

**DIPLOMARBEIT**

**Risikomanagement und  
Solvency II**

am Institut für Analysis und Computational Number Theory

unter Anleitung von O.Univ.-Prof. Dr. phil Robert Tichy

durch

**Sandra Berghofer**

Matr-Nr. 0230255

im Sommersemester 2010



Ich erkläre, dass ich diese Arbeit selbst verfasst, alle verwendeten Quellen zitiert und mich keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe.

Datum,

Unterschrift



# Inhaltsangabe

*Diese Diplomarbeit befasst sich mit Risikomanagement im Finanz- und Versicherungssektor und den damit verbundenen mathematischen Methoden um geeignete Maße für Risiken zu berechnen. Nach Erläuterung der verschiedenen Risikotypen werden sowohl die aktuellen, als auch die für die Zukunft geplanten Vorschriften für die Berechnung der Solvabilitäts- und Kapitalanforderungen eines Unternehmens vorgestellt, wobei in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf den Versicherungssektor gerichtet ist. Weiters werden einige Risikomaße definiert und Standardmethoden vorgestellt, die zur Berechnung dieser dienen. Diese Methoden basieren meist auf Normalverteilungsannahmen, welche die Risikofaktoren in der Realität aber nur selten zufriedenstellend abbilden. Im letzten Kapitel wird deshalb eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, Risikomaße wie z.B. den Value-at-Risk mit Hilfe von Copulas zu berechnen.*



# Abstract

*This thesis deals with risk management in the financial and insurance sector and with the associated mathematical methods used to estimate risks. After detailing various types of risk, current as well as planned future regulations for the calculation of the Solvency Capital Requirements of a company will be introduced. The main focus of this thesis lies, however, on insurance companies. Most risk estimation methods used in practice are based on the assumption of normally distributed risk factors, which is usually not fulfilled. Thus the final chapter will present a method, which enables the calculation of risk measures, such as the Value at Risk, by applying copula modeling.*





# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsangabe</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Historische Entwicklung des Risikomanagements . . . . .	3
1.2.1 Solvency I - Die aktuelle EU-Solvabilitätsregelung in der Versicherungswirtschaft . . . . .	5
1.3 Solvency II . . . . .	7
<b>2 Risikomanagement</b>	<b>11</b>
2.1 Risikofaktoren und Verteilungsfunktion . . . . .	11
2.1.1 Bedingte und Unbedingte Verteilung . . . . .	13
2.2 Risikomessung . . . . .	15
2.2.1 Nominalwert-Ansatz . . . . .	15
2.2.2 Sensitivität gegenüber Risikofaktoren . . . . .	16
2.2.3 Szenario basierte Risikomaße . . . . .	16
2.2.4 Verfahren basierend auf der Verlustverteilung . . . . .	16
2.3 Standardmethoden zur Bemessung von Marktrisiken . . . . .	25
2.3.1 Varianz-Kovarianz Methode . . . . .	25
2.3.2 Historische Simulation . . . . .	26
2.3.3 Monte-Carlo-Simulation . . . . .	26
<b>3 Abhängigkeitsberechnungen mit Copulas</b>	<b>29</b>
3.1 Motivation . . . . .	29
3.1.1 Beispiele für Copulas . . . . .	34
3.2 Abhängigkeitsmaße . . . . .	36

3.2.1	Lineare Korrelation . . . . .	36
3.2.2	Rangkorrelation . . . . .	39
3.2.3	Tail-Abhängigkeiten . . . . .	44
3.3	Elliptische Copulas . . . . .	46
3.4	Archimedische Copulas . . . . .	53
3.5	Copulas im Risikomanagement . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Risikomaße und Copulas</b>	<b>59</b>
4.1	Motivation . . . . .	59
4.2	Value-at-Risk und Copulas . . . . .	60
4.3	Anwendungsbeispiel . . . . .	66
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>69</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Motivation

In dieser Arbeit wird auf finanzielle Risiken im Banken- und Versicherungssektor eingegangen, wobei das Hauptaugenmerk speziell den Versicherungsrisiken gilt.

#### **Was ist Risiko?**

Risiko ist die Möglichkeit des Eintretens eines Schadens bzw. Verlustes im negativen Fall (Gefahr) oder eines Nutzens bzw. Gewinns im positiven Fall (Chance).

Häufig wird im Zusammenhang mit finanziellen Risiken aber nur die Möglichkeit eines Schadens bzw. Verlustes verstanden.

#### **Definition 1.1.1** (Risiko).

*Unter Risiko versteht man eine Zufallsvariable  $X$ , die nur nicht-negative Werte annimmt.*

Bei finanziellen Risiken werden folgende Typen (siehe auch [21]) unterschieden, wobei die Kategorien allerdings nicht immer klar voneinander abgegrenzt werden können:

- **Marktrisiko:** Risiko, das durch Preisentwicklung entsteht (Schwankungen von Aktienkursen, Zinssätzen ...).
- **Kreditrisiko:** Risiko, des ganzen oder teilweisen Ausfalls der Gegenpartei und damit der Nichterfüllung oder nur teilweise Erfüllung von Zahlungsverpflichtungen.

- **Operationelles Risiko:** Risiko, das durch Fehler von Menschen oder Systemen entsteht.
- **Versicherungstechnisches Risiko:** Risiko der unerwarteten Abweichung des tatsächlichen Schadenaufwands vom Erwarteten. Es setzt sich zusammen aus den beiden Risikoarten *Prämienrisiko* (Risiko, dass die errechnete Prämie nicht ausreicht, um die zukünftigen Verpflichtungen aus dem laufenden Geschäft zu begleichen) und *Reservierungsrisiko* (Risiko, dass die Schadensreserven nicht zur Abwicklung des bereits gezeichneten Geschäfts ausreicht).

Risikomanagement dient nun dazu mit diesen Risiken planvoll umzugehen.

**Aufgaben des Risikomanagements:**

- Identifikation von Risiken;
- Bewertung und Messung von Risiken;
- Bewältigung von Risiken;
- Steuerung von Risiken;
- Monitoring (d.h. Überwachung und Früherkennung).

Allgemein kann zwischen *quantitativem* und *qualitativem* Risikomanagement unterschieden werden. In Finanzdienstleistungsunternehmen kommen hauptsächlich quantitative Risikomanagementmethoden zum Einsatz. Dabei handelt es sich um Modelle mit denen Risiken in Geldeinheiten quantifiziert werden. Diese Bewertung von Risiken ist für Finanzdienstleistungsunternehmen von entscheidender Bedeutung, da alle Versicherungen und Banken bewusst Risiken eingehen, um Gewinn zu erwirtschaften.

## 1.2 Historische Entwicklung des Risikomanagements

In diesem Kapitel möchte ich einige wichtige historische Ereignisse aufgreifen, die modernes Risikomanagement für die Finanz- und Versicherungsindustrie geformt und geprägt haben.

Die primären Auslöser für die rasche Entwicklung im Bereich des Risikomanagements in den letzten Jahrzehnten waren:

- **Finanzinnovation und Derivate:** Fortschritte in der Finanztheorie, der Informationstechnologie, sowie der Bedarf an neuen Instrumenten für den Risikotransfer führten zu einem rasanten Wachstum der Derivatmärkte.
- Die **Ölkrise** in den 70er Jahren führte zur Zunahme der Volatilität <sup>1</sup>.
- Aufgrund starker Wechselkursschwankungen nach der Abschaffung des Bretten-Woods Systems fester Wechselkurse forderten Verbraucher Finanzprodukte um sich abzusichern.
- Abbau der Handelsschranken.
- Starkes Umsatzwachstum an Finanzmärkten.
- Große Verluste im Bankensektor (Quellen: [26], [27])
  - 1993 Metallgesellschaft
  - 1994 Orange County
  - 1995 Barings Bank
  - 1998 LTCM (Long Term Capital Management)
  - 2001 Bankgesellschaft Berlin
  - 2002 Allied Irish Banks
  - 2008 Lehman Brothers, Bear Stearns.

Die Finanzwelt reagierte und entwickelte mathematische Modelle zur internen Risikokontrolle und legte gesetzliche Bestimmungen über das Volumen des Sicherheitskapitals fest.

---

<sup>1</sup>Volatilität = Standardabweichung der Veränderung; Schwankung von Zinssätzen, Devisen und Wertpapierkursen

Bereits 1974 wurde das *Basel Comitee on Banking Supervision* von den Zentralbanken und Bankenaufsichtsbehörden der G10-Staaten<sup>2</sup> gegründet. Die Hauptaufgabe besteht darin, möglichst einheitliche Standards in der Bankenaufsicht einzuführen. Der Ausschuss arbeitet Empfehlungen und Richtlinien aus, die jedoch gesetzlich nicht zwingend sind.

Im 1. Basel Abkommen (1988) wurden Regelungen für internationale Mindestkapitalanforderungen, insbesondere bzgl. Kreditrisiko, beschlossen. 1996 formulierte eine Novelle standardisierte Modelle für Marktrisiko mit einer Option für größere Banken zur Verwendung von Value at Risk Modellen. Im 2. Basel Abkommen 2004 wurde ein neues Prinzip ins Leben gerufen. Demnach stützt sich Risikomanagement auf folgende 3 Säulen:

- Mindesteigenkapitalanforderungen;
- Bankenaufsichtlicher Überwachungsprozess;
- Marktdisziplin (Erweiterte Offenlegung).

Parallel zum Bankensektor wurde auch im Bereich der Versicherungen mit Regulationsmaßnahmen begonnen.

---

<sup>2</sup>Group of Ten: 1962 gegründet von den USA, Kanada, Großbritannien, Frankreich, Deutschland, Italien, Belgien, den Niederlanden, Schweden und Japan; 1983 trat auch die Schweiz bei, der Name G10 blieb aber erhalten.

### 1.2.1 Solvency I - Die aktuelle EU-Solvabilitätsregelung in der Versicherungswirtschaft

Die ersten Solvabilitätsvorschriften der EU wurden 1973 und 1979 in zwei Richtlinien gefasst, die die Versicherer zur Bildung eines Kapitalpuffers verpflichteten. An dieser Regelung wurde nur wenig verändert, bis 2002 die Solvency I Richtlinien verabschiedet wurden, die seit 2004 verbindlich sind. Die Solvabilitätsanforderungen müssen jederzeit erfüllt sein und auch einige Komponenten, wie z.B. höhere Mindestgarantiefonds<sup>3</sup>, wurden korrigiert. Die Aufsicht und die Eingriffsmöglichkeiten der Versicherungsaufsichtsbehörden wurden erweitert.

#### **Solvabilitätsberechnung nach Solvency I laut [3] bzw. [25]:**

Jedes Versicherungsunternehmen hat Eigenmittel in der Höhe des Mindestgarantiefonds (fixe Eigenmittelerfordernis) zu halten. Ist die geforderte Solvabilitätsspanne (variable Eigenmittelerfordernis) höher als dieser Wert, stellt diese das relevante Erfordernis dar.

Für die Schadensversicherung ist die geforderte Solvabilitätsspanne definiert als der Beitrags- oder Schadensindex, je nachdem, welcher dieser beiden Werte höher ist.

- Prämienindex: 18% der ersten 53,1 Mio EURO Bruttoprämien und 16% der diesen Betrag übersteigenden Prämien werden ermittelt und summiert. Multipliziert man diese Summe mit dem Selbstbehaltssatz erhält man den Prämienindex.
- Schadenindex: 26% der ersten 37,2 Mio EURO Bruttoschäden<sup>4</sup> und 23% der restlichen Bruttoschäden werden ermittelt und summiert. Multipliziert man diese Summe mit dem Selbstbehaltssatz erhält man den Schadenindex.

Der Selbstbehaltssatz ergibt sich aus der Höhe der vom Versicherungsunternehmen im Eigenbehalt zu tragenden Aufwendungen für Versicherungsfälle

---

<sup>3</sup>Als Mindestgarantiefonds wird die Mindesteigenmittelerfordernis eines Versicherungsunternehmens bezeichnet. Er wurde auf ein Drittel der geforderten Solvabilitätsspanne festgelegt und ist je nach Versicherungssparte ein fester Wert zwischen 2,7 Mio Euro und 4,3 Mio Euro; §73f VAG Abs. 2 und 3.

<sup>4</sup>Hierbei ist die durchschnittliche Schadenserfahrung der letzten 3 Geschäftsjahre zu berücksichtigen. Bei Versicherern, die überwiegend Kreditausfall-, Sturm-, Hagel- oder Frostrisiken zeichnen, sind die letzten 7 Geschäftsjahre maßgeblich.

in Relation zu den insgesamt zu leistenden Aufwendungen. Der Selbstbehaltssatz ist also der Quotient der Netto- und Bruttoschäden, wobei der Durchschnitt der letzten 3 Jahre angenommen wird.

In der Haftpflicht (außer Motorfahrzeug-) sowie Transport- und Luftfahrtversicherung wird der Index mit dem Faktor 1,5 multipliziert.

Für Lebensversicherungen wird die Solvabilitätsspanne folgendermaßen berechnet:

4%<sup>5</sup> der mathematischen Deckungsrückstellungen werden mit einem Selbstbehaltssatz von mindestens 85% multipliziert. Zusätzlich werden 0,3%<sup>6</sup> des Risikokapitals mit einem Selbstbehaltssatz der Risikosumme<sup>7</sup> von mindestens 50% multipliziert und addiert.

Erfüllt das verfügbare Kapital die Solvabilitätsanforderungen nicht, so können die Aufsichtsbehörden den betreffenden Versicherer zu Gegenmaßnahmen verpflichten.

Eine Stärke von Solvency I liegt in seiner Einfachheit und der unternehmensübergreifenden Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Jedoch wird das spezifische Risikoprofil eines Unternehmens nicht berücksichtigt.

---

<sup>5</sup>bei fondgebundenen 1%

<sup>6</sup>Bei der reinen Risikolebensversicherung mit einer Laufzeit von bis zu drei Jahren beträgt der Faktor 0,1%, mit einer Laufzeit zwischen drei und fünf Jahren 0,15%.

<sup>7</sup>Die Risikosumme ist der Höchstbetrag des Risikos für den Versicherer; in der Kapitallebensversicherung ist dies die Differenz zwischen der Todesfalleistung und dem bereits gebildeten Deckungskapital, in der Risikolebensversicherung und der Unfallversicherung entspricht die Risikosumme der Versicherungssumme.



## 1.3 Solvency II

Da der Versicherungssektor in den letzten Jahrzehnten enorm an Größe und Komplexität gewonnen hat, wurde im Jahr 2001 von der EU-Kommission das Projekt Solvency II eingeleitet. Ziel dieses neuen Projekts ist es den Versicherungsnehmer zu schützen und einen Solvabilitäts-Maßstab vorzugeben, der den Risiken, denen ein Versicherer ausgesetzt ist, besser gerecht wird als im bisherigen Solvency I Abkommen. Außerdem soll die Marktentwicklung mitberücksichtigt werden und eine unnötige Überkapitalisierung vermieden werden. Bis 2012 soll Solvency II vollständig umgesetzt werden.

Solvency II wird im Gegensatz zu Solvency I Modelle beinhalten, die auf mehreren Risikofaktoren basieren und wird außerdem den Versicherern Anreiz schaffen, eigene interne Modelle zur Berechnung ihrer Solvabilitätsanforderungen einzuführen.

Ähnlich wie Basel II im Bankensektor basiert auch Solvency II auf einem 3-Säulen-Konzept, bestehend aus [3]:

**Säule 1:** Quantitative Anforderungen:

- Grundlagen für die Berechnung versicherungstechnischer Rückstellungen
- Mindestkapital-Anforderungen
- Solvabilitätskapital-Anforderungen
- Anlagevorschriften

**Säule 2:** Qualitative Anforderungen:

- Prinzipien für interne Kontrolle und Risikomanagement
- Aufsichtsrechtliche Überprüfung

**Säule 3:** Marktdisziplin:

- Offenlegung
- Transparenz

### Säule 1 - quantitative Anforderungen: Vorschriften über finanzielle Ressourcen

Säule 1 beinhaltet einige Vorschriften über versicherungstechnische Rückstellungen, Kapitalanlagen und Kapitalanforderungen.

Einer der Hauptunterschiede zwischen Solvency I und Solvency II ist die Einführung einer marktnahen Bewertung von Vermögenswerten und Verbindlichkeiten. Anhand dieser werden die Kapitalanforderungen berechnet: [6]

- Die *Solvabilitäts-Kapitalanforderung* (Solvency Capital Requirement, SCR)

„sollte eine Kapitalausstattung gewährleisten, die ein Versicherungsunternehmen in die Lage versetzt, erhebliche unvorhergesehene Verluste aufzufangen und den Versicherungsnehmern eine angemessene Sicherheit gibt, dass Zahlungen bei Fälligkeit geleistet werden. Sie sollte den Kapitalbetrag widerspiegeln, der erforderlich ist, um alle Verpflichtungen über einen bestimmten Zeithorizont mit einem definierten Konfidenzniveau zu erfüllen.“

Somit sollten alle bedeutenden quantifizierbaren Risiken, denen ein Versicherer ausgesetzt ist (Versicherungs-, Anlage-, Kredit-, Betriebs- und Liquiditätsrisiken) in ihre Berechnung einbezogen werden.

