



**Bünyamin Yagdi**

**Numerische Untersuchung von Transition in Turbinenkaskaden**

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Ingenieur

Studienrichtung: Maschinenbau

Technische Universität Graz

Fakultät für Maschinenbau

Beurteiler: Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Sanz

Betreuerin: Dipl.-Ing.<sup>in</sup> (FH) Maria Elisabeth Collins

Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik

Graz, 2012

# Kurzfassung

Die Aufgabe der vorliegenden Diplomarbeit war es den laminar-turbulenten Umschlag in verschiedenen Turbinenkaskaden (N3-60, VKI LS59 und T100) numerisch zu untersuchen. Die Netze wurden im Programm AiGrid3D (Pieringer, Version Juli 2010) generiert. Für die numerischen Berechnungen wurde das im CFD-Code LINARS (Institutscode) implementierte  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell angewendet, welches auf empirische Korrelationen beruht. In der vorliegenden Arbeit wurden drei verschiedene Korrelationen (Langtry-Menter, Malan und Kelterer) verwendet.

Für den Testfall N3-60 konnte nur die Langtry-Menter-Korrelation gute Übereinstimmung mit der Messung in Bezug auf Beginn und Länge der Transition liefern. Der Testfall VKI LS59 wurde für drei verschiedene Abström-Machzahlen ( $Ma_{is,exit} = 0.62$ ,  $Ma_{is,exit} = 0.75$  und  $Ma_{is,exit} = 1.21$ ) untersucht. Es gelang bei  $Ma_{is,exit} = 0.62$  keiner Korrelation, die Transition richtig vorherzusagen. Die Kelterer-Korrelation konnte für die Abström-Machzahlen  $Ma_{is,exit} = 0.75$  und  $Ma_{is,exit} = 1.21$  gute Ergebnisse erzielen (Beginn der Relaminarisierung und Transition für  $Ma_{is,exit} = 0.75$ , Transition über eine Ablöseblase für  $Ma_{is,exit} = 1.21$ ), während die Malan- und die Langtry-Menter-Korrelation dies nur bei  $Ma_{is,exit} = 1.21$  gelang. Für den Testfall T100 brachten sowohl die Langtry-Menter-, als auch die Kelterer-Korrelation gute Ergebnisse für Beginn und Länge der Transition. Keine Korrelation war in der Lage, für alle Testfälle gute Übereinstimmung mit den Messungen zu erreichen.

# Abstract

The objective of this thesis was the numerical investigation of laminar-to-turbulent transition in different turbine cascades (N3-60, VKI LS59 and T100). The computational grids were generated using the software AiGrid3D (Pieringer, version July 2010). For the numerical calculations the  $\gamma - Re_\theta$  transition model was applied, which is implemented in the inhouse CFD code LINARS and relies on empirical correlations. In this work three different correlations (Langtry-Menter, Malan and Kelterer) were applied.

For the N3-60 test case only the Langtry-Menter correlation was able to provide good agreement with the measurements regarding start and length of transition. The VKI LS59 test case was investigated for three different outlet Mach numbers ( $Ma_{is,exit} = 0.62$ ,  $Ma_{is,exit} = 0.75$  and  $Ma_{is,exit} = 1.21$ ). For the outlet Mach number  $Ma_{is,exit} = 0.62$  no correlation was capable to predict transition. For  $Ma_{is,exit} = 0.75$  and  $Ma_{is,exit} = 1.21$  the Kelterer correlation was able to achieve good results (start of relaminarisation and transition for  $Ma_{is,exit} = 0.75$ , separation induced transition for  $Ma_{is,exit} = 1.21$ ) whereas the Malan and the Langtry-Menter correlation gave good results only for  $Ma_{is,exit} = 1.21$ . For the T100 test case both Langtry-Menter and Kelterer correlations showed good agreement with the measurements regarding start and length of transition. No correlation was able to achieve good results for all test cases.

## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....

(Unterschrift)

# Danksagung

Die vorliegende Diplomarbeit entstand am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz.

Ich möchte mich ganz herzlich bei meinem Beurteiler Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Sanz und bei meiner Betreuerin Dipl.-Ing.<sup>in</sup> (FH) Maria Elisabeth Collins für die stets freundliche und kompetente Unterstützung bedanken.

Besonders bedanke ich mich bei meiner Frau Anna, meinem Vater Hüseyin, meiner Familie und bei meinen Freunden für ihre Unterstützung und ihr Verständnis während meiner Studienzeit.

Bünyamin Yagdi

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>VIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>XIII</b>
<b>Nomenklatur .....</b>	<b>XIV</b>
<b>1 Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Netzgenerierung .....</b>	<b>3</b>
2.1 Allgemein .....	3
2.2 Programmaufbau des AiGrid3D .....	3
2.3 Werkzeuge zur Rechenetzgenerierung im AiGrid3D.....	5
2.3.1 Bézierkurven .....	5
2.3.2 Steuerung der Netzverteilung mittels hyperbolischer Funktionen.....	8
2.3.3 Vergleichmäßigung der Netze durch Lösung partieller elliptischer Differentialgleichungen .....	12
<b>3 Einleitung Strömungssimulation und Turbulenzmodellierung.....</b>	<b>15</b>
3.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik .....	15
3.2 Allgemeines zur Turbulenzmodellierung .....	17
3.3 Reynolds-Zerlegung .....	18
3.4 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) und die klassischen Turbulenzmodelle .....	19
3.4.1 Spalart-Allmaras-Modell.....	22
3.4.2 Menters SST-Modell .....	23
<b>4 Grenzschicht .....</b>	<b>26</b>
4.1 Laminare Grenzschicht.....	26
4.2 Turbulente Grenzschicht.....	27
4.3 Grenzschichtgrößen .....	31
<b>5 Transitionsmodellierung .....</b>	<b>34</b>
5.1 Erscheinungsformen der Transition.....	34

5.1.1	Natürliche Transition.....	34
5.1.2	Bypass-Transition.....	35
5.1.3	Transition über eine Ablöseblase .....	36
5.1.4	Nachlaufinduzierte Transition.....	36
5.1.5	Relaminarisierung .....	37
5.2	Parameter der Transition .....	37
5.2.1	Intermittenzfaktor.....	37
5.2.2	Freistromturbulenzgrad .....	37
5.2.3	Reynoldszahl .....	38
5.2.4	Druckgradient.....	38
5.2.5	Beschleunigungsparameter.....	38
5.3	Empirische Transitionsmodellierung.....	39
5.3.1	Algebraische Transitionsmodellierung .....	41
5.3.2	Transitionsmodellierung mittels Intermittenz-Transportgleichung .....	42
5.3.3	Das $\gamma-Re_\theta$ -Transitionsmodell.....	43
<b>6</b>	<b>CFD-Code LINARS .....</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Testfälle.....</b>	<b>50</b>
7.1	N3-60 Kaskade .....	50
7.2	VKI LS59 Kaskade.....	60
7.3	T100 Kaskade .....	82
<b>8</b>	<b>Schlussbemerkung und Ausblick.....</b>	<b>92</b>
	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>XVIII</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: AiGrid3D GUI (Graphical User Interface) (Pieringer, 2010).....	3
Abbildung 2.2: C-Netz (links), O-Netz (mitte) und H-Netz (rechts) (Hirsch, 1989).....	5
Abbildung 2.3: Rechennetz zwischen zwei parametrisch gegebenen Kurven mittels Bézierkurven 3. Ordnung (Gehrer, 1998) .....	7
Abbildung 2.4: Parametertransformation zur Rechennetzverdichtung (Gehrer, 1998) .....	9
Abbildung 2.5: Hyperbolische Tangensfunktion (Pieringer, 2010).....	10
Abbildung 2.6: Dimensionslos entlang der Abszisse (Pieringer, 2010) .....	10
Abbildung 2.7: „Fertige“ Verdichtungsfunktion (Pieringer, 2010) .....	11
Abbildung 2.8: Ableitung der Verdichtungsfunktion (Pieringer, 2010) .....	11
Abbildung 2.9: Punkteverteilung entlang einer 3 Punkte-Bézierkurve mittels tanh-Funktion (Pieringer, 2010).....	12
Abbildung 2.10: Einfaches O-Netz um einen Zylinder generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010).....	12
Abbildung 2.11: Geglättetes O-Netz um einen Zylinder durch Lösung der Laplace-Gleichung (n=10 Iterationen) generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010).....	14
Abbildung 2.12: Im wandnahen Bereich komprimiertes und durch Lösung der Laplace-Gleichung (n=10 Iterationen) geglättetes O-Netz um einen Zylinder generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010).....	14
Abbildung 3.1: Geschwindigkeitsmessung in einer turbulenten Strömung (Versteeg & Malalasekera, 2007).....	18
Abbildung 4.1: Laminare Grenzschicht an der ebenen Wand (Kluwick, 1999).....	27
Abbildung 4.2: Innerer Aufbau der turbulenten Plattengrenzschicht (Steiner, 2008) .....	28
Abbildung 4.3: Charakteristische Geschwindigkeitsprofile und Wandfunktionen in der Grenzschicht bei verschiedenen Druckgradienten (Steiner, 2008).....	30
Abbildung 4.4: Änderung des Reibungsbeiwerts $c_f$ und des Formfaktors $H_{12}$ im Transitionsbereich (Breitbach, 2002).....	32
Abbildung 5.1: Transition-Modi und Verlustbeiwert an einer Turbinenschaufel für verschiedene Profilreynoldszahlen (Mayle, 1991).....	34
Abbildung 5.2: Natürliche Transition in der Plattengrenzschicht (Schlichting & Gersten, 2006).....	35
Abbildung 5.3: Transition über eine Ablöseblase (Römer, 1990) .....	36

Abbildung 5.4: Zusammenhang zwischen Beschleunigungsparameter und Impulsverlustdicken-Reynoldszahl bei Transitionsbeginn in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad (Mayle, 1991).....	39
Abbildung 5.5: Typisches Signal eines Hitzdrahtanemometers innerhalb eines transitionalen Bereiches mit der dazugehörigen Intermittenzfunktion (Steelant & Dick, 1996).....	40
Abbildung 5.6: Intermittenzverlauf normal zur Wand (Klebanoff, 1955).....	42
Abbildung 7.1: Geometrie der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009).....	51
Abbildung 7.2: Das 2-D Rechennetz von N3-60 generiert in AiGrid3D.....	52
Abbildung 7.3: Residuen mit dem Menter SST-Turbulenzmodell, ohne Transition (N3-60) .	54
Abbildung 7.4: Residuen mit dem $\gamma - Re\theta$ -Transitionsmodell, Langtry-Menter-Korrelation (N3-60).....	54
Abbildung 7.5: Residuen mit dem $\gamma - Re\theta$ -Transitionsmodell, Malan-Korrelation (N3-60)	55
Abbildung 7.6: Residuen mit dem $\gamma - Re\theta$ -Transitionsmodell, Kelterer-Korrelation (N3-60).....	55
Abbildung 7.7: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen und den Messergebnissen.....	56
Abbildung 7.8: Vergleich der Wandschubspannungsverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen und den Messdaten.....	57
Abbildung 7.9: Vergleich der Formfaktorverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite und den Messdaten.....	58
Abbildung 7.10: Vergleich der Intermittenzverteilung nahe Wand von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite.....	59
Abbildung 7.11: VKI LS59 Profil (Kiock et al., 1986).....	60
Abbildung 7.12: 2-D Rechennetz von VKI LS59 generiert in AiGrid3D .....	61
Abbildung 7.13: Vergleich der Machzahlverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	63
Abbildung 7.14: Vergleich der Machzahlverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ (im Bereich der Saugseite vergrößert).....	64
Abbildung 7.15: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	65
Abbildung 7.16: Vergleich der Formfaktorverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	65

Abbildung 7.17: Vergleich der Intermittenzverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	66
Abbildung 7.18: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	66
Abbildung 7.19: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.62$ .....	67
Abbildung 7.20: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	68
Abbildung 7.21: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ entlang der Saugseite vergrößert .....	68
Abbildung 7.22: Frequenzspektren der Dichte-fluktuationen an der Saugseite des VKI LS59 .....	69
Abbildung 7.23: Größe der Dichtefluktuationen bei VKI LS59 mit $Ma_{is,exit} = 0.77$ von Woisetschläger et al. (2003).....	69
Abbildung 7.24: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	70
Abbildung 7.25: Vergleich der Formfaktorverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	71
Abbildung 7.26: Vergleich der Intermittenzverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	71
Abbildung 7.27: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	72
Abbildung 7.28: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 0.75$ .....	72
Abbildung 7.29: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	73
Abbildung 7.30: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ an der Saugseite vergrößert .....	74
Abbildung 7.31: Skizze zur Grenzschichtablösung durch schiefen Verdichtungsstoß (Sieverding, 1976).....	75
Abbildung 7.32: Übergang von normalem zu schiefem Verdichtungsstoß an der Hinterkante (Sieverding, 1976).....	75

Abbildung 7.33: Schlierenbilder mit steigender Abström-Machzahl von l. nach r. (Sieverding, 1976).....	75
Abbildung 7.34: Dichte-Isolinien des VKI LS59 $Ma_{is,exit} = 0.62$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation .....	76
Abbildung 7.35: Dichte-Isolinien des VKI LS59 $Ma_{is,exit} = 0.75$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation .....	76
Abbildung 7.36: Dichte-Isolinien des VKI LS59 $Ma_{is,exit} = 1.21$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation .....	77
Abbildung 7.37: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	78
Abbildung 7.38: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ vergrößert im Bereich der Ablöse .	78
Abbildung 7.39: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	79
Abbildung 7.40: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ vergrößert im Bereich der Ablöse .	79
Abbildung 7.41: Vergleich der Formfaktorverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	80
Abbildung 7.42: Vergleich der Intermittenzverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	80
Abbildung 7.43: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	81
Abbildung 7.44: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall $Ma_{is,exit} = 1.21$ .....	81
Abbildung 7.45: T100 Profilkordinaten (Willinger, 1996) .....	82
Abbildung 7.46: Das 2-D Rechennetz von T100 generiert in AiGrid3D.....	84
Abbildung 7.47: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen.....	86
Abbildung 7.48: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen.....	87
Abbildung 7.49: Positionierung (1-12) der Heißfilmsonden (Österreicher, 2004) .....	87

Abbildung 7.50: Typische Verläufe der Anemometerspannung  $E(t)$  bei laminarer, transitionaler und turbulenter Grenzschichtströmung (links), Messsignale der Anemometerspannung für T100  $E(t) - E_0$  bei Nennlast (rechts) (Österreicher, 2004)..... 88

Abbildung 7.51: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von T100 zwischen den verschiedenen Korrelationen..... 89

Abbildung 7.52: Vergleich der Formfaktorverteilung an der Saugseite von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen..... 90

Abbildung 7.53: Vergleich der Intermittenzverteilung an der Saugseite von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen..... 90

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 7.1: Wichtigste Geometriedaten der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009).....	51
Tabelle 7.2: Randbedingungen der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009).....	51
Tabelle 7.3: N3-60 LINARS Randbedingungen .....	53
Tabelle 7.4: N3-60 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen .....	53
Tabelle 7.5: Geometriedaten und Randbedingungen für VKI LS59 Kaskade (Woissetschläger et al., 2002).....	61
Tabelle 7.6: VKI LS59 LINARS Randbedingungen .....	62
Tabelle 7.7: VKI LS59 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen.....	62
Tabelle 7.8: Wichtigste Geometriedaten der T100 Kaskade (Nichtawitz, 2009) .....	83
Tabelle 7.9: Randbedingungen der T100 Kaskade (Willinger, 1996) .....	83
Tabelle 7.10: Untersuchte Zuström- und Abströmwinkel (Österreicher, 2004) .....	84
Tabelle 7.11: T100 LINARS Randbedingungen.....	85
Tabelle 7.12: T100 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen .....	85
Tabelle 8.1: Überblick über die Auswertung der Testfälle für die verschiedenen Korrelationen in Bezug auf die Anzahl der Iterationen, das Konvergenzverhalten und die Übereinstimmung mit den Messungen.....	93

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

$\mathbf{b}_i$ ( $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ )	Kontrollpunkte einer Bézierkurve
$c_f$	Reibungsbeiwert
$c_p$	Druckbeiwert
$e$	totale innere Energie
$F_{length}$	Parameter für die Steuerung der Transitionslänge
$F_{onset}$	Parameter für die Steuerung des Transitionsbeginns
$H_{12}$	Formfaktor
$I$	Intermittenzfunktion
$K$	Beschleunigungsparameter, $\frac{v}{U^2} \frac{dU}{dx}$
$k$	turbulente kinetische Energie
$l$	Sehnenlänge
$l_m$	Mischungsweglänge
$Ma$	Machzahl
$n$	dimensionsbehafteter Turbulenzfleckenparameter
$\hat{n}$	dimensionsloser Turbulenzfleckenparameter
$p$	Druck
$R_{ij}$	Reynolds'scher Spannungstensor
$\widetilde{Re}_{\theta t}$	örtliche Impulsverlustdicken-Reynoldszahl bei Transitionsbeginn
$Re_{\theta}$	Impulsverlustdicken-Reynoldszahl
$Re_l$	Reynoldszahl
$Re_x$	örtliche Reynoldszahl
$Re_{\theta c}$	kritische Impulsverlustdicken-Reynoldszahl

$Re_{\theta t}$	Impulsverlustdicken-Reynoldszahl bei Transitionsbeginn (ermittelt über empirische Korrelationen)
$Re_v$	Wirbelviskositäts-Reynoldszahl
$S$	Sutherland Temperatur
$s$	Bogenlänge
$T$	Temperatur
$t$	Zeit, Schaufelteilung
$Tu$	Turbulenzgrad
$\mathbf{U}, U_i, (U, V, W)$	gemittelter Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{u}, u_i, (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{u}', u_i', (u', v', w')$	Geschwindigkeitsschwankungen
$u^+$	dimensionslose Geschwindigkeit in der Grenzschicht
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$V$	Volumen
$\mathbf{x}, x_i, (x, y, z)$	kartesischer Ortsvektor
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand

### Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta$	Winkel
$\alpha_u$	Staffelungswinkel
$\Gamma$	Diffusion
$\Gamma_\varphi$	Diffusionskoeffizient
$\gamma$	Intermittenzfaktor
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\delta^*$	Verdrängungsdicke
$\delta_{ij}$	Kronecker Delta
$\varepsilon$	Dissipationsrate

$\epsilon$	turbulente Dissipationrate
$\eta$	transformierte y-Koordinate
$\theta$	Impulsverlustdicke
$\kappa$	Isentropenexponent
$\lambda_\theta$	Druckgradientparameter, $\frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}$
$\mu$	dynamische Zähigkeit
$\mu_t$	turbulente dynamische Zähigkeit
$\nu$	kinematische Zähigkeit
$\xi$	transformierte x-Koordinate
$\rho$	Dichte
$\tau$	Schubspannung
$\tau_{ij}$	Reynolds'scher Spannungstensor
$\tau_w$	Wandschubspannung, $\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0}$
$\varphi$	skalare Zustandsgröße
$\Omega$	absolute Wirbelviskosität
$\Omega_{ij}$	Wirbelviskositätstensor
$\omega$	turbulente Frequenz

**Indizes**

<i>ax</i>	axial
<i>eff</i>	effektiv
<i>exit</i>	Austritt
<i>in</i>	Eintritt
<i>is</i>	isentrop
<i>krit</i>	kritisch
<i>lam</i>	laminar

## Nomenklatur

---

<i>max</i>	maximal
<i>ref</i>	Referenz
<i>stat</i>	statisch
<i>turb</i>	turbulent
<i>tot</i>	total
<i>tr</i>	Transition
$\infty$	Freistrom

## Abkürzungen

ADI	Alternating Direction Implicit
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations
SA	Spalart-Allmaras
SST	Shear Stress Transport
ZPG	Zero Pressure Gradient

# 1 Einleitung

Der weltweite Energiebedarf wird zu einem großen Teil mit Hilfe thermischer Turbomaschinen gedeckt. Durch die Steigerung ihres Wirkungsgrades kann einerseits eine enorme Einsparung bei den Betriebskosten, andererseits eine Verringerung der CO<sub>2</sub>-Emissionen erzielt werden. Für die Entwicklung der thermischen Turbomaschinen ist es wichtig, die Strömungseigenschaften zu kennen, die aus Experimenten gewonnen werden. Dies ist sehr kosten- und zeitaufwendig. Einen Ausweg dafür bieten die computerunterstützten Strömungsberechnungen (CFD), die in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte in ihrer Entwicklung erzielen konnten.

Allgemein wird angenommen, dass die Navier-Stokes-Gleichungen die turbulente Strömung in einem Kontinuum vollständig beschreiben. Prinzipiell gibt es drei Methoden diese Gleichungen zu lösen: DNS (Direct Numerical Simulation), LES (Large Eddy Simulation) und RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes). Die direkte numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (DNS) für technisch relevante Strömungen erfordert nach dem aktuellen Stand einen enormen Zeitaufwand und ist derzeit nur für relativ geringe Reynoldszahlen durchführbar. Der Ausweg aus dieser Situation erfolgt über den Weg der Turbulenzmodellierung. Eine Methode der Turbulenzmodellierung ist die Grobstruktursimulationsmethode (LES), in der die Navier-Stokes-Gleichungen mit einem Tiefpassfilter gefiltert werden. Somit lassen sich die großen Wirbelstrukturen direkt berechnen und nur die kleineren sind zu modellieren. Eine weitere Methode ist die RANS-Methode, in der die zeitlich gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Durch den Mittelungsprozess entstehen beim nicht-linearen Konvektionsterm zusätzliche Mittelungsgrößen, die mit Modellansätzen bestimmt werden müssen, wobei viele physikalische Phänomene verloren gehen. Die bisher entwickelten Turbulenzmodelle können zwar die vollturbulenten Bereiche in guter Näherung vorhersagen, beinhalten jedoch nicht alle Phänomene, wie z.B. den laminar-turbulenten Umschlag. Aus diesem Grund werden Transitionsmodelle entwickelt, die den laminar-turbulenten Umschlag genauer vorhersagen sollen.

Die Aufgabe der vorliegenden Diplomarbeit ist es den laminar-turbulenten Umschlag in verschiedenen Turbinenkaskaden (N3-60, VKI LS59 und T100) numerisch zu untersuchen. Die Netze sollen im Programm AiGrid3D (Pieringer, Version Juli 2010) generiert werden.

Für die numerischen Berechnungen soll das im CFD-Code LINARS (Institutscode) implementierte  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell von Menter et al. (2004) angewendet werden, welches auf empirische Korrelationen beruht. Es sollen drei verschiedene Korrelationen (Langtry-Menter, Malan und Kelterer) verwendet und abschließend die numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten der Testfälle verglichen werden.

## 2 Netzgenerierung

### 2.1 Allgemein

In dieser Diplomarbeit wurde zum Generieren der Netze das Programm AiGrid3D (Version Juli 2010) von Paul Pieringer verwendet. AiGrid ist ein Werkzeug zur Erzeugung von strukturierten Gittern in 3-D bzw. 2-D (Quasi 3-D) und wurde entwickelt, um typische Anforderungen für Turbomaschinen zu erfüllen (Pieringer, 2010).

Laut Pieringer (2010) wird das Netz durch vollständig parametrisierte, geometrische Operationen generiert und durch einen elliptischen Löser geglättet. Die geometrische Konstruktion wird in einer von C++ abgeleiteten Sprache durchgeführt.

### 2.2 Programmaufbau des AiGrid3D

Das Programm AiGrid3D besteht aus einem Projektbaum, einer Logging Area, der Menüleiste und einem Syntax-Fenster, das allgemein drei Ebenen (Scopes) beinhaltet (siehe Abbildung 2.1). Diese Ebenen sind im Projektbaum sichtbar und in Global3D, Domain3D und Grid2D kategorisiert.

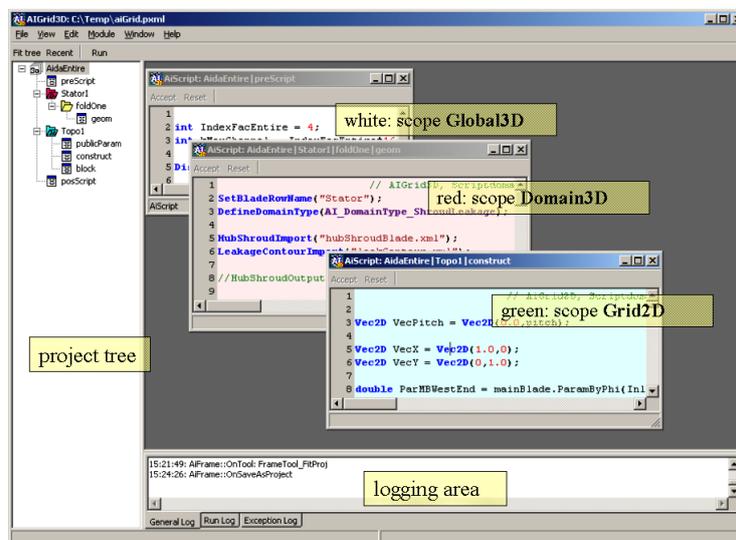


Abbildung 2.1: AiGrid3D GUI (Graphical User Interface) (Pieringer, 2010)

### **Global3D:**

Laut Pieringer (2010) ermöglicht die Global3D-Ebene die Eingabe der globalen Parameter, wie z.B. die globalen Dispositionsfunktionen (*DispoHypParam*) oder die Vektoren (*Vec3D*). Am Ende kann man Exportdateien, wie das endgültige 3D-Netz im xml-grf3D Format (*Grid3DOutput*), sowie Ausgabedateien für LINARS in 3D (*LinarsOutput3D*), als auch in Quasi 3-D (*LinarsOutputQuasi3D*) erstellen. Diese Ausgabedateien umfassen sowohl eine „faces.xml“ in XML-Dateiformat (hierarchisch strukturierte Textdatei), in der die spezifischen Randbedingungen des Netzes beinhaltet sind, als auch eine „geom.txt“ in ASCII-Dateiformat (Textdatei), in der sich die geometrischen Koordinaten des Netzes befinden. Im Vergleich zur Ausgabedatei in 3-D, existiert in der Quasi 3-D Ausgabedatei in k-Richtung nur eine Zelle.

### **Domain3D:**

Die globalen Parameter, die in der Global3D-Ebene angegeben sind, werden an die Domain3D-Ebene weitergegeben. In dieser Ebene werden die Geometrien in 3D, wie z.B. dreidimensionale Schaufelreihen, konstruiert (Pieringer, 2010). Die dafür nötigen Eingangsdaten sind z.B. die Geometriedaten der Schaufel in 3D (*Blade3D*) und die Konturen von Hub und Shroud (*HubShroudImport*).

### **Grid2D:**

Laut Pieringer (2010) wird die Grid2D-Ebene mit der Definition der Funktion *Define2DTopology* im Domain3D getriggert. Die nötigen Parameter (z.B. *int*, *double*, *DispoHypParam* usw.) und zusätzliche transponierte Definitionen wie *TPtich*, *TWestEnd*, *TEastEnd* usw. werden von Domain3D aufgerufen.

Hauptsächlich wird in dieser Ebene das 2D-Netz erzeugt. Diese Ebene kann man in drei Gruppen zusammenfassen, in *publicParam*, *construct* und *block*. In *publicParam* werden die Geometriedaten, die Verteilung der Punkte (um die Schaufel und weg von der Schaufel) und die Bézier-PointChains festgelegt. In *construct* wird das Netz mit Hilfe der *publicParam* und diversen Funktionen (wie *DispoHypParam* und *PointChain2D*) erzeugt. Im *block* hingegen werden die einzelnen Blöcke erstellt und zusammengefügt.

## 2.3 Werkzeuge zur Rechennetzgenerierung im AiGrid3D

Laut Gehrer (1998) wird für zweidimensionale Problemstellungen versucht, die Vorteile von algebraischen- und differentiellen Verfahren zur Netzgenerierung zu nutzen. Die Methoden zur Netzgenerierung sollen als Werkzeuge gesehen werden und können von jedem Benutzer zur Generierung einer bestimmten Netztopologie (z.B.: klassische Netztypen für Turbomaschinen oder Tragflügelströmungen, siehe Abbildung. 2.2: C-Netz, O-Netz, H-Netz) individuell kombiniert werden.

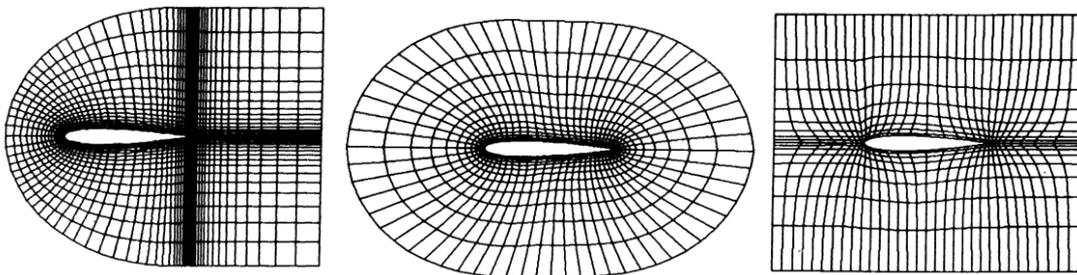


Abbildung 2.2: C-Netz (links), O-Netz (mitte) und H-Netz (rechts) (Hirsch, 1989)

Zunächst wird jeder Strömungskanal durch seine Randlinien definiert. Diese können laut Gehrer (1998) folgendermaßen gegeben sein:

- als elementare algebraische Kurven (Linien, Kreise, Kegelschnitte, usw.)
- als parametrische Kurven  $\mathbf{x}(u)$
- als Freiformkurven (Bézier-Kurven, B-Spline-Kurven, usw.)
- punktweise ( $\mathbf{x}_k, k = 0..n$ )

Durch Umformen oder durch Anwenden geeigneter Interpolationsmethoden können sämtliche Fälle zu allgemeinen parametrischen Kurven  $\mathbf{x}(u)$  transformiert werden.

### 2.3.1 Bézierkurven

Laut Gehrer et al. (1997) ist eine Bézierkurve  $n$ -ten Grades zu gegebenen  $n+1$  Bézierpunkten  $\mathbf{b}_i$  (Kontrollpunkte der Kurve) folgend definiert:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^{(n)}(t) \quad t \in \mathbf{I} = [0,1] \quad (2.1)$$

wobei

$$B_i^{(n)}(t) = t^i(1-t)^{n-i} \binom{n}{i} \quad (2.2)$$

das i-te Bernsteinpolynom n-ten Grades ist. Die Bézierpunkte sind im allgemeinen  $\mathbb{R}^2$ - oder  $\mathbb{R}^3$ -Vektoren. Zwischen einer Bézierkurve  $\mathbf{x}(t)$  und deren Kontrollpunkte  $\mathbf{b}_i$  existieren zwei wichtige Beziehungen (Gehrer et al.1997):

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}'(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \mathbf{x}'(1) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}) \quad (2.4)$$

Im AiGid3D können Bézierkurven 1., 2. und 3. Ordnung erzeugt werden, wobei in der Schreibweise der Funktionen *AI\_Bez2*, *AI\_Bez3* und *AI\_Bez4* die Zahl nicht die Ordnung der Bézierkurve, sondern die Anzahl der Kontrollpunkte bezeichnet. Beispielsweise ist *AI\_Bez2* eine Bézierkurve mit zwei Kontrollpunkten und ist von 1. Ordnung. Diese drei Bézierkurven können dann wie folgt zusammengefasst werden:

### **Lineare Bézierkurven (1. Ordnung):**

Eine lineare Bézierkurve wird mit zwei Kontrollpunkten ( $\mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{b}_1$ ) bestimmt. Die Kurve entspricht einer Geraden zwischen diesen zwei Punkten und wird durch die Anwendung der Gleichung (2.1) und (2.2) folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^1 t^i(1-t)^{1-i} \mathbf{b}_i = (1-t) \mathbf{b}_0 + t \mathbf{b}_1 \quad (2.5)$$

### **Quadratische Bézierkurven (2. Ordnung):**

Hier sind drei Kontrollpunkte ( $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$ ) vorhanden, wobei die Kurve nur durch  $\mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{b}_2$  geht und der Kontrollpunkt  $\mathbf{b}_1$  die Richtung angibt. Dies wird wieder unter Verwendung der Gleichung (2.1) und (2.2) folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^2 t^i (1-t)^{2-i} \binom{2}{i} \mathbf{b}_i = (1-t)^2 \mathbf{b}_0 + 2t(1-t) \mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2 \quad (2.6)$$

**Kubische Bézierkurven (3. Ordnung):**

Eine kubische Bézierkurve wird durch vier Punkte ( $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  und  $\mathbf{b}_3$ ) bestimmt. Die Kontrollpunkte  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  dienen nur der Richtung (Kurve verläuft nicht durch diese Punkte), wobei  $\mathbf{b}_1$  die Richtung bestimmt, in welche die Kurve in  $\mathbf{b}_0$  gehen soll,  $\mathbf{b}_2$  hingegen die Richtung, aus welcher die Kurve zu  $\mathbf{b}_3$  gehen soll. Dies wird unter Verwendung der Gleichung (2.1) und (2.2) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 t^i (1-t)^{3-i} \binom{3}{i} \mathbf{b}_i \\ &= (1-t)^3 \mathbf{b}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{b}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{b}_2 + t^3 \mathbf{b}_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ein Beispiel für die Erläuterung der kubischen Bézierkurve (Gehrer, 1998):

Es seien zwei Randkurven (Parameterkurven)  $\mathbf{x}_1(u)$  und  $\mathbf{x}_2(u)$  gegeben. Diese sollen durch die Anwendung der Bézierkurven mit einem Netz verbunden werden (siehe Abbildung. 2.3).

