante AB durch die Kanten AC und CB ersetzt (siehe Abb. 2.10)

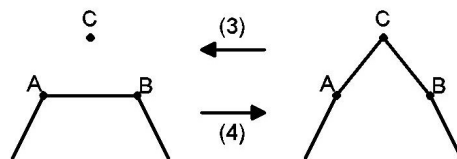


Abbildung 2.10: Elementare Bewegung 3 bzw. 4

- 4 Wenn im Raum ein Dreieck ABC mit zwei aufeinander folgenden Kanten AC und CB des Knotens als Seite so existiert, dass der Knoten keinen inneren Punkt des Dreiecks enthält, dann wird der Kantenzug AC, CA durch die Kante AB ersetzt (siehe Abb. 2.10)

Bemerkung 0.6.

- Jede elementare Bewegung führt ein Knotenpolygon in ein äquivalentes über.
- Diese elementaren Knotenbewegungen sind nur lokale Transformationen in \mathbb{R}^3 .

2.1.2 Zusammensetzung von Knoten

Aus zwei vorhandenen Knoten J und K des \mathbb{R}^3 können wir durch Entfernen eines kleinen Bogens von jedem Knoten und Zusammenfügen der so entstehenden vier Enden einen neuen Knoten erzeugen. Die neuen Verbindungen sind dabei so zu wählen, dass sie weder die ursprünglichen noch die neuen Kanten bzw. Knotenstücke schneiden.

Definition 8. Der Knoten, der auf diese Art entsteht, wird als Zusammensetzung der beiden Knoten oder ihre zusammenhängende Summe bezeichnet. Die Schreibweise ist $J\#K$ (siehe das Beispiel in Abb. 2.11).

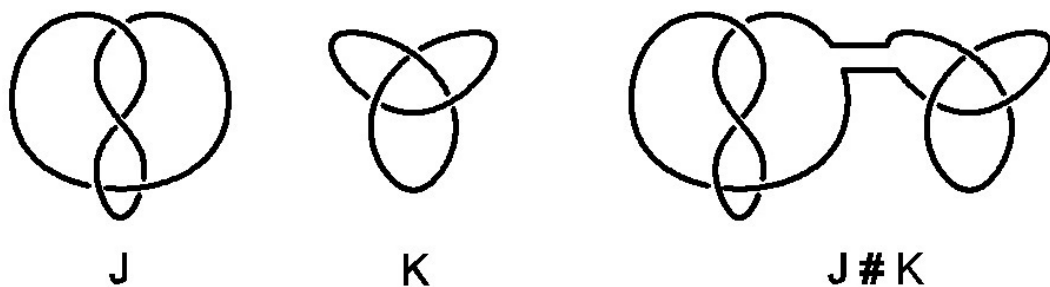


Abbildung 2.11: $J\#K$

Definition 9. Bei der Zusammensetzung von Knoten können verschiedene Arten von Knoten entstehen:

- *Zusammengesetzter Knoten*, wenn eine Zusammensetzung von nichttrivialen Knoten erzeugt wurde (siehe Abb. 2.11), dabei tragen die Ausgangsknoten den Namen *Faktorknoten*
- *Primknoten*, wenn eine Zusammensetzung mindestens einen trivialen Knoten enthält (siehe Abb. 2.12)

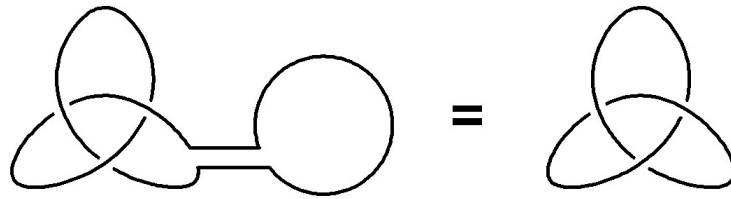


Abbildung 2.12: Primknoten

Beispiele für den Primknoten sind die Kleeblattschlinge (siehe Abb. 2.2) und auch der Achterknoten (siehe Abb. 2.4).

Durch Zusammensetzungen können je nach Wahl der zu entfernenden Bögen verschiedene Knoten entstehen. Um diese genauer zu betrachten, orientiert man die Ausgangsknoten.

Definition 10. *Durch die Richtung, in der der Knoten durchlaufen wird, ist eine Orientierung des Knotens bestimmt. Durch Pfeile entlang des Knotens bzw. der Projektion wird die Orientierung angegeben. Der Knoten wird dann orientiert genannt.*

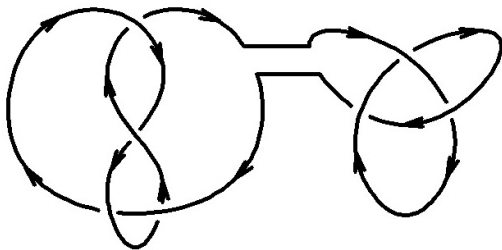


Abbildung 2.13: Zusammenpassende Orientierung

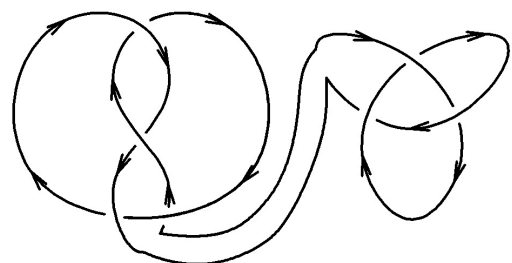


Abbildung 2.14: Entgegengesetzte Orientierung

Werden zwei Knoten mit Orientierung zusammengesetzt, müssen die zu entfernenden Bögen die Eigenschaften von Definition 8 erfüllen sowie eine durchgehende Orientierung haben (siehe Abb. 2.13). Weist die Zusammensetzung entgegengesetzte Orientierungen (siehe Abb.2.14) auf, muss die Wahl der entfernten Bögen neu überdacht werden.

2.2 Reidemeister-Bewegungen

Reidemeister-Bewegungen modifizieren die Art der Kreuzungen in einer regulären Knotenprojektion und somit das Bild des Knotens. Jedoch wird der Knoten nur in einen äquivalenten Knoten transformiert. Durch wiederholtes Anwenden der Reidemeister-Bewegungen kann die Äquivalenz von Projektionen bestimmt werden. Die Ermittlung der Anzahl der Reidemeister-Bewegungen, die erforderlich sind, um zwei Knotenprojektionen eines Knotens ineinander überzuführen, ist eine Herausforderung.

Definition 11. Für gegebene Knotenprojektionen gibt es drei Reidemeister-Bewegungen:

Ω_1 Eine Schlaufe hinzufügen oder entfernen, wie in Abb. 2.15 und Abb. 2.16 dargestellt

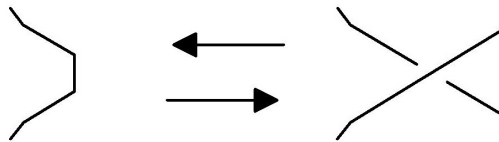


Abbildung 2.15: Ω_1

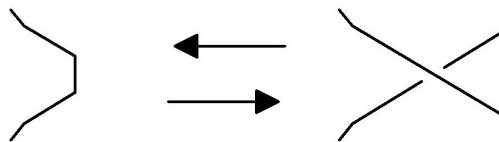


Abbildung 2.16: Ω_1

Ω_2 Zwei Kreuzungen hinzufügen oder entfernen, wie in Abb. 2.17 und Abb. 2.18 dargestellt

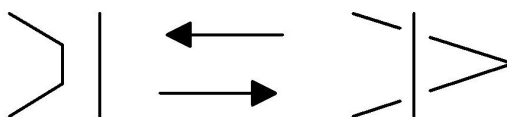


Abbildung 2.17: Ω_2

2 Knotentheorie

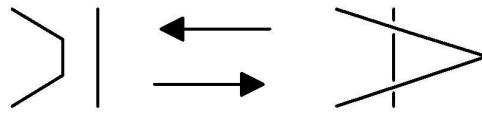


Abbildung 2.18: Ω_2

Ω_3 Einen Strang von einer Seite der Kreuzung auf die andere legen, wie in Abb. 2.19, Abb. 2.20 und Abb. 2.21 dargestellt

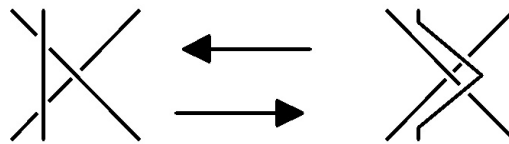


Abbildung 2.19: Ω_3

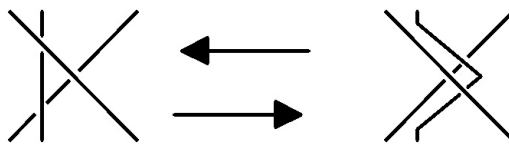


Abbildung 2.20: Ω_3

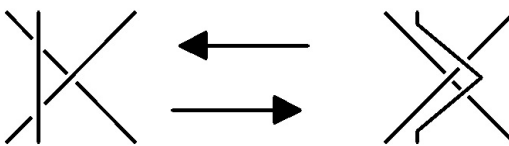


Abbildung 2.21: Ω_3

Bemerkung 0.7. Die Reidemeister-Bewegungen zeigen die Anwendung geeigneter Änderungen der Projektionsrichtung auf die Knotendiagramme äquivalenter Knoten.

Ω_2 stellt in Abb. 2.7 den Übergang von Projektionsrichtung p_2 auf p_1 dar, Ω_1 den von p_1 auf p_2 . Die Reidemeister-Bewegung Ω_3 erfordert komplexere Knoten in \mathbb{R}^3 und findet sich daher in Abb. 2.7 nicht.

2 Knotentheorie

Laut [3] gilt der folgende Satz:

Satz 1. Gegeben sei ein Knoten K als geschlossenes Polygon und zwei reguläre Projektionen $p_1(K)$, $p_2(K)$. Durch mehrmaliges Anwenden der Reidemeister-Bewegungen geht $p_1(K)$ in $p_2(K)$ über.

Beweis: Eine reguläre Projektion $p_1(K)$, die man stetig in eine andere $p_2(K)$ bewegt, wird dabei nur auf endlich viele nicht-reguläre stoßen. Solange nur reguläre Projektionen aufeinanderfolgen, ändern sich die Knotenprojektionen nur um elementare Bewegungen Ω_0 .

Geht eine reguläre jedoch in eine nicht-reguläre über, wird eine Reidemeister-Bewegung durchgeführt. Eine nicht-reguläre Projektion verletzt eine der Bedingungen von Definition 4. Beim Überschreiten dieser Projektion wird eine Reidemeister-Bewegung vom Typ Ω_2 , bei Bedingung 2 oder 3, oder Ω_3 , bei Bedingung 1, ausgeführt.

Projektion mit Sehstrahl $\vec{s}_1 \rightarrow p_1(K)$ und $\vec{s}_2 \rightarrow p_2(K)$ (siehe Abb. 2.22).

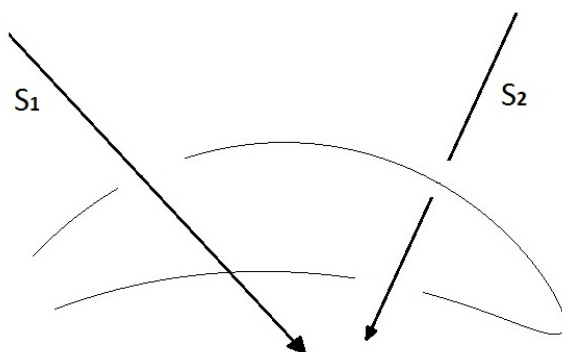


Abbildung 2.22: Sehstrahlen

Fall 1: Richtkegel $\in C^1$ für Projektionsrichtung mit Erzeugenden $\vec{e}(t) : \vec{e}(t_a) := \vec{s}_1$ und $\vec{e}(t_e) := \vec{s}_2$. Daraus folgt Ω_1 oder sogar topologische Äquivalenz in π .



2 Knotentheorie

Fall 2: Start bei t_a : $\vec{e}(t_a) := \vec{s}_1 \rightarrow p_1(K)$. t schreitet voran, bis die erste nicht-reguläre Projektionsrichtung $\vec{e}(t_1)$ erreicht wird.

a) Es gibt einen Tripelpunkt. Betrachtet man die Umgebung $\vec{e}(t_1 \pm \nabla t)$ erkennt man, dass bei der Überschreitung eine Reidemeister -Bewegung Ω_3 ausgeführt wird.

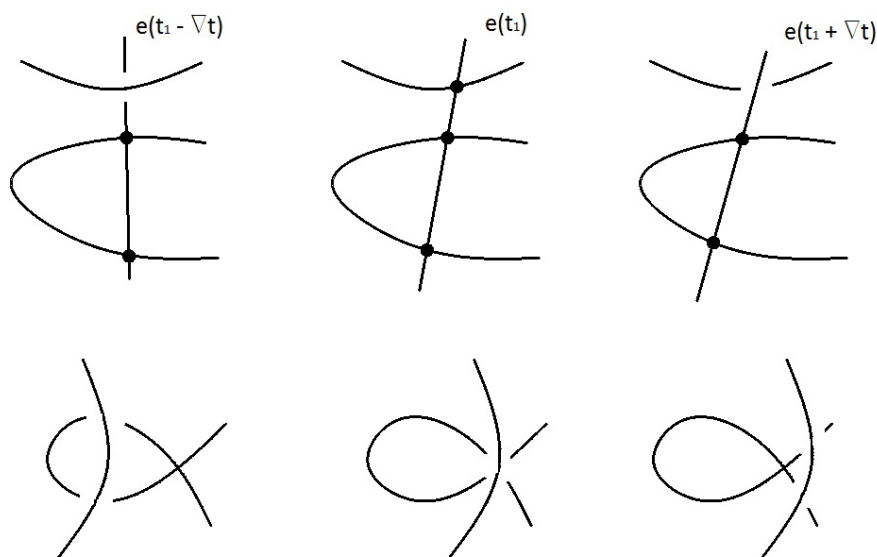


Abbildung 2.23: Auflösung des Tripelpunktes

b) Es gibt ein Teilstück doppelt $\rightarrow \Omega_2$

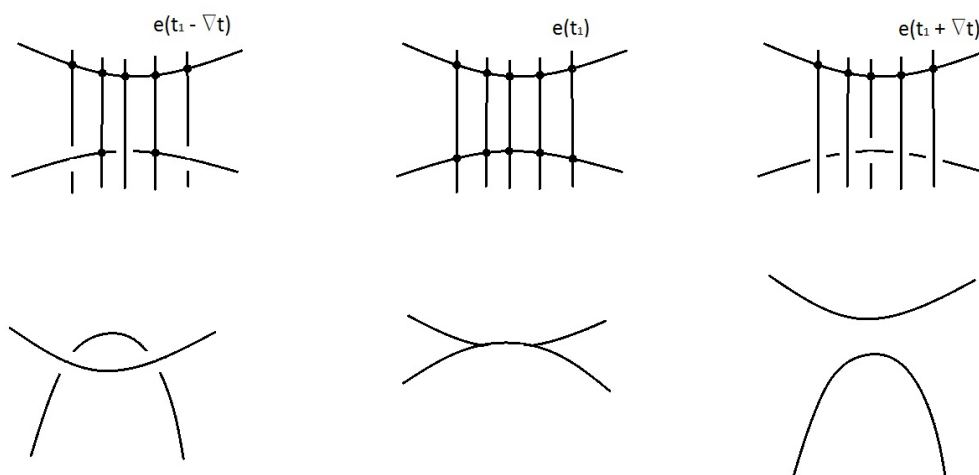


Abbildung 2.24: Auflösung des doppelten Teilstücks

c) Polygone $\rightarrow \Omega_2$

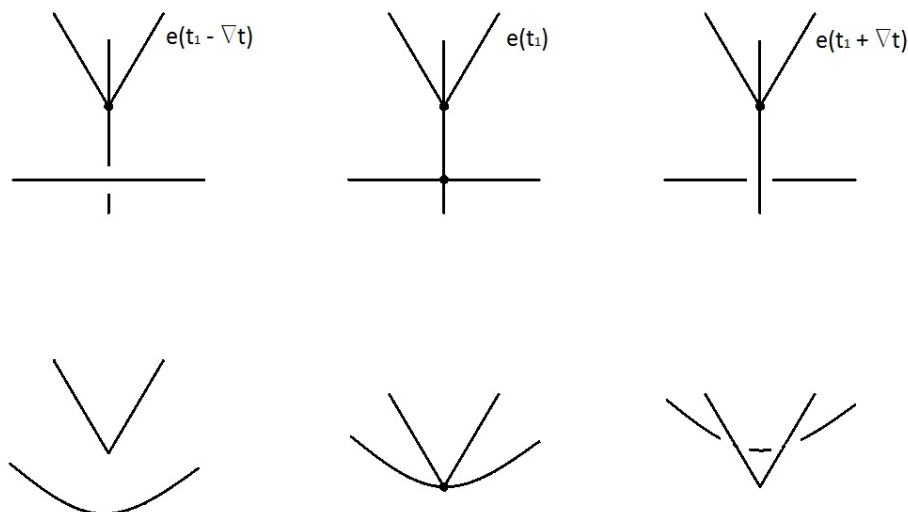


Abbildung 2.25: Auflösung der Polygone

d) Von t_1 weiter bis zur nächsten regulären Projektionsrichtung: Iterieren

□

Satz 2. Zwei Knoten K_1 und K_2 sind genau dann äquivalent, wenn jedes Paar regulärer Projektionen $(p_1(K_1), p_2(K_2))$ durch Reidemeister-Bewegungen ineinander übergeführt werden kann.