- Die *Mindestkapitalanforderung* (Minimum Capital Requirement, MCR) bezeichnet

„die Höhe des Kapitals, bei deren Unterschreitung die Aktivität eines Versicherungsunternehmens ein unannehmbares Risiko für die Versicherungsnehmer darstellen. Wenn das verfügbare Kapital eines Unternehmens unter die Mindestkapitalanforderung fällt, sollten ultimative aufsichtsrechtliche Maßnahmen ausgelöst werden. Die Mindestkapitalanforderung sollte eine einfache, robuste und objektive Größe sein.“

Für die Berechnung der Solvabilitäts-Kapitalanforderung müssen ein Risikomaß und ein Konfidenzintervall festgelegt werden. Als Risikomaß eignet sich besonders der Expected Shortfall (Definition 2.2.13), der im Gegensatz

zum Value at Risk (Definition 2.2.7) die Kriterien für ein kohärentes Risikomaß erfüllt (siehe Kapitel 2.2.4). Als Konfidenzintervall zieht CEIOPS<sup>8</sup> ein VaR-Niveau von 99,5% in Betracht, das einer Zielausfallwahrscheinlichkeit von 0,5% entspricht und legt einen Zeithorizont von einem Jahr als generelle Basis für die Solvabilitäts-Kapitalanforderungen fest.

Die Berechnung von SCR und MCR soll entweder anhand des Standardsatzes oder anhand eines internen Risikomodells des Versicherers erfolgen, dass von der Aufsichtsbehörde geprüft und genehmigt werden muss. Interne Modelle ermöglichen den Versicherern, ihr Solvabilitätskapital genau dem Risikoprofil des Unternehmens anzupassen.

In dieser Arbeit möchte ich im Weiteren hauptsächlich auf die Möglichkeiten eines internen Modells eingehen. Bevor dafür die mathematischen Grundlagen erarbeitet werden, möchte ich noch kurz auf die wichtigsten Punkte der Säulen 2 und 3 eingehen.

## **Säule 2 - Qualitative Anforderungen: aufsichtsrechtliche Überprüfung und Risikomanagement**

Der erste Teil dieser Säule beinhaltet Rechte und Pflichten der Aufsichtsbehörden, Prinzipien für die Transparenz und Verantwortlichkeit der Aufsichtsbehörden und ein Peer-Review-Verfahren zwischen den Aufsichtsbehörden.

Der zweite Teil regelt die Prinzipien für interne Kontrollsysteme und für ein solides Risikomanagement.

Wichtige Elemente sind:

- Kontrolle interner Risikomodelle
- Stresstests: Dabei wird überprüft, wie sich bestimmte Krisenszenarien (z.B. Börsencrash, wirtschaftliche Rezession, Kursschwankungen) auswirken würden
- Governance-Prozesse (Führung, Organisation des Unternehmens)
- Fit and proper Kriterien für das leitende Management (Qualifikation der Vorstände von Versicherungsunternehmen)

---

<sup>8</sup>CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) ist mit hochrangigen Vertretern der Aufsichtsbehörden für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersvorsorge in den Mitgliedstaaten der EU besetzt.

- Qualität der Risikominderung einschließlich der Rückversicherungen

Darüber hinaus sollten Risiken, die in Säule 1 nicht quantifizierbar sind, in Säule 2 qualitativ beurteilt werden.

### **Säule 3 - Marktdisziplin: Offenlegung und Transparenz**

Die dritte Säule stärkt mit Hilfe von Offenlegungs- und Transparenzvorschriften die Marktmechanismen und die risikobasierte Aufsicht. Unternehmen müssen bestimmte Informationen öffentlich bekanntmachen, die zur Marktdisziplin beitragen sollen und helfen, die Stabilität von Versicherern und Rückversicherern zu gewährleisten (Offenlegung). Zudem werden Unternehmen aufgefordert, darüber hinausgehende Informationen ihren Aufsichtsbehörden mitzuteilen (aufsichtliche Berichterstattung). Ziel ist es, ein umfassendes Bild der Risiken eines Versicherers zu vermitteln.

# Kapitel 2

## Risikomanagement

### 2.1 Risikofaktoren und Verteilungsfunktion

Für Versicherungsunternehmen ist es typisch, Verträge der selben Versicherungssparte (homogene Risiken) zu einem Portfolio zusammenzufassen und auf den zu erwarteten Gesamtschaden zu untersuchen.

**Definition 2.1.1** (Verlust).

*Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $V(t)$  der Wert eines Portfolios zum Zeitpunkt  $t$ . Für den Zeithorizont  $\Delta$  gilt: Der Verlust des Portfolios in der Periode  $[t, t + \Delta]$  ist gegeben durch:*

$$L_{[t, t+\Delta]} := -(V(t + \Delta) - V(t)).$$

Während wir annehmen, dass  $L_{[t, t+\Delta]}$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta$  gegeben ist, ist dieser Verlust zum Zeitpunkt  $t$  eine Zufallsvariable. Man nennt die Verteilung von  $L_{[t, t+\Delta]}$  die Verlustverteilung.

Da wir in fixen Perioden  $\Delta$  messen, gelte ab nun folgende Notation:

$$V_t = V(t\Delta), t \in \mathbb{N},$$

$$L_{t+1} := L_{[t\Delta, (t+1)\Delta]} = -(V_{t+1} - V_t).$$

Wir nehmen an, dass der Wert  $V_t$  eine Funktion der Zeit und eines  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors  $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})$  von Risikofaktoren ist. Es gilt also

$$V_t = f(t, Z_t), \tag{2.1}$$

wobei  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion ist.

Eine Angabe des Portfoliowertes in der Form (2.1) wird Abbildung eines Risikos genannt.

**Definition 2.1.2.**

Die Änderung der Risikofaktoren während der Periode  $[t - 1, t]$  ist gegeben durch:

$$X_t := Z_t - Z_{t-1}.$$

Aufgrund von (2.1) kann für den Verlust eines Portfolios nun geschrieben werden:

$$L_{t+1} = -(f(t + 1; Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)).$$

Da  $Z_t$  zum Zeitpunkt  $t$  bekannt ist, ist die Verteilungsfunktion nur durch die Verteilung der Veränderung der Risikofaktoren  $X_{t+1}$  bestimmt. Wir definieren den Verlustoperator

$$l_{[t]}(x) := -(f(t + 1, Z_t + x) - f(t, Z_t)) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

und haben schließlich

$$L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1}).$$

Falls  $f$  differenzierbar ist, dann lässt sich  $L_{t+1}$  approximieren durch

$$L_{t+1} \approx L_{t+1}^\Delta := - \left( f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, Z_t) X_{t+1,i} \right).$$

Dabei sei  $f_t$  die partielle Ableitung der Abbildung nach  $t$  und  $f_{z_i}$  die partielle Ableitung der Abbildung nach dem  $i$ -tem Risikofaktor.

Der zugehörige linearisierte Verlustoperator ist gegeben durch

$$l_{[t]}^\Delta(x) := - \left( f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, Z_t) x_i \right).$$

Diese Approximation ist geeignet, wenn man den Verlust als lineare Funktion der Veränderung der Risikofaktoren darstellen kann. Am günstigsten ist sie bei kleinen Veränderungen der Risikofaktoren. (Z.B. wenn wir etwas über einen kurzen Zeithorizont betrachten). Dies stellt ein Problem für Versicherungen dar, die das Risiko ihrer Portfolios meist über den Zeitraum eines Jahres messen.

### 2.1.1 Bedingte und Unbedingte Verteilung

Um die bedingte bzw. unbedingte Verlustverteilung definieren zu können, ist es notwendig, vorher einige mathematischen Begriffe zu definieren.

**Definition 2.1.3** (Filtration).

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie  $(\mathcal{F}_t), t \in T$  von  $\sigma$ -Algebren heißt Filtration, falls für alle  $s, t \in T: \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  gilt. Das heißt  $(\mathcal{F}_t)$  ist aufsteigend geordnet.

**Definition 2.1.4** (Zeitreihe).

Eine Zeitreihe ist eine Realisation eines stochastischen Prozesses in diskreter Zeit:  $X_t, t \in \mathbb{Z}$

Als Zeitreihe bezeichnet man also eine zeitlich geordnete Abfolge von Messwerten. Ist deren Verteilung invariant bezüglich einer Zeitverschiebung, nennt man sie stationär.

Sei nun  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  die Änderung der Risikofaktoren mit stationärer Verteilung  $F_x$  in  $\mathbb{R}^d$ :  $\mathcal{F}_t$  sei die gegebene Information zu einem fixen Zeitpunkt  $t$ .

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\}).$$

$\mathcal{F}_t$  wird also von vergangenen und derzeitigen Risikofaktoränderungen erzeugt und repräsentiert demnach die Geschichte bis zum Zeitpunkt  $t$ .  $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$  ist dann die bedingte Verteilung von  $X_{t+1}$  mit jetziger Information  $\mathcal{F}_t$ .

**Definition 2.1.5** (Bedingte Verlustverteilung).

Die bedingte Verlustverteilung  $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}$  ist definiert als die Verteilung des Verlustoperators  $l_{[t]}$  unter  $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ . Für  $l \in \mathbb{R}$  gilt:

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(l) = P(L_{t+1} \leq l | \mathcal{F}_t) = P(l_{[t]}(X_{t+1}) \leq l | \mathcal{F}_t).$$

Bei den meisten, für das Risikomanagement relevanten, stationären Zeitreihenmodellen ist die bedingte Verteilung nicht gleich der stationären Verteilung, aber falls  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  eine unabhängig und ident verteilte Zeitreihe ist, dann gilt:

$$F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t} = F_x \quad (= \text{stationäre Verteilung}).$$

**Definition 2.1.6** (Unbedingte Verlustverteilung).

Die unbedingte Verlustverteilung  $F_{L_{t+1}}$  ist definiert als die Verteilung des Verlustoperators  $l_{[t]}$  unter der stationären Verteilung  $F_x$  für die Risikoänderungen.

Die unbedingte Verlustverteilung ist wichtig, wenn der Zeithorizont, über den der Verlust gemessen wird, sehr groß ist. Dies ist häufig bei Versicherungen und Kreditrisikomanagement der Fall.

Falls die Risikofaktoränderungen eine Folge von iid Zufallsvariablen bilden, stimmen die bedingte und unbedingte Verlustverteilung überein.

Risikomanagement-Methoden, die auf bedingten Verlustverteilungen basieren, werden oft „Bedingtes“ oder „Dynamisches“ Risikomanagement genannt; Methoden, die auf der unbedingter Verlustverteilung basieren, nennt man „Statisches“ Risikomanagement.



## 2.2 Risikomessung

Es gibt im Wesentlichen 4 gängige Verfahren zur Messung eines Risikos [12]:

1. Nominalwert-Ansatz
2. Sensitivität gegenüber Risikofaktoren
3. Szenario basierte Risikomaße
4. Verfahren basierend auf die Verlustverteilung

### 2.2.1 Nominalwert-Ansatz

Diese Methode ist die älteste und zugleich auch einfachste Art Risiken zu quantifizieren. Hierbei wird das Risiko durch die Summe der Nominalwerte der gehaltenen Positionen eines Portfolio repräsentiert. Je nach geschätztem Risiko der Asset-Klasse, der die einzelnen Positionen angehören, können die Nominalwerte mit einem Faktor gewichtet werden. Verwendet wurde diese Methode z.B. bei Basel I:

$$\text{Cooke Ratio} : \text{Mindestkapital} \geq \text{Risikoaktiva} \times \text{Risikogewicht} \times 8\%$$

D.h. also, dass mindestens 8% der risikogewichteten Aktiva mit Eigenkapital unterlegt werden müssen. Dabei werden folgende 4 Kreditrisikoklassen unterschiedlich gewichtet [25]:

- 0% für Forderungen gegenüber staatlichen Schuldner (OECD-Staaten)
- 20% für Forderungen gegenüber Kreditinstituten
- 50% für grundpfandrechtlich gesicherte Realkredite
- 100% für alle sonstigen Risikoaktiva, d.h. alle Kredite an Unternehmen

Somit erhält man eine Schranke für die Menge des Eigenkapitals, das einem Portfolio unterlegt werden muss.

Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass zwischen Long und Short Position kein Unterschied gemacht wird, und außerdem berücksichtigt es keine Diversifikationseffekte. So kann es z.B. passieren, dass ein Portfolio bestehend aus Anleihen mehrerer Unternehmen dasselbe Risiko aufweist wie ein Portfolio mit Anleihen eines Einzigen.

### 2.2.2 Sensitivität gegenüber Risikofaktoren

Bei diesem Ansatz bilden sich die Risikomasse, die Sensitivitätskoeffizienten genannt werden, aus dem Quotient zwischen der Änderung des Portfolio-Wertes, ausgelöst durch die Änderung eines Risikofaktors. Sie geben Auskunft darüber, welchen Beitrag die verschiedenen Risikofaktoren zur Wertänderung des Portfolios leisten. Das erschwert allerdings auch die Aggregation zum Risikomaß für das Gesamtportfolio, da es nicht möglich ist, die Sensitivität bezüglich der verschiedenen Risikofaktoren zu verbinden. Das wichtigste Beispiel für Sensitivitätskoeffizienten bilden die Greeks eines Portfolios.

### 2.2.3 Szenario basierte Risikomaße

Bei diesem Verfahren werden mögliche Änderungen der Risikofaktoren in der Zukunft betrachtet.

Sei  $N$  die Anzahl von möglichen Veränderungen der Risikofaktoren und sei  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  die Szenarienmenge und  $l_{[n]}(\cdot)$  der Verlustoperator der Portfolios.

Jedem Szenario wird ein Gewicht  $w_i, 1 \leq i \leq N$  zugeordnet und für das Portfolio-Risiko ergibt sich:

$$\max \{w_1 l_{[n]}(x_1), \dots, w_N l_{[n]}(x_N)\}.$$

Das Risiko eines Portfolios ist also der maximale gewichtete Verlust des Portfolios unter allen Szenarien. Die Gewichte dienen zur Reduktion des Einflusses seltener extremer Szenarien.

### 2.2.4 Verfahren basierend auf der Verlustverteilung

Hierbei wird der Verlust entweder direkt oder anhand von Risikofaktoren mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert.

Es werden statistische Maße auf der Verlustverteilung definiert, die möglichst viel über das Risiko aussagen sollen. Verlustverteilungen können somit gut miteinander verglichen werden, solange es sich um den gleichen Zeithorizont handelt.

Ein Nachteil ist allerdings, dass es bei großen Portfolios schwierig ist Verlustverteilungen zu schätzen. Außerdem wird die Verlustverteilung anhand von historischen Daten geschätzt und deshalb können diese bei Gesetzesänderungen am Finanzmarkt unbrauchbar werden.

## Risikomaße

### Anforderungen an ein geeignetes Risikomaß

Folgende Kriterien sollten von einem Risikomaß erfüllt werden [19]:

- *Erfassung wesentlicher Risikoaspekte:* Das Risiko eines Versicherers sollte unter Einbeziehen sämtlicher Aspekte beschrieben werden und alle Risikofaktoren und ihre möglichen Auswirkungen sollten quantifiziert werden.
- *Messung in monetären Einheiten:* Die Dimension des Risikomaßes sollte Geldeinheiten betragen, um eine direkte Vergleichbarkeit des Risikopotenzials mit der Höhe des Sicherheitskapitals zu ermöglichen.
- *Anschauliche Interpretierbarkeit:* Eine verständliche Interpretation sollte die Kommunikation innerhalb des Versicherungsunternehmens und mit den Aufsichtsbehörden ermöglichen.
- *Praktikabilität:* Das Risikomaß sollte möglichst leicht zu ermitteln sein und im Idealfall eine analytische Lösung zulassen. Es sollte keine Anforderungen an zugrunde liegende Daten stellen und keine explizite Verteilungsfunktion voraussetzen.
- *Aussagefähigkeit:* Der objektive Vergleich der Ergebnisse der Risikomessung sollte zwischen einzelnen Versicherungsunternehmen gewährleistet sein.

#### Definition 2.2.1 (Risikomaß).

Sei  $\mathcal{L}$  eine Menge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ein Risikomaß auf  $\mathcal{L}$  ist eine Abbildung  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ein Risikomaß wird als Abbildung definiert, die für eine Position mit (zufälligem) Verlust  $L$  einen Wert liefert, so dass  $\rho(L) - L$  aus der Sicht der Aufsichtskontrolle akzeptabel wird. Das heißt, ein Risikomaß liefert einen Wert für das notwendige Sicherheitskapital. Falls  $\rho(L) \leq 0$  kann ein bestehendes

Sicherheitskapital um den entsprechenden Betrag reduziert werden. Einen Vorschlag zur Definition von guten Risikomaßen liefert [2] durch folgende vier Kohärenzaxiome:

- Translationsinvarianz;
- Subadditivität;
- Positive Homogenität;
- Monotonie.

**Definition 2.2.2** (Translationsinvarianz).

Ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *translationsinvariant*, wenn für alle  $L \in \mathcal{L}$  und  $l \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\rho(L + l) = \rho(L) + l.$$

Translationsinvarianz besagt, dass durch Hinzunahme eines gewissen Betrags  $l$  zu  $L$ , sich das Risikomaß genau um den Wert  $l$  verändert. Je nachdem, ob  $l$  positiv oder negativ ist, fällt oder steigt das Risikomaß.

**Definition 2.2.3** (Subadditivität).

Ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *subadditiv*, wenn für alle  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$  gilt:

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

Die Bedingung der Subadditivität fordert, dass das Risikomaß eines Portfolios nicht größer sein darf als die Summe der Risikomaße der einzelnen Positionen. Der Grundgedanke dahinter ist, dass Diversifikation das Risiko reduzieren kann.