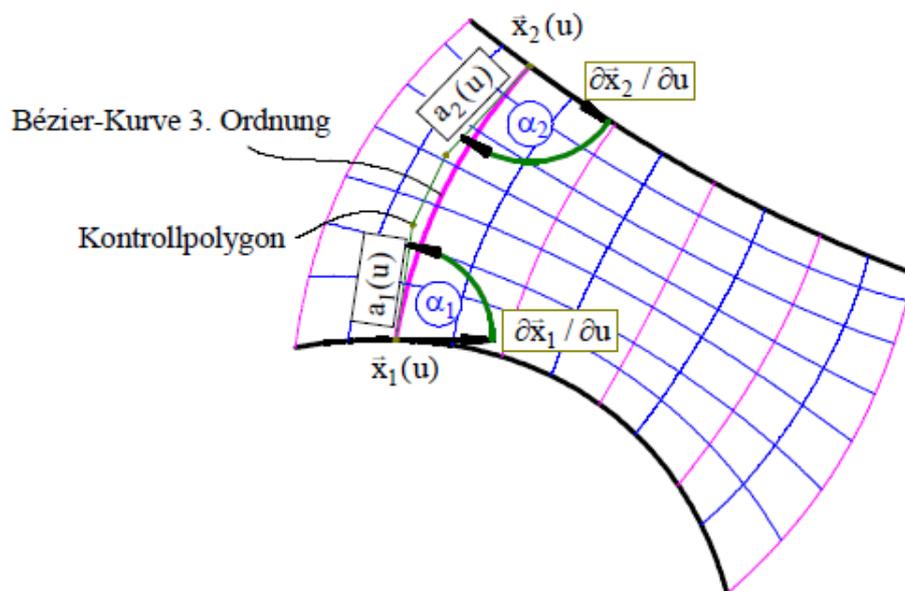


Abbildung 2.3: Rechennetz zwischen zwei parametrisch gegebenen Kurven mittels Bézierkurven 3. Ordnung (Gehrer, 1998)

Dazu werden Bézierkurven 3. Ordnung ( $n=3$ ) angewendet. Dabei soll darauf geachtet werden, dass an den Berandungen ein benutzerdefinierter Winkelverlauf  $\alpha_1(u)$  und  $\alpha_2(u)$  eingehalten wird. Ein auf folgende Weise in Gleichung (2.8) erhaltenes Kontrollpolygon  $\mathbf{b}_i (i = 0, \dots, n)$  erzeugt eine Bézierkurve, welche die vorhin erwähnte Forderung erfüllt.

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}_1(u); \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + a_1(u) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1(u)) & -\sin(\alpha_1(u)) \\ \sin(\alpha_1(u)) & \cos(\alpha_1(u)) \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1 / \partial u}{|\partial \mathbf{x}_1 / \partial u|}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}_2(u); \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 + a_2(u) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2(u)) & \sin(\alpha_2(u)) \\ -\sin(\alpha_2(u)) & \cos(\alpha_2(u)) \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_2 / \partial u}{|\partial \mathbf{x}_2 / \partial u|} \quad (2.8)$$

Dabei bestimmen die Abstände  $a_1(u)$  und  $a_2(u)$  wie weit der geforderte Winkel ins Netz hinein aufrecht bleiben soll. Diese Vorschrift führt nun unter Zuhilfenahme der Shiftoperatorschreibweise für Bézierkurven von Hoschek und Lasser (1989) zu einer Fläche in Parameterdarstellung:

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (1 - v + Ev)^n \mathbf{b}_0(u) \quad E \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} \quad (2.9)$$

Die Parameterlinien ( $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$ ) sollen als Netzlينien gesehen werden. Durch die Vorgabe von  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$  können völlig orthogonal aufsetzende Netze erzeugt werden (Gehrer, 1998).

### 2.3.2 Steuerung der Netzverteilung mittels hyperbolischer Funktionen

Durch Anwendung einer Parametertransformation  $u = u(t)$  können die Abstände aufeinanderfolgender Parameterlinien (Netzverteilung) beliebig gesteuert werden (Gehrer, 1998). Diese Transformation ermöglicht es, die Punkte entlang einer Linie mit Hilfe der hyperbolischen Tangensfunktion, siehe Gleichung (2.10), zu verteilen.

$$u(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tanh(C(2t - 1))}{\tanh(C)} \right) \quad (2.10)$$

Der Einfluss des Steuerparameters  $C$  in dieser Netzverteilungsfunktion ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Je größer der Wert von  $C$ , desto dichter wird das Netz. Je kleiner der Wert, desto weniger dicht wird es. Der Wert  $C = 0$  hingegen entspricht keiner Änderung im Netz (Gehrer, 1998).

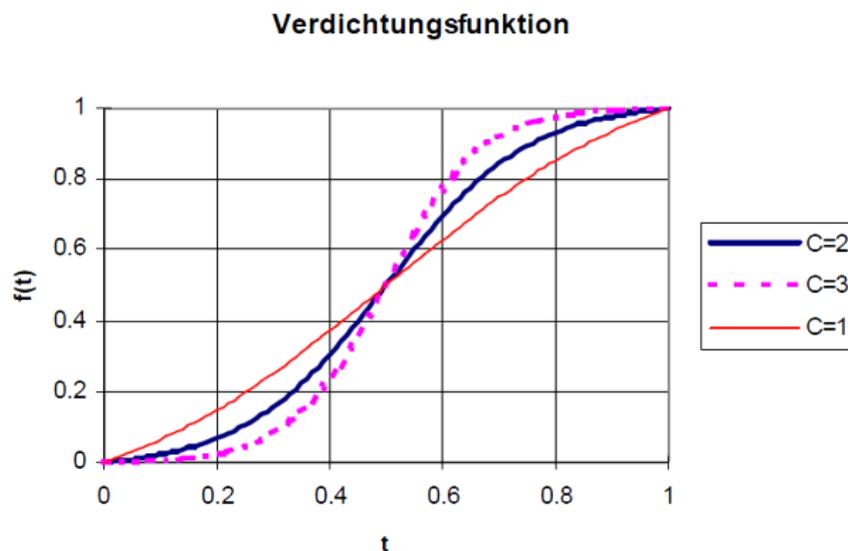


Abbildung 2.4: Parametertransformation zur Rechnernetzverdichtung (Gehrer, 1998)

Diese Verdichtungsfunktion wird im AiGrid3D mit der hyperbolischen Tangensfunktion *DispoHypParam* definiert (Pieringer, 2010). Sie besteht aus sechs Parametern:

*DispoHypParam* (*int iMax*, *double A*, *double B*, *double linSt*, *double linEn*, *double linCen*)

*iMax* ist die Anzahl der Zellen, *A* und *B* die Grenzen der hyperbolischen Funktion, *linSt* die lineare Verteilung am Anfang, *linEn* die lineare Verteilung am Ende und *linCen* die lineare Verteilung an der Stelle der maximalen Ableitung. Diese Funktion wird anhand eines Beispiels wie folgt erklärt (Pieringer, 2010):

*DispoHypParam DHP* (24, -1.6, 2.0, 0.1, 0.15, 0.2)

Als erstes wird der Bereich zwischen den Parametern  $A = -1.6$  und  $B = 2.0$  von der hyperbolischen Tangensfunktion gebildet (siehe Abbildung 2.5). Danach wird dieser Bereich entlang der Abszisse dimensionslos gemacht (siehe Abbildung 2.6).

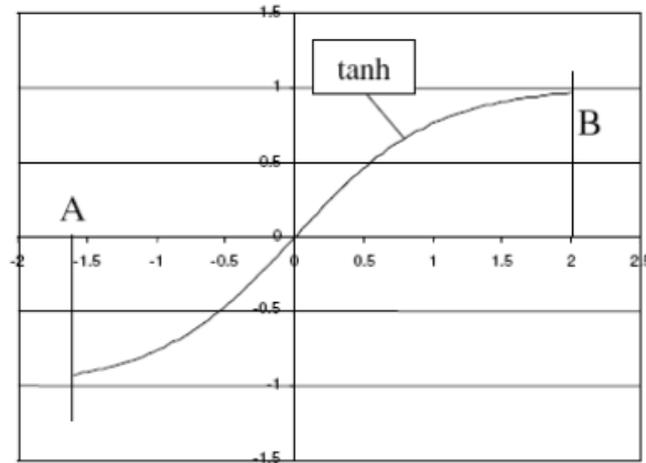


Abbildung 2.5: Hyperbolische Tangensfunktion (Pieringer, 2010)

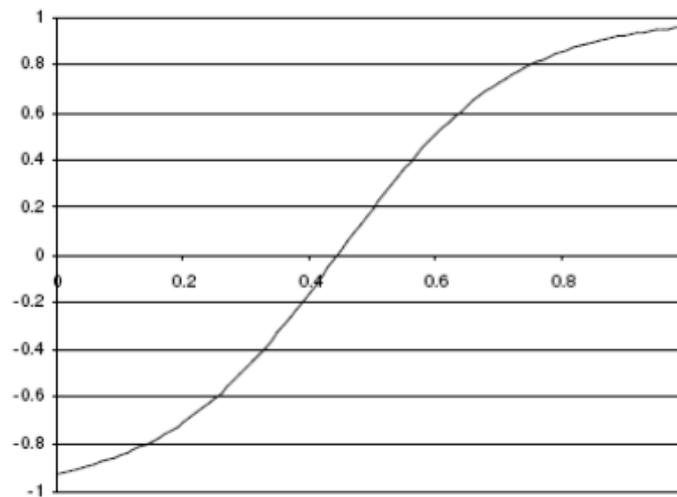


Abbildung 2.6: Dimensionslos entlang der Abszisse (Pieringer, 2010)

Anschließend werden lineare Teile jeweils am Beginn in der Länge von  $linSt = 0.1$ , am Ende mit  $linEn = 0.15$  und an der Stelle der maximalen Ableitung mit  $linCen = 0.2$  eingefügt. Zum Schluss werden beide Koordinaten, also die Abszisse und die Ordinate, dimensionslos gemacht. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.7 mit linearen Anteilen zu sehen, die dementsprechenden Ableitungen in Abbildung 2.8.

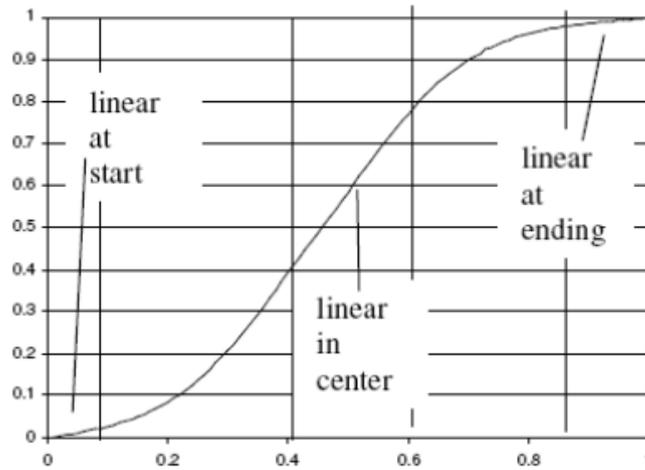


Abbildung 2.7: „Fertige“ Verdichtungsfunktion (Pieringer, 2010)

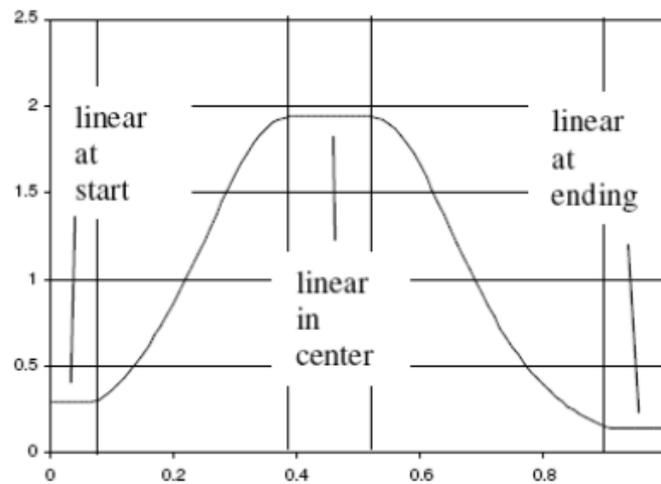


Abbildung 2.8: Ableitung der Verdichtungsfunktion (Pieringer, 2010)

Die Anwendung dieser *DispoHypParam*-Funktion an einer auf Bézierkurven basierenden *PointChain*-Funktion zeigt Abbildung 2.9. Dabei ist die *PointChain*-Funktion folgend definiert (Pieringer, 2010):

$$PointChain2D\ PC (AI\_Bez3, DHP, Vec2D(0, 0), Vec2D(0.5, 0.2), Vec2D(1, 0))$$

wobei *AI\_Bez3* eine Bézierkurve mit drei Kontrollpunkten, *DHP* die Verteilung der Punkte auf dieser Kurve und die drei Vektoren die Kontrollpunkte  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  darstellen.

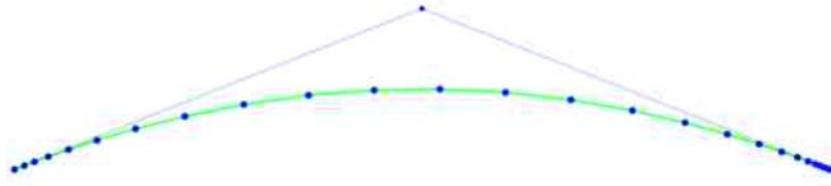


Abbildung 2.9: Punkteverteilung entlang einer 3 Punkte-Bézierkurve mittels tanh-Funktion (Pieringer, 2010)

### 2.3.3 Vergleichmäßigung der Netze durch Lösung partieller elliptischer Differentialgleichungen

Die Randlinien des zu diskretisierenden Strömungskanals weisen oft Unstetigkeiten in der ersten Ableitung auf. Die Verbindung dieser Randlinien erfolgt durch die abschnittsweise Anwendung der Netzverteilungsfunktion (siehe Kapitel 2.3.2) auf jedes stetige Teilstück (Gehrer, 1998).

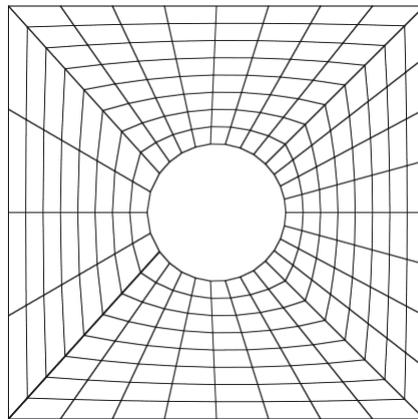


Abbildung 2.10: Einfaches O-Netz um einen Zylinder generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010)

Durch die Anwendung der Netzverteilungsfunktion machen sich die Unstetigkeiten der Berandung weit in das Netz hinein bemerkbar (siehe Abbildung 2.10). Daher wird versucht, durch Ausführen einiger Iterationsschritte zur Lösung der reinen Laplace-Gleichung (2.11) bei einem wie in Abbildung 2.10 generierten Netz, diese Unstetigkeiten zu glätten (Gehrer, 1998).

Dabei bestimmt die Anzahl dieser Iterationen wieviel vom Winkelverlauf an der Berandung und von der gewünschten Netzverteilung verlorenght und wie sehr die Unstetigkeiten

vergleichmäßig werden. Ausgangspunkt des verwendeten differentiellen Verfahrens ist eine Koordinatentransformation  $(x_1, x_2) \leftrightarrow (\xi, \eta)$  (Gehrer, 1998). Es werden dafür die zwei Laplace-Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.11)$$

numerisch gelöst. Die daraus erhaltenen Netzlينien können als Potentiallinien und Stromlinien einer reibungsfreien inkompressiblen Strömung gesehen werden. Durch die Anwendung der Transformationsbeziehung

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

gelangt man zur vektoriellen Gleichung,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi^2} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \eta^2} \left( \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2 \right) = 0$$

die durch zentrale Diskretisierung ( $\Delta \xi = 1, \Delta \eta = 1$ ) und durch Anwendung eines Newton-Algorithmus

$$R(\mathbf{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad R(\mathbf{x}^n) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n = - \left( \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} R(\mathbf{x}^n)$$

und einer Punktrelaxationsmethode

$$\mathbf{x}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{x}_{i,j}^n \cong -\omega \left( \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}_{i,j}} \right)^{-1} R(\mathbf{x}^n) \quad 0 < \omega < 1 \quad (2.12)$$

iterativ gelöst wird (Gehrer, 1998).

In Abbildung 2.11 wird dieses Verfahren zur Vergleichmäßigung der Netze mit zehn Iterationsschritten dargestellt. Die Startwerte entsprechen der Abbildung 2.10. Wie zu sehen ist, sind die Unstetigkeiten, die im ursprünglichen Netz existierten, geglättet worden.

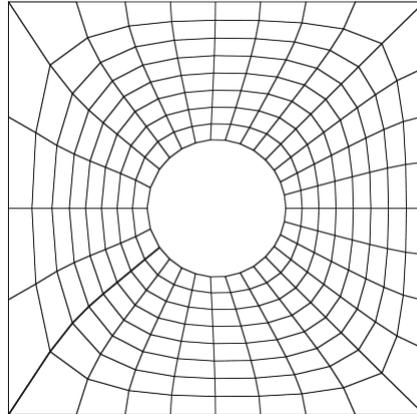


Abbildung 2.11: Geglättetes O-Netz um einen Zylinder durch Lösung der Laplace-Gleichung ( $n=10$  Iterationen) generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010)

Die Verdichtung an manchen Stellen, wie z.B. in wandnahen Gebieten, kann durch Anwendung der im Kapitel 2.3.2 beschriebenen Netzverteilungsfunktion erfolgen (siehe Abbildung 2.12).

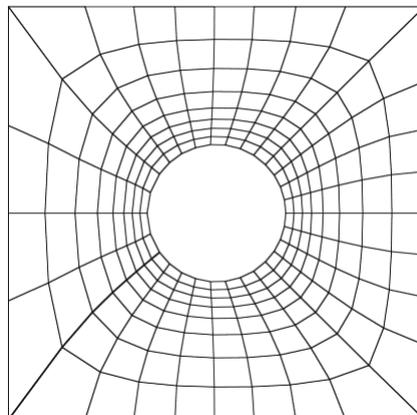


Abbildung 2.12: Im wandnahen Bereich komprimiertes und durch Lösung der Laplace-Gleichung ( $n=10$  Iterationen) geglättetes O-Netz um einen Zylinder generiert in AiGrid3D (Pieringer, 2010)

## 3 Einleitung Strömungssimulation und Turbulenzmodellierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den wichtigsten Gleichungen der Strömungsmechanik. Ausgegangen wird von den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Durch die Reynolds-Zerlegung werden die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) hergeleitet. Anschließend werden die in dieser Diplomarbeit verwendeten Turbulenzmodelle von Spalart und Allmaras (1992) und von Menter (1994) erläutert.

### 3.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Die unten angeführten Grundgleichungen der Strömungsmechanik beziehen sich auf Steiner (2008) und Sanz (1997), wobei deren ausführliche Herleitung in diesen Quellen nachzuschlagen ist.

**Kontinuitätsgleichung:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

Die Kontinuitätsgleichung besteht aus einem lokalen Anteil, bei dem die lokale zeitliche Änderung der Dichte des betrachteten Volumenelements angegeben wird (erster Term auf der linken Seite) und einem konvektiven Anteil, bei dem die Änderung der Dichte infolge des Massenstroms über die Volumsgrenzen repräsentiert ist (Sanz, 1997).

In inkompressiblen Strömungen mit  $\rho = \text{const}$  (d.h. dass die Dichte unabhängig vom Druck ist, sie kann sich über Temperaturexension verändern) nimmt die Kontinuitätsgleichung folgende Form an:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

### Impulsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen):

Die Impulsgleichung beschreibt die totale zeitliche Änderung des Impulses zwischen zwei Kontrollflächen, die gleich der Summe der auf das Kontrollvolumen wirkenden äußeren Kräfte ist.

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -p \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i^b \quad (3.3)$$

Der erste Term auf der linken Seite der Impulsgleichung ist die lokale zeitliche Änderung des Impulses und damit der instationäre Anteil der Gleichung, der zweite der konvektive Anteil, der die Änderung der Impulsströme über die Volumsgrenzen berücksichtigt. Auf der rechten Seite wird im ersten Term die Oberflächenkraft dargestellt, die die Druckkräfte und die Oberflächenspannungen beinhaltet. Der zweite Term ist die volumenbezogene Kraft des betrachteten Kontrollvolumens (Sanz, 1997).

Die inkompressible Form der Navier-Stokes-Gleichungen unter der Annahme, dass die volumenbezogenen Kräfte im Vergleich zu anderen Termen in den thermischen Turbomaschinen zu vernachlässigen sind, lautet dann wie folgt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.4)$$

Auf der linken Seite der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen befindet sich der Trägheitsterm, der den lokalen und den konvektiven Anteil beinhaltet. Der erste Term auf der rechten Seite ist der Druckterm und der Zweite der Zähigkeitsterm.

### Energiegleichung:

Die Erhaltungsgleichung für die totale Energie wird meist in Bilanzgleichungen für die spezifische Enthalpie  $h$ , bzw. die spezifische innere Energie  $e$  übergeführt (Steiner, 2008). Hier wird die Energiegleichung als Transportgleichung für die spezifische innere Energie herangezogen.

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \Phi_\mu + \dot{Q}$$

(3.5)

mit viskoser Dissipation:

$$\Phi_{\mu} = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (3.5) beschreibt den Wärmefluss über die Systemgrenzen, der zweite Term die Leistung der Druckkräfte, der dritte Term die Leistung durch viskose Dissipation, ausgeschrieben in Gleichung (3.6) und der letzte Term die inneren Wärmequellen (Steiner, 2008).

## 3.2 Allgemeines zur Turbulenzmodellierung

Zur Bestimmung, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist, wird die dimensionslose Kennzahl nach Reynolds  $Re$  herangezogen, die die Eigenschaften einer allgemeinen Strömung charakterisiert:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.7)$$

Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis zwischen Trägheits- und Zähigkeitskräften was ein Maß für die Bestimmung der Turbulenz darstellt. Die kritische Reynoldszahl, ab der nicht mehr von einer laminaren Strömung die Rede ist, liegt bei Kanalströmungen in der Größenordnung von  $10^3$ . In den thermischen Turbomaschinen, bei welchen die Reynoldszahl meist zwischen  $10^5 - 10^7$  variiert, ist immer mit einer voll turbulenten Strömung zu rechnen (Sanz, 1997).

Im Allgemeinen wird angenommen, dass die Navier-Stokes-Gleichungen die turbulente Strömung in einem Kontinuum vollständig beschreiben. Um alle relevanten Strömungsphänomene einer Strömung mit DNS (Direct Numerical Simulation) zu erfassen, muss einerseits das Rechenetz die Auflösung aller charakteristischen Längenmaßstäbe gewährleisten und andererseits die Zeitschrittgröße so gering sein, dass eine zeitliche Auflösung turbulenter Vorgänge möglich ist (Sanz, 1997). Die direkte numerische Lösung der

Navier-Stokes-Gleichungen ist derzeit nur für geringe Reynoldszahlen möglich. Für hohe Reynoldszahlen, wie in thermischen Turbomaschinen der Fall, bräuchte man eine derart große Anzahl von Rechengitterpunkten ( $N_{Punkte} \sim Re^{9/4}$ ), dass die derzeit und in absehbarer Zukunft verfügbaren Computerkapazitäten bei weitem nicht ausreichen würden. Daher beschränkt man sich bei Strömungen mit hohen Reynoldszahlen auf die Berechnung von Mittelwerten der gesuchten Strömungsgrößen (Steiner, 2008).

## 3.3 Reynolds-Zerlegung

Aus technischer Sicht ist es nicht unbedingt erforderlich, jedes einzelne Detail der turbulenten Schwankungen in den Strömungen zu kennen, es genügt, die wichtigsten Informationen über die Strömung zu erhalten. Diese grundlegende Idee führt dazu, die Momentanwerte der Strömungsgrößen in Mittelwerte und Fluktuationen, entsprechend einem Vorschlag von Reynolds, zu zerlegen (Sanz, 1997).

$$u(t) = U + u'(t) \quad (3.8)$$

wobei hier  $u(t)$  den Momentanwert der Geschwindigkeit beschreibt,  $U$  den Reynolds-Mittelwert der Größe  $u(t)$ , der zeitunabhängig ist und  $u'(t)$  die Fluktuation. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 3.1 grafisch dargestellt.

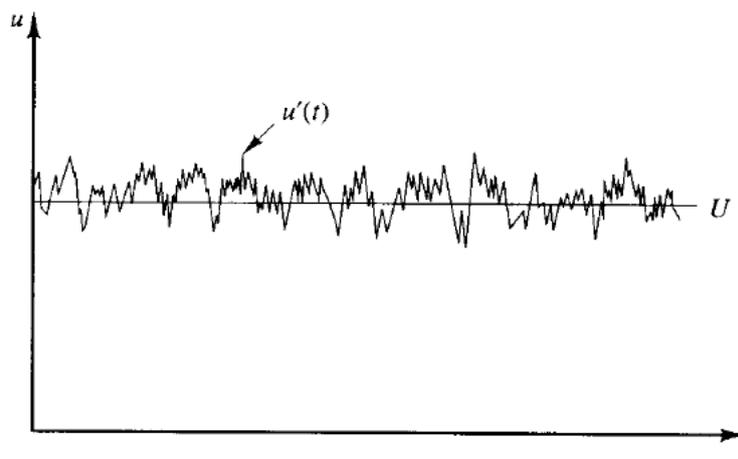


Abbildung 3.1: Geschwindigkeitsmessung in einer turbulenten Strömung (Versteeg & Malalasekara, 2007)

Diese Reynolds-Zerlegung kann für die Geschwindigkeit, für die thermischen Variablen, für den momentanen Druck und die Dichte angewendet werden, wie z.B.:

$$p(t) = P + p'(t) \quad (3.9)$$

In Vektor-Schreibweise wird die Gleichung (3.8) umgeformt in:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} + \mathbf{u}'(t) \quad (3.10)$$

## 3.4 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) und die klassischen Turbulenzmodelle

Um die gemittelten RANS-Gleichungen herzuleiten, werden die Strömungsgrößen in den Erhaltungsgleichungen  $\mathbf{u}$  ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) nach Reynolds aufgespalten und dann zeitlich gemittelt (Versteeg & Malalasekera, 2007). Die Kontinuitätsgleichung lautet dann in Tensor-Schreibweise (inkompressibel):

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.11)$$

und in Vektor-Schreibweise:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.12)$$

Die inkompressiblen Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, die auch als RANS-Gleichungen oder als Reynolds-Gleichungen bekannt sind, lauten wie folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla(-\rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \quad (3.13)$$

bzw. mit den turbulenten Schwankungen ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) in kartesischen Koordinaten ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) und den gemittelten Strömungsgrößen ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) ausgeschrieben:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 U + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(-\rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \right] \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot (V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 V + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] \quad (3.13b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 W + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right] \quad (3.13c)$$

In der Gleichung (3.13) sieht man im Gegensatz zu den nicht nach Reynolds gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Gleichung (3.4)), dass ein zusätzlicher Term  $(-\rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'})$ , der die scheinbare Spannung infolge turbulenter Fluktuation beschreibt, aufgetaucht ist. Dieser Term wird als „Reynolds’scher Spannungstensor“ (im Englischen als Reynolds Stress Tensor) bezeichnet (Steiner, 2008). Dieser Reynolds’scher Spannungstensor besteht aus den Normalspannungen:

$$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2} \quad \tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2} \quad \tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$$

und aus den Scherspannungen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'}$$

Die inkompressiblen dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen enthalten jetzt neben den vier unbekanntem gemittelten Strömungsgrößen ( $\mathbf{U}$  ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) und  $P$ ) zusätzlich die sechs unbekanntem Reynolds-Spannungen. Insgesamt sind es dann vier Gleichungen und zehn Unbekannte. Das System ist nicht geschlossen, daher müssen zusätzliche Gleichungen gefunden werden, die das sogenannte Schließungsproblem der Turbulenz lösen.

### Schließungsproblem der Turbulenz:

Zur Schließung der RANS-Gleichungen wird das Moment der Navier-Stokes-Gleichungen nach Wilcox (2006) herangezogen. Dabei werden die Navier-Stokes-Gleichungen mit einer

Fluktuationsgröße multipliziert und eine Zeitmittelung angewendet. Dies führt zu den Reynolds-Spannungsgleichungen, die sechs zusätzliche Gleichungen, aber dadurch auch weitere 22 zusätzliche Unbekannte erzeugen. Dies zeigt die Notwendigkeit, Näherungen für die unbekanntenen Korrelationen zu entwickeln, sodass eine ausreichende Anzahl von Gleichungen entsteht. Für die Behandlung der Turbulenzmodelle sind zwei Werkzeuge (Transportgleichungen und Wirbelviskosität) im Folgenden noch zu erläutern.

#### Zusätzliche Transportgleichungen:

Turbulenzmodelle werden durch die Anzahl der zusätzlichen Transportgleichungen, die zusammen mit den RANS-Gleichungen (3.13) gelöst werden müssen, klassifiziert. Sie werden von der allgemeinen Transportgleichung abgeleitet. Die inkompressible Transportgleichung eines Skalars  $\varphi$  lautet (Steiner, 2008):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + S_\varphi \quad (3.14)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt den Transport des Skalars durch Diffusion mit  $\mathbf{\Gamma} = -\Gamma_\varphi \nabla \varphi$  dar, wobei hier  $\Gamma_\varphi$  der Diffusionskoeffizient ist. Der zweite Term ist der Anteil der Quellen bzw. Senken, die meist durch chemische Reaktionen entstehen. Durch Reynoldszerlegung des Skalars  $\varphi$ ,

$$\varphi = \Phi + \varphi' \quad (3.15)$$

Einsetzen in die Transportgleichung (3.14) und Mittelung, führt dies zur zeitlich gemittelten Transportgleichung des zerlegten Skalars, wie folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\Gamma_\Phi \nabla \Phi) + \left[ -\frac{\partial(\overline{u'\varphi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'\varphi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'\varphi'})}{\partial z} \right] + S_\Phi \quad (3.16)$$

#### Wirbelviskosität:

Null-, Ein- und Zweigleichungsmodelle gehen auf den Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq (1877) zurück. Die Idee dahinter ist die Einführung einer virtuellen Viskosität

(Wirbelviskosität)  $\mu_t$ , welche die scheinbaren turbulenten Spannungen mit den tatsächlichen Scherspannungen in Beziehung bringt.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.17)$$

Die Wirbelviskosität stellt die Wirkung der Turbulenz in der Strömung dar. Bei turbulenten Strömungen wird das Fluid gezwungen sich normal zur Hauptströmungsrichtung zu bewegen. Dies verursacht den Transport des Momentums von einer Schicht zur anderen und dadurch auch die Beschleunigung bzw. Verlangsamung der angrenzenden Schichten.

### 3.4.1 Spalart-Allmaras-Modell

Dieses Eingleichungsmodell wurde von Spalart und Allmaras (1992) entwickelt. Es kommt aus der Aerodynamik und wird aber auch immer mehr in thermischen Turbomaschinen angewendet. In diesem Modell wird eine Transportgleichung für eine Variable  $\mu^{SA}$  gelöst, welche mit der Wirbelviskosität folgendermaßen in Beziehung steht (Sanz, 1997):

$$\mu_t = f_{v1} \mu^{SA} \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\mu^{SA}}{\mu}$$

Die Transportgleichung des Skalars  $\mu^{SA}$  (siehe Gleichung (3.18)) besteht aus einem Diffusionsterm und einem Quellterm  $S^{SA}$  (Gleichung (3.19)). Der Quellterm beinhaltet die Produktion, Destruktion und einen zusätzlichen Diffusionsterm erster Ordnung. Die Transportgleichung lautet wie folgt (Sanz, 1997):

$$\underbrace{\frac{\partial \mu^{SA}}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung}} + \underbrace{\nabla \cdot (\mu^{SA} \mathbf{U})}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot \left[ (\mu + \mu^{SA}) \nabla \left( \frac{\mu^{SA}}{\rho} \right) \right] \right\}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{S^{SA}}_{\text{Quellterm}} \quad (3.18)$$

mit dem Quellterm:

$$S^{SA} = \underbrace{c_{v1} S \mu^{SA}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\frac{c_{w1} f_w}{\rho} \left( \frac{\mu^{SA}}{y} \right)^2}_{\text{Destruktion}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \left\{ \rho c_{b2} \left[ \nabla \left( \frac{\mu^{SA}}{\rho} \right) \right]^2 \right\}}_{\substack{\text{Diffusionsterm} \\ \text{1.Ordnung}}} \quad (3.19)$$

Der Produktionsterm wird analog zur Produktion der turbulenten kinetischen Energie definiert. Das heißt, dass die Produktion proportional zur skalaren Deformation  $S$  und der virtuellen Viskosität  $\mu^{SA}$  ist. Die Destruktion ist proportional zu  $(\mu^{SA}/y)^2$ , wobei  $y$  der Abstand zur Wand ist. Die Modellfunktionen und deren Konstanten sind wie folgt definiert:

$$S = |\Omega| + \frac{\mu^{SA}}{\rho \kappa^2 y^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad r = \frac{\mu^{SA}}{\rho S \kappa^2 y^2}$$

$$c_{b1} = 0.1355 \quad c_{b2} = 0.622 \quad c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \quad c_{w2} = 0.3 \quad c_{w3} = 2$$

$$c_{v1} = 7.1 \quad \sigma = \frac{2}{3} \quad \kappa = 0.41$$

Die Randbedingungen für diese Transportgleichung lauten:

- Feste Wand:  $\mu^{SA} = 0$
- Eintritt: empfohlener Wert:  $\chi = (\mu^{SA}/\mu) = 0.1$
- Austritt: Extrapolation von  $\mu^{SA}$

### 3.4.2 Menters SST-Modell

Dieses Zweigleichungsmodell wurde von Menter (1994) entwickelt. Der Ausgangspunkt dieses Modells ist das  $k$ - $\omega$ -Modell von Wilcox (1988), wobei  $k$  die turbulente kinetische Energie und  $\omega = \epsilon/k$  die turbulente Frequenz darstellt. Die Wirbelviskosität des Wilcox  $k$ - $\omega$ -Modells wird definiert durch:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.20)$$

Es werden dann zwei Transportgleichungen, eine für die turbulente kinetische Energie  $k$  und eine für die turbulente Frequenz  $\omega$ , gebildet (hier nicht detailliert erläutert). Die turbulenten Randbedingungen (Freistromturbulenz und Mischungsweglänge) müssen beim Eintritt gewählt werden. Das Wilcox  $k$ - $\omega$ -Modell reagiert sehr empfindlich auf die gewählten turbulenten Randbedingungen. Dies stellt ein Problem dar, da es für viele Fälle keine genauen Werte dieser beiden Größen gibt. Zusätzlich wird es problematisch, wenn die Randbedingungen in Gleichung (3.20)  $k = 0$  und  $\omega = 0$  gesetzt werden (Burgstaller, 2010).

