Beatrice Kraxner

Spezielle Kreiskonfigurationen der euklidischen Ebene

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra rerum naturalium

Diplomstudium Lehramtsstudium im Unterrichtsfach Darstellende Geometrie

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer:
Univ.-Prof. Dr. Otto Röschel

Institut für Geometrie

Graz, Juni 2014

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present diploma thesis.

Datum/Date	Unterschrift/Signature

Danksagung

Ich danke meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. Otto Röschel für die Zeit, die er sich für mich genommen hat und für die hervorragende Betreuung.
Weiters danke ich meiner Familie für die jahrelange Geduld und für den Rückhalt, den sie mir in all den Jahren gegeben hat.

Kurzfassung

Ein Arbelos, oder auch Schustermesser, ist eine geometrische Figur, die von drei sich paarweise berührenden Halbkreisen gebildet wird. Sind ihre Mittelpunkte kollinear, so spricht man von einem kollinearen Arbelos, sonst von einem verallgemeinerten Arbelos.
H. Okumura zeigt in seiner Arbeit „Archimedean Circles of the Collinear Arbelos and the Skewed Arbelos“ die Kongruenz der Archimedischen Zwillinge eines Kollinearen Arbelos. Der Abschnitt „Zyklographie“ gibt eine Einführung in die zyklographische Abbildungsmethode und deren wichtigsten Eigenschaften. Im zweiten Abschnitt wird diese Methode beim Beweis der Kongruenz der archimedischen Zwillinge, also jener Kreise mit gleichen Radien, die einem Arbelos eingeschrieben werden können, verwendet. Dieser Abschnitt enthält noch weitere Beweise dieses Sachverhaltes, die jedoch synthetisch geführt werden. Ein Abschnitt über verallgemeinerte Arbeloi zeigt, dass es auch in diesem Fall kongruente Kreise gibt, und es hierfür wieder verschiedenste Möglichkeiten gibt, die Kongruenz nachzuweisen.
In der Diplomarbeit werden weitere Kreiskonfigurationen in Arbeloi untersucht.

Abstract

An ‘arbelos’, also called ‘shoemaker’s knife’, is a geometric figure confined by three mutually tangent semicircles. If the centers of the circles in an arbelos are collinear we call the arbelos ‘collinear’, otherwise ‘skewed’.

In his paper ‘Archimedean Circles of the Collinear Arbelos and the Skewed Arbelos’ H. Okumura showed that an arbelos conceals remarkable pairs of congruent circles. In the case of a collinear arbelos they are often referred to as ‘Archimedean twins’.

The first section of this diploma thesis presents the cyclographic mapping and some interesting statements on cycles. This mapping is a valuable tool in the investigation of circles in the Euclidean plane. Section 2 and 3 deal with the collinear and the skewed arbelos. We offer a number of different proofs to some of Okumura’s statements using the cyclographic mapping and other geometric methods. Some of them turn out to be particularly succinct.

Further results on circle configurations related to arbeloi are also studied in this thesis.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

H. Okumura hat sich in den letzten Jahren mit sogenannten Arbeloi und deren archimedischen Kreisen beschäftigt. In dieser Diplomarbeit werden die von H. Okumura meist durch Berechnungen gewonnen Resultate mit Methoden der Zyklographie hergeleitet.

In Abschnitt 1 werden die Begriffe Zykel, Speer und die Abbildungsmethode der Zyklographie erklärt und auf Eigenschaften von Zykeln eingegangen. Ich beziehe mich in diesem Abschnitt auf [4], [11], [12] für die Zyklographie, sowie auf [13], [15] und [16] für die Eigenschaften von Zykeln.

In Abschnitt 2 werden der kollineare Arbelos und seine archimedischen Zwillinge definiert. H. Okumura hat in [6] elementargeometrisch bewiesen, dass die Zwillinge gleichen Radius besitzen. In dieser Arbeit werden drei weitere Beweismöglichkeiten gezeigt. Der erste Beweis wird mit Hilfe der Zyklographie geführt, der zweite und dritte folgen synthetisch. Der dritte Beweis bezieht sich dabei auf [2].

In Abschnitt 3 werden verallgemeinerte Arbeloi vorgestellt. Auch hier gibt es kongruente Kreise, die dem verallgemeinerten Arbelos eingeschrieben werden können, wie H. Okumura in [6] gezeigt hat. Zu seinem elementargeometrischen Beweis der Kongruenz der eingeschriebenen Kreise werden in dieser Diplomarbeit ein zyklographischer und ein weiterer synthetischer Beweis hinzugefügt.

Abschnitt 4 enthält einen umfangreichen Beweis einer Aussage, die in Abschnitt 3 für eine Konstruktion von berührenden, kongruenten Kreisen benötigt wird.

Weitere Verallgemeinerungen dieser Fragestellungen finden sich zum Beispiel in [5], [8] und [9].
Alle Bilder, die in dieser Arbeit enthalten sind, wurden mit GeoGebra 4.4.36.0 erstellt.

1 Zyklographie

1.1 Definitionen

Die folgenden Begriffe und Definitionen finden sich in etwa in [4].
Gegeben sei der projektiv abgeschlossene Anschauungsraum $\overline{\mathbb{E}}_3$ und ein kartesisches Normalkoordinatensystem $\{O; x, y, z\}$ mit einer Einheit e. Sei die Ebene π $(z = 0)$ eine horizontale Ebene im $\overline{\mathbb{E}}_3$, die den Raum in einen positiven und einen negativen Halbraum trennt. Der positive Halbraum liege oberhalb von π, der negative unterhalb. Raumpunkte mit positiver z-Koordinate liegen im positiven Halbraum, jene mit negativer z-Koordinate im negativen Halbraum. Ist die z-Koordinate gleich null, so liegen sie in der Ebene π.

Wir betrachten Kreise, die in der festen Ebene π liegen. Jeder Kreis soll mit einem Durchlaufsinn versehen sein, der entweder positiv oder negativ sein kann. Ein Kreis mit positiver Orientierung sei gegen den Uhrzeigersinn, ein Kreis mit negativer Orientierung im Uhrzeigersinn durchlaufen (siehe Abb. 1.1).

Definition 1. *Ein orientierter Kreis wird Zykel genannt.*

Um die beiden Zykel voneinander zu unterscheiden, werden die Radien mit positiven oder negativen Vorzeichen gekennzeichnet.
Ebenso kann eine Gerade aus π mit Orientierung versehen werden. Die Gerade teilt π in eine „positive“ und eine „negative“ Halbebene. Die positive Seite der orientierten Gerade liege auf der linken Seite, wenn man in Richtung der Orientierung blickt. Die negative Seite liege dementsprechend auf der rechten Seite.

Definition 2. *Eine orientierte Gerade wird als Speer bezeichnet.*

Ein Speer kann auch als Grenzfall eines Zykels gesehen werden, dessen Mittelpunkt ein Fernpunkt ist und dessen Radius unendlich beträgt. Ein Zykel mit Radius gleich null trägt den Namen *Nullzykel.* Eine Tangente an einen Zykel erhält vom Zykel die Orientierung und kann daher als Speer aufgefasst werden. Im Berührpunkt haben Speer und Zykel dieselbe Orientierung.

Definition 3. *Zwei Zykel berühren sich, wenn sie im Berührpunkt einen gemeinsamen Speer besitzen. Liegt im Berührpunkt entgegengesetzte Orientierung der Zykel vor, so berühren sich die Zykel „uneigentlich“.*

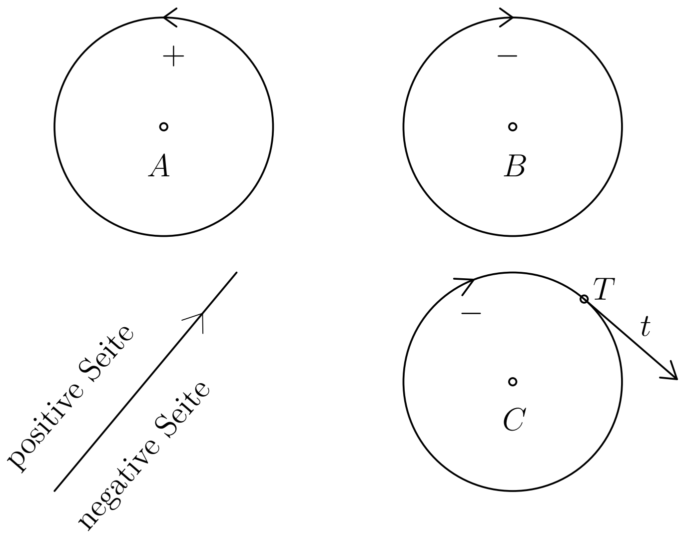


Abbildung 1.1: Zykel, Speer und Zykel mit Tangente

Definition 4. *Die Zyklographie ist eine Abbildung, die jedem Raumpunkt $P(x/y/z) \in \mathbb{E}_3$ einen Zykel eindeutig zuordnet. Der Mittelpunkt M des Zykels ist dabei der Grundriss $P'(x/y/0)$ und der Radius r entspricht der z-Koordinate des Raumpunktes. Die Orientierung ergibt sich aus dem Vorzeichen der z-Koordinate. Der Zykel ist mathematisch positiv orientiert, wenn $z > 0$ beziehungsweise negativ orientiert, wenn $z < 0$ gilt. Ist $z = 0$, so ist der Zykel ein Nullzykel und fällt mit dem Punkt P zusammen. Sei Z die Menge aller Zykel in π. Dann ist die Abbildung definiert als*

$$\varphi := \begin{cases} \mathbb{E}_3 \to Z \\ P(x/y/z) \mapsto \varphi(P) = k[M = P', r = \pm z] \end{cases}$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv, da jedem Zykel eindeutig ein Raumpunkt zugeordnet werden kann.