**Definition 2.2.4** (Positive Homogenität).

Ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *positiv-homogen*, wenn für alle  $L \in \mathcal{L}$  und  $\lambda \geq 0$  gilt:

$$\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L).$$

Positive Homogenität bedeutet, dass das zu einer riskanten Position gehörende Kapital proportional zu ihrer Größe ansteigt. Diese Eigenschaft kann aus der Subadditivitätsbedingung abgeleitet werden, wenn man voraussetzt, dass bei einer Vergrößerung keine Diversifikation auftritt. (Vgl. [2])

**Definition 2.2.5** (Monotonie).

Ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *monoton*, wenn für alle  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$  mit  $L_1 \leq L_2$  gilt:

$$\rho(L_1) \leq \rho(L_2).$$

Vereinfacht formuliert bedeutet Monotonie, dass Positionen mit höherem Verlust mehr Sicherheitskapital benötigen.

Das Axiom der positiven Homogenität wird häufig kritisiert, da das Risiko  $\lambda L$  für sehr große Werte für  $\lambda$  Liquiditätsprobleme verursachen kann. Daher sollte zumindest für gewisse  $\lambda$

$$\rho(\lambda L) \geq \lambda \rho(L),$$

gelten. Dies ist jedoch aufgrund der Subadditivität unmöglich, da für  $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(nL) = \rho(L + \dots + L) \leq n\rho(L)$$

gilt. Dies führt zu einer neuen Klasse an Risiken:

**Definition 2.2.6** (Konvexität).

Ein Risikomaß  $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, wenn für alle  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2).$$

Ein konvexes Risikomaß erfüllt die Bedingungen der Translationsinvarianz und der Monotonie. Die Bedingung der Subadditivität und der positiven Homogenität wurden jedoch gelockert und durch die schwächere Bedingung der Konvexität ersetzt. Diversifikationseffekte können dennoch auch durch konvexe Risikomaße abgebildet werden.

### Zentrale Momente als Risikomaß - Varianz

Die Varianz bzw. die Standardabweichung wird vor allem in der Portfolio-Theorie wegen ihrer einfachen rechnerischen Handhabung und ihrer anschaulichen Interpretierbarkeit als Risikomaß verwendet. Allerdings gibt es zwei große Kritikpunkte: Zum einen muss das 2. Moment der Verlustverteilung existieren, zum anderen liegt der größte Kritikpunkt darin, dass zwischen positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwert nicht unterschieden wird. Das heißt also, dass Gewinne und Verluste die Standardabweichung gleichermaßen beeinflussen. Die Varianz ist deshalb nur für symmetrische Verteilungen um den Mittelwert, wie z.B. die Normalverteilung oder die Student t - Verteilung, gut geeignet.

## Quantilbasierte Risikomaße - Value at Risk und Expected Shortfall

**Definition 2.2.7** (Value at Risk).

Sei  $L$  ein Risiko und  $\alpha \in (0, 1)$  ein gegebenes Konfidenzniveau.  $\text{VaR}_\alpha(L)$  ist die kleinste Zahl  $l$ , sodass  $P(L \geq l) \leq 1 - \alpha$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(L) &= \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \geq l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Ein typischer Wert für das Marktrisiko eines Portfolios ist  $\alpha = 0,995$  (über den Zeithorizont von 10 Tagen). Für Kredit- und Operationelles Risiko wird für gewöhnlich  $\alpha = 0,999$  und als Zeithorizont ein Jahr gewählt.

**Definition 2.2.8** (verallgemeinerte inverse Funktion).

Sei  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton steigende Funktion (d.h.  $x \leq y \Rightarrow T(x) \leq T(y)$ ). Die Funktion  $T^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}$  heißt verallgemeinerte inverse Funktion von  $T$ . Es gilt  $\inf(\emptyset) = \infty$ .

**Proposition 2.2.9** (Eigenschaften der verallgemeinerten inversen Funktion). [12, Proposition A.3]

Sei  $T$  monoton steigend. Dann gilt:

- (1)  $T^{-1}$  ist eine monoton steigende, links-stetige Funktion.
- (2)  $T$  ist stetig  $\Leftrightarrow T^{-1}$  ist streng monoton steigend.
- (3)  $T$  ist streng monoton steigend  $\Leftrightarrow T^{-1}$  ist stetig.

Falls  $T^{-1} < \infty$  gilt weiters:

- (4) Falls  $T$  rechts-stetig,  $T(x) \geq y \Leftrightarrow T^{-1}(y) \leq x$ .
- (5)  $T^{-1} \circ T(x) \leq x$ .
- (6)  $T \circ T^{-1}(y) \geq y$ .
- (7)  $T$  ist streng monoton steigend  $\Rightarrow T^{-1} \circ T(x) = x$ .
- (8)  $T$  ist stetig  $\Rightarrow T \circ T^{-1}(y) = y$ .

**Lemma 2.2.10.** [12, Lemma A.2]

1. Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $T$  eine monoton wachsende Funktion, dann gilt  $\{X \leq x\} \subset \{T(X) \leq T(x)\}$  und

$$P(T(X) \leq T(x)) = P(X \leq x) + P(T(X) = T(x), X > x).$$

2. Sei  $F$  die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $X$ , dann gilt  $P(F(X) \leq F(x)) = P(X \leq x)$ .

**Definition 2.2.11** ( $\alpha$ -Quantil).

Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Verteilungsfunktion. Die verallgemeinerte inverse Funktion  $F^{-1}$  heißt Quantil-Funktion von  $F$ .

Für ein  $\alpha \in (0, 1)$  heißt

$$q_\alpha(F) := F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\},$$

das  $\alpha$ -Quantil von  $F$ .

**Proposition 2.2.12.**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ ,  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Ferner sei  $F^{-1}$  die Pseudoinverse von  $F$ , d.h.  $F^{-1}(u) = \inf\{x | F(x) \geq u\}$ ,  $u \in (0, 1)$ . Dann gilt:

- (1) *Quantiltransformation:* Ist  $U \sim U(0, 1)$  gleichverteilt, so hat die Zufallsvariable  $F^{-1}(U)$  die Verteilungsfunktion  $F$ :  $P(F^{-1}(U) \leq x) = F(x)$ .
- (2) *Wahrscheinlichkeitstransformation:* Ist  $F$  stetig, so ist  $F(X)$  eine auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetig gleichverteilte Zufallsvariable:  $F(X) \sim U(0, 1)$ .

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $u \in [0, 1]$ .

Aus Punkt (4) der Proposition 2.2.9 folgt, dass  $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$ , womit Punkt (1) gezeigt ist. Ist  $F$  außerdem stetig gilt laut Punkt (2) von Proposition 2.2.9:

$$\begin{aligned} P(F(X) \leq u) &= P(F^{-1} \circ F(X) \leq F^{-1}(u)) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u)) \\ &= F \circ F^{-1}(u) = u, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung Proposition 2.2.9, Punkt (8) angewandt wurde. Somit ist auch Punkt (2) bewiesen.  $\square$

Für den Verlust  $L$  und seine Verteilungsfunktion  $F$  gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(F).$$

Für die Anwendung des VaR spricht die allgemeine Anerkanntheit als Risikomaß (auch bei Basel II verwendet). Einen großen Nachteil sieht man allerdings darin, dass der VaR eines der 4 Axiome der kohärenten Risikomaße, nämlich die Subadditivität, nicht erfüllt. Das bedeutet, dass der VaR einer Summe von Zufallsvariablen grundsätzlich nicht durch Aufsummieren der einzelnen VaR Werte der Zufallsvariablen abgeschätzt werden kann.

Ein weiterer Kritikpunkt ist, dass der VaR nur einen einzigen Punkt der Verteilungsfunktion betrachtet und das Risikopotenzial jenseits des vorgegebenen Wahrscheinlichkeits-Niveaus  $(1 - \alpha)$  unberücksichtigt lässt, d.h. er gibt keine Auskunft darüber, wie hoch der Verlust ist, wenn der „worst case“ eintritt.

Gegenüber dem VaR gibt der Expected Shortfall (ES) nicht nur Auskunft über die Verlustwahrscheinlichkeit, sondern auch über die Verlusthöhe.

**Definition 2.2.13** (Expected Shortfall).

Sei  $\alpha$  ein vorgegebenes Konfidenzniveau und  $L$  eine Verlust mit Verteilungsfunktion  $F_L$ .

$$ES_\alpha := \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 F_L^{-1}(u) du,$$

wobei  $F_L^{-1}$  die inverse Verteilungsfunktion (Quantilfunktion) von  $L$  ist.

Da der VaR durch die Quantilfunktion gegeben ist, kann für den Expected Shortfall auch

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du$$

geschrieben werden.

**Lemma 2.2.14.**

Sei  $L$  eine integrierbare Verlustfunktion mit stetiger Verteilungsfunktion  $F_L$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt:

$$ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1 - \alpha} = E(L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha),$$

mit  $q_\alpha(L) = F_L^{-1}$ .



*Beweis.* Sei  $U$  eine im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable. Dann hat die Quantilfunktion  $F_L^{-1}(U)$  die Verteilungsfunktion  $F_L$  (vgl. Proposition 2.2.12):

$$P(F_L^{-1}(U) \leq x) = F_L(x).$$

Zu zeigen ist, dass  $E(L; L \geq q_\alpha(L)) = \int_\alpha^1 F_L^{-1}(u) du$ . Zunächst bemerken wir, dass

$$E(L; L \geq q_\alpha(L)) = E(F_L^{-1}(U); F_L^{-1}(U) \geq F_L^{-1}(\alpha)) = (*)$$

Da  $F_L$  stetig ist, folgt mit Proposition 2.2.9

$$(*) = E(F_L^{-1}(U); U \geq \alpha)$$

und weiter

$$E(L; L \geq q_\alpha(L)) = E(F_L^{-1}(U); U \geq \alpha) = \int_\alpha^1 F_L^{-1}(u) du.$$

Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, dass für eine stetige Verlustverteilung  $F_L$  gilt:

$$P(L \geq q_\alpha(L)) = 1 - \alpha.$$

□

### Partialmomente als Risikomaß

Partialmomente sind Risikomaße, die auf dem unteren (Lower Partial Moments, LPM) bzw. oberen (Upper Partial Moments, UPM) Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung basieren. Bei der Risikomessung wird ein kritischer Wert festgelegt und danach werden nur jene Werte betrachtet, die diese Trennlinie unterschreiten bzw. überschreiten.

Da in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf hohe Verluste gerichtet ist, betrachten wir an dieser Stelle nur Risiken im oberen Tail der Verlustverteilung und definieren das obere Partialmoment  $n$ -ter Ordnung wie folgt:

$$UPM_n(L, r) = \int_r^\infty (l - r)^n f(l) dl,$$

wobei  $r$  den Referenzwert und  $f(l)$  die Dichtefunktion des Verlusts  $L$  bezeichnet. Das obere Partialmoment nullter Ordnung

$$UPM_0(L, r) = \int_r^\infty f(l) dl = P(L \geq r),$$

gibt die Exzess-Wahrscheinlichkeit an, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Verlust  $L$  mit Dichtefunktion  $f(l)$  den kritischen Wert  $r$  überschreitet. Interpretiert man  $r$  als Sicherheitsmittel des Versicherungsunternehmens, gibt die Exzess-Wahrscheinlichkeit die Insolvenzwahrscheinlichkeit an. Allerdings bleibt die Höhe der möglichen Überschreitung des Schwellwerts unberücksichtigt.

Im Gegensatz dazu wird beim UPM erster Ordnung, dem Exzess-Erwartungswert nicht nur die Eintrittswahrscheinlichkeit, sondern auch das Ausmaß der möglichen Überschreitung mitberücksichtigt. Die Überschreitungen werden proportional zu ihrer Höhe bewertet:

$$UPM_1(L, r) = \int_r^\infty (l - r)f(l)dl = E[\max\{(L - r), 0\}].$$

Das obere Partialmoment erster Ordnung verfügt über die Eigenschaften der Translationsinvarianz, Subadditivität, positiven Homogenität sowie der Monotonie und erfüllt somit sämtliche Kriterien eines kohärenten Risikomaßes.

## 2.3 Standardmethoden zur Bemessung von Marktrisiken

In diesem Kapitel möchte ich einen kurzen Überblick über die gängigsten Standardmethoden zur Berechnung von Marktrisiken geben. Für eine ausführlichere Behandlung sei auf [12] verwiesen.

Man unterscheidet zwischen Simulationsmodellen und analytischen Modellen, denen eine theoretisch fundierte Verteilungsannahme für die Risikofaktoren zugrunde liegt. Folgende Methoden werden vor allem zur Bemessung von Risiken über einen kurzen Zeitraum (z.B. einen Tag, zwei Wochen) verwendet.

### 2.3.1 Varianz-Kovarianz Methode

Bei dieser Methode wird davon ausgegangen, dass sich die Risikofaktorenveränderungen  $X_{t+1}$  durch eine multivariate Normalverteilung (bedingt oder unbedingt) charakterisieren lassen.

$$X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma),$$

wobei  $\mu$  der Vektor der Mittelwerte der einzelnen Zufallsvariablen ist und  $\Sigma$  die Kovarianzmatrix der Verteilung.

Es wird angenommen, dass der linearisierte Verlust eine ausreichend exakte Approximation des effektiven Verlustes ist. Aus diesen Informationen lässt sich nun Mittelwert und Varianz der linearisierten Verlustverteilung berechnen und daraus wiederum ergeben sich Value-at-Risk und Expected Shortfall.

$$\text{VaR} = \mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(\alpha),$$

$$\text{ES} = \mu_L + \sigma_L \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha},$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable und  $\Phi^{-1}(\alpha)$  dessen  $\alpha$ -Quantil ist.

Nun müssen die Parameter der multivariaten Normalverteilung  $N_d(\mu, \Sigma)$  durch historische Beobachtungen der Risikofaktorveränderungen geschätzt werden.  $\mu$  wird dabei durch den Vektor der Mittelwerte der Stichprobe der Risikoveränderungen und  $\Sigma$  durch die Kovarianz der Stichprobe geschätzt.

*Vor- und Nachteile der Varianz-Kovarianz Methode:*

Ein großer Vorteil dieser Methode ist die einfache analytische Art Risikomaße zu berechnen, und dass hierbei keine Simulation notwendig ist. Jedoch stellt die Linearisierung des Verlustes und die Modellierung der Risikofaktorveränderungen durch eine multivariate Normalverteilung oft ein großes Problem dar. Allerdings ist diese Methode nicht nur an die multivariate Normalverteilung gebunden, sie kann auch auf die multivariate t-Verteilung aufgebaut werden.

### 2.3.2 Historische Simulation

Bei der Historischen Simulation wird von in der Vergangenheit aufgetretenen Wertveränderungen auf die zukünftigen Werte geschlossen. Man nimmt an, die Risikofaktorveränderungen seien unabhängig und identisch verteilt. Zur Berechnung von Value-at-Risk und Expected Shortfall wendet man unzählige ermittelte Veränderungsdaten auf den heutigen Wert des Verlustes an und sortiert die sich ergebenden möglichen Verlustwerte nach ihrer Größe.

*Vor- und Nachteile der Historischen Simulation:*

Ein Vorteil dieser Methode ist, dass keine Parameter geschätzt werden müssen und sie darum sehr einfach implementiert werden kann. Außerdem wird die empirische Verteilung auch in kein Verteilungsmodell gezwungen (schiefe Verteilungen werden nicht durch symmetrische angenähert).

Ein großer Nachteil ist allerdings, dass sehr viele historische Daten notwendig sind um eine zuverlässige Schätzung des empirischen Quantils zu bekommen. Diese Schätzung impliziert, dass der geschätzte Verlust nicht größer als bereits historisch realisierte Verluste sein kann.

### 2.3.3 Monte-Carlo-Simulation

Bei der Monte-Carlo-Simulation werden beliebige Verteilungstypen und deren Verteilungsparameter für die Veränderung der Risikofaktoren angenommen. Bei dieser Wahl ist man vollkommen frei, solange eine Anpassung an empirische Daten der Vergangenheit möglich ist. Auf dieser Grundlage wird eine Verteilung für die zukünftige Entwicklung des Verlustes auf Basis der Risikofaktoren erzeugt. Der Simulationsvorgang wird so lange wiederholt, bis sich die Verlustverteilung stabilisiert.

*Vor- und Nachteile der Monte-Carlo-Simulation:*

Ein Vorteil dieser Methode ist die große Flexibilität, allerdings ist sie sehr rechenintensiv, da eine große Anzahl von Simulationen notwendig ist, um gute Schätzwerte zu bekommen.

Die bisher vorgestellten Methoden zur Bemessung eines Risikos berücksichtigen meist nicht die Abhängigkeiten zwischen den Einzelrisiken, die von großer Bedeutung sind, um Diversifikationseffekte miteinzubeziehen. Um dies zu ermöglichen werden im folgenden Kapitel Methoden zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen vorgestellt.



# Kapitel 3

## Abhängigkeitsberechnungen mit Copulas

### 3.1 Motivation

In Portfolios von Versicherungen finden sich oft verschiedene Risiken, bei denen sich möglicherweise Abhängigkeiten beobachten lassen (z.B.: Sturm- und Hochwasserschäden in der Sachversicherung). Diese Abhängigkeiten können sowohl Schadenshöhe, als auch die Schadensfrequenz beeinflussen. Deswegen ist es notwendig anhand einer Portfolioanalyse zu untersuchen, inwieweit kumulative Schäden auftreten können, welche das Versicherungsunternehmen in finanzielle Schwierigkeiten bringen.