Im Menters SST-Modell (Shear Stress Transport) werden Vorteile des  $k$ - $\omega$ -Modells von Wilcox (1988) mit denen des  $k$ - $\epsilon$ -Modells (hier nicht erläutert) kombiniert. Das  $k$ - $\epsilon$ -Modell hat Vorteile in voll turbulenten Regionen (wandfernere Gebiete). Dazu hat Menter (1994) der Wirbelviskosität und dem Produktionsterm Blending-Funktionen und Limiter hinzugefügt. Die Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie  $k$  lautet:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho k \mathbf{U})}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla(k) \right]}_{\text{turbulente Diffusion}} + \underbrace{P_k}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\beta_k \rho k \omega}_{\text{Dissipation}} \quad (3.21)$$

Die Transportgleichung der spezifischen Dissipationsrate  $\omega$  nach Menters SST-Modell lautet:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{U})}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \nabla(\omega) \right]}_{\text{turbulente Diffusion}} + \underbrace{P_\omega}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\beta_\omega \rho \omega^2}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{X_{SST}}_{\text{Cross-Diffusion}} \quad (3.22)$$

mit

$$X_{SST} = \frac{2\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \quad (3.23)$$

Die  $k$ -Transportgleichung des Menters SST-Modells bleibt gegenüber dem  $k$ - $\omega$ -Modell von Wilcox unverändert. In der  $\omega$ -Transportgleichung hingegen taucht zusätzlich ein Cross-Diffusionsterm  $X_{SST}$  auf, der in Gleichung (3.23) dargestellt wird. Zur Wirbelviskosität wird eine Limiter-Funktion hinzugefügt,

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (3.24)$$

wobei hier  $a_1$  eine Konstante,  $S$  die Scherung definiert mit  $S = \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}$  und  $F_2$  eine Blending-Funktion ist, die einen reibungslosen Übergang zwischen wandnahen ( $k$ - $\omega$  Bereich) und wandfernen ( $k$ - $\epsilon$  Bereich) Gebieten bewirkt (Burgstaller, 2010).

Bei der Berechnung der Transportgleichungen bleiben der Produktionsterm  $P_\omega$  (Gleichung (3.26)) in der  $\omega$ -Transportgleichung und die Implementierung der Reynoldsspannungen gleich wie beim Wilcox  $k$ - $\omega$ -Modell (abgesehen von ein paar kleinen Abweichungen der Modellkonstanten). Dem Produktionsterm  $P_k$  wird eine Limiter-Funktion hinzugefügt (Gleichung (3.25)) (Burgstaller, 2010).

$$P_k = \min \left( 10\beta_k \rho k \omega, 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (3.25)$$

$$P_\omega = \gamma \left( 2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (3.26)$$

$\gamma, \beta_k, \beta_\omega, \sigma_k, \sigma_{\omega,1}, \sigma_{\omega,2}$  sind Modellkonstanten.

## 4 Grenzschicht

Das Grenzschichtkonzept wurde von Prandtl (1904) entwickelt. Dieses Konzept beruht auf der Idee, dass Strömungen mit hohen Reynoldszahlen in zwei Bereiche aufgeteilt werden können: In die reibungsfreie Außenströmung und in die Grenzschichtströmung (Kluwick, 1999).

In der reibungsfreien Außenströmung treten keine großen Geschwindigkeitsgradienten ( $\partial u/\partial y$ ) auf. Dies führt zu kleinen Schubspannungen, wodurch die Zähigkeit vernachlässigt werden kann. Um die Haftbedingungen zu erfüllen muss in der Grenzschichtströmung hingegen die Zähigkeit berücksichtigt werden. Große Geschwindigkeitsgradienten ( $\partial u/\partial y$ ) führen sogar bei geringer Zähigkeit zu beträchtlichen Werten der Schubspannung. Der Bereich in Wandnähe, bei dem eine Geschwindigkeitsänderung von Null direkt an der Wand hin zur Geschwindigkeit der Außenströmung  $U_\infty$  stattfindet, wird als Grenzschicht bezeichnet. Die Grenzschichttheorie ist nur bei ausreichend großen Reynoldszahlen gültig. Nur dann liegt eine sehr dünne Grenzschicht im Vergleich zu einer charakteristischen Länge des Körpers vor (Steiner, 2008). Die Grenzschichtströmung kann laminar oder turbulent sein.

### 4.1 Laminare Grenzschicht

In einer laminaren Grenzschicht strömen die Fluidteilchen nebeneinander in getrennten parallelen Bahnen. Wegen der Reibung bewegen sich die einzelnen Schichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (Kluwick, 1999). Das einfachste Beispiel einer laminaren Grenzschicht ist die Plattengrenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte. In Abbildung 4.1 sieht man, dass die Geschwindigkeit in der Grenzschicht im Vergleich zur Geschwindigkeit der Außenströmung  $U_\infty$  kleiner wird. Weiters ist noch zu beobachten, dass die Grenzschichtdicke  $\delta(x)$  mit der Lauflänge  $x$  zunimmt.

Die Grenzschichtgleichungen sind ein partielles Differentialgleichungssystem. Um dieses System zu lösen werden Variablen eingeführt, welche die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen überführen. Im Fall einer stationären Strömung tritt in der Außenströmung keine Störung der Außengeschwindigkeit ( $U = U_\infty = \text{const}$ ) auf. Der Ansatz zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen basiert auf die Vorstellung, dass in

jedem Punkt der Grenzschicht, entlang der ebenen Platte, die Geschwindigkeitsprofile zueinander affin sind (Brenn et al. 2004).

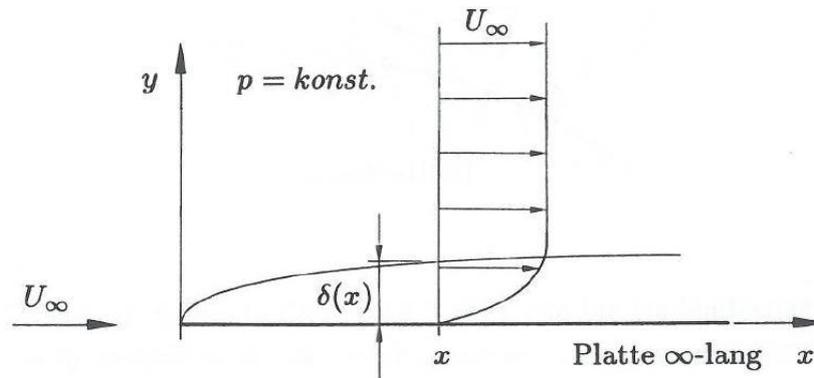


Abbildung 4.1: Laminare Grenzschicht an der ebenen Wand (Kluwick, 1999)

## 4.2 Turbulente Grenzschicht

Betrachtet man wiederum das Beispiel einer längsangeströmten ebenen Platte, ist die Grenzschicht am Anfang laminar. Weiter stromabwärts wird die laminare Strömung instabil und es kommt zu einem Umschlag der laminaren Strömung in eine turbulente Strömung (Brenn et al. 2004). Eine turbulente Strömung ist grundsätzlich dreidimensional und instationär. Das heißt, dass alle Strömungsgrößen ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $p$ ) mit der Zeit fluktuieren. Wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt, wären diese Strömungsgrößen als Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen direkt berechenbar, dies ist aber für technisch relevante hohe Reynoldszahlen praktisch undurchführbar. Daher beschränkt man sich auf die Berechnung von Mittelwerten der gesuchten Strömungsgrößen. Diese grundlegende Idee führt dazu, die Momentanwerte der Strömungsgrößen in Mittelwerte und Fluktuationen zu zerlegen (Reynolds-Zerlegung) (Steiner, 2008):

$$u(t) = U + u'(t) \quad v(t) = V + v'(t) \quad w(t) = W + w'(t) \quad p(t) = P + p'(t)$$

Durch die Anwendung der Mittelwertbildung auf die Navier-Stokes-Gleichungen erhält man zusätzlich die „scheinbaren“ turbulenten Schubspannungen im Vergleich zur laminaren Grenzschicht. Dieses Thema wurde detailliert im Kapitel 3.4 erläutert. Die gesamte

Schubspannung besteht aus einem laminaren und einem turbulenten Anteil wie folgt (Steiner, 2008):

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = \rho \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (4.1)$$

Als nächstes wird die Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  eingeführt,

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

womit die dimensionslosen Wandeinheiten  $u^+$  und  $y^+$  erhalten werden:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad u^+ = \frac{U}{u_\tau}$$

Diese Parameter werden für den inneren Aufbau der turbulenten Grenzschicht benötigt. Der Aufbau ist in Abbildung 4.2 skizziert.

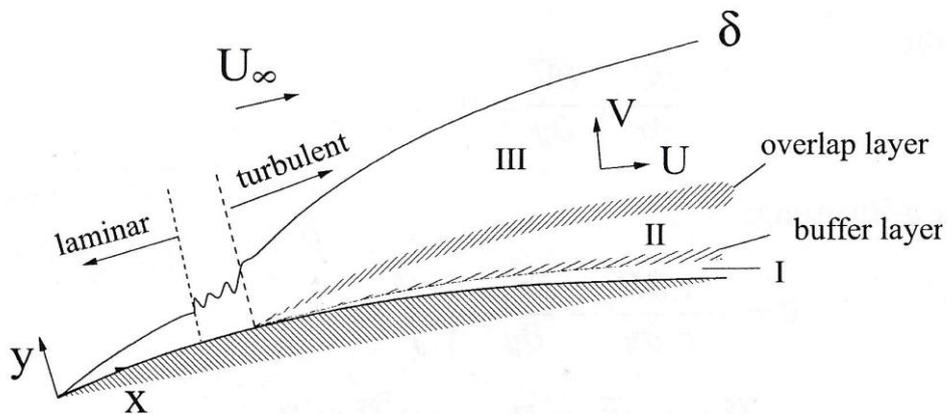


Abbildung 4.2: Innerer Aufbau der turbulenten Plattengrenzschicht (Steiner, 2008)

### **Innerer Aufbau der turbulenten Plattengrenzschicht:**

#### ***I: Laminare Unterschicht***

In dieser Schicht ist die turbulente Schubspannung im Vergleich zur laminaren so klein, dass sie vernachlässigt werden kann. Dadurch besteht die gesamte Wandschubspannung (Gleichung (4.1)) nur aus dem laminaren Anteil  $\tau = \tau_{lam}$ . Der dimensionlose Wandabstand beträgt den Wert  $y^+ < 5$ . Hier gilt:

$$u^+ = y^+ \quad (4.2)$$

und ist universell.

#### ***I-II: Buffer Layer***

Hier ist der turbulente Anteil der Schubspannung nicht mehr zu vernachlässigen  $\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$ . Der  $y^+$ -Wert bewegt sich zwischen  $5 < y^+ < 50$ . Aus dem Mischungswegansatz von Prandtl mit der Mischungswegdämpfung nach van Driest (Steiner, 2008) erhält man die Beziehung:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2dy'}{1 + [1 + l_m^{+2}(y')]^{1/2}} \quad (4.3)$$

#### ***II: Turbulente Innenschicht***

Ab dieser Schicht dominieren die turbulenten Schubspannungen  $\tau = \tau_{turb}$ . Der Wandabstand beträgt  $y^+ > 50$  und  $\frac{y}{\delta} < 0.2$ . Hier gilt das sogenannte logarithmische Wandgesetz:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (4.4)$$

mit ( $\kappa \approx 0.41, B \approx 5.0$ ) und ist universell.

#### ***II-III: Overlap Layer***

Die sogenannte Überlappungsschicht folgt dem logarithmischen Wandgesetz (log-law), überlagert mit dem „wake-law“ nach Coles (Steiner, 2008).

$$u^+ = \underbrace{\frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B}_{\text{log-law}} + \underbrace{\frac{2C}{\kappa} h\left(\frac{y}{\delta}\right)}_{\text{wake-law}} \quad (4.5)$$

$$C = f\left(\frac{dP_\infty}{dx}\right)$$

### III: Turbulente Außenschicht

Sie befindet sich im Bereich ab  $\frac{y}{\delta} > 0.2$  und folgt dem von Coles entwickelten Gesetz „wake-law“:

$$\frac{u^+ - u_{\text{log-law}}^+}{U_\infty^+ - u_{\text{log-law}}^+|_{y=\delta}} \approx Kh\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (4.6)$$

mit

$$h(\eta) \approx 3\eta^2 - 2\eta^3 \text{ (S-förmige Abweichung vom „log-law“) und } \eta = \frac{y}{\delta}$$

Dieses „wake-law“ ist wegen  $K = f\left(\frac{dP_\infty}{dx}\right)$  nicht universell.

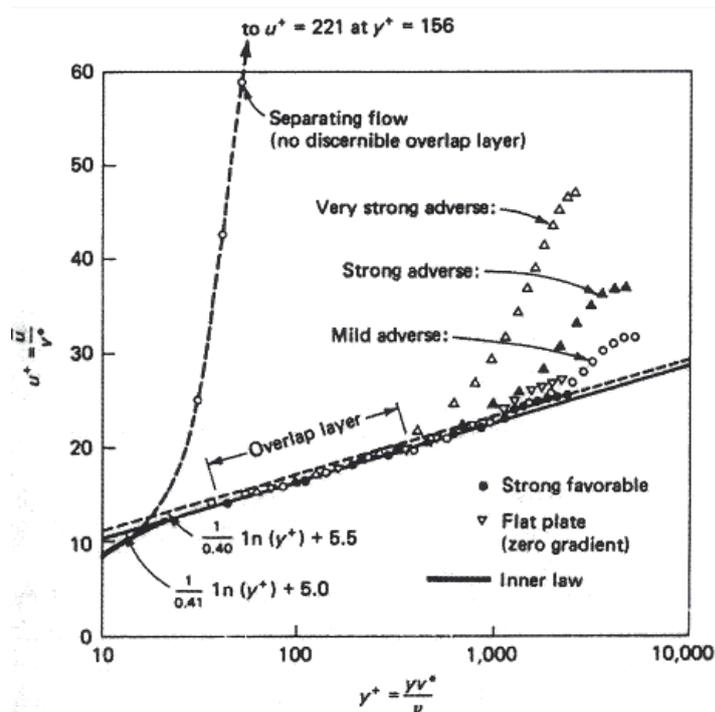


Abbildung 4.3: Charakteristische Geschwindigkeitsprofile und Wandfunktionen in der Grenzschicht bei verschiedenen Druckgradienten (Steiner, 2008)

In Abbildung 4.3 sind die Schichten in einem Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Grenzschicht für verschiedene Druckgradienten dargestellt.

### 4.3 Grenzschichtgrößen

Um mehr Information über die Transition in der Grenzschicht zu erhalten, werden sowohl lokale als auch integrale Parameter herangezogen, die den Zustand der Grenzschicht charakterisieren.

#### **Grenzschichtdicke:**

Die Grenzschichtdicke  $\delta$  ist die Dicke zwischen der Wand und dem Rand der Grenzschicht, wo die Geschwindigkeit der Grenzschicht theoretisch gleich der Geschwindigkeit der Außenströmung ist. Praktisch wird die Grenze häufig bei 99% der Geschwindigkeit der Außenströmung gewählt (Steiner, 2008):

$$\delta(x) \cong 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \text{für} \quad \frac{u}{U_\infty} = 0.99 \quad (4.7)$$

#### **Verdrängungsdicke:**

Aus Kontinuitätsgründen werden die Stromlinien wegen der Grenzschicht nach oben abgedrängt. Der Betrag, der am Rand der Grenzschicht auftretenden Verschiebung einer realen, gegenüber einer idealen reibungsfreien Stromlinie wird als Verdrängungsdicke  $\delta^*$  definiert (Steiner, 2008):

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (4.8)$$

**Impulsverlustdicke:**

Die Geschwindigkeit in der Grenzschicht wird wegen der Reibung von  $u = U_\infty$  auf  $u = 0$  abgebremst. Dadurch entsteht ein Impulsverlust von  $\Delta I = \rho U_\infty^2 \theta$ . Die Impulsverlustdicke  $\theta$  ist wie folgt definiert (Steiner, 2008):

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (4.9)$$

**Formfaktor:**

Eine weitere wichtige Größe der Grenzschicht ist der dimensionslose Formfaktor  $H_{12}$ . Er weist in laminarer Grenzschicht höhere Werte auf als in turbulenter und ist definiert als das Verhältnis von Verdrängungsdicke zu Impulsverlustdicke (Unger, 1999):

$$H_{12} = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (4.10)$$

Der laminar-turbulente Grenzschichtumschlag wird durch einen Abfall des Formparameters identifizierbar (siehe Abbildung 4.4).

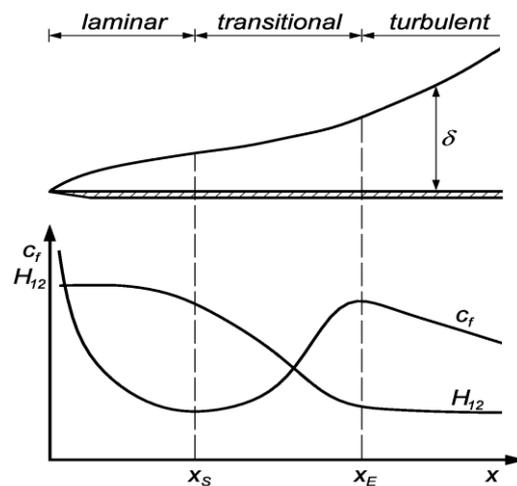


Abbildung 4.4: Änderung des Reibungsbeiwerts  $c_f$  und des Formfaktors  $H_{12}$  im Transitionsbereich (Breitbach, 2002)

**Reibungsbeiwert:**

Der dimensionslose Reibungsbeiwert ist ein lokaler Parameter der Grenzschicht, der durch das Verhältnis zwischen Wandschubspannung und Staudruck (Druck der kinetischen Energie) definiert wird (Steiner, 2008):

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2/2} \quad (4.11)$$

mit der Wandschubspannung:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.12)$$

Im Bereich der Transition steigt der Reibungsbeiwertverlauf der laminaren Grenzschicht auf den der turbulenten sprunghaft an (siehe Abbildung 4.4). Diese Kurve macht den laminar-turbulenten Umschlag identifizierbar (Breitbach, 2002).

## 5 Transitionsmodellierung

Derzeit ist kein Turbulenzmodell in der Lage, Transition in der Grenzschicht vorherzusagen. Bei vielen Ingenieur Anwendungen werden die Auswirkungen einer transitionellen Grenzschicht vernachlässigt. Da die Lage und Art der Transition auf Tragflügeln bzw. Turbinenschaufeln einen sehr großen Einfluss auf den Wirkungsgrad hat, muss sie in thermischen Turbomaschinen in Betracht gezogen werden (siehe Abbildung 5.1).

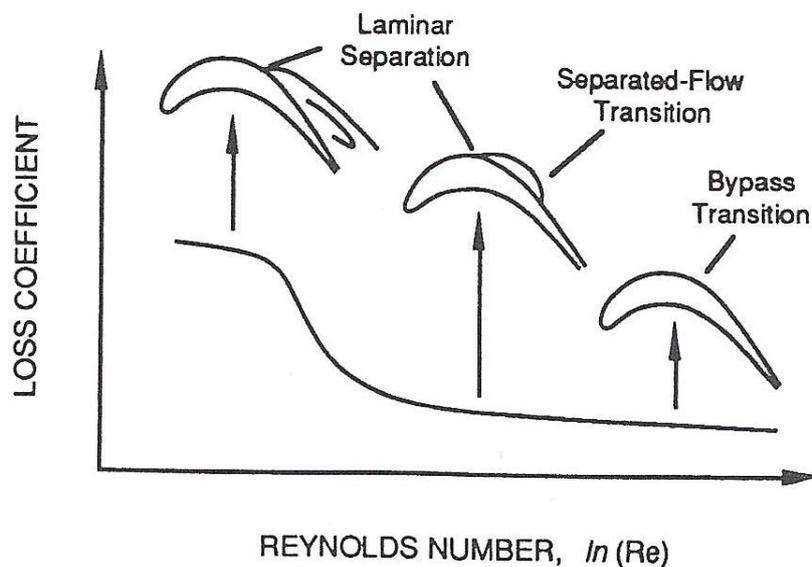


Abbildung 5.1: Transition-Modi und Verlustbeiwert an einer Turbinenschaufel für verschiedene Profilreynoldszahlen (Mayle, 1991)

### 5.1 Erscheinungsformen der Transition

Prinzipiell werden von Mayle (1991) folgende Arten von Transition in Turbomaschinen unterschieden:

#### 5.1.1 Natürliche Transition

Die einzelnen Bereiche einer natürlichen Transition am Beispiel der längsangeströmten ebenen Platte ist in Abbildung 5.2 wie folgt dargestellt (Schlichting & Gersten, 2006):

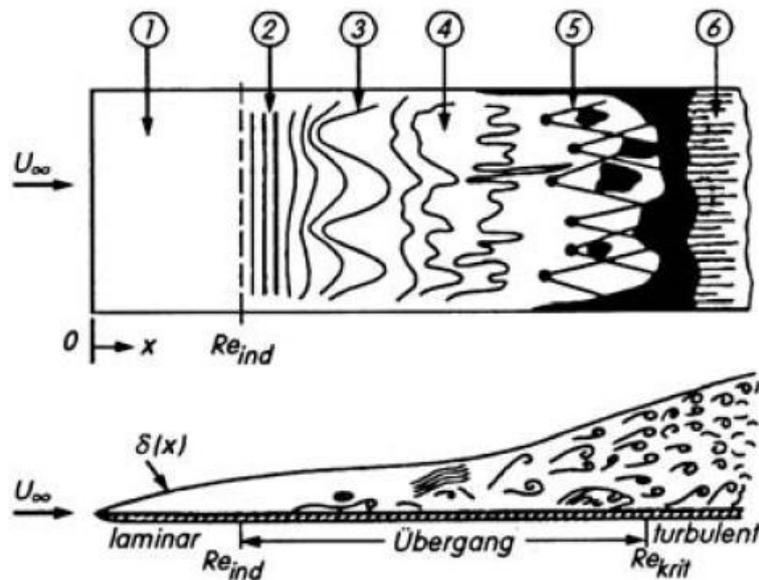


Abbildung 5.2: Natürliche Transition in der Plattengrenzschicht (Schlichting & Gersten, 2006)

- 1) Stabile, laminare Strömung.
- 2) Ab der Indifferenz-Reynoldszahl  $Re_{ind}$  bilden sich instabile, zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Wellen.
- 3) Ausbildung instabiler dreidimensionaler Wellen und Wirbeln.
- 4) Zusammenbruch der Wirbel.
- 5) Entstehung von Turbulenzflecken, die den Übergang zur turbulenten Grenzschichtströmung einleiten.
- 6) In diesem Bereich ist die Grenzschichtströmung vollturbulent.

Der natürliche Umschlag ist durch niedrige Freistromturbulenzgrade ( $Tu_\infty < 0.5\%$ ) gekennzeichnet.

### 5.1.2 Bypass-Transition

Diese Form des Umschlags wird durch höhere Turbulenzgrade ( $Tu_\infty > 0.5\%$ ), d. h. starke Störungen in der Außenströmung, verursacht. Es werden die Phasen der natürlichen Transition von (2) bis (4) übersprungen und es treten hierbei keine Tollmien-Schlichting-

Wellen auf. Die Bypass-Transition kommt in den thermischen Turbomaschinen wegen der dort vorherrschenden hohen Freistromturbulenzgrade am häufigsten vor (Pecnik, 2007).

### 5.1.3 Transition über eine Ablöseblase

Diese Erscheinungsform der Transition kommt bei verzögerten Strömungen (Strömungen mit positiven Druckgradienten) vor. Aufgrund der geringen kinetischen Energie der verzögerten Partikel in der Grenzschicht löst sich die Grenzschicht ab. In der freien Scherschicht ereignet sich wegen starker Störungen eine Transition (siehe Abbildung 5.3). Die auf diese Weise entstandene turbulente Strömung kann sich wieder an die Wand anlegen (Mayle, 1991). Bei zu hohen Druckgradienten hingegen tritt keine Wiederanlegung auf.

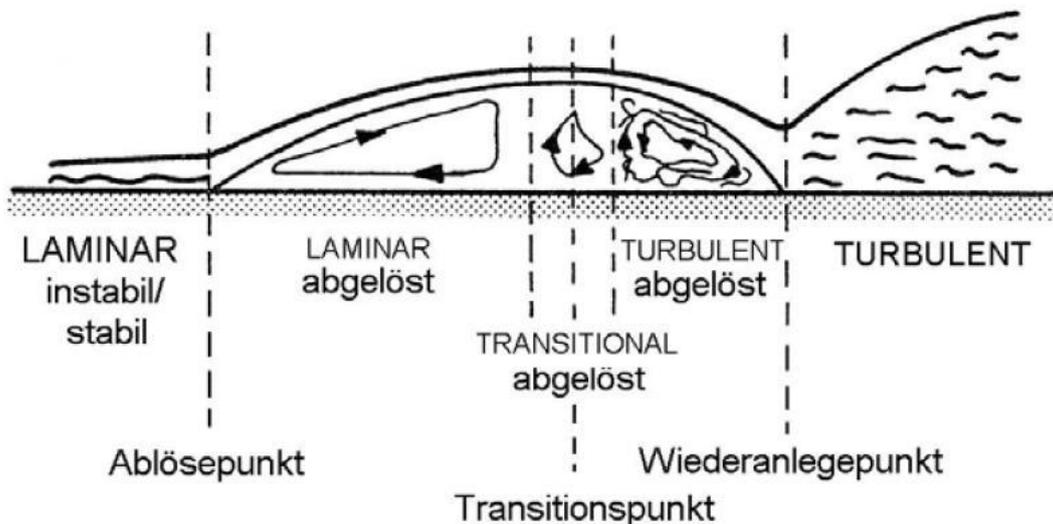


Abbildung 5.3: Transition über eine Ablöseblase (Römer, 1990)

### 5.1.4 Nachlaufinduzierte Transition

Diese Art der Transition tritt bei periodisch instationären Strömungen auf und ist sehr wichtig bei der Anwendung auf thermische Turbomaschinen. Sie entsteht durch die Interaktion zwischen Leit- und Laufschaufeln (Mayle, 1991).

### 5.1.5 Relaminarisierung

Darunter versteht man die Umkehrung des Umschlags (Reverse Transition), von einer turbulenten in eine laminare Strömung. Die Relaminarisierung kann in Bereichen mit starker Beschleunigung auftreten (Nichtawitz, 2009).

## 5.2 Parameter der Transition

Im Folgenden werden die wichtigsten Parameter der Transition wie Intermittenzfaktor, Turbulenzgrad, Reynoldszahl, Druckgradient und Beschleunigungsparameter erläutert.

### 5.2.1 Intermittenzfaktor

Im Bereich der Transition hat die Strömung einen intermittierenden Charakter. Das bedeutet, dass die Strömung zeitweise laminar und zeitweise turbulent ist. Der physikalische Charakter dieser teils laminaren, teils turbulenten Strömung kann durch den Intermittenzfaktor  $\gamma$  gekennzeichnet werden, wobei  $\gamma = 1$  für eine vollturbulente Strömung und  $\gamma = 0$  für eine laminare Strömung steht (Pecnik, 2007).

### 5.2.2 Freistromturbulenzgrad

Der Freistromturbulenzgrad  $Tu$  ist auch einer der wichtigsten Parameter für den Transitionsvorgang. Er charakterisiert den Störungsgrad der Außenströmung. Der Freistromturbulenzgrad ist eine dimensionslose Größe und wird durch die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgeschwindigkeiten  $(\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2})$ , sowie die Geschwindigkeit der Außenströmung  $U_\infty$  definiert (Nichtawitz, 2009):

$$Tu = \frac{1}{U_\infty} \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \quad (5.1)$$

### 5.2.3 Reynoldszahl

Die Reynoldszahl  $Re$  ist ebenfalls ein wichtiges Kriterium beim Transitionsvorgang. Ab einer kritischen Reynoldszahl  $Re_{krit}$  (kleinste Reynoldszahl, bei welcher Störungen angefacht werden können) wird eine Strömung instabil. In der Plattengrenzschicht passiert der Umschlag von laminarer Strömung zu vollturbulent weiter stromabwärts ( $Re_{trans} > Re_{krit}$ ) (Steiner, 2008).

### 5.2.4 Druckgradient

Die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte ohne Druckgradienten ( $dp/dx = 0$ ) sind in verschiedenen Abständen zueinander ähnlich. Bei einem Körper mit beliebiger Kontur ( $dp/dx \neq 0$ ) hingegen sind sie von Ort zu Ort verschieden (Nichtawitz, 2009). In Gebieten mit negativem Druckgradienten ( $dp/dx < 0$ , beschleunigte Strömung) gibt es keinen Wendepunkt entlang des Geschwindigkeitsprofils innerhalb der Grenzschicht. In Gebieten mit positivem Druckgradienten ( $dp/dx > 0$ , verzögerte Strömung) hingegen gibt es einen Wendepunkt entlang des Geschwindigkeitsprofils innerhalb der Grenzschicht. Eine Ablösung der Grenzschicht ist nur bei verzögerter Strömung ( $dp/dx > 0$ ) möglich (Steiner, 2008).

### 5.2.5 Beschleunigungsparameter

Der dimensionslose Beschleunigungsparameter  $K$  ist wie folgt definiert (Nichtawitz, 2009):

$$K = \frac{v}{U^2} \frac{dU}{dx} \quad (5.2)$$

wobei positive Werte von  $K$  auf eine beschleunigte Strömung, negative Werte auf eine verzögerte Strömung hindeuten.

Abbildung 5.4 stellt den Zusammenhang zwischen Beschleunigungsparameter und Impulsverlustdicken-Reynoldszahl bei Transitionsbeginn in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad dar. Das Diagramm zeigt, dass eine Beschleunigung ( $K > 0$ ) den Transitionsbeginn weiter

stromabwärts verschiebt (an höheren Impulsverlustdicken-Reynoldszahlen  $Re_{\theta t}$  erkennbar), während eine Verzögerung ( $K < 0$ ) den Beginn der Transition weiter stromaufwärts verlegt (an niedrigeren Impulsverlustdicken-Reynoldszahlen  $Re_{\theta t}$  erkennbar) (Nichtawitz, 2009).

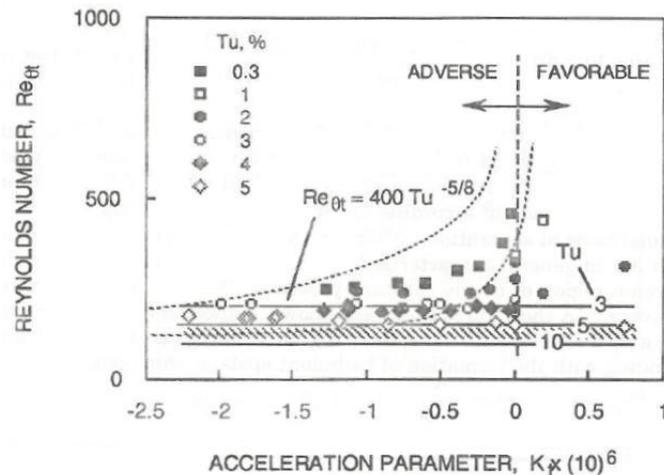


Abbildung 5.4: Zusammenhang zwischen Beschleunigungsparameter und Impulsverlustdicken-Reynoldszahl bei Transitionsbeginn in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad (Mayle, 1991)

Die horizontalen Linien zeigen den Zusammenhang bei Turbulenzgraden von  $Tu \geq 3\%$ . Es ist ersichtlich, dass der Beschleunigungsparameter bei steigendem Turbulenzgrad einen immer kleiner werdenden Einfluss auf den Beginn der Transition hat. Das schraffierte Gebiet (für thermische Turbomaschinen besonders relevanter Bereich) mit Turbulenzgraden von  $Tu = 5 - 10\%$  weist darauf hin, dass der Beschleunigungsparameter kaum mehr Einfluss auf den Transitionsbeginn hat (Nichtawitz, 2009).

### 5.3 Empirische Transitionsmodellierung

Wie bereits in Kapitel 5.2.1 erwähnt, hat die Strömung im Bereich der Transition einen intermittierenden Charakter. Das bedeutet, dass die Strömung zeitweise laminar und zeitweise turbulent ist. Der physikalische Charakter dieser teils laminaren, teils turbulenten Strömung kann durch die Intermittenzfunktion  $I(t)$  gekennzeichnet werden, wobei  $I(t) = 0$  für laminar und  $I(t) = 1$  für turbulent steht (siehe Abbildung 5.5) (Pecnik, 2007).