Durch jeden Raumpunkt P und sein zyklographisches Bild kann ein Drehkegel mit Spitze in P und dem Basiskreis $\varphi(P)$ erzeugt werden. Da seine Höhe mit dem Radius übereinstimmt, schließen seine Erzeugenden mit der Ebene π einen Winkel von 45° ein. In [4] werden diese Drehkegel „45°-Kegel durch $\varphi(P)$“ genannt. Aufgrund dieser besonderen

Eigenschaft haben alle Drehkegel dieselbe Kurve zweiter Ordnung k_u in der Fernebene Ω des $\overline{\mathbb{E}}_3$ gemeinsam. Wir werden den zu $\varphi(P)$ gehörenden Drehkegel mit $K_{\varphi(P)}$ bezeichnen.

Diese 45°-Kegel können auch konstruiert werden, indem man durch jeden Punkt des zyklographischen Bildes von P eine Gerade legt, die gegenüber π unter 45° geneigt ist, wobei alle Geraden P enthalten. Ebenso können durch jeden Punkt eines Speeres in π zwei Geraden gelegt werden, die mit π einen Winkel von 45° einschließen. Man erhält somit zwei um 45° gegen π geneigte Ebenen, die den Speer als Schnittgerade besitzen. Weil die Ebenen und die Erzeugenden der zuvor beschriebenen Drehkegel um denselben Winkel gegen π geneigt sind, berühren die Ebenen die Fernkurve k_u.
Die Speere liegen in π und π trennt den Raum in einen positiven und negativen Halbraum, weshalb auch die beiden Ebenen eines Speeres von π in eine positive – jener Teil im positiven Halbraum – und in eine negative Halbebene – jener Teil im negativen Halbraum – geteilt werden. Um einem Speer eindeutig eine der beiden Ebenen zuzuordnen, vereinbart man, dass jene Ebene zu einem Speer gehört, „deren positive Halbebene im Normalriß auf π (Grundriß) die positive Seite des Speers ... überdeckt“[1]. Kurz gesprochen: Zu einem Speer gehört jene Ebene, deren „Bergseite“ links des Speers liegt, wenn man Richtung der Orientierung blickt.

1.2 Berührende Zykel

Zunächst suchen wir nach einem Zykel γ, der einen gegebenen Zykel α berührt. Wie oben bereits festgehalten, müssen die Zykel im Berührpunkt T dieselbe Orientierung und einen gemeinsamen Tangentialspeer t in T besitzen.

Für die 45°-Kegel mit Scheiteln in den zyklographischen Originalen $\varphi^{-1}(\alpha)$ und $\varphi^{-1}(\gamma)$ von α und γ bedeutet dies, dass sie sich entlang einer Erzeugenden berühren und dort eine gemeinsame Tangentialebene haben, die π im Speer t schneidet. Daher liegt auch der Kegelscheitel des zugehörigen Drehkegels zum gesuchten Zykel γ auf einer Erzeugenden des Drehkegels, der zu α gehört.

Resultat: Berühren sich zwei Zykel, so ist das zyklographische Original des einen Zykels auf dem 45°-Kegel des anderen Zykels enthalten und umgekehrt.

Gegeben seien zwei Zykel α und β. Gesucht ist ein Zykel γ, der α und β berührt. Wie zuvor betrachten wir die 45°-Kegel K_α und K_β durch die gegebenen Zykel. Das zyklo-

[1] Vgl. Müller, E.: S.13

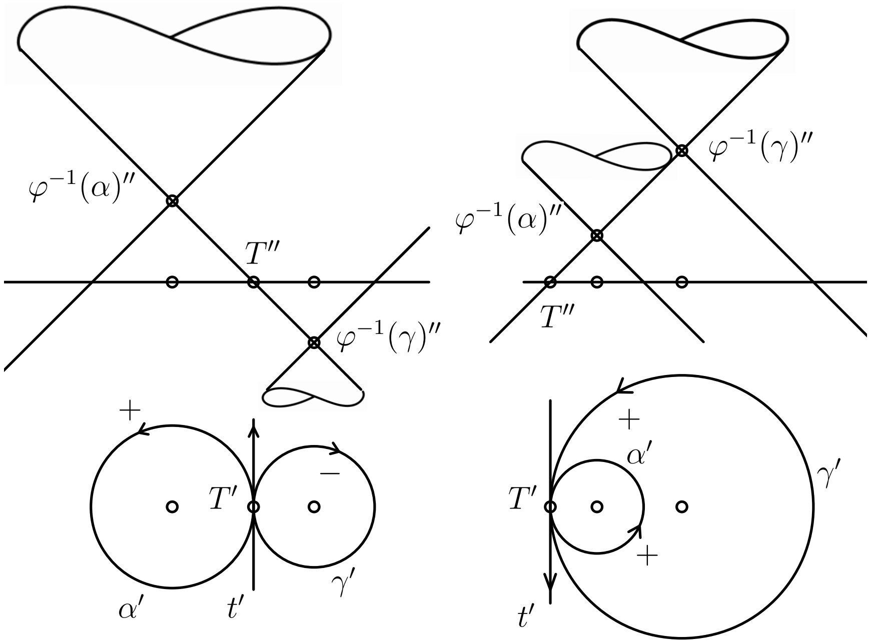


Abbildung 1.2: Beispiele für berührende Zykel in Grund- und Aufriss

graphische Original von γ muss aufgrund des obigen Resultates sowohl auf K_α als auch auf K_β liegen. Die möglichen Orte der zyklographischen Originale von γ sind daher auf dem Schnitt der Drehkegel K_α und K_β. Die Drehkegel haben bereits eine Schnittkurve zweiter Ordnung k_u in der Fernebene gemeinsam, weshalb die Schnittkurve zerfällt. Die restliche Schnittkurve c muss ebenfalls eine Kurve zweiter Ordnung sein, also eine Ellipse, Hyperbel, Parabel oder eine Erzeugende, längs der sich beide Drehkegel berühren. In Abb.1.3 sind diese Schnittkurven rot dargestellt. Die Brennpunkte der Kegelschnitte fallen im Grundriss mit den Kegelscheiteln von K_α und K_β zusammen [2]. $\varphi^{-1}(\gamma)$ kann beliebig auf diesem Restschnitt gewählt werden. Der Radius und die Orientierung des zugehörigen Zykels γ ergeben sich daraus direkt (siehe Abb. 1.3).

1.3 Ähnlichkeitszentrum von Zykeln

Es sind nun zwei Zykel α und β mit Mittelpunkten M_α beziehungsweise M_β in der Ebene π gegeben. Die 45°-Kegel, die durch α und β bestimmt sind, sollen mit K_α und K_β bezeichnet werden, ihre Scheitel mit S_α und S_β.

Wir betrachten die Geraden $g' = [M_\alpha, M_\beta]$ und $g = [S_\alpha, S_\beta]$ (siehe Abb. 1.8). Sie

[2]Vgl. Pillwein, G., et. al.: S. 41–43 oder
Vgl. Brauner, H.: S. 171, 172

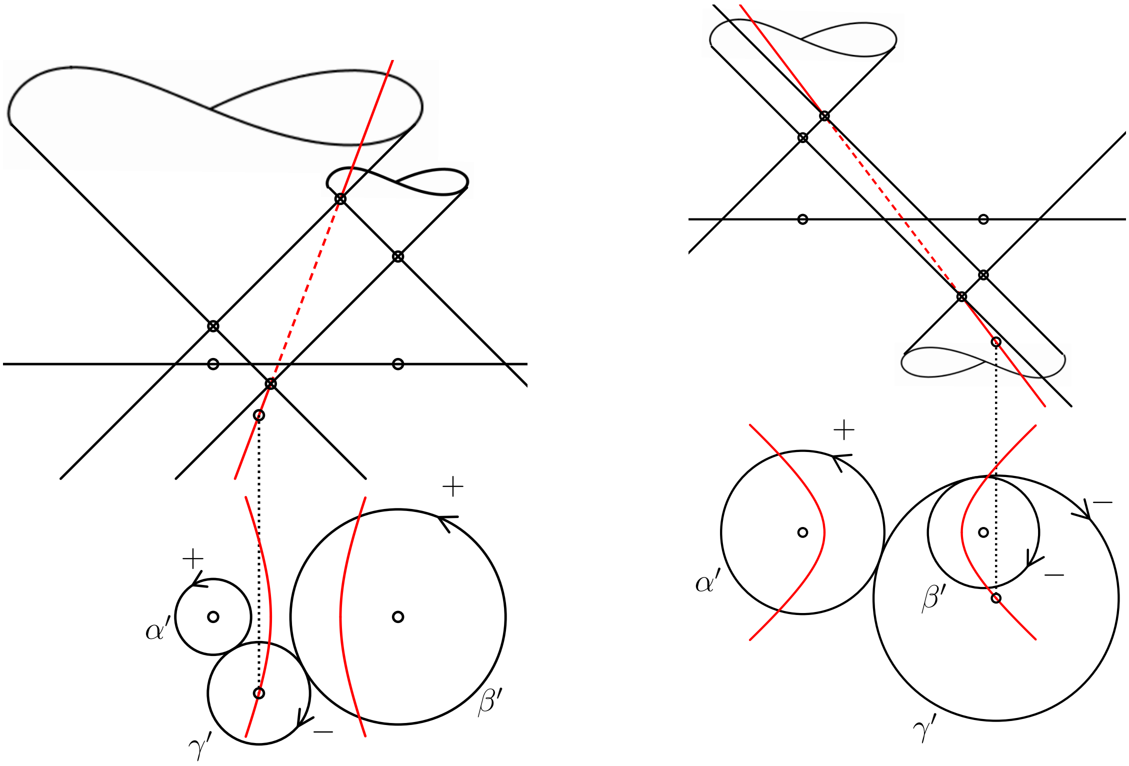


Abbildung 1.3: Beispiele für einen Zykel, der zwei gegebene Zykel berührt

spannen eine Ebene σ auf, die normal zu π und eine Symmetrieebene der Drehkegel ist. Im Allgemeinen schneidet die Gerade g die Gerade g' und somit auch π in einem Punkt Z. Die Dreiecke $ZM_\alpha S_\alpha$ und $ZM_\beta S_\beta$ in σ sind zueinander ähnlich, da die Geraden durch $[M_\alpha, S_\alpha]$ und $[M_\beta, S_\beta]$ parallel sind. Daher ist der Strahlensatz anwendbar, und es ergibt sich das Verhältnis $\overline{ZM_\alpha} : \overline{M_\alpha S_\alpha} = \overline{ZM_\beta} : \overline{M_\beta S_\beta}$.

