

# **Kugelhappenförmige Mikrofonanordnung zur 3-dimensionalen Erfassung des Schallfeldes**

Diplomarbeit

Thomas Köbler

Betreuung: DI Dr.rer.nat. Franz Zotter & DI Hannes Pomberger

Beurteilung: Mag.art. DI Dr.techn. Robert Höldrich

Graz, Juni 2011



institut für elektronische musik und akustik



An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meines Studiums  
unterstützt haben!

## Zusammenfassung

**Kugelkappenförmige Mikrofonanordnung zur 3-dimensionalen Erfassung des Schallfeldes.** Ziel dieser Arbeit ist es, eine Mikrofonanordnung zur 3-dimensionalen Erfassung des Schallfeldes zu entwickeln. Die Anordnung ist grundsätzlich kugelförmig, unterscheidet sich jedoch von den bisher bekannten durch ein besonderes Merkmal: Die Kugel sitzt auf einem Kegel, der von deren Südpol aus bis zu einem definierten Polarwinkel das Schallfeld auf der Kugeloberfläche ausblendet. Auf dieser ausgeblendeten Region der Oberfläche muss das Schallfeld demnach nicht abgetastet werden - die verbleibende Kugelkappe kann so bei gleichbleibender Anzahl an Mikrofonen besser abgetastet werden. Was hier so einfach erscheint bringt aber auch gewisse neue Probleme mit sich. Zum Ersten muss die Wellengleichung unter Berücksichtigung des Kegels als Randbedingung neu gelöst werden. Der winkelabhängige Teil der Lösung wird jetzt durch Kugelkappenharmonische beschrieben. Diese unterscheiden sich von Kugelharmonischen dadurch, dass deren Ordnungen nicht mehr ganzzahlig sind. Weiters muss ein geeigneter Öffnungswinkel des Kegels und eine sinnvolle Verteilung der Abtastpositionen auf der Kugelkappe gefunden werden, mit der sich auch die Zerlegung des Schallfeldes in dessen Harmonische mit möglichst kleinen Fehlern realisieren lässt.

## **Abstract**

**Microphone Array on a Spherical Cap for 3-dimensional Recording of the Wave Field.** The objective of this diploma thesis is to develop a microphone array for 3-dimensional recording of the surrounding wave field. The used array is basically spherical but differs from known arrays by one feature: the sphere is mounted on top of a cone which masks a subpatch of the surface from the south pole up to a defined polar angle. In this masked region the wave field is zero, so there is no need to sample it with microphones. Therefore the remaining spherical cap can be sampled with better accuracy using the same number of microphones. But there are a lot of problems coming up with that approach. First of all the wave field equation has to be solved with respect to the new boundary condition added by the cone. Accordingly, the part of the solution with respect to the angle is represented by spherical cap harmonics which differ from the well known spherical harmonics in requiring non-integer orders. Furthermore an opening angle for the cone and a meaningful distribution of the microphone positions should be determined to decompose the wave field in a set of weighted spherical cap harmonics with a minimum error.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten</b>	<b>2</b>
2.1	Wellengleichung . . . . .	2
2.2	Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . . .	3
2.3	Physikalische Lösungen . . . . .	5
2.3.1	Lösung im Azimutwinkel $\phi$ . . . . .	6
2.3.2	Lösung im Polarwinkel $\theta$ . . . . .	6
2.3.3	Lösung im Radius $r$ . . . . .	10
2.4	Basislösungen (Moden) des Schallfeldes . . . . .	12
2.5	Kugelharm. harmonische . . . . .	13
2.6	Gesamtlösung . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Zerlegung des Schallfeldes in SCH</b>	<b>16</b>
3.1	Kontinuierliche SCH-Transformation . . . . .	16
3.2	Diskrete SCH-Transformation . . . . .	17
3.2.1	Begrenzung der Ordnung . . . . .	17
3.2.2	Diskretisierung der SCH . . . . .	18
3.3	Akustische Holografie . . . . .	21
3.3.1	Einfallende Felder . . . . .	21
3.3.2	Abstrahlende Felder . . . . .	22

## IV

3.3.3	Offene Mikrofonanordnung . . . . .	23
3.3.4	Geschlossene Mikrofonanordnung . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Anordnung der Abtastpunkte auf der Kugelkappe</b>	<b>26</b>
4.1	Kräftegleichgewicht elektrischer Ladungen . . . . .	26
4.2	Minimieren der Streuung der Voronoizellenflächen (MSV) . . . . .	30
4.3	Iterative Schwerpunktsvoronoizerlegung (ISVZ) . . . . .	32
4.4	Maximieren des kleinsten Singulärwertes (MaxSW) . . . . .	35
4.5	Minimieren der Konditionszahl (MinKZ) . . . . .	37
4.6	Vergleich der Algorithmen . . . . .	39
4.7	Kombination der Algorithmen . . . . .	40
4.8	Verteilungsoptimierung auf einem festen Raster . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Kompensation der radialen Ausbreitungsterme durch Holografiefilter</b>	<b>47</b>
5.1	Holografiefilter zur Berechnung einer Quellstärkeverteilung . . . . .	47
5.2	Modellierung der Holografiefilter mittels IIR-Filter . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerung und Ausblick</b>	<b>54</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>56</b>
A.1	Begriffserklärungen und Definitionen . . . . .	56

# **1 Einleitung**

Mittlerweile gibt es eine Reihe bekannter Entwicklungen von kugelförmigen Mikrofonanordnungen. Diese nehmen das gesamte Schallfeld um die Kugel auf. Basierend auf dieser Tatsache entstand die Idee, Teile des Schallfeldes, die keine sinnvollen Informationen enthalten, auszublenden. Stellt man sich eine kugelförmige Mikrofonanordnung vor, so wird diese für Aufnahmen meistens an einer schallharten Wand befestigt sein. Der Teil des Schallfeldes, der die Reflexion von der Wand darstellt, ist nicht von Interesse und muss somit auch nicht aufgenommen werden. Der uninteressante Winkelbereich wird mit einem Kegel, idealerweise von unendlicher Länge, ausgeblendet. Auf der verbleibenden Kugelkappe kann man so besser abtasten und erreicht dadurch höhere Auflösungen im Winkel. Ein besonderer Anreiz dieser Arbeit ist es, dass es für kugelkappenförmige Mikrofonanordnungen noch keine bekannten Entwicklungen gibt und man teilweise völliges Neuland betritt.

## 2 Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

In diesem Kapitel wird, ausgehend von der allgemeinen Lösung der Wellengleichung auch noch die spezielle Lösung erläutert, die physikalisch relevant ist. Daraus lassen sich Basislösungen, sogenannte Moden, des Schallfeldes und schließlich die Kugelkappenharmonischen definieren.

### 2.1 Wellengleichung

Die lineare verlustlose homogene Wellengleichung im Zeitbereich lautet

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator,  $c$  die Schallausbreitungsgeschwindigkeit und  $p(\mathbf{r}, t)$  ein Schallfeld im Punkt  $\mathbf{r}$  ist [Wil99, Teu07].

Da das Schallfeld später auf einer Kugel abgetastet und zerlegt werden soll, ist es zweckmäßig, die Wellengleichung in Kugelkoordinaten (siehe Abb. 1) zu lösen.

Dabei wird  $\mathbf{r}$  aus Gl. (1) zu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

mit dem Radius

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3)$$

dem Polarwinkel

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} \quad (4)$$

und dem Azimutwinkel

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (5)$$



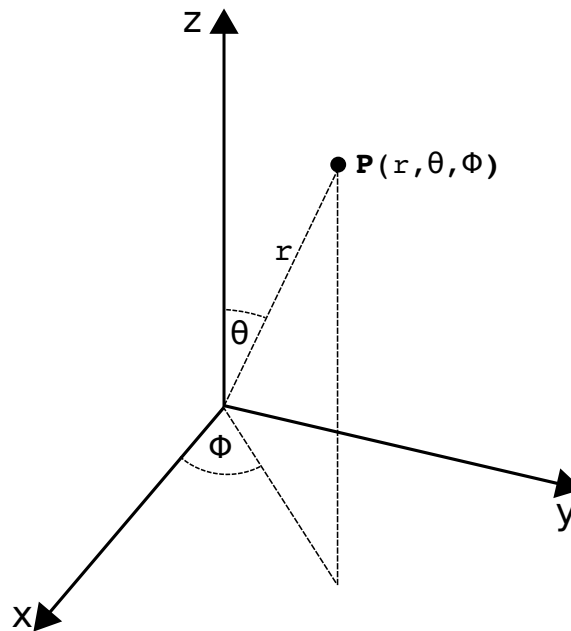


Abbildung 1: Definition des Koordinatensystems mit dem Radius  $r$ , Elevationswinkel  $\theta$  und Azimutwinkel  $\phi$ .

Setzt man nun den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (6)$$

in Gl. (1) ein, erhält man die Wellengleichung in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

als partielle Differentialgleichung 2.Ordnung [Wil99, Teu07].

## 2.2 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Mit dem Produktansatz

$$p(r, \phi, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t) \quad (8)$$

werden aus Gl. (7) vier voneinander unabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen [Wil99]:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \mu^2\Phi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} R = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T = 0. \quad (12)$$

Da die Glg. (9) bis (12) Differentialgleichungen 2.Ordnung sind, setzen sich deren Lösungen aus jeweils zwei linearen unabhängigen Funktionen zusammen.

Die Lösung für Gl. (9) ergibt

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 \cos(\mu\phi) + \Phi_2 \sin(\mu\phi), \quad (13)$$

dabei sind  $\Phi_{1,2}$  beliebige komplexwertige Koeffizienten und  $\mu$  ist ein Teil der Separationskonstanten.

Gl. (10) wird *zugeordnete Legendre-Differentialgleichung* genannt, deren Lösung

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_\nu^\mu(\cos\theta) + \Theta_2 Q_\nu^\mu(\cos\theta) \quad (14)$$

sich aus den *zugeordneten Legendre-Funktionen* der 1. und 2.Art,  $P_\nu^\mu(\cos\theta)$  bzw.  $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ , zusammensetzt. Die Parameter  $\mu$  und  $\nu$  sind Teil der Separationskonstanten und werden als *Grad* und *Ordnung* der zugeordneten Legendre-Funktionen bezeichnet [Pom10].

Gl. (11) wird *sphärische Bessel-Differentialgleichung* genannt. Deren Lösung

$$R(r) = R_1 j_\nu(kr) + R_2 y_\nu(kr) \quad (15)$$

setzt sich aus den sogenannten *sphärischen Bessel-Funktionen*  $j_\nu(kr)$ ,  $y_\nu(kr)$  der 1. bzw. 2.Art zusammen [Teu07, Wil99]. Letzere wird auch als *sphärische*

Neumann-Funktion bezeichnet. Dabei ist  $\nu$  wiederum die Ordnung und

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (16)$$

die Wellenzahl, mit  $\omega$  als Kreisfrequenz.  $R_{1,2}$  sind beliebige komplexwertige Koeffizienten. Alternativ kann die Lösung der Gl. (11) auch mit den *sphärischen Hankel-Funktionen* der 1. und 2. Art  $h_\nu^{(1,2)}(kr)$  beschrieben werden:

$$R(r) = R_3 h_\nu^{(1)}(kr) + R_4 h_\nu^{(2)}(kr), \quad (17)$$

mit

$$h_\nu^{(1)}(kr) = j_\nu(kr) + iy_\nu(kr), \quad (18)$$

$$h_\nu^{(2)}(kr) = j_\nu(kr) - iy_\nu(kr) \quad (19)$$

und den komplexwertigen Koeffizienten  $R_{3,4}$ .

Die Lösung der Gl. (12) ergibt den zeitabhängigen Teil

$$T(t) = T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t} \quad (20)$$

der Wellengleichung und stellt eine harmonische Schwingung dar, wobei  $T_{1,2}$  beliebige beliebige komplexwertige Koeffizienten sind. Da in weiterer Folge das stationäre Schallfeld betrachtet wird, wird  $T(t)$  von nun an vernachlässigt.

## 2.3 Physikalische Lösungen

Die Glg. (13), (14) und (15) bzw. (17) liefern eine Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen, da die Parameter  $\mu$  und  $\nu$  beliebige reelle Werte annehmen können. Anhand von physikalischen Bedingungen kann der Wertebereich eingeschränkt werden.

### 2.3.1 Lösung im Azimutwinkel $\phi$

Da der Schalldruck im homogenen Schallfeld eine stetige Größe ist, kommen für die Lösungen in  $\phi$  nur stetige Funktionen in Frage. Dazu muss

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \quad (21)$$

eine  $2\pi$ -periodische Funktion sein, was nur gewährleistet ist, wenn  $\mu = m \in \mathbb{Z}$  ganzzahlige Werte annimmt. Die Lösung im Azimutwinkel ergibt somit

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 \cos(m\phi) + \Phi_2 \sin(m\phi). \quad (22)$$

### 2.3.2 Lösung im Polarwinkel $\theta$

Die Legendre-Funktionen der 1. Art  $P_\nu^m(\cos \theta)$  weisen eine Singularität am Südpol

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow -1} P_\nu^m(\cos \theta) = \pm\infty \quad (23)$$

auf, wenn  $\nu \notin \mathbb{N}$  nicht-ganzzahlig ist. Die Legendre-Funktionen der 2. Art  $Q_\nu^m(\cos \theta)$  besitzen Singularitäten an beiden Polen

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow \pm 1} Q_\nu^m(\cos \theta) = \pm\infty \quad (24)$$

für alle Ordnungen  $\nu \in \mathbb{R}$ .

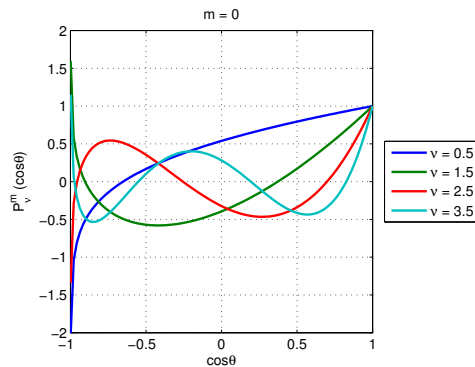
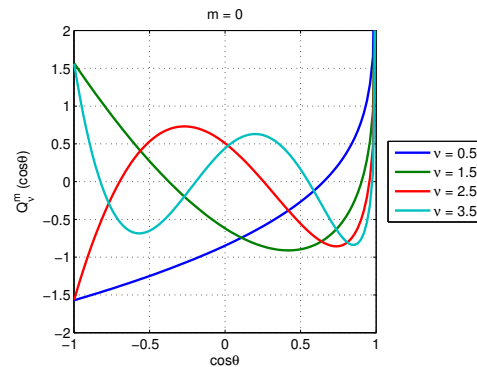
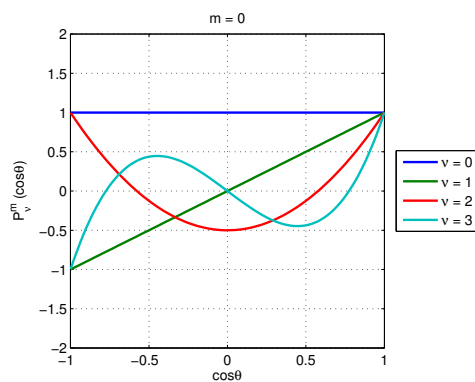
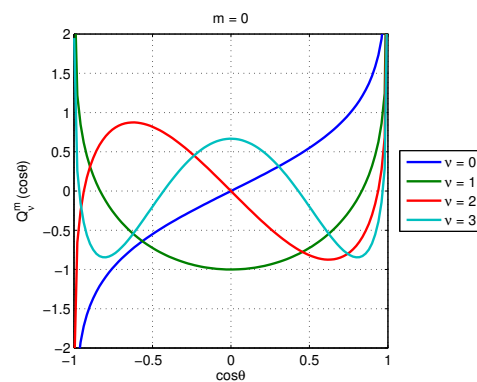
(a) 1.Art,  $\nu \in \mathbb{R}$ (b) 2.Art,  $\nu \in \mathbb{R}$ (c) 1.Art,  $\nu \in \mathbb{N}_0$ (d) 2.Art,  $\nu \in \mathbb{N}_0$ 

Abbildung 2: Legendre-Funktionen 1. und 2. Art

In Abb. 2 sind die Legendre-Funktionen der 1. und 2. Art exemplarisch für ganzzahlige und nicht-ganzzahlige Ordnungen  $\nu$  dargestellt. Aufgrund der Singularitäten können die Funktionen 2. Art  $Q_\nu^m(\cos \theta)$  mit  $\nu \notin \mathbb{N}_0$  als Lösungen im Polarwinkel  $\theta$  ausgeschlossen werden, womit die Lösungen in  $\theta$  auf

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_\nu^m(\cos \theta) \quad (25)$$

beschränkt sind.

**Lösung für den schallharten Kegel:** Da das Schallfeld im Polarwinkel  $0 \leq \theta \leq \theta_c$  eingeschränkt werden soll, wird ein unendlich langer Kegel mit dem Halböffnungswinkel  $\theta_c$ , siehe Abb. 3, ins Feld eingebracht.