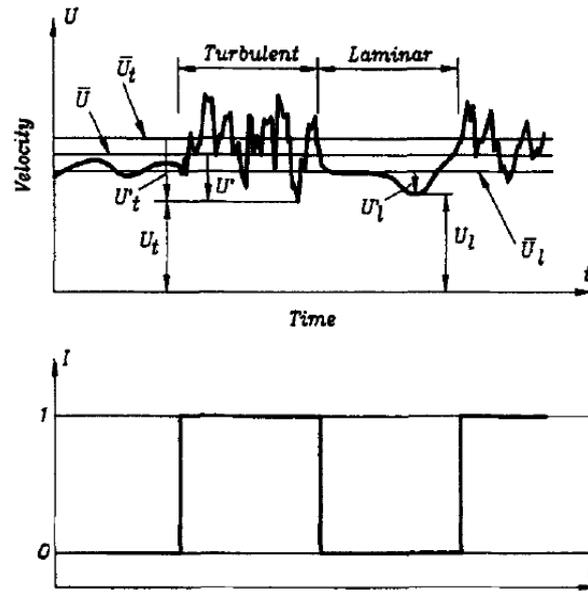


Abbildung 5.5: Typisches Signal eines Hitzdrahtanemometers innerhalb eines transitionalen Bereiches mit der dazugehörigen Intermittenzfunktion (Steelant & Dick, 1996)

Der Intermittenzfaktor  $\gamma$  wird nach einer zeitlichen Mittelung der Intermittenzfunktion erhalten:

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t) dt \quad (5.3)$$

wobei er den Bruchteil der Zeit angibt, in welchem an einer bestimmten Stelle turbulente Strömung herrscht.  $\gamma = 1$  entspricht einer andauernd turbulenten,  $\gamma = 0$  einer andauernd laminaren und  $0 < \gamma < 1$  einer zeitlich intermittierenden Strömung. Der Intermittenzfaktor kann mittels folgender zwei Möglichkeiten in einen Navier-Stokes-Code implementiert werden (Pecnik, 2007):

$$\mu_{eff} = \mu_l + \gamma \mu_t \quad (5.4)$$

$$P_{k,eff} = \gamma P_k \quad (5.5)$$

Bei der ersten Möglichkeit (Gleichung (5.4)) wird eine effektive Viskosität als Linearkombination aus laminarer und turbulenter Viskosität gebildet (Warren et al. 1995). Bei der zweiten Möglichkeit (Gleichung (5.5)) hingegen wird nur der Produktionsterm  $P_k$  der

turbulenten kinetischen Energie mit  $\gamma$  multipliziert und in der laminaren Grenzschicht wird der Produktionsterm  $P_k = 0$  gesetzt (Pecnik, 2007).

### 5.3.1 Algebraische Transitionsmodellierung

Dhawan und Narasimha (1958) entwickelten ein algebraisches Transitionsmodell entlang fester Wände. Die Gleichung des Modells ist mit dimensionsbehafteten Größen, folgend definiert:

$$\gamma = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{n\sigma}{U_\infty}(x-x_{tr})^2} & (x \geq x_{tr}) \\ 0 & (x < x_{tr}) \end{cases} \quad (5.6)$$

wobei  $U_\infty$  die Geschwindigkeit der Außenströmung,  $x_{tr}$  die Stelle des Transitionsbeginns,  $n$  die dimensionsbehaftete Turbulenzfleckenproduktion und  $\sigma$  den dimensionslosen Turbulenzflecken-Transportparameter darstellt. Durch die Entdimensionierung der Turbulenzfleckenproduktion  $n$  (Gleichung (5.7)) nach Mayle (1991) und Einsetzen in die Gleichung (5.6) erhält man das empirische Modell für die Intermittenz  $\gamma$  (Gleichung (5.8)) (Pecnik, 2007):

$$\hat{n} = n \frac{v^2}{U_\infty^3} \quad (5.7)$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 - e^{-\hat{n}\sigma(Re_x - Re_{xt})^2} & (x \geq x_{tr}) \\ 0 & (x < x_{tr}) \end{cases} \quad (5.8)$$

An ebenen Platten ohne Druckgradienten (ZPG: Zero Pressure Gradient) wurden für den dimensionslosen Parameter  $\hat{n}\sigma$  und den Transitionsbeginn folgende empirische Beziehungen in Abhängigkeit vom Freistromturbulenzgrad  $Tu_\infty$  entwickelt (Mayle, 1991):

$$\hat{n}\sigma_{ZPG} = 1.25 \times 10^{-11} Tu_\infty^{7/4} \quad (5.9)$$

$$Re_{\theta_t} = 400 Tu_\infty^{-5/8} \quad (5.10)$$

Die Transition beginnt, wenn die Impulsverlustdicken-Reynoldszahl  $Re_\theta = \theta U_\infty / \nu$  entlang der laminaren Grenzschicht die kritische Impulsverlustdicken-Reynoldszahl  $Re_{\theta_t}$  übersteigt. Die Hauptprobleme der empirischen Transitionsmodellierung liegen in der Bestimmung der Intermittenzfunktion  $I(t)$  und des Transitionsbeginns. Ein weiteres Problem besteht in der Bestimmung der Impulsverlustdicken-Reynoldszahl  $Re_\theta$  in abgelösten Grenzschichten und dreidimensionalen Strömungen. Weiters können Grenzschichteffekte normal zur Wand nicht aufgelöst werden, z.B. die Intermittenzverteilung normal zur Wand (Abbildung 5.6). Um dies zu simulieren, müssten zusätzliche Funktionen verwendet werden, um den Abstand zur Wand zu berücksichtigen (Pecnik, 2007).

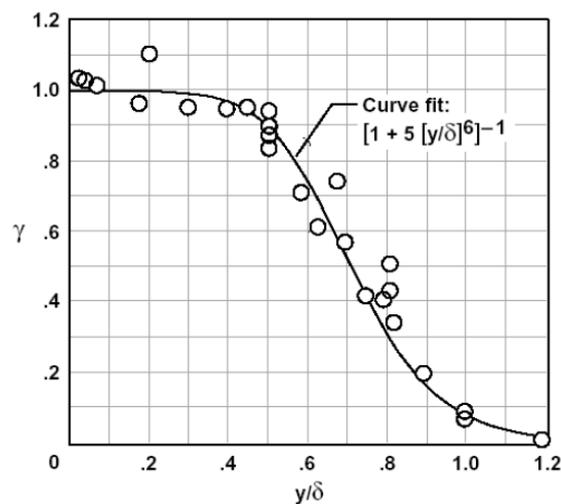


Abbildung 5.6: Intermittenzverlauf normal zur Wand (Klebanoff, 1955)

### 5.3.2 Transitionsmodellierung mittels Intermittenz-Transportgleichung

Um die Probleme der algebraischen Transitionsmodellierung zu umgehen, wurde von Steelant und Dick (1996) ein Transitionsmodell mittels Intermittenz-Transportgleichung entwickelt, welches die stromaufwärtsgelegenen Turbulenzeffekte mitberücksichtigen kann. Sie bestimmen eine Transportgleichung für den Intermittenzfaktor, indem sie zunächst Gleichung (5.8) nach  $x$  differenzieren (Pecnik, 2007):

$$\frac{d\gamma}{dx} = 2(1 - \gamma) \underbrace{\hat{n}\sigma_{ZPG} \frac{U_\infty^2}{v^2}}_{\beta(x)} (x - x_{tr}) \quad (5.11)$$

Diese Gleichung wird mit  $\rho u_s$  ( $u_s$  entspricht der Geschwindigkeit entlang einer Stromlinie) multipliziert:

$$\rho u_s \frac{d\gamma}{dx} = 2(1 - \gamma) \beta(x) \rho u_s \quad (5.12)$$

Durch Reformulierung der Gleichung (5.12) für ein allgemeines zweidimensionales Koordinatensystem, Einführung eines zeitlich instationären Terms für  $\gamma$  und unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung für kompressible Medien, erhält man schließlich folgende Gleichung:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\gamma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\gamma v)}{\partial y} = \underbrace{2(1 - \gamma)\beta(x)\rho\sqrt{(u^2 + v^2)}}_{P_\gamma} \quad (5.13)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage der empirischen Transitionsmodellierung mit Hilfe einer skalaren Transportgleichung für die Intermitenz  $\gamma$  (Pecnik, 2007).

### 5.3.3 Das $\gamma$ - $Re_\theta$ -Transitionsmodell

Das  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell wurde von Menter et al. (2004) entwickelt, um die Anforderungen moderner CFD-Codes unter Verwendung lokaler Informationen der Strömung zu erfüllen. Dieses Transitionsmodell verwendet zwei Transportgleichungen: Eine für den Intermitenzfaktor  $\gamma$  und eine für die Transitionsimpulsverlustdicken-Reynoldszahl  $\widetilde{Re}_{\theta t}$ . Die Intermitenz ist mit dem Turbulenzmodell verknüpft und wird stromabwärts nach dem Beginn des Umschlags zum Einschalten der Produktion der turbulenten kinetischen Energie ( $P_k = P_{kTurbModell} \cdot \gamma_{TransitionModell}$ ) verwendet (Burgstaller, 2010). Die  $\gamma$ -Transportgleichung ist wie folgt definiert:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (5.14)$$

Die Transportgleichung der Transitionsimpulsverlustdicken-Reynoldszahl  $\widetilde{Re}_{\theta t}$  verknüpft die empirischen Korrelationen mit den Beginnkriterien der Intermittenzgleichung und ermöglicht, dass dieses Modell in allgemeinen Geometrien und für mehrere Schaufelreihen verwendet werden kann (Burgstaller, 2010). Sie ist wie folgt definiert:

$$\frac{\partial(\rho\widetilde{Re}_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \widetilde{Re}_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \widetilde{Re}_{\theta t}}{\partial x_j} \right] \quad (5.15)$$

mit

$$P_\gamma = f(F_{length}, F_{onset}) \quad (5.16)$$

$$E_\gamma = f(F_{length}, F_{onset}) \quad (5.17)$$

$$P_{\theta t} = f(Re_{\theta t}) \quad (5.18)$$

Der Parameter  $F_{onset}$  steuert den Beginn der Transition,  $F_{length}$  die Länge der Transition und  $Re_{\theta t}$  ist die kritische Impulsverlustdicken-Reynoldszahl.  $F_{onset}$  ist eine Funktion der Wirbelstärken-Reynoldszahl  $Re_v$  und der Transitions-Reynoldszahl  $Re_{\theta c} F_{onset} = f(Re_v, Re_{\theta c})$ . Um das System zu schließen, müssen noch folgende drei Korrelationen gefunden werden (Burgstaller, 2010):

$$Re_{\theta c} = f(\widetilde{Re}_{\theta t}) \quad (5.19)$$

$$F_{length} = f(\widetilde{Re}_{\theta t}) \quad (5.20)$$

$$Re_{\theta t} = f(Tu, \dots) \quad (5.21)$$

Menter et al. (2004) schlagen vor, die Impulsverlustdicken-Reynoldszahl  $Re_\theta$  mit der Wirbelstärken-Reynoldszahl  $Re_v$  wie folgt zu verknüpfen:

$$Re_\theta = \frac{Re_{v \max}}{2.193} \quad (5.22)$$

Menter et al. (2004) waren die ersten, die eine Korrelation für das  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell formulierten:

$$Re_{\theta t} = 803.73[Tu + 0.6067]^{-1.027}F(\lambda_{\theta}, K) \quad (5.23)$$

$$F(\lambda_{\theta}, K) = \begin{cases} 1 - [-10.32\lambda_{\theta} - 89.47\lambda_{\theta}^2 - 265.51\lambda_{\theta}^3]e^{-Tu/3}, & \lambda_{\theta} \leq 0 \\ 1 + [0.0962[K \cdot 10^6] + 0.148[K \cdot 10^6]^2 + 0.0141[K \cdot 10^6]^3] \\ \times (1 - e^{-Tu/1.5}) + 0.556[1 - e^{-23.9\lambda_{\theta}}]e^{-Tu/1.5}, & \lambda_{\theta} > 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

Sie verwendeten neun ebene Plattentestfälle, die meisten von ERCOFTAC, um Korrelationen für  $Re_{\theta c}$  und  $F_{length}$  zu erhalten: T3A, T3A-, T3B, S & K (Schubauer und Klebanof), T3C2, T3C3, T3C4, T3C5 und einen hypothetischen Relaminarisierungstestfall (Burgstaller, 2010). Die Menter-Korrelationen für  $Re_{\theta c}$  und  $F_{length}$  wurden aus urheberrechtlichen Gründen erst später von Langtry und Menter (2009) wie folgt veröffentlicht:

$$Re_{\theta c} = \begin{cases} \bar{Re}_{\theta t} - (396.035 \cdot 10^{-2} + (-120.656 \cdot 10^{-4})\bar{Re}_{\theta t} \\ + (868.23 \cdot 10^{-6})\bar{Re}_{\theta t}^2 - 696.506\bar{Re}_{\theta t}^3 \\ + 174.105 \cdot 10^{-12}\bar{Re}_{\theta t}^4), & \bar{Re}_{\theta t} \leq 1870 \\ \bar{Re}_{\theta t} - (593.11 + 0.482(\bar{Re}_{\theta t} - 1870)), & \bar{Re}_{\theta t} > 1870 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$F_{length} = \begin{cases} 398.189 \cdot 10^{-1} - 119.270 \cdot 10^{-4}\bar{Re}_{\theta t} \\ - 132.567 \cdot 10^{-6}\bar{Re}_{\theta t}^2, & \bar{Re}_{\theta t} < 400 \\ 263.404 - 123.939 \cdot 10^{-2}\bar{Re}_{\theta t} - 194.548 \cdot 10^{-5}\bar{Re}_{\theta t}^2 \\ - 101.695 \cdot 10^{-8}\bar{Re}_{\theta t}^3, & 400 \leq \bar{Re}_{\theta t} < 596 \\ 0.5 - 3.0\bar{Re}_{\theta t} - 596.0 \cdot 10^{-4}, & 596 \leq \bar{Re}_{\theta t} < 1200 \\ 0.3188, & 1200 \leq \bar{Re}_{\theta t} \end{cases} \quad (5.26)$$

In der vorliegenden Arbeit wurden drei verschiedene Korrelationen für das  $\gamma - Re_{\theta}$ -Transitionsmodell verwendet: Die Korrelation von Langtry und Menter (2009), von Malan et al. (2009) und von Kelterer et al. (2011).

### Die Korrelation von Langtry und Menter (2009)

Langtry und Menter (2009) überarbeiteten die Korrelation von Menter et al. (2004) für  $Re_{\theta t}$  und  $F(\lambda_{\theta})$ . In der überarbeiteten Korrelation existiert der Beschleunigungsparameter  $K$  nicht mehr (Burgstaller, 2010).

$$Re_{\theta t} = \begin{cases} \left[ 1173.51 - 589.428Tu + \frac{0.2196}{Tu^2} \right] F(\lambda_{\theta}), & Tu \leq 1.3 \\ 331.5[Tu - 0.5658]^{-0.671} F(\lambda_{\theta}), & Tu > 1.3 \end{cases} \quad (5.27)$$

$$F(\lambda_{\theta}) = \begin{cases} 1 - [-12.986\lambda_{\theta} - 123.66\lambda_{\theta}^2 - 405.689\lambda_{\theta}^3]e^{-[Tu/1.5]^{1.5}}, & \lambda_{\theta} \leq 0 \\ 1 + 0.275[1 - e^{0.35\lambda_{\theta}}]e^{-Tu/0.5}, & \lambda_{\theta} > 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

### Die Korrelation von Malan et al. (2009)

Um geeignete Korrelationen für  $Re_{\theta c}$  und  $F_{length}$  zu finden, verwenden Malan et al. (2009) vier ebene Plattentestfälle ohne Druckgradienten (T3B, T3A, T3AM und S & K) und fünf ebene Plattentestfälle mit Druckgradienten (T3C1, T3C2, T3C3, T3C4 und T3C5) (Burgstaller, 2010).

$$Re_{\theta c} = \min(0.615\widetilde{Re}_{\theta t} + 61.5, \widetilde{Re}_{\theta t}) \quad (5.29)$$

$$F_{length} = \min(\exp(7.168 - 0.01173\widetilde{Re}_{\theta t}) + 0.5, 300) \quad (5.30)$$

### Die Korrelation von Kelterer et al. (2011)

Die folgenden Korrelationen für  $Re_{\theta c}$  und  $F_{length}$  wurden von Kelterer et al. (2010), unter Verwendung von fünf ebenen Plattenfällen (T3A, T3B, T3C1, T3C2 und T3C4) entwickelt.

$$Re_{\theta c} = \begin{cases} 1.02\widetilde{Re}_{\theta t} - 35 + 36 \cdot \tanh\left(-\frac{\widetilde{Re}_{\theta t} - 138}{54}\right), & \widetilde{Re}_{\theta t} \leq 215 \\ 45 \cdot \tanh\left(\frac{\widetilde{Re}_{\theta t} - 215}{15}\right) + 155, & \widetilde{Re}_{\theta t} > 215 \end{cases} \quad (5.31)$$

$$F_{length} = \min\left(250 \cdot \exp\left[-\left(\frac{\widetilde{Re}_{\theta t}}{130}\right)^{1.7}\right] + 10, 40\right) \quad (5.32)$$

Diese Korrelationen wurden auf den Kaskadentestfall T106 von Kelterer et al. (2011) wie folgt erweitert:

$$Re_{\theta c} = \begin{cases} 1.02\widetilde{Re}_{\theta t} - 35 + 36 \cdot \tanh\left(-\frac{\widetilde{Re}_{\theta t} - 138}{54}\right), & \widetilde{Re}_{\theta t} \leq 215 \\ 45 \cdot \tanh\left(\frac{\widetilde{Re}_{\theta t} - 215}{16}\right) + 155, & 215 < \widetilde{Re}_{\theta t} \leq 270 \\ 252 \cdot \tanh\left(\frac{\widetilde{Re}_{\theta t} - 575}{16}\right) + 450, & \widetilde{Re}_{\theta t} > 270 \end{cases} \quad (5.33)$$

$$F_{length} = \min\left(215 \cdot \exp\left[-\left(\frac{\widetilde{Re}_{\theta t}}{120}\right)^{1.08}\right] + 1.5, 40\right) \quad (5.34)$$

## 6 CFD-Code LINARS

In der vorliegenden Arbeit wurde zur Berechnung der transitionalen Strömungen der LINARS-Code, der am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik entwickelt wurde, angewendet. Dieser Code ist in der objektorientierten Programmiersprache C++ geschrieben und ermöglicht es, neue Objekte wie z.B.: Randbedingungen oder Turbulenzmodelle zu implementieren (Pecnik, 2007).

Der Berechnungscode LINARS löst die kompressiblen Reynolds/Favre gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) in konservativer Form an strukturierten Multi-Block Berechnungsgittern mit Hilfe einer voll-impliziten Finite-Volumen-Methode. Die konvektiven Terme werden mit der von Roe entwickelten Flux-Difference-Splitting Methode diskretisiert. Um einen hohen Grad an räumlicher Genauigkeit zu erreichen, wird das TVD-Verfahren (Total Variation Diminishing) mit einer Interpolation dritter Ordnung angewandt, um den Zustandsvektor an jeder Zellgrenze zu erhalten. Die viskosen Terme hingegen werden mit einem in zweiter Ordnung genauen zentralen Diskretisierungsschema konstruiert. Für die zeitliche Diskretisierung wird das Newton-Raphson-Verfahren angewandt (Burgstaller, 2010).

LINARS kann folgende Randbedingungen berücksichtigen (Pecnik, 2007):

- Eintritt-, Austritt-, Blockrand- und periodische Randbedingungen.
- Nicht-reflektierende Randbedingungen.
- Zeitlich phasenverschobene Randbedingungen für die instationäre Simulation von Kompressor- bzw. Turbinenstufen mit ungleichen Teilungsverhältnissen.

Folgende Turbulenz- und Transitionsmodelle sind in LINARS implementiert (Pecnik, 2007):

- Spalart-Allmaras Modell
- Wilcox  $k - \omega$ -Modell
- Menters SST-Modell
- Durbins  $v^2 f$ -Modell
- Turbulent Potential Model
- Laminar Kinetic Energy Model
- Menters  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell

LINARS benötigt im Allgemeinen vier Eingabedateien für die Strömungsberechnung. Diese sind „control.txt“, „geom.txt“, „faces.xml“, und „boundCond.xml“. Das „control.txt“ ist das Main-File, in dem die ganzen Strömungsparameter, Turbulenz- und Transitionsmodelle, Iterationsschritte usw. zu setzen und auszuwählen sind. Im „boundCond.xml“ befinden sich die Randbedingungen. Die Dateien „geom.txt“ und „faces.xml“ liefern an den LINARS alle Informationen über das Netz, die im Kapitel 2.2 ausführlich erklärt wurden.

LINARS ermöglicht die Berechnung der dynamischen Viskosität  $\mu$  mittels „Sutherland Law“, das folgend definiert ist (Burgstaller, 2010):

$$\mu = \mu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad (6.1)$$

wobei die Referenzviskosität  $\mu_{ref}$  bei der Referenztemperatur  $T_{ref}$  gemessen wird. In LINARS werden bei Berechnungen mit Sutherland Law folgende Konstanten für Luft angewendet:

$$\mu_{ref} = 1.876e - 5 \left[ \frac{Ns}{m^2} \right] \quad T_{ref} = 303.15 [K] \quad S = 110.4$$

LINARS gibt hauptsächlich in drei Dateiformaten aus. Diese sind „asciitecplot.dat“, für die Dateivisualisierung in der kommerziellen Software „Tecplot“, „field.gr2“, für das Programm „Viewer“ von Pecnik und Textdateien in ASCII-Format, jeweils für Wand, Eintritt, Austritt und Interface, sowie eine Textdatei in ASCII-Format für die Residuen, die in Matlab bzw. in MS-Excel interpretiert und weiterverarbeitet werden können.

## 7 Testfälle

Alle Testfälle (N3-60, VKI LS59, T100) wurden im LINARS berechnet, zuerst mit den Turbulenzmodellen Spalart-Allmaras (Multigrid) und SST und anschließend mit dem  $\gamma - Re_{\theta}$ -Transitionsmodell mit den drei Korrelationen von Kelterer et al. (2011), Malan et al. (2009) und Langtry und Menter (2009), die im Kapitel 5.3.3 detailliert erklärt wurden.

Die Berechnungen wurden kompressibel durchgeführt. Da in den Testfällen N3-60 und T100 im gesamten Strömungsfeld niedrige Geschwindigkeiten ( $Ma < 0.3$ ) herrschen, hätte man diese auch inkompressibel rechnen können, was zu einer rascheren Konvergenz führen würde. Trotzdem wurden diese zwei Testfälle kompressibel gerechnet, um zu sehen, ob eine Konvergenz erreicht werden kann und wenn ja, wie lange es dauern würde.

Für die Auswertungen wurde bei den Residuen als Konvergenzkriterium die Größenordnung 0.1 gewählt, um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen.

### 7.1 N3-60 Kaskade

Die N3-60 Turbinenschaufel ist eine Leitschaufel (Stator) im Hochdruckteil einer TK-200 Dampfturbine, die von ZAMECH (jetzt ALSTOM ABB ZAMECH) hergestellt wurde. Die experimentellen Untersuchungen der Kaskade wurden am Institut für Thermische Maschinen an der Technischen Universität Czestochowa von Zarzycki und Elsner (2005) in einem Windkanal durchgeführt. Die Geometrie der N3-60 Kaskade ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Die wichtigsten Geometriedaten und Randbedingungen in Tabelle 7.1 und 7.2 aufgelistet.

Das 2D-Netz (Quasi3D) für die N3-60-Kaskade wurde im Programm AiGrid3D generiert und besteht aus einem Eintrittsblock (H-Block), einem O-Block um die Schaufel, einem Kanalblock (H-Block), einem Kanal-Austrittsblock (H-Block) und einem Austrittsblock (H-Block), mit insgesamt 43818 Zellen. Die Verdichtung der Zellen zur Wand wurde so gewählt, dass überall in der ersten Zelle ein dimensionsloser Wandabstand von  $y^+ < 1$  eingehalten werden konnte. Für die Glättung des Netzes (Relaxationparameter) wurde ein Wert von 30 Iterationen gewählt. Das endgültige Netz ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

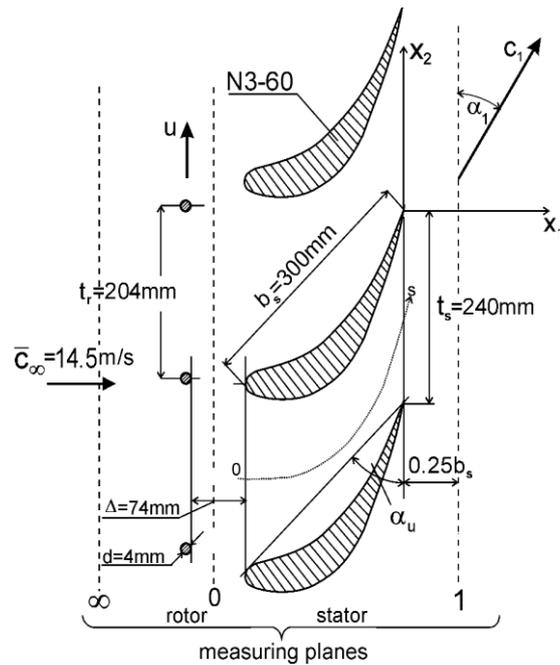


Abbildung 7.1: Geometrie der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009)

Schaufelanzahl	5	[-]
Sehnenlänge $l$	300	[mm]
Axiale Sehnenlänge $l_{ax}$	202	[mm]
Schaufelteilung $t$	240	[mm]
Staffelungswinkel $\alpha_u$	46.42	[°]
Bogenlänge der Saugseite $s_s$	370	[mm]
Bogenlänge der Druckseite $s_p$	311	[mm]

Tabelle 7.1: Wichtigste Geometriedaten der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009)

Eintrittstotaldruck $p_{tot,in}$	101865	[Pa]
Geschwindigkeit am Eintritt $U_{in}$	13.5	[m/s]
Totaltemperatur am Eintritt $T_{tot,in}$	301	[K]
Machzahl am Eintritt $Ma_{in}$	0.048	[-]
Geschwindigkeit am Austritt $U_{is,exit}$	30	[m/s]
Isentrope Abström-Machzahl $Ma_{is,exit}$	0.086	[-]
Reynoldszahl $Re_l$	560000	[-]
Eintrittswinkel der Strömung $\alpha$	0	[°]
Freistromturbulenzgrad $Tu$	3.8 %	[-]
Dynamische Viskosität $\mu$	1.8e-5	[Pa/s]

Tabelle 7.2: Randbedingungen der N3-60 Kaskade (Elsner, 2009)

Es wurden sehr verschiedene Netze in Bezug auf die Anzahl und die Verdichtung der Zellen an gewissen Stellen, wie an der Vorder-, Hinterkante und im Bereich der Transition, erzeugt. Es hat sich herausgestellt, dass dieses Netz bei allen Berechnungen (SA, SST und  $\gamma - Re_{\theta}$ ) am besten die Konvergenz erreichen konnte.

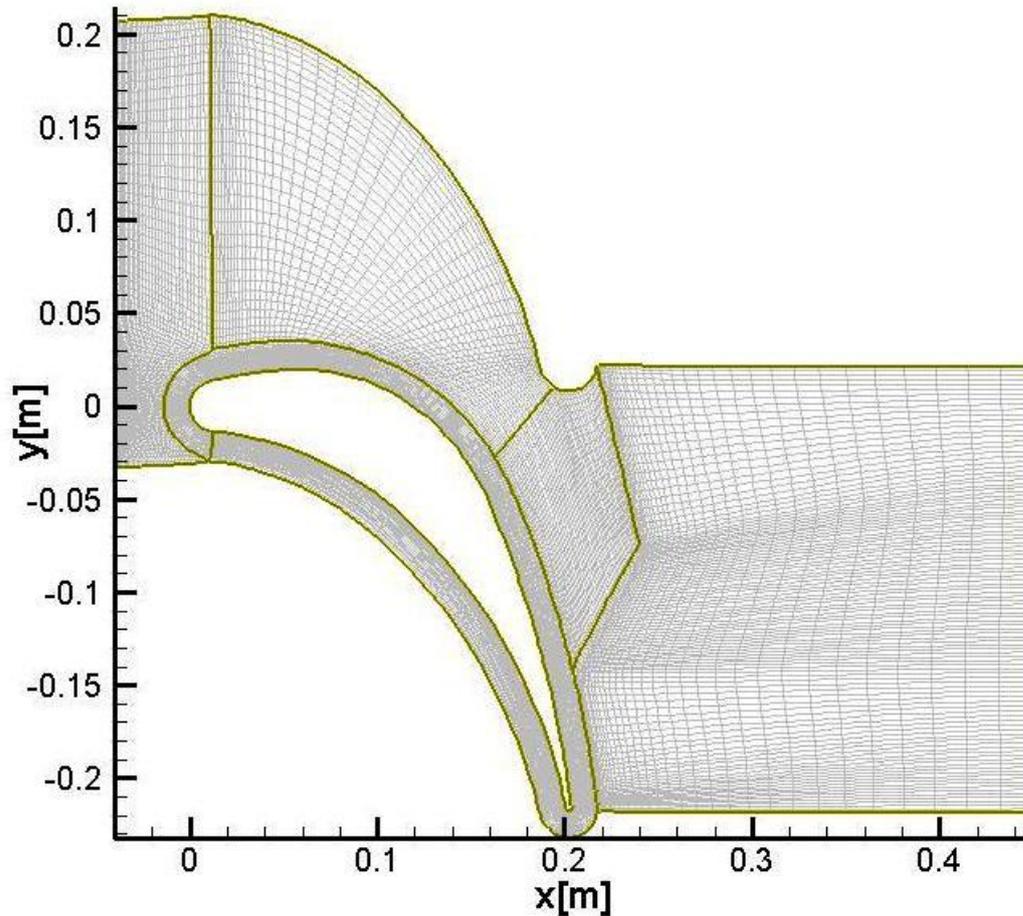


Abbildung 7.2: Das 2-D Rechennetz von N3-60 generiert in AiGrid3D

Die gewählten Parameter für die Berechnung der N3-60 Testfälle im LINARS sind in Tabelle 7.3 und 7.4 aufgelistet. Diese Parameter basieren auf die Vorgaben von Elsner (2009), in denen er ein paar Änderungen hat, um besser an die Messergebnisse der Druckverteilung heranzukommen. Somit wurde die Geschwindigkeit am Eintrittsrand von  $U_{in} = 13.5 \text{ m/s}$  auf  $U_{in} = 8.5 \text{ m/s}$  gesenkt und der Eintrittswinkel am Eintrittsrand von  $\alpha_0 = 0^\circ$  auf  $\alpha_0 = 5^\circ$  erhöht.

Dieser Fall wurde kompressibel mit einer konstanten dynamischen Viskosität gerechnet (nicht mit Sutherland law), die von Elsner (2009) vorgegeben wurde (siehe Tabelle 7.2). Der Freistromturbulenzgrad beträgt  $Tu = 3.8\%$ , was auf Bypass-Transition hindeutet. Der turbulente Längenmaßstab wurde mit  $l_m = 0.005 \text{ m}$  gewählt; das entspricht etwa 2% der Sehnenlänge  $l$ .

Eintritt	Austritt
$p_{tot,in} = 101865 \text{ [Pa]}$	$p_{stat,exit} = 101339.375 \text{ [Pa]}$
$T_{tot,in} = 301 \text{ [K]}$	
Eintrittswinkel $\alpha = 5 \text{ [}^\circ\text{]}$	
Global	
$\mu = 1.8e-5 \text{ [Pa/s]}$	

Tabelle 7.3: N3-60 LINARS Randbedingungen

Eintritt	
$Tu = 3.8\%$	$l_m = 0.005 \text{ [m]}$

Tabelle 7.4: N3-60 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen

Zuerst wurde mit dem Spalart-Allmaras Turbulenzmodell eine Multigrid-Berechnung mit dem Multigridlevel 3 durchgeführt, was zu einer sehr raschen Konvergenz geführt hat. Nach etwa 6000 Iterationen war die Konvergenz erreicht. Danach wurde mit dem Menter SST-Turbulenzmodell (ohne Multigrid) weitergerechnet. Nach ungefähr 45000 weiteren Iterationen wurde für dieses Modell die Konvergenz erreicht (siehe Abbildung 7.3). Ausgehend von der Menter SST-Berechnung wurde dann mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell mit den drei verschiedenen Korrelationen gerechnet. Konvergenz wurde nur von der Malan- und der Langtry-Menter-Korrelation erreicht, wobei die Malan-Korrelation nach ungefähr 40000 Iterationen (siehe Abbildung 7.5) und die Langtry-Menter-Korrelation nach zirka 60000 Iterationen (siehe Abbildung 7.4) auskonvergiert hat. Die Kelterer-Korrelation hingegen (siehe Abbildung 7.6) konnte nach mehr als 60000 Iterationen nur eine Konvergenz erreichen, die bei ungefähr 15 lag.

In Abbildungen 7.3 - 7.6 sind die Residuen der Berechnungen mit dem Menter SST-Turbulenzmodell und dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell (Langtry-Menter-, Malan- und

Kelterer-Korrelation) dargestellt. Die Residuen zeigen für jeden der fünf Netzblöcke das Konvergenzverhalten der Erhaltungsgleichungen sowie der zusätzlichen Gleichungen für das Turbulenz- und Transitionsmodell. Daher sind es in Abbildung 7.3 insgesamt 35 Datenreihen (5 Blöcke \* 7 Datenreihen = 35). Beim  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell (siehe Abbildungen 7.4 – 7.6) kommen zwei zusätzliche Modellvariablen noch dazu (Intermittenzfaktor  $\gamma$  und Impulsverlustdicken-Reynoldszahl  $Re_\theta$ ) und sind dann insgesamt 45 Datenreihen (5 Blöcke \* 9 Datenreihen = 45).