Aufgrund der einfachen Handhabung wird in der Praxis oft die lineare Korrelation zur Beschreibung von stochastischen Abhängigkeiten angewandt. Jedoch findet man darin oft nicht genügend Information über die Abhängigkeitsstrukturen. So kann es beispielsweise sein, dass bei gleicher Randverteilung und gleicher linearer Korrelation deutliche Unterschiede in der Abhängigkeitsstruktur auftreten.

Eine bessere Alternative stochastische Abhängigkeiten zu beschreiben liefert das Konzept der Copulas, bei dem sogenannte Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformationen und Quantil-Transformationen eine große Rolle spielen.

In diesem Kapitel wird das grundlegende Konzept der Copulas eingeführt und einige der wichtigsten Eigenschaften erläutert. Für ausführlichere Informationen sei auf [24] verwiesen.

Die Abhängigkeit zwischen reellwertigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ist be-

geschrieben durch ihre gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Die Idee die Verteilungsfunktion  $F$  in Abhängigkeits- und Randverteilungsproblematik zu trennen, führt zum Konzept der Copulas.

**Definition 3.1.1** (Copula).

Eine  $n$ -dimensionale Copula  $C$  ist eine Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]^n$  mit gleichverteilten Randverteilungen  $U(0, 1)$ .

Es gilt:  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  ist Copula genau dann wenn,

- (1)  $C(u_1, \dots, u_n)$  ist monoton steigend in jeder Komponente.
- (2)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u_i \in [0, 1]$ .
- (3) Für alle  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  mit  $a_i \leq b_i$  gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

wobei  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Die erste Bedingung gilt stets für multivariate Verteilungsfunktionen, die zweite Bedingung ist Voraussetzung für gleichverteilte Randverteilungen. Die dritte Bedingung sorgt dafür, dass einem Zufallsvektor  $\mathbf{U}$  mit Verteilungsfunktion  $C$  eine positive Wahrscheinlichkeit  $P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq U_n \leq b_n)$  zugeordnet wird.

Der folgende, in der Copula Theorie fundamentale Satz von Sklar zeigt, dass es möglich ist, jede mehrdimensionale Verteilung in ihre Randverteilungen und eine zugehörige Abhängigkeitsstruktur aufzuspalten.

**Satz 3.1.2** (Sklar's Theorem).

Sei  $F : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow [0, 1]$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$ . Dann existiert eine  $n$ -dimensionale Copula  $C$ , so dass für alle  $x \in \bar{\mathbb{R}}^n$  gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Sind alle  $F_1, \dots, F_n$  stetig, so ist  $C$  eindeutig im gesamten Definitionsbereich  $[0, 1]^n$ . Ansonsten ist  $C$  eindeutig auf  $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ , wobei  $\text{Ran}F_i$  den Bildbereich von  $F_i$  bezeichnet.



Der folgende Beweis zeigt die Existenz und Eindeutigkeit der Copula, falls die Verteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  stetig sind. Für den vollständigen Beweis siehe [24].

*Beweis.* Falls  $F$  Verteilungsfunktion von der Zufallsvariable  $X$  ist, dann gilt laut Lemma 2.2.10 für alle  $x_1, \dots, x_n$  in  $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ :

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \end{aligned}$$

Falls  $F_1, \dots, F_n$  stetig, folgt aus Proposition 2.2.12 und Definition 3.1.1 die Existenz der Copula.

Da für verallgemeinerte inverse Funktionen laut Proposition 2.2.9 folgendes gilt:

$$F \text{ ist stetig} \Rightarrow F \circ F^{-1}(x) = x,$$

kann die Copula mit Hilfe der gemeinsamen Verteilungsfunktion  $F$  und der Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  ausgedrückt werden:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

womit die Eindeutigkeit bewiesen ist. □

Ist  $C(u_1, \dots, u_n)$  eine Copula mit streng monotonen und stetigen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n$  und gemeinsamer Verteilungsfunktion  $F$ , so ist die zugehörige Dichte gegeben durch

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}.$$

### Korollar 3.1.3.

Sei  $H : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]^n$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit eindimensionalen, stetigen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$ . Weiters sei  $C$  die nach Satz 3.1.2 existierende Copula. Dann gilt für alle  $u \in [0, 1]^n$ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

wobei  $F_i^{-1}(u_i)$  für alle  $u_i \in [0, 1]$  die Pseudo-Inverse der Verteilungsfunktion  $F_i$  ist.

Eine wichtige Eigenschaft von Copulafunktionen ist ihre Invarianz unter streng monoton steigenden Transformationen der Randverteilungen.

**Proposition 3.1.4.**

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und Copula  $C$ . Weiters seien  $T_1, \dots, T_n$  streng monoton steigende Funktionen. Dann besitzt  $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$  ebenfalls die Copula  $C$ .

*Beweis.* Zuerst zeigen wir, dass die transformierte Zufallsvariable  $T_i(X_i)$  die stetige Verteilung  $\tilde{F}_i(x) := F_i \circ T_i^{-1}(x)$  besitzt. Proposition 2.2.9(Punkt(7)) impliziert

$$\tilde{F}_i(x) = P(X_i \leq T_i^{-1}(x)) = P(T_i^{-1} \circ T_i(X_i) \leq T_i^{-1}(x)).$$

Da  $T_i^{-1}$  eine monoton wachsende Funktion ist, folgern wir aus Lemma 2.2.10

$$\tilde{F}_i(x) = P(T_i(X_i) \leq x) + P(X_i = T_i^{-1}(x), T_i(X_i) > x),$$

wobei die zweite Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite 0 ist, da  $F_i$  stetig ist. Da  $C$  die Copula von  $(X_1, \dots, X_n)$  ist, gilt

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= P(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_n(X_n) \leq u_n) \\ &= P(\tilde{F}_1(T_1(X_1)) \leq u_1, \dots, \tilde{F}_n(T_n(X_n)) \leq u_n), \end{aligned}$$

weil  $\tilde{F}_i \circ T_i(x) = F_i \circ T_i^{-1} \circ T_i(x) = F_i(x)$ . Somit folgt, dass  $C$  auch die Copula von  $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$  ist.  $\square$

Der folgende Satz führt die, für Abhängigkeitsmessungen sehr wichtigen, Fréchet Schranken ein.

**Satz 3.1.5** (Fréchet-Hoeffding Schranken).

Für jede Copula  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  gelten folgende Schranken:

$$W_n(u) := \left\{ \sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0 \right\} \leq C(u) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\} =: M_n(u)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung wird als untere Fréchet-Hoeffding Schranke bezeichnet und ist eine Copula für  $n = 2$ . Dies entspricht dann der perfekten negativen Abhängigkeit, Kontramonotonie genannt. Die rechte Seite der Ungleichung wird als obere Fréchet-Hoeffding Schranke bezeichnet und ist in jeder Dimension eine Copula. Sie entspricht der perfekten positiven Abhängigkeit, Komonotonie genannt.

*Beweis.* Zuerst wollen wir die rechte Seite  $C(u) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\} =: M_n(u)$  der Ungleichung zeigen. Seien dazu  $U_i$  für  $i = 1, \dots, n$  auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt:

Für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\bigcap_{j=1}^n \{U_j \leq u_j\} \subset \{U_i \leq u_i\},$$

womit die Ungleichung folgt wegen

$$C(u_1, \dots, u_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{U_j \leq u_j\}\right)$$

und  $P(U_i \leq u_i) = u_i$ .

Für die linke Seite  $W_n(u) := \{\sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0\} \leq C(u)$  der Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n \{U_j \leq u_j\}\right) = \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^n \{U_j > u_j\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{j=1}^n P(U_j > u_j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n (1 - u_j) = 1 - n + \sum_{j=1}^n u_j. \end{aligned}$$

□

**Satz 3.1.6.**

Sei  $C$  eine Copula. Für jedes  $u \in [0, 1]$  existiert die partielle Ableitung  $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$  fast überall in  $[0, 1]$ . Es gilt:

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1.$$

Eine analoge Aussage lässt sich für die partielle Ableitung  $\frac{\partial C}{\partial u}$  treffen.

Für einen Beweis siehe [24].

**3.1.1 Beispiele für Copulas**

**Definition 3.1.7** (Unabhängigkeitscopula).

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Die Komponenten eines Zufallsvektors  $X$  mit stetig verteilten Komponenten sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn  $\Pi$  die Copula von  $X$  ist (vgl. Satz von Sklar), da die Unabhängigkeit äquivalent dazu ist, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  durch das Produkt der Randverteilungen gegeben ist.

**Definition 3.1.8** (Komonotonie-Copula).

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min \{u_1, \dots, u_n\}.$$

Die Komonotonie-Copula ist gegeben durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke und beschreibt perfekte positive stochastische Abhängigkeit.

$M$  ist Verteilungsfunktion von  $(U, U)$ , wobei  $U$  eine stetig auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable ist.

**Definition 3.1.9** (Kontramonotonie-Copula).

$$W(u_1, u_2) = \max \{u_1 + u_2 - 1, 0\}.$$

Die Kontramonotonie-Copula ist gegeben durch die zweidimensionale untere Fréchet-Hoeffding-Schranke und beschreibt perfekte negative stochastische Abhängigkeit.  $W$  ist Verteilungsfunktion von  $(U, 1 - U)$ .

Die folgende Methode dient dazu, einfach und schnell eine große Auswahl an Copulas zu schaffen [15].

Sei  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(y)dy = 0$  und  $f(x)g(y) \geq -1$  für alle  $x, y \in [0, 1]$ . Dann ist  $h(x, y) = 1 + f(x)g(y)$  eine bivariate Dichtefunktion auf  $[0, 1]^2$ . Daraus folgt, dass

$$C(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(u, v)dudv = xy + \left( \int_0^x f(u)du \right) \left( \int_0^y g(v)dv \right)$$

eine Copula ist. Wählt man z.B.  $f(x) = \alpha(1 - 2x), g(y) = (1 - 2y), |\alpha| \leq 1$ , erhält man die Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula  $C(x, y) = xy [1 + \alpha(1 - x)(1 - y)]$ .

## 3.2 Abhängigkeitsmaße

In diesem Kapitel werden drei häufig verwendete Kennzahlen vorgestellt, um Abhängigkeiten von Zufallsvariablen zu messen. Diese Maße dienen als Parameter für Copulas, wobei allerdings auf die Wahl des Maßes zu achten ist. Es wird sich zeigen, dass die lineare Korrelationsmatrix nur bei elliptisch verteilten Modellen als Parameter verwendet werden kann, nicht aber bei anderen multivariaten Verteilungen. Die Rangkorrelations- und Tail-Abhängigkeitskoeffizienten hingegen sind Maße, die auf Copulas basieren und können zur Parametrisierung dieser verwendet werden.

### 3.2.1 Lineare Korrelation

Die in der Praxis am häufigsten verwendete Methode um Abhängigkeiten zwischen zwei Zufallsvariablen zu messen ist die lineare Korrelation.

**Definition 3.2.1** (Korrelationskoeffizient).

Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen mit endlichen, von Null verschiedenen Varianzen. Der lineare Korrelationskoeffizient von  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

wobei  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  die Kovarianz zwischen  $X$  und  $Y$  und  $\text{Var}(X)$  bzw.  $\text{Var}(Y)$  die Varianzen von  $X$  und  $Y$  beschreiben.

Der lineare Korrelationskoeffizient beschreibt also das Verhältnis aus Kovarianz und dem Produkt der Standardabweichungen der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Die lineare Korrelation ist ein Maß für lineare Abhängigkeit. Falls die beiden Zufallsvariablen voneinander unabhängig sind, gilt  $\rho(X, Y) = 0$  (da  $\text{Cov}[X, Y] = 0$ , daraus folgt, dass  $X$  und  $Y$  unkorreliert sind). Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Im Falle perfekter linearer Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$ , also  $P(Y = aX + b) = 1$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$  gilt  $|\rho(X, Y)| = 1$ . In allen anderen Fällen gilt  $-1 < \rho(X, Y) < 1$ .

Der lineare Korrelationskoeffizient ist zwar einfach zu berechnen, aber nicht immer führt das Ergebnis zu einem aussagekräftigen Abhängigkeitsmaß. Probleme treten z.B. bei heavy-tailed Verteilungen auf, da hier die zweiten Momente nicht existieren müssen. Geeignet ist der lineare Korrelationskoeffizient

vor allem dann, wenn eine sphärische (Definition 3.3.1) oder elliptische Verteilung (Definition 3.3.3) vorliegt.

Die Verallgemeinerung des Korrelationskoeffizienten auf mehr als zwei Zufallsvariablen, erfolgt durch paarweises Zusammenfügen der Kovarianzen und Korrelationen in  $n \times n$  Matrizen  $Cov[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  und  $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , wobei  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  und  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  Zufallsvektoren in  $\mathbb{R}^n$  sind. Solange die einzelnen Varianzen endlich sind, gilt:

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{ij} &:= Cov[X_i, Y_j], \\ \rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{ij} &:= \rho(X_i, Y_j) \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Diese Matrizen sind symmetrisch und positiv semi-definit.

**Definition 3.2.2.**

Zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  (oder ihre Verteilungen) sind vom selben Typ, falls Konstanten  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$  existieren, sodass

$$X \stackrel{d}{=} aY + b.$$

Der folgende Satz zeigt nun, welche Korrelationen für gegebene Randverteilungen möglich sind.

**Satz 3.2.3.**

Sei  $(X, Y)$  ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  und einer nicht weiter spezifizierten Copula. Weiters seien  $0 < Var(X) < \infty$  und  $0 < Var(Y) < \infty$ . Dann gilt:

- (1) Die Menge der möglichen linearen Korrelationen von  $X$  und  $Y$  bildet ein abgeschlossenes Intervall  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$  mit  $\rho_{min} < 0 < \rho_{max}$ .
- (2) Es gilt  $\rho = \rho_{min}$  genau dann, wenn  $X$  und  $Y$  die untere Fréchet-Höfding-Grenze als Copula haben und  $\rho = \rho_{max}$  genau dann wenn die obere Fréchet-Höfding-Grenze die Copula von  $(X, Y)$  ist.
- (3) Es gilt  $\rho_{max} = 1$  genau dann, wenn  $X$  und  $Y$  vom selben Typ sind. Es gilt  $\rho_{min} = -1$  genau dann, wenn  $X$  und  $-Y$  vom selben Typ sind.

Um den vorigen Satz beweisen zu können, wird folgende Kovarianzformel von Höfding benötigt:

**Lemma 3.2.4.**

Sei  $F$  gemeinsame Verteilungsfunktion von  $(X, Y)$  mit Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$ . Dann ist die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  gegeben durch:

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x, y) - F_1(x)F_2(y)) dx dy. \quad (3.1)$$

Für einen Beweis des Lemmas siehe [12, Seite 204].

*Beweis von Satz 3.2.3.* Wie bereits in Satz 3.1.5 erwähnt lauten die Fréchet-Höfding-Grenzen für bivariate Verteilungsfunktionen:

$$\max \{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\} \leq F(x, y) \leq \min \{F_1(x), F_2(y)\},$$

wobei  $F$  die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $(X, Y)$  bezeichnet. Bei fest gewählten Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$  wird nach der Kovarianzformel (3.1) die Kovarianz genau dann maximal, wenn die obere Fréchet-Höfding-Grenze die Copula von  $(X, Y)$  ist. Analog wird die Kovarianz genau dann minimiert, wenn die untere Fréchet-Höfding-Grenze die Copula ist. Damit ist Punkt (2) des Satzes bewiesen.

Punkt (1):

Es gilt:  $\rho_{max} \geq 0$ . Der Fall  $\rho_{max} = 0$  kann aber ausgeschlossen werden, da ansonsten  $\min \{F_1(x), F_2(y)\} = F_1(x)F_2(y)$  für alle  $x, y$  gelten würde. Das wäre nur möglich, wenn entweder die Verteilung von  $X$  oder von  $Y$  eine Einpunktverteilung wäre. Da aber vorausgesetzt wurde, dass  $\text{Var}(X) > 0$  und  $\text{Var}(Y) > 0$ , ist dieser Fall ausgeschlossen. Also gilt  $\rho_{max} > 0$ . Analog wird gezeigt:  $\rho_{min} < 0$ .

Seien  $W(F_1, F_2)$  und  $M(F_1, F_2)$  die untere bzw. obere Fréchet-Schranke, dann hat

$$\lambda W(F_1, F_2) + (1 - \lambda)M(F_1, F_2), 0 \leq \lambda \leq 1$$

Korrelation  $\lambda\rho_{min} + (1 - \lambda)\rho_{max}$ . Dadurch kann für jeden Wert  $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$

$$\lambda = \frac{\rho_{max} - \rho}{\rho_{max} - \rho_{min}}$$

gesetzt werden um eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Korrelationswert  $\rho$  zu bekommen.