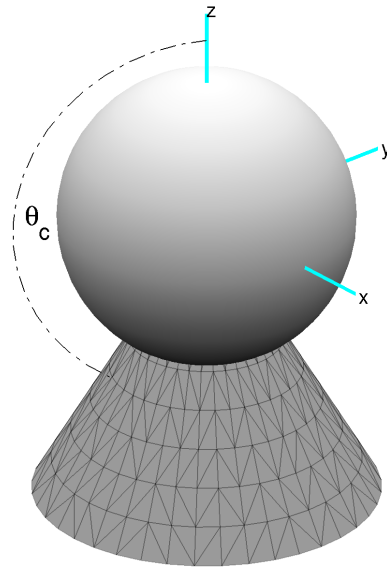


Abbildung 3: Kugelkappe auf Kegel mit  $\theta_c = 150^\circ$

Dazu muss die Normalschnelle auf der schallharten Oberfläche des Kegels

$$\left. \frac{dP_{\nu}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_c} \stackrel{!}{=} 0 \quad (26)$$

Null werden [Pom10]. Gl. (26) wird auch als *Neumann-Randbedingung* bezeichnet. Damit auch auf der Kugelkappe eine Zerlegung des Schallfeldes durchgeführt und Holografie gerechnet werden kann, müssen die Lösungen in  $\theta$  diese Randbedingung erfüllen.

Für einen definierten Winkel  $\theta_c$  und Grad  $m$  ( $|m| \leq n, n = 1, 2, \dots, \infty$ ) existieren unendlich viele Funktionen  $P_{\nu_n^m}^m(\cos \theta_c)$ , welche die Randbedingung erfüllen. Diese Funktionen werden als *Eigenfunktionen* des Randwertproblems bezeichnet und sind orthogonal

$$\int_1^{\cos(\theta_c)} P_{\nu_n^m}^m(\zeta) P_{\nu_{n'}^m}^m(\zeta) d\zeta = 0, \quad n \neq n' \quad (27)$$

im Intervall  $0 \leq \theta \leq \theta_c$  in Bezug auf ihre Eigenwerte  $\nu_n^m < \nu_{n+1}^m$ , wobei diese nicht-ganzzahlig  $\nu_n^m \in \mathbb{R}$  sind.

Die Eigenwerte  $\nu_n^m$  werden numerisch mittels Nullstellendetektion ermittelt. Ein Algorithmus zur Berechnung der zugehörigen Legendre-Funktionen ist in [OS83] beschrieben.

Die Singularität am Südpol  $\cos \theta = -1$  liegt nicht mehr im Definitionsbereich der Lösung  $0 \leq \theta \leq \theta_c$  somit kann Gl. (25) neu formuliert werden:

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_{\nu_n^m}^m(\cos \theta). \quad (28)$$

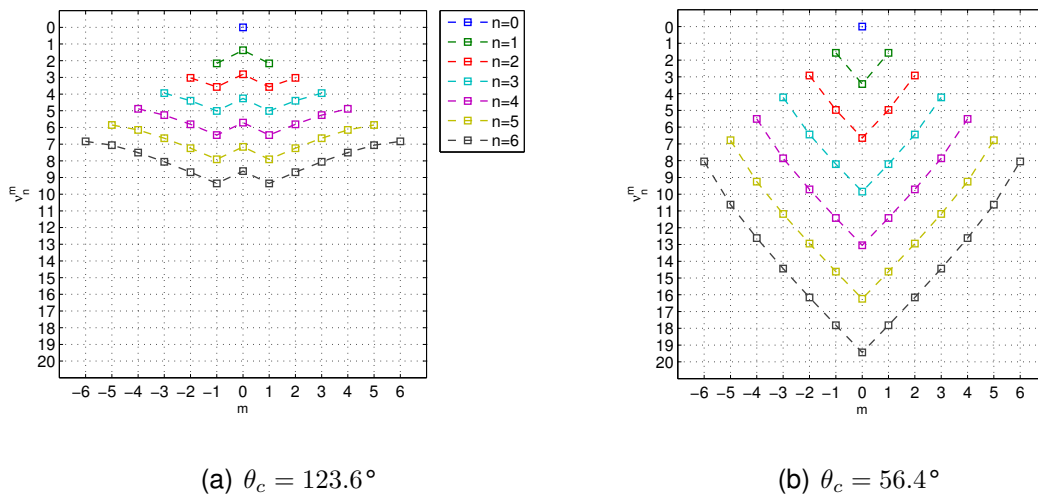


Abbildung 4: Ordnungen (Eigenwerte)  $\nu_n^m$  der Lösungen für  $n = 0 \dots 6$

In Abb. 4 sind die Eigenwerte  $\nu_n^m$  für  $n = 0 \dots 6$  für zwei verschiedene Halbwinkel  $\theta_c$  zu sehen. Wie man schön erkennen kann, hängt der Abstand  $\Delta \nu_n^m = \nu_{n+1}^m - \nu_n^m$  von  $\theta_c$  ab und ist bei großen Winkeln geringer [Pom10].

### 2.3.3 Lösung im Radius $r$

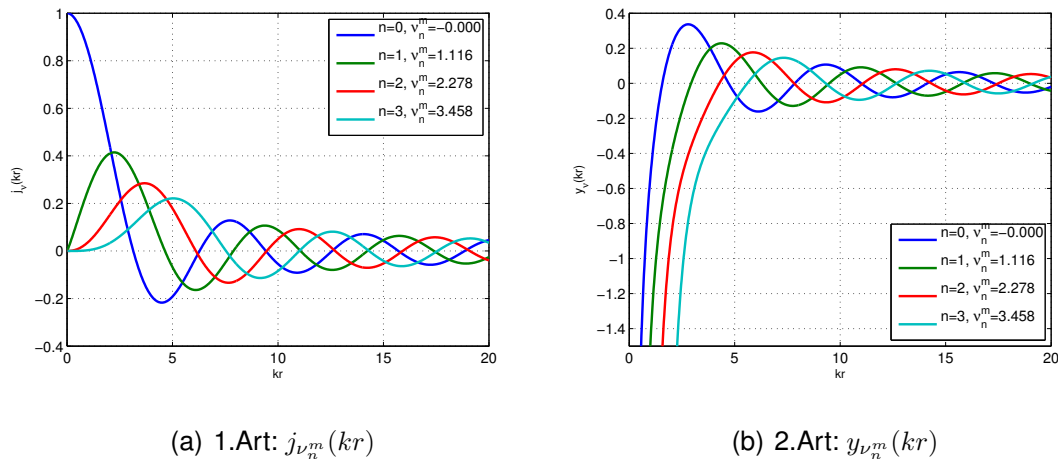


Abbildung 5: Sphärische Bessel-Funktionen 1. und 2. Art mit  $m = 0$ ,  $\theta_c = 150^\circ$  und  $n = 0 \dots 3$ .

In Abb. 5 sind die sphärischen Bessel-Funktionen der 1. und 2. Art,  $j_{\nu_n^m}(kr)$  bzw.  $y_{\nu_n^m}(kr)$  mit den Ordnungen  $\nu_n^m$  für  $n = 0 \dots 3$  dargestellt. Zu erkennen ist, dass im Ursprung  $kr = 0$  nur die Funktionen 1. Art  $j_{\nu_n^m}(kr)$  endlich sind bzw. nur die Funktion 0-ter Ordnung  $j_0^0(kr) \neq 0$  existiert.

Für die Lösung im Radius  $r$  unterscheidet man zwischen folgenden zwei Szenarien [Zot09, ZP11]:

**Inneres Problem:** Alle Schallquellen befinden sich in einem Bereich mit Radius  $r > r_0$ . Das Schallfeld im Inneren,  $0 \leq r \leq r_0$ , kann vollständig beschrieben werden (siehe Abb. 6).



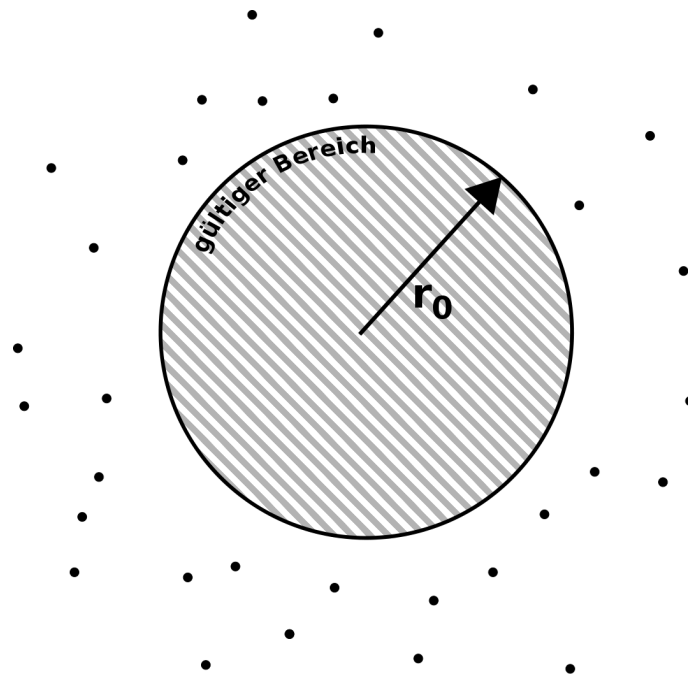


Abbildung 6: Inneres Problem

Aufgrund der Singularitäten im Ursprung von  $y_{\nu_n^m}(kr)$  bleiben für das Innere Problem die Funktionen 1. Art  $j_{\nu_n^m}(kr)$  übrig. Die Lösung in  $r$  ergibt

$$R(r) = R_1 j_{\nu_n^m}(kr) \quad (29)$$

und wird als radiale Lösung für *einfallende Felder* bezeichnet.

**Äußeres Problem:** Alle Schallquellen befinden sich in einem Bereich mit Radius  $r < r_0$ . Das äußere Schallfeld,  $r_0 \leq r < \infty$ , kann vollständig beschrieben werden (siehe Abb. 7).

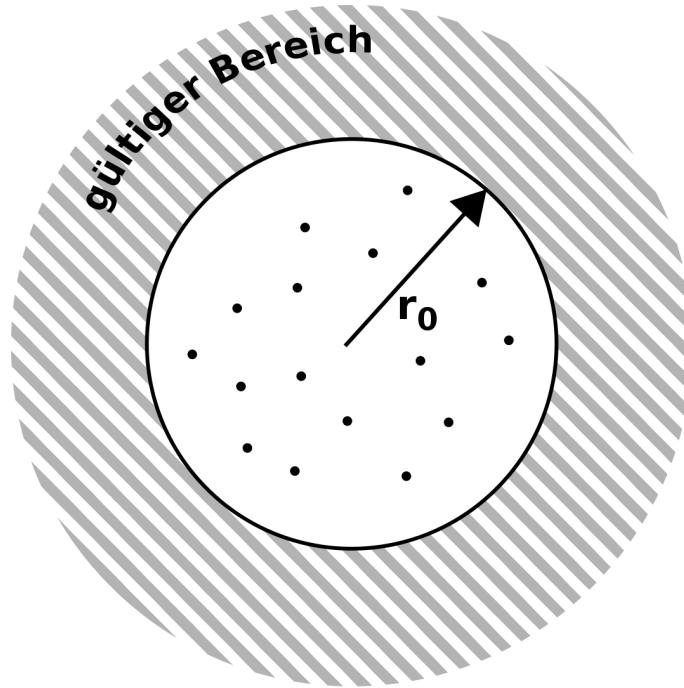


Abbildung 7: Äußeres Problem

Für diesen Fall muss die *Sommerfeld'sche Abstrahlungsbedingung*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial r} - ikp(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (30)$$

erfüllt sein [Wil99, ZP11]. Diese Bedingung erfüllt

$$R(r) = R_4 h_{\nu_n^m}(kr), \quad (31)$$

mit  $h_{\nu_n^m}(kr) \equiv h_{\nu_n^m}^{(2)}(kr)$  [Zot09] und wird als radiale Lösung für *abstrahlende Felder* bezeichnet.

## 2.4 Basislösungen (Moden) des Schallfeldes

Setzt man die Lösungen in Gl. (8) ein, resultieren daraus die Basislösungen (Moden) des *einfallenden*

$$p_{i,nm}(kr, \theta, \phi) = R_{1,n} j_{\nu_n^m}(kr) \Theta_{1,n,m} P_{\nu_n^m}^m(\cos \theta) [\Phi_{1,m} \cos(m\phi) + \Phi_{2,m} \sin(m\phi)] \quad (32)$$

bzw. des *abstrahlenden* Feldes

$$p_{o,nm}(kr, \theta, \phi) = R_{4,n} h_{\nu_n^m}(kr) \Theta_{1,n,m} P_{\nu_n^m}^m(\cos \theta) [\Phi_{1,m} \cos(m\phi) + \Phi_{2,m} \sin(m\phi)]. \quad (33)$$

Ein allgemeines homogenes Schallfeld besteht aus einem ein- und abstrahlenden Teil und kann als Summe dieser beiden Teile dargestellt werden. Somit ergeben sich die Moden des Schallfeldes:

$$p_{nm}(kr, \theta, \phi) = p_{i,nm}(kr, \theta, \phi) + p_{o,nm}(kr, \theta, \phi) =$$

$$\left[ R_{1,n} j_{\nu_n^m}(kr) + R_{4,n} h_{\nu_n^m}(kr) \right] \Theta_{1,n,m} P_{\nu_n^m}^m(\cos \theta) [\Phi_{1,m} \cos(m\phi) + \Phi_{2,m} \sin(m\phi)]. \quad (34)$$

## 2.5 Kugelkappenharmonische

Der winkelabhängige Teil aus Gl. (34) kann zu sphärischen Basisfunktionen auf der Kugelkappe zusammengefasst werden. Diese werden als *Kugelkappenharmonische*, im Englischen: *Spherical Cap Harmonics* (SCH), bezeichnet. Die reellwertigen SCH sind als

$$Y_{\nu_n^m}^m(\phi, \theta) = N_{\nu_n^m}^{|m|} P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\phi), & m \leq 0 \\ \sin(m\phi), & m > 0 \end{cases} \quad (35)$$

definiert. Für die Legendre-Funktionen 1.Art  $P_{\nu_n^m}^{|m|}$  genügt es den Betrag des Grades  $|m|$  zu verwenden, da sich  $P_{\nu_n^m}^{+m}$  von  $P_{\nu_n^m}^{-m}$  nur durch einen reellen Faktor unterscheidet, welcher einfach in einer unterschiedlichen Gewichtung der SCH resultiert. Zusätzlich wird eine Fallunterscheidung für positive und negative Grade  $m$  gemacht, um sicherzustellen, dass auch SCH gleicher Ordnung  $\nu_n^m$  orthogonal zueinander sind.

$N_{\nu_n^m}^{|m|}$  normiert die Summe der Quadrate der SCH auf den Betrag 1, sodass die SCH *orthonormal*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} Y_{\nu_n^m}^m(\phi, \theta) Y_{\nu_{n'}^{m'}}^{m'}(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (36)$$

werden [Teu07], wobei  $\delta_{nn',mm'}$  als *Kronecker-Delta*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (37)$$

bezeichnet wird.

Einfache analytische Ausdrücke für  $N_{\nu_n^m}^{|m|}$  bekommt man nur, wenn  $\nu_n^m \in \mathbb{Z}$  ist [HC97], ansonsten muss

$$N_{\nu_n^m}^{|m|} = \frac{1}{\sqrt{\tau \int_0^{\theta_c} P_{\nu_n^m}^{|m|}(\cos \theta)^2 \sin(\theta) d\theta}} \quad (38)$$

numerisch ermittelt werden, mit

$$\tau = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ \pi, & m \neq 0. \end{cases} \quad (39)$$

In Abb. 8 sind die Beträge der SCH  $|Y_{\nu_n^m}^m(\phi, \theta)|$  als Radien über die Kugelkappe aufgetragen.

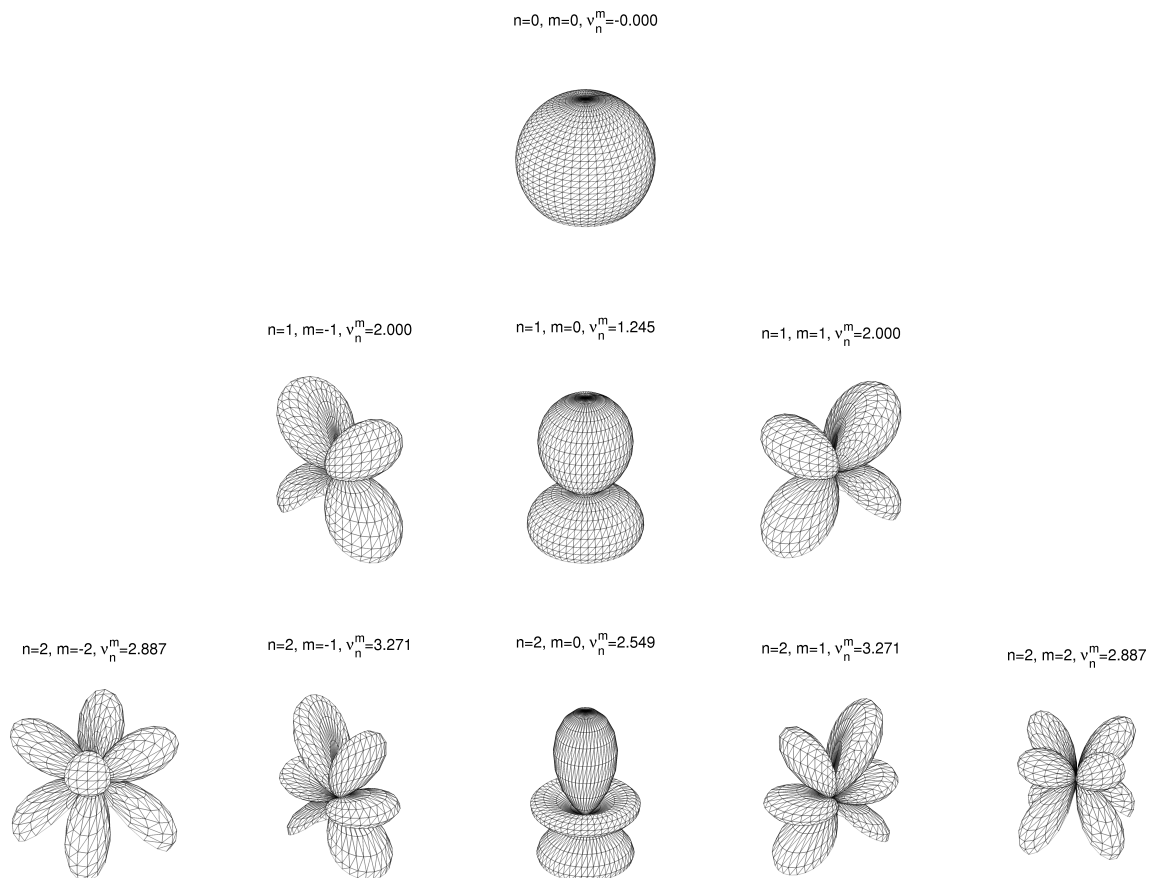


Abbildung 8: Kugelkappenharmonische mit  $n = 0 \dots 2$  und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ .

## 2.6 Gesamtlösung

Das gesamte Feld

$$p(kr, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [b_{nm} j_{\nu_n}^m(kr) + c_{nm} h_{\nu_n}^m(kr)] Y_{\nu_n}^m(\phi, \theta) \quad (40)$$

lässt sich aus der Summe gewichteter SCH darstellen, wobei  $b_{nm}$  und  $c_{nm}$  komplexwertige Koeffizienten sind.  $b_{nm}$  und  $c_{nm}$  werden auch als *Wellenspektren* für das *einfallende* bzw. *abstrahlende* Feld bezeichnet.

### 3 Zerlegung des Schallfeldes in SCH

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass sich jedes beliebige homogene Schallfeld als Summe gewichteter SCH darstellen lässt. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie man ein Schallfeld zerlegen kann. Weiters wird die Möglichkeit, mit einem zerlegten Feld holografische Berechnungen durchzuführen, erläutert.

#### 3.1 Kontinuierliche SCH-Transformation

Jede beliebige Funktion  $p(r, \theta, \phi)$ , die für das Randwertproblem mit schallhartem Kegel auf der Oberfläche einer Kugelkappe  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_c$  möglich ist, kann mit Hilfe der SCH-Transformation als Summe gewichteter SCH

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}(r) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \quad (41)$$

dargestellt werden [Teu07, Wil99], dabei wird  $A_{nm}(r)$  als *sphärisches Wellenspektrum* am Radius  $r$  bezeichnet.

Die *SCH-Transformation* ist definiert als

$$A_{nm}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} p(r, \theta, \phi) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (42)$$

Setzt man Gl. (41) in Gl. (42) ein

$$A_{nm}(r) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} A_{n'm'}(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} Y_{\nu_{n'}^{m'}}^{m'}(\theta, \phi) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}_{=\delta_{nn'} \delta_{mm'}}, \quad (43)$$

lassen sich aufgrund der Orthogonalität der SCH die Koeffizienten  $A_{nm}$  berechnen.

## 3.2 Diskrete SCH-Transformation

### 3.2.1 Begrenzung der Ordnung

Nicht gleichzusetzen ist die Begrenzung der Ordnung mit der Bandbegrenzung, zum Beispiel durch Tiefpassfilterung, von Zeitsignalen. Im Falle der SCH wird angenommen, dass das zu zerlegende Schallfeld bandbegrenzt mit

$$0 \leq \nu_n^m \leq \nu_N^m < \infty, \quad 0 \leq n \leq N, \quad N < \infty \quad (44)$$

ist. Das bandbegrenzte Schallfeld kann als

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n A_{nm}(r) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \quad (45)$$

formuliert werden.

**Ebene Welle:** Als Beispiel wird das Feld einer ebenen Welle  $p_{pw}$ , die auf den schallharten Kegel trifft herangezogen. Wird diese in SCH zerlegt, ergibt das Wellenspektrum

$$b_{nm} = i^{\nu_n^m} Y_{\nu_n^m}^m(\theta_0, \phi_0), \quad (46)$$

wobei  $\phi_0, \theta_0$  die Richtung ist, aus der die Welle kommt.

Mit dem Wellenspektrum aus Gl. (46) ergibt sich das Feld der ebenen Welle

$$p_{pw}(kr, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n i^{\nu_n^m} j_{\nu_n^m}(kr) Y_{\nu_n^m}^m(\theta_0, \phi_0) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi). \quad (47)$$

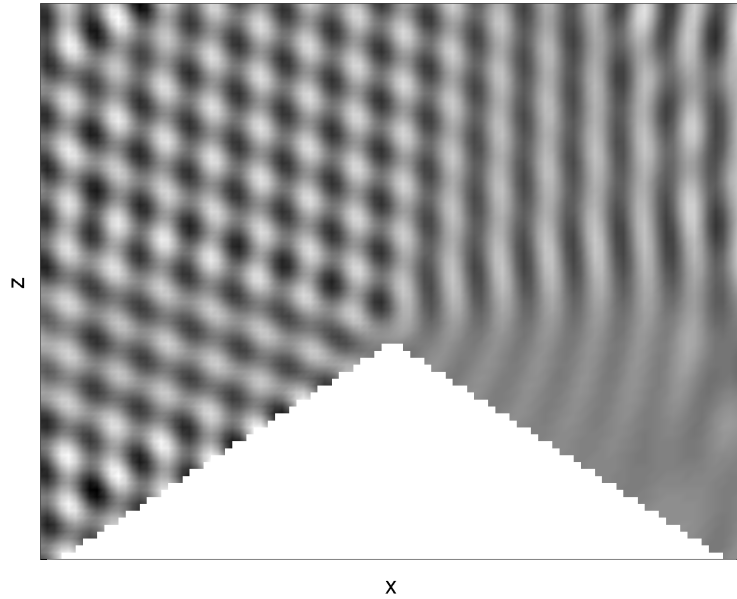


Abbildung 9: xz-Ebene des Feldes der ebenen Welle, die von links ( $\phi_0 = 180^\circ$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ ) auf den Kegel mit  $\theta_c = 123.6^\circ$  trifft. Die maximale Ordnung ist  $N = 40$ .

Abb. 9 zeigt das Feld der ebenen Welle  $p_{pw}(r, \theta, \phi)$ . Schön zu sehen sind die Interferenzmuster, die der Kegel verursacht.

### 3.2.2 Diskretisierung der SCH

Die kontinuierlichen SCH werden nun an diskreten Stellen  $\boldsymbol{\theta}_l = (\theta_l, \phi_l)$  abgetastet. Die Doppelsumme aus Gl. (41) kann in Vektornotation equivalent als Skalarprodukt ausgedrückt werden und das bandbegrenzte Schallfeld lässt sich als

$$\mathbf{p} = \mathbf{Y}_N^T \boldsymbol{\gamma}_N \quad (48)$$

anschreiben, mit dem diskretisierten Schallfeld

$$\mathbf{p} = \text{vec}\{p(\boldsymbol{\theta}_l)\} = \begin{pmatrix} p(\boldsymbol{\theta}_1) \\ \vdots \\ p(\boldsymbol{\theta}_L) \end{pmatrix}, \quad (49)$$



dem Koeffizientenvektor

$$\boldsymbol{\gamma}_N = \text{vec}\{A_{nm}\} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{(N+1)^2} \end{pmatrix} \quad (50)$$

und der SCH-Matrix

$$\mathbf{Y}_N^T = \text{mtx}\{Y_{nm}(\boldsymbol{\theta}_l)\} = \begin{pmatrix} Y_1(\boldsymbol{\theta}_1) & \cdots & Y_{(N+1)^2}(\boldsymbol{\theta}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1(\boldsymbol{\theta}_L) & \cdots & Y_{(N+1)^2}(\boldsymbol{\theta}_L) \end{pmatrix}, \quad (51)$$

wobei  $l = 1 \dots L$  und  $mn = n^2 + n + m + 1 = 1, 2 \dots (N+1)^2$  ein linearer Index ist.

Gl. (48) stellt ein lineares Gleichungssystem mit  $L$  Gleichungen und  $(N+1)^2$  Unbekannten dar. Dabei werden 3 Fälle unterschieden [Pom08]:

1.  $L < (N+1)^2$ : Das Gleichungssystem ist unterbestimmt, es gibt unendlich viele Lösungen. Die SCH können nicht unterschieden werden, was zu räumlichem Aliasing führt.
2.  $L = (N+1)^2$ : Es gibt eine exakte Lösung wenn die Inverse  $(\mathbf{Y}_N^T)^{-1}$  existiert. Dazu muss eine Anordnung der Abtastpunkte gefunden werden, welche die SCH orthogonalisiert, was auf der Kugelkappe schwierig ist.
3.  $L > (N+1)^2$ : Das Gleichungssystem ist überbestimmt, es gibt keine exakte Lösung.

Für Fall 3 gibt es eine Lösung im Sinne des minimierten quadratischen Fehlers (MMSE)

$$J(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_N) = \|\mathbf{p} - \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N\|^2 \rightarrow \min, \quad (52)$$

wobei

$$\begin{aligned} J(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_N) &= (\mathbf{p} - \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N)^T (\mathbf{p} - \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N) \\ &= (\mathbf{p}^T - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N^T \mathbf{Y}_N) (\mathbf{p} - \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N) \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{p} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N^T \mathbf{Y}_N \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N^T \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T \hat{\boldsymbol{\gamma}}_N \end{aligned} \quad (53)$$

die Kostenfunktion und  $\hat{\gamma}_N$  der approximierten Koeffizientenvektor ist.

Zum Lösen des Minimierungsproblems wird die Nullstelle in der abgeleiteten Kostenfunktion

$$\frac{\partial J(\hat{\gamma}_N)}{\partial \hat{\gamma}_N} = \mathbf{Y}_N \mathbf{p} + \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T \hat{\gamma}_N \stackrel{!}{=} 0 \quad (54)$$

gesucht.

Daraus resultiert der Koeffizientenvektor

$$\rightarrow \hat{\gamma}_N = \underbrace{(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)^{-1} \mathbf{Y}_N}_{:= (\mathbf{Y}_N^T)^\dagger} \mathbf{p}, \quad (55)$$

der den quadratischen Fehler minimiert. Dabei wird  $(\mathbf{Y}_N^T)^\dagger := (\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)^{-1} \mathbf{Y}_N$  als *Pseudo-Inverse* von  $\mathbf{Y}_N^T$  bezeichnet. In diesem Fall ist sie die Links-Inverse, da die Einheitsmatrix resultiert, wenn sie von links mit  $\mathbf{Y}_N^T$  multipliziert wird.

Ist  $\mathbf{p} = \mathbf{Y}_N^T \gamma_N$  eine bandbegrenzte Funktion mit maximaler Ordnung  $\nu_n^m$ , so können die Koeffizienten exakt bestimmt werden [Pom08]

$$\hat{\gamma}_N = \underbrace{(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)^{-1} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T}_I \gamma_N, \quad (56)$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist.

Damit kann die *diskrete SCH-Transformation* mit

$$\gamma_N = (\mathbf{Y}_N^T)^{-1} \mathbf{p} \quad \text{für } L = (N + 1)^2 \quad (57)$$

bzw. mit

$$\hat{\gamma}_N = (\mathbf{Y}_N^T)^\dagger \mathbf{p} \quad \text{für } L > (N + 1)^2 \quad (58)$$

formuliert werden.

Aus den obigen Bedingungen für die Lösbarkeit des Systems kann ein *räumliches Abtasttheorem* abgeleitet werden [Pom08]:

$$L \stackrel{!}{\geq} (N + 1)^2 \quad (59)$$

und

$$\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T) \ll \infty, \quad (60)$$

wobei  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  die Konditionszahl der Matrix  $\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T$  ist.

**Konditionszahl** Die Konditionszahl  $\kappa$  ist definiert als das Verhältnis von größtem zu kleinstem Singulärwert (SW) einer Singulärwertzerlegung einer Matrix [WR11]. Sie ist ein Maß für die Empfindlichkeit eines Systems gegenüber Eingangsfehlern. Systeme mit einer Konditionszahl in der Nähe von 1 gelten als gut invertierbar. Geht die Konditionszahl gegen  $\infty$ , so ist die betreffende Matrix singular und nicht invertierbar.

### 3.3 Akustische Holografie

Die Möglichkeit, das Schallfeld am Radius  $r$  zu bestimmen, wenn dieses am Radius  $r_a \neq r$  bekannt ist, nennt man *akustische Holografie*.

#### 3.3.1 Einfallende Felder

Existiert nur ein einfallendes Feld, kann dieses mit

$$p_i(kr_a, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} j_{\nu_n^m}(kr_a) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \quad (61)$$

formuliert werden, dabei ist  $r_a$  der Radius an dem das Feld zerlegt wird. Mit Hilfe der SCH-Transformation erhält man das Wellenspektrum für das einfallende Feld

$$b_{nm} = \frac{1}{j_{\nu_n^m}(kr_a)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} p_i(kr_a, \theta', \phi') Y_{\nu_n^m}^m(\theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi', \quad (62)$$

wodurch das Feld

$$p_i(kr, \theta, \phi) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{j_{\nu_n^m}(kr)}{j_{\nu_n^m}(kr_a)} Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} p_i(kr_a, \theta', \phi') Y_{\nu_n^m}^m(\theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi' \quad (63)$$

vollständig bestimmt ist.

Mit Hilfe von Gl. (63) kann man, wenn der Schalldruck auf der Kugelkappe mit Radius  $r_a$  bekannt ist, das einfallende Feld an jedem beliebigen Radius  $r$  im quellenfreien Bereich, siehe „Inneres Problem“ in Abschnitt 2.3.3, berechnen [Wil99].

### 3.3.2 Abstrahlende Felder

Existiert nur ein abstrahlendes Feld, kann dieses mit

$$p_o(kr_a, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} h_{\nu_n^m}(kr_a) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \quad (64)$$

formuliert werden. Dabei ergibt das Wellenspektrum für das abstrahlende Feld

$$c_{nm} = \frac{1}{h_{\nu_n^m}(kr_a)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} p_o(kr_a, \theta', \phi') Y_{\nu_n^m}^m(\theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi', \quad (65)$$

wodurch das Feld

$$p_o(kr, \theta, \phi) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h_{\nu_n^m}(kr)}{h_{\nu_n^m}(kr_a)} Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} p_o(kr_a, \theta', \phi') Y_{\nu_n^m}^m(\theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi' \quad (66)$$

vollständig bestimmt ist.

Mit Hilfe von Gl. (66) kann man, wenn der Schalldruck auf der Kugelkappe mit Radius  $r_a$  bekannt ist, das abstrahlende Feld an jedem beliebigen Radius  $r$  im quellenfreien Bereich, siehe „Äußeres Problem“ in Abschnitt 2.3.3, berechnen [Wil99].

### 3.3.3 Offene Mikrofonanordnung

In diesem Fall wird angenommen, dass die Mikrofonanordnung völlig transparent für das Schallfeld ist. Es ergibt sich der radiale Ausbreitungsterm

$$G_{\nu_n^m}(kr) = j_{\nu_n^m}(kr). \quad (67)$$

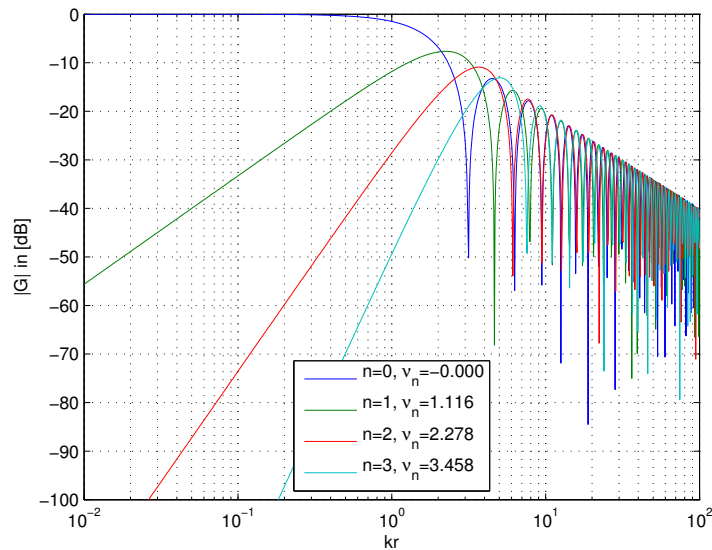


Abbildung 10: Frequenzgang von  $G_{\nu_n^m}(kr)$  bei einer offenen Mikrofonanordnung für  $\theta_c = 150^\circ$ ,  $m = 0$ ,  $n = 0 \dots 3$ .