Beweis: „ \Rightarrow “: Geg.: Zwei äquivalente Knoten K_1 und K_2

Dann gilt nach Satz 1, dass $p_1(K_1)$ und $p_2(K_2)$ durch Reidemeister-Bewegungen ineinander übergehen. „ \Leftarrow “: Geg.: $p_1(K_1)$ und $p_2(K_2)$, die durch Reidemeister-Bewegungen ineinander übergehen.

Der Beweis, dass damit bereits die zugehörigen Knoten äquivalent sind, benötigt sorgfältige Fallunterscheidungen und Überlegungen, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. Ein Beweis findet sich in [1] auf Seite 27 und in [2] auf Seite 8.

□

2.3 Verschlingungen

Bis zu diesem Zeitpunkt wurden nur einzelne Knoten des \mathbb{R}^3 betrachtet. Es sollten jedoch auch Verknüpfungen von Knoten nicht außer Acht gelassen werden, wodurch eine Verallgemeinerung entsteht.

Definition 12. *Eine Verschlingung ist eine endliche, geordnete Anzahl von Knoten des \mathbb{R}^3 , die sich nicht schneiden (siehe Abb. 2.26). Teilknoten heißen Komponenten.*

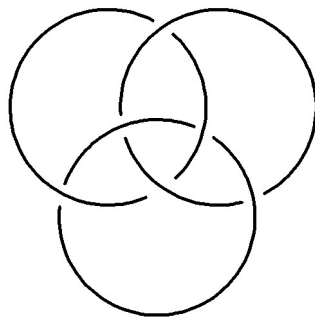


Abbildung 2.26: Borromäische Ringe als Beispiel einer Verschlingung

Definition 13. *Zwei Verschlingungen heißen äquivalent, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) *Die Anzahl der Komponenten ist ident.*
- (2) *Durch Anwendung einer endlichen Anzahl von elementaren Bewegungen werden die Komponenten der einen Verschlingung einzeln in die der anderen übergeführt.*

Definition 14. *Verschlingungen aus zwei miteinander verknoteten Schnüren werden als Verschlingung mit zwei Komponenten bezeichnet (siehe Abb.2.27).*

Eine einfache Verschlingung mit zwei Komponenten ist die *Whitehead-Verschlingung* (siehe Abb. 2.27).

Definition 15. *Verschlingungen werden als zerlegbar bezeichnet, wenn die Komponenten so beweglich sind, dass sie getrennt voneinander auftreten können.*

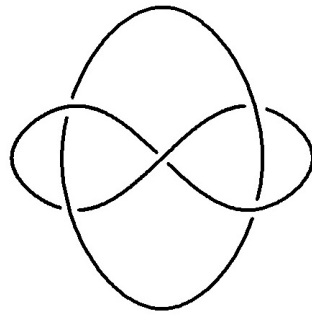


Abbildung 2.27: Whitehead-Verzählung

Als Vergleich kann die in Abb. 2.28 gezeigte *Nichtverschlingung* oder *triviale Verschlingung* und die Hopf-Verzählung (siehe Abb. 2.29), die verschlungen ist, hergenommen werden. Diese besitzen jeweils zwei Komponenten. Erstere ist zerlegbar, die zweite nicht.

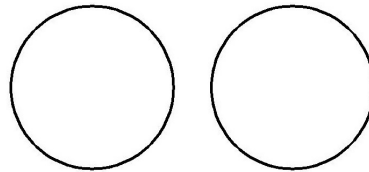


Abbildung 2.28: Nichtverschlingung

Bei der Feststellung, ob zwei Verschlingungen verschieden sind, gibt es noch einen weiteren Weg. Dieser ist schneller, jedoch nicht immer eindeutig. Dafür zählt man die jeweiligen Komponenten ab und vergleicht ihre Anzahl. Sind diese verschieden, kann man dies auch von den Verschlingungen sagen. Sind sie jedoch gleich, muss ein weiteres System eingebunden werden, um sie zu unterscheiden. Dazu verwendet man die Bestimmung der Art der Verschlingung zweier Komponenten.

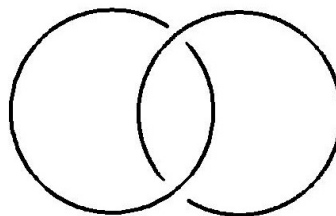


Abbildung 2.29: Hopf-Verzählung

2 Knotentheorie

Definition 16. Sei eine Verschlingung mit zwei Komponenten K_1 und K_2 und deren Projektion $p(K_1)$ und $p(K_2)$ gegeben. Für die Orientierung der Verschlingung wählt man Richtungen, in welcher die Projektionen durchlaufen werden sollen. Die Orientierung wird mit Pfeilen angegeben. Wir blicken nun auf jede Kreuzung von $p(K_1)$ mit $p(K_2)$ und drehen die unten liegende orientierte Tangente im Kreuzungspunkt in die orientierte oben liegende Tangente um einen Winkel $-\pi < \beta < \pi$. Für $\beta < 0$ erhält die Kreuzung den Wert -1 , für $\beta > 0$ erhält die Kreuzung den Wert $+1$.



Bemerkung 2.1. Der Wert ist $+1$, wenn die beschriebene Drehung mathematisch positiv erfolgt, andernfalls -1 .

Es ist für diese Definition egal, ob an dieser Kreuzung K_1 über oder unter K_2 liegt.

Definition 17. Die Verschlingungszahl $Lk(p(K_1), p(K_2))$ zweier gegebener orientierter Komponenten K_1 und K_2 einer Verschlingung ergibt sich aus der Summe der nach Def. 16 ermittelten Werte $+1$ und -1 der Kreuzungen von $p(K_1)$ mit $p(K_2)$, die durch 2 dividiert wird. Dabei werden keine Kreuzungen einer Komponente mit sich selbst gezählt (siehe Abb. 2.30 und Abb. 2.31).

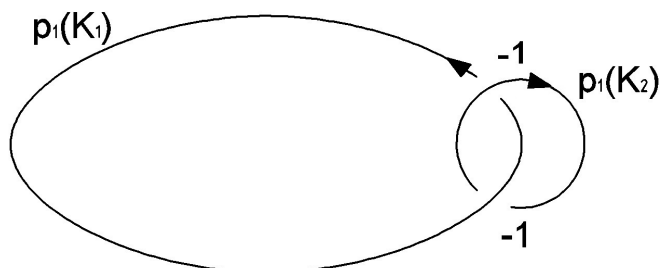


Abbildung 2.30: $Lk(p_1(K_1), p_1(K_2)) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$

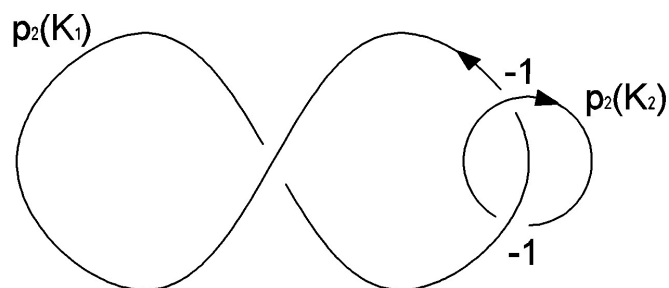


Abbildung 2.31: $Lk(p_2(K_1), p_2(K_2)) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$ ist die selbe Verschlingung wie in Abb. 2.30

Bemerkung 2.2. Durch die Verschlingungszahl wird die Stärke der Verschlingung zweier Komponenten angegeben.

Satz 3. Die Verschlingungszahl ist invariant bezüglich der orientierten Verschlingung.

Beweis: Zu zeigen ist die Invarianz der Verschlingungszahl bezüglich der Reidemeister-Bewegungen.

Die Reidemeister-Bewegung Ω_1 entfernt oder fügt eine Schlaufe einer Komponente, K_1 oder K_2 hinzu. Dadurch ändert sich nach Def. 17 die Verschlingungszahl jedoch nicht (siehe Abb. 2.30 und Abb. 2.31).

Die Reidemeister-Bewegung Ω_2 entfernt oder fügt zwei Kreuzungen hinzu. Dies hat nur dann Auswirkungen auf die Verschlingungszahl, wenn die beiden Polygonzüge Bestandteil verschiedenen Komponenten K_1 und K_2 sind, wie in Abb. 2.32 gezeigt. Die neu entstandenen Kreuzungen auf $p(K_1)$ und $p(K_2)$ besitzen entgegengesetzte Vorzeichen, wodurch sich die Verschlingungszahl wieder nicht ändert.

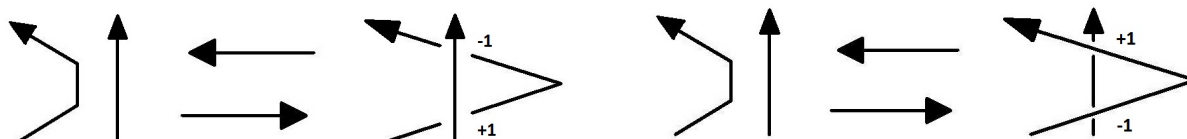


Abbildung 2.32: Werte der Kreuzungen durch die Reidemeister-Bewegung Ω_2

Die Reidemeister-Bewegung Ω_3 verändert die Anzahl der Kreuzungen von $p(K_1)$ und $p(K_2)$ nicht, sie legt einen Strang des Polygonzugs auf die andere Seite der Kreuzung.

Auch hier muss ein Polygonzug $p(K_1)$ und die anderen Polygonzüge der Komponente $p(K_2)$ angehören, damit sich an der Verschlingungszahl etwas ändern könnte (siehe Abb. 2.33). Durch die Verschiebung der Kreuzungen ändert sich die Anzahl der $+1$ und -1 aber nicht und somit auch nicht die Verschlingungszahl.

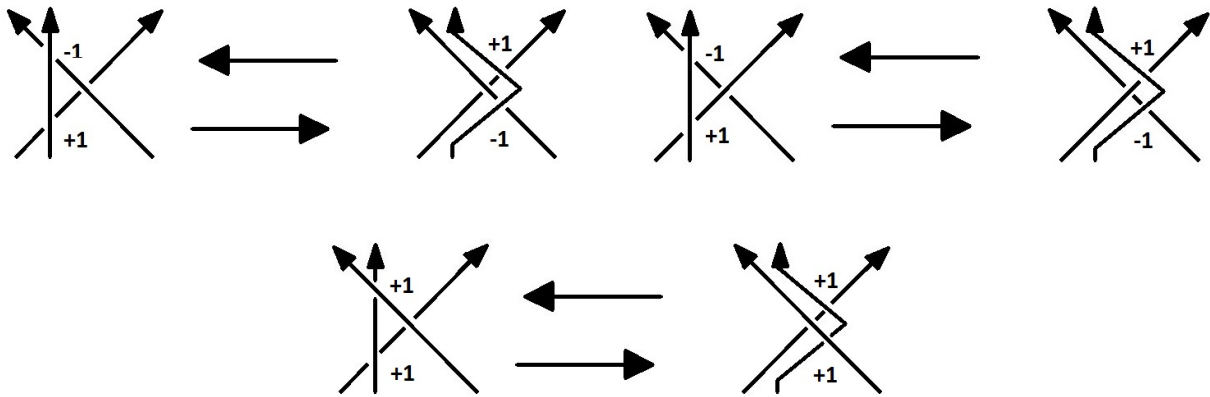


Abbildung 2.33: Werte der Kreuzungen durch die Reidemeister-Bewegung Ω_3

□

Bemerkung 3.1. Daher wird üblicherweise statt $Lk(p(K_1), p(K_2))$ auch $Lk(K_1, K_2)$ als Bezeichnung für die Verschlingungszahl verwendet.

2.4 Jones-Polynom

In diesem Kapitel wird jedem Knoten ein Polynom aufgrund seiner Knotenprojektion zugewiesen. Dies ist eine der erfolgreichsten Methoden in der Knotentheorie zur Bestimmung der Äquivalenz von Knoten.

2.4.1 Klammer-Polynom

Zuerst betrachten wir das sogenannte Klammer-Polynom.

Als Notation für das Polynom eines Knotens K wird $\langle K \rangle$ verwendet.

Definition 18. Das Klammer-Polynom entsteht nach folgenden Regeln:

Wir zeichnen in der Projektion eine Richtung als waagrecht an.

Regel 1: Der triviale Knoten hat das Polynom 1.

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

Regel 2: In einer Projektion werden durch elementare Bewegungen die Tangenten in Kreuzungen unter $+45$ bzw. -45 Grad gegen die waagrechte Richtung geneigt. Diese werden, je nach Lage der Tangenten, vertikal oder horizontal aufgespalten, dadurch erhält man zwei neue Projektionen, die eine Kreuzung weniger haben. Dabei wird das Klammer-Polynom als eine Linearkombination mit den Koeffizienten $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und A^{-1} definiert.

$$\langle \diagdown \rangle = A \langle \diagup \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle$$

$$\langle \times \rangle = A \langle \diagdown \rangle + A^{-1} \langle \diagup \rangle$$

Regel 3: Für die Zusammensetzung eines Knotens mit einem Unknoten gelte

$$\langle K \# \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle K \rangle$$

Bemerkung 3.2. Das Klammer-Polynom wird daher iterativ beim Zerlegen des Knotens berechnet.

Beispiel: Hopf-Verschlingung

Mit Hilfe der Regeln aus Definition 18 kann man das Klammer-Polynom der Hopf-Verschlingung bestimmen. Die Zerlegung des Knotens erfolgt wie in Abb. 2.34 gezeigt.

$$\begin{aligned} \langle \text{Hopf - Verschlingung} \rangle &= A[A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}(1)] + A^{-1}[A(1) + \\ &\quad + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})] \qquad \qquad \qquad (2.4.1) \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

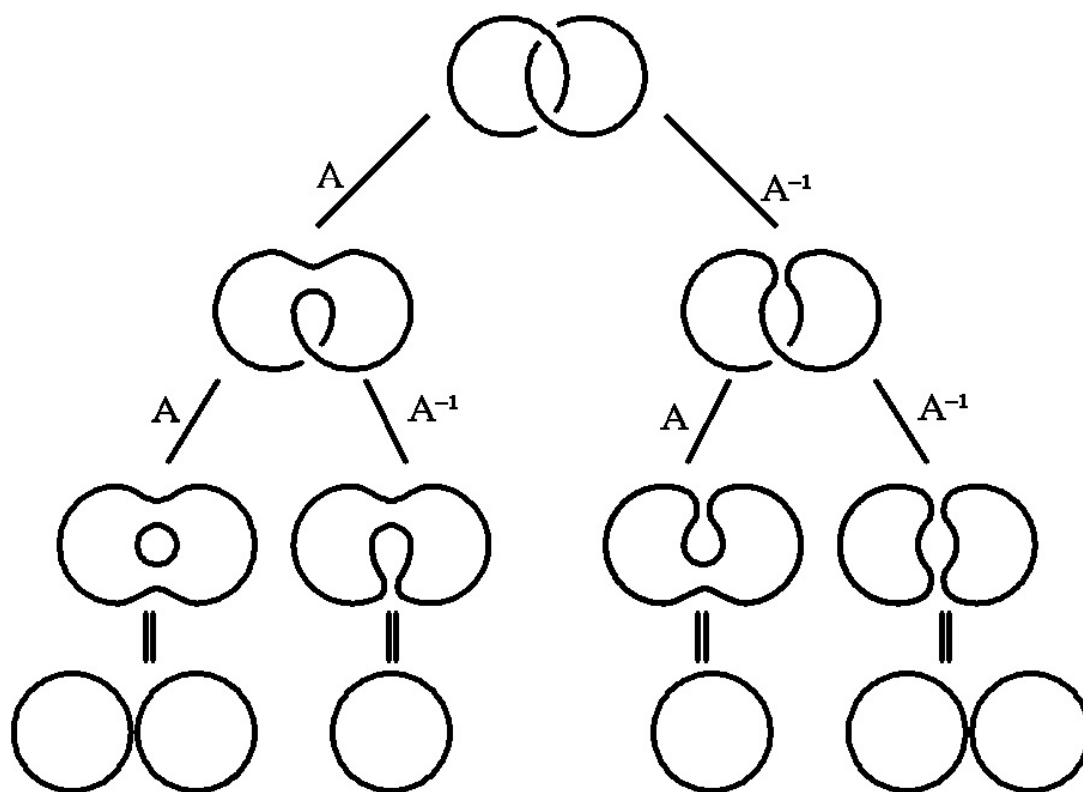


Abbildung 2.34: Zerlegung Hopf-Verschlingung

Satz 4. Das Klammer-Polynom ist eine Invariante der Knoten bezüglich der Reidemeister-Bewegungen Ω_2 und Ω_3 .