Die Dreiecke $ZM_\alpha S_\alpha$ und $ZM_\beta S_\beta$ werden in die Ebene π geklappt (siehe Abb. 1.8). Da die Höhen der Drehkegel mit den Radien der Zykel übereinstimmen, inzidieren die in π geklappten Punkte S_α und S_β mit α beziehungsweise β. Das obige Verhältnis bleibt erhalten und die Strecken $\overline{M_\alpha S_\alpha}$ und $\overline{M_\beta S_\beta}$ sind nach wie vor parallel. Es existiert daher eine Ähnlichkeit mit Zentrum Z, die α mit seiner Orientierung in β überführt. Der Punkt Z wird als das Ähnlichkeitszentrum der beiden Zykel angesprochen. Dieses Resultat halten wir im folgenden Satz fest:

Satz 1. *Das Ähnlichkeitszentrum zweier Zykel ist der Schnittpunkt der Verbindungsgerade durch die zyklographischen Originale mit π.*

Bemerkung 1. *Im Sonderfall, dass die beiden Zykel kongruent sind, ist die Ähnlichkeit eine Schiebung, das Zentrum Z ein Fernpunkt von π.*

1.4 Potenz und Potenzgerade

1.4.1 Potenz von Kreisen

Gegeben sei ein Punkt P und ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r. Die Strecke $\overline{MP}$ soll mit d bezeichnet werden.

Definition 5. *Die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises k wird definiert als*

$$p(P, k) = d^2 - r^2 \tag{1.1}$$

Eine Berechnung der Potenz kann über die Kreisgleichung geführt werden. Sei k ein Kreis mit der Gleichung $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2 = r^2$, wobei (x_m/y_m) die Koordinaten seines Mittelpunktes M und r sein Radius sind. Der Punkt P besitze die Koordinaten (x^*/y^*).

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass $(x^* - x_m)^2 + (y^* - y_m)^2 = d^2$ ist. Damit gilt:

Lemma 1. *Die Potenz des Punktes $P(x^*/y^*)$ bezüglich des Kreises k mit obiger Gleichung besitzt den Wert*

$$p(P, k) = (x^* - x_m)^2 + (y^* - y_m)^2 - r^2 \tag{1.2}$$

Bemerkungen zur Berechnung der Potenz:
Es können 3 Fälle unterschieden werden:

1. $d^2 - r^2 > 0$

   P liegt außerhalb des Kreises k, wenn seine Potenz bezüglich k positiv ist. Die Schnittpunkte der Sekante $[M, P]$ mit dem Kreis werden mit A bzw. B bezeichnet, der Berührpunkt der Tangente aus P an k mit T (siehe Abb. 1.4). Aufgrund des Sekanten-Tangenten-Satzes gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{AP} \cdot \overline{BP} &= \overline{PT}^2 \\
\overline{AP} \cdot (\overline{BM} + \overline{MP}) &= \overline{PT}^2 \\
(d - r)(r + d) &= \overline{PT}^2 \\
d^2 - r^2 &= \overline{PT}^2
\end{aligned}$$

Zusätzlich liefert der Satz des Pythagoras:

$$d^2 = r^2 + \overline{PT}^2$$
$$d^2 - r^2 = \overline{PT}^2$$

Daraus folgt, dass die Potenz von P mit dem Quadrat der Länge der Strecke $[P, T]$ auf der Tangente aus P an k übereinstimmt.

2. $d^2 - r^2 = 0$

   Die Potenz der Punkte P, die auf dem Kreis k liegen, ist gleich null.

3. $d^2 - r^2 < 0$

   Das trifft nur auf solche Punkte P zu, die innerhalb des Kreises k liegen.

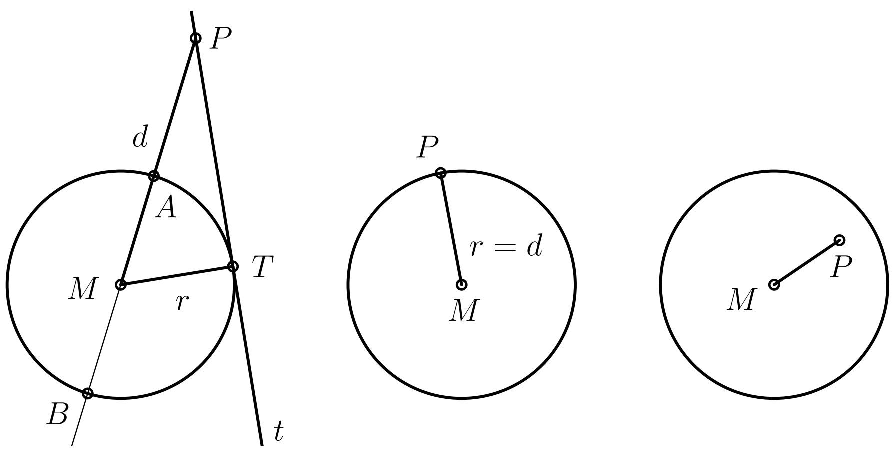


Abbildung 1.4: Potenz eines Punktes P bezüglich eines Kreises k

Gegeben seien die Kreise k_i durch die Mittelpunkte M_i und die Radien r_i, für $i = 1, 2$.

In Bezug auf Lemma 1 ist die Bedingung für die Punkte gleicher Potenz bezüglich k_1 und k_2 durch

$$(x^* - x_{m_1})^2 + (y^* - y_{m_1})^2 - r_1^2 = (x^* - x_{m_2})^2 + (y^* - y_{m_2})^2 - r_2^2 \tag{1.3}$$

gegeben, wobei (x_{m_i}/y_{m_i}) die Koordinaten der Mittelpunkte M_i, r_i die Radien der Kreise k_i sind, für $i = 1, 2$, und (x^*/y^*) die Koordinaten des Punktes P.

Die Bedingung (1.3) liefert wichtige Ergebnisse:
Durch Umformung erhält man:

$$x^*(x_{m_2} - x_{m_1}) + y^*(y_{m_2} - y_{m_1}) = \frac{1}{2}(x_{m_2}^2 - x_{m_1}^2 + y_{m_2}^2 - y_{m_1}^2 + r_1^2 - r_2^2) \tag{1.4}$$

Das ist eine lineare Gleichung in x^*, y^*. Daher ist der Ort von Punkten gleicher Potenz bezüglich k_1 und k_2 eine Gerade. Betrachtet man den Normalvektor

$$\begin{pmatrix} x_{m_2} - x_{m_1} \\ y_{m_2} - y_{m_2} \end{pmatrix}$$

dieser Geraden so erkennt man, dass dieser der Richtungsvektor der Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte der gegebenen Kreise ist. Folglich ist diese Gerade normal zur Verbindungsgerade der Mittelpunkte, der sogenannten *Zentrale*. Wir definieren nun:

Definition 6. *Die Potenzgerade/Chordale zweier Kreise k_1 und k_2 ist die Menge aller Punkte P, die bezüglich der beiden Kreise die gleiche Potenz besitzen. Die Bedingung für die Potenzgerade lautet:*

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

mit $\overline{M_iP} = d_i$ für $i = 1, 2$. Ihre Gleichung wird durch (1.4) erfasst.

Die Potenzgerade zweier Kreise, die sich entweder schneiden oder berühren, verläuft durch die Schnittpunkte beziehungsweise den Berührpunkt, da in diesen Punkten die Potenz bezüglich beider Kreise gleich null ist.