In Abb. 10 ist der Frequenzgang von  $G_{\nu_n^m}(kr)$  einer offenen Mikrofonanordnung zu sehen. Im Bereich  $kr < \nu_n^m$  weisen die Filter mit  $n > 0$  Hochpasscharakteristik mit einer Steilheit von  $6 \nu_n^m$  dB/Oktave auf. Darüber treten Kerben (im Englischen: notches) auf, die mit den Nullstellen von  $j_{\nu_n^m}(kr)$  korrespondieren. Diese Kerben sind problematisch, wenn die Inverse  $G_{\nu_n^m}^{-1}(kr)$  berechnet wird. Die sogenannten *Holografie-Filter*, die diese Inversion beinhalten, wären instabil. Mit offenen Mikrofonanordnungen, die Druckempfänger (Mikrofone mit Kugelcharakteristik) verwenden, kann also keine bzw. nur eingeschränkt Holografie gerechnet werden.

### 3.3.4 Geschlossene Mikrofonanordnung

In diesem Fall sind die Mikrofone auf einer schallharten Oberfläche angebracht. Die Normalschnelle auf einer schallharten Oberfläche ist Null. Da die Schallschnelle proportional zur Ableitung des Schalldruckes ist, ergibt sich folgende Randbedingung für eine schallharte Kugelkappe:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left( p_i(r, \theta, \phi) + p_s(r, \theta, \phi) \right) \right|_{r=r_a} \stackrel{!}{=} 0, \quad (68)$$

dabei  $p_i$  das einfallende Feld und  $p_s$  das gestreute abstrahlende Feld. Setzt man die Glg. (61) und (64) in Gl. (68) ein, ergibt die Randbedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} j'_{\nu_n^m}(kr_a) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} h'_{\nu_n^m}(kr_a) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi), \quad (69)$$

wobei  $h'_{\nu_n^m}(kr_a)$  und  $j'_{\nu_n^m}(kr_a)$  die abgeleiteten sphärischen Hankel- bzw. Besselfunktionen sind, die sich mit der Rekurrenzbeziehung [Wil99, Teu07]

$$h'_{\nu}(kr_a) = h_{\nu-1}(kr_a) - \frac{\nu+1}{kr_a} h_{\nu}(kr_a) \quad (70)$$

bzw.

$$(71)$$

$$j'_{\nu}(kr_a) = j_{\nu-1}(kr_a) - \frac{\nu+1}{kr_a} j_{\nu}(kr_a) \quad (72)$$

berechnen lassen.

Damit ist das Wellenspektrum des gestreuten Feldes durch jenes des einfallenden Feldes bestimmt

$$c_{nm} = -b_{nm} \frac{j'_{\nu_n^m}(kr_a)}{h'_{\nu_n^m}(kr_a)}. \quad (73)$$

Das gesamte Feld ergibt sich aus der Überlagerung des einfallenden und des gestreuten Feldes

$$\begin{aligned} p(r, \theta, \phi) &= p_i(r, \theta, \phi) + p_s(r, \theta, \phi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} \left[ j_{\nu_n^m}(kr) - \frac{j'_{\nu_n^m}(kr_a)}{h'_{\nu_n^m}(kr_a)} h_{\nu_n^m}(kr) \right] Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (74)$$

Es ergibt sich der radiale Ausbreitungsterm des gesamten Feldes

$$G_{\nu_n^m}(kr) = j_{\nu_n^m}(kr) - \frac{j'_{\nu_n^m}(kr_a)}{h'_{\nu_n^m}(kr_a)} h_{\nu_n^m}(kr). \quad (75)$$

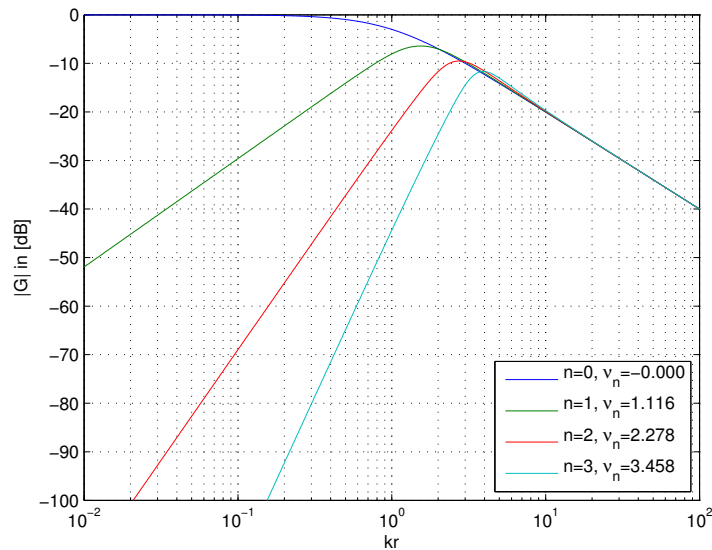


Abbildung 11: Frequenzgang von  $G_{\nu_n^m}(kr)$  bei geschlossener Mikrofonanordnung für  $\theta_c = 150^\circ$ ,  $m = 0$ ,  $n = 0 \dots 3$ .

In Abb. 11 ist der Frequenzgang  $G_{\nu_n^m}(kr)$  einer geschlossenen Mikrofonanordnung zu sehen. Für  $kr < \nu_n^m$  ist der Frequenzgang dem der offenen Mikrofonanordnung ähnlich. Der entscheidende Unterschied ist jedoch, dass der gesamte Ausbreitungsterm keine Nullstellen hat und somit für  $kr > \nu_n^m$  ein glatter Frequenzgang resultiert. Dadurch bereitet auch die Inversion des Ausbreitungstermes keine Probleme, Holografieberechnungen sind daher mit geschlossenen Mikrofonanordnungen möglich.

## 4 Anordnung der Abtastpunkte auf der Kugelkappe

Für kugelförmige Mikrofonanordnungen gibt es eine Reihe von Abtaststrategien, siehe [Zot09], die aber für Anordnungen auf der Kugelkappe nicht direkt übertragbar sind.

Dieser Abschnitt beschreibt Algorithmen zur Verteilung der Abtastpunkte auf einer Kugelkappe, die eine Zerlegung in SCH erlauben. Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, ist dafür eine gute Konditionierung der Matrix  $\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T$  notwendig.

Die Abschnitte 4.1 bis 4.3 behandeln Algorithmen, welche die Verteilung der Abtastpunkte bezüglich geometrischer Gleichmäßigkeit optimieren. In Abschnitt 4.4, 4.5 und 4.8 wird die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  direkt optimiert. Die Kombination einiger dieser Algorithmen behandelt Abschnitt 4.7.

Um die unterschiedlichen Algorithmen vergleichbar zu machen, wird immer ein und dieselbe Zufallsverteilung, im Folgenden mit SSV (standardisierte Startverteilung) bezeichnet, herangezogen.

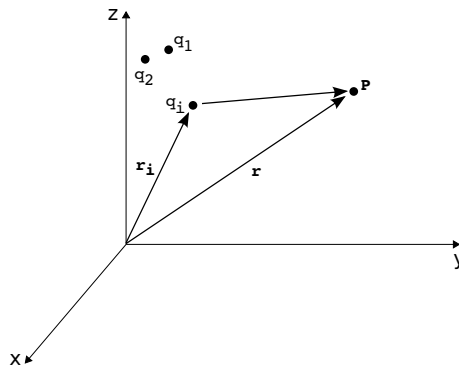
### 4.1 Kräftegleichgewicht elektrischer Ladungen

Dieser Abschnitt behandelt ein Verfahren, mit dessen Hilfe die Mikrofonanordnung bezüglich der Abstände zwischen den Abtastpunkten optimiert wird. Es wird angenommen, dass sich auch die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  verbessert, wenn die Abtastpunkte gleichmäßiger verteilt sind.

An die Elektrostatik angelehnt, bedient sich diese Verteilungsstrategie am Prinzip sich abstoßender elektrischer Ladungen.

Abb. 12 zeigt Punktladungen  $q_i$ , die sich im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  befinden.



Abbildung 12: Punktladungen  $q_i$  im elektrischen Feld

Nach dem *Coulomb'schen Gesetz* wirkt auf Ladungen im elektrischen Feld die Kraft [Gri07]

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (76)$$

dabei ist  $Q$  die elektrische Ladung einer Punktladung im Punkt  $P$  und

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^L \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}, \quad (77)$$

das durch die  $L$  Punktladungen  $q_i$  erzeugte Feld im Punkt  $P$ , mit der elektrischen Feldkonstante  $\epsilon_0$  und dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}$ , der die Richtung des Feldes bestimmt.

Werden auf einer elektrisch nichtleitenden Kugeloberfläche  $L$  Ladungen  $q_i$ , die den Abtastpunkten einer Mikrofonanordnung entsprechen, zufällig positioniert, stoßen sich diese gegenseitig ab. Beschränkt man deren Bewegungsrichtungen auf die  $\phi$ - und  $\theta$ -Richtung und fixiert dabei deren Radius  $r = r_a$  auf den Radius  $r_a$  der Kugel, so stellt sich nach einiger Zeit ein Gleichgewicht ein. Auf die Punktladungen wirkt keine Kraft mehr und die Abstände zu deren nächsten Nachbarn sind maximal.

Der Verteilungsalgorithmus berechnet in einem Iterationsschritt die Kraft auf jede Punktladung bzw. deren tangentielle Komponenten. Danach werden die Punktladungen auf der Kugeloberfläche um den Versatz  $(d\phi, d\theta)$ , der proportional zur

Kraft ist, verschoben. Dies wird so oft wiederholt, bis die Kräfte auf die Ladungen unter einen definierten Schwellwert sinken.

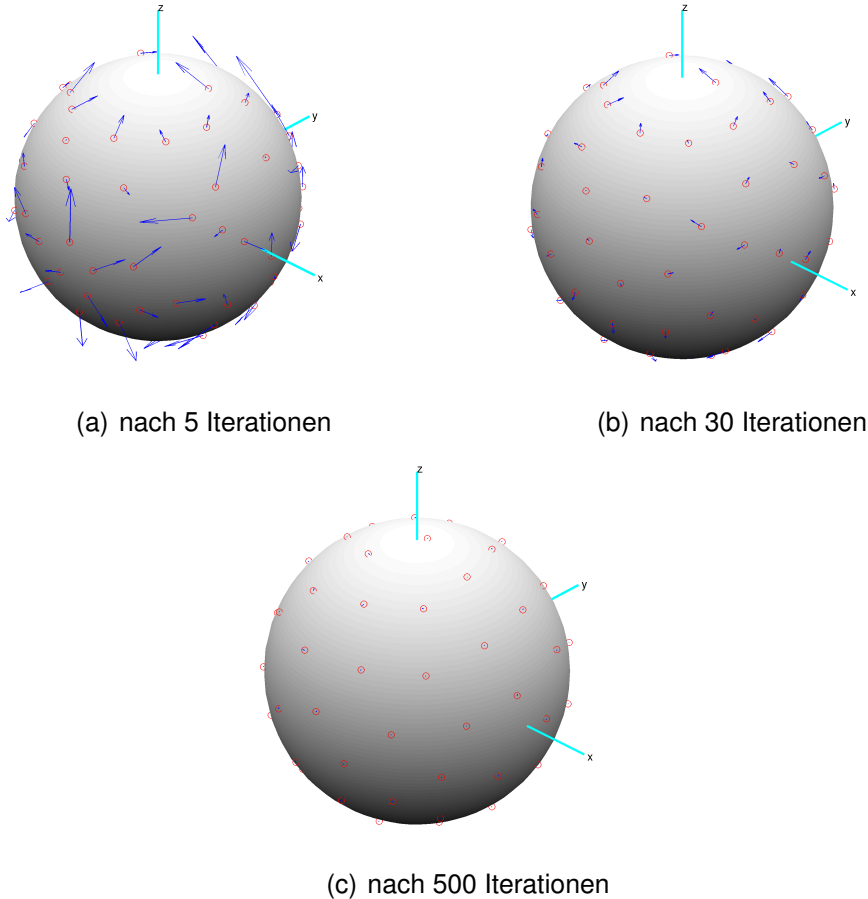


Abbildung 13: Tangentiale Kräfte (blaue Pfeile) auf Ladungen (rote Kreise). Als Initialverteilung wurde die SSV herangezogen. Nach 500 Iterationen wirken nur mehr geringe Kräfte auf die  $L = 64$  Ladungen.

Abb. 13 zeigt die Arbeitsweise dieses Algorithmus. Ausgehend von der SSV werden die Ladungen so lange bewegt, bis keine tangentialen Kräfte mehr auf sie wirken. Die Ladungen sind gleichmäßig bezüglich der Abstände zu ihren nächsten Nachbarn verteilt.

**Kugelkappe:** Damit die  $L$  Punktladungen auf der Kugelkappe bleiben, wird eine zusätzliche Ladungsverteilung am Südpol der Kugel benötigt. Die Anzahl  $L_a$  der zusätzlich benötigten Ladungen berechnet sich aus dem Verhältnis der Ku-

gelkappenfläche  $A_c$  zur gesamten Oberfläche  $A_s$ :

$$\frac{A_c}{A_s} = \frac{L}{L + L_a}, \quad (78)$$

mit

$$A_s = 4\pi r_a^2 \quad (79)$$

und

$$A_c = 2\pi r_a \cdot [1 - \cos(\theta_c)]. \quad (80)$$

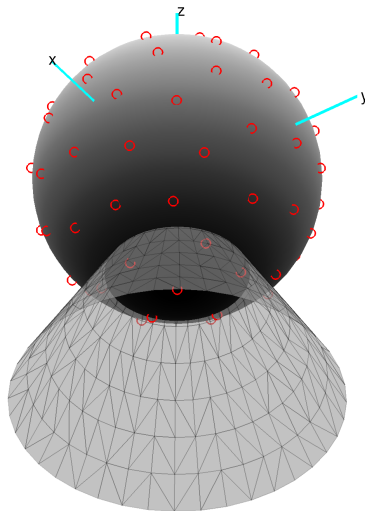


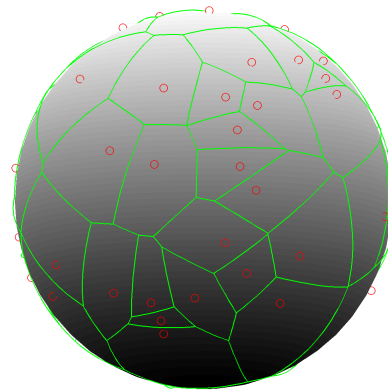
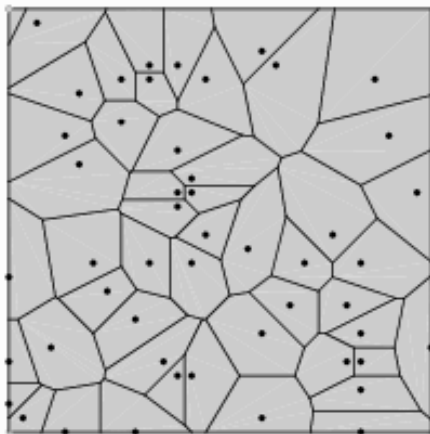
Abbildung 14: Kugelkappe mit  $L = 64$  Ladungen und den zusätzlichen  $L_a = 5$  Ladungen, die unter dem Kegel mit  $\theta_c = 150^\circ$  verschwinden.

Die Berechnung der zusätzlich benötigten Ladungsverteilung führt abhängig vom Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c$  nicht immer zum Ergebnis, dass nach der Optimierung auch  $L$  Abtastpunkte (Ladungen) auf der Kugelkappe verbleiben. Dies stellt den Schwachpunkt dieses Verfahrens dar, auf den in dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen wird. Eine ähnliche Strategie, in der Elektronen auf einer Kugel verteilt werden, kann in [RSZ95] nachgelesen werden.

## 4.2 Minimieren der Streuung der Voronoizellenflächen (MSV)

In diesem Abschnitt wird die Gleichmäßigkeit der Mikrofonanordnung bezüglich der Teilfläche, die jedem Abtastpunkt zugewiesen wird, optimiert. Es wird angenommen, dass sich die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  verbessert, wenn die Teilflächen gleichmäßiger werden.

**Voronoizerlegung/-diagramm:** Als *Voronoidiagramm* wird eine Zerlegung einer Fläche in Zellen bezeichnet, die durch eine vorgegebene Menge an Punkten, auch als Zentren der Voronoizellen bezeichnet, bestimmt werden. Jede Zelle besitzt genau ein solches Zentrum. Die Grenzen der Voronoizellen entstehen durch die Halbierung des euklidischen Abstandes zwischen benachbarten Zentren.



(a) Voronoidiagramm im  $\mathbb{R}^2$  aus [WR11]      (b) Voronoidiagramm auf der Kugeloberfläche

Abbildung 15: Beispiele für Voronoidiagramme

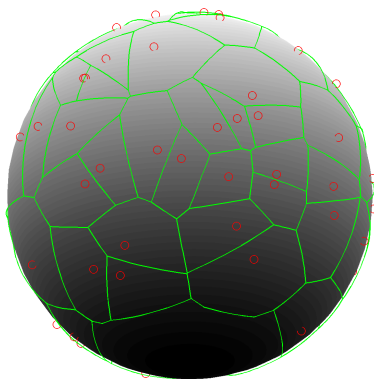
In dieser Arbeit wird der Algorithmus CSTRIPACK von [Kei07], basierend auf [Ren97], zur Berechnung des Voronoidiagrammes auf der Kugelkappe und der Flächen der Voronoizellen, verwendet. Damit die Voronoizellen der Abtastpunkte, die dem Kegel am nächsten sind, durch diesen begrenzt werden, werden sie am Polarwinkel  $\theta = \theta_c$  gespiegelt. Nach der Berechnung des Voronoidiagrammes werden die Spiegelpunkte wieder gelöscht.