Beweis: Zu zeigen ist, dass das Klammer-Polynom bei den Reidemeister-Bewegungen Ω_2 und Ω_3 invariant bleibt.

Dazu beginnt man mit der Reidemeister-Bewegung Ω_2 :

$$\begin{aligned}
 \langle \overbrace{\text{X}} \rangle &= A \langle \underbrace{\text{X}} \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle \\
 &= A(A \langle \underbrace{\text{X}} \rangle + A^{-1} \langle \overbrace{\text{X}} \rangle) + A^{-1}(A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \underbrace{\text{X}} \rangle) \\
 &= A(A \langle \underbrace{\text{X}} \rangle + A^{-1}((-A^2 - A^{-2}) \langle \underbrace{\text{X}} \rangle)) + A^{-1}(A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \underbrace{\text{X}} \rangle) \\
 &= (A^2 + AA^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + (A^{-1})^2) \langle \underbrace{\text{X}} \rangle + A^{-1}A \langle \rangle \langle \rangle \\
 &= \langle \rangle \langle \rangle
 \end{aligned}$$

Damit ändert sich das Klammer-Polynom bei der Reidemeister-Bewegung Ω_2 nicht.

2 Knotentheorie

Die Invarianz gegenüber der Reidemeister-Bewegung Ω_3 ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\ &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle = \langle \text{X} \rangle \end{aligned}$$

Damit ändert sich das Klammer-Polynom bei der Reidemeister-Bewegung Ω_3 nicht. □

Bei der Reidemeister-Bewegung Ω_1 ändert sich das Polynom (siehe Abb. 2.35):

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\ &= A(-A^2 - A^{-2}) \langle - \rangle + A^{-1} \langle - \rangle \\ &= -A^3 \langle - \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\ &= A \langle - \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle - \rangle \\ &= -A^{-3} \langle - \rangle \end{aligned}$$

Abbildung 2.35: Reidemeister-Bewegung Ω_1 bei dem Klammer-Polynom

Knotenteile X sind äquivalent zu geradlinigen Knotenteilen. Es ist daher $\langle - \rangle = \langle \text{X} \rangle$.

Das Klammer-Polynom ist daher gegenüber der Reidemeister-Bewegung Ω_1 nicht invariant.

Um Abhilfe bei dem Problem mit der Invarianz der Reidemeister-Bewegung Ω_1 zu schaffen, wird dem Knoten analog zu Definition 16 eine Orientierung aufgeprägt. Überkreuzungen werden dabei mit $+1$ und -1 wie in Abb. 2.36 gekennzeichnet.



Abbildung 2.36: Wert der Kreuzung

Definition 19. Die Windungszahl $\omega(p(K))$ der orientierten Projektion eines Knotens ergibt sich aus der Summe aller $+1$ und -1 aller Kreuzungen.

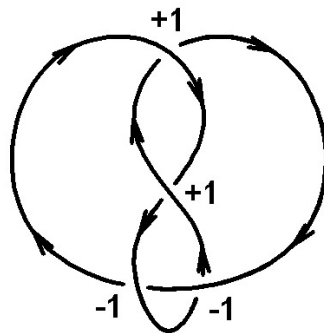


Abbildung 2.37: Windungszahl $\omega(p(K)) = +2 - 2 = 0$

Satz 5. Die Windungszahl bleibt bei den Reidemeister-Bewegungen Ω_2 und Ω_3 invariant. Die Bewegung Ω_1 ändert jedoch die Windungszahl um den Wert $+1$ oder -1 .

Beweis:

Teil 1: Die Invarianz der Windungszahl gegenüber Ω_2 und Ω_3 folgt aus der Definition der Reidemeister-Bewegungen.

Die Reidemeister-Bewegung Ω_2 entfernt oder fügt zwei Kreuzungen der orientierten Projektion eines Knotens hinzu. Die neu entstandenen Kreuzungen der orientierten Projektion besitzen entgegengesetzte Vorzeichen (siehe Abb. 2.38), wodurch sich die Windungszahl $\omega(p(K))$ der orientierten Projektion eines Knotens nicht ändert.

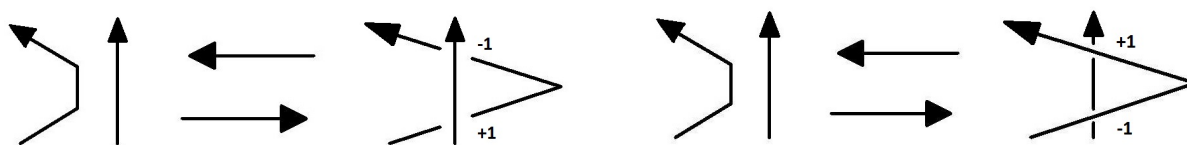


Abbildung 2.38: Werte der Kreuzungen durch die Reidemeister-Bewegung Ω_2

Die Reidemeister-Bewegung Ω_3 verändert die Anzahl der Kreuzungen von der orientierten Projektion eines Knotens nicht, sie legt einen Strang des Polygonzugs auf die andere Seite der Kreuzung. Durch die Verschiebung der Kreuzungen der orientierten Projektion ändert sich die Anzahl der $+1$ und -1 aber nicht und somit auch nicht die Windungszahl $\omega(p(K))$ (siehe Abb. 2.39).

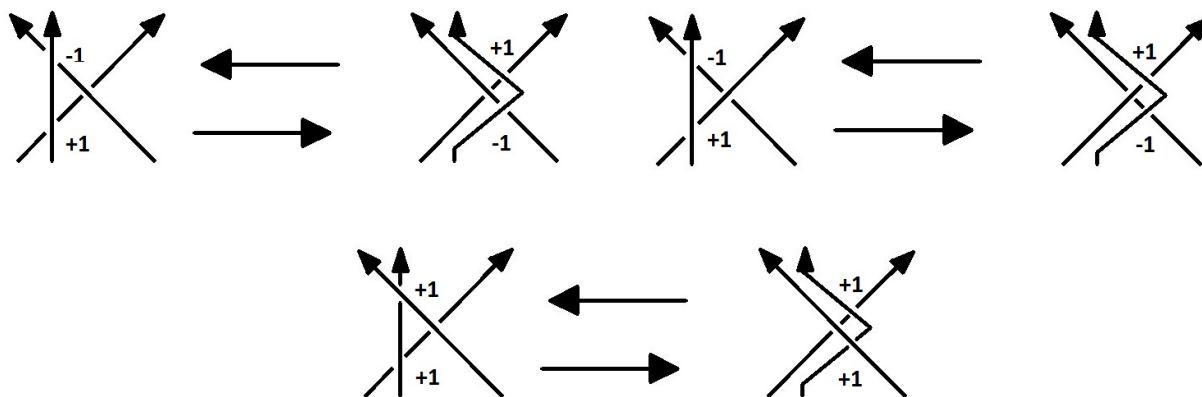


Abbildung 2.39: Werte der Kreuzungen durch die Reidemeister-Bewegung Ω_3

Teil 2: Die Windungszahl wird um den Wert $+1$ oder -1 durch die Reidemeister-Bewegung Ω_1 geändert, da sie eine Schlaufe der orientierten Projektion eines Knotens hinzufügt oder entfernt. Dazu betrachten wir die Abb. 2.40.



Abbildung 2.40: Werte der Kreuzungen durch die Reidemeister-Bewegung Ω_1

□

2 Knotentheorie

Das X -Polynom von orientierten Knotenprojektionen wird wie folgt definiert:

Definition 20. X -Polynom einer Knotenprojektion ist folgendes Polynom in A :

$$X(p(K)) := (-A^3)^{-\omega(p(K))} \langle p(K) \rangle$$

Satz 6. Das X -Polynom $X(p(K))$ ist eine Invariante von orientierten Knoten.

Beweis: Die Windungszahl und $\langle p(K) \rangle$ werden durch Ω_2 und Ω_3 nicht beeinflusst, daher auch nicht $X(p(K))$.

Nun ist noch zu zeigen, dass das X -Polynom bei Ω_1 unverändert bleibt. Angenommen $p_2(\widehat{K})$ ist wie in Abb.2.41 gegeben und entsteht durch die Reidemeister-Bewegung Ω_1 aus $p_1(K)$. Dann folgt daraus, dass $\omega(p_2(\widehat{K})) = \omega(p_1(K)) \pm 1$ und somit

$$\begin{aligned} X(p_2(\widehat{K})) &= (-A^3)^{-\omega(p_2(\widehat{K}))} \langle p_2(\widehat{K}) \rangle \\ &= (-A^3)^{-\omega(p_1(K) \pm 1)} \langle p_2(\widehat{K}) \rangle \\ &= (-A^3)^{-\omega(p_1(K) \mp 1} ((-A^3)^{\pm 1} \langle p_1(K) \rangle) \\ &= (-A^3)^{-\omega(p_1(K))} \langle p_1(K) \rangle = X(p_1(K)) \end{aligned}$$

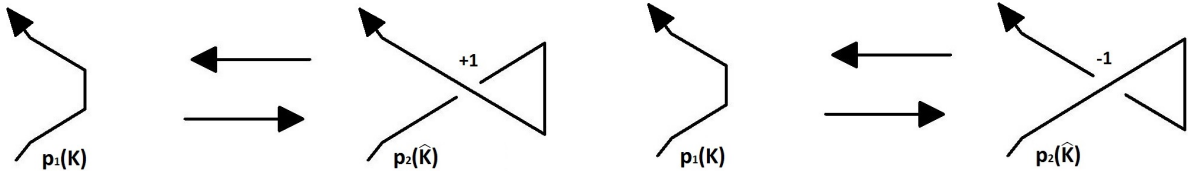


Abbildung 2.41: $p_2(\widehat{K})$, das durch die Reidemeister-Bewegung Ω_1 aus $p_1(K)$ entsteht

Damit ändert sich das X -Polynom bei der Reidemeister-Bewegung Ω_1 nicht. □

Damit ist das X -Polynom gegenüber den Reidemeister-Bewegungen mit dem Knoten invariant verbunden und stellt daher eine Invariante des Knotens K und der Projektion $p(K)$ dar. Daher schreibt man ab jetzt auch $X(K)$.

Definition 21. Durch Ersatz der Variablen A mit $t^{-1/4}$ ($t \in \mathbb{R}$) in $X(K)$ erhält man das Jones-Polynom $V(K)$.

Bemerkung 6.1. Dieses Jones-Polynom ist gegenüber Reidemeister-Bewegungen invariant mit K verbunden und daher eine Invariante äquivalenter Knoten. Trotzdem reicht die Übereinstimmung der Jones-Polynome zweier Knoten noch nicht aus, um die Äquivalenz der Knoten zu erzwingen (siehe [4], Seite 227).

2.4.2 Beispiele für das Jones-Polynom anhand bekannter Knoten

1. **Unknoten:** Die Windungszahl $\omega(p(K))$ des Unknotens ist gleich 0. Aus der Definition 18 folgt, dass $\langle O \rangle = 1$. Daher kann das Polynom angeschrieben werden als:

$$X(K) = (-A^3)^0(1)$$

$$V(K) = (-t^{-\frac{3}{4}})^0 = 1$$

2. **Hopf-Verschlingung:** Die Windungszahl $\omega(p(K))$ ist laut Abb. 2.42 gleich 2. Mit Hilfe der Regeln aus Definition 18 und dem zugehörigen Beispiel (siehe Abb. 2.34) kann man zuerst das X-Polynom bestimmen.

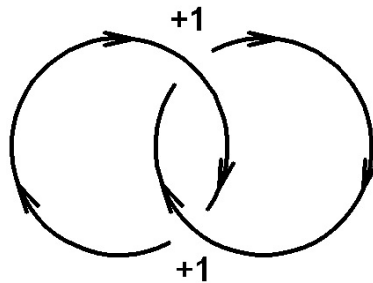


Abbildung 2.42: Hopf-Verschlingung mit Orientierung

$$\langle \text{Hopf} - \text{Verschlingung} \rangle = -A^4 - A^{-4} \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} X(K) &= (-A^3)^{-2} \langle \text{Hopf} - \text{Verschlingung} \rangle = (-A^3)^{-2} (-A^4 - A^{-4}) \\ &= A^{-2} + A^{-10} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$V(K) = t^{\frac{2}{4}} + t^{\frac{10}{4}} = t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}}$$

3. **rechter Kleeblattknoten:** Die Windungszahl $\omega(p(K))$ ist laut Abb. 2.43 gleich 3. Mit Hilfe der Regeln aus Definition 18 kann man zuerst das X-Polynom bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Kleeblattknoten} \rangle &= A[A[A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}(1)] + A^{-1}[A(1) + A^{-1}(-A^2 - \\
 &\quad - A^{-2})]] + A^{-1}[A[A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})] + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \\
 &\quad \cdot [A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})]] \\
 &= A[-A^4 - A^{-4}] + A^{-1}[A(-A^{-3}) + (-A - A^{-3})(-A^{-3})] \\
 &= -A^5 - A^{-3} + A^{-1}[A^{-6}] \\
 &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.4}$$

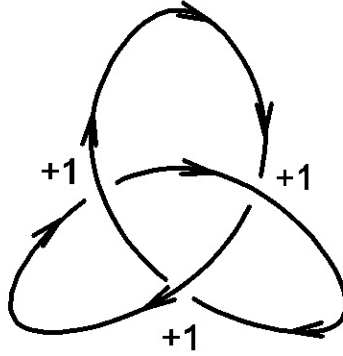


Abbildung 2.43: Rechter Kleeblattknoten mit Orientierung

$$\begin{aligned}
 X(K) &= (-A^3)^{-3} \langle \text{Kleeblattknoten} \rangle = (-A^3)^{-3} (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \\
 &= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.5}$$

$$V(K) = t^{\frac{4}{4}} + t^{\frac{12}{4}} - t^{\frac{16}{4}} = t + t^3 - t^4$$

Bei der Zerlegung des Kleeblattknotens ist auf der linken Seite der Abb. 2.44 zu erkennen, dass diese in die Hopf-Verschlingung übergeht, die in Beispiel 2 gezeigt wurde.