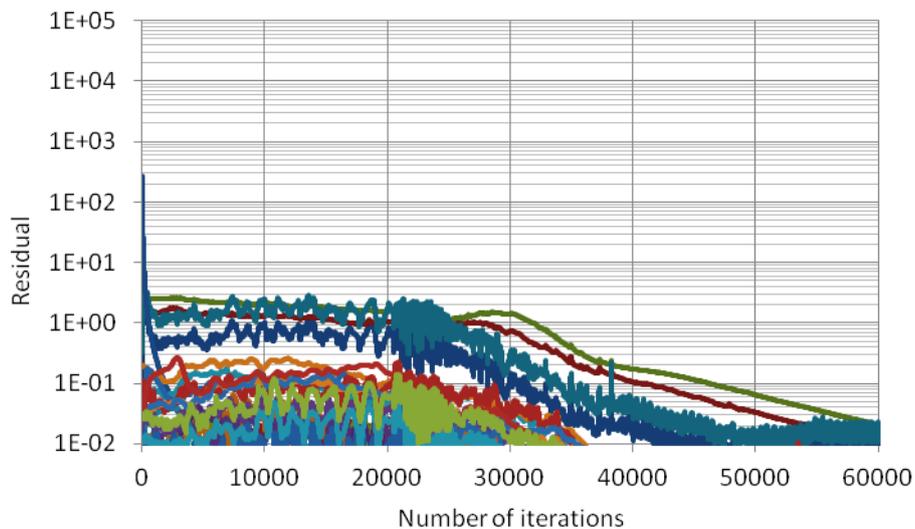


Abbildung 7.3: Residuen mit dem Menter SST-Turbulenzmodell, ohne Transition (N3-60)

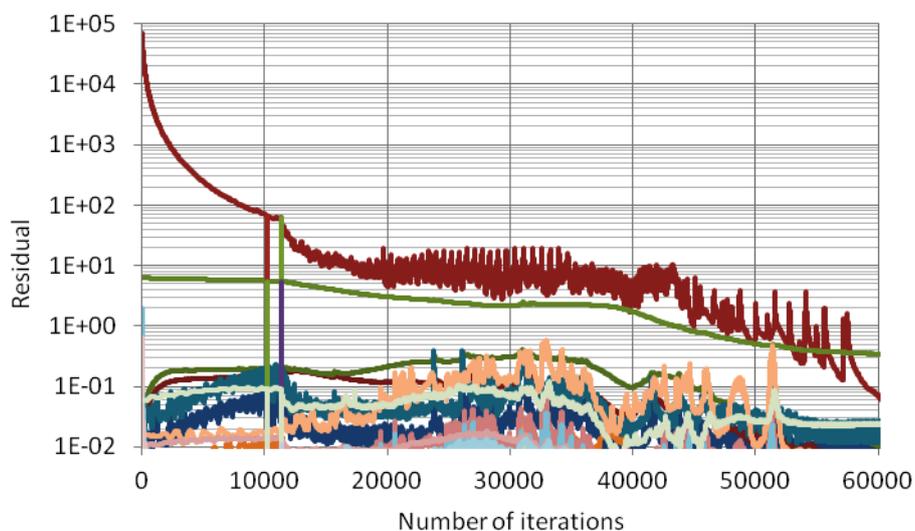


Abbildung 7.4: Residuen mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell, Langtry-Menter-Korrelation (N3-60)

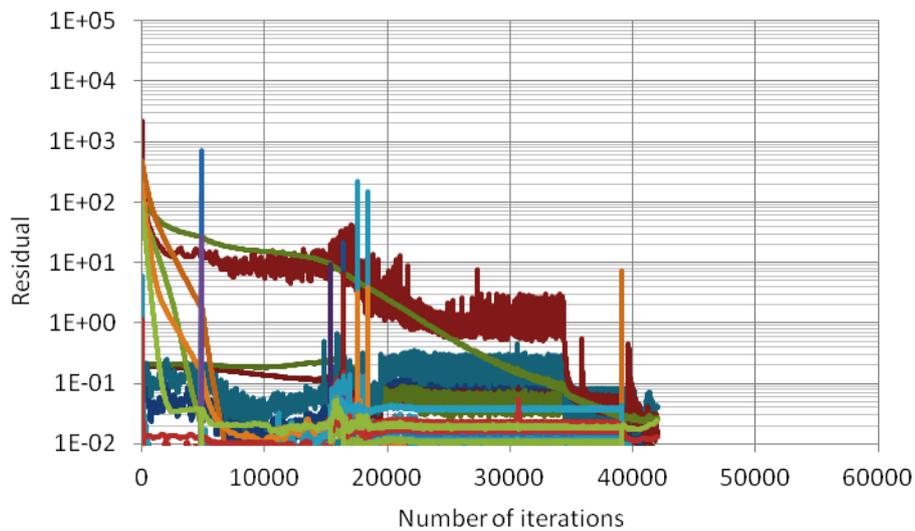


Abbildung 7.5: Residuen mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell, Malan-Korrelation (N3-60)

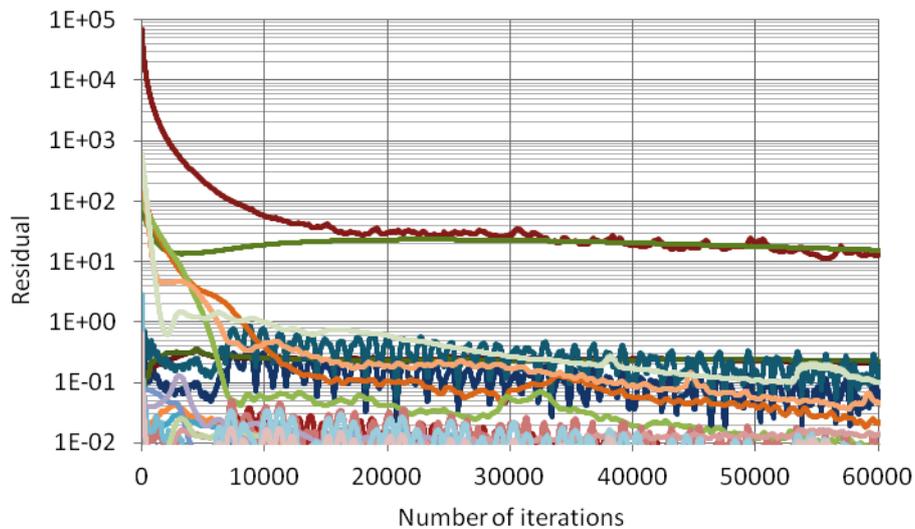


Abbildung 7.6: Residuen mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell, Kelterer-Korrelation (N3-60)

Zur Auswertung der drei Korrelationen wurden, wie schon vorhin erwähnt, die von Elsner (2009) zur Verfügung gestellten Messdaten herangezogen (Druckbeiwert-, Wandschubspannungs-, Formfaktor- und Intermittenzverteilung). Der Druckbeiwert  $c_p$  ist laut Pietrowski et al. (2008) in Gleichung (7.1) definiert:

$$c_p = \frac{p_{tot,in} - p}{p_{tot,in} - p_{stat,exit}} \quad (7.1)$$

$p_{tot,in}$  bezeichnet den totalen Druck am Eintritt,  $p$  den lokalen statischen Druck an der Schaufel und  $p_{stat,exit}$  den statischen Druck am Austritt. Die Wandschubspannung  $\tau_w$ , der Formfaktor  $H_{12}$  und der Intermittenzfaktor  $\gamma$  wurden vorhin im Kapitel 4.3 detailliert erläutert. Die Definition der Wandschubspannung ist in Gleichung (4.12) und die des Formfaktors in Gleichung (4.10) nachzuschlagen.

Der Vergleich der Druckbeiwertverteilung um das Profil N3-60 zwischen den Messdaten und den Rechenergebnissen für die verschiedenen Korrelationen ist in Abbildung 7.7 dargestellt. An der Saugseite stromabwärts von der Vorderkante steigt die Beschleunigung der Strömung bis zum Druckminimum  $s/s_{max} \approx 0.5$  rasant an, wobei bei  $s/s_{max} \approx 0.05$  eine kurze Verzögerung zu beobachten ist, die wegen der Krümmungsänderung des Schaufelprofils an der Stelle, an der die rundliche Form der Vorderkante in den weiteren Teil des Profils übergeht, verursacht wird. Weiter stromabwärts des Druckminimums ist eine moderate Verzögerung der Beschleunigung zu beobachten. Auf der Druckseite ist eine nahezu konstante Strömungsgeschwindigkeit mit einer graduellen Beschleunigung in Richtung Hinterkante zu sehen.

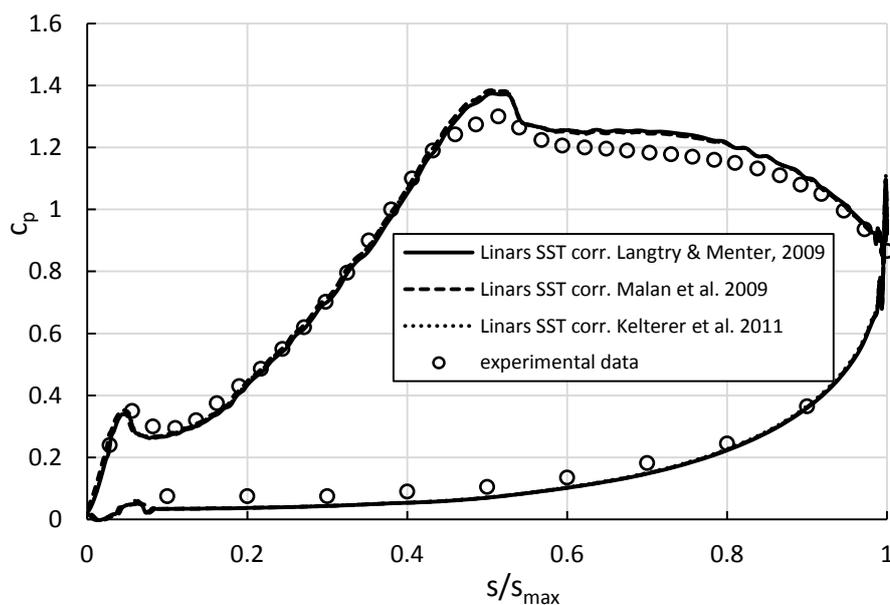


Abbildung 7.7: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen und den Messergebnissen

Die numerischen Berechnungen zeigen, dass alle drei Korrelationen einen fast identen Verlauf haben und an manchen Stellen von den Messdaten abweichen. An der Saugseite, stromabwärts von der Vorderkante bis kurz vor dem Druckminimum, sind alle Korrelationen fast ident mit den Messdaten, wobei eine geringe Abweichung im Bereich der kurzen Verzögerung bei  $s/s_{max} \approx 0.05$  zu beobachten ist. Weiter stromabwärts liefern die Korrelationen höhere  $c_p$ -Werte im Vergleich zu den Messdaten bis kurz vor der Hinterkante. Die Stelle des Druckminimums bei  $s/s_{max} \approx 0.5$  wird von allen drei Korrelationen ziemlich genau identifiziert. Nach dem Druckminimum bis zur Hinterkante weisen die  $c_p$ -Verläufe der drei Korrelationen einen ähnlichen Verlauf wie die Messdaten auf. Auf der Druckseite, weisen alle drei Korrelationen niedrigere  $c_p$ -Werte im Vergleich zu den Messdaten auf.

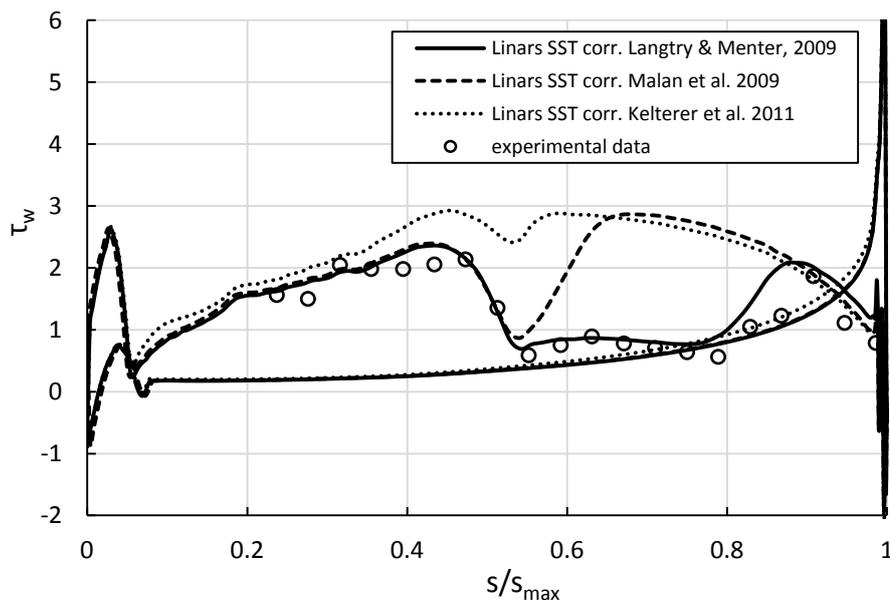


Abbildung 7.8: Vergleich der Wandschubspannungsverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen und den Messdaten

In Abbildung 7.8 sind die Wandschubspannungsverläufe der drei Korrelationen und Messdaten an der Saugseite dargestellt. Die Messdaten weisen auf eine Bypass-Transition hin. An der Saugseite bei  $s/s_{max} \approx 0.48$  wird die laminare Strömung in der Grenzschicht instabil. Weiter stromabwärts bleibt die Wandschubspannung bis zum Transitionsbeginn  $s/s_{max} \approx 0.8$  ungefähr konstant, wobei eine geringe Schwankung zu beobachten ist. Danach ist

eine rasante Steigung bis zu  $s/s_{max} \approx 0.9$  zu sehen, wo die Transition endet und die Strömung vollturbulent wird. Die numerischen Berechnungen zeigen, dass alle Korrelationen eine Bypass-Transition identifizieren konnten. Die einzige Korrelation, die in der Lage war, den Messdaten zu folgen ist die Langtry-Menter-Korrelation. Der Transitionsbeginn ( $s/s_{max} \approx 0.8$ ) und dessen Ende ( $s/s_{max} \approx 0.9$ ) wurden ziemlich gut erfasst. Die Malan-Korrelation stimmt bis  $s/s_{max} \approx 0.55$  mit den Messdaten und der Langtry-Menter-Korrelation überein, aber berechnet den Beginn bei  $s/s_{max} \approx 0.55$  und das Ende der Transition bei  $s/s_{max} \approx 0.7$  zu früh. Die Kelterer-Korrelation hingegen weicht schon bei  $s/s_{max} \approx 0.3$  von den Messdaten ab und das Transitionsende wird noch früher als bei der Malan-Korrelation bei  $s/s_{max} \approx 0.6$  vorhergesagt. Auf der Druckseite zeigen alle Korrelationen einen sehr ähnlichen Verlauf, wobei eine kurze Ablöseblase bei  $s/s_{max} \approx 0.06$  zu beobachten ist.

Die Formfaktor- und die Intermittenzverteilungen sind in Abbildung 7.9 und 7.10 dargestellt, wobei nur die Saugseite gezeigt wird. Nach dem Maximum in der Nähe der Vorderkante sollte der Formfaktor einen eher geringen Wert wegen der Beschleunigung der Strömung annehmen (Pietrowski et al., 2008). Weiter stromabwärts soll ein Anstieg des Formfaktors nach dem Druckminimum bei  $s/s_{max} \approx 0.5$  deutlich werden, der eine Tendenz zu einer Ablösung zeigt. Die wichtigste Region ist der hintere Teil des Profils, wo die Entwicklung der Grenzschicht die Höhe der Verluste bestimmt.

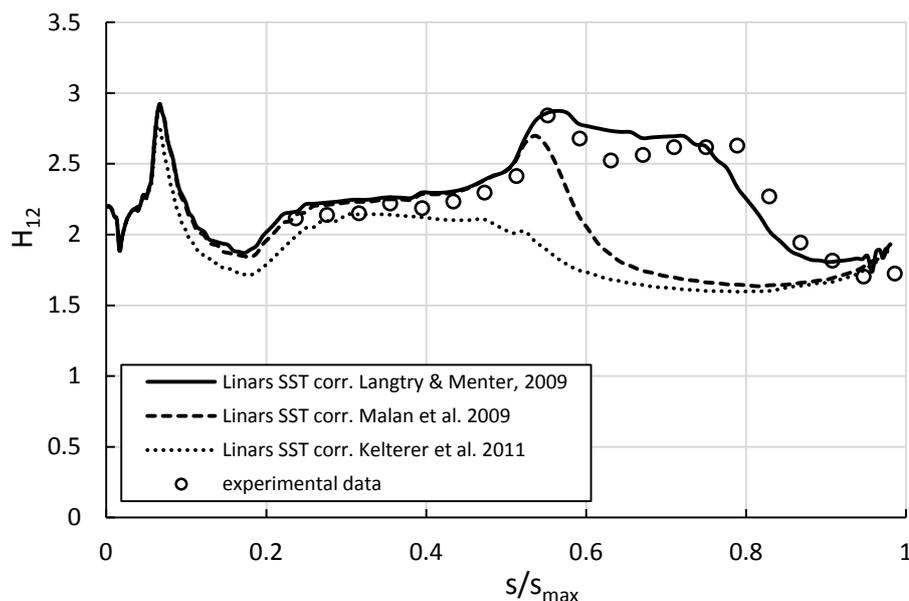


Abbildung 7.9: Vergleich der Formfaktorverteilung von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite und den Messdaten

Die numerischen Berechnungen haben gezeigt (siehe Abbildung 7.9), dass im gesamten Gebiet nur die Langtry-Menter-Korrelation in der Lage war, den Messdaten zu folgen. Alle drei Korrelationen konnten die kurze Verzögerung nahe der Vorderkante identifizieren. Weiter stromabwärts nimmt die Kelterer-Korrelation niedrigere Werte im Vergleich zu den Messdaten. Die Malan-Korrelation konnte bis zum Druckminimum den Messdaten folgen. Im wichtigsten Bereich, also am hinteren Teil des Profils, konnte nur die Langtry-Menter-Korrelation einen Verlauf ähnlich zu den Messdaten liefern.

Die Intermittenzwerte der numerischen Berechnungen wurden von der Wand aus gesehen bei Linie  $j = 14$  erhoben. In Abbildung 7.10 sieht man dass der Intermittenzverlauf der Korrelationen von den Messdaten deutlich abweicht. Bei der Langtry-Menter-Korrelation tritt der Anstieg des Intermittenzfaktors erst sehr spät ein und verläuft steiler, wobei das Ende der Transition mit den Messdaten übereinstimmt. Die Malan-Korrelation identifiziert zwar annähernd den Transitionsbeginn, verläuft aber wiederum steiler, was zu einem zu frühen Transitionsende führt. Die Kelterer-Korrelation hingegen weist auf einen noch früheren Transitionsbeginn hin und ist auch steiler, was zu einem noch früheren Transitionsende führt.

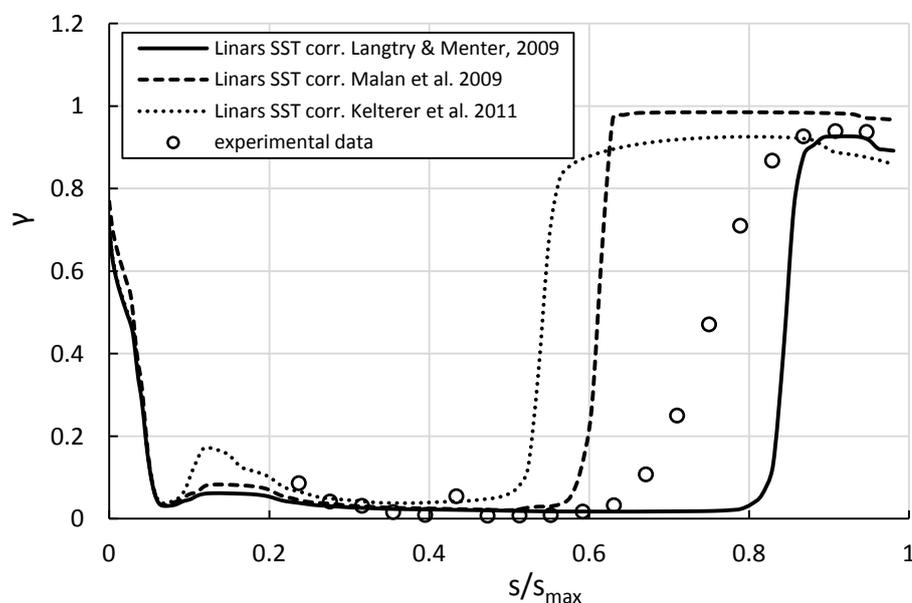


Abbildung 7.10: Vergleich der Intermittenzverteilung nahe Wand von N3-60 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite

Die Abweichungen der  $\gamma$ -Berechnungen werden in Pietrowski et al. (2008) so begründet, dass die Intermittenz, die in der Modellierung verwendet wird, eine Reproduktion der Intermittenzentwicklung anstrebt, die früher aus der Entwicklung der globalen Größen (Reibungsbeiwert und Formfaktor) abgeleitet worden ist. Bei den modernen Messtechniken wird der Intermittenzfaktor direkt aus der Frequenzanalyse eines Hitzdrahtsignals in der Strömung bestimmt. Es wurde festgestellt dass der Anstieg der Intermittenz vor der Änderung der allgemeinen Strömungseigenschaften beginnt, der durch den Anstieg der Wandreibung und den Abfall des Formfaktors erkennbar wird.

## 7.2 VKI LS59 Kaskade

VKI LS59 ist eine Laufschaufel (Rotor) und wurde am „von Karman Institute for Fluid Dynamics“ hauptsächlich für Kühlungsversuche entworfen. Die Profildaten (siehe Abbildung 7.11) stammen aus der Veröffentlichung im „Journal of Engineering for Gas Turbines and Power“ von Kiock et al. (1986). Die experimentellen Daten für die Machzahlverteilungen wurden von Sieverding (1973) entnommen. Weiters wurden für die Testfälle  $Ma_{is,exit} = 0.62$  und  $Ma_{is,exit} = 0.75$ , die am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik an der Technischen Universität Graz durchgeführten Experimente (Mayrhofer, 2001) herangezogen. Beim Testfall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  wurden die Daten von Mayrhofer (1996) verwendet.

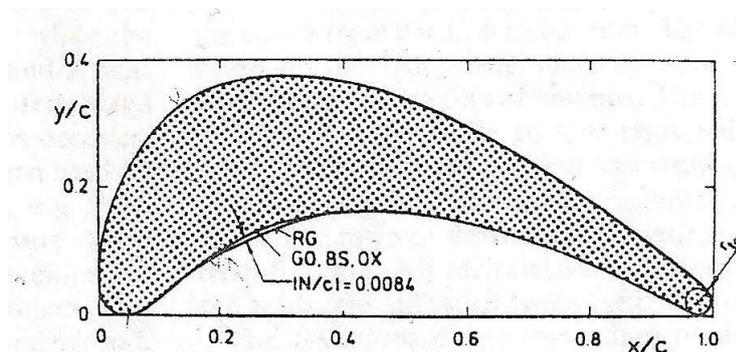


Abbildung 7.11: VKI LS59 Profil (Kiock et al., 1986)

Die Geometriedaten und Randbedingungen der VKI LS59 Kaskade sind in Tabelle 7.5 aufgelistet (Woisetschläger et al., 2002).

Schaufelanzahl	7	[-]
Sehnenlänge $l$	58	[mm]
Axiale Sehnenlänge $l_{ax}$	48.46	[mm]
Schaufelhöhe $h$	100	[mm]
Schaufelteilung $t$	41.18	[mm]
Eintrittswinkel der Strömung $\alpha$	30	[°]
Freistromturbulenzgrad $Tu$	2%	[-]

Tabelle 7.5: Geometriedaten und Randbedingungen für VKI LS59 Kaskade (Woisetschläger et al., 2002)

Das 2D-Netz (Quasi3D) für die VKI LS59-Kaskade wurde mit AiGrid3D generiert und besteht wie beim N3-60 Testfall aus einem Eintrittsblock (H-Block), einem O-Block um die Schaufel, einem Kanalblock (H-Block), einem Kanal-Austrittsblock (H-Block) und einem Austrittsblock (H-Block) mit insgesamt 62490 Zellen. Die Verdichtung der Zellen zur Wand wurde so gewählt, dass überall in der ersten Zelle ein dimensionsloser Wandabstand von  $y^+ < 1$  eingehalten werden konnte. Für die Glättung des Netzes (Relaxationparameter) wurde ein Wert von 100 Iterationen gewählt. Das endgültige Netz ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Es wurden auch bei VKI LS59 sehr verschiedene Netze in Bezug auf die Anzahl und die Verdichtung der Zellen an gewissen Stellen wie z.B. an der Vorder-, Hinterkante und im Bereich der Transition, erzeugt. Dabei konnte nur dieses Netz bei allen Berechnungen (SA, SST und  $\gamma - Re_\theta$ ) am besten die Konvergenz erreichen.

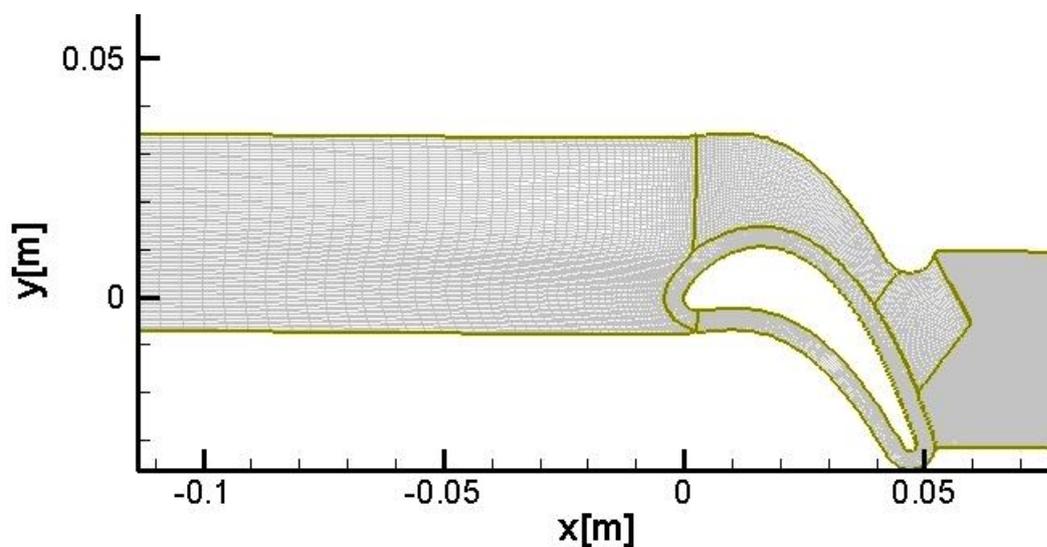


Abbildung 7.12: 2-D Rechenetz von VKI LS59 generiert in AiGrid3D

Die Berechnungen im LINARS wurden für drei verschiedene Fälle mit unterschiedlicher isentroper Abström-Machzahl und Reynoldszahl durchgeführt:

- $Ma_{is,exit} = 0.62$        $Re_l = 808000$
- $Ma_{is,exit} = 0.75$        $Re_l = 1080000$
- $Ma_{is,exit} = 1.21$        $Re_l = 695000$

Die gewählten Parameter für die Berechnung der einzelnen Testfälle mit LINARS sind in Tabelle 7.6 und 7.7 aufgelistet, wobei die turbulenten Randbedingungen in allen drei Fällen dieselben sind. Es wurde auch in diesem Fall eine kompressible Berechnung durchgeführt. Die dynamische Viskosität wurde in den drei Fällen über das „Sutherland Law“ berechnet.

VKI LS59 LINARS Randbedingungen	$Ma_{is,exit}$		
	0.62	0.75	1.21
$p_{tot,in}$	126649 [Pa]	149488 [Pa]	100000 [Pa]
$p_{stat,exit}$	96700 [Pa]	101500 [Pa]	40700 [Pa]
$T_{tot,in}$	305.13 [K]	307.2 [K]	293 [K]
Eintrittswinkel $\alpha$	30 [°]	30 [°]	30 [°]

Tabelle 7.6: VKI LS59 LINARS Randbedingungen

Eintritt	
$Tu = 2\%$	$l_m = 0.001 [m]$

Tabelle 7.7: VKI LS59 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen

### Testfall VKI LS59 mit $Ma_{is,exit} = 0.62$

Zuerst wurde wie beim vorigen Testfall mit dem Spalart-Allmaras Turbulenzmodell berechnet. Nach etwa 10000 Iterationen war die Konvergenz erreicht. Danach wurde mit dem Menter SST-Turbulenzmodell weitergerechnet. Nach ungefähr 30000 weiteren Iterationen wurde für dieses Modell die Konvergenz erreicht. Ausgehend von der Menter SST-Berechnung wurde dann mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell mit drei verschiedenen Korrelationen gerechnet. Die Kelterer-Korrelation konnte mit ungefähr 25000 Iterationen, die

Malan-Korrelation mit etwa 30000 Iterationen und die Langtry-Menter-Korrelation hingegen mit ca. 25000 Iterationen die Konvergenz erreichen.

Zur Auswertung des Falls mit  $Ma_{is,exit} = 0.62$  wurde die in Sieverding (1973) veröffentlichte Machzahlverteilung um das Profil herangezogen. Alle Korrelationen zeigen einen fast identischen Verlauf und weichen nur an manchen Stellen von den Messwerten ab (siehe Abbildung 7.13). Um die Unterschiede zwischen den Korrelationen und den Messdaten zu verdeutlichen, wurde auf der Saugseite der Bereich  $0.3 < x/l < 1$  vergrößert dargestellt (Abbildung 7.14). Auf der Saugseite kurz nach der Vorderkante weisen die numerischen Berechnungen niedrigere Machzahlen auf. Ab  $x/l = 0.3$  verläuft die Kurve steiler im Vergleich zu den Messdaten. Die maximale Machzahl wird bei  $x/l \approx 0.5$  identifiziert, wobei Experimente auf dieses Maximum bei  $x/l \approx 0.55$  zeigen. Weiter stromabwärts sieht man relativ konstanten Druck bis  $x/l \approx 0.7$ . Erst dann erfolgt, versetzt zu den Messungen, der Abfall der Machzahl. Auf der Druckseite hingegen stimmen alle drei Korrelationen mit den Messdaten gut überein, wobei sie sich im Bereich  $0.1 < x/l < 0.4$  durch geringfügig niedrigere Machzahlen von den experimentellen Daten unterscheiden.

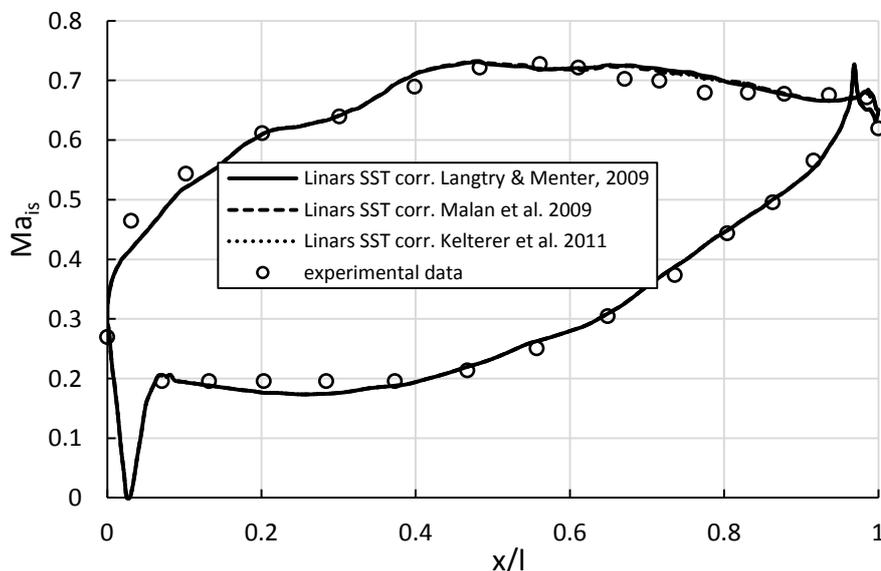


Abbildung 7.13: Vergleich der Machzahlverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

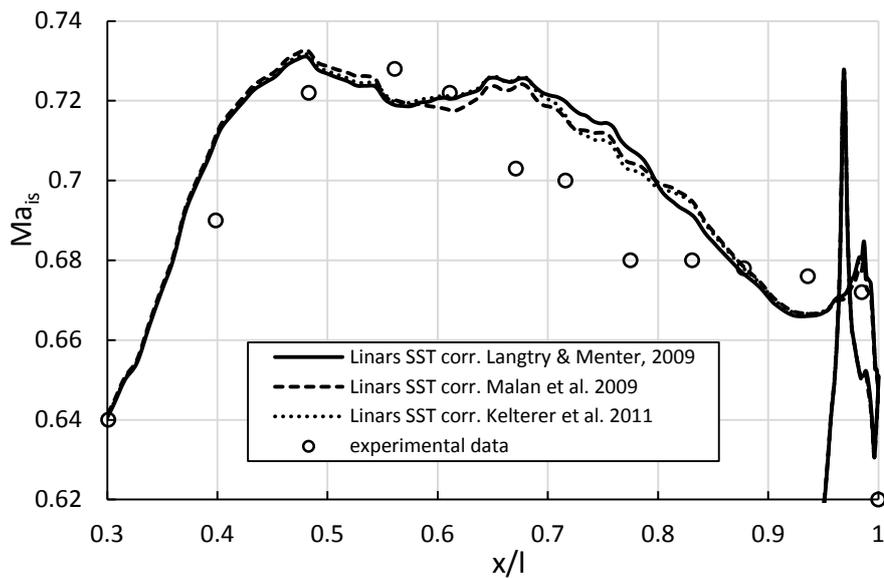


Abbildung 7.14: Vergleich der Machzahlverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$  (im Bereich der Saugseite vergrößert)

Experimente zeigen (Mayrhofer, 2001), dass in diesem Fall in keiner Zone eindeutige Hinweise auf Transition festzustellen waren. Vielmehr ist es so, dass die Turbulenz der Strömung recht stetig von der Profilnase aus, ansteigt.

Im Weiteren werden die Grenzschichtgrößen, wie der örtliche Reibungsbeiwert  $c_f$ , der Formfaktor  $H_{12}$ , der Intermittenzfaktor  $\gamma$  und der Beschleunigungsparameter  $K$  betrachtet. Obwohl in diesem Testfall auf keine eindeutige Transition hingewiesen wird, deuten die numerischen Berechnungen auf eine Bypass-Transition hin.