Der Algorithmus optimiert die Verteilung der Abtastpunkte so, dass die Flächen der Voronoizellen möglichst gleich groß werden:

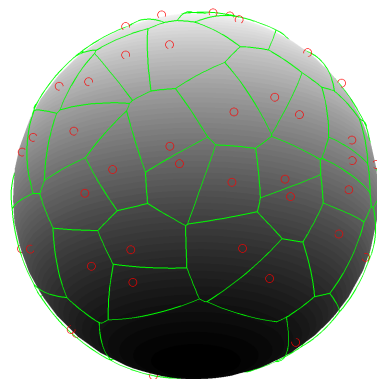
$$\sum_{i=1}^L \left( A_i - \frac{A_c}{L} \right)^2 \longrightarrow \min, \quad (81)$$

wobei  $A_i$  die Fläche der  $i$ -ten Voronoizelle und  $A_c$  die Fläche der Kugelkappe ist. Es muss stets darauf geachtet werden, dass die Abtastpunkte den maximalen Winkel  $\theta_c$  nicht überschreiten.

Zum Auffinden von Minima bei gegebenen Initialisierungswerten wird der nicht-lineare *simplex*-Algorithmus verwendet [LRWW98]. Die Suche erfolgt hierbei direkt ohne Ableitungen bzw. Gradienten. Eingeschränkt ist dieser Algorithmus dadurch, dass nur *lokale* Minima gesucht und gefunden werden.



(a) SSV



(b) nach 1 Iteration

Abbildung 16: Minimierung der Streuung der Voronoizellenflächen mit  $L = 64$  Abtastpunkten und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ . Als Startverteilung wurde die SSV herangezogen.

Abb. 16 zeigt die Arbeitsweise des MSV-Algorithmus. Ausgehend von der SSV als Startverteilung, wird die Streuung der Flächen minimiert, sie tendieren zu einer mittleren Fläche  $A_c/L$ .

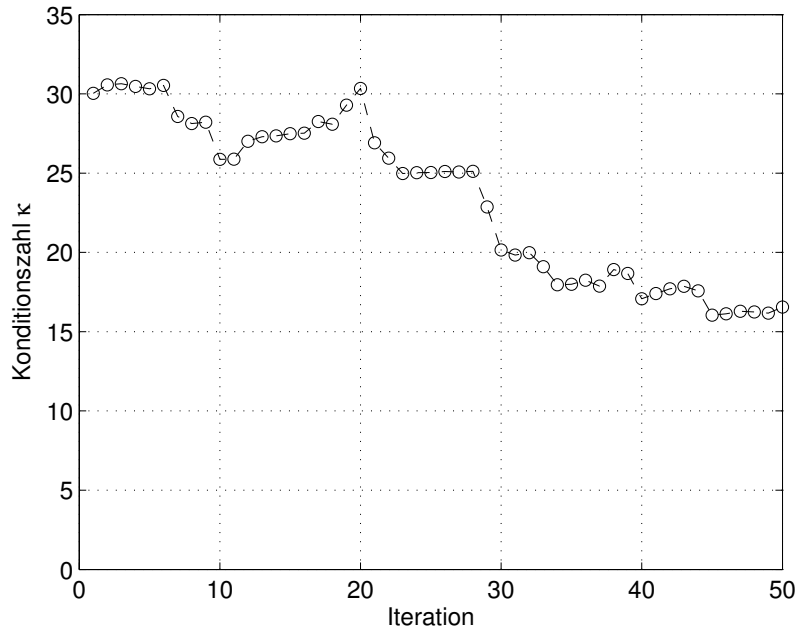


Abbildung 17: MSV - Verlauf der Konditionszahl über die Iterationen mit  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 47$  Basisfunktionen und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ . Initialverteilung ist die SSV.

Abb. 17 zeigt den Verlauf der Konditionszahl  $\kappa$  über 50 Iterationen des MSV-Algorithmus. Als Initialverteilung wurde die SSV herangezogen.

### 4.3 Iterative Schwerpunktsvoronoizerlegung (ISVZ)

Eine Optimierung der Abtastung bezüglich gleich großer Voronoizellenflächen liefert keine guten Konditionszahlen. Die Zellen solcher Abtastungen besitzen zwar ähnliche Flächen, ihre Formen sind jedoch sehr unterschiedlich.

Daher werden bei diesem Algorithmus die Abtastpunkte iterativ in die Schwerpunkte der Voronoizellen gelegt, wodurch die Anordnung bezüglich der Form der Voronoizellen optimiert wird. Für ein gegebenes Set an Abtastpunkten wird eine Voronoizerlegung auf der Kugelkappe gemacht. Die Schwerpunkte der resultierenden Zellen dienen dann als neues Startset für die nächste Iteration. Liegt die

Abweichung der vorigen Abtastpunkte zu den aktuellen Schwerpunkten unter einem definierten Schwellwert  $\varepsilon$ , wird die Optimierung abgebrochen.

Als Abbruchkriterium gilt

$$\left\| \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\mathbf{c}_i - \mathbf{x}_i)^2 \right\| < \varepsilon, \quad (82)$$

mit  $\mathbf{c}_i$  als Positionsvektor des Schwerpunktes der  $i$ -ten Voronoizelle und  $\mathbf{x}_i$  als Positionsvektor des  $i$ -ten Abtastpunktes. Eine Zusatzbedingung, damit die Abtastpunkte auf der Kugelkappe bleiben, ist nicht notwendig, da die Schwerpunkte der Voronoizellen in jedem Fall auf der Kugelkappe liegen.

**Schwerpunkt einer Voronoizelle:** Um den Schwerpunkt zu berechnen wird die Zelle in  $K_i$  sphärische Dreiecke unterteilt, wobei das Zentrum der Zelle der gemeinsame Eckpunkt aller Dreiecke ist. Der Schwerpunkt  $\mathbf{c}_i$  der  $i$ -ten Zelle errechnet sich aus den Flächen  $A_{\Delta}$  und Schwerpunkten  $\mathbf{c}_{\Delta}$  der sphärischen Dreiecke

$$\mathbf{c}_i = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} \mathbf{c}_{\Delta,k} A_{\Delta,k}}{\sum_{k=1}^{K_i} A_{\Delta,k}}, \quad (83)$$

mit

$$\mathbf{c}_{\Delta} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}}{\left\| \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}}{3} \right\|} \quad (84)$$

und

$$A_{\Delta} = r^2 [\alpha + \beta + \gamma - \pi]. \quad (85)$$

Dabei sind  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  bzw.  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Eckpunkte bzw. Winkel des Dreiecks. Durch das Dividieren durch die Länge wird in Gl. 84 die Projektion des Schwerpunktes vom ebenen auf das sphärische Dreieck mit Radius  $r = 1$  erreicht.

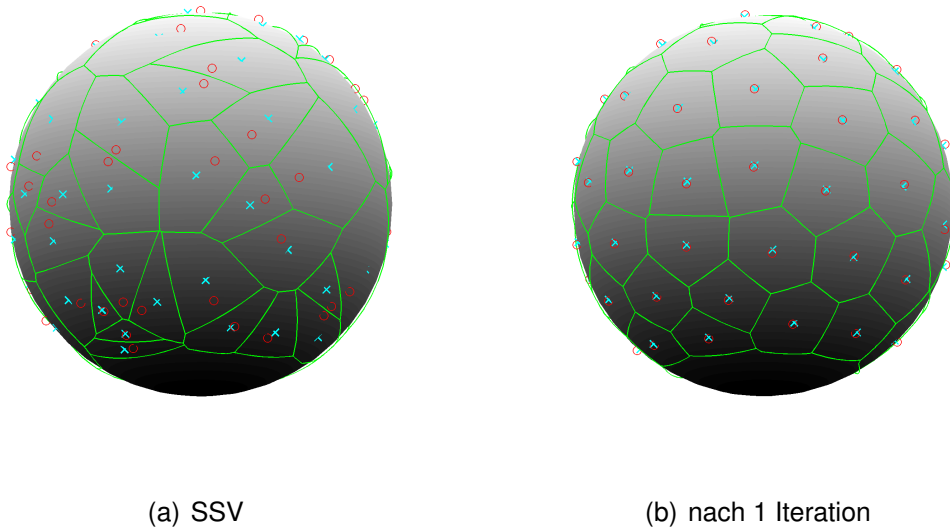


Abbildung 18: ISVZ mit  $L = 64$  Abtastpunkten und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ . Die Abtastpunkte sind durch rote 'o', die Flächenschwerpunkte durch blaue 'x' gekennzeichnet.

Abb. 18 zeigt die Arbeitsweise des ISVZ-Algorithmus. Ausgehend von der SSV als initiale Verteilung liegen die Abtastpunkte nach der Optimierung näher an den Flächenschwerpunkten und die Form der Zellen ist gleichmäßiger geworden.



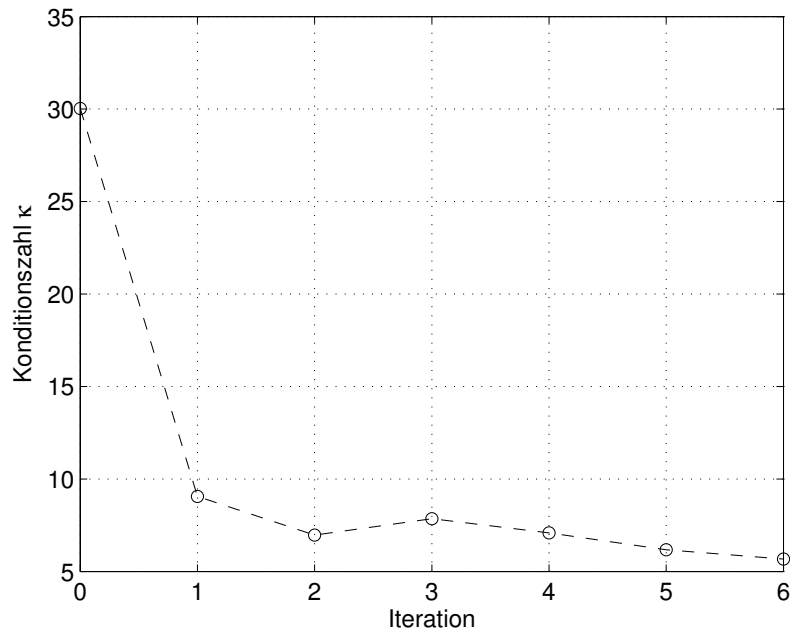


Abbildung 19: ISVZ - Verlauf der Konditionszahl über die Iterationen mit  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 47$  Basisfunktionen und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ . Initialverteilung ist die SSV.

Abb. 19 zeigt den Verlauf der Konditionszahl  $\kappa$  über 50 Iterationen des ISZV-Algorithmus. Nach 6 Iterationen ist das Abbruchkriterium erfüllt. Als Initialverteilung wurde die SSV herangezogen.

#### 4.4 Maximieren des kleinsten Singulärwertes (MaxSW)

Wie in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt, führt eine Optimierung basierend auf geometrischen Ansätzen nicht zu ausreichend kleinen Konditionszahlen. Der nächste Schritt ist deshalb, die Dynamik des Systems (Konditionierung) direkt zu beeinflussen.

Da die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  dem Verhältnis von größtem zu kleinstem Singulärwert (SW) von  $\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T$  entspricht, wird in diesem Algorithmus der kleinste

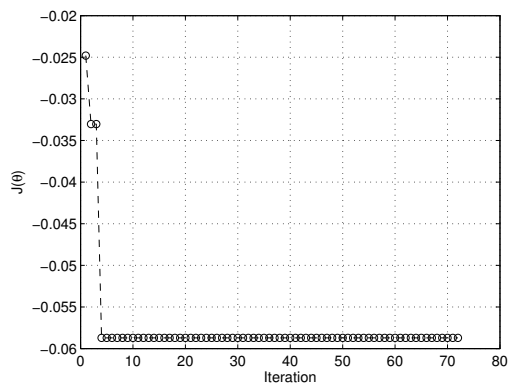
SW  $\lambda_{min}$  maximiert. Daraus lässt sich die Kostenfunktion

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_{min} \longrightarrow max \quad (86)$$

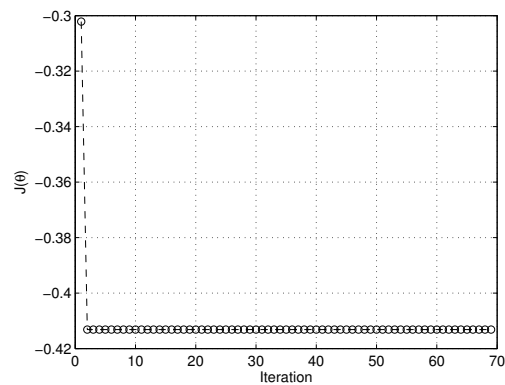
bzw.

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\lambda_{min} \longrightarrow min \quad (87)$$

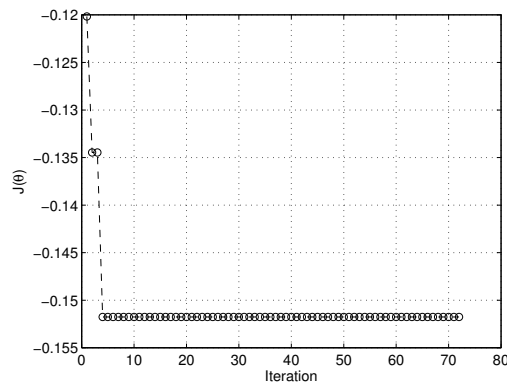
ableiten, dabei ist  $\boldsymbol{\theta}$  ein Vektor mit den Positionen der Abtastpunkte. Zum Minimieren der Kostenfunktion in Gl. (87) wird der nichtlineare *simplex*-Algorithmus verwendet.



(a) SSV als Initialverteilung,  $\kappa = 19.6$



(b) ISVZ-optimierte Initialverteilung,  $\kappa = 4.9$



(c) MSV-optimierte Initialverteilung,  $\kappa = 10.1$

Abbildung 20: MaxSW - Verlauf der Konditionszahl über die Iterationen mit  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 47$  Basisfunktionen und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$  für verschiedene Initialverteilungen.

Abb. 20 zeigt den Verlauf der Optimierungsfunktion  $J(\boldsymbol{\theta})$  über die Iterationen der

Optimierung für verschiedenen Initialverteilungen. Mit einer ISVZ-optimierten Initialverteilung erreicht dieser Algorithmus die beste Konditionszahl.

#### 4.5 Minimieren der Konditionszahl (MinKZ)

Dieser Algorithmus optimiert die Verteilung direkt in Bezug auf die Konditionszahl. Die Kostenfunktion, die minimiert werden soll, lässt sich mit

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T) \longrightarrow \min, \quad (88)$$

formulieren.

Zum Auffinden von lokalen Minima wird der nichtlineare *simplex*-Algorithmus eingesetzt.

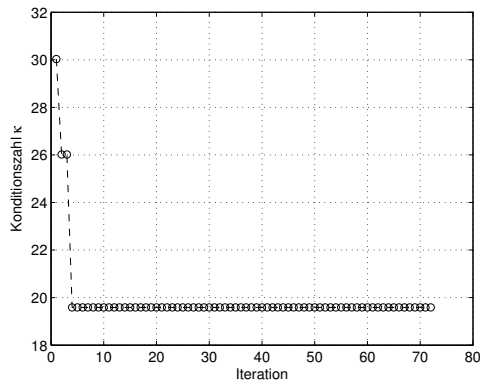
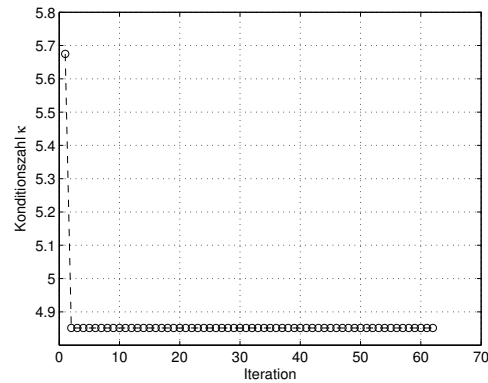
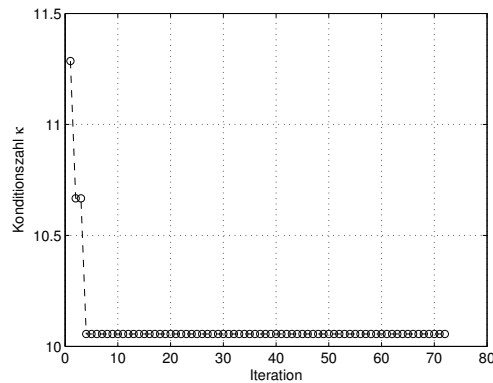
(a) SSV als Initialverteilung,  $\kappa = 19.6$ (b) ISVZ-optimierte Initialverteilung,  $\kappa = 4.9$ (c) MSV-optimierte Initialverteilung,  $\kappa = 10.1$ 

Abbildung 21: MinKZ - Verlauf der Konditionszahl über die Iterationen mit  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 47$  Basisfunktionen und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$  für verschiedene Initialverteilungen.