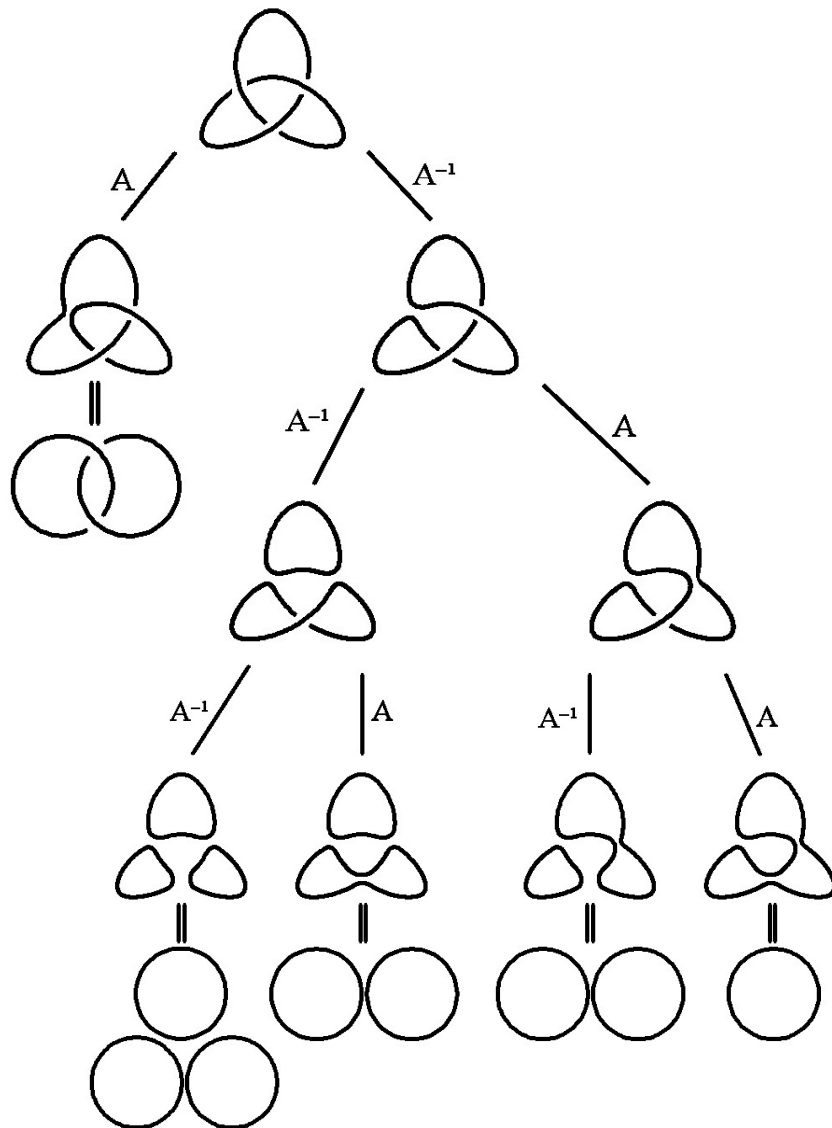


Abbildung 2.44: Zerlegung des rechten Kleeblattknotens

4. **Achterknoten:** Die Windungszahl $\omega(p(K))$ ist laut Abb. 2.37 gleich 0. Mit Hilfe der Regeln aus Definition 18 kann man zuerst das X-Polynom bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Achterknoten} \rangle &= A[A[(-A^2 - A^{-2})(-A^4 - A^{-4})] + \\
 &\quad + A^{-1}[-A^4 - A^{-4}]] + A^{-1}[-A^5 - A^{-3} + A^{-7}] \\
 &= A[A^7 + A^3 + A^{-1} + A^{-5} - A^{-3} - A^{-5}] - A^4 - A^{-4} + A^{-8} \\
 &= A^8 - A^4 - A^{-4} + A^{-8} + 1
 \end{aligned}$$

(2.4.6)

2 Knotentheorie

$$\begin{aligned}
 X(K) &= (-A^3)^{-3} \langle \text{Achterknoten} \rangle = (-A)^0 (A^8 - A^4 - A^{-4} + A^{-8} + 1) \\
 &= A^8 - A^4 - A^{-4} + A^{-8} + 1
 \end{aligned}
 \tag{2.4.7}$$

$$\begin{aligned}
 V(K) &= t^{-\frac{8}{4}} - t^{-\frac{4}{4}} - t^{\frac{4}{4}} + t^{\frac{8}{4}} + 1 \\
 &= t^{-2} - t^{-1} - t + t^2 + 1
 \end{aligned}$$

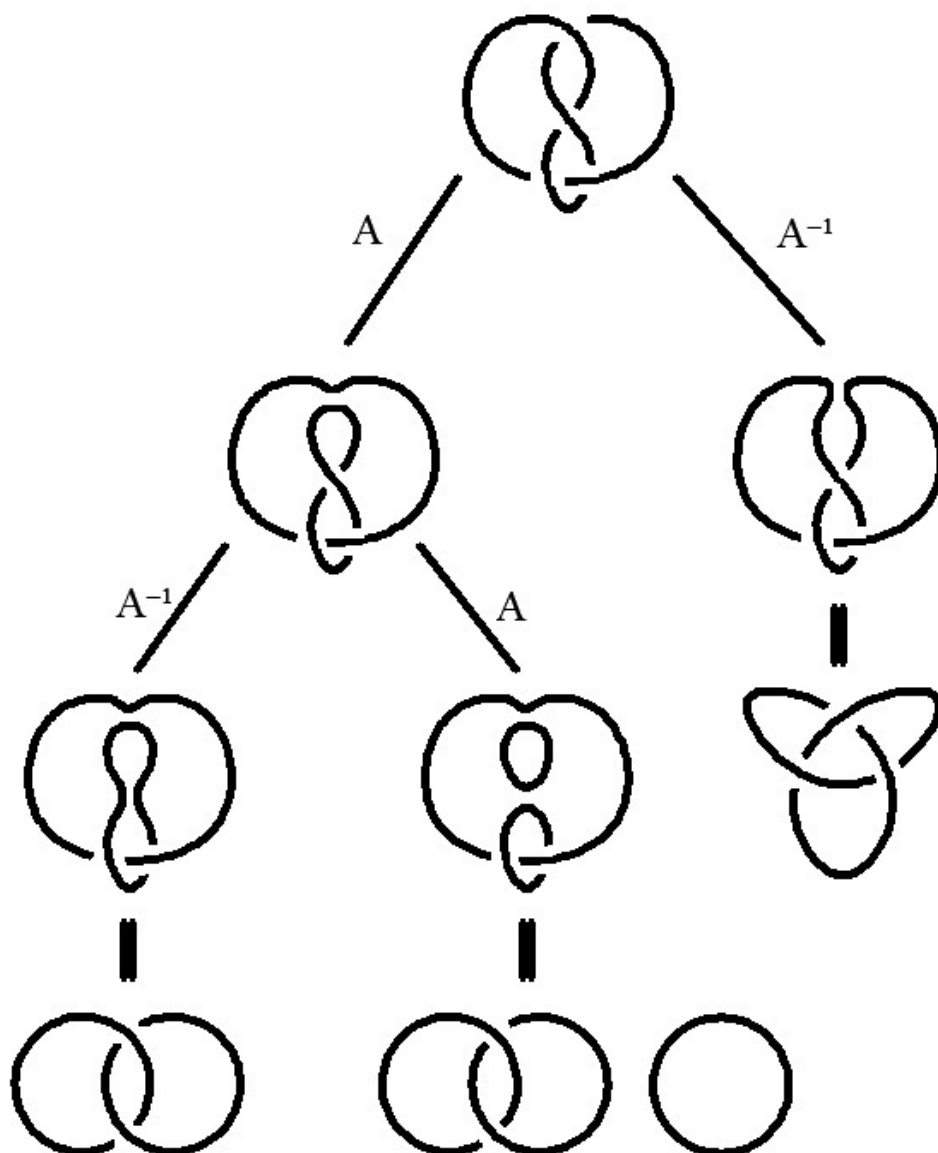


Abbildung 2.45: Zerlegung des Achterknotens

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

In diesem Kapitel wird auf die folgende Frage eingegangen [6]:

Ist es möglich, einen beliebigen räumlichen Knoten durch Kopieren eines kongruenten Elements zu erzeugen?

Als Anreiz für die kongruenten Elemente wurde die Idee von *M. ZAWIDZKI* und *K. NISHINARI* mit Prismenstücken symmetrisch bezüglich des Normalschnitts, deren Geh-rungsschnitte reguläre k -Ecke sind, herangezogen. Dadurch ist die gegenseitige Lage der Teile, deren Kanten zueinander passen und „weiterlaufen“ (siehe Abb. 3.1), sehr vielseitig, da man die Prismenstücke um die Drehachse des regulären k -Ecks verdrehen kann.

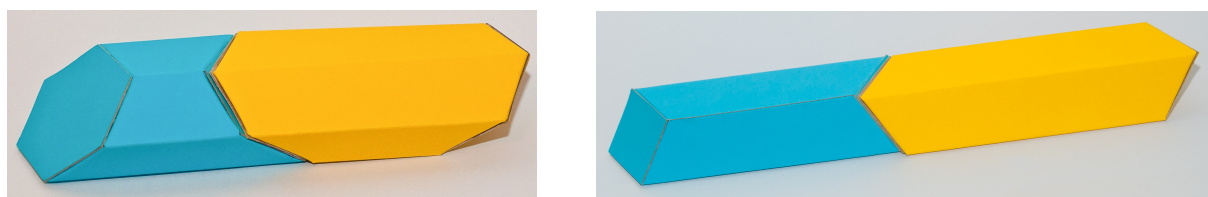


Abbildung 3.1: Kongruente Prismenstücke

Eine weitere Frage, die jedoch auftaucht, ist, ob man die vorgegebenen Knoten mit geeigneter Wahl des Prismenstücks modellieren kann und somit einen geschlossenen Zug erhält.

Um das Ziel zu erreichen, einen Knoten aus kongruenten Prismenstücken zu modellieren und dies universell einzusetzen, wurde der Knoten vorerst mit Kantenzügen auf

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Würfelgittern (siehe Abb. 3.2) realisiert. Dadurch konnte die Schließung der modellierten Knoten garantiert werden. Als Grundlage dafür diente [5].



Abbildung 3.2: Ein Würfelgitter ohne und mit Pfad

3.1 Kanten eines Würfels als Grundlage

Das Prismenstück entsteht durch Extraktion entlang einer Kante des Würfels. Das zugehörige reguläre k -Eck liegt dabei in einer Basisebene, die normal auf die entsprechende Raumdiagonale des Würfels steht (siehe Abb. 3.3).

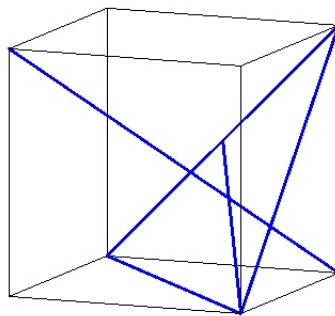


Abbildung 3.3: Ebene orthogonal zur Raumdiagonale

Das k -Eck muss ein $6n$ -Eck ($n \in \mathbb{N}$) sein, da die Raumdiagonale des Würfels 3-zählige Drehachse ist und eine Kante in die andere durch 120 Grad übergehen soll. Das Prisma muss zusätzlich eine Spiegelung gestatten, daher die 6er Symmetrie.

In die Basisebene (siehe Abb. 3.4 für $n = 1$) wird ein $6n$ -Eck platziert und entlang der Kante des Würfels extrudiert.

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

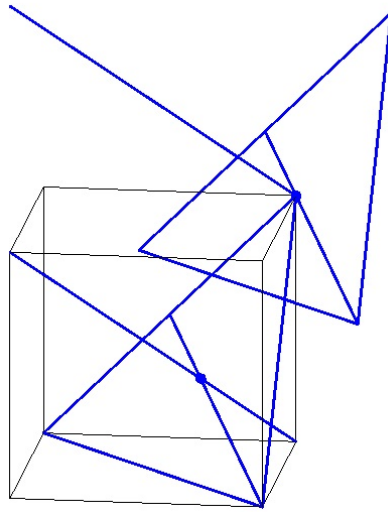


Abbildung 3.4: Lage der Ebene, in der das k -Eck für die Extrusion entlang der Kante liegt

Anschließend wird es an dem Normalschnitt gespiegelt und die Schnittmenge gebildet. Daraus erhält man ein Prismenstück, das zum Baustein werden kann (siehe Abb. 3.5).

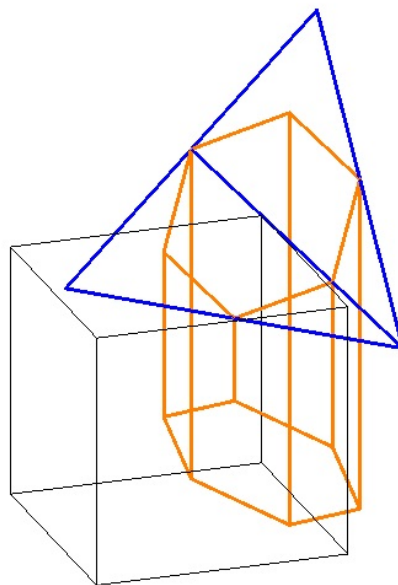


Abbildung 3.5: Prismenstück mit regulärem 6-Eck

Durch die Möglichkeit der Drehung um die Drehachse des regulären 6-Ecks, um je 120 Grad, gibt es für jedes folgende Prismenstück drei Positionen (siehe Abb. 3.6).

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

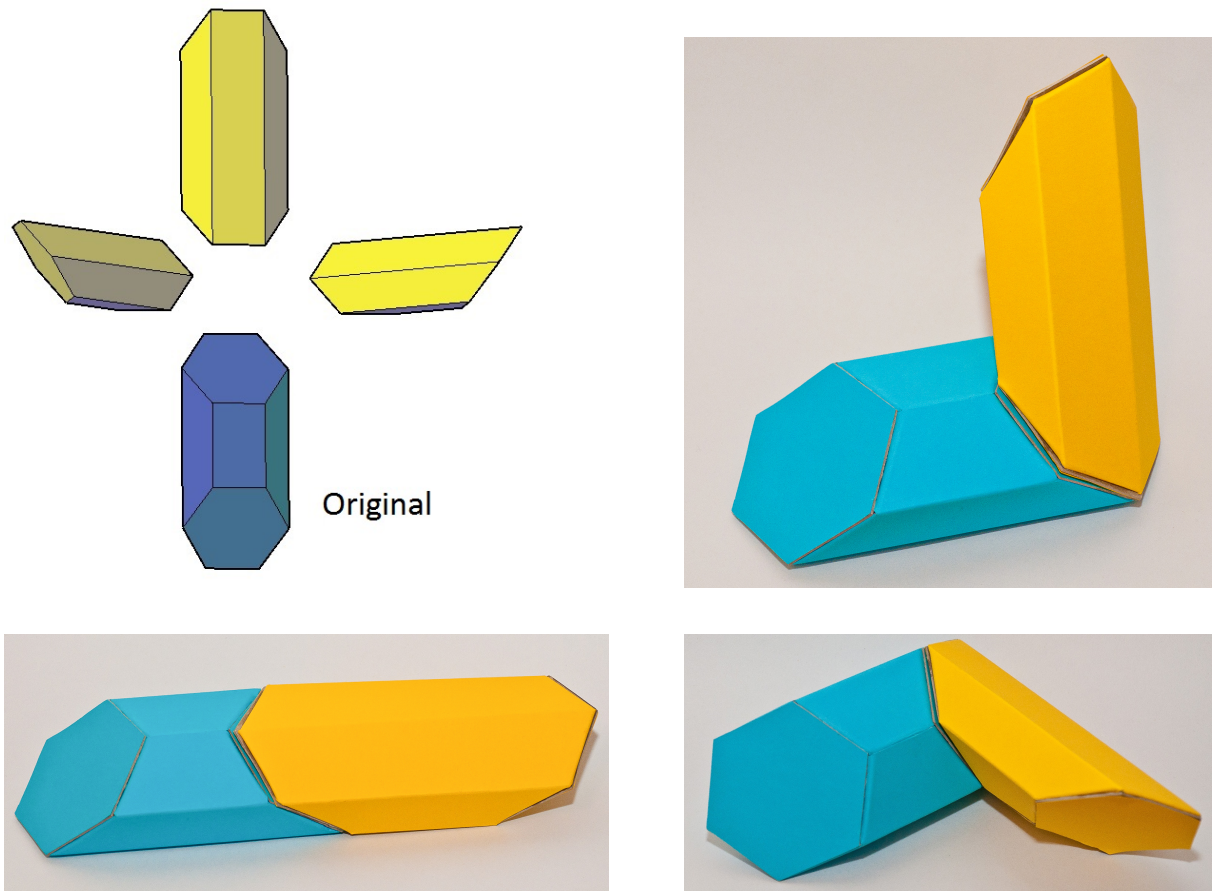


Abbildung 3.6: Explosionszeichnung und Lage der drei Positionen des Prismenstücks am zusammengebauten Modell

Um nun einen Knoten aus diesen kongruenten Prismenstücken zu erzeugen, legt man zuerst den Pfad auf dem Würfelgitter fest (siehe Abb. 3.7).