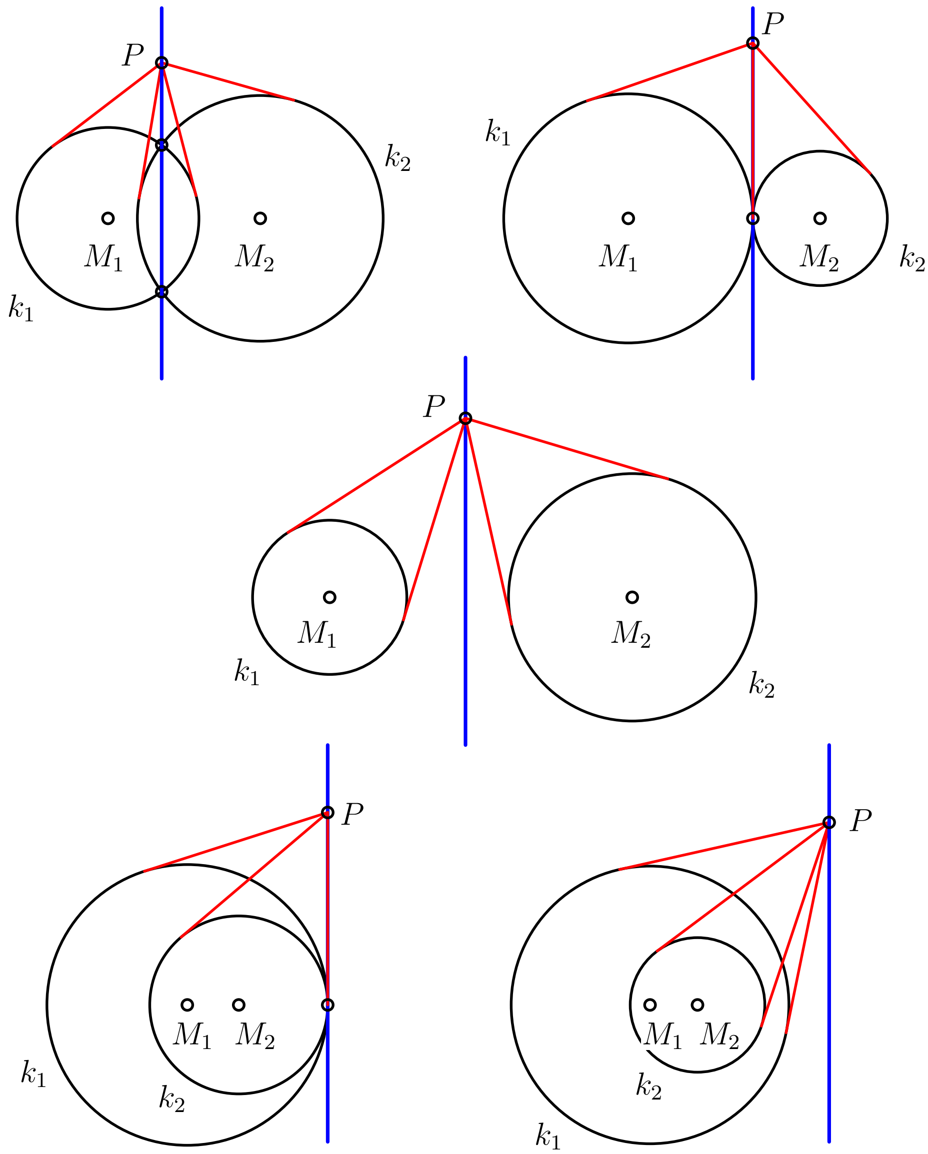


Abbildung 1.5: Potenzgerade zweier Kreise
Quelle: in Anlehnung an: Wikipedia (2013): Potenzgerade,
http://de.wikipedia.org/wiki/Potenzgerade, 12. März 2014

Berühren oder schneiden sich die beiden Kreise nicht, so kann man mit folgendem Satz die Konstruktion der Potenzgerade einfach durchführen:

Satz 2. *Gegeben seien drei Kreise k_1, k_2, k_3, deren Mittelpunkte nicht kollinear sind. Dann schneiden sich die Potenzgeraden zu jeweils zwei Kreisen in einem Punkt, dem Potenzzentrum $\mathcal{P}$ der drei Kreise.*

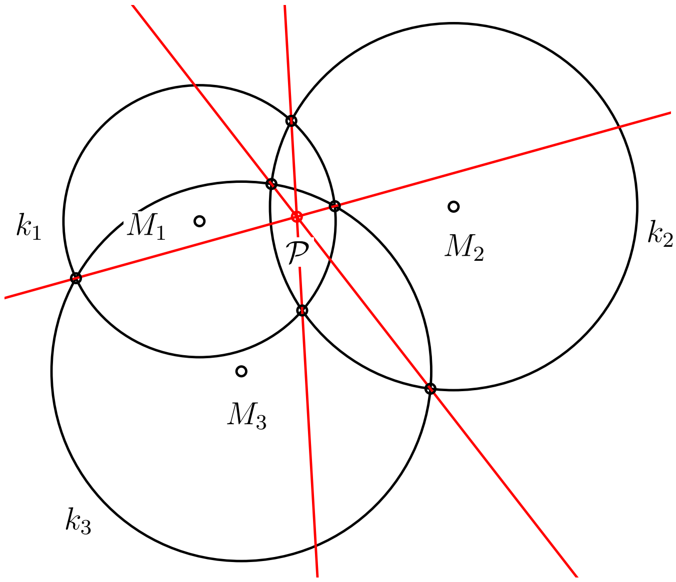


Abbildung 1.6: Potenzzentrum dreier Kreise

Beweis. Betrachtet man die Potenzgerade der Kreise k_1 und k_2, so gilt für Punkte Q_1 auf ihrer Potenzgeraden:

$$p(Q_1, k_1) = p(Q_1, k_2)$$

Genauso gilt für die Potenz der Punkte Q_2 bezüglich der Kreise k_1 und k_3:

$$p(Q_2, k_1) = p(Q_2, k_3)$$

Im Schnittpunkt der beiden Potenzgeraden gilt für den Punkt $\mathcal{P}$:

$$p(\mathcal{P}, k_1) = p(\mathcal{P}, k_2) = p(\mathcal{P}, k_3)$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass die Potenzgerade der Kreise k_2 und k_3 ebenfalls diesen Schnittpunkt enthält, da er die Bedingung der Potenzgerade erfüllt. □

Gesucht ist nun die Potenzgerade $\mathfrak{p}$ zu zwei sich weder schneidenden noch berührenden Kreisen.
Dazu kann man sich einen Hilfskreis einzeichnen, der die beiden gegebenen Kreise k_1 und k_2 schneidet. Das Potenzzentrum der nunmehr vorliegenden drei Kreise ist der Schnittpunkt der beiden leicht zu konstruierenden Potenzgeraden. Die gesuchte Potenzgerade $\mathfrak{p}$ verläuft wegen Satz 2 senkrecht zur Verbindungsgerade der Mittelpunkte von k_1 und k_2 und durch das bereits konstruierte Potenzzentrum.

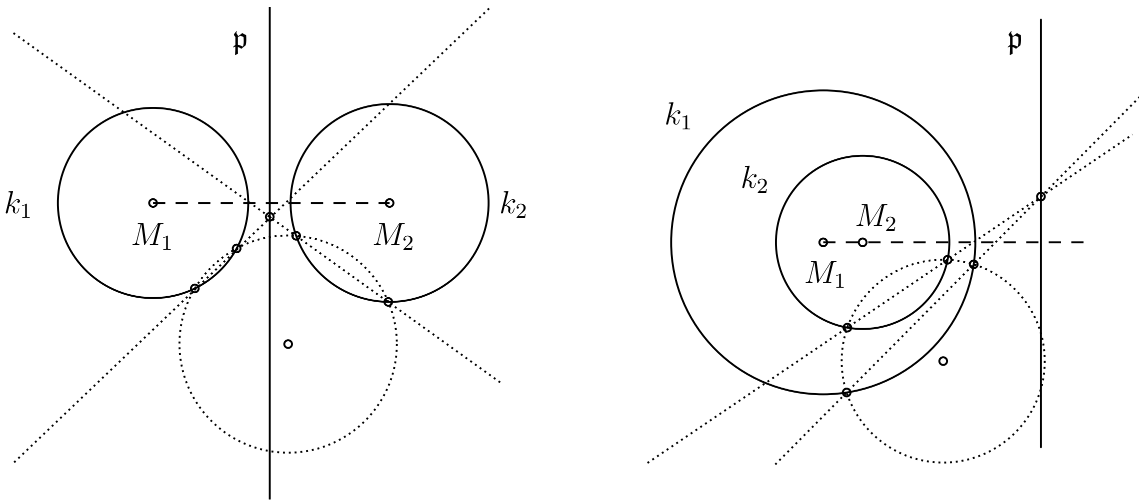


Abbildung 1.7: Konstruktion der Potenzgerade zweier Kreise mit einem Hilfskreis

1.4.2 Potenzgerade von Zykeln

Gegeben seien zwei Zykel α und β. Als Potenzgerade der Zykel α und β wollen wir die Potenzgerade ihrer Trägerkreise definieren. Die Ebene σ, die die Mittelpunkte der Zykel M_α, M_β und die Scheitel S_α, S_β der durch α und β bestimmten Drehkegel K_α, K_β enthält, ist normal zu π und eine Symmetrieebene der Drehkegel. Die Lage der Zykel kann immer so gewählt werden, dass jene Ebene ε, die die Schnittkurve c enthält, normal zur Aufrissebene liegt, wobei σ als Aufrissebene gewählt werden kann. Die eigentlichen Schnittpunkte der beiden Erzeugendenpaare in σ sollen mit A und B bezeichnet werden. Diese liegen in ε und sind die Scheitel der Kurve zweiter Ordnung c. Somit ist auch die Ebene ε im Aufriss eindeutig bestimmt. Die Spur e von ε in der Ebene π erscheint im Aufriss projizierend. Die Spur ist daher normal zur Zentrale der beiden Zykel, und die Schnittpunkte von α und β müssen auf ihr liegen, weil ε alle Punkte enthält, die auf beiden Drehkegeln liegen und in π die Schnittpunkte der beiden Zykeln gleichzeitig jene Punkte mit gleicher Potenz bezüglich α und β sind. e erfüllt somit alle Bedingungen einer Potenzgerade der Trägerkreise von α und β und ist deshalb die Potenzgerade der beiden gegebenen Zykel.