In Abbildung 7.15 sind die Reibungsbeiwertverläufe der drei Korrelationen dargestellt. Auf der Saugseite stromabwärts der Vorderkante ist zu sehen, dass bei allen Korrelationen die Werte bis  $x/l \approx 0.55$  schwanken. Weiter stromabwärts unterscheiden sich die Korrelationen voneinander. Die Malan-Korrelation deutet daraufhin, dass die Transition bei  $x/l \approx 0.55$  beginnt und bei  $x/l \approx 0.65$  endet. Die Kelterer-Korrelation identifiziert den Transitionsbeginn bei  $x/l \approx 0.7$  und dessen Ende bei  $x/l \approx 0.8$ , verspätet im Vergleich zur Malan-Korrelation. Die längste Verzögerung ist bei der Langtry-Menter-Korrelation zu beobachten, wobei der Transitionsbeginn bei  $x/l \approx 0.75$  und dessen Ende bei  $x/l \approx 0.85$  liegen. Auf der Druckseite zeigen alle Korrelationen einen identischen Verlauf, wobei eine kurze Ablöseblase in der Nähe der Vorderkante gefolgt von einer eventuellen Relaminarisierung bei  $x/l \approx 0.3$  zu beobachten ist (siehe Abbildung 7.19).

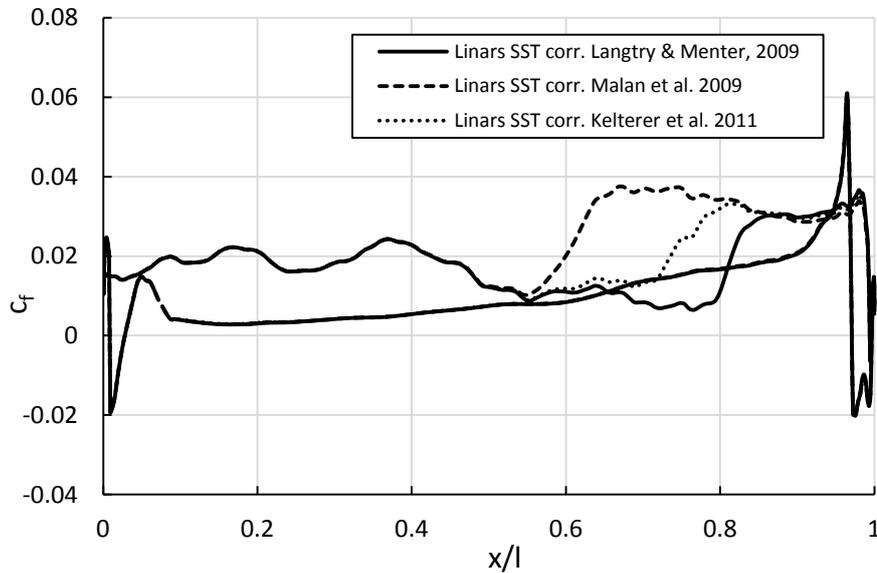


Abbildung 7.15: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

Diese Aussagen wurden auch durch die Formfaktor- Intermittenz- und Beschleunigungsparameterverteilung für die jeweiligen Korrelationen bestätigt (siehe Abbildungen 7.16 - 7.19).

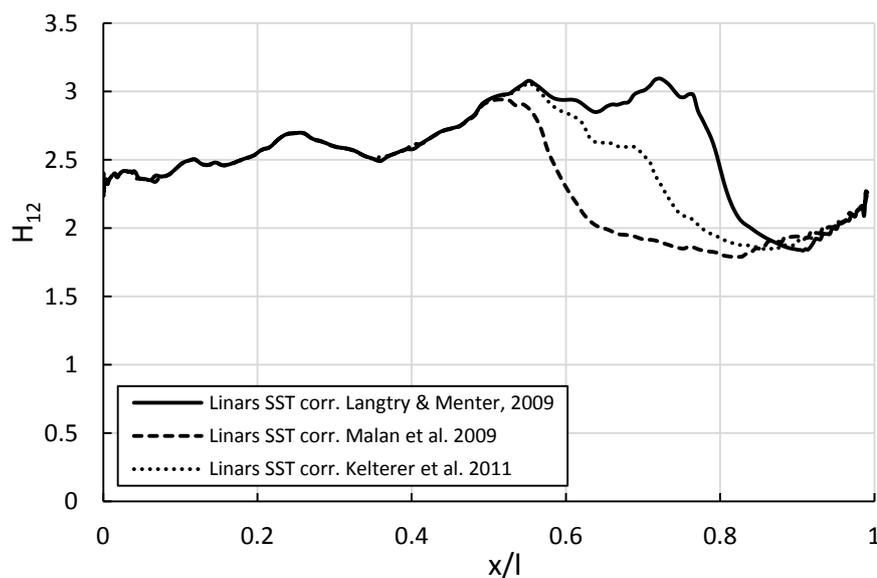


Abbildung 7.16: Vergleich der Formfaktorverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

Die Intermittenzwerte der numerischen Berechnungen wurden von der Wand aus gesehen bei Linie  $j = 16$  erhoben.

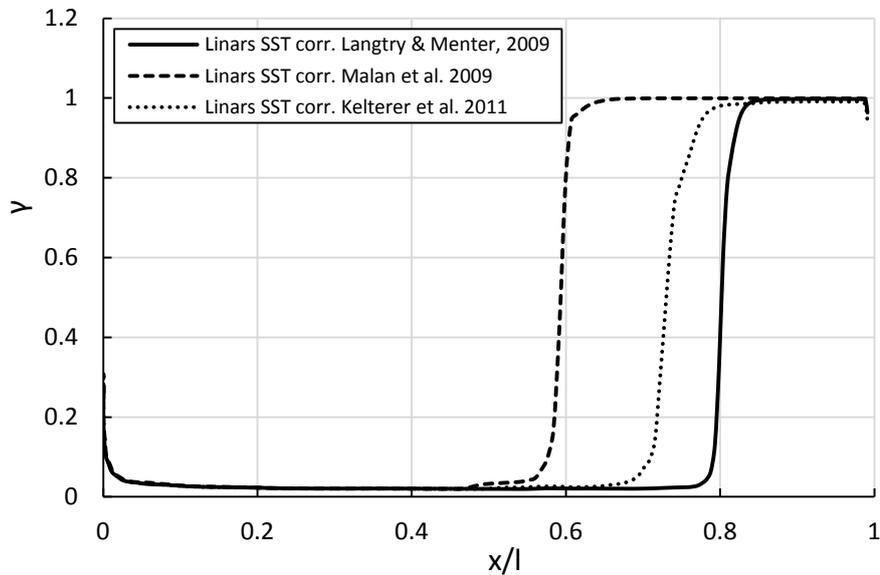


Abbildung 7.17: Vergleich der Intermittenzverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

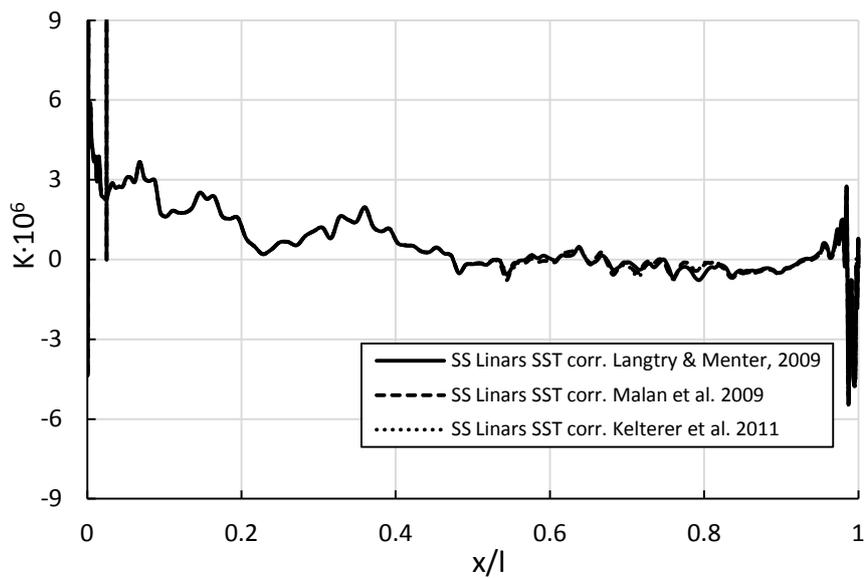


Abbildung 7.18: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

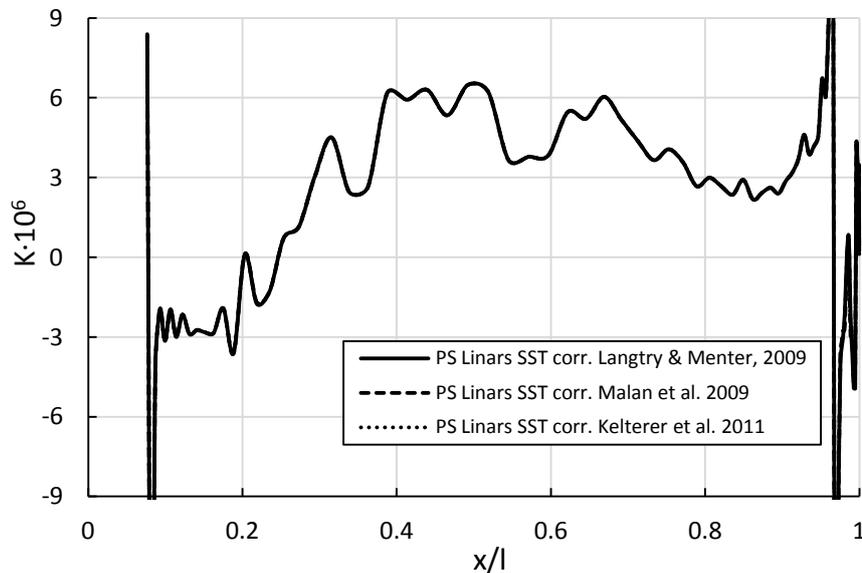


Abbildung 7.19: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung für VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.62$

In Abbildung 7.19 ist zu sehen, dass an der Druckseite der Beschleunigungsparameter  $K$  ab  $x/l \approx 0.3$  den Wert  $K = 3 \cdot 10^{-6}$  (bei  $K > 3 \cdot 10^{-6}$  geht man von einer Relaminarisierung aus) überschreitet. Da positive Werte von  $K$  auf eine Beschleunigung hinweisen, könnte es sich hier um eine Relaminarisierung handeln.

### Testfall VKI LS59 mit $Ma_{is,exit} = 0.75$

Die Berechnungen wurden wieder der Reihe nach mit dem Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell, mit dem Menter SST-Turbulenzmodell, gefolgt vom  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell in den drei verschiedenen Korrelationen durchgeführt. Die Spalart-Allmaras-Berechnung konnte mit 5000 Iterationen, die Menter SST mit weiteren 25000 Iterationen auskonvergieren. Bei den Berechnungen mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell konnte die Kelterer-Korrelation mit ungefähr 40000 Iterationen, die Malan-Korrelation mit etwa 30000 Iterationen und die Langtry-Menter-Korrelation hingegen mit zirka 45000 Iterationen die Konvergenz erreichen.

Zur Auswertung des Testfalls VKI LS59 mit  $Ma_{is,exit} = 0.75$  wurde ebenfalls die in Sieverding (1973) veröffentlichte Machzahlverteilung um das Profil herangezogen. Alle Korrelationen

zeigen einen fast identen Verlauf und weichen nur an manchen Stellen von den Messwerten ab (siehe Abbildung 7.20).

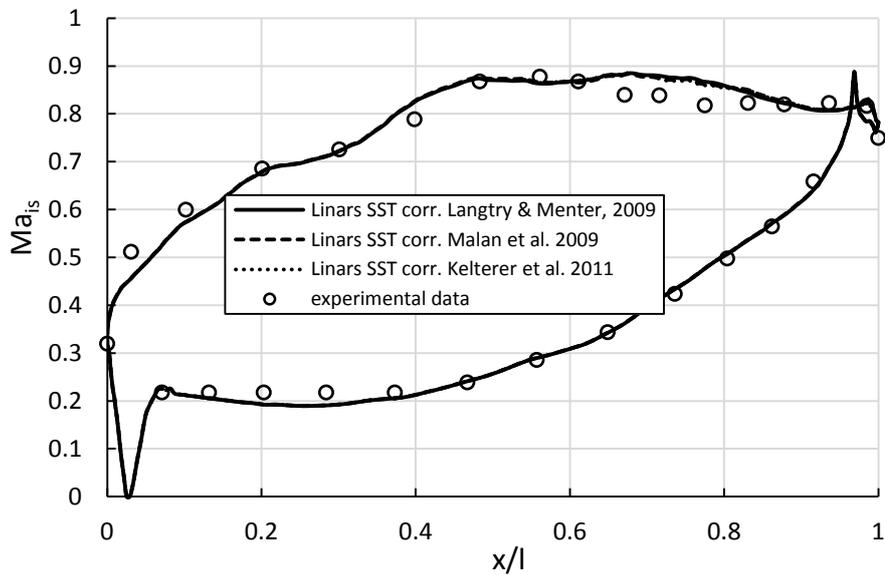


Abbildung 7.20: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

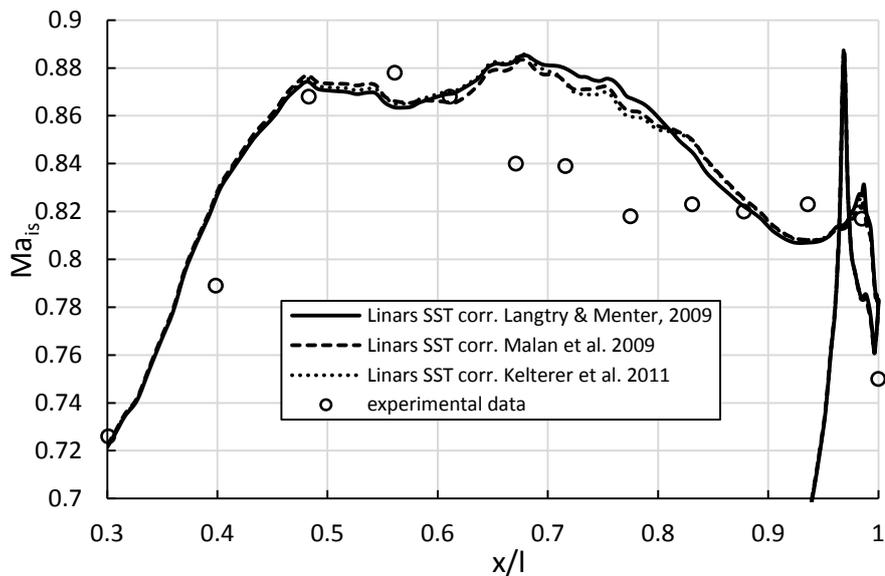


Abbildung 7.21: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$  entlang der Saugseite vergrößert

Um die Unterschiede zwischen den Korrelationen und den Messdaten zu verdeutlichen, wurde an der Saugseite, der Bereich  $0.3 < x/l < 1$  vergrößert dargestellt (Abbildung 7.21). Auf der Saugseite kurz nach der Vorderkante weisen die numerischen Berechnungen niedrigere Machzahlen auf. Ab  $x/l = 0.3$  verläuft die Kurve steiler im Vergleich zu den Messdaten. Die maximale Machzahl bei  $x/l \approx 0.7$  erreicht, wobei die Messdaten dieses Maximum bereits bei  $x/l \approx 0.55$  aufweisen. Danach fällt die Machzahl kontinuierlich zur Hinterkante ab. Auf der Druckseite hingegen stimmen alle drei Korrelationen mit den Messdaten gut überein, wobei im Bereich  $0.1 < x/l < 0.4$  die Werte etwas niedriger als die experimentellen Daten sind.

Weiters werden für diesen Fall die Dichtespektren und die Frequenzen der Dichtefluktuationen, die in Woitschläger et al. (2003) veröffentlicht wurden, für den Vergleich mit den Berechnungen herangezogen (siehe Abbildung 7.22 und 7.23). Ein Anstieg der Amplituden in allen Frequenzbereichen ( $x/l \approx 0.4$ , Position 1) deutet auf einen laminar-turbulenten Umschlag hin. Es ist dann ein Abfall erkennbar, der eine teilweise Relaminarisierung sein könnte, worauf dann an Position 2 ( $x/l \approx 0.65$ ) ein erneuter Umschlag auf vollturbulent auftritt. Auf der Druckseite sind die Fluktuationen auf einem sehr niedrigen Niveau bis knapp vor der Hinterkante, wo es dann bei  $x/l \approx 0.9$  zu einem Umschlag kommen dürfte.

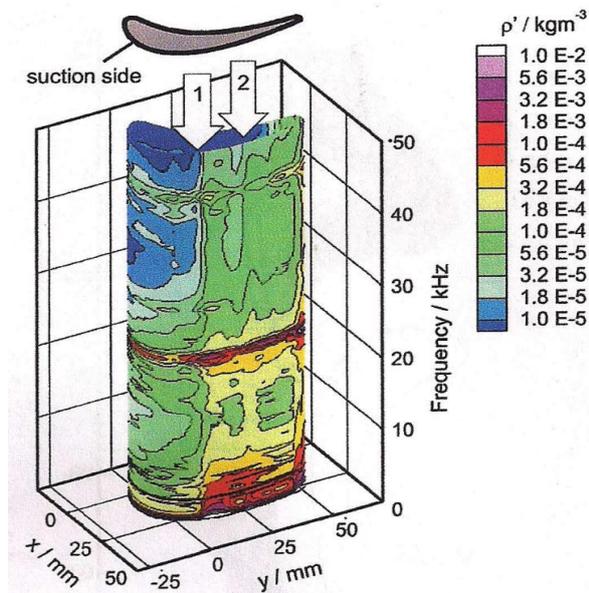


Abbildung 7.22: Frequenzspektrn der Dichtefluktuationen an der Saugseite des VKI LS59 mit  $Ma_{is,exit} = 0.77$  von Woitschläger et al. (2003).

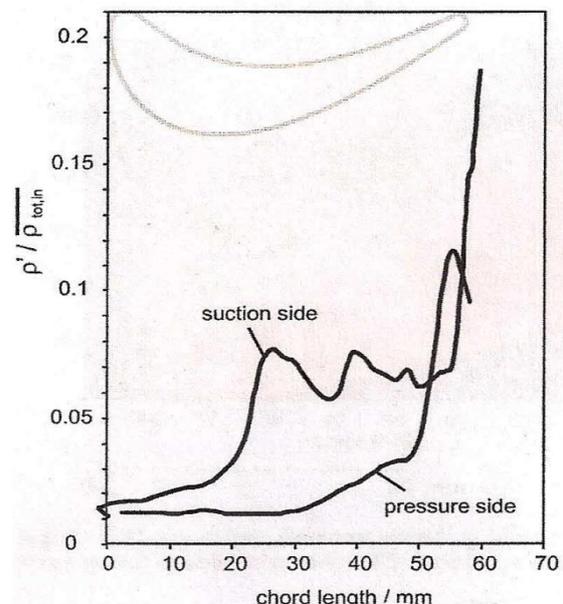


Abbildung 7.23: Größe der Dichtefluktuationen bei VKI LS59 mit  $Ma_{is,exit} = 0.77$  von Woitschläger et al. (2003).

Weiters wurde beobachtet (Woisetschläger et al. 2003), dass Druckwellen, die von der Druckseite der oberhalb liegenden Schaufel durch Hinterkanten-Wirbel ausgelöst wurden, die Grenzschicht an der Saugseite der unterhalb liegenden Schaufel beeinflussen. Als Ursache für die Änderungen in den Dichtefluktuationen an der Position 1 ( $x/l \approx 0.4$ ) wird die Interaktion zwischen der Grenzschicht und diesen Druckwellen angenommen.

In Abbildung 7.24 sind die berechneten Reibungsbeiwertverläufe der drei Korrelationen dargestellt:

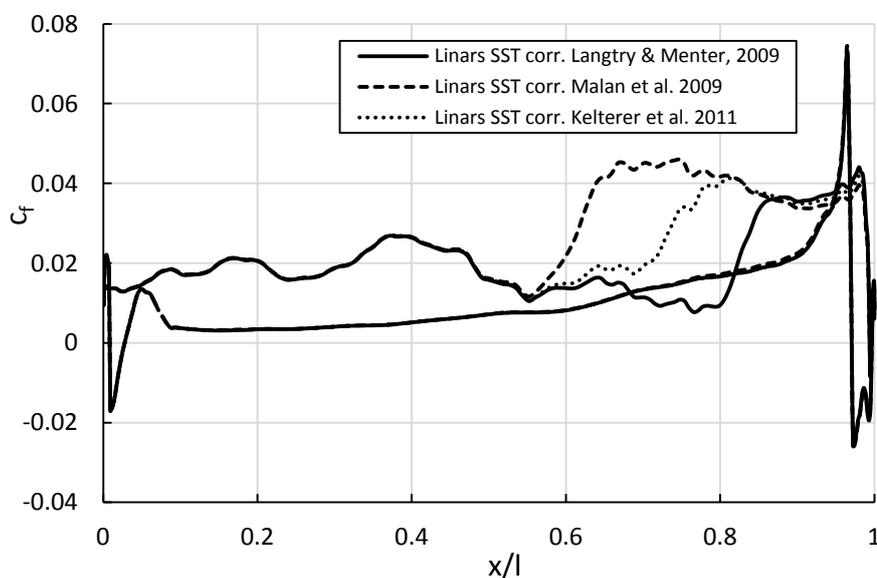


Abbildung 7.24: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

Auf der Saugseite ist zu sehen, dass alle Korrelationen bis  $x/l \approx 0.55$  einen identischen Verlauf aufweisen. Der Beginn der vorhin erwähnten teilweisen Relaminarisierung ab  $x/l \approx 0.4$  konnte von allen Korrelationen richtig erfasst werden. Dies verdeutlicht die Formfaktorverteilung (siehe Abbildung 7.25). Ab  $x/l \approx 0.4$  wird die Grenzschicht dünner was eher auf Relaminarisierung statt Transition hindeutet. Den erneuten Transitionsbeginn bei  $x/l \approx 0.65$  hingegen konnte nur die Kelterer-Korrelation richtig identifizieren (siehe Abbildung 7.24), wobei die Malan-Korrelation ihn früher bei  $x/l \approx 0.55$  und die Langtry-Menter-Korrelation verspätet bei  $x/l \approx 0.75$  vorhersagt. Auf der Druckseite zeigen alle Korrelationen einen identischen Verlauf, wobei eine kurze Ablöseblase in der Nähe der Vorderkante gefolgt von einer eventuellen Relaminarisierung bei  $x/l \approx 0.3$  zu beobachten ist (siehe Abbildung 7.28).

Diese Aussagen wurden auch durch die Formfaktor-, Intermittenzfaktor- und Beschleunigungsparameterverteilung für die jeweiligen Korrelationen bestätigt (siehe Abbildungen 7.25 - 7.28).

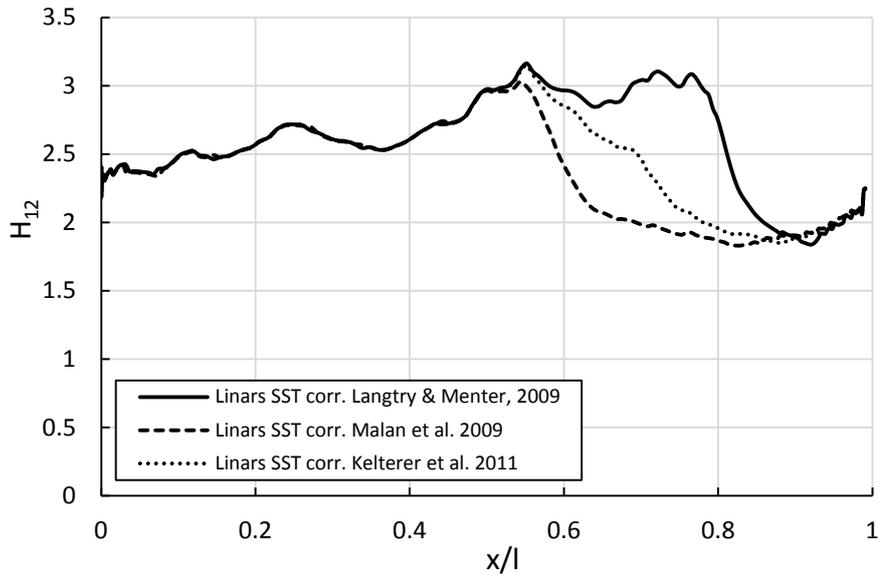


Abbildung 7.25: Vergleich der Formfaktorverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

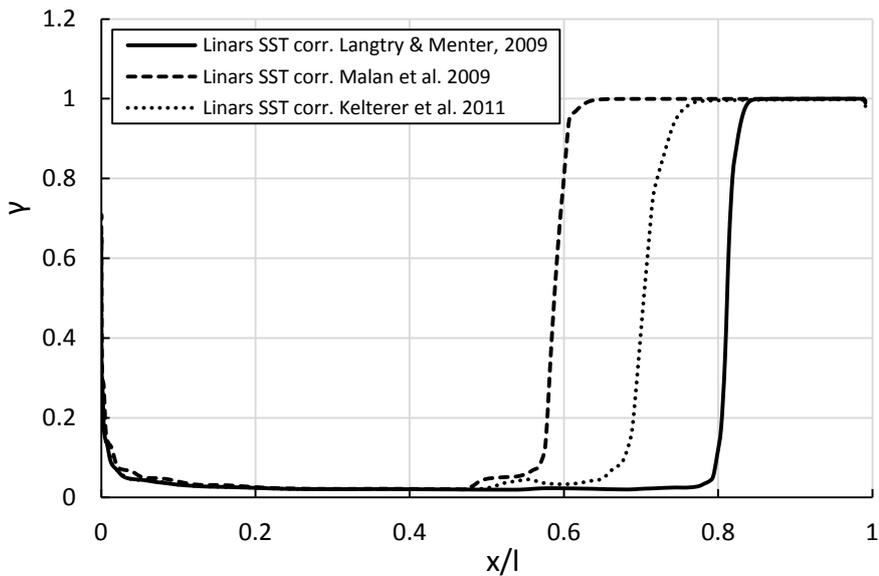


Abbildung 7.26: Vergleich der Intermittenzverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

Die Intermittenzwerte der numerischen Berechnungen wurden von der Wand aus gesehen bei Linie  $j = 16$  erhoben.

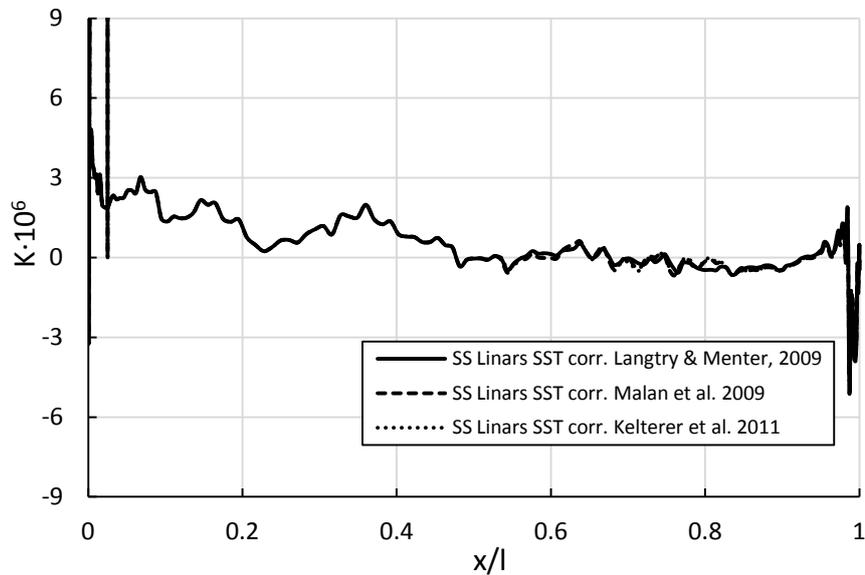


Abbildung 7.27: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

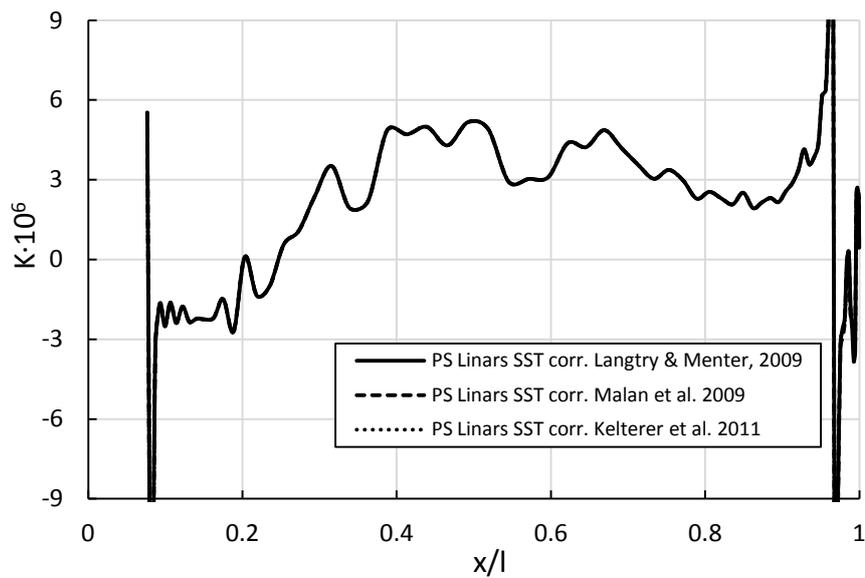


Abbildung 7.28: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$

Weiters ist in Abbildung 7.28 zu sehen, dass auch in diesem Fall an der Druckseite der Beschleunigungsparameter  $K$  ab  $x/l \approx 0.3$  den Wert  $K = 3 \cdot 10^{-6}$  überschreitet. Auch hier könnte es sich um eine Relaminarisierung handeln.

### Testfall VKI LS59 mit $Ma_{is,exit} = 1.21$

Bei diesem Testfall tritt im Gegensatz zu den anderen Testfällen (dort herrschen Unterschallströmungen) eine Überschallabströmung auf.

Das Spalart-Allmaras-Modell konnte mit 9000 Iterationen, Menters SST-Modell mit weiteren 25000 Iterationen auskonvergieren. Bei den Berechnungen mit dem  $\gamma - Re_{\theta}$ -Transitionsmodell konnte die Kelterer-Korrelation mit ungefähr 25000 Iterationen und die Langtry-Menter-Korrelation hingegen nach zirka 30000 Iterationen die Konvergenz erreichen. Die Malan-Korrelation konnte nach etwa 60000 Iterationen nur eine Konvergenz bei ungefähr 1.0 erreichen.

Zur Auswertung des Falls VKI LS59 mit  $Ma_{is,exit} = 1.21$  wurde ebenfalls die in Sieverding (1973) veröffentlichte Machzahlverteilung um das Profil herangezogen. In Abbildung 7.29 sind die berechneten Machzahlverläufe der drei Korrelationen dargestellt:

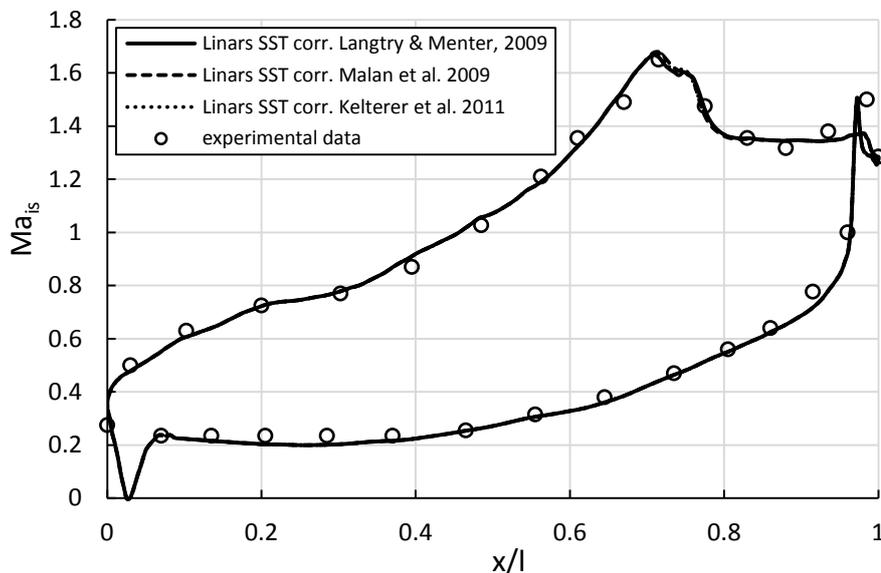


Abbildung 7.29: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

Es ist zu sehen, dass alle Korrelationen einen fast identischen Verlauf im Vergleich zu den Messdaten aufweisen, mit leichten Abweichungen kurz vor der Hinterkante an der Saugseite. Um die Unterschiede zwischen den Korrelationen und den Messdaten zu verdeutlichen, wurde auf der Saugseite der Bereich  $0.6 < x/l < 1$  vergrößert dargestellt (siehe Abbildung 7.30). Die numerischen Berechnungen stimmen sowohl an der Druck- als auch an der Saugseite bis auf geringe Abweichungen nach  $x/l \approx 0.8$  mit den Experimenten gut überein. Die geringen Abweichungen der numerischen Simulationen ab  $x/l \approx 0.8$  unterscheiden sich voneinander kaum. Die maximale Machzahl befindet sich in diesem Testfall bei  $x/l \approx 0.7$  (Sieverding, 1973), was auch alle Simulationen bestätigten.