Da  $\rho_{min} = -1$  oder  $\rho_{max} = 1$  genau dann gilt, wenn zwischen  $X$  und  $Y$  eine lineare Beziehung besteht, folgt Punkt (3).  $\square$



### 3.2.2 Rangkorrelation

Neben dem linearen Korrelationskoeffizienten gibt es zwei weitere, in der Praxis häufig verwendete Abhängigkeitsmaße für bivariate Zufallsvektoren. Im Gegensatz zum linearen Korrelationskoeffizienten, der von den Randverteilungen und der Copula abhängig ist, hängen diese Rangabhängigkeitsmaße nur von der Copula der bivariaten Verteilung ab und basieren nicht auf den Momenten. Um die beiden Rangabhängigkeitsmaße Kendall's tau und Spearman's rho zu definieren, müssen zuerst die Begriffe Konkordanz und Diskordanz geklärt werden.

**Definition 3.2.5.**

Man nennt zwei Beobachtungen  $(x, y)$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  des Zufallsvektors  $(X, Y)$  konkordant, falls  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$  und diskordant, falls  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$ .

**Definition 3.2.6** (Kendall's tau).

Für einen Zufallsvektor  $(X, Y)$  ist Kendall's tau folgendermaßen definiert

$$\tau(X, Y) = P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) - P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\right),$$

wobei  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  eine unabhängige Kopie von  $(X, Y)$  ist (d.h. ein zweiter Vektor mit gleicher Verteilung wie  $(X, Y)$ , allerdings unabhängig vom ersten).

Kendall's tau ist demnach die Differenz der Wahrscheinlichkeiten von Konkordanz und Diskordanz von  $(X, Y)$  und  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ .

**Satz 3.2.7.**

Es seien  $(X, Y)$  und  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  unabhängig voneinander verteilte Zufallsvektoren mit stetigen Komponenten und Verteilungsfunktionen  $H$  und  $\tilde{H}$  sowie paarweise identischen Randverteilungen  $F$  (von  $X$  und  $\tilde{X}$ ) und  $G$  (von  $Y$  und  $\tilde{Y}$ ). Weiters seien  $C$  und  $\tilde{C}$  die Copulas von  $(X, Y)$  und  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , so dass  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$  und  $\tilde{H}(x, y) = \tilde{C}(F(x), G(y))$ .  $Q$  sei die Differenz zwischen den Wahrscheinlichkeiten von Konkordanz und Diskordanz von  $(X, Y)$  und  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ :

$$Q = P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) - P\left\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\right\}.$$

Dann gilt:

$$Q = Q(C, \tilde{C}) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(u, v) dC(u, v) - 1.$$

*Beweis.* Da alle Zufallsvariablen stetig sind, gilt:

$$P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\right) = 1 - P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right);$$

also

$$Q = 2P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) - 1.$$

Weiters folgt aus der Additivität der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) = P(X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}) + P(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}).$$

Diese beiden Summanden können nun separat betrachtet werden. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} P(X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}) &= P(\tilde{X} < X, \tilde{Y} < Y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P(\tilde{X} < x, \tilde{Y} < y) dC(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{C}(F(x), G(y)) dC(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Transformation  $u = F(x)$  und  $v = G(y)$  folgt

$$P(X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(u, v) dC(u, v).$$

Ähnlich gilt:

$$\begin{aligned} P(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P(\tilde{X} > x, \tilde{Y} > y) dC(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\{1 - F(x) - G(y) + \tilde{C}(F(x), G(y))\right\} dC(F(x), G(y)) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{1 - u - v + \tilde{C}(u, v)\right\} dC(u, v). \end{aligned}$$

Da  $C$  die gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors  $(U, V)$  ist, wobei  $U$  und  $V$  gleichverteilten Zufallsvariablen auf  $[0, 1]$  sind und  $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 1/2$ , gilt:

$$P\left(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(u, v) dC(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(u, v) dC(u, v),$$

und weiters

$$P\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) = 2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}(u, v) dC(u, v).$$

□

**Definition 3.2.8** (Survival Funktion).

Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F(x)$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Dann ist die Survival Funktion  $\bar{F}(x)$  gegeben durch

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(u) du = 1 - F(x).$$

**Definition 3.2.9** (Survival Copula).

Sei  $\mathbf{X}$  ein Zufallsvektor mit multivariater Survival Funktion  $\bar{F}$ , Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  und Survival Randverteilungsfunktionen  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$  mit  $\bar{F}_i = 1 - F_i$ . Dann ist die Survival Copula gegeben durch

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)).$$

Falls  $F_1, \dots, F_n$  stetig sind, gilt:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \\ &= P(1 - F_1(X_1) \leq \bar{F}_1(x_1), \dots, 1 - F_n(X_n) \leq \bar{F}_n(x_n)). \end{aligned}$$

Die Survival Copula folgt, indem man  $\hat{C}$  für die Verteilungsfunktion von  $\mathbf{1} - \mathbf{U}$  schreibt, wobei  $\mathbf{U} = (F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$ . Im Allgemeinen wird der Begriff Survival Copula einer Copula  $C$  für die Verteilungsfunktion von  $\mathbf{1} - \mathbf{U}$  verwendet, wenn  $\mathbf{U}$  Verteilungsfunktion  $C$  hat.

Da Copulas multivariate Verteilungsfunktionen sind, besitzen sie Survival Funktionen, die wir mit  $\bar{C}$  bezeichnen. Falls  $C$  die Verteilungsfunktion von  $\mathbf{U}$  und  $\hat{C}$  die Survival Copula von  $C$  ist, gilt:

$$\begin{aligned} \bar{C}(u_1, \dots, u_n) &= P(U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n) \\ &= P(1 - U_1 \leq 1 - u_1, \dots, 1 - U_n \leq 1 - u_n) \\ &= \hat{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n). \end{aligned}$$

**Definition 3.2.10.**

Seien  $C_1$  und  $C_2$  Copulas.  $C_1$  ist kleiner  $C_2$  wenn

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \text{ und } \bar{C}_1(\mathbf{u}) \leq \bar{C}_2(\mathbf{u}),$$

für alle  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ . Man schreibt  $C_1 \prec C_2$ .

**Korollar 3.2.11** (Eigenschaften der Konkordanzfunktion  $Q$ ).

Seien  $C$ ,  $\tilde{C}$  und  $Q$  gegeben, wie in Satz 3.2.7. Dann gilt:

- (1)  $Q$  ist symmetrisch in ihren Argumenten:  $Q(C, \tilde{C}) = Q(\tilde{C}, C)$ ;
- (2)  $Q$  ist nicht fallend in jedem Argument: Wenn  $C \prec C'$ , dann  $Q(C, \tilde{C}) \leq Q(C', \tilde{C})$ ;
- (3) Copulas können durch Survival Copulas ersetzt werden, also  $Q(C, \tilde{C}) = Q(\hat{C}, \hat{\tilde{C}})$ .

**Definition 3.2.12** (Spearman's rho).

Für einen Zufallsvektor  $(X, Y)$  mit Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$ , nennt man

$$\rho_S(X, Y) = 3 \left( P \left( (X - \tilde{X})(Y - Y') > 0 \right) - P \left( (X - \tilde{X})(Y - Y') < 0 \right) \right)$$

Spearman's rho, wobei  $(X, Y)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  und  $(X', Y')$  unabhängige Kopien sind.

Mit Hilfe von Satz 3.2.7 und dem ersten Teil von Korollar 3.2.11 erhält man:

**Satz 3.2.13.**

Sei  $(X, Y)$  ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen und Copula  $C$ . Dann ist Spearman's rho für  $(X, Y)$  gegeben durch

$$\rho_S(X, Y) = 3Q(C, \Pi) = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3.$$

Daraus folgt, wenn  $X \sim F$ ,  $Y \sim G$  und  $U = F(X)$  und  $V = G(Y)$ :

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12\mathbb{E}(UV) - 3 \\ &= \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}} \\ &= \rho(F(X), G(Y)). \end{aligned}$$

Folgende Proposition zeigt, wie bereits anfangs erwähnt, dass sowohl Kendall's tau als auch Spearman's rho nur von der Copula des Zufallsvektors und nicht von den Randverteilungen abhängen.

**Proposition 3.2.14.**

Es seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen und  $C$  die Copula von  $(X, Y)$ . Weiter sei  $(U, V) = (F(X), F(Y))$ . Für Kendall's tau und Spearman's rho gelten folgende Darstellungen

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1;$$

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) du dv = 12\mathbb{E}(UV) - 3.$$

**Definition 3.2.15.**

Ein reellwertiges Abhängigkeitsmaß  $\kappa$  zwischen zwei stetigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Copula  $C$ , ist ein Maß der Konkordanz, falls es folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $\kappa$  ist für jedes Paar  $X, Y$  von stetigen Zufallsvariablen definiert;
- (2)  $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$ ,  $\kappa_{X,X} = 1$  und  $\kappa_{X,-X} = -1$ ;
- (3)  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$ ;
- (4) Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann gilt  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$ ;
- (5)  $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$ ;
- (6) Wenn für die Copulas  $C$  und  $\tilde{C}$  gilt:  $C \prec \tilde{C}$ , dann gilt  $\kappa_C \leq \kappa_{\tilde{C}}$ ;
- (7) Falls  $\{(X_n, Y_n)\}$  eine Folge von stetigen Zufallsvariablen mit Copulas  $C_n$  ist und  $\{C_n\}$  punktweise gegen  $C$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$ .

Aus voriger Definition folgt

**Satz 3.2.16.**

Sei  $\kappa$  ein Maß der Konkordanz für stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

- (1) Wenn  $Y$  fast sicher eine wachsende Funktion von  $X$  ist, dann gilt  $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$ .
- (2) Wenn  $Y$  fast sicher eine fallende Funktion von  $X$  ist, dann gilt  $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$ .
- (3) Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  fast sicher streng steigende Funktionen auf  $\text{Ran}X$  bzw.  $\text{Ran}Y$  sind, dann gilt  $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$ .

**Satz 3.2.17.**

Seien  $X$  und  $Y$  stetige Zufallsvariablen mit Copula  $C$ . Dann erfüllen Kendall's tau und Spearman's rho die Eigenschaften aus Definition 3.2.15 für ein Konkordanzmaß. Außerdem gilt

- (1)  $\kappa(X, Y) = 1 \Leftrightarrow C = M$ ;

$$(2) \kappa(X, Y) = -1 \Leftrightarrow C = W;$$

wobei  $\kappa$  entweder Kendall's tau oder Spearman's rho bezeichnet.

Für einen Beweis siehe [24].

### 3.2.3 Tail-Abhängigkeiten

Wie bei der Rangkorrelation sind auch die Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit Maße, die nur von der Copula der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit stetiger Randverteilung abhängen. Diese Maße geben Auskunft über die Stärke der Abhängigkeit der Tails von bivariaten Verteilungen und sind dadurch auch für Abhängigkeitsmessungen zwischen extremen Werten geeignet. Die Koeffizienten sind mittels Grenzwerten der bedingten Wahrscheinlichkeit der Quantil-Überschreitungen definiert.

**Definition 3.2.18** (Tail-Abhängigkeit).

Sei  $(X, Y)$  ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Randverteilungsfunktionen  $F$  und  $G$ . Der Koeffizient für die obere Tail-Abhängigkeit von  $(X, Y)$  ist gegeben durch

$$\lambda_U = \lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)),$$

falls der Grenzwert  $\lambda_U \in [0, 1]$  existiert. Falls  $\lambda_U = 0$ , nennt man  $X$  und  $Y$  asymptotisch unabhängig im oberen Tail und falls  $\lambda_U \in (0, 1]$ , dann nennt man  $X$  und  $Y$  asymptotisch abhängig im oberen Tail.

Analog definiert man den Koeffizienten für die untere Tail-Abhängigkeit:

$$\lambda_L = \lambda_L(X, Y) = \lim_{l \rightarrow 0^+} P(Y \leq G^{-1}(l) \mid X \leq F^{-1}(l)),$$

falls der Grenzwert  $\lambda_L \in [0, 1]$  existiert.

Da  $P(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u))$  geschrieben werden kann als

$$\frac{1 - P(X \leq F^{-1}(u)) - P(Y \leq G^{-1}(u)) + P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))},$$

ergibt sich eine alternative Definition für stetige Zufallsvariablen, aus der man ablesen kann, dass das Konzept der Tail-Abhängigkeit eine Eigenschaft der Copulas ist. Das Maß der Abhängigkeit ist also eine Funktion ihrer Copula und daher invariant unter streng monoton steigenden Abbildungen.

**Definition 3.2.19.**

Falls für eine bivariate Copula  $C$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

existiert, dann hat  $C$  obere Tail-Abhängigkeit falls  $\lambda_U \in (0, 1]$  und keine obere Tail-Abhängigkeit falls  $\lambda_U = 0$ .

### 3.3 Elliptische Copulas

Um elliptische Copulas definieren zu können, möchte ich zuerst sphärische Verteilungen einführen. Sphärische Verteilungen bilden eine große Klasse von Verteilungen für Zufallsvektoren mit unkorrelierten Komponenten und identischen, symmetrischen Randverteilungen.

**Definition 3.3.1** (Sphärische Verteilungen).

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  heißt *sphärisch verteilt*, wenn für jede orthogonale Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (d.h.  $AA^t = A^tA = I_n$ ) die Zufallsvektoren  $A\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X}$  gleichverteilt sind:

$$A\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}.$$

Die Verteilung eines sphärischen Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  ist also invariant unter der Multiplikation mit orthogonalen Matrizen. Die charakteristische Funktion  $\psi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}^t\mathbf{X}})$  eines sphärisch verteilten Zufallsvektors ist beschrieben durch den charakteristischen Generator  $\psi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^t\mathbf{t})$  mit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ . Man verwendet folgende Notation:  $X \sim S_n(\phi)$ .

**Satz 3.3.2.**

$\mathbf{X}$  ist *sphärisch verteilt genau dann, wenn*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U},$$

wobei  $\mathbf{U}$  gleichverteilt auf der Einheitssphäre  $\mathcal{S}^{n-1} = (\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\})$  und  $R$  eine positive univariate Zufallsvariable, unabhängig von  $\mathbf{U}$  ist.

Für einen Beweis siehe [12, Seite 91].

**Definition 3.3.3** (Elliptische Verteilung).

Ein  $n$ -dimensionaler Vektor  $\mathbf{X}$  heißt *elliptisch verteilt*, wenn gilt

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Y},$$

wobei  $\mathbf{Y} \sim S_k(\phi)$  sphärisch verteilt ist und  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$  bzw.  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  eine Matrix bzw. ein Vektor von Konstanten ist.

Elliptische Verteilungen werden also durch affine Transformationen von sphärischen Verteilungen erhalten. Da für die charakteristische Funktion Folgendes gilt:

$$\psi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}^t\mathbf{X}}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}^t(\boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Y})}) = e^{i\mathbf{t}^t\boldsymbol{\mu}}\mathbb{E}(e^{i(A^t\mathbf{t})^t\mathbf{Y}}) = e^{i\mathbf{t}^t\boldsymbol{\mu}}\psi(\mathbf{t}^t\Sigma\mathbf{t}),$$



wobei  $\Sigma = AA^t$ , kann man elliptische Verteilungen durch  $\mu, \Sigma$  und  $\psi$  charakterisieren, man schreibt

$$\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi).$$

**Satz 3.3.4.**

Es gilt  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  mit Rang  $\Sigma = k \leq n$  genau dann, wenn es eine Zufallsvariable  $R \geq 0$  unabhängig vom  $k$ -dimensionalen auf  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{x}^t \mathbf{x} = 1\}$  gleichverteilten Zufallsvektor  $\mathbf{U}$  sowie eine  $n \times k$  Matrix  $A$  mit  $AA^t = \Sigma$  gibt, sodass

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + RA\mathbf{U}.$$

Aus diesem Satz folgt unmittelbar

**Satz 3.3.5.**

Für  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  und eine  $q \times n$  Matrix  $B$ , sowie  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$  gilt

$$\mathbf{b} + B\mathbf{X} \sim E_q(\mathbf{b} + B\mu, B\Sigma B^t, \phi).$$

Das heißt also, dass jede lineare Transformation einer elliptischen Verteilung wieder eine elliptische Verteilung mit gleichem Generator ist. Außerdem sind auch Randverteilungen elliptischer Verteilungen wieder elliptisch verteilt und haben ebenfalls den gleichen Generator, wie das folgende Korollar zeigt.

**Korollar 3.3.6.**

Sei  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  und seien folgende Partitionen gegeben:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

wobei  $\mathbf{X}_1$  und  $\mu_1$   $r \times 1$  Vektoren sind und  $\Sigma_{11}$  eine  $r \times r$  Matrix, d.h.  $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ . Falls  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ , dann gilt

$$\mathbf{X}_1 \sim E_r(\mu_1, \Sigma_{11}, \phi), \quad \mathbf{X}_2 \sim E_{n-r}(\mu_2, \Sigma_{22}, \phi).$$

Sei  $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ . Falls  $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$ , für  $i = 1, \dots, n$ , ist

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}.$$

Das erklärt, warum die lineare Korrelation ein natürliches Maß für die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen mit gemeinsamer nicht trivialer elliptischer Verteilung ( $\Sigma_{ii} > 0$  für alle  $i$ ) ist. Bezeichne  $R$  mit  $R_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$

ab nun für jede elliptische Verteilung die lineare Korrelationsmatrix von  $\mathbf{X}$ . Da eine elliptische Verteilung eindeutig durch  $\mu, \Sigma$  und  $\rho$  bestimmt ist, ist die Copula einer Zufallsvariable mit nicht trivialer elliptischen Verteilung eindeutig bestimmt durch  $R$  und  $\phi$ .