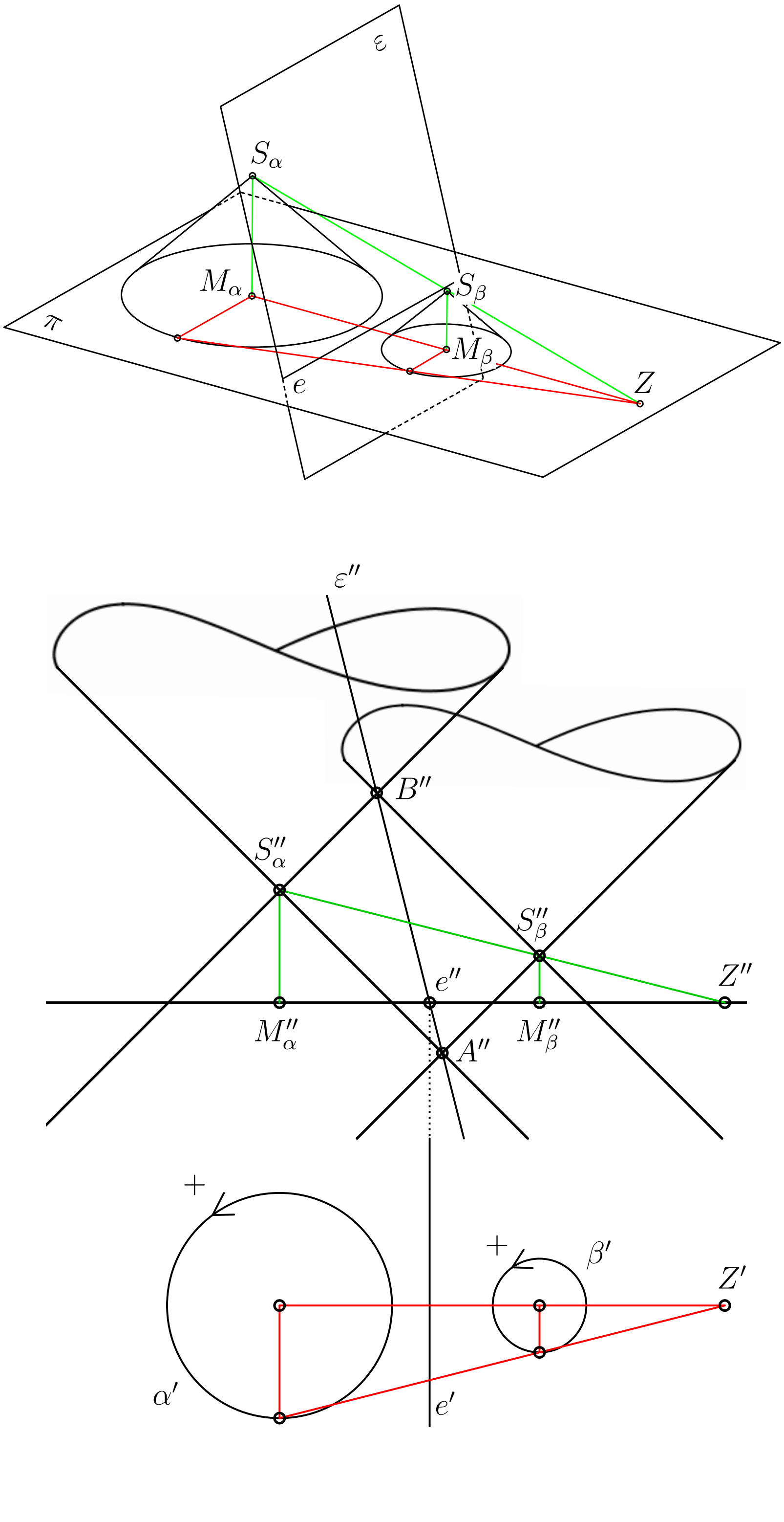


Abbildung 1.8: Potenzgerade und Ähnlichkeitszentrum von Zykeln

1.5 Tangentialentfernung von Zykeln

Gegeben sind zwei Zykel α und β. Im Allgemeinen besitzen zwei Kreise vier gemeinsame Tangenten, jedoch zwei Zykel nur zwei gemeinsame Tangentialspeere (siehe Abb. 1.9). Sind die beiden Zykel gleich orientiert, so sind die gemeinsamen Tangentialspeere durch die „äußeren“ Tangenten der Kreise mit geeigneter Orientierung definiert, sind sie gegensinnig orientiert, dann durch ihre „inneren“ Tangenten.

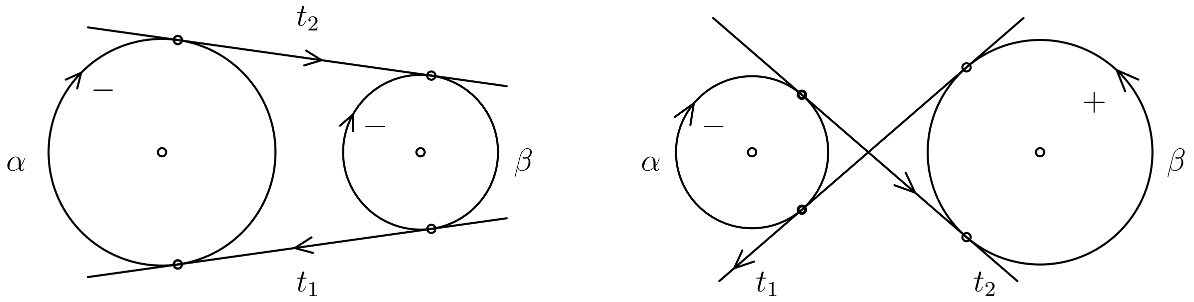


Abbildung 1.9: gemeinsame Tangentialspeere zweier Zykel

Der Abstand der beiden Berührpunkte auf jedem der im Allgemeinen zwei gemeinsamen Tangentialspeere von zwei Zykeln ist gleich. Wie definieren daher:

Definition 7. *Die Tangentialentfernung $t(\alpha, \beta)$ zweier Zykel α und β ist gleich dem auf dem gemeinsamen Tangentialspeer gemessenen Abstand der Berührpunkte auf α und β.*

1.5.1 Berechnung der Tangentialentfernung

Gegeben sind zwei Zykel α und β mit Mittelpunkten M_α, M_β und die zyklographischen Originale S_α und S_β der Zykel. Die Koordinaten der Punkte und die Werte der Radien lauten:

$$M_\alpha(x_\alpha/y_\alpha/0) \quad \text{und} \quad M_\beta(x_\beta/y_\beta/0)$$

$$S_\alpha(x_\alpha/y_\alpha/z_\alpha) \quad \text{und} \quad S_\beta(x_\beta/y_\beta/z_\beta)$$

$$r_\alpha = z_\alpha \quad \text{und} \quad r_\beta = z_\beta$$

In Abb. 1.10 ist eine der möglichen Situationen dargestellt. Der Radius r des zu α konzentrischen Kreises beträgt $r_\alpha - r_\beta$.

Der Satz von Pythagoras liefert folgende Berechnung für den Tangentialabstand zweier Zykel, wobei hier für $t(\alpha, \beta)$ kurz t gesetzt wird:

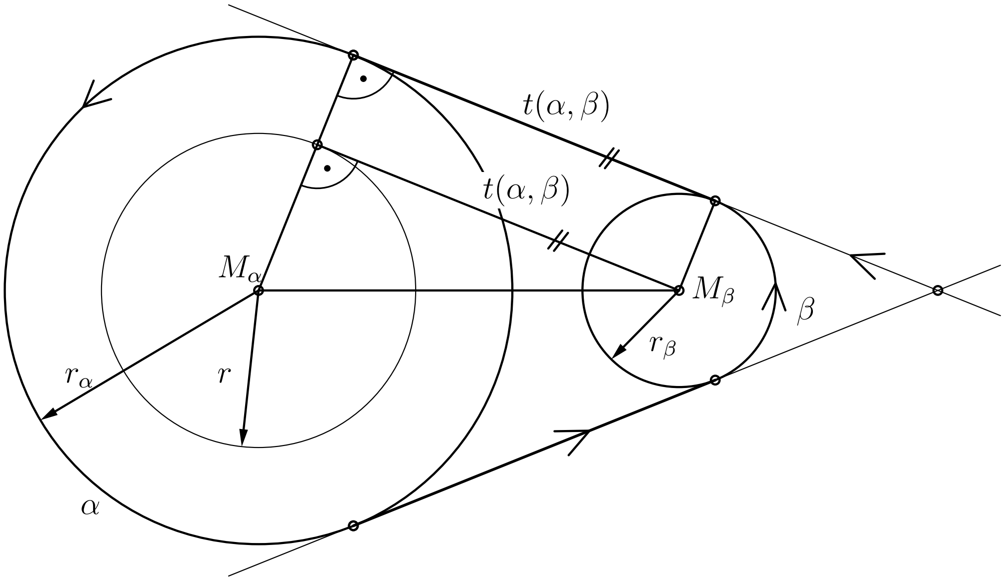


Abbildung 1.10: Tangentialentfernung zweier Zykel

$$
\begin{aligned}
t^2 + r^2 &= (\overline{M_\alpha M_\beta})^2 \\
t^2 + (r_\alpha - r_\beta)^2 &= (x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 \\
t^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2 &= (x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 \\
t^2 &= (x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 - (z_\beta - z_\alpha)^2 \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Da dieser Abstand $t(\alpha, \beta)$ bis auf ein Vorzeichen dem euklidischen Abstand der zyklographischen Originale S_α, S_β gleicht, wird die Tangentialentfernung auch mit dem pseudoeuklidischen Abstand der zyklographischen Originale gleichgesetzt.

Definition 8. *Die Menge aller Zykel, die von einem gegebenen Zykel α, eine feste Tangententialentfernung R haben, heißt Zykelkugel. α wird als Mittenzykel und R als Radius der Zykelkugel bezeichnet.*

Gegeben sei ein Zykel α mit zyklographischem Original in $S_\alpha(x_\alpha/y_\alpha/z_\alpha)$ und $R^2 \in \mathbb{R}$. Wir suchen das zyklographische Original der Zykelkugel mit Mittenzykel α und Radius R. Die Zykelkugel muss die Gleichung

$$R^2 = (x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2 - (z - z_\alpha)^2$$

erfüllen.

Bemerkungen zum zyklographischen Original der Zykelkugel:
3 Fälle können unterschieden werden:

1. $R^2 > 0$

   Das zyklographische Original der Zykelkugel ist im euklidischen Sinn ein einschaliges Drehhyperboloid mit Mitte in S_α.

2. $R^2 = 0$

   Das zyklographische Original der Zykelkugel ist im euklidischen Sinn ein Drehkegel, dessen Erzeugenden mit π einen Winkel von $45°$ einschließen.

3. $R^2 < 0$

   Das zyklographische Original der Zykelkugel ist im euklidischen Sinn ein zweischaliges Drehhyperboloid mit Mitte in S_α.

In allen Fällen ist die Drehachse normal zur Ebene π und verläuft durch S_α. In den Hyperboloidfällen sind die Asymptotendrehkegel $45°$-Drehkegel durch S_α.