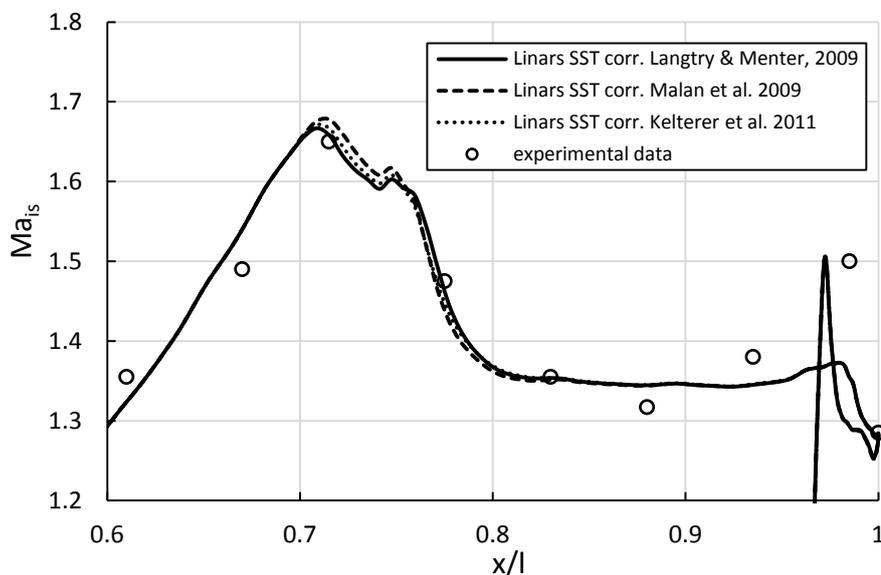


Abbildung 7.30: Vergleich der Machzahlverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  an der Saugseite vergrößert

Experimente deuten darauf hin (Sieverding, 1976), dass an der Saugseite weiter stromabwärts eine Transition in einer Ablöseblase, die durch den auftretenden schiefen Verdichtungsstoß der oberhalb liegenden Schaufel verursacht wird, auftritt. Die Skizze dieses Vorgangs ist in Abbildung 7.31 dargestellt. Im Bereich der Hinterkante der oberen Schaufel bildet sich bei höheren Abström-Machzahlen ein vollausbildetes Stoßsystem, sowohl auf der Druckseite als auch bei der Saugseite (siehe Abbildung 7.32). An der Saugseite der unterhalb liegenden Schaufel tritt dadurch ein schiefer Stoß (incident shock) auf, der die Grenzschicht örtlich ablöst und ein System von Ablösestoß (separation shock), Expansionsfächer (expansion

waves) und Anlegestoß (reattachment shock) hervorruft. Der Übergang vom normalen zum schiefen Verdichtungsstoß mit zunehmendem Druckverhältnis ist in Abbildung 7.32 und 7.33 dargestellt, wobei der Stoß bei niedrigen Abström-Machzahlen (Unterschall) normal, mit steigenden Abström-Machzahlen (Schallnahe und Überschall) immer weiter stromabwärts wandert und schiefer an der Saugseite auftrifft. Bei höheren Abström-Machzahlen wird eine Reflexion des auftretenden Stoßes an der Saugseite immer mehr erkennbar.

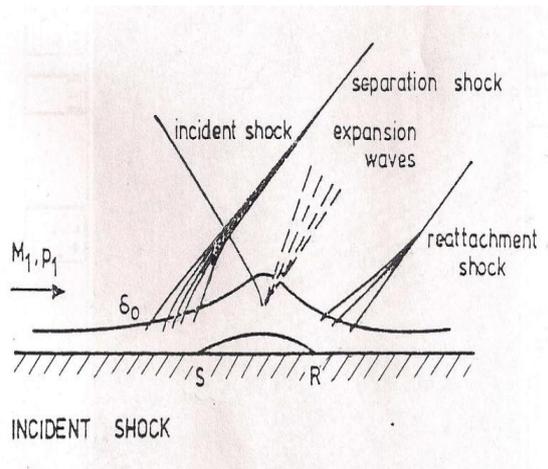


Abbildung 7.31: Skizze zur Grenzschichtablösung durch schiefen Verdichtungsstoß (Sieverding, 1976)

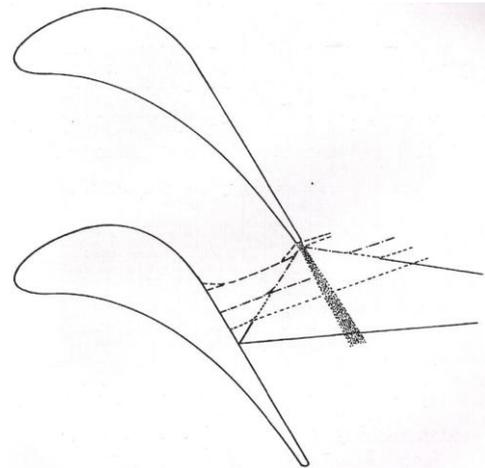


Abbildung 7.32: Übergang von normalem zu schiefem Verdichtungsstoß an der Hinterkante (Sieverding, 1976)

Diese Phänomene sind von allen Korrelationen fast identisch erfasst worden (siehe dazu Abbildungen 7.34 – 7.36), wo die Dichte-Isolinien für die jeweiligen Abström-Machzahlen  $Ma_{is,exit} = 0.62$ ,  $Ma_{is,exit} = 0.75$  und  $Ma_{is,exit} = 1.21$  dargestellt sind. In Abbildung 7.33 werden die Schlierenbilder mit steigender Abström-Machzahl von links nach rechts dargestellt (Sieverding, 1976):

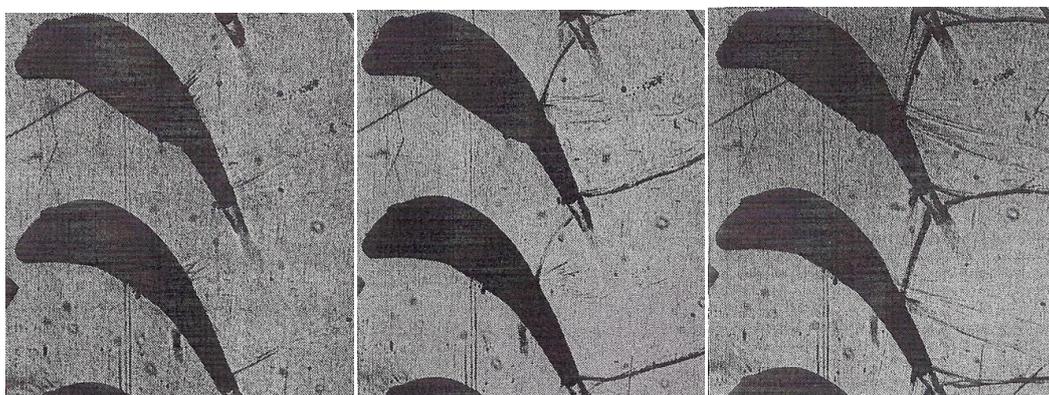


Abbildung 7.33: Schlierenbilder mit steigender Abström-Machzahl von l. nach r. (Sieverding, 1976)

Man sieht, dass der Stoß bei steigenden Machzahlen immer schiefer und weiter stromabwärts auftritt. Dieser Vorgang konnte auch bei den numerischen Berechnungen beobachtet werden (siehe Abbildungen 7.34 – 7.36).

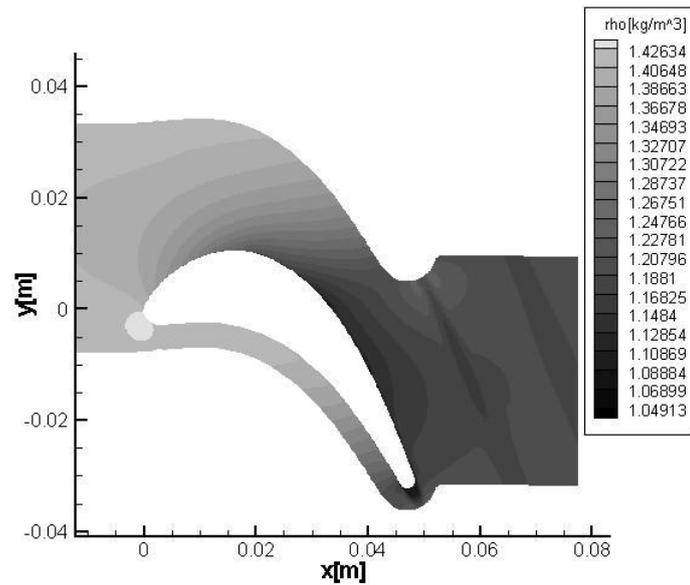


Abbildung 7.34: Dichte-Isolinien des VKI LS59  $Ma_{is,exit} = 0.62$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation

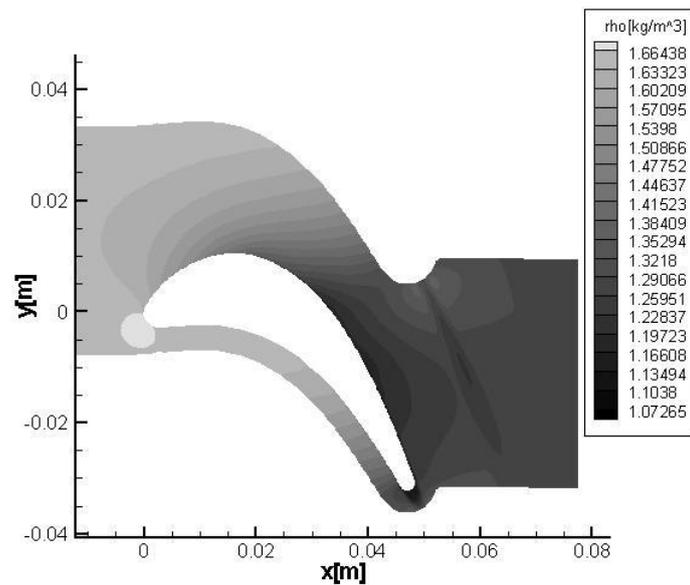


Abbildung 7.35: Dichte-Isolinien des VKI LS59  $Ma_{is,exit} = 0.75$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation

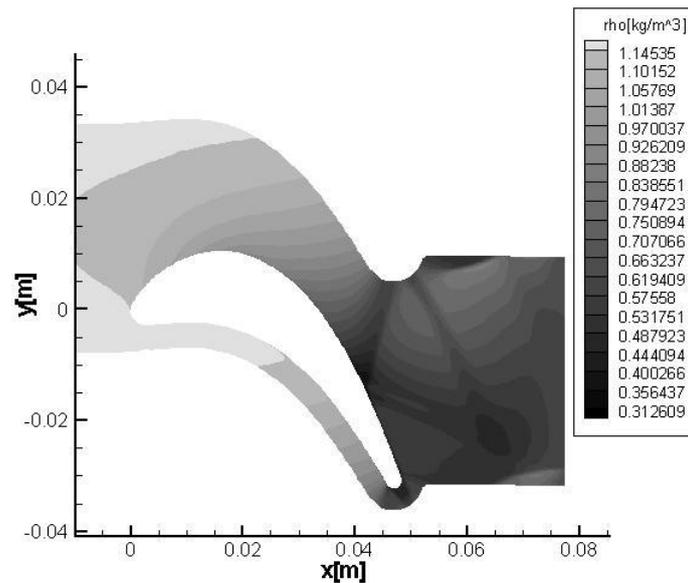


Abbildung 7.36: Dichte-Isolinien des VKI LS59  $Ma_{is,exit} = 1.21$ , berechnet mit Kelterer-Korrelation

Im Folgenden werden die Druckbeiwert- (Abbildung 7.37, vergrößert in Abbildung 7.38), Reibungsbeiwert- (Abbildung 7.39, vergrößert in Abbildung 7.40), Formfaktor- (Abbildung 7.41), Intermittenzfaktor- (Abbildung 7.42), und Beschleunigungsparameterverteilungen (Saugseite Abbildung 7.43, Druckseite Abbildung 7.44) für die jeweiligen Korrelationen untereinander verglichen, wobei keine Vergleichsmessdaten vorhanden sind.

Der Druckbeiwert  $c_p$  ist in Gleichung (7.2) folgend definiert (Kelterer et al. 2011):

$$c_p = \frac{p - p_{stat,exit}}{p_{tot,in} - p_{stat,exit}} \quad (7.2)$$

Wobei hier  $p_{tot,in}$  den totalen Druck am Eintritt,  $p$  den lokalen statischen Druck an der Schaufelwand, und  $p_{stat,exit}$  den statischen Druck am Austritt bezeichnet.

Alle Korrelationen weisen darauf hin, dass es sich in diesem Fall um eine Transition über eine Ablöseblase handelt. Der Ablösepunkt liegt bei ungefähr  $x/l \approx 0.74$  (siehe Abbildungen 7.37 – 7.43), gefolgt von Transition und Wiederanlegen im Bereich von  $0.76 < x/l < 0.84$  (siehe Abbildungen 7.39, 7.40 und 7.42). Der Anlegepunkt konnte bei  $x/l \approx 0.84$  wiederum bei allen drei Korrelationen identifiziert werden (siehe Abbildungen 7.37 - 7.42).

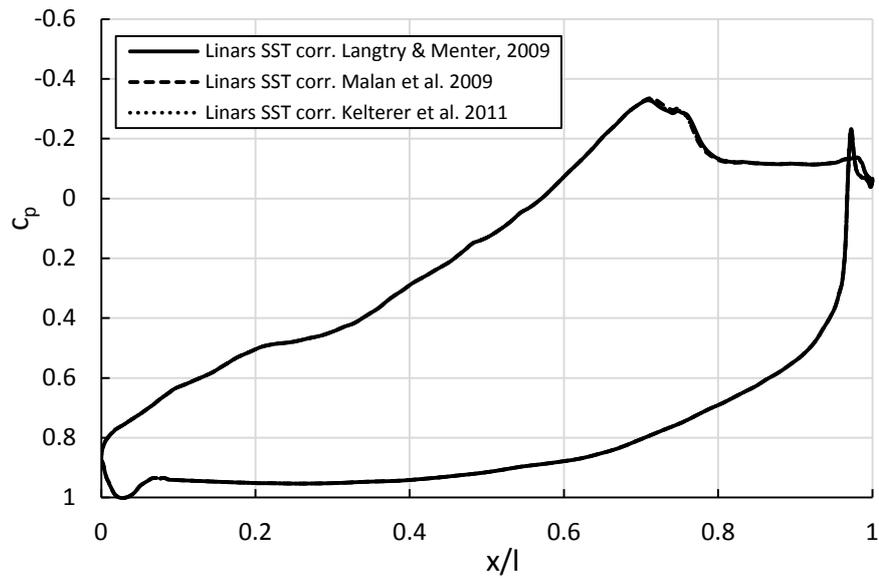


Abbildung 7.37: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

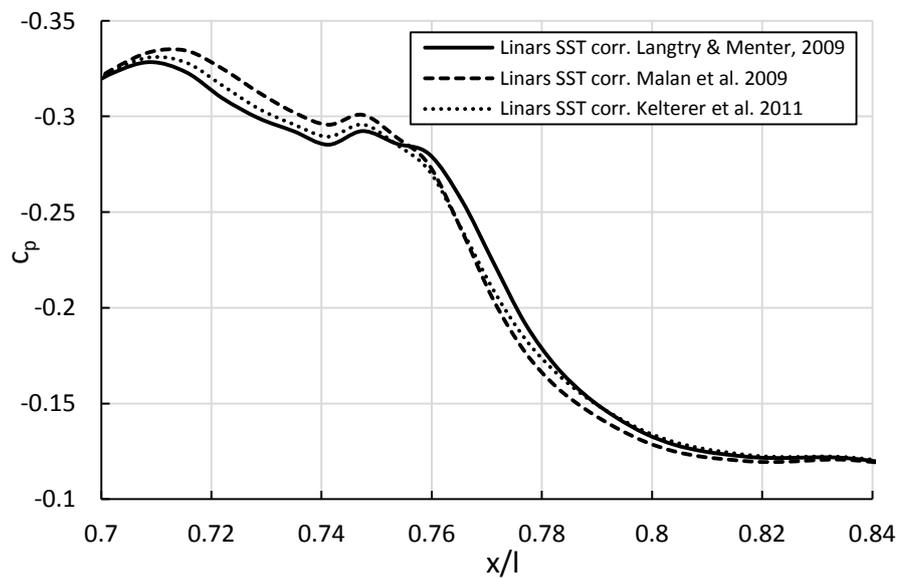


Abbildung 7.38: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  vergrößert im Bereich der Ablöse

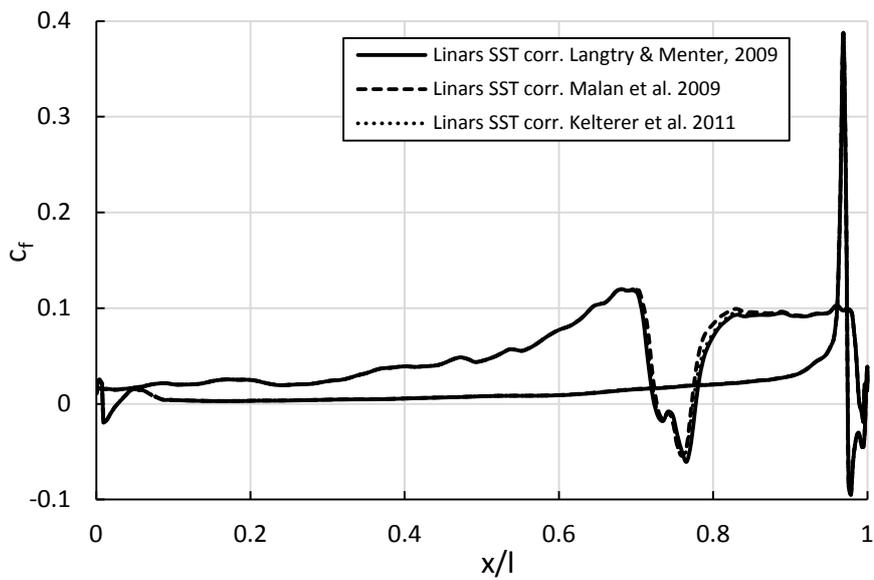


Abbildung 7.39: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

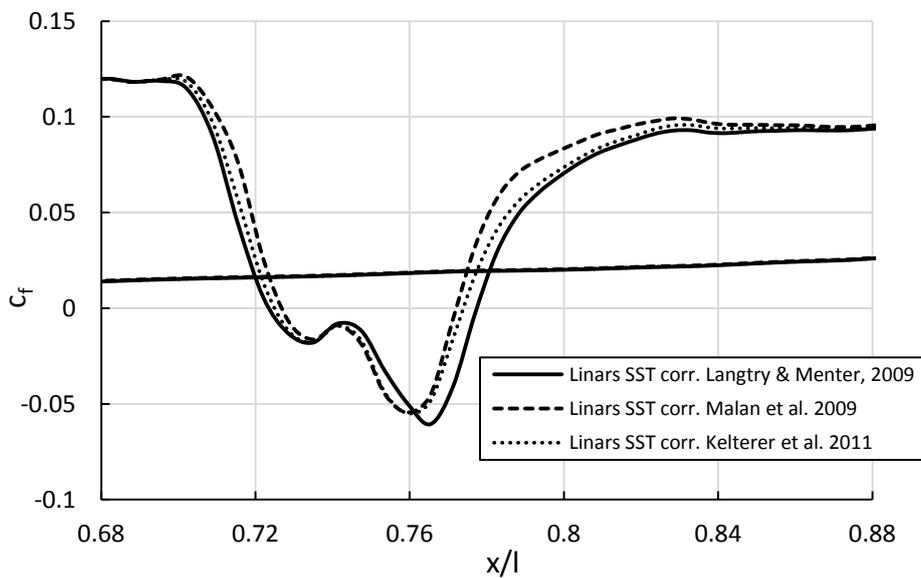


Abbildung 7.40: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  vergrößert im Bereich der Ablöse

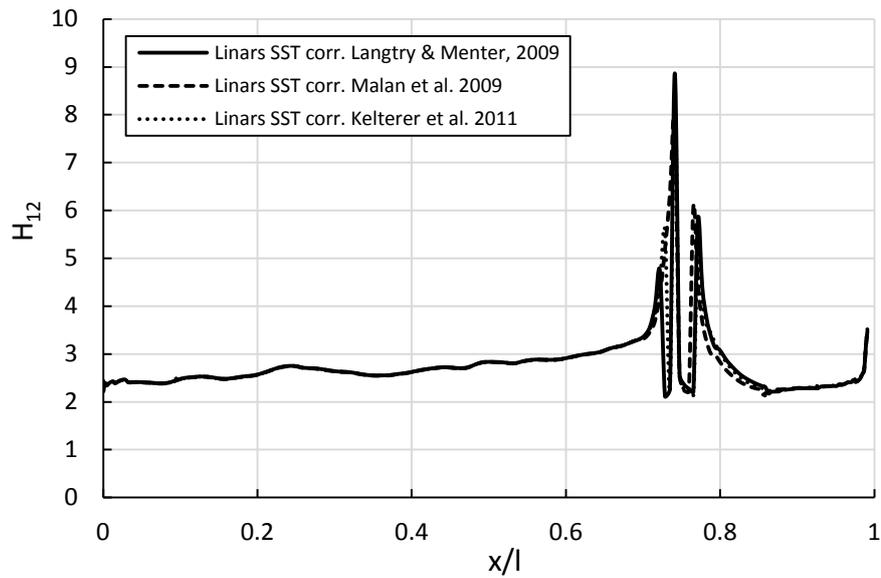


Abbildung 7.41: Vergleich der Formfaktorverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

Die Intermittenzwerte der numerischen Berechnungen wurden von der Wand aus gesehen bei Linie  $j = 16$  erhoben.

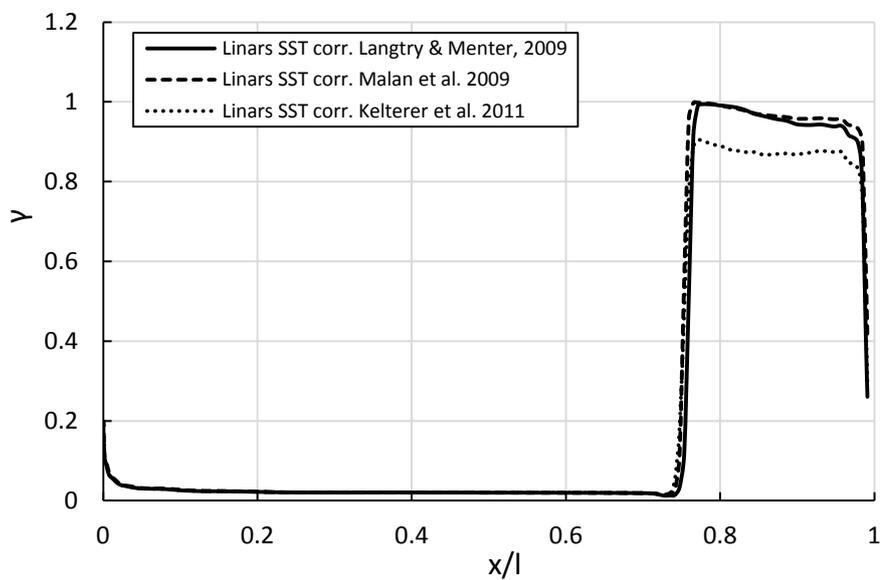


Abbildung 7.42: Vergleich der Intermittenzverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

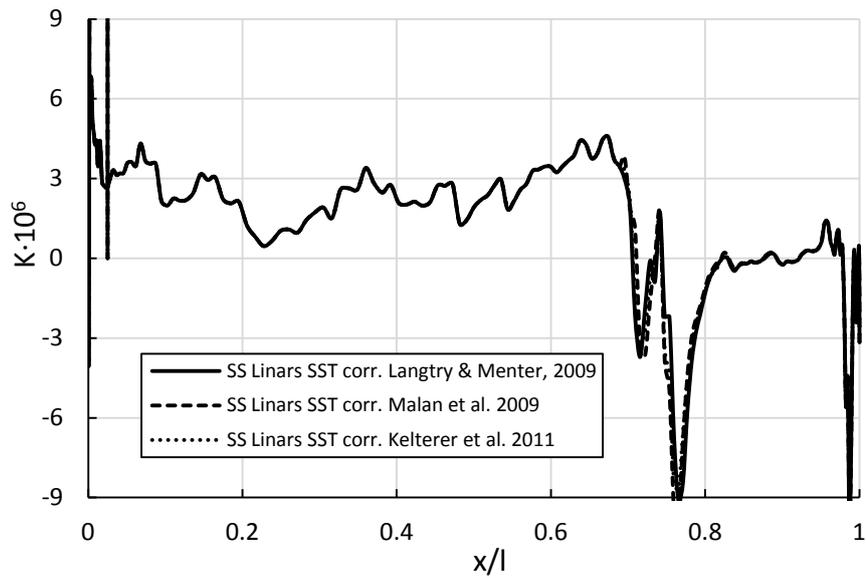


Abbildung 7.43: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Saugseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

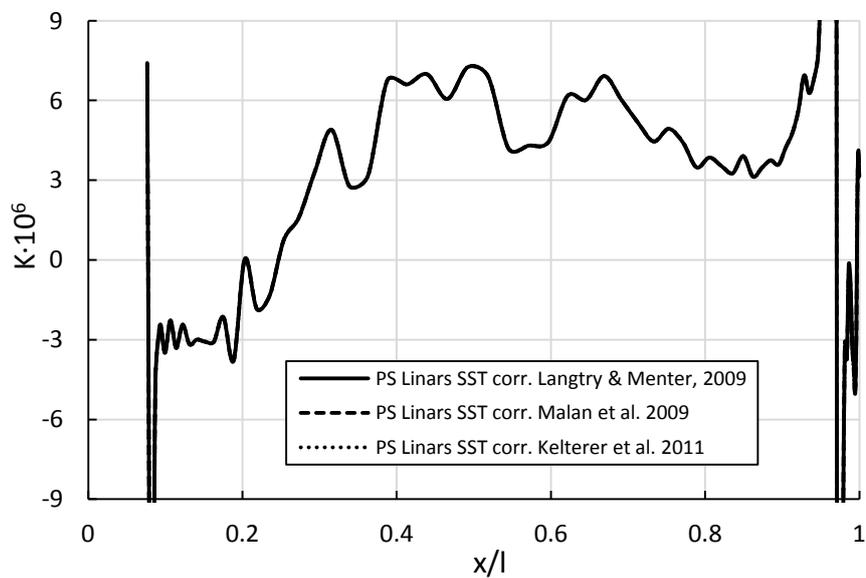


Abbildung 7.44: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von VKI LS59 zwischen verschiedenen Korrelationen an der Druckseite für den Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$

Auf der Druckseite ist eine kurze laminare Ablöseblase im Bereich der Vorderkante zu sehen (siehe Abbildung 7.39 und 7.44), eventuell gefolgt von einer Relaminarisierung. Im Bereich der Hinterkante steigt die Beschleunigung rasant an.

### Zusammenfassung VKI LS59

Es wurden beim VKI LS59 drei verschiedene Testfälle mit  $Ma_{is,exit} = 0.62$  (Unterschall),  $Ma_{is,exit} = 0.75$  (Unterschall) und  $Ma_{is,exit} = 1.21$  (Überschall), untersucht. In fast allen Fällen konnten alle drei Korrelationen die Konvergenz erreichen, außer der Malan-Korrelation bei Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$ . Die  $Ma_{is,exit} = 0.62$  und  $Ma_{is,exit} = 0.75$  Testfälle wiesen eine Bypass-Transition auf, der Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  hingegen eine ablöseinduzierte Transition.

Im Fall  $Ma_{is,exit} = 0.75$  sieht man beim Frequenzspektrum der Dichtefluktuationen (Abbildung 7.22) und bei deren Turbulenzgrade (Abbildung 7.23) die zwei Sprünge, die auf Transition, den Anfang einer Relaminarisierung, gefolgt von einer weiteren Transition hinweisen. Alle Korrelationen bestätigten diese Zone, wobei die Kelterer-Korrelation die einzige war, die den Transitionsbeginn und dessen Ende richtig feststellen konnte.

Im Fall  $Ma_{is,exit} = 1.21$  haben alle Korrelationen ähnlichen Verlauf, obwohl die Malan-Korrelation nicht ganz konvergiert. Der schiefe Stoß und anschließend die Reflexion ist gut erkennbar (siehe Abbildung 7.36).

## 7.3 T100 Kaskade

Als letzter Testfall wurde die Leitschaufel „AEuE-Profil T100/78.5/R“, die auch als T100 bezeichnet wird, untersucht. Die Profilkordinaten (siehe Abbildung 7.45) und die Messdaten (statischer Druckbeiwert und Beschleunigungsparameter) stammen aus dem Laborversuch an der Technischen Universität Wien von Willinger (1996).

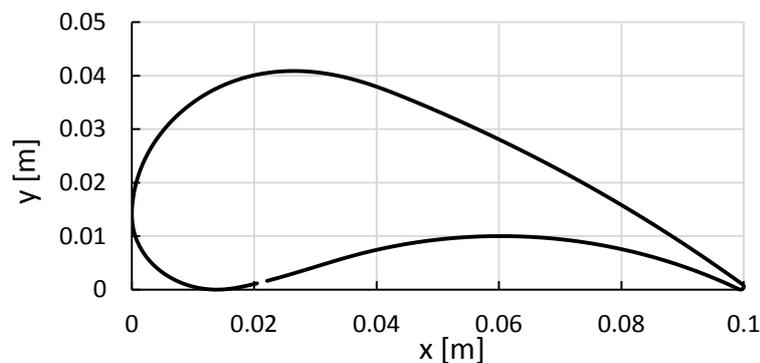


Abbildung 7.45: T100 Profilkordinaten (Willinger, 1996)

Weiters wurden Messungen von Österreicher (2004) und Nichtawitz (2009) für die numerischen Berechnungen herangezogen, die ebenfalls an der Technischen Universität Wien durchgeführt werden.

Die wichtigsten Geometriedaten der T100 Kaskade sind in Tabelle 7.8 aufgelistet. Die Randbedingungen, die bei den Versuchen von Willinger (1996) verwendet wurden, sind in Tabelle 7.9 dargestellt.

Schaufelanzahl	9	[-]
Sehnenlänge $l$	100	[mm]
Schaufelhöhe $h$	150	[mm]
Schaufelteilung $t$	80	[mm]
Schaufelseitenverhältnis $h/l$	1.5	[-]
Teilungsverhältnis $l/t$	1.25	[-]
Staffelungswinkel $\alpha_u$	51.5	[°]

Tabelle 7.8: Wichtigste Geometriedaten der T100 Kaskade (Nichtawitz, 2009)

Eintrittstotaldruck $p_{tot,in}$	102300.078	[Pa]
Statischer Eintrittsdruck $p_{stat,in}$	102048.078	[Pa]
Geschwindigkeit am Eintritt $U_{in}$	20.322	[m/s]
Totaltemperatur am Eintritt $T_{tot,in}$	291.35	[K]
Machzahl am Eintritt $Ma_{in}$	0.059	[-]
Dichte in der Zuströmung $\rho_{in}$	1.22	[kg/m <sup>3</sup> ]
Zuströmwinkel $\beta$	90	[°]
Statischer Austrittsdruck $p_{stat,exit}$	100178	[Pa]
Geschwindigkeit am Austritt $U_{is,exit}$	62.601	[m/s]
Maximale Machzahl $Ma_{is,max}$	0.193	[-]
Reynoldszahl $Re_l$	418668	[-]
Freistromturbulenzgrad $Tu$	5 %	[-]

Tabelle 7.9: Randbedingungen der T100 Kaskade (Willinger, 1996)

Bei den Versuchen handelt es sich um drei Lastzustände, die in Tabelle 7.10 aufgelistet sind, wobei in dieser Arbeit nur der Nennlastzustand mit dem Zuströmwinkel  $\beta = 90^\circ$  (Zuströmung in  $x$ -Richtung, Inzidenzwinkel  $\alpha = 0^\circ$ ) simuliert wurde.

Lastzustand	Zuströmwinkel $\beta$ [°]	Inzidenzwinkel $\alpha$ [°]
Teillast	120	-30
Nennlast	90	0
Überlast	60	30

Tabelle 7.10: Untersuchte Zuström- und Abströmwinkel (Österreicher, 2004)

Das 2D-Netz (Quasi3D) für die Berechnung wurde ebenfalls im Programm AiGrid3D generiert und besteht aus einem Eintrittsblock (H-Block), einem O-Block um die Schaufel, einem Kanalblock (H-Block), einem Kanal-Austrittsblock (H-Block) und einem Austrittsblock (H-Block), mit insgesamt 32282 Zellen. Die Verdichtung der Zellen zur Wand wurde wieder so gewählt, dass überall an der Wand in der ersten Zelle für den dimensionslosen Wandabstand ein Wert von  $y^+ < 1$  eingehalten werden konnte. Für die Verfeinerung des Netzes (Relaxationparameter) wurde ein Wert von 70 Iterationen gewählt. Das endgültige Netz ist in Abbildung 7.46 dargestellt:

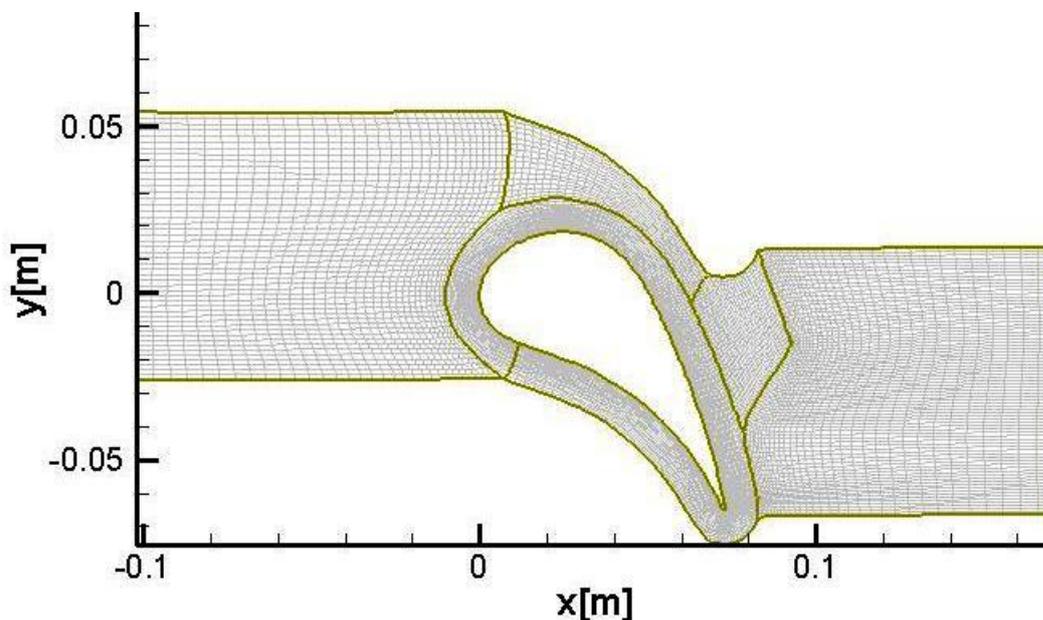


Abbildung 7.46: Das 2-D Rechennetz von T100 generiert in AiGrid3D

Es wurden auch in diesem Testfall sehr verschiedene Netze in Bezug auf die Anzahl und die Verdichtung der Zellen an gewissen Stellen, wie in der Nähe der Wand, an der Vorder-, Hinterkante und im Bereich der Transition, erzeugt. Es hat sich herausgestellt, dass nur das

beschriebene Netz bei allen Berechnungen (SA, SST und  $\gamma - Re_\theta$ ) am besten die Konvergenz erreichen konnte.