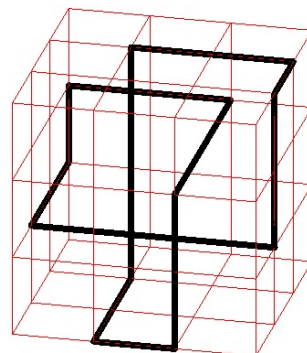


Abbildung 3.7: Die Kleeblattschlinge am Würfelgitter

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Wählt man nun die Lage der Prismen so, dass sie dem Kantenzug auf dem Gitterwürfel folgen, erhält man die Kleeblattschlinge durch die kongruenten Prismenstücke (siehe Abb. 3.8).

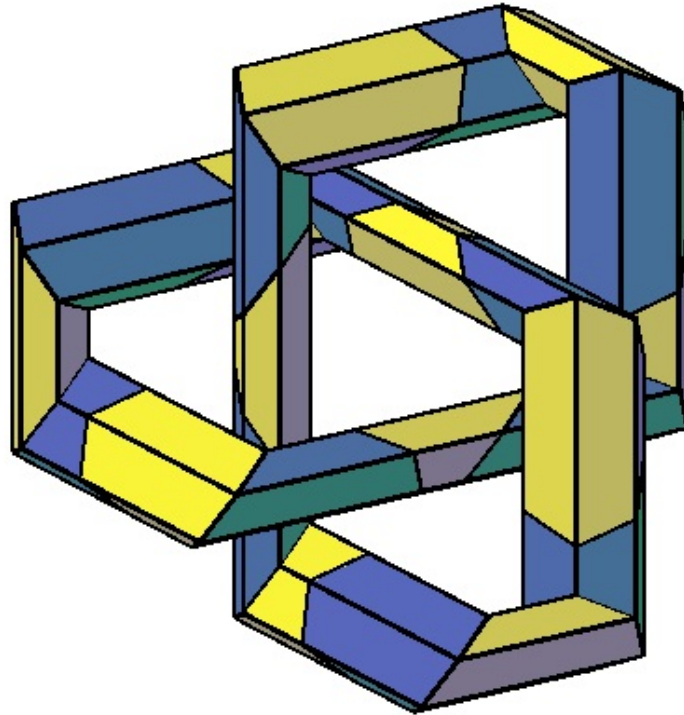


Abbildung 3.8: Modellierte Kleeblattschlinge

Als weiteres Beispiel ist der Knoten in Abb. 3.9 gegeben. Auch in diesem Fall ist das räumliche Modell aus kongruenten Prismenstücken gesucht.

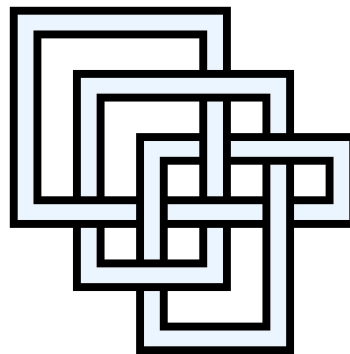


Abbildung 3.9: Knotenprojektion [7]

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Wie im Ablauf davor geschildert, wird ein Pfad erzeugt. Um nicht unnötig zu verwirren, wurde das Würfelgitter in vier Schichten aufgeteilt und verschoben. Diese Verschiebung erfolgt entlang einer Raumdiagonale, die in der Abb. 3.10 durch die grüne Linie markiert ist. Die Auflösung der Kreuzungen aus der gegebenen Projektion ist problematisch. Deshalb wurde versucht, jeden Abschnitt in eine eigene Ebene zu legen. Daraus ergab sich diese Möglichkeit des Knotens durch schichtweisen Aufbau (siehe Abb. 3.10). Der Knoten ist um einiges komplexer als der erste und somit auch sein Pfad, daher ist zu überlegen, ob man nicht auch noch ein allgemeineres System zur Erzeugung dieser Prismenfolgen finden könnte. Darauf wird im Abschnitt 3.3 genauer eingegangen.

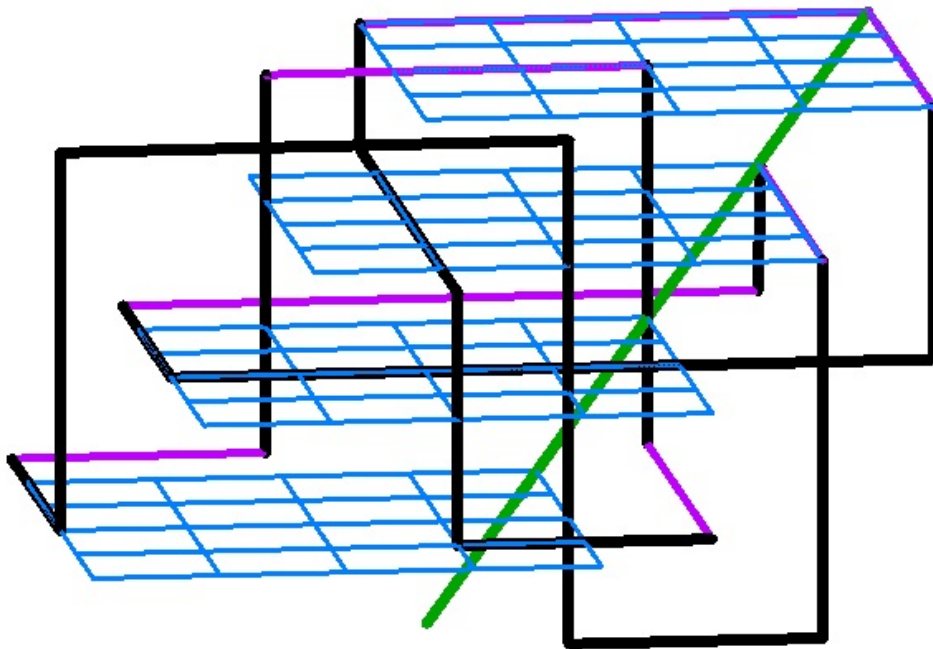


Abbildung 3.10: Pfad am Würfelgitter (Schichtenweise dargestellt)

Um das Modell zu erhalten, verfolgt man den Pfad mit kongruenten Prismenstücken. Dies kann jedoch dazu führen, dass man einzelne Kanten verlängern oder kürzen muss, um keine Überschneidungen der Prismenstücke zu erhalten. Ein mögliches Modell des Knotens könnte das in Abb. 3.11 modellierte Modell sein.

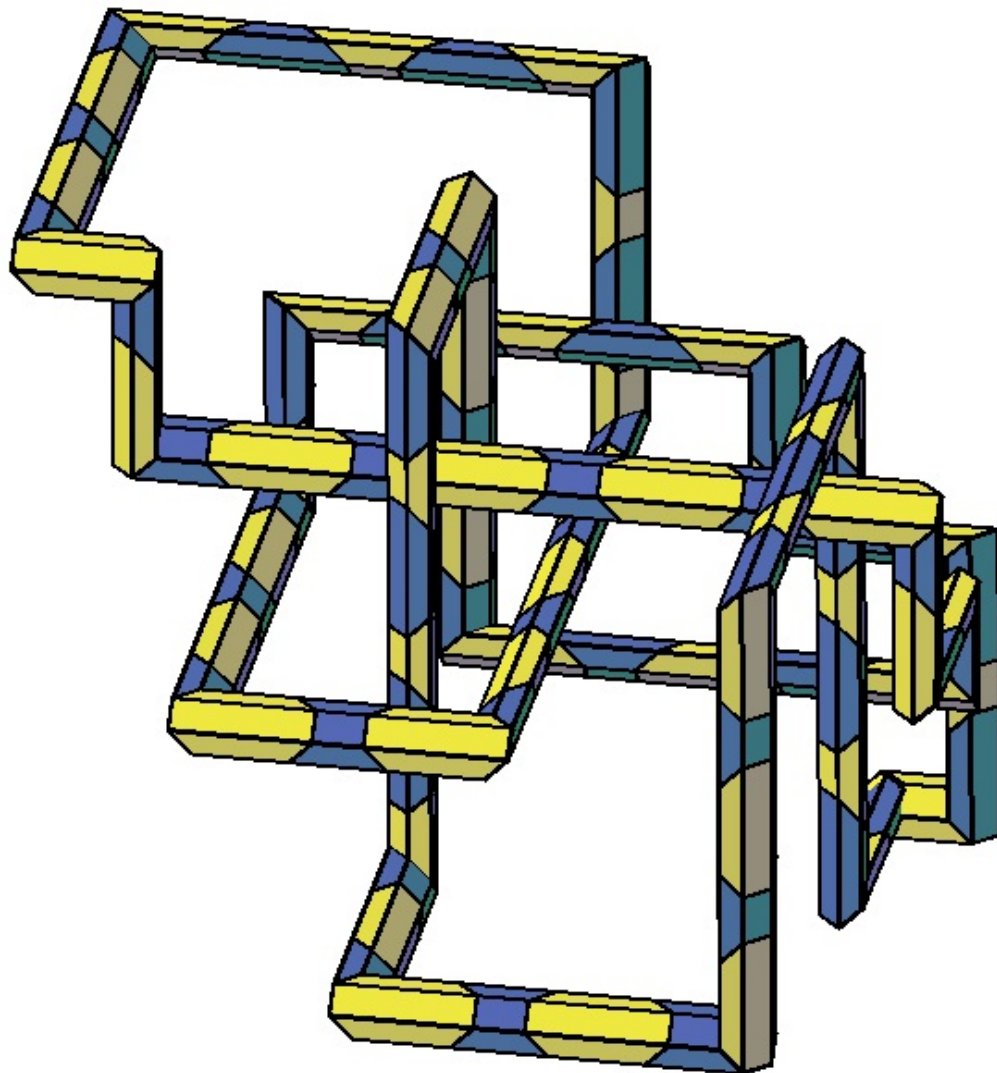


Abbildung 3.11: Modellierter Knoten

3.2 Kanten eines Oktaeders als Grundlage

Wir wollen hier in Analogie den Kanten eines regelmäßigen Oktaeders statt eines Würfels folgen. Für das Prismenstück in Richtung der Oktaederkante muss die Ebene, in der das reguläre k -Eck liegt, neu gewählt werden. Diese enthält die Raumdiagonale des Oktaeders und die Diagonale eines Quadrates des Oktaeders (siehe Abb. 3.12).

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

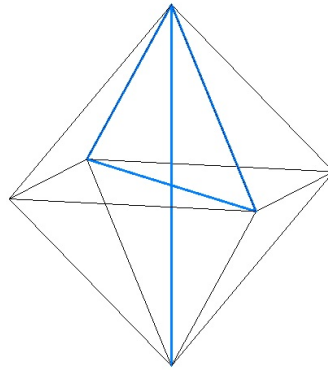


Abbildung 3.12: Lage der Ebene für das reguläre k -Eck

In die Ebene wird ein Quadrat oder ein regelmäßiges $4n$ -Eck ($n \in \mathbb{N}$) platziert und entlang der zugehörigen Kante des Oktaeders extrudiert. Die Eckenzahl des regulären Vielecks muss immer ein Vielfaches von 4 sein, da die Raumdiagonale des Oktaeders 4-zählige Drehachse ist und somit das Prisma durch 90-Grad-Drehung und Spiegelung in das nächste übergeht.

Um die Symmetrie bezüglich des Normalschnitts zu erhalten, wird das Prisma an der XY -Ebene gespiegelt und die Schnittmenge gebildet (siehe Abb. 3.13).

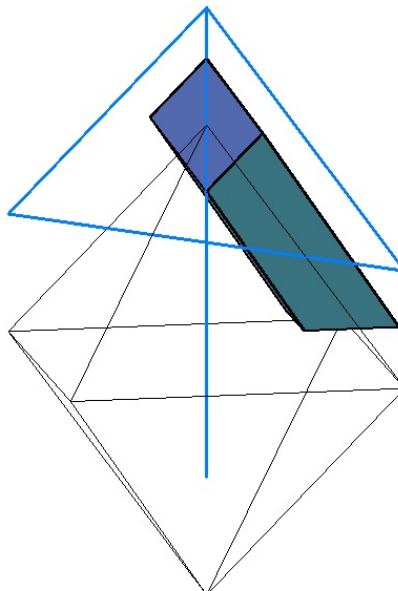


Abbildung 3.13: Ein Prisma auf dem Oktaeder

Dieses Prismenstück lässt sich in vier perfekt anliegende Positionen drehen, indem man

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

um die Drehachse des regulären 4-Ecks um je 90 Grad dreht (siehe Abb. 3.14).

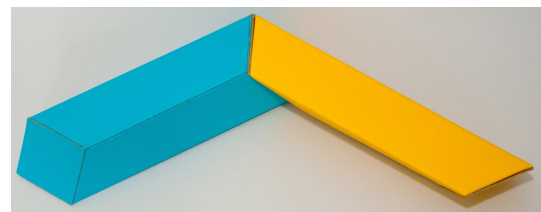
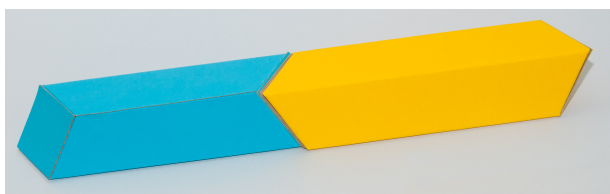
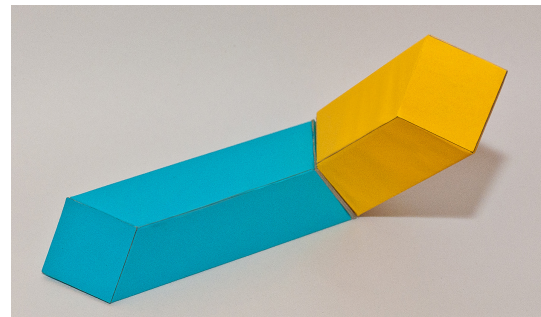
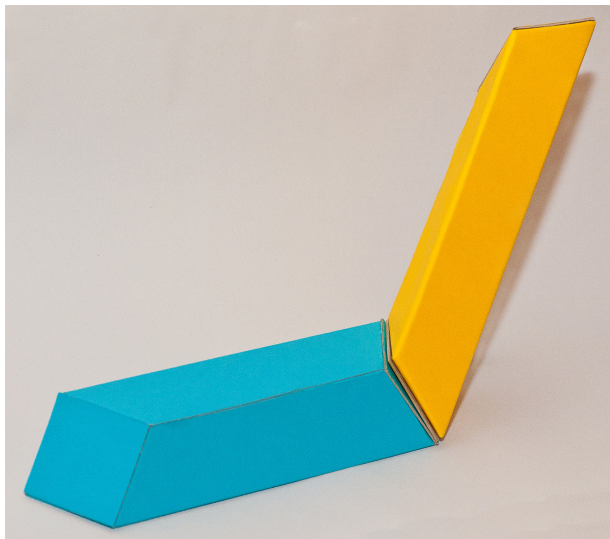
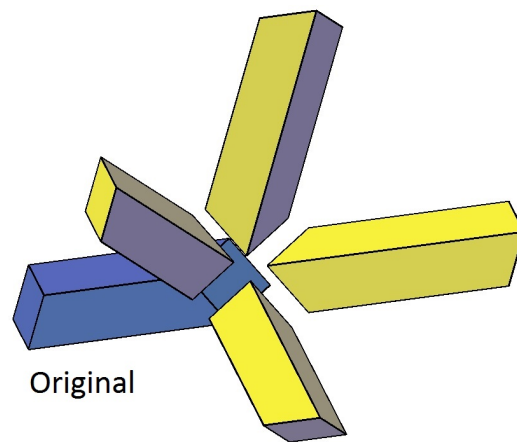


Abbildung 3.14: Explosionszeichnung und Lage der vier Positionen des Prismenstücks am zusammengebauten Modell

Für den Pfad wurden Oktaeder geeignet nebeneinander platziert. Der Kantenzug des Knotens folgt neben waagrechten Oktaederkanten einer Serie weiterer Oktaederkanten. Die dritte Richtung der Kanten ist im Gegensatz zur Modellierung auf Basis des Würfelgitters schräg zur Ebene der anderen Kanten (siehe Abb. 3.15).