2 Kollinearer Arbelos

Die folgenden Bezeichnungen finden sich in [2], [6], [17].

2.1 Definition

Gegeben sind in der Ebene π drei Kreise α, β, γ mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten M_α, M_β, M_γ, die kollinear liegen. Dabei sollen die beiden Kreise α und β den Kreis γ in Durchmesserendpunkten berühren.

Abbildung 2.1: Schustermesser
Quelle: Wikipedia (2013),
http://de.wikipedia.org/wiki/Arbelos,
27. April 2014.

Definition 9. *Die über der Zentrale gelegene Figur der drei Halbkreise wird „kollinearer Arbelos“ genannt.*

Bemerkung 2. *Der Name Arbelos stammt aus dem Griechischen und bedeutet Schustermesser. Abb. 2.2 zeigt die typischen Kreiskonfigurationen, die als Arbeloi bezeichnet werden. Stets sollen α und β entweder beide in γ enthalten sein, oder beide sollen γ umfassen.*

Wir vereinbaren, dass Kreise mit dem Durchmesser $\overline{PQ}$ mit (PQ) bezeichnet werden und dass sie in π liegen.

Von den drei Kreisen $\alpha = (AP)$, $\beta = (BQ)$ und $\gamma = (AB)$ mit kollinearen Punkten A, B, P, Q betrachten wir nur jene Halbkreise, die auf der selben Seite der Gerade g durch die genannten Punkte liegen. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Schnittpunkt der Potenzgerade $\mathfrak{p}$ von α und β mit g in den Koordinatenursprung O fällt und

g auf der y-Achse zu liegen kommt. Die Punkte und die Mittelpunkte $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma$ der Kreise α, β, γ haben die Koordinaten:

$$A(0/a/0) \qquad B(0/b/0) \qquad P(0/p/0) \qquad Q(0/q/0)$$

$$M_\alpha(0/m_\alpha/0) \qquad M_\beta(0/m_\beta/0) \qquad M_\gamma(0/m_\gamma/0)$$

wobei gilt:

$$m_\alpha = \frac{a+p}{2} \qquad m_\beta = \frac{q+b}{2} \qquad m_\gamma = \frac{a+b}{2}$$

Bemerkung 3. *Die drei Halbkreise bilden einen kollinearen Arbelos, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $b < q < p < a$

(ii) $b < p = q < a$

(iii) $b < p < q < a$

(iv) $p < b < a < q$

Im Fall (ii) wird der Arbelos berührender Arbelos genannt.

Für die Radien $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ der Kreise α, β, γ wird vereinbart:

$$r_\alpha, r_\beta, r_\gamma > 0.$$

Dann ist

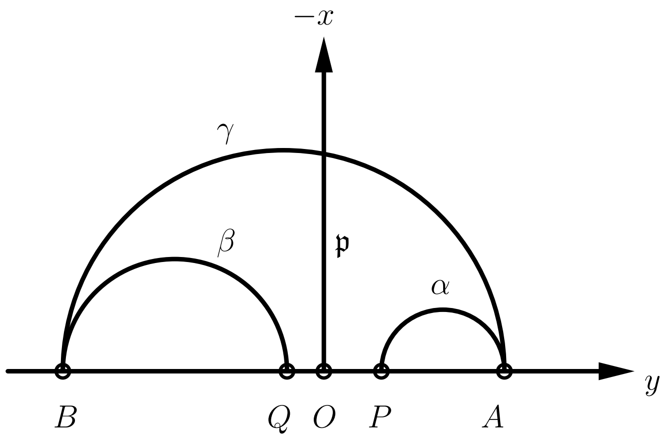
$$r_\alpha = \frac{a-p}{2}, \qquad r_\beta = \frac{q-b}{2}, \qquad r_\gamma = \frac{a-b}{2}.$$

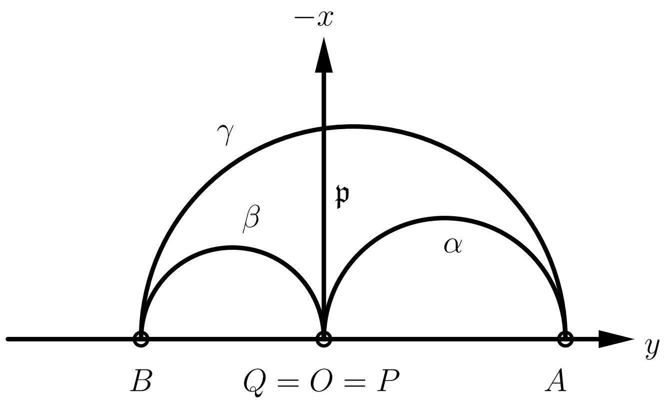
Da O auf der Potenzgerade $\mathfrak{p}$ von α und β liegt, gilt für die Potenz von O bezüglich α und β nach (1.2):

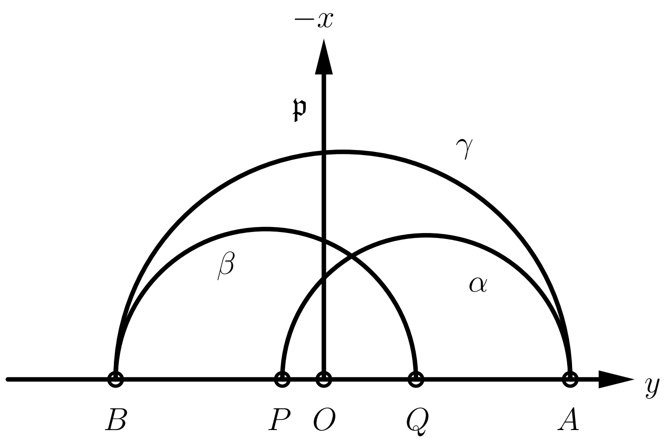
$$\begin{aligned} p(O,\alpha) &= p(O,\beta) \\ m_\alpha^2 - r_\alpha^2 &= m_\beta^2 - r_\beta^2 \\ \frac{(a+p)^2}{4} - \frac{(a-p)^2}{4} &= \frac{(q+b)^2}{4} - \frac{(q-b)^2}{4} \end{aligned}$$

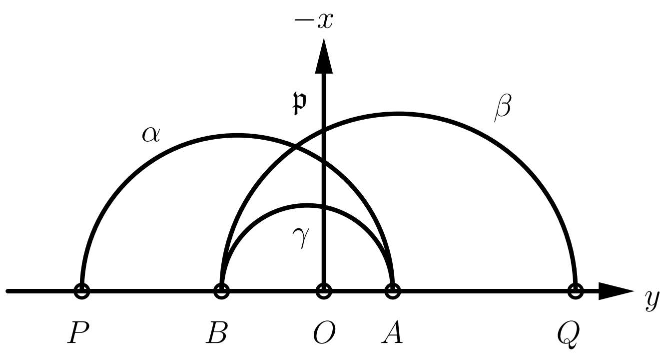
Und daher erhalten wir die Charakterisierung:

$$ap = bq \tag{2.1}$$


$-x$
γ
β
$\mathfrak{p}$
α
y
B
Q
O
P
A


$-x$
γ
$\mathfrak{p}$
β
α
y
B
$Q = O = P$
A


$-x$
$\mathfrak{p}$
γ
β
α
y
B
P
O
Q
A


$-x$
$\mathfrak{p}$
β
α
γ
y
P
B
O
A
Q

2.2 Die archimedischen Zwillinge

Satz 3. *Jene beiden Kreise δ_α und δ_β, die dem kollinearen Arbelos eingeschrieben werden können und einerseits α, γ und $\mathfrak{p}$ und andererseits β, γ und $\mathfrak{p}$ berühren, haben denselben Radius $r = \left|\frac{bq-ab}{2(a-b)}\right|$.*

Definition 10. *Alle dazu kongruenten Kreise heißen archimedische Kreise. Da δ_α und δ_β den gleichen Radius haben, gehören sie zu den archimedischen Kreisen und werden* ***archimedische Zwillinge*** *genannt.*

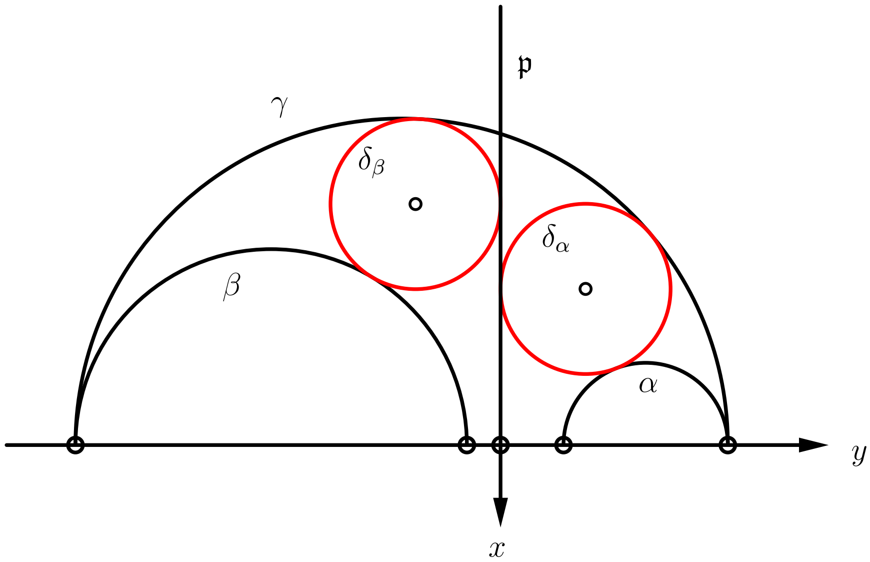


Abbildung 2.3: Kollinearer Arbelos mit archimedischen Zwillingen

Wir werden Satz 3, der in [6] im Rahmen der Elementargeometrie bewiesen wurde, mit Methoden der Zyklographie beweisen. Da es sich um Aussagen über Kreise handelt, müssen zwei Fälle unterschieden werden: Im ersten Fall sind die archimedischen Kreise positiv orientierte Zykel, im zweiten sind sie negativ orientiert.
Es wird hier der erste Fall gezeigt. Der Beweis für den zweiten verläuft analog mit Vorzeichenumkehrung.