Die gewählten Parameter für die Berechnung des T100 Testfalls im LINARS sind in Tabelle 7.11 und 7.12 aufgelistet. Diese Parameter basieren auf die Vorgaben von Willinger (1996), wobei der totale Eintrittsdruck auf  $p_{tot,in} = 102660 \text{ Pa}$  erhöht wurde, um besser an die Messungen heranzukommen.

Dieser Fall wurde auch kompressibel mit einer konstanten dynamischen Viskosität gerechnet. Der Freistromturbulenzgrad beträgt  $Tu = 5\%$  (Willinger, 1996). Für den turbulenten Längenmaßstab wurde  $l_m = 0.001 \text{ m}$  gewählt, was 1% der Sehnenlänge  $l$  entspricht.

Eintritt	Austritt
$p_{tot,in} = 102660 \text{ [Pa]}$	$p_{stat,exit} = 100178 \text{ [Pa]}$
$T_{tot,in} = 291.35 \text{ [K]}$	
$\alpha = 0 \text{ [}^\circ\text{]}$	
Global	
$\mu = 1.80961464 \text{ e-5 [Pa/s]}$	

Tabelle 7.11: T100 LINARS Randbedingungen

Eintritt	
$Tu = 5\%$	$l_m = 0.001 \text{ [m]}$

Tabelle 7.12: T100 LINARS turbulente Eintrittsrandbedingungen

Das Spalart-Allmaras-Modell konnte mit 20000 Iterationen, das Menters SST-Modell mit weiteren 50000 Iterationen auskonvergieren. Bei den Berechnungen mit dem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell konnte die Kelterer-Korrelation nach 80000 Iterationen eine gute Konvergenz erreichen. Bei der Malan-Korrelation änderten sich die Werte der Residuen nach ungefähr 15000 Iterationen nicht mehr (Wert zirka 1). Die Langtry- Menter-Korrelation war nach 75000 Iterationen noch immer nicht ganz auskonvergiert (Wert zirka 5).

Zur Auswertung der drei Korrelationen wurden die von Willinger (1996) stammenden Messdaten für den Druckbeiwert (siehe Abbildung 7.47) und den Beschleunigungsparameter (siehe Abbildung 7.48) herangezogen.

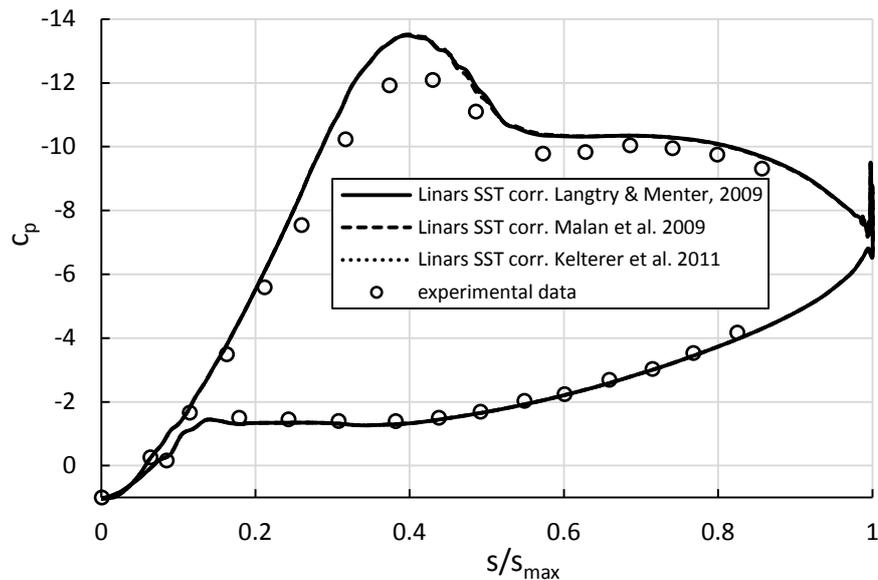


Abbildung 7.47: Vergleich der Druckbeiwertverteilung von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen

Der statische Druckbeiwert  $c_p$  ist für diesen Testfall laut Willinger (1996) in Gleichung (7.3) definiert:

$$c_p = \frac{p - p_{stat,in}}{\rho U_\infty^2 / 2} \quad (7.3)$$

wobei hier  $p_{stat,in}$  den statischen Druck am Eintritt,  $p$  den lokalen statischen Druck an der Schaufelwand,  $\rho$  die Dichte und  $U_\infty$  die Geschwindigkeit der Zuströmung bezeichnet.

In Abbildung 7.47 ist zu sehen, dass bei der statischen Druckbeiwertverteilung alle drei Korrelationen fast identische Ergebnisse liefern, wobei sie auf der Saugseite ab  $s/s_{max} \approx 0.1$  bis zur Hinterkante auf höhere Werte im Vergleich zu den Messdaten kommen. Das Druckminimum liegt bei  $s/s_{max} \approx 0.4$ . Auf der Druckseite hingegen konnten alle Korrelationen den Messdaten recht gut folgen.

Der Beschleunigungsparameter an der Saugseite stimmt für alle drei Korrelationen mit den Messdaten gut überein (siehe Abbildung 7.48), wobei im Bereich  $0.4 < s/s_{max} < 0.6$  die Simulationen über- und unterschwingen. An der Druckseite hingegen sind im Bereich  $0.1 < s/s_{max} < 0.6$  Abweichungen von den Messdaten zu erkennen. Die detaillierte Auswertung der Druckseite wird von Collins (2012) durchgeführt.

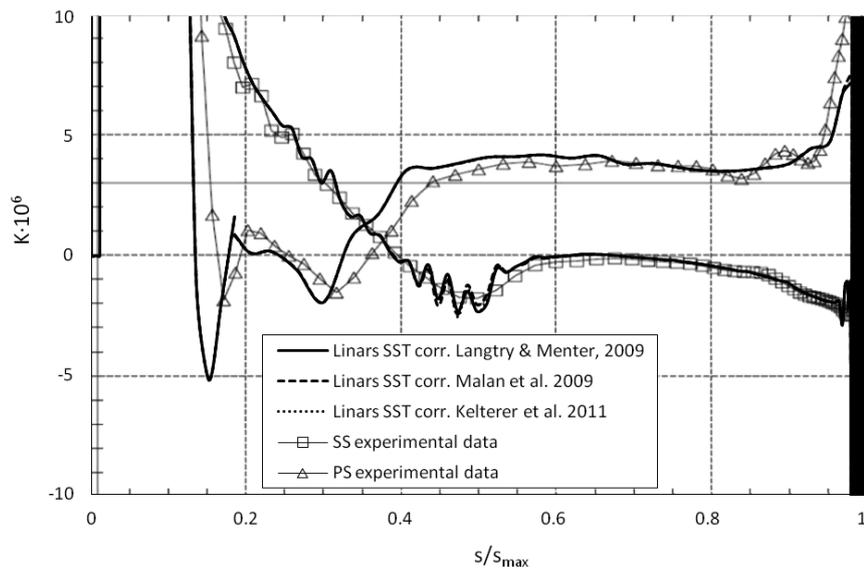


Abbildung 7.48: Vergleich der Beschleunigungsparameterverteilung von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen

Um mehr Informationen über die Transition zu erhalten, wurden die Signalcharakteristiken aus den Messungen von Österreicher (2004) herangezogen. An der Saugseite des Profils T100 wurden im Bereich  $0.3 < s/s_{max} < 0.85$  zwölf Heißfilmsonden positioniert (siehe Abbildung 7.49) und daraus die Signale herausgelesen.

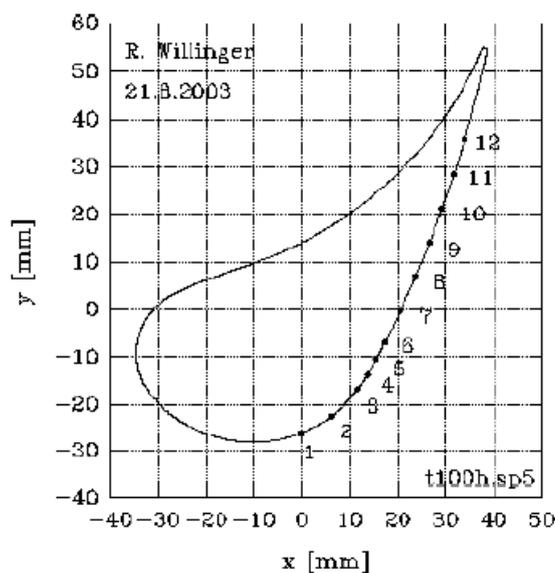


Abbildung 7.49: Positionierung (1-12) der Heißfilmsonden (Österreicher, 2004)

Die typischen Signalverläufe für laminare, transitionale und turbulente Strömungen sind in Abbildung 7.50 (links) nach Österreicher (2004) dargestellt.

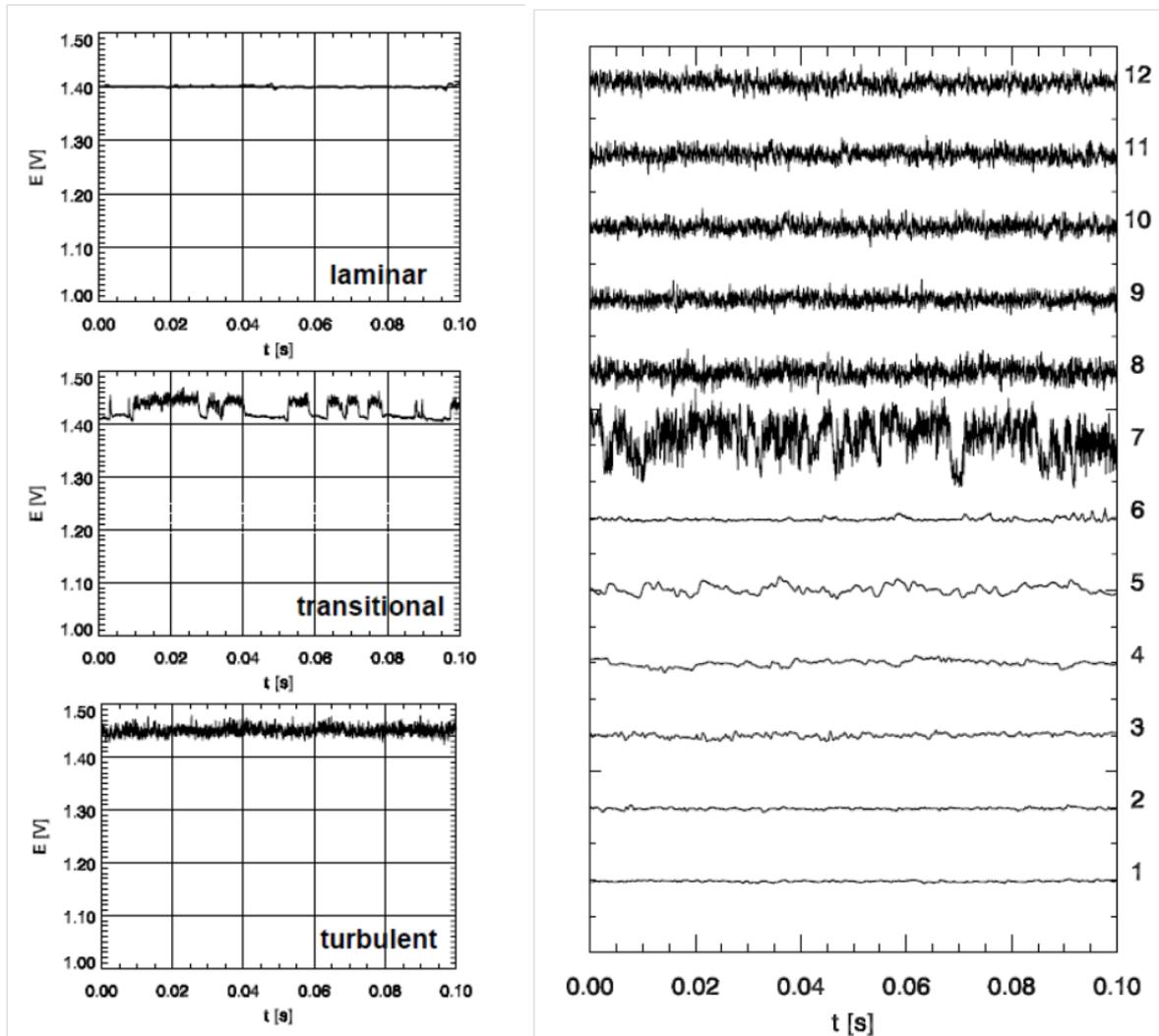


Abbildung 7.50: Typische Verläufe der Anemometerspannung  $E(t)$  bei laminarer, transitionaler und turbulenter Grenzschichtströmung (links), Messsignale der Anemometerspannung für T100  $E(t) - E_0$  bei Nennlast (rechts) (Österreicher, 2004)

Die Messergebnisse (siehe Abbildung 7.50 rechts) weisen darauf hin, dass von der Vorderkante weg stromabwärts die stabile laminare Strömung bei Position 3 ( $s/s_{max} \approx 0.44$ ) instabil wird und bis Position 6 ( $s/s_{max} \approx 0.5$ ) in diesem Zustand bleibt. Die Position 7 ( $s/s_{max} \approx 0.57$ ) befindet sich im transitionalen Bereich. Die Positionen 8 ( $s/s_{max} \approx 0.63$ ) bis 12 weisen auf eine ausgebildete Turbulenz hin (Österreicher, 2004).

Zum Vergleich wurde in diesem Fall der Reibungsbeiwert  $c_f$ , Formfaktor  $H_{12}$  und Intermittenzfaktor  $\gamma$  herangezogen. In Abbildung 7.51 sind die Reibungsbeiwertverläufe der drei Korrelationen dargestellt:

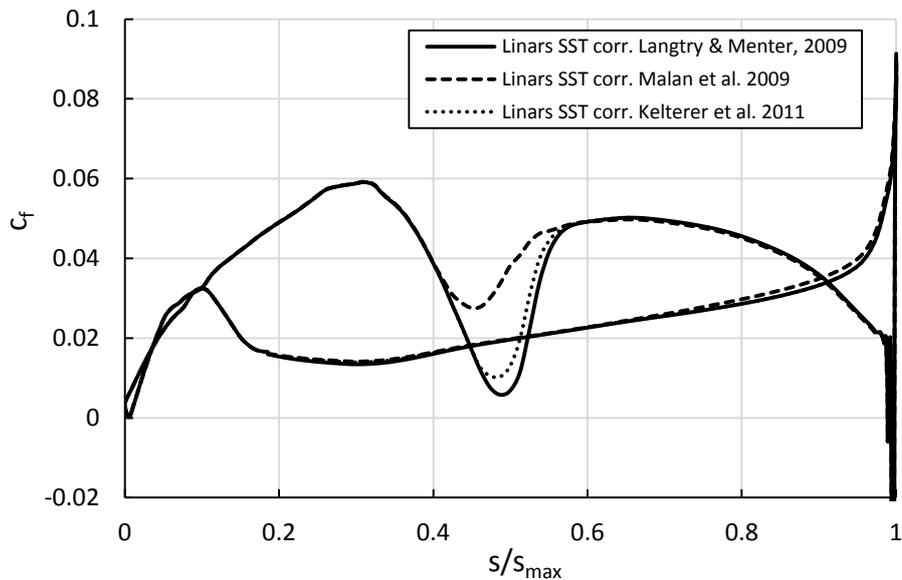


Abbildung 7.51: Vergleich der Reibungsbeiwertverteilung von T100 zwischen den verschiedenen Korrelationen

Alle Korrelationen waren in der Lage, eine Bypass-Transition zu identifizieren. Die Kelterer- und Langtry-Menter-Korrelation zeigen einen ziemlich ähnlichen Verlauf, während sich die Malan-Korrelation sowohl auf der Saugseite, als auch auf der Druckseite von den anderen unterscheidet. Der Transitionsbeginn liegt bei der Malan-Korrelation weiter stromaufwärts an der Stelle  $s/s_{max} \approx 0.45$ , während die Kelterer- und Langtry-Menter-Korrelation diesen bei  $s/s_{max} \approx 0.5$  identifizieren. Die Messergebnisse zeigen, dass die Strömung bis zur Position 6 ( $s/s_{max} \approx 0.5$ ) laminar instabil ist. Die Ergebnisse mit der Malan-Korrelation deuten aber an dieser Position auf eine Transition hin. Die Kelterer- und Langtry-Menter-Korrelationen hingegen weisen auf einen späten Transitionsbeginn hin, der eher mit der Messung übereinstimmt. Der Transitionsbereich müsste laut Österreicher (2004) irgendwo zwischen der Position 6 ( $s/s_{max} \approx 0.5$ ) und 8 ( $s/s_{max} \approx 0.63$ ) liegen. Diese Aussage wurde nur von der Kelterer- und Langtry-Menter-Korrelation bestätigt. Weiters sieht man, dass das Transitionsende bei allen Korrelationen an der Stelle  $s/s_{max} \approx 0.6$  erfasst wird, was auch mit der Messung übereinstimmt.

Diese Aussagen wurden auch von der Formfaktor- (siehe Abbildung 7.52) und der Intermittenzverteilung (siehe Abbildung 7.53) bestätigt.

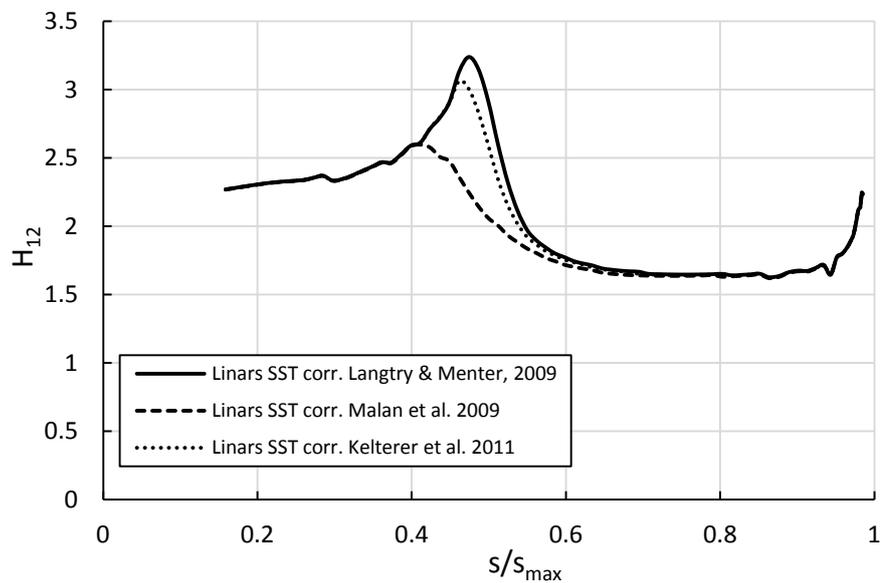


Abbildung 7.52: Vergleich der Formfaktorverteilung an der Saugseite von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen

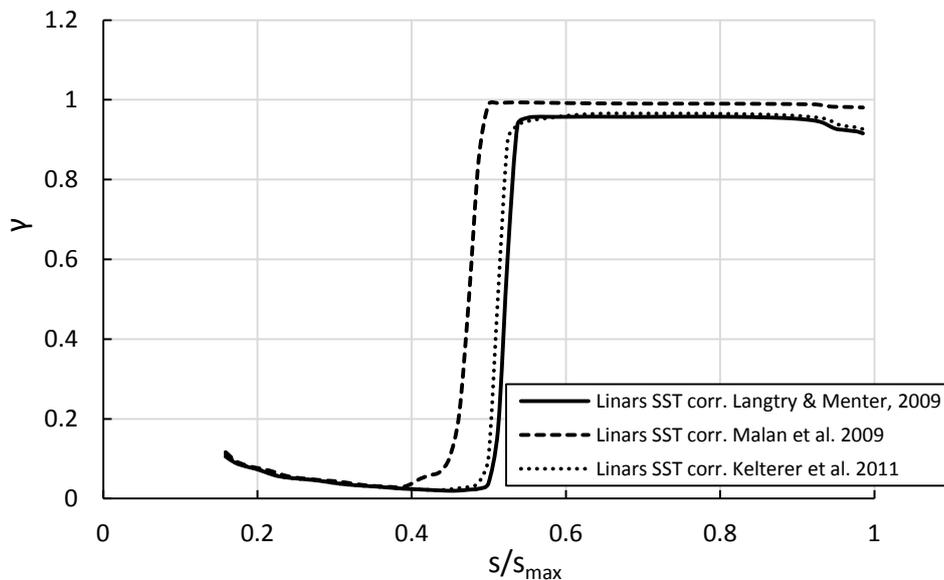


Abbildung 7.53: Vergleich der Intermittenzverteilung an der Saugseite von T100 zwischen verschiedenen Korrelationen

Die Intermittenzwerte der numerischen Berechnungen wurden von der Wand aus gesehen bei Linie  $j = 16$  erhoben.

## 8 Schlussbemerkung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hatte das Ziel, den laminar-turbulenten Umschlag in drei Turbinenkaskaden (N3-60, VKI-LS59 und T100) zu untersuchen. Dazu wurden zwei vom Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik an der Technischen Universität Graz bereitgestellte Programme verwendet: AiGrid3D (Pieringer, Version Juli 2010) für die Erzeugung strukturierter Netze und LINARS (CFD-Code des Instituts) für die numerischen Berechnungen. Die Netze wurden im Programm AiGrid3D so generiert, dass überall in der ersten Zelle zur Wand ein dimensionsloser Wandabstand von  $y^+ < 1$  eingehalten werden konnte. Die Zellen im Bereich der erwarteten Transition sowie der Vorder- und Hinterkante wurden für jeden Testfall entsprechend verdichtet und anschließend die Unstetigkeiten im Netz geglättet. Für die Berechnungen der Transition mit dem CFD-Code LINARS wurde das auf empirische Korrelationen beruhende  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell verwendet. Es sind drei unterschiedliche Korrelationen herangezogen worden: Langtry-Menter-, Malan- und Kelterer-Korrelation. Die numerischen Ergebnisse für diese drei Korrelationen wurden mit den experimentellen Daten der Testfälle verglichen. In Tabelle 8.1 ist der Überblick über die Auswertung der Testfälle mit den verschiedenen Korrelationen in Bezug auf die Anzahl der Iterationen, das Konvergenzverhalten und die Übereinstimmung mit Messungen dargestellt.

Testfälle			Langtry-Menter-Korrelation	Malan-Korrelation	Kelterer-Korrelation
<b>N3-60</b>	$Ma_{is,exit} = 0.086$ $Re_l = 560000$ $Tu = 3.8\%$ $l_m = 0.005 [m]$ Zellenanzahl: 43818	Iterationen:	60000	45000	60000
		Konvergenz:	0.3	0.05	15
		Ergebnis:	Transitionsvorhersage getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen
<b>VKI LS59</b>	$Ma_{is,exit} = 0.62$ $Re_l = 808000$ $Tu = 2\%$ $l_m = 0.00116 [m]$ Zellenanzahl: 62490	Iterationen:	25000	30000	25000
		Konvergenz:	0.01	0.3	0.3
		Ergebnis:	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen
	$Ma_{is,exit} = 0.75$ $Re_l = 1080000$ $Tu = 2\%$ $l_m = 0.00116 [m]$ Zellenanzahl: 62490	Iterationen:	45000	30000	40000
		Konvergenz:	0.01	0.01	0.01
		Ergebnis:	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage getroffen
	$Ma_{is,exit} = 1.21$ $Re_l = 695000$ $Tu = 2\%$ $l_m = 0.00116 [m]$ Zellenanzahl: 62490	Iterationen:	30000	60000	25000
		Konvergenz:	0.2	1	0.1
		Ergebnis:	Transitionsvorhersage getroffen	Transitionsvorhersage getroffen	Transitionsvorhersage getroffen
<b>T100</b>	$Ma_{is,exit} = 0.187$ $Re_l = 418000$ $Tu = 5\%$ $l_m = 0.001 [m]$ Zellenanzahl: 32282	Iterationen:	75000	15000	80000
		Konvergenz:	5	1	0.1
		Ergebnis:	Transitionsvorhersage getroffen	Transitionsvorhersage nicht getroffen	Transitionsvorhersage getroffen

Tabelle 8.1: Überblick über die Auswertung der Testfälle für die verschiedenen Korrelationen in Bezug auf die Anzahl der Iterationen, das Konvergenzverhalten und die Übereinstimmung mit den Messungen

Beim N3-60 Testfall konnten die Langtry-Menter- und die Malan-Korrelation gute Konvergenz erreichen, mit der Kelterer-Korrelation war dies nicht möglich. Die Langtry-Menter-Korrelation war in diesem Testfall die einzige, die gute Übereinstimmung mit der Messung in Bezug auf Beginn und Länge der Transition erzielen konnte. Die Malan- und die Kelterer-Korrelation konnten zwar eine Bypass-Transition identifizieren, jedoch weder den Beginn noch die Länge des Umschlags treffen. Der Testfall VKI LS59 wurde für drei verschiedene Abström-Machzahlen ( $Ma_{is,exit} = 0.62$ ,  $Ma_{is,exit} = 0.75$  und  $Ma_{is,exit} = 1.21$ ) untersucht. Alle Korrelationen konnten für die drei Abström-Machzahlen eine gute Konvergenz erzielen. Bei  $Ma_{is,exit} = 0.62$  gelang es keiner Korrelation, die Transition richtig vorherzusagen. Bei  $Ma_{is,exit} = 0.75$  handelt es sich um eine Bypass-Transition, wobei nur die Kelterer Korrelation den Beginn und die Länge der Transition richtig berechnen konnte. Bei

$Ma_{is,exit} = 1.21$  wurde von allen Korrelationen die Vorhersage einer Transition über eine Ablöseblase bestätigt. Für den Testfall T100 brachten sowohl die Kelterer- als auch die Langtry-Menter-Korrelation gute Übereinstimmung mit der Messung bezüglich Beginn und Länge der Transition.

Keine Korrelation war in der Lage, für alle Testfälle gute Übereinstimmung mit den Messungen zu erreichen, sodass es notwendig ist, die verwendeten Korrelationen noch weiter zu entwickeln.

## Literaturverzeichnis

- Abu-Ghannam, B., & Shaw, R. (1980). Natural Transition of Boundary Layer the Effect of Turbulent Pressure Gradient and Flow History. *Journal of Mechanical Engineering Science* , S. 22.
- Breitbach, C. (2002). Numerische Berechnung transitionaler Grenzschicht-Strömungen in axialen Turbinengittern. *Dissertation* . Darmstadt: Technischen Universität Darmstadt.
- Brenn, G., Hirshler, T., & Meile, W. (2004). Strömungslehre und Wärmeübertragung I. *Vorlesungsskriptum* . Graz: Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung, Technische Universität Graz.
- Burgstaller, R. (2010). Performancestudie von Transitionsmodellen mit den CFD Codes LINARS und TRACE. *Diplomarbeit* . Graz: Technische Universität Graz.
- Collins, M. (2012). Innovative Numerical Calculation of Transitional Flow with Turbomachinery Application. *Dissertation* . Graz: Technische Universität Graz.
- Dhawan, S., & Narasimha, R. (1958). Some Properties of Boundary Layer Flow During Transition. *Journal of Fluids Engineering*, 3 , S. 418–436.
- Elsner, W. (2009). N3-60 Data. *Private Communication* .
- Gehrer, A. (1998). Entwicklung eines 3D-Navier-Stokes Codes zur numerischen Berechnung der Turbomaschinenströmung. *Dissertation* . Graz: Technische Universität Graz.
- Gehrer, A., Passrucker, H., Jericha, H., & Lang, J. (1997). Blade design and Grid-generation for Computational Fluid Dynamics (CFD) with Bézier-curves and Bézier-surfaces. *European Conference-Antwerpen, March '97, Paper No. 54*. Technische Universität Graz.
- Hirsch, C. (1989). *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol.1+2*. Wiley & Sons.
- Hoschek, J., & Lasser, D. (1989). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Kelterer, M., Burgstaller, R., & Sanz, W. (2011). Application of the gamma-Re\_theta transition model to transitional flow. *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, ISAI10-091*. Brussels, Belgium.

Kelterer, M., Pecnik, R., & Sanz, W. (2010). Computation of Laminar-Turbulent Transition in Turbomachinery using the Correlation based GAMMA-RE\_ THETA Transition Model. *ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air GT2010 June 14-18, GT2010-22207*. Glasgow, Scotland.

Kiock, R., Lehthaus, F., Baines, N., & Sieverding, C. (1986). The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 108 , S. 277-284.

Klebanoff, P. (1955). Characteristics of Turbulence in Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. *NACA Technical Report* , S. 1247.

Kluwick, A. (1999). *Skriptum zur Vorlesung "Strömungslehre"*. Technische Universität Wien.

Langtry, R., & Menter, F. (2009). Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes. *AIAA journal* 47 , S. 12.

Malan, P., Suluksna, K., & Juntasaro, E. (2009). Calibrating the Gamma-Re transition model for commercial CFD. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*.

Mayle, R. (1991). The 1991 IGTI Scholar Lecture: The Role of Laminar- Turbulent Transition in Gas Turbine Engines. *Journal of Turbomachinery* 113 (4) , S. 509-536.

Mayrhofer, N. (1996). Optische Strömungsmessung in der Transsonischen Kaskade. *Diplomarbeit* . Graz: Technische Universität Graz.

Mayrhofer, N. (2001). Optische Strömungsmessung in Turbomaschinen mit Laser-Interferometern. *Dissertation* . Graz: Technische Universität Graz.

Menter, F. R. (August 1994). Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal* , S. 32(8).

Menter, F. R., Langtry, R. B., Likki, S. R., Suzen, Y. B., Huang, P. G., & Völker, S. (2004). A correlation-based transition model using local variables: Part i model formulation. *ASME Conference Proceedings 2004 (41693)*, (S. 57-67).

Nichtawitz, M. (2009). Messung der Relaminarisierung der druckseitigen Grenzschicht einer Turbinenschaufel mittels Heißfilmanemometrie. *Diplomarbeit* . Wien: TU Wien.

Österreicher, W. (2004). Messung des laminar/turbulent-Übergangs an Turbinenschaufeln mittels Heißfilmanemometrie. *Diplomarbeit* . Wien: TU Wien.

Pecnik, R. (2007). Transitionsmodellierung in thermischen Turbomaschinen. *Dissertation* . Graz: Technische Universität Graz.

Pieringer, P. (Juli 2010). AiGrid3D.

Piotrowski, W., Lodefier, K., Kubacki, S., Elsner, W., & Dick, E. (2008). *Comparison of Two Unsteady Intermittency Models for Bypass Transition Prediction on a Turbine Blade Profile*. Springer Science+ Business Media B.V.

Römer, N. (1990). Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Umschlagverhalten der Profilhenschicht an Verdichter- und Turbinengittern. *Dissertation*. Universität der Bundeswehr München.

Sanz, W. (1997). Computational Fluid Dynamics. *Vorlesungsskriptum*. Graz: Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik, Technische Universität Graz.

Schlichting, H., & Gersten, K. (2006). *Grenzschicht- Theorie*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Sieverding, C. (1973). *Experimental Data on Two Transonic Turbine Blade Sections and Comparison with Various Theoretical Methods*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics.

Sieverding, C. (1976). *Transonic Flows in Axial Turbomachinery*. von Karman Institute for Fluid Dynamics.

Spalart, P. R., & Allmaras, S. R. (1992). A one equation turbulence model for aerodynamic. *AIAA Paper 92-0439*. Reno, NV.

Spalart, P. R., & Allmaras, S. R. (1994). A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *La Recherche Aérospatiale n 1*.

Steelant, J., & Dick, E. (1996). Modeling of Bypass Transition with Conditioned Navier-Stokes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23, S. 193-220.

Steiner, H. (2008). Höhere Strömungslehre und Wärmeübertragung. *Vorlesungsskriptum*. Graz: Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung, Technische Universität Graz.

Unger, D. (1999). Numerische Simulation des laminar-turbulenten Grenzschichtumschlags unter Turbomaschinenbedingungen. *Dissertation*. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt.

Versteeg, H., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method (2nd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall.

Warren, E., Harris, J., & Hassan, H. (1995). Transition model for high-speed flow. *AIAA journal*, 33(8), S. 1391-1397.

Wilcox, D. C. (1988). Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, vol.26, no.11, S. 1299-1310.

Wilcox, D. (2006). *Turbulence modeling for CFD*. CA: DCW industries La Canada.

Willinger, R. (1996). Messdaten: Turbinengitter T100 (ebene Strömung) - Nachlaufmessung mit Dreilochsonde. *Laborbericht*. Wien: TU Wien.

Woisetschläger, J., Hampel, B., Lang, H., & Göttlich, E. (2002). *Thermographic Measurements on a VKI-profile in a linear cascade*. Graz: Technische Universität Graz.

Woisetschläger, J., Mayrhofer, N., Hampel, B., Lang, H., & Sanz, W. (2003). *Laser-optical investigation of turbine wake flow*. Springer Verlag.

Zarzycki, R., & Elsner, W. (2005). The effect of wake parameters on the transitional boundary layer on a turbine. *IMechE Part A. J. Power Energy* 219, S. 471–480.