3.3 Brücken als allgemeine Lösung

In den vorherigen Beispielen konnte man sehen, dass das Erstellen des Pfades sehr viele Tücken und Arbeit mit sich brachte. Um dies zu optimieren, wurde ein neuer Weg gewählt, der allgemein anwendbar ist. Die Idee dahinter ist es, möglichst viele Teilstrecken des Knotens in einer Ebene zu lassen, da auch die Knotendiagramme nur zweidimensional sind. Bei den jeweiligen Kreuzungen wird dann eine „Brücke“ eingesetzt (siehe Abb. 3.17).

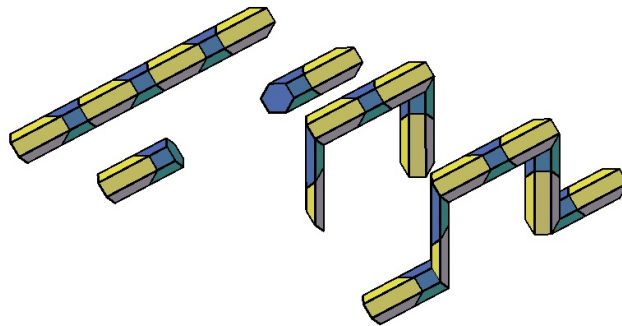


Abbildung 3.17: Brücke für einen Knoten, dessen Pfad der Kanten eines Würfels folgt

Bei der Erzeugung der Brücke muss die Anzahl der waagrechten Stäbe auf Basis des Würfels ungerade sein, da der Anschluss in der Ebene sonst nicht mehr passen würde. Die Anzahl der senkrechten Stäbe muss hingegen gerade sein, um die Richtung fortzusetzen, in die man geht.

3.3.1 Anwendung der Brücken

Um für ein besseres Verständnis zu sorgen wird in diesem Abschnitt anhand von Beispielen gezeigt wie die Knoten aus kongruenten Prismenstücken mit Hilfe von Brücken erzeugt werden können.

Beispiel 1

In diesem ersten Beispiel wird die bereits verwendete Vorlage des Knotens aus Abb. 3.18 verwendet.

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

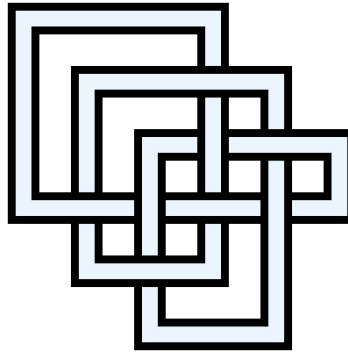


Abbildung 3.18: Knotenprojektion [7]

Dieser wird vorerst in einer Ebene mit den kongruenten Prismenstücken, die von der Erzeugung gleich wie im Kapitel 3.1 bleiben, nachgebildet.

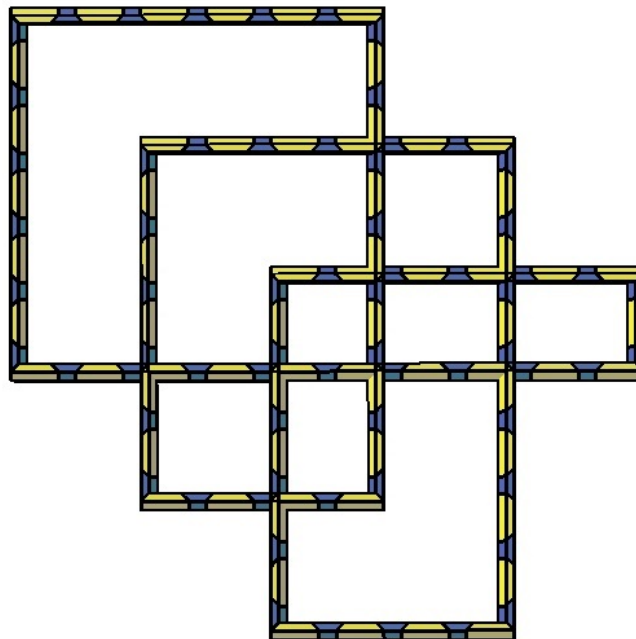


Abbildung 3.19: Draufsicht auf den Knoten

Im nächsten Schritt werden die entsprechenden Kreuzungen durch Brücken ersetzt (siehe Abb. 3.17). Dies kann zu Überschneidungen führen, die man durch Einsetzen von Paaren von Zusatzstücken in die jeweiligen Bodenkanten auflösen kann.

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

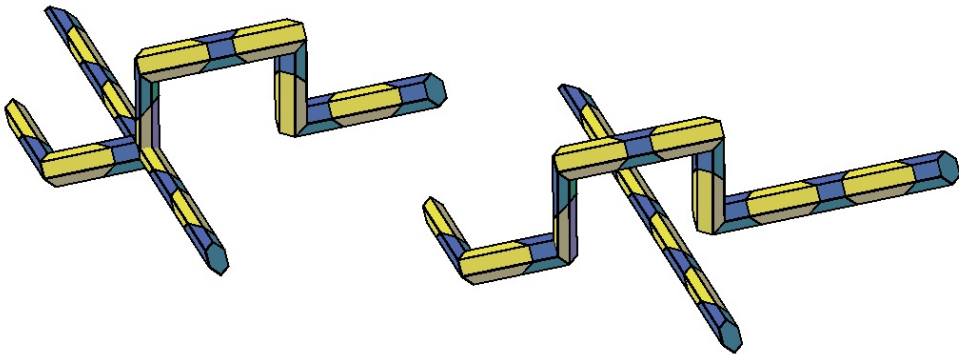


Abbildung 3.20: Einsatz von Zusatzstücken zur Vermeidung von Überschneidungen

Dadurch erhält man ein mögliches Model mit kongruenten Prismenstücken ohne Überschneidungen, das geschlossen ist (siehe Abb. 3.21).

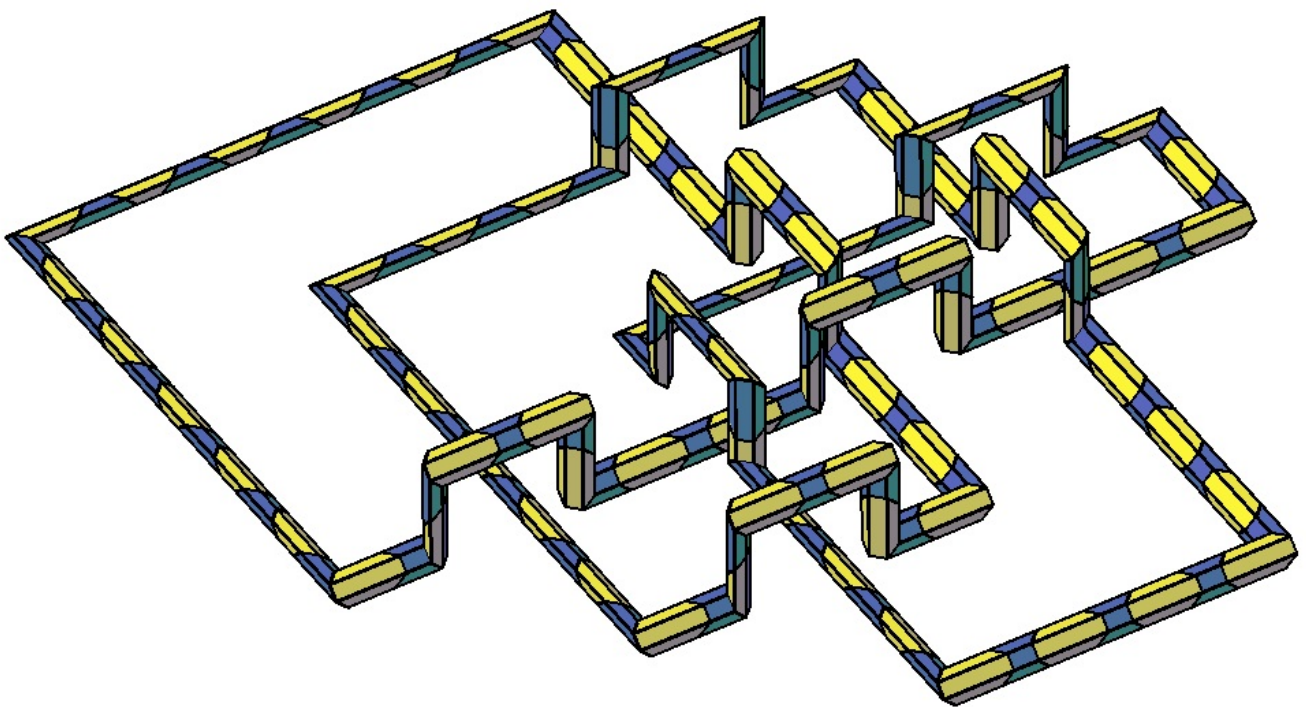


Abbildung 3.21: Modellierter Knoten in axon. Ansicht

Beispiel 2

Als weiteres Beispiel wird der Knoten in Abb. 3.22 betrachtet.

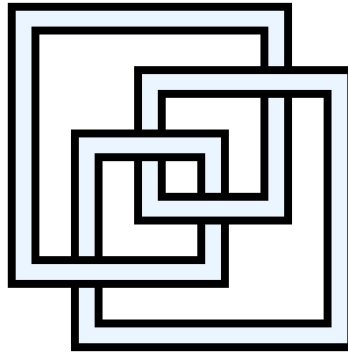


Abbildung 3.22: Knotenprojektion [9]

Auch hier wird der Knoten in einer Ebene nachgebildet und die Kreuzungen werden durch Brücken ersetzt. Sollten Überschneidungen auftreten, werden sie, wie beim vorherigen Beispiel, durch Paare von Zusatzstücken aufgelöst.

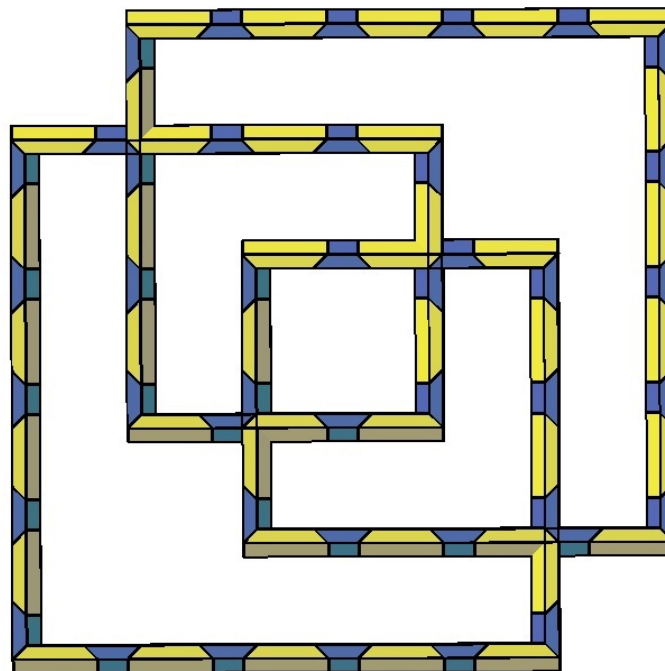


Abbildung 3.23: Knotenprojektion

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Durch genaue Betrachtung der beiden Beispiele lässt sich erkennen, dass einzelne Prismenstücke zu Modulen zusammengefasst werden können, die wie folgt aussehen:

Bei den Brücken kommen wir mit zwei Modulen aus (siehe Abb. 3.24).

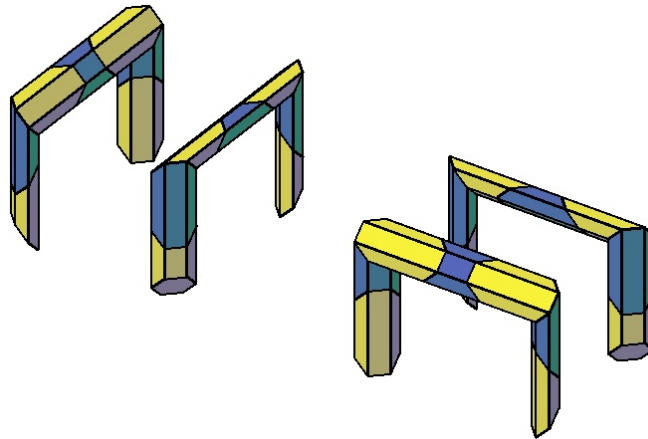


Abbildung 3.24: Die Brückenmodule für die vier möglichen Brücken

Auch bei den waagrechten und senkrechten Richtungen erhält man je zwei Module (siehe Abb. 3.25).

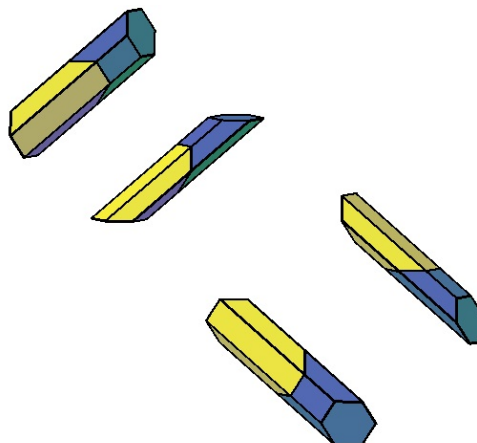


Abbildung 3.25: Module für den waagrechten Teil des Pfades

Das in Abb. 3.26 gezeigte Modell ist eine mögliche Variante des Knotens (siehe Abb. 3.22) aus den vorhin beschriebenen Modulen.

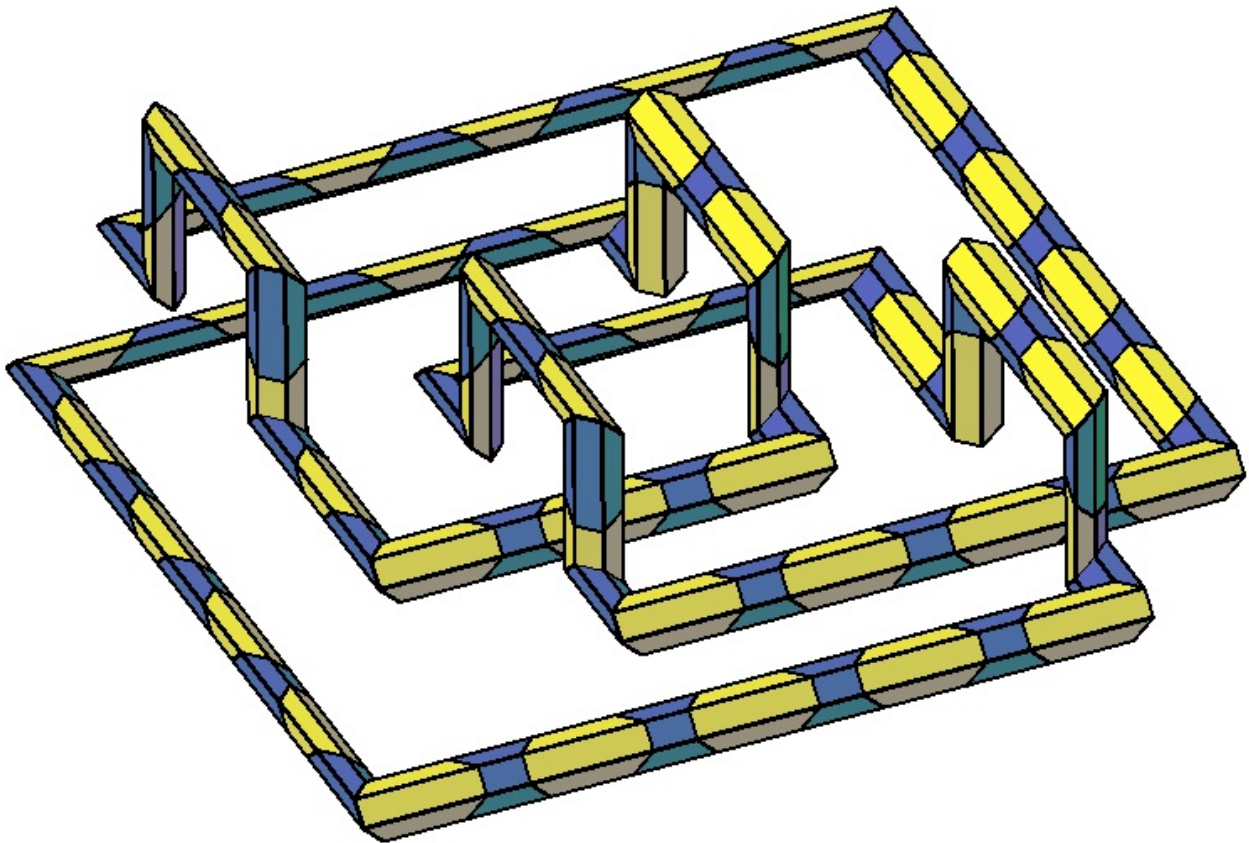


Abbildung 3.26: Modellierter Knoten in Axonometrie

3.4 Algorithmus für Knoten aus kongruenten Prismenstücken entlang Würfelkanten

Nun wollen wir das oben entwickelte Vorgehen in einem Algorithmus zusammenfassen.