Abb. 21 zeigt den Verlauf der Konditionszahl  $\kappa$  über die Iterationen des Optimierers für verschiedene Initialverteilungen. Mit einer ISVZ-optimierten Initialverteilung erreicht der Algorithmus die beste Konditionszahl.

Vergleicht man die Ergebnisse von MaxSW und MinKZ miteinander, stellt man fest, dass die Algorithmen dieselben Konditionszahlen liefern. Der *simplex*-Algorithmus beeinflusst die Dynamik der Matrix  $\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T$  auf dieselbe Art und Weise, was sich dadurch erklären lässt, dass ein Maximieren des minimalen SW die Dynamik einer Matrix einschränkt, was schließlich ebenfalls zu einer besseren Konditionierung dieser führt.

## 4.6 Vergleich der Algorithmen

Für einen Vergleich wurden alle Algorithmen mit der SSV initialisiert. Die Algorithmen haben die Verteilung für  $N_{SCH} = 30$  Basisfunktionen optimiert. Anschließend wurde für die optimierten Verteilungen der Abtastpunkte die Anzahl an Basisfunktionen  $N_{SCH}$  variiert und die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  errechnet.

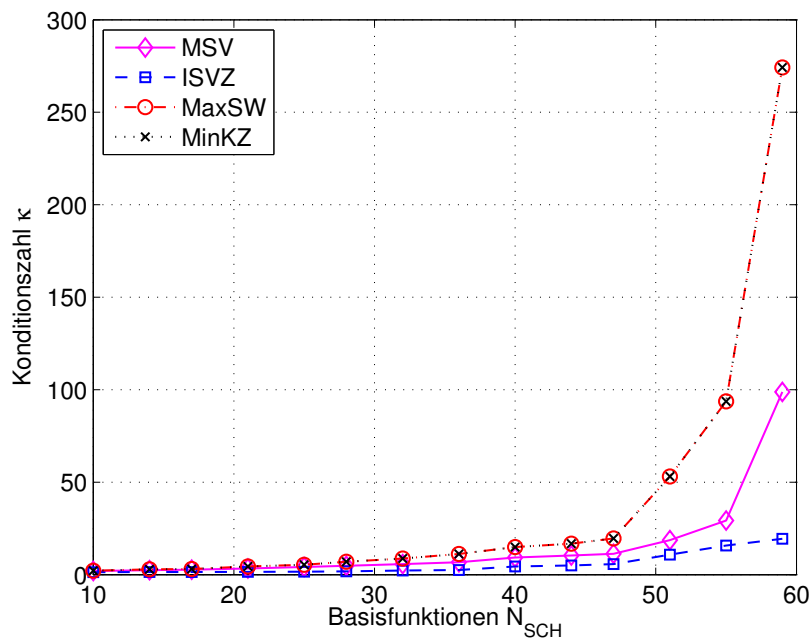


Abbildung 22: Verlauf der Konditionszahl  $\kappa$  über die Anzahl der Basisfunktionen  $N_{SCH}$  mit  $L = 64$  Abtastpunkten. Grundlage ist eine für  $N_{SCH} = 30$  optimierte SSV.

Abb. 22 zeigt den Verlauf der Konditionszahl  $\kappa$  der verschiedenen Algorithmen über die Anzahl der Basisfunktionen  $N_{SCH}$ . Die Konditionszahl steigt bei allen Optimierungen mit steigender Anzahl an Basisfunktionen exponentiell an. Die ISVZ bringt auch bei höherer Anzahl an Basisfunktionen  $N_{SCH}$  relativ gute Ergebnisse. Dies bedeutet, dass gleichmäßige Verteilungen im Sinne einer Schwerpunktsvoronoizerlegung gleichzeitig eine gute Konditionierung  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  bewirken. Die erreichten Konditionszahlen sind aber noch zu groß bzw. bei kleinen Konditionszahlen können keine hohen Ordnungen der SCH aufgelöst werden.

## 4.7 Kombination der Algorithmen

Wie in den letzten Abschnitten gezeigt liefern Algorithmen, die auf geometrische Gleichmäßigkeit optimieren, keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Die Optimierer, die die Konditionierung der Matrix  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  direkt beeinflussen, funktionieren dann gut, wenn sie mit schon optimierten Verteilungen der Abstastpunkte initialisiert werden. In diesem Abschnitt werden die Algorithmen MaxSW, MSV, MinKZ und ISVZ miteinander kombiniert.

Dazu wird in einer initialen Phase mittels ISVZ optimiert bis das erste Minimum der Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  erreicht ist. Die daraus resultierende Verteilung wird dann als Startset für die Optimierung mittels MinKZ verwendet. Erfahrungsgemäß wird mit einer kleinen Anzahl an Basisfunktionen  $N_{SCH} < 3/4L$  begonnen um die Konditionszahl in einem Bereich akzeptabler Werte zu halten. Wenn die Konditionszahl einen definierten Schwellwert  $\kappa_{max}$  unterschreitet, wird die Anzahl der Basisfunktionen erhöht. Ist die Konditionszahl nach einer Iteration nicht besser als nach der vorigen, so wird durch Hinzufügen von Rauschen zur aktuellen Verteilung versucht, die Konditionszahl aus dem lokalen Minimum zu befreien, um evtl. kleinere Minima erreichen zu können. Bringt auch das keine Besserung von  $\kappa$  wird als letzte Option mittels MaxSW weiteroptimiert. Sinkt die Konditionszahl nach diesem Algorithmus auch nicht, wird die Anzahl der Basisfunktionen wieder reduziert.

Ziel dieser Optimierung ist es, die Konditionszahl bei einer möglichst hohen Anzahl an Basisfunktionen unter den Schwellwert  $\kappa_{max}$  zu bringen.

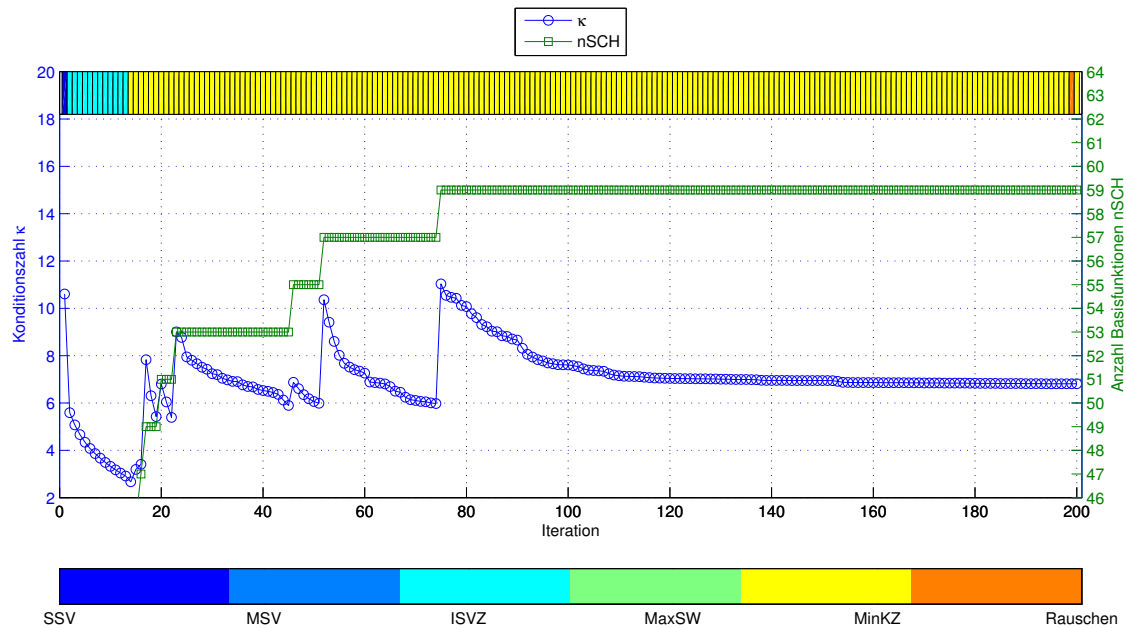


Abbildung 23: Kombination verschiedener Algorithmen bei  $L = 64$  Abtastpunkten und dem Halböffnungswinkel  $\theta_c = 150^\circ$ . Auf die y-Achsen ist die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  (links) und die Anzahl der Basisfunktionen  $N_{SCH}$  (rechts) über die Iterationen des Algorithmus aufgetragen. Die obere x-Achse zeigt den aktuell verwendeten Optimierer. Der Schwellwert zur Erhöhung von  $N_{SCH}$  liegt bei  $\kappa_{max} = 6$ .

Abb. 23 zeigt den Verlauf des Optimierungsalgorithmus. Beginnend bei 47 Basisfunktionen wird eine zufällige Verteilung von Abtastpunkten erst mittels ISVZ optimiert. Nach ca. 15 Iterationen wird das erste Minimum erreicht und mittels MinkZ weiteroptimiert. Deutlich erkennbar ist, dass Basisfunktionen hinzugefügt werden, wenn die Konditionszahl  $\kappa < \kappa_{max}$  unterschreitet. Nach 200 Iterationen wurde bei einer Konditionszahl von  $\kappa = 6.8$  und  $N_{SCH} = 59$  Basisfunktionen manuell abgebrochen.

Durch das schrittweise Hinzufügen von Basisfunktionen bleibt die Konditionszahl immer in einem Bereich, wo der Optimierer MinkZ gute Ergebnisse liefert. So kann die Konditionszahl im Mittel bis zu einer Anzahl an Basisfunktionen von  $N_{SCH} < 0.9L$  in der Nähe des Schwellwertes  $\kappa_{max}$  gehalten werden.

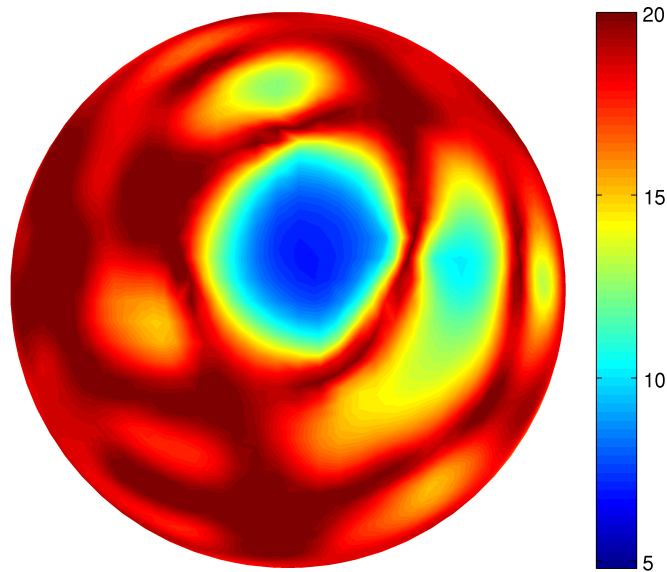


Abbildung 24: Farbige Darstellung der Konditionszahl mit Sicht auf den Nordpol der Kugelkappe bei  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 59$  Basisfunktionen und dem Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$ .

In Abb. 24 wurde der nördlichste Abtastpunkt der aus Abb. 23 optimierten Verteilung über die Kugelkappe variiert und die Konditionszahl färbig an der aktuellen Position des Abtastpunktes dargestellt.

Offensichtlich ist, dass es für den verwendeten Abtastpunkt noch andere lokale Minima der Konditionszahl gibt und dass aus dessen ursprünglicher Position die beste Verteilung resultiert.

## 4.8 Verteilungsoptimierung auf einem festen Raster

In den letzten Abschnitten wurde angenommen, dass die Abtastpunkte bei der Optimierung ihrer Verteilung jede beliebige Position auf der Kugelkappe einnehmen können. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten die Verteilung zu variieren. Daher ist es schwierig, das globale Minimum der Konditionszahl zu finden.



In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus vorgestellt, der eine Verteilung von Abtastpunkten auf einem festen Raster optimiert. Dazu wird eine *HEALPix*-Rasterung verwendet, siehe [Zot09].

**HEALPix - Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization** ist eine Methode die Kugeloberfläche zu rastern. Dabei haben alle Flächenstücke (Pixel) die gleiche Fläche. Eine weitere Eigenschaft der HEALPix-Methode ist, dass die Zentren der Pixel auf Ringen mit konstanter geografischer Breite (iso-latitude) sitzen [GHB<sup>+</sup>].

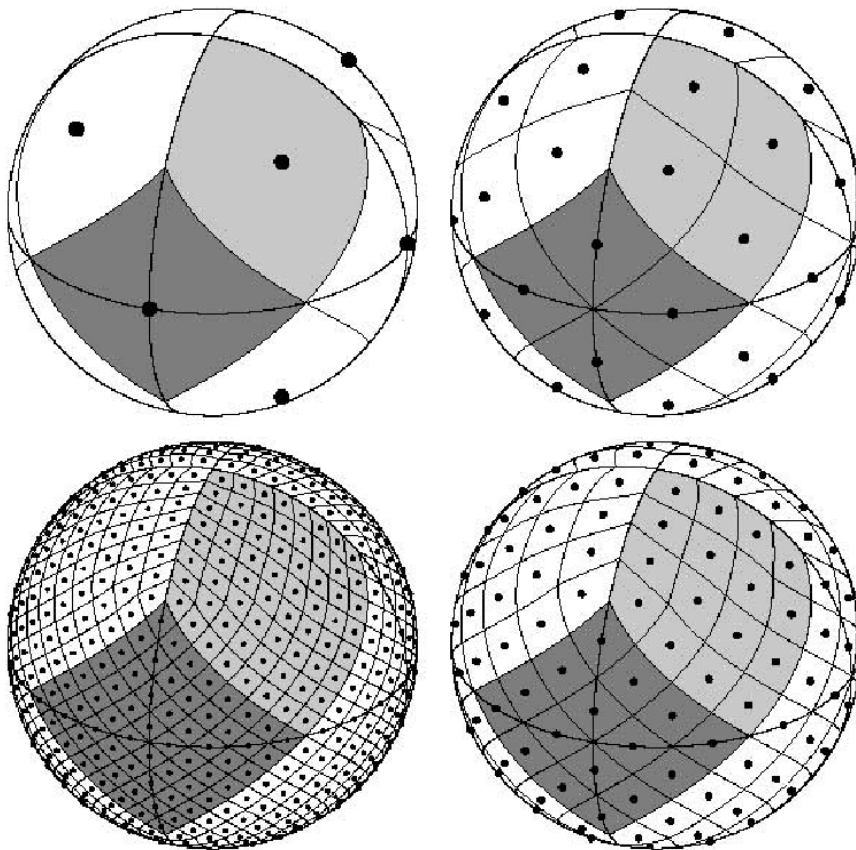


Abbildung 25: HEALPix-Rasterung der Kugeloberfläche [GHB<sup>+</sup>]. Die Auflösungen im Uhrzeigersinn sind  $N_{pix} = 12$ ,  $N_{pix} = 48$ ,  $N_{pix} = 192$  und  $N_{pix} = 768$ .

Abb. 25 zeigt 4 verschiedene Auflösungen der HEALPix-Rasterung. Die Basis-

Rasterung, links oben, besteht aus 12 Pixel. Diese setzt sich aus 8 identischen *polaren* Basispixel (hellgrau) und 4 identischen *äquatorialen* Basispixel (dunkelgrau) zusammen. Feinere Rasterungen erhält man durch Unterteilen jedes Pixel in 4 gleiche Teile. Daraus kann man einen Auflösungsparameter  $N_{side}$ , der eine Potenz der Basis 2 sein muss, ableiten, aus dem sich die Auflösung  $N_{pix} = 12N_{side}^2$  berechnen lässt. In Abb. 25 wurde im Uhrzeigersinn  $N_{side} = 1, 2, 4, 8$  festgelegt, sodass sich die Auflösungen von  $N_{pix} = 12, 48, 192, 768$  ergeben. Deutlich zu sehen sind auch die Ringe konstanter geografischer Breite, auf denen sich die Zentren der Pixel befinden [GHB<sup>+</sup>]. Zur Berechnung der Rasterung wurde die MATLAB<sup>®</sup>-Routine *healpix* aus [Kei07] verwendet.