Ein großes Problem bei der multivariater Risikomodellierung durch elliptische Verteilungen ist, dass alle Randverteilungen vom selben Typ sind. Deswegen wäre es sinnvoll eine elliptische Copula mit verschiedenen Randverteilungstypen zu wählen (diese müssen nicht notwendigerweise elliptisch sein). Ein großes Hindernis dabei ist aber die Schätzung von  $R$ , da diese dann nicht mehr direkt erfolgen kann. Für nicht triviale elliptische Verteilungen mit endlicher Varianz ist  $R$  genau die lineare Korrelationsmatrix. In diesem Fall kann  $R$  mit Hilfe von robusten linearen Korrelationsschätzern geschätzt werden. Für nicht triviale, nicht elliptische Verteilungen mit endlicher Varianz und elliptischen Copulas, entspricht  $R$  allerdings im Allgemeinen nicht der linearen Korrelationsmatrix. Dennoch kann  $R$  unter der Verwendung von Kendall's tau geschätzt werden, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

**Satz 3.3.7.** [14, Satz 5.4]

Sei  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \rho)$  mit  $P(X_i = \mu_i) < 1$ . Dann gilt

$$\tau(X_i, X_j) = \left(1 - \sum_{x \in \mathbb{R}} (P(X_i = x))^2\right) \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{ij}).$$

Falls  $\text{Rang}\Sigma \geq 2$ , dann gilt

$$\tau(X_i, X_j) = (1 - (P(X_i = \mu_i))^2) \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{ij}).$$

Wenn  $P(X_i = \mu_i) = 0$  für alle  $i$  (das gilt z.B. für die multivariate  $t$ - oder Normal-Verteilung mit streng positiv definiten Matrizen  $\Sigma$ ), dann gilt:

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{ij})$$

für alle  $i$  und  $j$ .

Der nichtparametrische Schätzer von  $R$ ,  $\sin(\pi\hat{\tau}/2)$ , erbt die Robustheit des Kendall's tau Schätzers und ist ein effizienter Schätzer von  $R$ , sowohl für elliptische Verteilungen, als auch für nichtelliptische Verteilungen mit elliptischen Copulas.

Die beiden wichtigsten Vertreter der Elliptischen Copulas sind die Gauß- und die  $t$ -Copula.

**Definition 3.3.8** (Gauß-Copula/Normal-Copula).

Die Copula einer  $d$ -variaten Normalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix  $R$  ist wie folgt definiert:

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^d(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

wobei  $\Phi_R^d$  die Verteilungsfunktion einer  $d$ -variaten Standardnormalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix  $R$  ist und  $\Phi^{-1}$  die Inverse der eindimensionalen Standardnormalverteilung  $\Phi$  ist. Die Parameter der Gauß-Copula sind gegeben durch die oberhalb der Diagonalen liegenden Elemente der Korrelationsmatrix, d.h. es gibt insgesamt  $\frac{d^2-d}{2}$  Parameter.

Im bivariaten Fall kann die Copula auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds dt.$$

wobei  $R_{12}$  den linearen Korrelationskoeffizienten der bivariaten Normalverteilung darstellt.

Die Gauß-Copula wird in der Praxis sehr häufig verwendet, da sie sehr leicht simuliert werden kann.

Einige der bereits erwähnten Copulas sind Spezialfälle der Gauß-Copula.

Falls  $R = I_n$  erhält man die Unabhängigkeitscopula, falls die  $n \times n$  Matrix ausschließlich aus Einsen besteht, erhält man die Komonotoniecopula. Für  $n = 2$  und lineare Korrelationskoeffizienten  $R_{12} = -1$  erhält man die Kontramonotoniecopula. Im 2-dimensionalen kann man die Gauß-Copula also als eine Abhängigkeitsstruktur sehen, die zwischen perfekter positiver und negativer Abhängigkeit interpoliert, wobei  $R_{12} = \rho$  die Stärke der Abhängigkeit angibt.

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Gauß-Copula keine obere Tail-Abhängigkeit besitzt.

**Beispiel 3.3.1.**

Seien  $U, V \sim U(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariablen mit Copula  $C$ . Es gilt

$P(V \leq v \mid U = u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$  und  $P(V > v \mid U = u) = 1 - \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{\bar{C}(u, u)}{(1-u)} \\ &= - \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{d\bar{C}(u, u)}{du} \\ &= - \lim_{u \rightarrow 1^+} \left( -2 + \frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \Big|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^+} (P(V > u \mid U = u) + P(U > u \mid V = u)). \end{aligned}$$

Weiters sei  $(X, Y)$  ein Zufallsvektor mit bivariater, standardnormalverteilter Funktion mit linearen Korrelationskoeffizienten  $R_{12} = \rho$ . D.h.  $(X, Y) \sim C(\Phi(x), \Phi(y))$ , wobei  $C$  ein Mitglied der Gauß-Familie ist. Da Copulas in dieser Familie symmetrisch sind, d.h.  $C(u, v) = C(v, u)$ , gilt:

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^+} P(V > u \mid U = u)$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 1^+} P(V > u \mid U = u) &= \lim_{x \rightarrow \infty} P(\Phi^{-1}(V) > x \mid \Phi^{-1}(U) = x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x \mid Y = x). \end{aligned}$$

Da  $Y \mid X = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ , erhält man

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi} \left( \frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi} \left( \frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right),$$

und daraus folgt  $\lambda_U = 0$  für  $R_{12} < 1$ . Daher besitzt die Gauß-Copula  $C$  mit  $\rho < 1$  keine obere Tail-Abhängigkeit.

Da Elliptische Copulas radial symmetrisch an  $\mu$  sind, d.h.  $X - \mu \stackrel{d}{=} \mu - X$ , ist der Koeffizient der oberen und unteren Tail-Abhängigkeit gleich. Daher besitzt die Gauß-Copula auch keine untere Tail-Abhängigkeit.

**Definition 3.3.9** (t-Copula).

$\mathbf{X}$  ist  $n$ -variater  $t_v$ -verteilt ( $v > 1$ ) mit Mittelwert  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\frac{v}{v-2}\Sigma$  für  $v > 2$  (für  $v \leq 2$  ist  $\text{Cov}(X)$  nicht definiert), wenn

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z},$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $S \sim \chi_v^2$  und  $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$  unabhängig sind.

Die Copula von  $\mathbf{X}$  ist dann gegeben durch

$$C_{v,R}^t(\mathbf{u}) = t_{v,R}^n(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)),$$

wobei  $R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $t_{v,R}^n$  die Verteilungsfunktion von  $\frac{\sqrt{v}\mathbf{Y}}{\sqrt{S}}$  beschreibt, mit  $S \sim \chi_v^2$  und  $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, R)$  unabhängig.  $t_v$  beschreibt die (gleichen) Randverteilungen von  $t_{v,R}^n$  (z.B. von  $\frac{\sqrt{v}Y_1}{\sqrt{S}}$ ).

Im bivariaten Fall nimmt die Copula folgende Form an:

$$C_{v,R}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{v(1-R_{12}^2)} \right\}^{-(v+2)/2} ds dt.$$

$R_{12}$  beschreibt dabei den linearen Korrelationskoeffizienten der bivariaten  $t_v$ -Verteilung für  $v > 2$ .

Falls  $(X_1, X_2)$  eine standard bivariate t-Verteilung mit  $v$  Freiheitsgraden und linearer Korrelationsmatrix  $R$  hat, dann ist  $X_2 | X_1 = x$  t-verteilt mit  $v+1$  Freiheitsgraden und

$$\mathbb{E}(X_2 | X_1 = x) = R_{12}x, \quad \text{Var}(X_2 | X_1 = x) = \left( \frac{v+x^2}{v+1} \right) (1-R_{12}^2).$$

Damit kann gezeigt werden, dass die t-Copula obere Tail-Abhängigkeit besitzt.

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_2 > x | X_1 = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{t}_{v+1} \left( \left( \frac{v+1}{v+x^2} \right)^{1/2} \frac{x - R_{12}x}{\sqrt{1-R_{12}^2}} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{t}_{v+1} \left( \left( \frac{v+1}{v/x^2+1} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{1-R_{12}^2}}{\sqrt{1+R_{12}^2}} \right) \\ &= 2\bar{t}_{v+1} \left( \sqrt{v+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}^2}}{\sqrt{1+R_{12}^2}} \right). \end{aligned}$$

Der obere Tail-Abhängigkeitskoeffizient ist steigend in  $R_{12}$  und fallend in  $v$ . Außerdem geht für  $R_{12} < 1$  der Koeffizient gegen 0, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade gegen Unendlich geht. Aufgrund der Radialsymmetrie von elliptischen Copulas folgt, dass die t-Copula ebenso untere Tail-Abhängigkeit besitzt. Die t-Copula lässt sich ebenso wie die Gauß-Copula leicht simulieren.

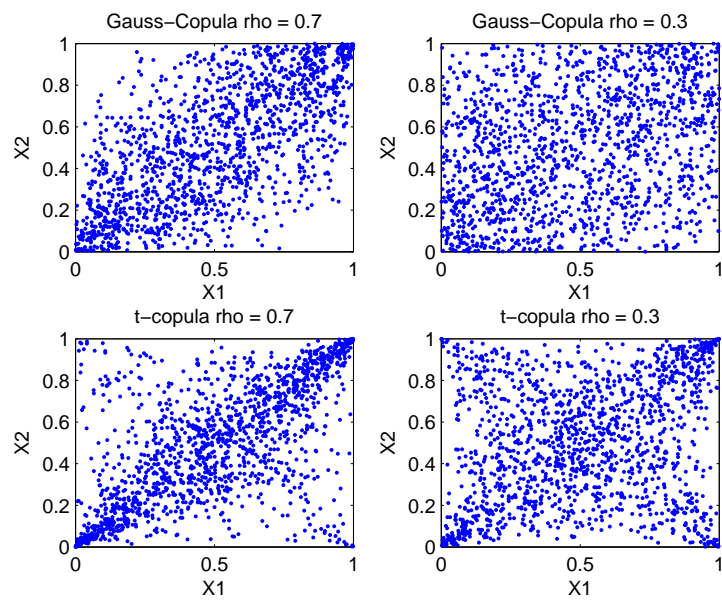


Abbildung 3.1: Simulation einer Gauss- und t-Copula mit 1500 Punkten und Parameter  $\rho = 0,7$  bzw.  $\rho = 0,3$

### 3.4 Archimedische Copulas

Die Copula Familien, die bis jetzt vorgestellt wurden, wurden mit Hilfe des Satz von Sklar von gewissen Familien der multivariaten Verteilungsfunktionen abgeleitet. Elliptische Copulas sind die Verteilungsfunktionen von komponentenweise transformierten elliptisch verteilten Zufallsvariablen. Da die Simulation von elliptischen Verteilungen einfach ist, gilt das gleiche für die Simulation von elliptischen Copulas. Allerdings ist ein großer Nachteil der elliptischen Copulas, dass sie keine geschlossene Form haben und radial symmetrisch sind. In der Praxis besteht häufig ein stärkerer Zusammenhang zwischen großen Verlusten, als zwischen großen Gewinnen und diese Asymmetrie kann mit elliptischen Copulas nicht modelliert werden.

In diesem Kapitel wird nun die Klasse der archimedischen Copulas vorgestellt, die eine geschlossene Form haben und außerdem eine große Vielfalt an verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen bieten.

**Definition 3.4.1** (Pseudo-Inverse).

Sei  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit  $\varphi(1) = 0$ . Dann ist  $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$  die Pseudo-Inverse von  $\varphi$  mit:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Für  $\varphi(0) = \infty$  ist dies die übliche Inverse  $\varphi^{-1}$ . In diesem Fall heißt  $\varphi$  strikter Generator.

$\varphi^{[-1]}$  ist stetig und fallend im Intervall  $[0, \infty]$  und streng monoton fallend im Intervall  $[0, \varphi(0)]$ . Außerdem gilt  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  im Intervall  $[0, 1]$  und

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

**Satz 3.4.2** (Bivariate Archimedische Copula).

Sei  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit  $\varphi(1) = 0$  und der Pseudo-Inversen  $\varphi^{[-1]}$  von  $\varphi$ . Sei  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  mit

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Dann ist  $C$  eine Copula, genau dann, wenn  $\varphi$  konvex ist.

Für einen Beweis siehe [24]

Copulas der obigen Form nennt man Bivariate Archimedische Copulas. Falls  $\varphi$  ein strikter Generator ist, nennt man  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$  strikte archimedische Copula.

Wir wollen nun einige Beispiel für archimedische Copulas anführen.

**Beispiel 3.4.1** (Gumbel-Copula).

Sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$  und  $\theta \geq 0$ .  $\phi(t)$  ist stetig und  $\phi(1) = 0$ . Da  $\phi'(t) = -\theta(-\ln t)^{\theta-1} \frac{1}{t} < 0$  und da  $\phi''(t) \geq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \infty$ , ist  $\phi$  ein strikter Generator. Die Gumbel-Copula ist nun gegeben als

$$C_\theta^{Gu}(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = \exp \left[ -\left( (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right].$$

Setzt man  $\theta = 1$  erhalten wir die Unabhängigkeits-Copula und für  $\theta \rightarrow \infty$  die zweidimensionale Komonotonie-Copula.

Nun betrachten wir noch die obere Tail-Abhängigkeit.

Für  $\theta \geq 1$  gilt:

$$\frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + \exp(2^{\frac{1}{\theta}} \ln u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + u^{2^{\frac{1}{\theta}} - 1}}{1 - u}$$

und somit

$$\lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{\theta}} u^{2^{\frac{1}{\theta}}} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}.$$

Damit ist gezeigt, dass für  $\theta > 1$  die Gumbel-Copula obere Tail-Abhängigkeit besitzt.

**Beispiel 3.4.2** (Clayton-Copula).

Sei  $\phi(t) = \frac{t^{-\theta-1}}{\theta}$ , wobei  $\theta \in (-1, \infty)$ . Dann  $\phi$  ein Generator. Die so definierte Copula wird Clayton-Copula genannt und ist für  $\theta \neq 0$  gegeben als

$$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = \max \left( [u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right).$$

Für  $\theta > 0$  ist die Copula strikt:

$$C_\theta^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Für  $\theta \rightarrow 0$  erhält man die Unabhängigkeits-Copula, für  $\theta \rightarrow \infty$  die zweidimensionale Komonotonie-Copula und für  $\theta = -1$  erhält man die Kontramonotonie-Copula. Falls  $\theta > 0$ , besitzt die Clayton-Copula untere Tail-Abhängigkeit.



**Beispiel 3.4.3** (Frank-Copula).

Sei  $\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ , wobei  $\theta \in \mathbb{R}$ . Dann  $\phi$  ein strikter Generator. Die so definierte Copula wird Frank-Copula genannt und ist für  $\theta \neq 0$  gegeben als

$$C_{\theta}^{Fr}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Für  $\theta \rightarrow -\infty$  erhält man die Kontramotonie-Copula, für  $\theta \rightarrow \infty$  die Komonotonie-Copula und für  $\theta \rightarrow 0$  die Unabhängigkeitscopula. Mitglieder der Frank-Familie sind strikte archimedische Copulas und erfüllen, als einzige archimedische Copulas, die Gleichung  $C(u, v) = \hat{C}(u, v)$ . Sie sind also radial symmetrisch.

Es folgen nun einige Eigenschaften von archimedischen Copulas, die es ermöglichen, multivariate Erweiterungen von archimedischen Copulas zu formulieren.

**Satz 3.4.3.**

Sei  $C$  eine archimedische Copula mit Generator  $\varphi$ . Dann gilt:

1.  $C$  ist symmetrisch, d.h.  $C(u, v) = C(v, u)$  für alle  $u, v \in [0, 1]$ .
2.  $C$  ist assoziativ, d.h.  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  für alle  $u, v, w \in [0, 1]$ .

*Beweis.* Der erste Teil folgt direkt aus  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ . Für den zweiten Teil bemerken wir:

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

□

**Satz 3.4.4.**

Sei  $C$  eine archimedische Copula und  $\varphi$  ihr Generator. Außerdem sei  $K_C(t)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) \leq t\}$ . Dann gilt für alle  $t \in [0, 1]$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \quad (3.2)$$

Für einen Beweis siehe [24]

**Korollar 3.4.5.**

Sei  $C$  die Verteilungsfunktion von  $(U, V)$ , wobei  $C$  eine archimedische Copula mit Generator  $\varphi$  ist. Dann ist die Funktion  $K_C$  aus (3.2) die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $C(U, V)$ .

Für den nächsten Satz benötigen wir einen Ausdruck für die Dichte einer absolut stetigen Copula. Aus  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$  folgt, dass

$$\begin{aligned}\varphi'(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) &= \varphi'(u) \\ \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) &= \varphi'(v) \\ \varphi''(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) + \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) &= 0\end{aligned}$$

und daraus

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)}{\varphi'(C(u, v))} = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \varphi'(u) \varphi'(v)}{[\varphi'(C(u, v))]^3}.$$

Damit gilt, falls  $C$  absolut stetig ist, dass die Dichte der Copula gegeben ist durch

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \varphi'(u) \varphi'(v)}{[\varphi'(C(u, v))]^3}.$$

**Satz 3.4.6.**

Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.4.5 ist die gemeinsame Verteilungsfunktion  $H(s, t)$  der Zufallsvariablen  $S = \frac{\varphi(U)}{\varphi(U) + \varphi(V)}$  und  $T = C(U, V)$  gegeben durch  $H(s, t) = sK_C(t)$  für alle  $(s, t) \in [0, 1]^2$ . Insbesondere sind  $S$  und  $T$  unabhängig und  $S$  ist gleichverteilt im Intervall  $[0, 1]$

*Beweis.* Dieser Beweis ist für den Fall, dass  $C$  absolut stetig ist. Für einen vollständigen Beweis siehe Genest und Rivest (1993).