Algorithmus 1: Der Knoten ist gegeben. Gesucht wird der Knoten aus kongruenten Prismenstücken, die den Kanten eines Würfelgitters folgen.

- Knoten in Ebene auf eines der Quadratnetze des Würfelgitters ausrichten
- Nachbildung des Knotens durch die Module der kongruenten Prismenstücke parallel zu dieser Ebene
- Kreuzungen, wie in Kapitel 3.3 gezeigt, mit Brücken auflösen

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Überschneidungen erkennen und durch Einsetzen von Prismenstücken auflösen

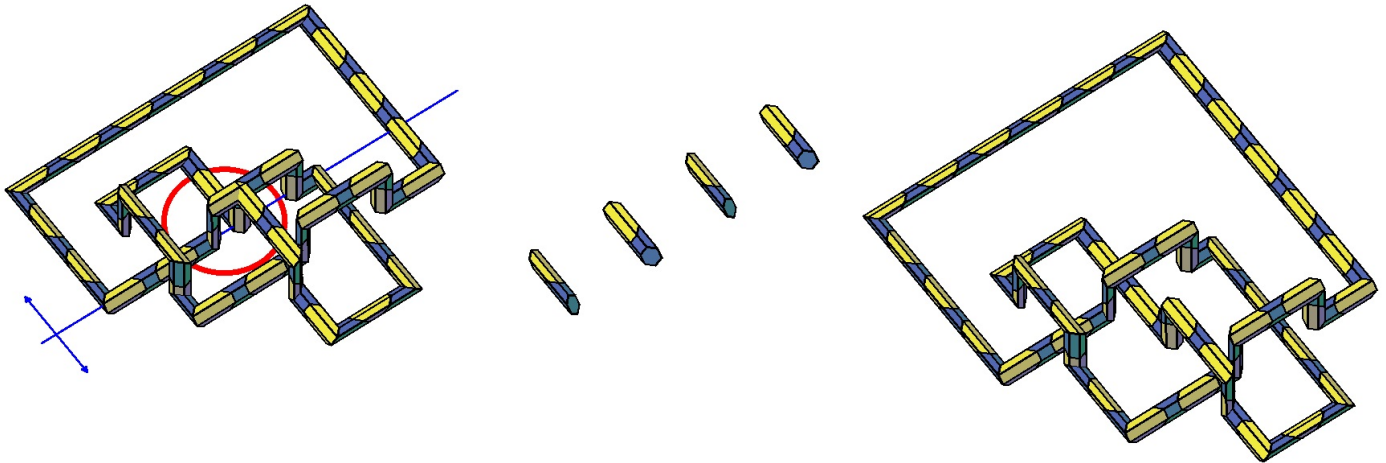


Abbildung 3.31: Auflösung der Problemstelle

3.4.2 Weitere Beispiele für die Anwendung des Algorithmus

Beispiel 1

Auf den Knoten (siehe Abb. 3.32) wird der Algorithmus 1 angewandt.

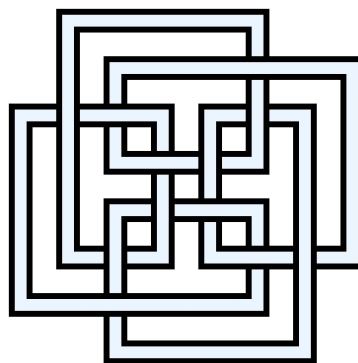


Abbildung 3.32: Vorlage des Knotens [8]

Man erhält den Knoten in einer Ebene (siehe Abb. 3.33).

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

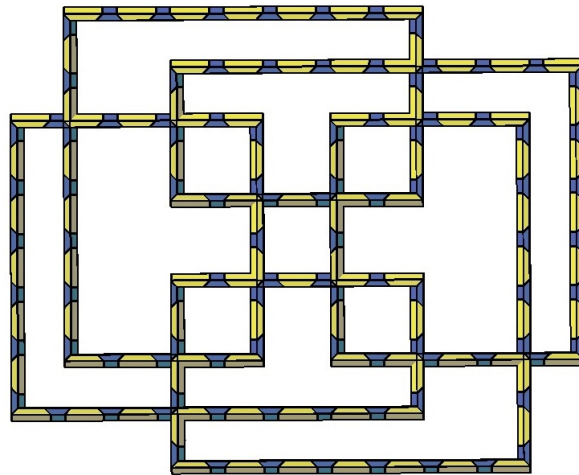


Abbildung 3.33: Draufsicht auf den Knoten

Durch Einsatz der Brücken entsteht ein mögliches Modell des Knotens aus kongruenten Prismenstücken (siehe Abb. 3.34).

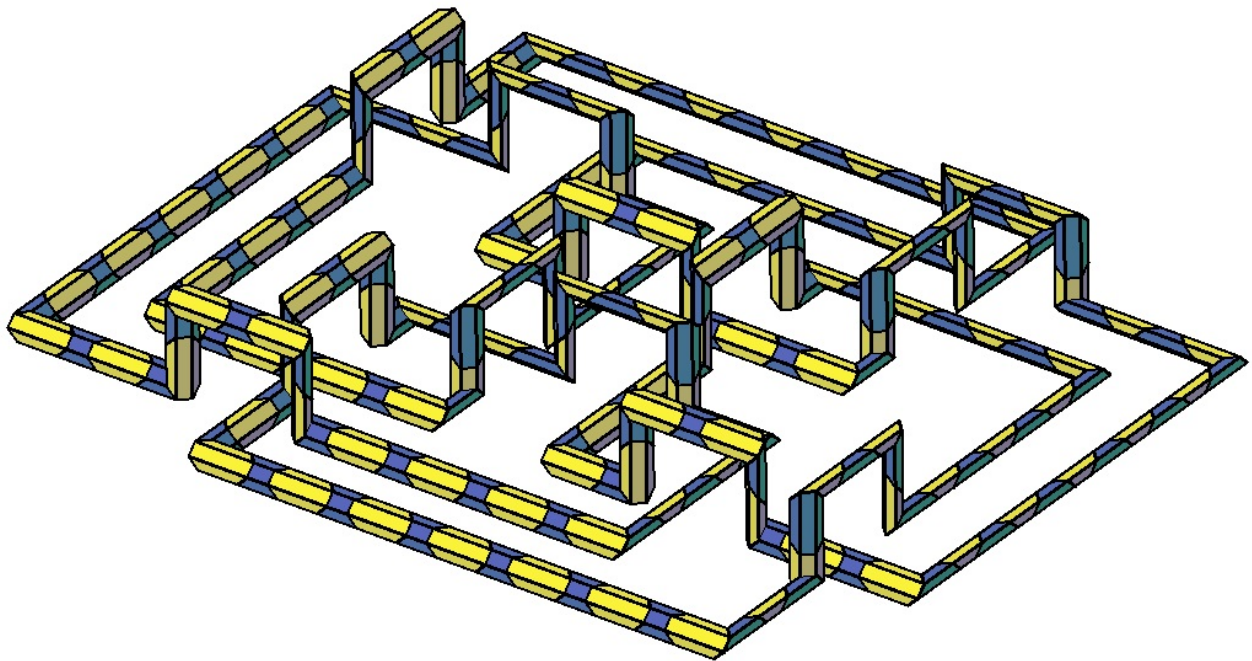


Abbildung 3.34: Modelliertes Knotenmodell

Beispiel 2

Auf den Knoten aus Abb. 3.35 wird der Algorithmus angewandt.

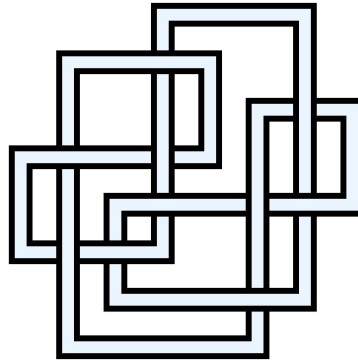


Abbildung 3.35: Vorlage des Knotens [11]

Daraus entsteht dann ein mögliches Model des Knotens mit der Draufsicht Abb. 3.36.

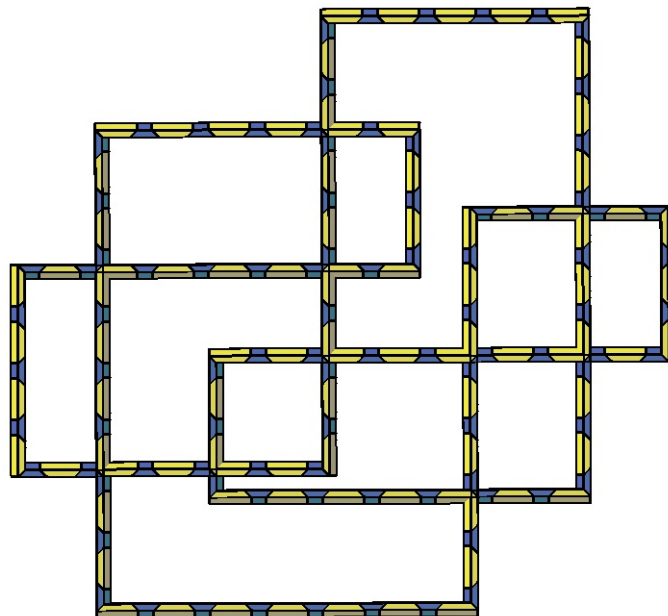


Abbildung 3.36: Draufsicht auf den Knoten

Abb. 3.37 zeigt ein axometrisches Bild eines möglichen Modells.

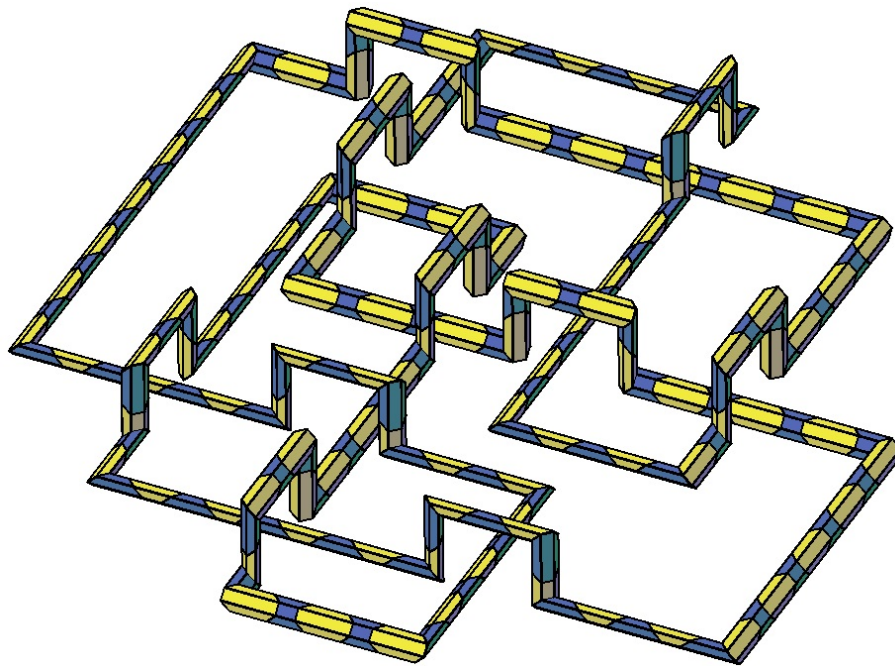


Abbildung 3.37: Modelliertes Knotenmodell

3.5 Brücken für Knoten entlang Oktaederkanten

Für Knoten entlang eines Oktaedergitters wird versucht, den Algorithmus 1 zu übernehmen und zu modifizieren. Bei den jeweiligen Kreuzungen kommen wieder Brücken zur Anwendung, um möglichst viele Teilstrecken des Knotens in einer Ebene zu lassen (siehe Abb. 3.38). Die Prismenstücke werden dabei wie in Kapitel 3.2 erzeugt.

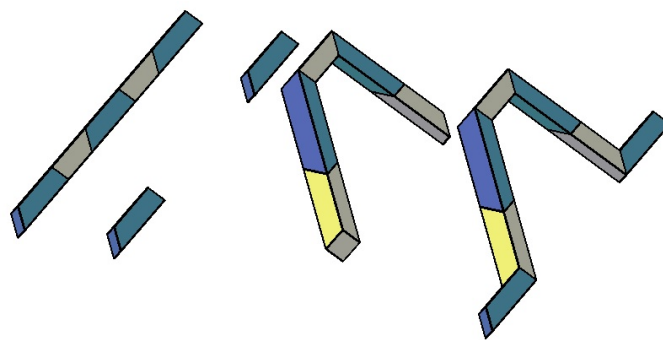


Abbildung 3.38: Brücke eines Knotens, dessen Kanten einem Oktaeder folgen

Bei der Erzeugung der Brücke muss die Anzahl der waagrechten Stäbe ungerade sein, da der Anschluss in der Ebene sonst nicht mehr passen würde. Die Anzahl der geneigten Stäbe muss hingegen gerade sein, um die Richtung fortzusetzen, in die man geht. Durch

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

die schräge Lage der Stäbe ergibt sich, dass die Anzahl der zu entfernenden Stäbe in der Ebene $h + 2$ ist, mit $h \in \mathbb{N}$ Anzahl der waagrechten Stäbe auf der Bücke.

3.5.1 Anwendung der Brücken

Beispiel 1

Es wird der Knoten (siehe Abb. 3.39) in einer Ebene mit den kongruenten Prismenstücken nachgebildet. Dessen Grundlage ist ein Quadratraster, das auch zu einem der oben beschriebenen Würfelgitter passen würde. Wir setzen nun aber die zum Oktaeder passenden Prismenstücke längs dieser Kanten ein.

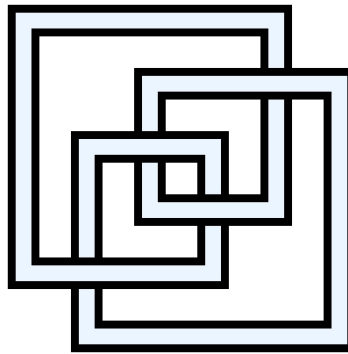


Abbildung 3.39: Vorlage des Knotens [9]

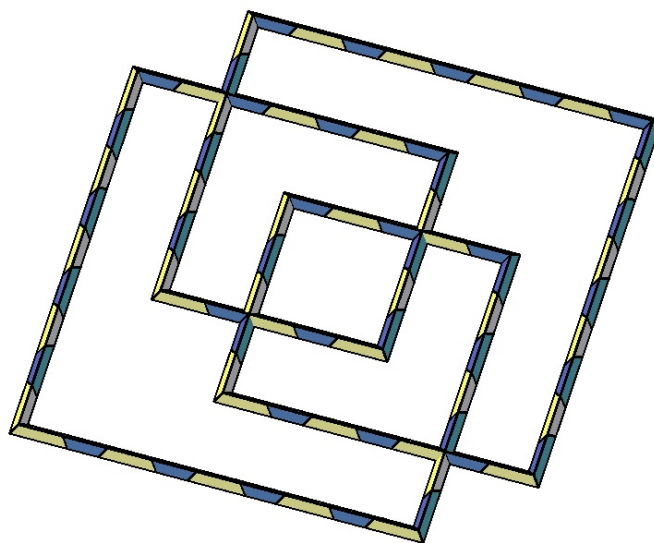


Abbildung 3.40: Prismenstücke entlang des Pfades

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Aus der Abb. 3.40 und durch die besondere Lage des Prismenstücks ergibt sich, dass es für die waagrechte und senkrechte Richtung nur ein Modul gibt (siehe Abb. 3.41), dass kongruent in die jeweils andere Richtung übergeführt werden kann.