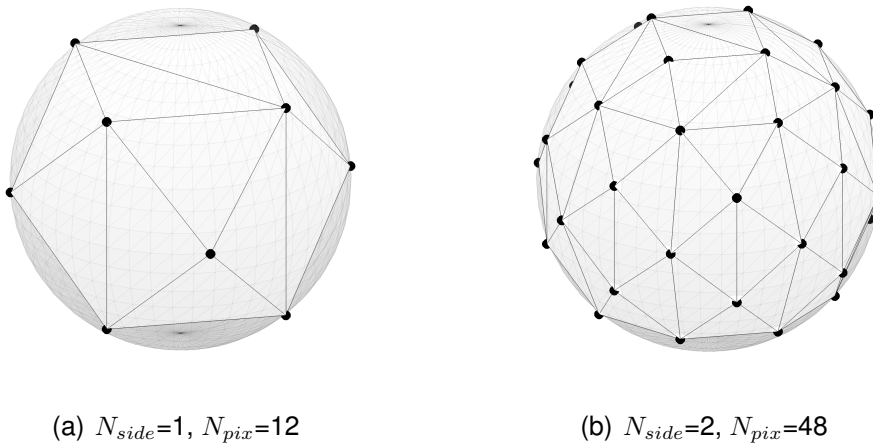
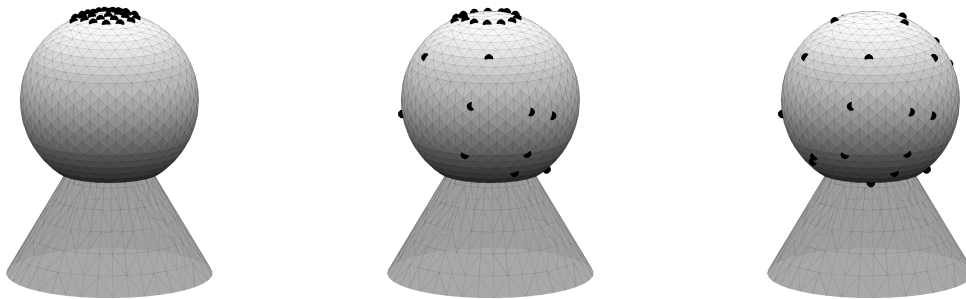


Abbildung 26: Rasterung der Kugeloberfläche mittels HEALPix.

Um die Verteilung der Abtastpunkte zu optimieren, wird eine HEALPix-Auflösung gewählt die mindestens doppelt so hoch ist wie die Anzahl der Abtastpunkte  $N_{pix} \geq 2L$ . Es werden nur die Rasterpunkte verwendet, die auf der Kugelkappe liegen. An diesem Raster für die Kugelkappe werden in einer initialen Phase die  $L$  Abtastpunkte zufällig angeordnet. In einer Iteration wird ein Abtastpunkt ausgewählt, auf einen freien Rasterpunkt verschoben und aus der resultierenden Anordnung wird die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T)$  berechnet. Das Ganze wird für alle freien Rasterpunkte wiederholt und der Rasterpunkt für den die kleinste Konditionszahl erreicht wurde als Abtastpunkt fixiert. Die Durchführung dieser Prozedur für alle Abtastpunkte wird im Folgenden als Zyklus bezeichnet. Es werden so viele

Zyklen durchgeführt, bis die Konditionszahl auf einen Wert konvergiert.



(a) Iteration 1:  $\kappa = 15092$

(b) Iteration 15:  $\kappa = 25.33$

(c) Iteration 30:  $\kappa = 2.27$

Abbildung 27: Verteilungsoptimierung auf einem festen Raster mit  $L = 30$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 16$  Basisfunktionen und einer HEALPix-Auflösung von  $N_{pix} = 768$ . Auf der Kugelkappe resultieren  $M = 708$  HEALPix-Punkte, wobei der Halböffnungswinkel des Kegels  $\theta_c = 150^\circ$  ist.

Abb. 27 zeigt die Arbeitsweise des Algorithmus. Ausgehend von einer Initialverteilung, wobei sich in diesem Fall die Abtastpunkte auf dem Nordpol konzentrieren, werden alle Abtastpunkte über die Rasterpunkte variiert.

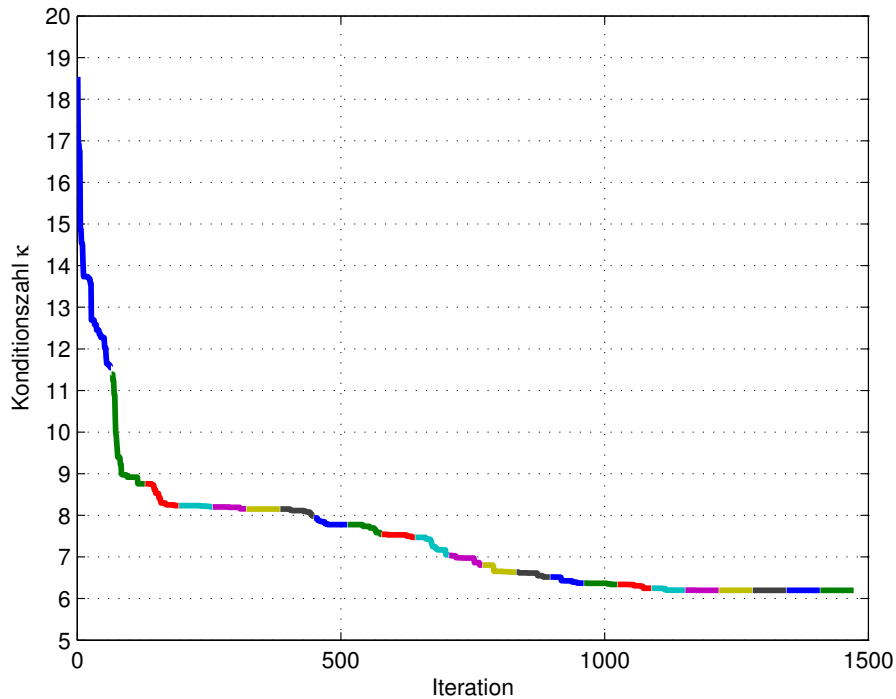


Abbildung 28: Effizienz der Verteilungsoptimierung auf einem festen Raster mit  $L = 64$  Abtastpunkten,  $N_{SCH} = 64$  Basisfunktionen,  $M = 708$  Rasterpunkten auf der Kugelkappe und einem Halböffnungswinkel von  $\theta_c = 150^\circ$ . Färbig sind die Zyklen dargestellt, wobei jeder Zyklus aus  $L$  Iterationsschritten besteht. Initialverteilung ist eine mit  $N_{SCH} = 60$  Basisfunktionen und dem selben Algorithmus optimierte Verteilung auf dem festen Raster.

In Abb. 28 ist der Verlauf der Konditionszahl über die Iterationen des Algorithmus aufgetragen. Wie man deutlich erkennen kann, nähert sich die Konditionszahl  $\kappa$  asymptotisch an das Minimum, das mit der verwendeten Rasterung erreichbar ist, an. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass man auch bei einer großen Anzahl an Basisfunktionen  $N_{SCH}$  sehr gute Ergebnisse bekommt, wenn man das Raster fein genug wählt. Eine obere Grenze stellt bei diesem Verfahren nur die Rechen- und Speicherkapazität dar. Nachteilig erweist sich, dass - ausgehend von einer zufälligen Startverteilung - sehr viele Iterationen notwendig sind, bis man sich der bestmöglichen Konditionszahl nähert.

## 5 Kompensation der radialen Ausbreitungsterme durch Holografiefilter

In Abschnitt 3.3.4 wurden die radialen Ausbreitungsterme für geschlossene Mikrofonanordnungen definiert. Damit man Holografieberechnungen durchführen kann, müssen diese Terme kompensiert werden. Sogenannte *Holografiefilter* sind notwendig, um die Frequenzgänge der radialen Ausbreitungsterme zu entzerren. In diesem Abschnitt werden diese Filter definiert und durch zeitdiskrete Filter nachgebildet.

### 5.1 Holografiefilter zur Berechnung einer Quellstärkeverteilung

Für viele Anwendungen ist es günstiger, die das Schallfeld erzeugende Quellstärkeverteilung zu kennen. Dazu wird angenommen, dass am Radius  $r_Q$  Punktquellen verteilt sind, welche die am Radius  $r_a$  gemessene bandbegrenzte Schalldruckverteilung

$$p(r_a, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n A_{nm}(r_a) Y_{\nu_n^m}^m(\theta, \phi) \quad (89)$$

bewirken. Das sphärische Wellenspektrum am Radius  $r_a$  einer geschlossenen Mikrofonanordnung auf der Kugelkappe kann mit

$$A_{nm}(r_a) = b_{nm} \left[ j_{\nu_n^m}(kr_a) - \frac{j'_{\nu_n^m}(kr_a)}{h'_{\nu_n^m}(kr_a)} h_{\nu_n^m}(kr_a) \right] \quad (90)$$

formuliert werden, siehe Abschnitt 3.3.4.

Das Wellenspektrum einer Quellstärkeverteilung  $\Omega_{Q,nm}$  am Radius  $r_Q$  ist definiert als [ZP11]

$$b_{nm} = -i k h_{\nu_n^m}(kr_Q) \Omega_{Q,nm}. \quad (91)$$

Setzt man Gl. (91) in Gl. (90) ein, kann diese mit Hilfe der *Wronski-Determinante* sphärischer Besselfunktionen,

$$j_{\nu_n^m}(kr_a) h'_{\nu_n^m}(kr_a) - j'_{\nu_n^m}(kr_a) h_{\nu_n^m}(kr_a) = \frac{1}{i(kr_a)^2}, \quad (92)$$

neu formuliert werden:

$$A_{nm}(r_a) = - \underbrace{\frac{k h_{\nu_n^m}(kr_Q)}{(kr_a)^2 h'_{\nu_n^m}(kr_a)}}_{G(k, r_a, r_Q)} \Omega_{Q, nm}, \quad (93)$$

dabei ist  $G(k, r_a, r_Q)$  der radiale Ausbreitungsterm des durch die Quellstärkeverteilung verursachten Feldes. Zur Berechnung dieser muss  $G(k, r_a, r_Q)$  invertiert werden, wodurch sich die *Holografiefilter*

$$H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q) = - \frac{(kr_a)^2 h'_{\nu_n^m}(kr_a)}{k h_{\nu_n^m}(kr_Q)} \quad (94)$$

ergeben. Mit Hilfe dieser Filter kann auf die Quellstärkeverteilung am Radius  $r_Q$  zurückgerechnet werden. Ist diese bekannt, können z.B. Lautsprecher für die Ambisonics-Wiedergabe angesteuert werden um eine gewünschte Schalldruckverteilung am Radius  $r_a \leq r < r_Q$  zu bekommen.

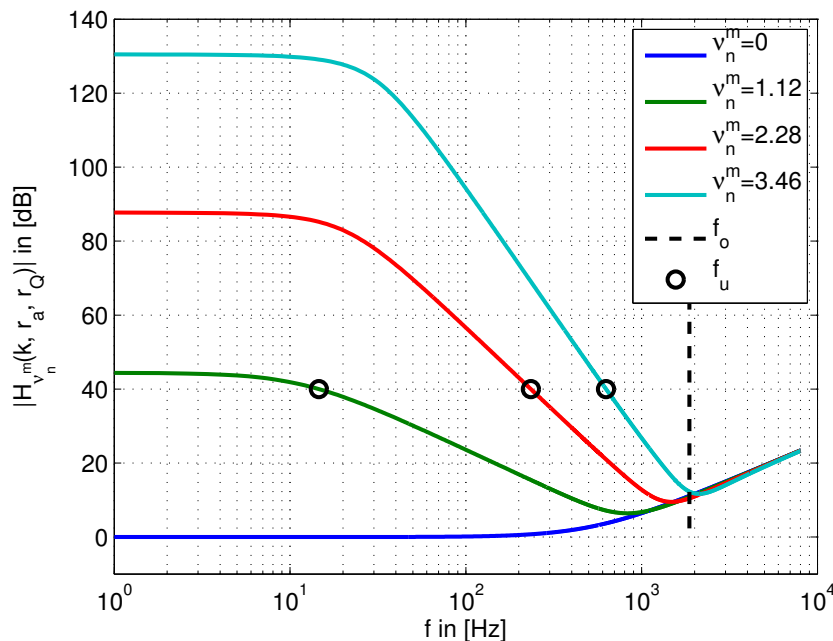


Abbildung 29: Betrag der Holografiefilter  $|H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)|$  normiert auf den Radius  $r_Q$  für  $r_a = 10\text{cm}$ ,  $r_Q = 5\text{m}$ ,  $n = 0 \dots 3$ ,  $m = 0$  und  $\theta_c = 150^\circ$ . Die obere Grenzfrequenz  $f_o$  ist durch die gestrichelte Linie und die unteren Grenzfrequenzen  $f_u$  sind durch die Kreise dargestellt. Die verfügbare Dynamik ist mit  $40\text{ dB}$  angenommen.

Abb. 29 zeigt den Frequenzgang des Betrages der Holografiefilter  $|H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)|$  für  $m = 0$  und  $n = 0 \dots 3$ . Bei  $kr_a = \nu_n^m$  haben die Filter einen Knick im Betragsverlauf. Der Knick des Filters der höchsten zulässigen Ordnung stellt die obere Grenzfrequenz  $f_o$  dar (gestrichelte Linie). Darüber tritt räumliches Aliasing auf, da ab dieser Frequenz SCH-Ordnungen, die nicht aufgelöst werden können, die gleiche Amplitude haben wie die zulässigen Ordnungen. Die Energie der störenden Ordnungen verteilt sich auf die zulässigen Ordnungen und verursacht dort Fehler. Die unteren Grenzfrequenzen  $f_u$  (Kreise) ergeben sich durch die eingeschränkte verfügbare Dynamik der Mikrofone, die hier mit  $40 \text{ dB}$  angenommen wurde.

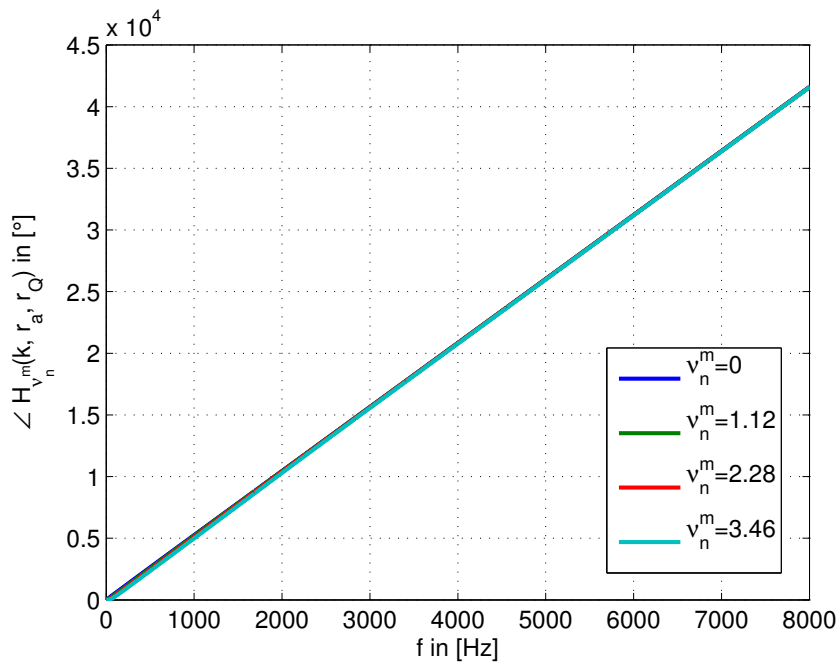


Abbildung 30: Phase der Holografiefilter  $\angle H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)$  für  $r_a = 10 \text{ cm}$ ,  $r_Q = 5 \text{ m}$ ,  $n = 0 \dots 3$ ,  $m = 0$  und  $\theta_c = 150^\circ$ .

Abb. 30 zeigt den Frequenzgang der Phase der Holografiefilter  $\angle H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)$ . Der dominierende Teil der Phase ist linear, was der Verzögerung des Schalles aufgrund der endlichen Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  entspricht. Da diese Verzögerung keinen Einfluss auf die Holografieberechnungen hat, wird die lineare Phase für die weiteren Betrachtungen nicht mehr berücksichtigt. Rechnet man

den linearen Teil der Phase heraus, ergeben sich die *kausalen Holografifilter*

$$H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q) = -\frac{(kr_a)^2 h'_{\nu_n^m}(kr_a)}{k h_{\nu_n^m}(kr_Q)} \frac{1}{e^{ik(r_Q-r_a)}}, \quad (95)$$

wobei der Term  $k(r_Q - r_a)$  der linearen Phase entspricht.

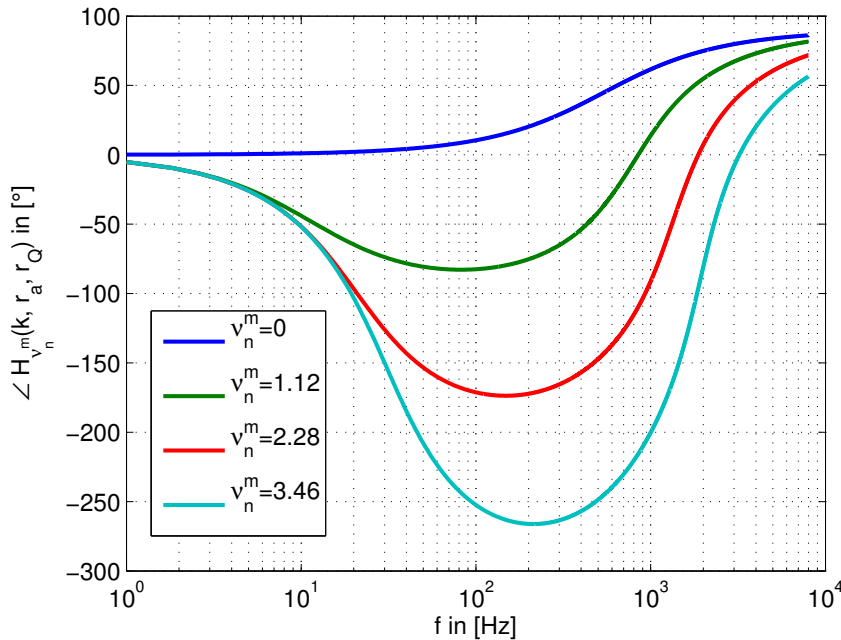


Abbildung 31: Phase der kausalen Holografifilter  $\angle H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)$  für  $r_a = 10\text{cm}$ ,  $r_Q = 5\text{m}$ ,  $n = 0 \dots 3$ ,  $m = 0$  und  $\theta_c = 150^\circ$ .