Die gemeinsame Dichte  $h(s, t)$  von  $S$  und  $T$  ist gegeben durch,

$$h(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|,$$

wobei  $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$  die Dichte einer absolut stetigen Copula  $C$  ist und  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$  die Jacobi-Determinante der Transformation  $\varphi(u) = s\varphi(t)$ ,  $\varphi(v) = (1 - s)\varphi(t)$  ist. Es gilt

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)}$$

und daher

$$h(s, t) = \left( -\frac{\varphi''(t)\varphi'(u)\varphi'(v)}{[\varphi'(t)]^3} \right) \left( -\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \right) = \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^2},$$

woraus wiederum folgt, dass

$$H(s, t) = \int_0^s \int_0^t \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^2} dy dx = s \left[ y - \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} \right]_0^t = sK_C(t).$$

□

Eine Anwendung des Satzes ist der folgende Algorithmus, mit dem bivariate archimedische Copulas simuliert werden können.

**Algorithmus 1.**

- *Erzeuge zwei unabhängige und im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariablen  $s$  und  $q$ .*
- *Berechne  $t = K_C^{-1}(q)$ , wobei  $K_C$  die Verteilungsfunktion von  $C(U, V)$  ist.*
- *Berechne  $u = \varphi^{[-1]}(s\varphi(t))$  und  $v = \varphi^{[-1]}((1-s)\varphi(t))$ .*
- *$(u, v)$  ist eine Realisation der Copula  $C$ .*

Um nun das Konzept der archimedischen Copulas auf beliebige Dimensionen auszudehnen, benötigt man noch folgende Definition.

**Definition 3.4.7** (Komplett monotone Funktion).

*Eine Funktion  $g(t)$  heißt komplett monoton auf dem Intervall  $I$ , falls Ableitungen jeder Ordnung existieren und die Vorzeichen der Ableitungen alternieren, das heißt*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

für  $k = 0, 1, 2, \dots$

Falls  $g : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$  komplett monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist und ein  $t \in [0, \infty)$  existiert, sodass  $g(t) = 0$ , dann ist  $g(t) = 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Daher gilt, falls die Pseudo-Inverse  $\varphi^{[-1]}$  des archimedischen Generators  $\varphi$  komplett monoton ist, gilt  $\varphi^{[-1]}(t) > 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$  und daraus folgt  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

**Satz 3.4.8.**

Sei  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  ein strikter Generator. Dann ist die Funktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^d \varphi(u_i) \right)$$

eine Copula genau dann, wenn  $\varphi^{-1}$  komplett monoton ist.

### 3.5 Copulas im Risikomanagement

Wie wir nun gesehen haben können Modelle mit Copulas verschiedene Abhängigkeitsstrukturen und unterschiedliche Randverteilungen berücksichtigen, was bei der linearen Korrelation nicht möglich ist, da diese von den Randverteilungen beeinflusst wird. Copulas bieten eine klare Trennung von Abhängigkeitsstruktur und Randverteilungen, was für eine Anwendung in den Internen Modellen, die in Zusammenhang mit Solvency II in Kapitel 1.3 besprochen wurden, spricht. Auch die IAA legt in [21] den Einsatz von Copulas in Internen Modellen nahe. Da für die Wahl der Copula und die Schätzung des dazugehörigen Parameters jedoch sehr viele Möglichkeiten bestehen, sind sehr unterschiedliche Ansätze für Interne Modelle denkbar. Das erschwert die Kontrolle für die Aufsichtsbehörde und auch die Vergleichbarkeit mit anderen Modellen ist bei einer so großen Auswahl an Möglichkeiten schwierig.

# Kapitel 4

## Berechnung von Risikomaßen anhand von Copulas

### 4.1 Motivation

In Kapitel 2 haben wir bereits einige Methoden zur Berechnung von Risikomaßen kennengelernt. Diese basieren meist auf der Annahme von normalverteilten Zufallsvariablen und lassen selten die Abhängigkeiten von Einzelrisiken in das Gesamtrisiko eines Portfolios einfließen. Als Alternative möchte ich nun die Berechnung von Risikomaßen anhand von Copulas vorstellen, die eine vollständige Beschreibung der Abhängigkeiten ermöglichen und für beliebige Randverteilungen angewendet werden können.

Wir betrachten den Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  der die Verluste der zugehörigen Positionen eines Portfolios beinhaltet und eine meßbare Funktion  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Art der Aggregation beschreibt.  $\psi(\mathbf{X})$  ist eine aggregierte Finanzposition und typische Beispiele hierfür sind der totale Verlust ( $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ), oder der maximale Verlust ( $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ ). Sei nun  $\rho$  ein Risikomaß, abhängig von der Verteilung von  $\psi(\mathbf{X})$ . Ziel ist es  $\rho(\psi(\mathbf{X}))$  zu berechnen. Dafür benötigen wir die Verteilung von  $\psi(\mathbf{X})$  und somit auch die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$ . Da in der Praxis diese Informationen meist nicht gegeben sind, begnügen wir uns mit der Annahme, dass die Randverteilungen  $F_i$  von  $X_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , gegeben sind und versuchen Schranken für  $\rho(\psi(\mathbf{X}))$  zu finden:

$$\rho_{\min} \leq \rho(\psi(\mathbf{X})) \leq \rho_{\max}.$$

Das beschriebene Problem ist in der Literatur, in Anlehnung an die Schranken aus Satz 3.1.5, als Fréchet Problem bekannt und kann zu einem Optimierungsproblem umformuliert werden. Wir wollen  $\inf \{\rho(\psi(\mathbf{X}))\}$  und  $\sup \{\rho(\psi(\mathbf{X}))\}$  berechnen, wobei die Randverteilungen  $F_i$  von  $X_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gegeben sind. Wegen Satz 3.1.2 bedeutet das, dass wir das inf und sup über alle n-dimensionalen Copulas suchen.

## 4.2 Value-at-Risk und Copulas

In weiterer Folge möchte ich speziell den Fall  $\rho = \text{VaR}_\alpha$  und  $\psi = +$  betrachten. Wir sind also an Schranken für den Value-at-Risk (mit gegebenem Konfidenzniveau  $\alpha$ ) der Summe von Risiken eines Portfolios  $(X_1, \dots, X_n)$  mit gegebenen Randverteilungen interessiert. Hierfür möchte ich die wichtigsten Ergebnisse aus [13] zusammenfassen.  $\text{wVaR}_\alpha(\sum_{i=1}^n X_i)$  bezeichnet ab nun den „worst Value-at-Risk“ mit gegebenem Konfidenzniveau  $\alpha$ , also den Wert, den wir im schlechtesten Fall für den VaR erwarten müssen.

### Definition 4.2.1.

Sei  $F^-$  die linksstetige Version der Verteilungsfunktion  $F$  mit  $F^-(x) = P(X < x) = F(x-)$ . Wir definieren für ein  $C$  aus der Menge der  $n$ -dimensionalen Copulas  $\mathcal{C}^n$ , univariate Verteilungen  $F_1, \dots, F_n$  und  $s \in \mathbb{R}$ :

$$\sigma_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s) := \int_{\{\sum_{i=1}^n x_i < s\}} dC(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)); \quad (4.1)$$

$$\tau_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s) := \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} C \left( F_1(x_1), \dots, F_{n-1}(x_{n-1}), F_n^- \left( s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \right),$$

wobei  $\sigma_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s) = P(X_1 + \dots + X_n < s)$  für ein Portfolio  $(X_1, \dots, X_n)$  mit Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n$  und Copula  $C$  ist.

Die folgende Proposition liefert Schranken für  $\sigma_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s)$  und  $\text{Var}_\alpha(\sum_{i=1}^n X_i)$ , falls keine Information über die zugrundeliegende Abhängigkeitsstruktur gegeben ist.

### Proposition 4.2.2.

Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor mit Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n$  und einer Copula  $C \in \mathcal{C}^n$ . Dann gilt für  $s \in \mathbb{R}$  folgende Ungleichung:

$$\sigma_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s) \geq \tau_{W,+}(F_1, \dots, F_n)(s),$$

womit auch für jedes  $\alpha \in (0, 1)$  gilt:

$$\text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \text{wVaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \tau_{W,+}(F_1, \dots, F_n)^{-1}(\alpha).$$

W bezeichnet hier die untere Fréchet Schranke (siehe Satz 3.1.5). Weiters sei M die obere Fréchet Schranke.

Für den 2-dimensionalen Fall liefert folgende Proposition ein Ergebnis für den wVaR einer Summe von zwei Zufallsvariablen und zeigt somit, dass immer eine 2-dimensionale Copula existiert, die die Grenzen aus Proposition 4.2.2 erreicht.

**Proposition 4.2.3.**

Sei  $(X_1, X_2)$  ein Zufallsvektor mit Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$ .  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}^2$  für ein  $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$  sei definiert als

$$C_{\tilde{\alpha}}(u_1, u_2) := \begin{cases} \max \{ \tilde{\alpha}, W(u_1, u_2) \} & \text{für } (u_1, u_2) \in [\tilde{\alpha}, 1]^2 \\ M(u_1, u_2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann erhält man für  $\tilde{\alpha} = \alpha(s) := \tau_{W,+}(F_1, F_2)(s)$

$$\sigma_{C_{\tilde{\alpha}},+}(F_1, F_2)(s) = \alpha(s).$$

Daraus folgt für beliebiges  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\text{wVaR}_\alpha (X_1 + X_2) = \tau_{W,+}(F_1, F_2)^{-1}(\alpha).$$

Eine Erweiterung für die Summe von n gleichverteilten Zufallsvariablen liefert folgendes Ergebnis, jedoch ohne die Verwendung von Copulas:

**Proposition 4.2.4.**

Die bestmögliche untere Schranke für die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n X_i$  mit gleichverteilten Randverteilungen von  $(X_1, \dots, X_n)$  ist gegeben durch

$$\min \left\{ \left( \frac{2s}{n} - 1 \right)^+, 1 \right\}$$

für ein  $s \in (0, n)$ . Das heißt also

$$\text{wVaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{n(1 + \alpha)}{2}$$

für ein  $\alpha \in (0, 1)$ .

Obige Proposition liefert Schranken für den  $n$ -dimensionale Fall mit gleichverteilten Randverteilungen. Eine analytische Erweiterung von Proposition 4.2.3 durch Ersetzen von  $W(u_1, u_2)$  mit  $W(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ ,  $n \geq 3$  führt auf keine Schranken im multidimensionalen Fall, da  $W$  für  $n \geq 3$  keine Copula ist. Dieses Problem soll durch eine geometrische Annäherung gelöst werden. Das vorliegende Problem besteht in der Maximierung der Wahrscheinlichkeit der Menge  $G_s := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n \geq s\}$ . Durch die Abbildung  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^n$ ,  $h(\mathbf{x}) := (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  bringen wir das Problem auf den Einheitswürfel und bezeichnen:

$$A_s := \{\mathbf{u} \in [0, 1]^n : F_1^{-1}(u_1) + \dots + F_n^{-1}(u_n) \geq s\}.$$

Für  $s \in \mathbb{R}$  folgt  $\text{wVaR}_{\alpha(s)}(X_1 + \dots + X_n) = s$ , falls

$$1 - \alpha(s) := \sup_{C \in \mathcal{C}^n} (1 - \sigma_{C,+}(F_1, \dots, F_n)(s))$$

und der Wahrscheinlichkeit unter der Copula  $C$

$$P_C(A_{\text{wVaR}_{\alpha}(X_1, \dots, X_n)}) = 1 - \alpha. \quad (4.2)$$

Im zweidimensionalen Fall erfüllt  $C_{\tilde{\alpha}}$  die Gleichung (4.2) wenn  $\tilde{\alpha} = \alpha$  (siehe Proposition 4.2.3). Für ein gleichverteiltes Portfolio  $(U_1, U_2)$  ist  $C_{\tilde{\alpha}}$  die einzige Copula, die  $A_{\text{wVaR}(U_1+U_2)}$  das Maß  $1 - \alpha$  zuordnet (mit  $\text{wVaR}(U_1 + U_2) = 1 + \alpha$ ). Folglich ist in diesem Fall die Dichte von  $C_{\alpha}$  in  $A_{1+\alpha}$  konzentriert am Rand  $\underline{H}_{\alpha} := \underline{A}_{1+\alpha}$ .

Im zweidimensionalen Fall kann der Rand von  $A_s$  geschrieben werden als  $\underline{A}_s := \{(F_1(t), F_2(s - t)), t \in \mathbb{R}\}$ . Weiters bezeichnen wir  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  als den Träger von  $C_{\tilde{\alpha}}$ , der durch  $[\tilde{\alpha}, 1]^2$  begrenzt wird. Allgemein bezeichnet man im mehrdimensionalen Fall den Träger, der durch  $[\tilde{\alpha}, 1]^n$  begrenzt wird als oberen Träger.

Die Lösung des Problems für ein gleichverteiltes Portfolio führt zur optimalen Copula, bei der der obere Träger mit der Grenze  $\underline{A}_{1+\alpha}$  übereinstimmt.

**Bemerkung 1.**

*In Proposition 4.2.3 wurde  $\tilde{\alpha} = \tau_{W,+}(F_1, F_2)(s)$  gewählt. Das bedeutet, dass  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  in  $A_s$  liegt und  $\underline{A}_s$  berührt. Da  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}^2$  ist die Dichte auf  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  gleichverteilt und proportional zur Länge  $l(\underline{H}_{\tilde{\alpha}})$ . Daher maximiert  $C_{\alpha}$  die Dichte in  $A_s$ . Jede andere Wahl von  $\tilde{\alpha}$  würde die Wahrscheinlichkeit in  $A_s$  verringern.*



Für ein  $n$ -dimensionales gleichverteiltes Portfolio und  $n - 1 \leq s \leq n$  soll nun für  $A_s = \{\mathbf{u} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i \geq s\}$  mit Rand  $\underline{A}_s = \{\mathbf{u} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i = s\}$  die Wahrscheinlichkeit maximiert werden.

**Satz 4.2.5.**

Sei  $\tilde{\alpha} \in [\alpha^*, 1)$  und  $C_{\tilde{\alpha}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion mit Träger in  $\{\mathbf{u} \in [0, \tilde{\alpha}]^n : u_1 = \dots = u_n\} \cup \{\mathbf{u} \in [\tilde{\alpha}, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i \geq s\}$  für ein  $s \in [n - 1, n]$ . Eine notwendige Bedingung für  $C_{\tilde{\alpha}}$  um eine Copula zu sein ist  $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha} := \frac{2s}{n} - 1$ . Der Träger in  $[\tilde{\alpha}, 1]^n$  liegt in  $H_{\bar{\alpha}} := \left\{ \mathbf{u} \in [\tilde{\alpha}, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i \geq \frac{n(1+\tilde{\alpha})}{2} \right\}$ .

Für einen Beweis siehe [13].

Geometrisch gesehen besagt Satz 4.2.5, dass (falls  $C_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{C}^n$ ) die Menge

$$\underline{H}_{\bar{\alpha}} := [\tilde{\alpha}, 1]^n \cap \underline{A}_{\frac{n}{2}(1+\tilde{\alpha})} = \left\{ \mathbf{u} \in [\tilde{\alpha}, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i = \frac{n}{2}(1 + \tilde{\alpha}) \right\} \quad (4.3)$$

symmetrisch bezüglich  $((1 + \tilde{\alpha})/2, \dots, (1 + \tilde{\alpha})/2)$  ist.

Nun wollen wir die Existenz einer Copula mit Träger wie in (4.3) zeigen.

**Satz 4.2.6.**

Wir nehmen an  $\bar{C}, \tilde{C} \in \mathcal{C}^n$  haben Träger auf  $\underline{H}_0^n$  und  $H_0^n$ . Sei weiters  $\mu_{\bar{C}}$  das durch  $\bar{C}$  erzeugte Maß. Dann gilt für  $H_0^{n+} := \{\mathbf{u} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i > n/2\}$  und  $H_0^{n-} := \{\mathbf{u} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n u_i < n/2\}$ :

$$\mu_{\bar{C}}(H_0^{n-}) = 0 \Leftrightarrow \mu_{\tilde{C}}(H_0^{n+}) = 0$$

und beide Copulas haben den selben Träger.

Für einen Beweis siehe [13].

**Satz 4.2.7.**

Sei  $C_{\tilde{\alpha}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  mit Träger  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  wie in (4.3) auf  $[\tilde{\alpha}, 1]^n$ . Dann existiert eine Folge von Copulas  $C_{N, \tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}^n$ ,  $N \in 2\mathbb{N} + 1$ , sodass

$$C_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{u}) := \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} C_{N, \tilde{\alpha}}(\mathbf{u}) & \text{falls } \mathbf{u} \in [\tilde{\alpha}, 1]^n \\ M(\mathbf{u}) & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Copula ist.