Beweis. Die beiden berührenden Zykel δ_α und δ_β sollen positiv orientiert sein. Daraus folgt, dass die Zykel α und β negativ und γ positiv orientiert sind, da in den Berührpunkten gleiche Orientierung vorliegen muss.
In 1.2 wurde gezeigt, dass der Scheitel von 45°-Kegeln jener Zykel, die α und γ beziehungsweise β und γ berühren, auf der Schnittkurve 2. Ordnung der beiden zugehörigen

Drehkegel K_α und K_β beziehungsweise K_β und K_γ durch die jeweils zyklographischen Originale $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$ zu finden ist. Zusätzlich sollen δ_α und δ_β auch die Potenzgerade berühren, weshalb der gesuchte Scheitel auch in der Ebene durch den Speer, den die Potenzgerade mit geeigneter Orientierung definiert, sein muss.
Es genügt hier, die z-Koordinaten der zyklographischen Originale S_{δ_α} und S_{δ_β} zu berechnen, um die Gleichheit der Radien der archimedischen Zwillinge nachzuweisen.

Abb. 2.4 zeigt den Sachverhalt.
Die Drehkegel- und Ebenengleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
K_\alpha: &\quad x^2 + (y - m_\alpha)^2 = (z + r_\alpha)^2 \\
K_\beta: &\quad x^2 + (y - m_\beta)^2 = (z + r_\beta)^2 \\
K_\gamma: &\quad x^2 + (y - m_\gamma)^2 = (z - r_\gamma)^2 \\
\varepsilon_1: &\quad z = y \\
\varepsilon_2: &\quad z = -y
\end{aligned}$$

Für die Höhen der gesuchten Punkte werden die entsprechenden Drehkegel und die Ebene geschnitten. Danach berechnen wir die z-Koordinaten der Schnittpunkte:

$K_\alpha \cap K_\gamma \cap \varepsilon_1$:

$$\begin{aligned}
(z - m_\gamma)^2 - (z - m_\alpha)^2 &= (z - r_\gamma)^2 - (z + r_\alpha)^2 \\
z^2 - 2m_\gamma z + m_\gamma^2 - z^2 + 2m_\alpha z - m_\alpha^2 &= z^2 - 2r_\gamma z + r_\gamma^2 - z^2 - 2r_\alpha z - r_\alpha^2 \\
z_{S_{\delta_\alpha}} &= \frac{r_\gamma^2 - r_\alpha^2 - m_\gamma^2 + m_\alpha^2}{2(r_\gamma + r_\alpha - m_\gamma + m_\alpha)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$K_\beta \cap K_\gamma \cap \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned}
(-z - m_\gamma)^2 - (-z - m_\beta)^2 &= (z - r_\gamma)^2 - (z + r_\beta)^2 \\
z^2 + 2m_\gamma z + m_\gamma^2 - z^2 - 2m_\beta z - m_\beta^2 &= z^2 - 2r_\gamma z + r_\gamma^2 - z^2 - 2r_\beta z - r_\beta^2 \\
z_{S_{\delta_\beta}} &= \frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 - m_\gamma^2 + m_\alpha^2}{2(r_\gamma + r_\beta + m_\gamma - m_\beta)}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Werden die bekannten Werte der Mittelpunkte und Radien in (2.2) und (2.3) eingesetzt, so liefert das nach kurzer Rechnung:

$$z_{S_{\delta_\alpha}} = \frac{ap - ab}{2(a-b)}, \qquad z_{S_{\delta_\beta}} = \frac{bq - ab}{2(a-b)}.$$

Da die x-Achse auch die Potenzgerade der Zykel α und β ist, muss die Bedingung (2.1)

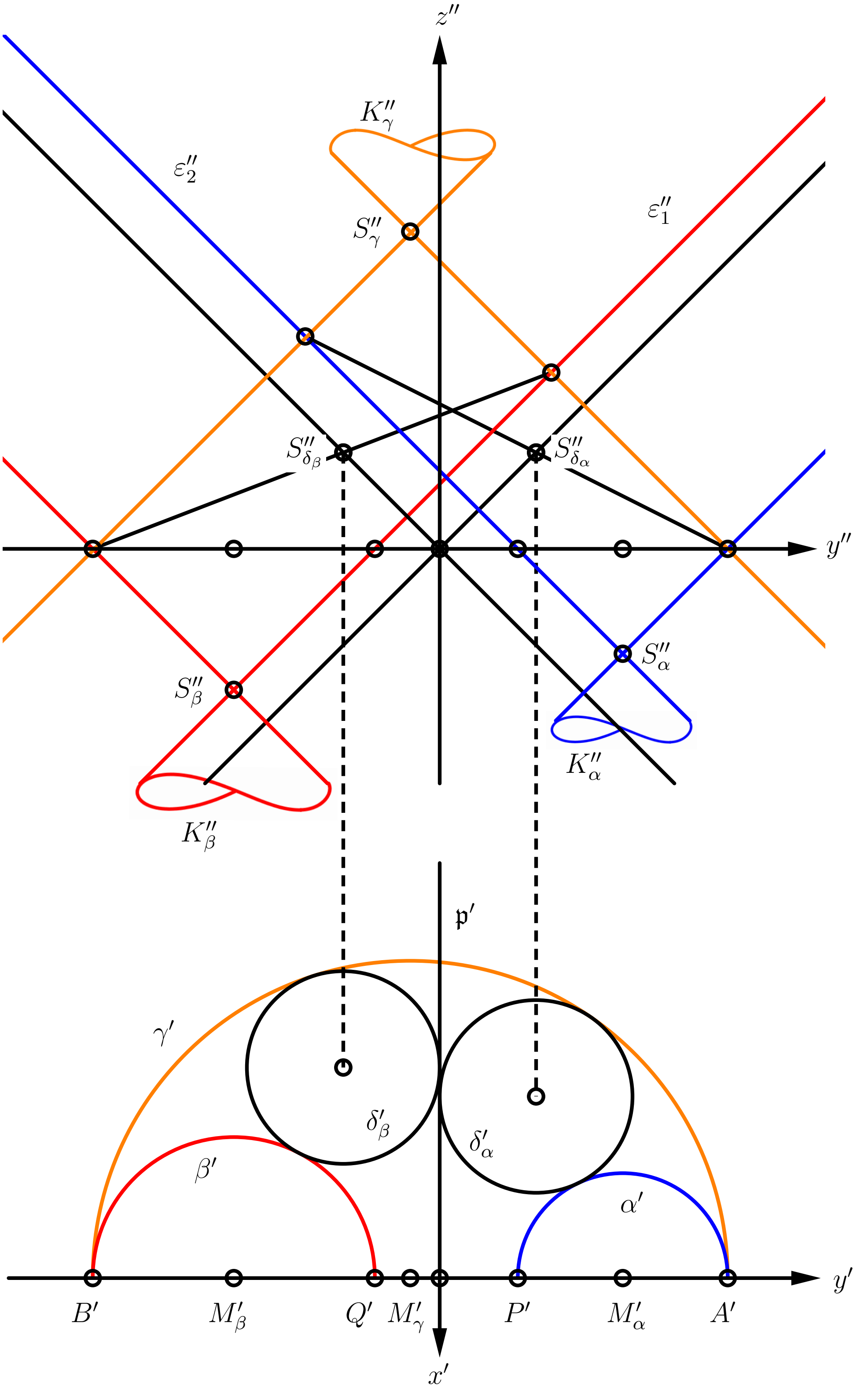


Abbildung 2.4: Konstruktion der archimedischen Zwillinge

verwendet werden. Das ergibt:

$$z_{S_{\delta_\alpha}} = \frac{ap - ab}{2(a-b)} \overset{(2.1)}{=} \frac{bq - ab}{2(a-b)} = z_{S_{\delta_\beta}}.$$

Die Kreisradien sind daher durch

$$\left|z_{S_{\delta_\alpha}}\right| = \left|z_{S_{\delta_\beta}}\right|$$

erfasst. □

Ein synthetischer Beweis für die Gleichheit der Kreisradien aus Satz 3 kann über Ähnlichkeiten geführt werden.