Abb. 31 zeigt den Frequenzgang der Phase der kausalen Holografifilter  $\angle H_{\nu_n^m}(k, r_a, r_Q)$ . Im nächsten Abschnitt werden die kausalen Holografifilter mit Hilfe zeitdiskreter Filter nachgebildet.

## 5.2 Modellierung der Holografifilter mittels IIR-Filter

Im letzten Abschnitt wurden die Holografifilter definiert, wobei es für jede SCH-Ordnung  $\nu_n^m$  ein eigenes Filter gibt. Um die Filter zu implementieren, wird auf IIR-Filter zurückgegriffen, da sich diese bei gegebener Komplexität eines Frequenzganges mit viel niedrigeren Ordnungen realisieren lassen als FIR-Filter.



Dazu kommt noch, dass manche FIR-Implementierungen von Filtern hoher Ordnungen lange Verzögerungszeiten benötigen.

Die zeitdiskreten IIR-Filter der Form

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N_{min}} z^{-N_{min}}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M_{min}} z^{-M_{min}}}, \quad (96)$$

mit den Filterkoeffizienten  $b_0 \dots b_{N_{min}}$  und  $a_0 \dots a_{M_{min}}$ , werden mittels „Curve-fitting“-Algorithmus [Lev59] bestimmt, welcher den Betrags- und Phasenverlauf mit Hilfe von Stützstellen bestmöglich nachbildet. Die notwendige Filter-Ordnung  $N_{min} = M_{min}$  ergibt sich aus dem maximal zulässigen Betrags- und Phasenfehler im gültigen Frequenzbereich  $f_u \leq f \leq f_o$ .

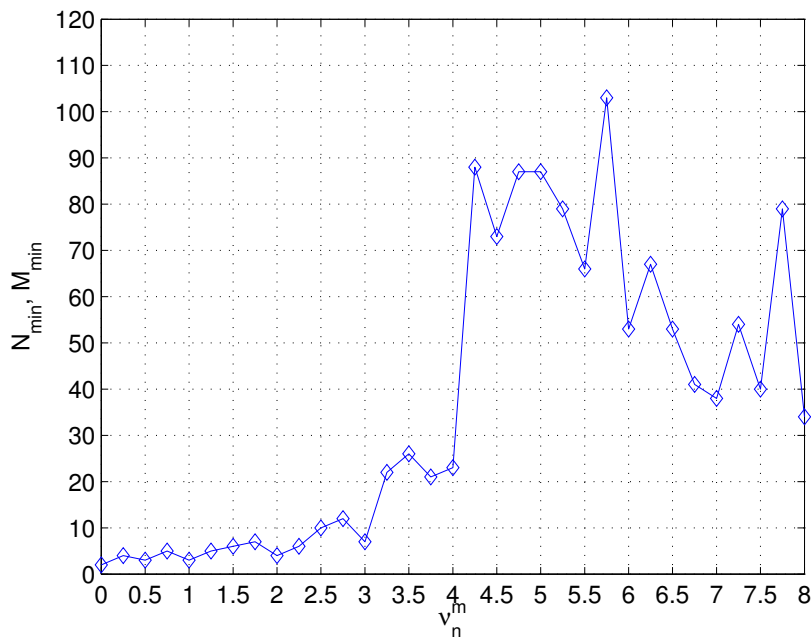
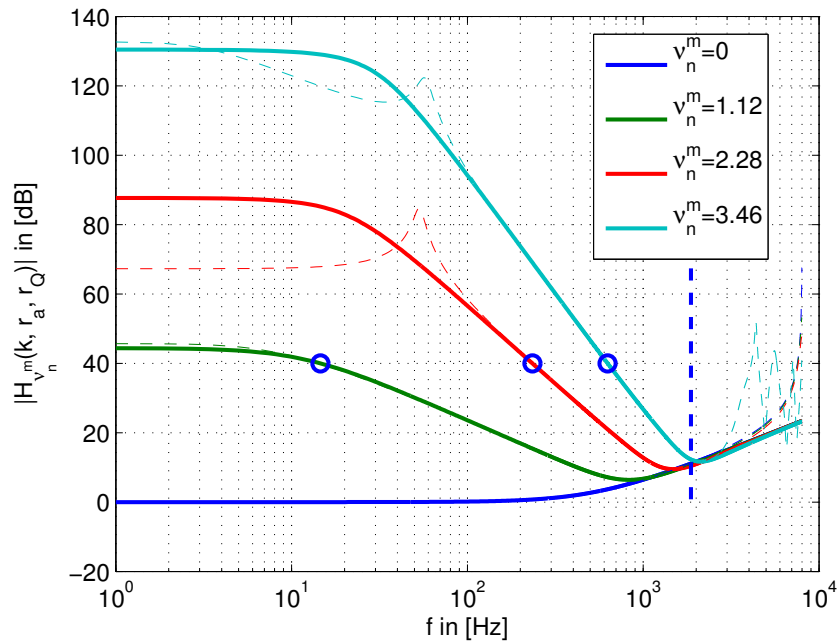


Abbildung 32: Minimale Filterordnungen  $N_{min} = M_{min}$  über die SCH-Ordnung  $\nu_n^m$  für einen maximalen Betragsfehler von  $\pm 1$  dB und einem maximalen Phasenfehler von  $\pm 20^\circ$  im gültigen Frequenzbereich  $f_u \leq f \leq f_o$  bei einer verfügbaren Dynamik von 40 dB.

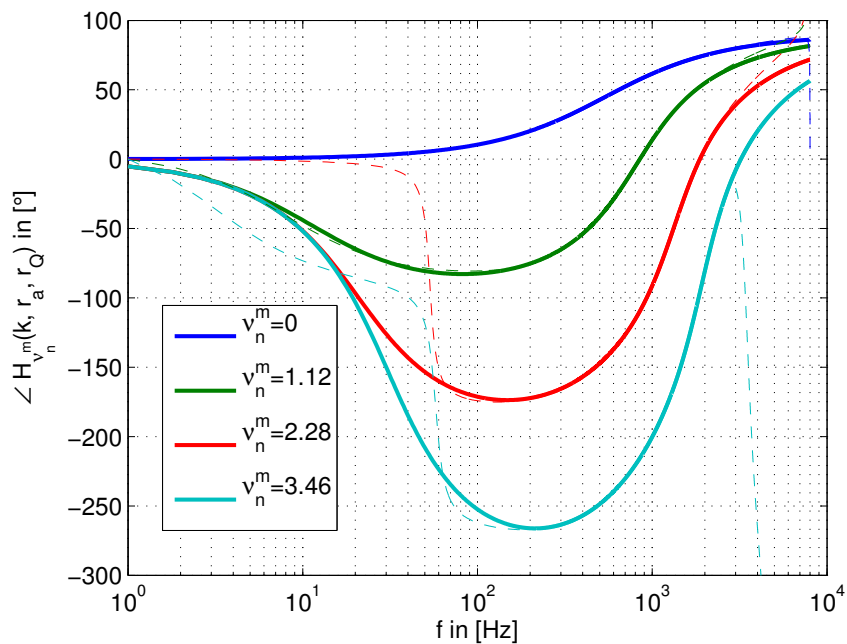
Abb. 32 zeigt die minimalen Filter-Ordnungen  $N_{min} = M_{min}$  aufgetragen über die

SCH-Ordnung  $\nu_n^m$ . Bis  $\nu_n^m = 4$  sind relativ kleine Filter-Ordnungen notwendig, um einen maximalen Betragsfehler von  $\pm 1 \text{ dB}$  und einen maximalen Phasenfehler von  $\pm 20^\circ$  im gültigen Frequenzbereich  $f_u \leq f \leq f_o$  garantieren zu können. Darüber steigt die notwendige Filter-Ordnung deutlich an, was vermutlich darauf zurückzuführen ist, dass für jedes Frequenzband  $f_u \leq f \leq f_o$  die Anzahl der Stützstellen  $N_s$ , die der Algorithmus zur Berechnung der IIR-Filter benötigt, konstant auf  $N_s = 5000$  gehalten wurde. Niedrigere Filter-Ordnungen wären evtl. möglich, wenn man die Anzahl der Stützstellen für jede SCH-Ordnung individuell anpassen würde. Dabei müsste man folgenden Kompromiss eingehen: Zum einen bräuchte man viele Stützstellen bei komplizierten Phasen- bzw. Betragsverläufen, damit der maximale Fehler eingehalten werden kann. Zum anderen wären hohe Filterordnungen nötig, damit Betrag und Phase an allen Stützstellen gut modelliert werden kann. Generell macht aber die Phase der Holografiefilter die hohen Filterordnungen notwendig.

Abb. 33 zeigt den Betrags- bzw. Phasenverlauf der IIR-Filter der SCH-Ordnungen  $\nu_n^m$ , mit  $n = 0 \dots 3$ . Im gültigen Frequenzbereich  $f_u \leq f \leq f_o$  verlaufen die IIR-Filter mit einem maximalen Betrag- und Phasenfehler von  $\pm 1 \text{ dB}$  bzw.  $\pm 20^\circ$ . Außerhalb werden die Fehler beträchtlich größer.



(a) Betrag der IIR-Filter mit unterer (gestrichelte Linie) und oberer (Kreise) Grenzfrequenz.



(b) Phase der IIR-Filter

Abbildung 33: Betrags- und Phasenverlauf der Holografiefilter der Ordnungen  $v_n^m$  für  $m = 0, n = 0 \dots 3$  und  $\theta_c = 150^\circ$ . Die Frequenzgänge der IIR-Filter (gestrichelte Linien) verlaufen im gültigen Frequenzbereich  $f_u \leq f \leq f_o$  innerhalb des maximalen Fehlers von  $\pm 1$  dB bzw.  $\pm 20^\circ$  und benötigen dafür die Filter-Ordnungen  $N_{min} = M_{min} = 1, 3, 4$  und  $26$ .

## 6 Schlussfolgerung und Ausblick

In Abschnitt 2 wurde die Wellengleichung in Kugelkoordinaten mit dem schallharten Kegel als Randbedingung gelöst. Dabei ist festzustellen, dass die Lösung analog zur aus anderen Arbeiten bekannten Lösung für kugelförmige Mikrofonanordnungen ist. Der einzige Unterschied ist, dass die Basisfunktionen des Feldes im Fall der Kugelkappe „Kugelkappenharmonische,, (SCH) anstelle der bisher bekannten „Kugelharmonischen,, sind, und dass deren Ordnungen nun nicht mehr ganzzahlig sein müssen. Nicht mehr so trivial ist die Definition des Begriffes „Auflösung,, auf den in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wurde. Eine sinnvolle Definition dieses Begriffes wäre sicher ein interessantes Thema für neue Arbeiten.

In Abschnitt 3 wurde die SCH-Transformation eingeführt, die eine Zerlegung des Feldes in gewichtete Basisfunktionen möglich macht. Analog zu kugelförmigen Anordnungen, ist es, bei Verwendung von Druckempfängern als Mikrofone, nur mit Hilfe von geschlossenen Anordnungen möglich, uneingeschränkt Holografie rechnen zu können.

In Abschnitt 4 wurden verschiedenste Algorithmen zur optimalen Anordnung der Abtastpunkte auf der Kugelkappe vorgestellt. Der Algorithmus, der sich am Prinzip sich abstoßender elektrischer Ladungen orientiert, ist auf jeden Fall ausbaufähig. Ein möglicher Ansatz ist eine bessere Definition der Ladungsverteilung, die die Abtastpunkte auf der Kugelkappe hält bzw. eine Implementierung eines elektrisch geladenen Randes am Kegel, der die Gleichmäßigkeit der Verteilung nicht beeinträchtigt.

Als äußerst effizient hat sich die ISVZ erwiesen. Sie liefert zwar nicht ausreichend kleinen Konditionszahlen, eignet sich aber hervorragend zur Generierung von Initialverteilungen für andere Optimierer, z.B. MinKZ.

Verlässlich gute Ergebnisse liefert die Optimierung auf dem festen diskreten HEALPix-Raster, welche mit Sicherheit konvergiert. Nachteilig dabei ist, dass alle mögli-

chen Verteilungen getestet werden, was zu langen Rechenzeiten führt. Eingeschränkt ist dieser Algorithmus durch die Tatsache, dass aufgrund ungünstiger Positionierungen der Abtastpunkte die Gefahr besteht, das globale Minimum der Konditionszahl nicht zu erreichen.

In Abschnitt 5 wurden die Holografiefilter zur Berechnung einer Quellstärkeverteilung vorgestellt. Mittels "Curve-Fitting,-Algorithmus können IIR-Filter mit relativ niedrigen Ordnungen und geringen Fehlern in Betrags- und Phasengang entworfen werden. Eine mögliche Alternative wäre die Überführung der Holografiefilter in den Laplace-Bereich und die Herleitung von Filtern, die über die Parameter  $\nu_n^m$ ,  $r_a$  und  $r_Q$  einstellbar sind.

Einen Teil, auf den in dieser Arbeit nicht eingegangen wurde, stellt die Fehlerberechnung dar. Der gesamte Fehler kann in verschiedene partielle Fehler unterteilt werden: Beginnend beim Aufbau der Mikrofonanordnung entsteht ein Fehler dadurch, dass der Kegel bei der Lösung der Wellengleichung als unendlich lang angenommen wurde, was nicht realisierbar ist. Weiters spielt die Fehlpositionierung und das Eigenrauschen der Mikrofone eine wesentliche Rolle in der Fehlerberechnung. Durch eine gute Konditionierung der Matrix  $\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^T$  können diese Fehler gering gehalten werden. Zusätzlich entstehen Fehler durch die Approximation der Holografiefilter durch IIR-Filter mit endlicher Ordnung.

## A Anhang

### A.1 Begriffserklärungen und Definitionen

#### Abkürzungen und Akronyme:

<b>Abb.</b>	Abbildung
<b>EW</b>	Eigenwert (Eigenvalue)
<b>Gl.</b>	Gleichung
<b>HEALPix</b>	Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization
<b>ISVZ</b>	Iterative Schwerpunktsvoronoizerlegung
<b>MinKZ</b>	Minimieren der Konditionszahl
<b>MaxSW</b>	Maximieren des minimalen Singulärwertes
<b>MMSE</b>	Minimaler quadratischer Fehler (Minimum Mean-Squared Error)
<b>MSV</b>	Minimieren der Streuung der Voronoizellenflächen
<b>SCH</b>	Kugelkappenharmonische (Spherical Cap Harmonics)
<b>SH</b>	Kugelharmonische (Spherical Harmonics)
<b>SSV</b>	Standardisierte Startverteilung
<b>SW</b>	Singulärwert (Singular Value)

#### Mathematische Operatoren:

$(\cdot)^*$	Komplexe Konjugation eines Vektors bzw. einer Matrix
$(\cdot)^\dagger$	Pseudo-Inverse einer Matrix
$\kappa(\cdot)$	Konditionszahl einer Matrix

## Literatur

- [GHB<sup>+</sup>] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelman, "HEALPix – a Framework for High Resolution Discretization, and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere."
- [Gri07] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics, Third Edition*. PHI, 2007.
- [HC97] C. Hwang and S.-K. Chen, "Fully normalized spherical cap-harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1," *Geophysical Journal International*, 129, 450-460, 1997.
- [Kei07] J. Keiner, "Quellcode: Cstripack 0.9.2," 2007.
- [Lev59] E. Levi, "Complex-Curve Fitting," *IRE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-4 S. 37-44, 1959.
- [LRWW98] J. C. LAGARIAS, J. A. REEDS, M. H. WRIGHT, and P. E. WRIGHT, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9 # 1, S. 112-147, 1998.
- [OS83] F. W. J. Olver and J. M. Smith, "Associated Legendre Functions on the Cut," *Journal of Computational Physics*, 51, 502-518, Jänner 1983.
- [Pom08] H. Pomberger, "Angular and Radial Directivity Control for Spherical Loudspeaker Arrays," Thesis, Institut für Elektronische Musik und Akustik, Graz, 2008.
- [Pom10] —, "Microphone Arrays Utilizing Rigid Cones for Sound-Field Analysis (not published)," 2010.
- [Ren97] R. J. Renka, "Algorithm 772: Stripack: Delaunay triangulation and voronoi diagram on the surface of a sphere," *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 23, No. 3, September 1997.

- [RSZ95] E. A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou, "Electrons on the Sphere," *Computational Methods and Function Theory*, 1995.
- [Teu07] H. Teutsch, *Modal Array Signal Processing: Principles and Applications of Acoustic Wavefield Decomposition*. Springer-Verlag, 2007.
- [Wil99] E. G. Williams, *Fourier Acoustics*. Academic Press, 1999.
- [WR11] Wolfram-Research, "Wolframmathworld," April 2011. [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com>
- [Zot09] F. Zotter, "Analysis and Synthesis of Sound-Radiation with Spherical Arrays," PhD Thesis, Institute of Electronic Music and Acoustics at University of Music and Performing Arts, Austria, 2009.
- [ZP11] F. Zotter and H. Pomberger, *Skriptum zur Vorlesung 'Akustische Holografie'*, März 2011.