*Beweis.* o.B.d.A sei  $\tilde{\alpha} = 0$  mit  $\underline{H}_0 = [0, 1]^n \cap \underline{A}_{n/2}^n$ . Für  $N \in 2\mathbb{N} + 1$  betrachte man die Partition  $I := [0, 1] = \bigcup_{k=1}^N I_k$ , wobei  $I_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$ . Man bestimme die Menge  $I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n}$  mit dem Punkt  $(k_1, \dots, k_n)$  und definiere das Maß wie folgt:

Für  $k = 1, \dots, (N+1)/2$  und  $1 \leq \bar{k} \leq k$  definiere

$$g_1(k) := |\{I_k \times I^{n-1}\} \cap H_0^{(N)}|, \quad g_2(k, \bar{k}) := |\{I_k \times I_{\bar{k}} \times I^{n-2}\} \cap H_0^{(N)}|,$$

wobei  $H_0^{(N)} := \{(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, N\}^n : \frac{n}{2} - \frac{1}{N} < \sum_{i=1}^n k_i \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{N}\}$ .  
Definiere:

$$f_0^{(N)}(k_1, \dots, k_n) := \begin{cases} f^*(\min_{1 \leq d \leq n} k_d) & \text{für } (k_1, \dots, k_n) \in H_0^{(N)} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$f^*(k) := \left( \frac{1}{N} - (n-1) \sum_{1 \leq \bar{k} \leq k} g_2(k, \bar{k}) f^*(\bar{k}) \right) \left( g_1(k) - (n-1) \sum_{1 \leq \bar{k} \leq k} g_2(k, \bar{k}) \right)^{-1}.$$

Die Menge  $I_k \times I^{n-1}$  gibt den  $k$ -ten Anteil von  $[0, 1]^n$  entlang der ersten Dimension an. Demzufolge zählt  $g_1(k)$  die Anzahl der Punkte in diesem Teil, die auch in  $\underline{H}_0^{(N)}$  liegen. Ähnlich zählt  $g_2(k, \bar{k})$  die Punkte in  $\underline{H}_0^{(N)}$ , welche sich im  $k$ -ten Anteil entlang der ersten Dimension und den  $\bar{k}$ -ten Anteil entlang der zweiten Dimension befinden. Durch die Symmetrie des Trägers kann man diese Funktion auch durch beliebig andere zwei Dimensionen definieren. Weiters haben alle Anteile die Weite  $\frac{1}{N}$ . Die Idee ist nun  $I_0 \times I^{n-1}$  zu betrachten und jeden Punkt zu gewichten, um Gesamtmaß  $\frac{1}{N}$  zu erhalten. Wenn man das macht, wird durch die Symmetrie jedem Punkt, der in einem äquivalenten Anteil in einer beliebig anderen Dimension liegt, ein Maß zugeordnet. Im nächsten Schritt wird  $I_1 \times I^{n-1}$  betrachtet und den fehlenden Punkten ein Gewicht zugeordnet. Dabei braucht man nur fehlende Punkte im Anteil  $k$  betrachten, also  $(n-1) \sum_{1 \leq \bar{k} \leq k} g_2(k, \bar{k}) f^*(\bar{k})$ . Durch die Symmetrie von  $\underline{H}_0^{(N)}$ , braucht man nur die Anteile  $k = 1, \dots, (N+1)/2$  auswerten. Durch Anwendung von  $f^*$  ordnet man den Punkten Gewichte bzgl. der Randbedingungen zu.

Laut [13] sollte nun die Funktion  $C_{N,0} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$C_{N,0}(\mathbf{u}) := \sum_{k_1=1}^{k(u_1)} \cdots \sum_{k_n=1}^{k(u_n)} f_0^{(N)}(k_1, \dots, k_n), \quad k(u) := \sup \left\{ k \geq 1 : \frac{k}{N} \leq u \right\}$$

eine Copula für jedes  $N$  sein. Setzt man  $C_0(\mathbf{u}) := \lim_{N \rightarrow \infty} C_{N,0}(\mathbf{u})$ , erhält man

$$\begin{aligned} C_0(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} C_{N,0}(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N = 0 \\ C_0(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} C_{N,0}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} k(u_i)/N = u_i. \end{aligned}$$

□

Geht man bei der Implementierung der Copula allerdings genau nach diesem Beweis vor (siehe Kapitel 4.3), tauchen bei der numerischen Simulation für verschiedene Punkte  $(k_1, k_2, k_3) \in H_\alpha^N$  negative Werte für  $f^*(k)$  auf. Da dadurch nicht jedem Zufallsvektor eine positive Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird, ist folgende Copulaeigenschaft nicht gewährleistet:

Für  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^n$  mit  $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$  und  $u_{j,1} = u_j, u_{j,2} = v_j, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C_0(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C_{N,0}(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Somit stellt  $C_0$  meiner Meinung nach keine Copulafunktion dar. Der Grund für das Auftreten dieser negativen Wahrscheinlichkeiten konnte allerdings nicht vollständig geklärt werden.

Wir bezeichnen die Familie der Copulas mit Träger  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  mit  $\mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n$ .

Laut den vorigen drei Sätzen hat also jede Copula, die  $A_{n(1+\tilde{\alpha})/2}$  die Wahrscheinlichkeit  $1 - \tilde{\alpha} = 1 - (2s/n - 1)$  zuordnet, den Träger  $\underline{H}_{\tilde{\alpha}}$  wie in (4.3).

Daraus folgt nun:

**Korollar 4.2.8.**

Sei  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n$  mit  $\tilde{\alpha} = \alpha$ . Dann gilt

$$P_{C_\alpha} \{X_1 + \dots + X_n < s\} = \alpha$$

für  $s = n(1 + \alpha)/2$  und die bestmögliche untere Grenze der Verteilungsfunktion von  $X_1 + \dots + X_n$  für gleichverteilte Randverteilungen ist gegeben durch  $\min \{(2s/n - 1)^+, 1\}$  für  $s \in (0, n)$ .

*Beweis.* Das schlechteste Abhängigkeits-Szenario für den VaR mit gegebenem Level  $\alpha$  erfüllt die Gleichung (4.2). Nimmt man  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n$ , erhält man

$$P_{C_{\tilde{\alpha}}}(A_{n(1+\tilde{\alpha})/2}) = P_{C_{\tilde{\alpha}}}(\underline{H}_{n(1+\tilde{\alpha})/2}) = 1 - \tilde{\alpha}.$$

Damit ist Gleichung (4.2) für  $\tilde{\alpha} = \alpha$  erfüllt und  $\text{wVaR}_{\alpha}(X_1 + \dots + X_n) = n(1 + \alpha)/2$ , woraus obiges Ergebnis folgt.  $\square$

Für ein gleichverteiltes Portfolio  $(X_1, X_2)$  führt die Copula zum  $\text{wVaR}_{\alpha}$ , falls  $\tilde{\alpha} = \alpha$ . Allgemein erhält man aber wegen der Verteilung der Dichte auf dem Träger nicht den  $\text{wVaR}_{\alpha}$  unter  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n$  mit  $\tilde{\alpha} = \alpha$ .

Wir wollen nun vom gleichverteilten Fall auf den allgemeinen Fall wechseln. Durch die Lösung des gleichverteilten Problems gegeben durch obige Sätze und die Verteilung der Wahrscheinlichkeit auf ihrem oberen Träger erhalten wir folgenden Satz.

**Satz 4.2.9.**

*Sei  $(X_1, \dots, X_n)$  ein Portfolio mit gegebenen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n$ . Dann erhält man den  $\text{wVaR}(X_1 + \dots + X_n)$  durch eine Copula  $C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n$  für ein  $\tilde{\alpha} \leq \alpha$ , abhängig von den Randverteilungen. Es gilt:*

$$\sup \{ P_{C_{\tilde{\alpha}}}(A_{\text{wVaR}_{\alpha}(X_1 + \dots + X_n)}) : C_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}^n, 0 < \tilde{\alpha} \leq \alpha \} = 1 - \alpha.$$

### 4.3 Anwendungsbeispiel

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse möchte ich nun den  $\text{wVaR}$  mit Konfidenzniveau  $\alpha$  für die Summe eines 3-dimensionalen Portfolio  $(X_1, X_2, X_3)$  berechnen. Die Positionen  $X_i, i = 1, 2, 3$  seien  $\text{Pareto}(1/\xi_i)$  verteilt, mit Survival Funktion  $\bar{F}_i(x) = (1 + x)^{-1/\xi_i}$ . Das Problem wird für drei verschiedene Szenarien für jeweils  $\alpha = 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999$  betrachtet, unter der Annahme von vier verschiedenen Copulas.

**Szenario I:**  $X_i \sim \text{Pareto}(1/\xi_i)$  mit  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.7$ ,

**Szenario II:**  $X_i \sim \text{Pareto}(1/\xi_i)$  mit  $\xi_1 = 0.7504, \xi_2 = 0.6607, \xi_3 = 0.2815$ ,

**Szenario III:**  $X_i \sim \text{Pareto}(1/\xi_i)$  mit  $\xi_1 = 1.1905, \xi_2 = 1.3889, \xi_3 = 1.2195$ .

Zuerst betrachtete ich die Szenarien unter der Annahme von komotonen Zufallsvariablen  $X_i, i = 1, 2, 3$ . Für diese gilt [12, Proposition 6.15]:

$$\text{VaR}_{\alpha}(X_1 + X_2 + X_3) = \text{VaR}_{\alpha}(X_1) + \text{VaR}_{\alpha}(X_2) + \text{VaR}_{\alpha}(X_3).$$

Danach berechnete ich den VaR unter der Annahme der Unabhängigkeitscopula und mit Hilfe der Gauss-Copula. Hierfür verwendete ich die Korrelationsmatrix  $R$  mit Einträgen  $\rho_{ij} = 0.7$  und simulierte 10 000 Zufallsvektoren.

Für den allgemeinen Fall konstruiert man, ähnlich wie im Beweis zu Satz 4.2.7 eine Copula. Man diskretisiert den Würfel  $[\alpha, 1]^3$  durch

$$I := [\alpha, 1] = \bigcup_{k=1}^N I_k, \quad I_k := \left[ \alpha + \frac{k-1}{N}(1-\alpha), \alpha + \frac{k}{N}(1-\alpha) \right]$$

für  $N \in 2\mathbb{N} + 1$  und bestimmt die Menge  $I_{k_1} \times I_{k_2} \times I_{k_3}$  mit dem Punkt  $(k_1, k_2, k_3) \in \{1, \dots, N\}^3$ . Für  $k = 1, \dots, (N+1)/2$  und  $1 \leq \bar{k} \leq k$  definiert man

$$g_1(k) := |\{I_k \times [\alpha, 1]^2\} \cap H_\alpha^{(N)}|, \quad g_2(k, \bar{k}) := |\{I_k \times I_{\bar{k}} \times [\alpha, 1]\} \cap H_\alpha^{(N)}|,$$

wobei  $H_\alpha^{(N)}$  die Menge aller Punkte  $(k_1, k_2, k_3) \in \{1, \dots, N\}^3$  ist, die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{N} < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 k_i \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{N}.$$

Danach definiert man

$$f_\alpha^{(N)}(k_1, k_2, k_3) := \begin{cases} f^*(\min_{1 \leq d \leq 3} k_d) & \text{für } (k_1, k_2, k_3) \in H_\alpha^{(N)} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit

$$f^*(k) := \left( \frac{1}{N} - 2 \sum_{1 \leq \bar{k} \leq k} g_2(k, \bar{k}) f^*(\bar{k}) \right) \left( g_1(k) - 2 \sum_{1 \leq \bar{k} \leq k} g_2(k, \bar{k}) \right)^{-1}.$$

Für  $\mathbf{u} [\alpha, 1]^3$  erhält man durch aufsummieren von  $f_\alpha^{(N)}(k_1, k_2, k_3)$  folgende Funktion:

$$C_{N,\alpha}(\mathbf{u}) := \alpha + (1-\alpha) \sum_{k_1=1}^{k(u_1)} \sum_{k_2=1}^{k(u_2)} \sum_{k_3=1}^{k(u_3)} f_\alpha^{(N)}(k_1, k_2, k_3),$$

mit  $k(u) := \sup \left\{ k \geq 1 : \alpha + \frac{k(1+\alpha)}{N} \leq u \right\}$ .

Es ergaben sich folgende Werte für  $\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2 + X_3)$  unter Annahme der Komonotoniecopula M, der Gauss-Copula  $C_R^{Ga}$  mit Korrelationsmatrix R, der Unabhängigkeitscopula  $\Pi$  und  $C_{N,\alpha}$  für  $N = 51$ :

Für Szenario I:

$\alpha$	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>	<b>0.9999</b>
$\Pi$	12.1	19.4	57.0	91.1	275.0	1364.1
M	12.0	21.4	72.4	119.4	374.7	1889.9
$C_R^{Ga}$	11.8	20.1	62.9	94.2	267.0	1567.7
$C_{N,\alpha}$	21.7	37.2	119.9	198.3	612.9	3074.7

Für Szenario II:

$\alpha$	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>	<b>0.9999</b>
$\Pi$	8.8	14.4	44.3	72.2	227.9	1207.1
M	9.1	16.0	53.3	87.9	278.3	1453.4
$C_R^{Ga}$	8.7	14.8	43.8	70.1	194.4	1717.6
$C_{N,\alpha}$	13.5	22.6	70.2	113.3	346.5	1749.9

Für Szenario III:

$\alpha$	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>	<b>0.9999</b>
$\Pi$	80.6	191.9	1480.9	3619.2	29429.3	611060.0
M	53.6	135.1	1111.7	2755.7	22959.4	492734.0
$C_R^{Ga}$	60.0	153.0	1270.5	2576.4	27166.9	1299400.0
$C_{N,\alpha}$	129.6	317.7	2507.2	6101.9	48439.2	959841.3

# Literaturverzeichnis

- [1] P. Albrecht. „Zur Messung von Finanzrisiken“. *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft* Nr. 143, Universität Mannheim, 2003.
- [2] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath. „Coherent Measures of Risk“. *Mathematical Finance*, 9(3):203-228, 1999.
- [3] P. Baur, R. Enz. *Solvency II: Ein integrierter Risikoansatz für europäische Versicherer*. Swiss Re, Sigma 4/2006.
- [4] A. Beck, M. Lesko, F. Schlottmann, K. Wimmer. „Copulas im Risikomanagement“. *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, 14:727731, 2006.
- [5] C. Breitmeyer, H. Hakenes, A. Pfingsten, C.Rechtien. „Learning from Poverty Measurement: An Axiomatic Approach to Measure Downside Risk“. *ifk Discussion Paper Series*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1999.
- [6] CEIOPS. *Answers to the Second Wave of Calls for Advice in the Framework of the Solvency II Project*. 2005.
- [7] J.L.M. Dhaene, M.J. Goovaerts, R. Kaas. „Economic Capital Allocation Derived From Risk Measures“. *Northern American Actuarial Journal*, 7:44-59, 2003.
- [8] [ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/solvency\\_de.htm](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency_de.htm)
- [9] EFMA. *Risk Management in the Insurance Industry and Solvency II*. Capgemini Consulting, 2006.

- [10] M. Eling, H. Schmeiser, J.T. Schmit. „The Solvency II Process: Overview and Critical Analysis“. *Risk Management and Insurance Review*, 10:69-85, 2006.
- [11] P. Embrechts. „Copulas: A Personal View“. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3):639-650, 2009.
- [12] P. Embrechts, R. Frey, A.J. McNeil. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press Princeton und Oxford, 2005.
- [13] P. Embrechts, A. Höing. „Extreme VaR scenarios in higher dimensions“. *Extremes*, 9:177-192, 2006.
- [14] P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil. „Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management“. *Working paper, Risklab ETH Zurich*, 2001.
- [15] P. Embrechts, A. McNeil, D. Straubmann. „Correlation and Dependence in Riskmanagement: Properties and Pitfalls“. *RISK*, 12(5):69-71, 1999.
- [16] P. Embrechts, J. Neslehova. *Eine Einführung in Copulas*, ETH Zürich, 2006.
- [17] D. Filipovic, M. Kupper. „Optimal Capital and Risk Transfers for Group Diversification“. *Mathematical Finance*, 18:55-76, 2008.
- [18] D. Filipovic, D. Rost. *Benchmarking Study of Internal Models*, carried out on behalf of The Chief Risk Officer Forum, [www.math.lmu.de/~filipo/PAPERS/BMSReportfinal.pdf](http://www.math.lmu.de/~filipo/PAPERS/BMSReportfinal.pdf), 2005.
- [19] H. Gründl, M. Winter. *Solvency II und Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*. Gabler Verlag Wiesbaden, 2005.
- [20] T. Hein, Müller-Reichart, F. Romeike T. Hein. „Die Assekuranz am Scheideweg - Ergebnisse der ersten Benchmark-Studie zu Solvency II“. *Zeitschrift für Versicherungswesen*, 10:316-321, 2006.
- [21] International Actuarial Association. *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*. Insurer Solvency Assessment Working Party of the International Actuarial Association, 2006.



- [22] P. Liebwein. „Risk Models for Capital Adequacy: Applications in the Context of Solvency II and Beyond“. *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice*, 31:528-550, 2006.
- [23] T. Mikosch. „Copulas: Tales and Facts“. *Extremes*, 9:320, 2006.
- [24] R.B. Nelson. *An Introduction to Copulas*. Springer New York, 2006.
- [25] Österreichische Finanzmarktaufsicht.  
<http://www.fma.gv.at/cms/solvency2/DE/einzel.html?channel=CH0399>
- [26] <http://www.erisk.com/Learning/ERiskCaseStudies.asp>
- [27] [www.risknet.de](http://www.risknet.de)