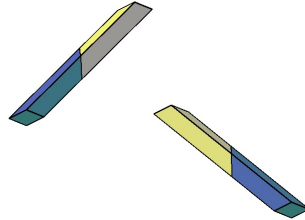


Abbildung 3.41: Die kongruenten Module für den waagrechten und senkrechten Teil des Pfades

Bei den gegebenen Kreuzungen werden nun die betroffenen Prismenstücke durch Brücken ersetzt (siehe Abb. 3.42). Gegebenenfalls werden Selbstschnitte wieder durch Einfügen von Zusatzteilen längs der waagrechten Kanten aufgelöst.

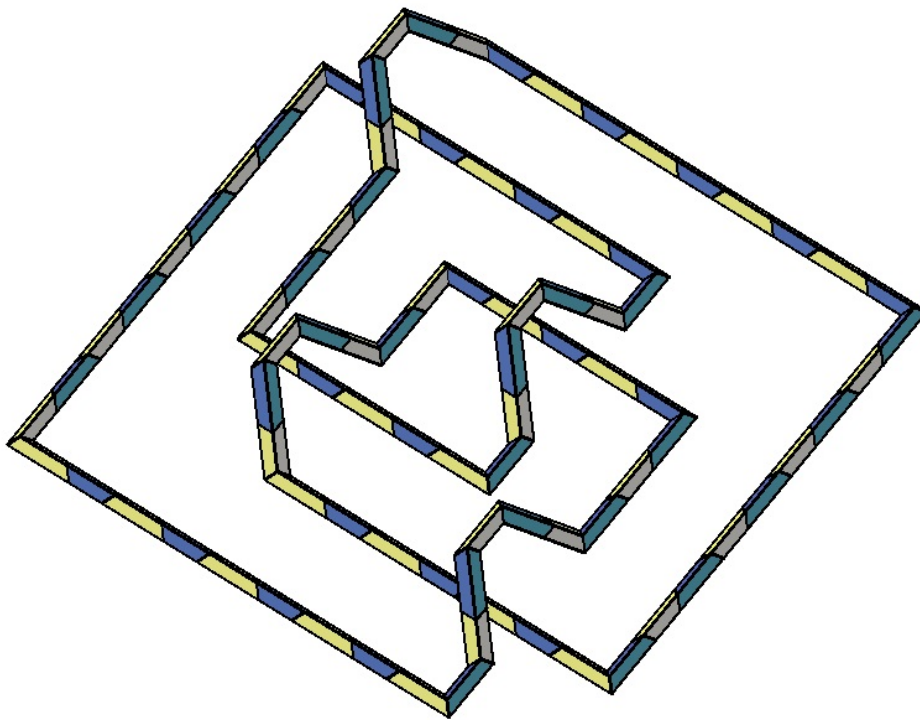


Abbildung 3.42: Modelliertes Knotenmodell

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Um die Symmetrie des Knotens (siehe Abb. 3.22) zu erhalten, werden die entsprechenden Brücken in die entgegengesetzte Richtung geneigt, was aufgrund der Lage des Prismenstücks möglich ist. Aus der Abb. 3.43 geht hervor, dass es für die Brücken je zwei Module gibt (siehe Abb. 3.44).

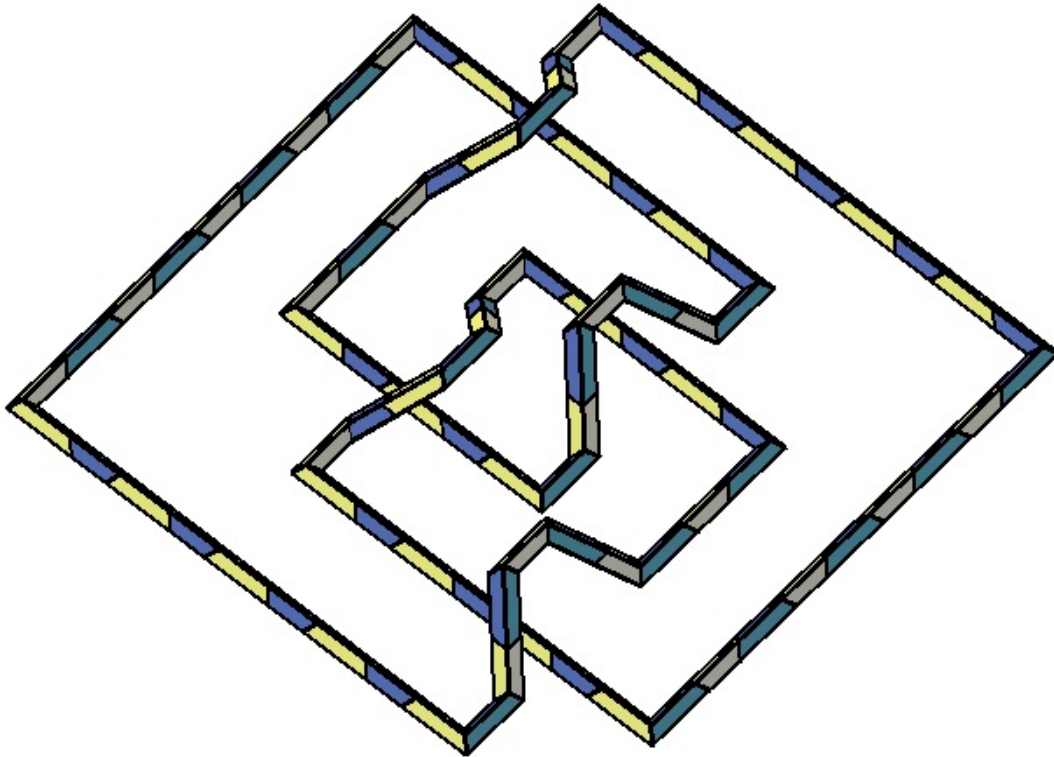


Abbildung 3.43: Symmetrisches Knotenmodell

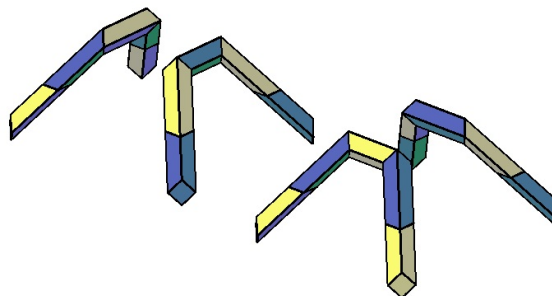


Abbildung 3.44: Brückenmodule

3.6 Algorithmus für Knoten aus kongruenten Prismenstücken entlang Oktaederkanten

Algorithmus 2: Der Knoten ist gegeben. Gesucht wird der Knoten aus kongruenten Prismenstücken, die den Kanten eines Oktaeders folgen.

- Knoten in Ebene auf ein Quadratnetz ausrichten
- Nachbildung des Knotens durch die Module der kongruenten Prismenstücke parallel zu dieser Ebene
- Kreuzungen, wie in Kapitel 3.5 gezeigt, mit Brücken auflösen
- Ausgewählte Brücken eventuell aus Symmetriegründen austauschen
- Überschneidungen durch Einsatz von Paaren von Zusatzstücken in alle Kanten dieser Richtung entfernen

Dann gilt der folgende Satz:

Satz 8. Für alle Knoten lässt sich das Vorgehen aus dem Algorithmus 2 anwenden, um Knoten aus kongruenten Prismenstücken ohne Selbstschnitt zu erhalten.

3.6.1 Beispiel für die Anwendung des Algorithmus

Ausgangsbild des Knotens

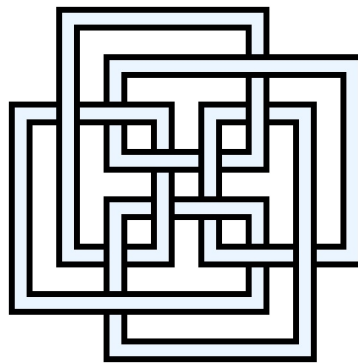


Abbildung 3.45: Vorlage des Knotens [8]

3 Knoten aus kongruenten Prismenstücken

Pfad des Knotens in der Ebene

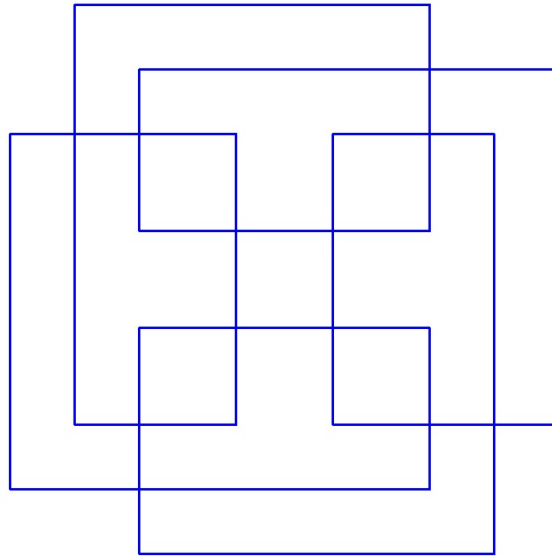


Abbildung 3.46: Ein möglicher Pfad des Knotens

Mit Prismenstücken den Pfad nachbilden

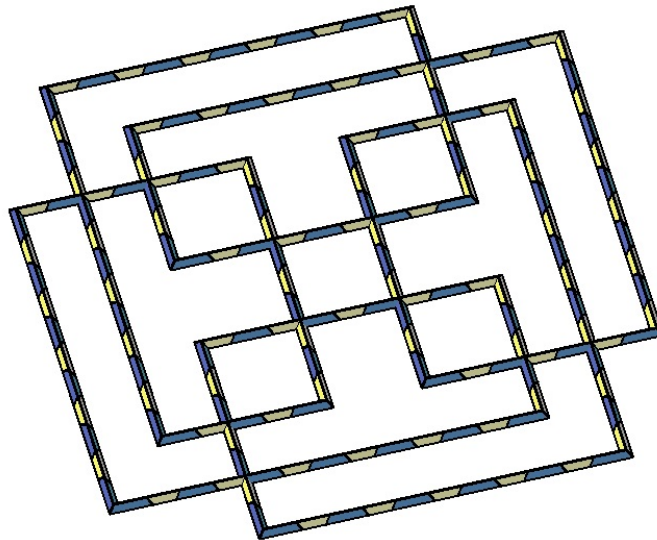


Abbildung 3.47: Prismenstücke entlang des Pfades

Kreuzungen mit Brücken bestücken

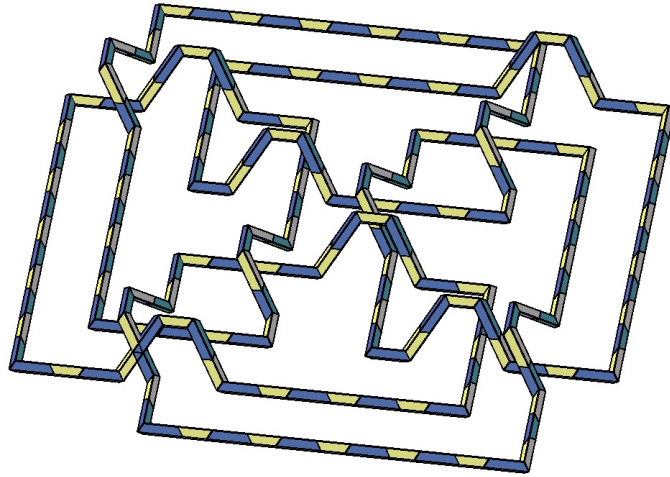


Abbildung 3.48: Kreuzungen mit Brücken ersetzt

Symmetrie

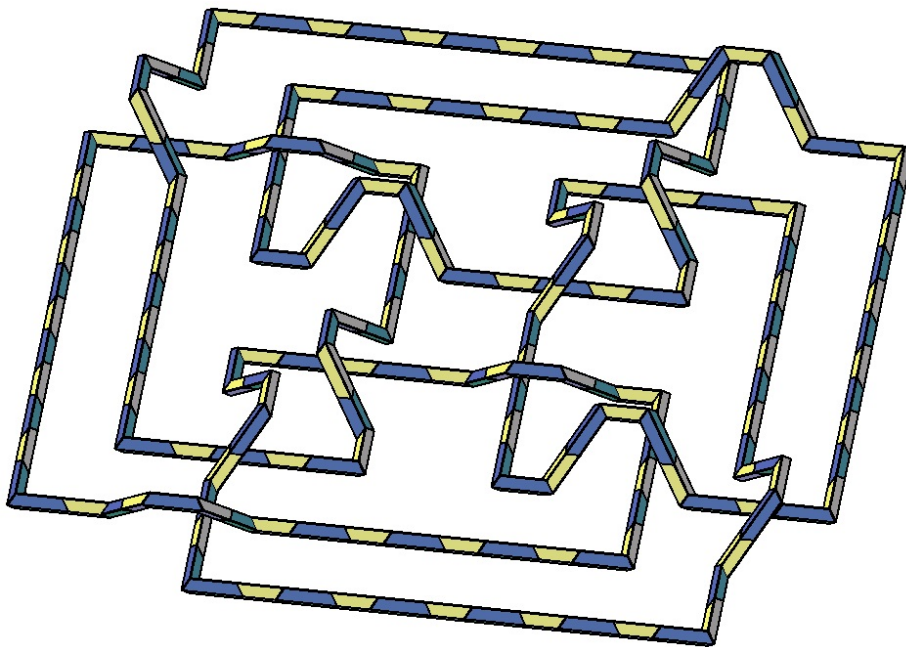


Abbildung 3.49: Kreuzungen mit symmetrischen Brücken

3.7 Brücken für Knoten entlang anderer Platonischer Polyeder

Versuche, die Kantenrichtungen eines der anderen Platonischen Polyeder zu verwenden, haben leider nicht mit einer Variation des Algorithmus 1 zum Ziel geführt. Sie würde den Umfang dieser Diplomarbeit sprengen und finden daher keine Aufnahme in diese Arbeit.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams C.C.: *Das Knotenbuch: Einführung in die mathematische Theorie der Knoten*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg · Berlin · Oxford, 1995. Übersetzt vom amerikanischen Original 1994 von Hubert Gollek.
- [2] Kawauchi A.: *A survey of knot theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [3] Kussin D.: [http : //math – www.uni – paderborn.de/ dirk/Vorlesungen/Knoten/skript_5.pdf](http://math-wwww.uni-paderborn.de/dirk/Vorlesungen/Knoten/skript_5.pdf) (abgerufen am 26.03.2014)
- [4] Murasugi K.: *Knottheory and its applications*. Birkhäuser Bosten, Bosten, 1996. Translated from the 1993 japanese original by Bohdan Kurpita.
- [5] Röschel O.: *Ein Knoten aus kongruenten Prismenstücken*. (2013).
[http : //www.geometry.at/strobl/strobl2013/plan2013.htm](http://www.geometry.at/strobl/strobl2013/plan2013.htm) (abgerufen am 16.08.2014)
- [6] Zawidzki M. - Nishinari K.: *Modular Pipe-Z System for Three-Dimensional Knots* . Journal for Geometry and Graphics 17/1, 81-87 (2013).
- [7] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: [http : //commons.wikimedia.org/wiki/File : 8 – 16_knot_theory_square.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:8-16_knot_theory_square.svg) (abgerufen am 16.08.2014)
- [8] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: [http : //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons /e/e9/12crossings – 4symmetrical – square.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e9/12crossings-4symmetrical-square.svg) (abgerufen am 16.08.2014)
- [9] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: [http : //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons /d/d6/Figure8knot – math – square – alternate.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d6/Figure8knot-math-square-alternate.svg) (abgerufen am 16.08.2014)

Literaturverzeichnis

- [10] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8b/Figure8knot-math-square.svg> (abgerufen am 16.08.2014)
- [11] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/10-59_knot_theory_square.svg (abgerufen am 16.08.2014)