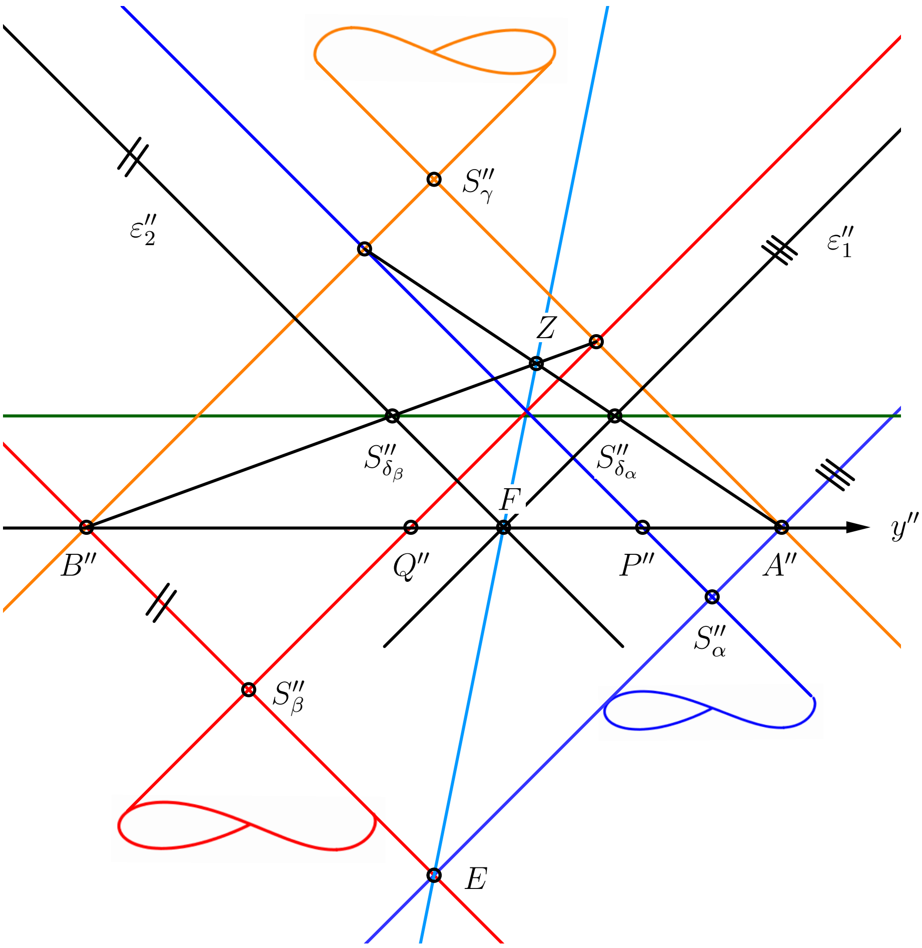


Abbildung 2.5: Beweis mittels zentrischer Ähnlichkeit

Beweis. Die drei Drehkegel K_α, K_β, K_γ schneiden sich in einem Punktepaar, dessen Aufriss in den Punkt Z fällt (Abb. 2.5). Wir wählen eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum Z, die E in F überführt. Es gelten

$$[E, A] \parallel \varepsilon_1'' \quad \text{und} \quad [E, B] \parallel \varepsilon_2''.$$

Daher führt die Ähnlichkeit die Punkte A und B in die Punkte S''_{δ_α} und S''_{δ_β} über. Die Geraden $[A, B]$ und $[S_{\delta_\alpha}, S_{\delta_\beta}]$ sind daher parallel und die Punkte S_{δ_α} und S_{δ_β} haben denselben Abstand von der Ebene π. Dieser Abstand legt den Radius des jeweiligen Kreises fest. Das bedeutet, dass die Radien der archimedischen Zwillinge gleich sind. $\square$

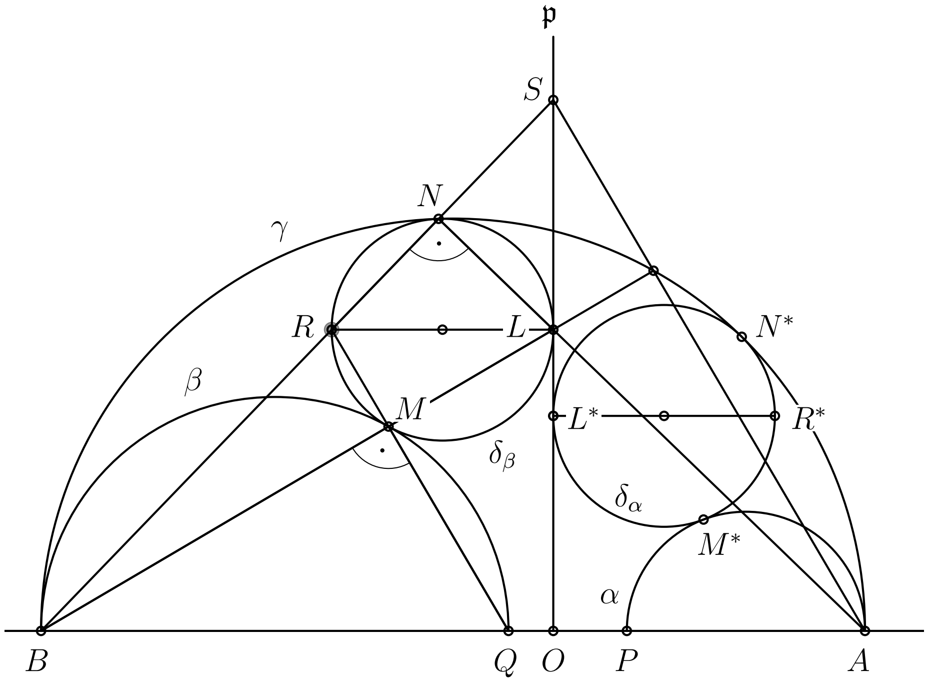


Abbildung 2.6: synthetischer Beweis nach Johnson

Beweis. (nach R. A. Johnson [2])
Die archimedischen Zwillinge δ_α und δ_β berühren die Halbkreise α, β, γ und die Potenzgerade $\mathfrak{p}$ in Punkten L, M, N beziehungsweise L^*, M^*, N^* (siehe Abb. 2.6). Die Strecken $\overline{RL}$ und $\overline{R^*L^*}$ sind Durchmesser dieser Kreise. Die Verlängerung der Strecke $\overline{BN}$ schneidet die Potenzgerade $\mathfrak{p}$ im Punkt S.
In dieser Figur treten mehrere zentrische Ähnlichkeiten auf, von denen wir jene mit Zentren M und N genauer betrachten:

$$\zeta_M := \begin{cases} \beta \to \delta_\beta \\ B \mapsto L \\ Q \mapsto R \end{cases} \qquad \zeta_N := \begin{cases} \gamma \to \delta_\beta \\ B \mapsto R \\ A \mapsto L \end{cases}$$

Die Höhen des Dreiecks ABS sind einerseits die Gerade $[O, S]$ und wegen des Satzes von Thales $[A, N]$. Der Höhenschnittpunkt ist somit L, und die Gerade durch B und L schneidet die Gerade durch A und S im rechten Winkel. Daher sind $[Q, R]$ und $[A, S]$ zueinander parallel.
Im Dreieck OBS gilt nach dem Strahlensatz:

$$\overline{RL} : \overline{BO} = \overline{RS} : \overline{BS}.$$

Im Dreieck ABS gilt:

$$\overline{RS} : \overline{BS} = \overline{AQ} : \overline{AB}.$$

Aus den beiden Verhältnissen folgt für den Durchmesser des Kreises δ_β:

$$\overline{RL} = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{BO}}{\overline{AB}}.$$

Auf gleiche Weise kann der Durchmesser des Kreises δ_α berechnet werden, und man erhält:

$$\overline{R^*L^*} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AO}}{\overline{AB}}.$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass diese beiden Durchmesser übereinstimmen. Da die Nenner bereits gleich sind, ist nur die Gleichheit der beiden Zähler nachzuweisen:

$$\overline{AQ} \cdot \overline{BO} \stackrel{?}{=} \overline{BP} \cdot \overline{AO}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \overline{BP} \cdot \overline{AO} &= (\overline{BO} + \overline{OP}) \cdot \overline{AO} \\ &= \overline{BO} \cdot \overline{AO} + \overline{OP} \cdot \overline{AO} \\ &= \overline{BO} \cdot \overline{AO} + \overline{OQ} \cdot \overline{BO} \\ &= \overline{BO} \cdot \overline{AO} + \overline{OQ} \\ &= \overline{BO} \cdot \overline{AQ} \end{aligned}$$

Die Radien sind daher gleich und besitzen den Wert:

$$r_{\delta_\alpha} = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{BO}}{2 \cdot \overline{AB}} = r_{\delta_\beta}$$

Mit den obigen Werten ergibt das:

$$r_{\delta_\alpha} = \left| \frac{ab - bq}{2(a-b)} \right| = r_{\delta_\beta}$$

□

3 Verallgemeinerter Arbelos

3.1 Definition

Gegeben sind zwei Kreise α und β mit Mittelpunkten M_α und M_β, die sich im Ursprung O von außen berühren. Sie besitzen die Radien r_α und r_β. Der dritte Kreis γ berührt α und β in zwei Punkten A und B, die nicht kollinear mit den Mittelpunkten M_α und M_β der beiden gegebenen Kreise sind.

Definition 11. *Jede von drei sich berührenden Kreisen begrenzte Fläche, wird verallgemeinerter Arbelos genannt.*

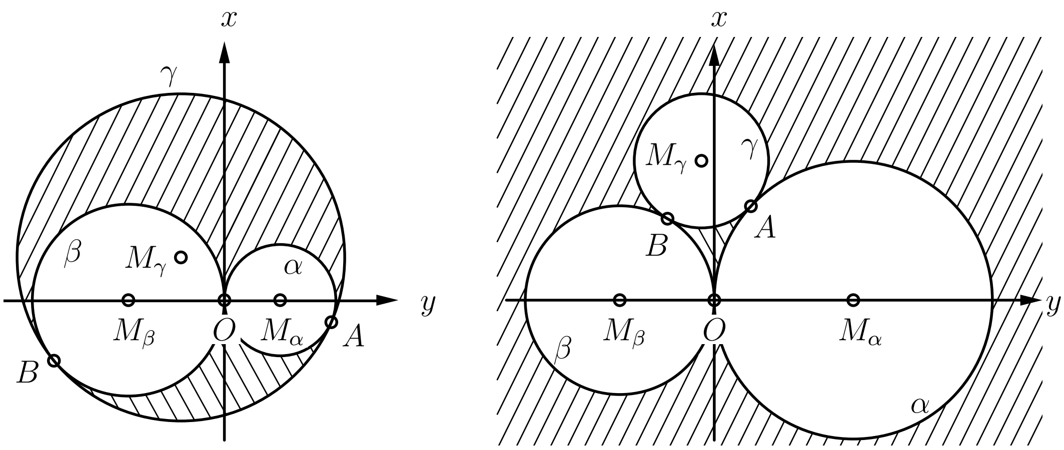


Abbildung 3.1: Verallgemeinerte Arbeloi

Es gibt stets zwei verallgemeinerte Arbeloi, die von drei berührenden Kreisen begrenzt werden. Im Fall, dass γ die gegebenen Kreise α und β von außen berührt (siehe Abb. 3.1, rechts), ist ein Arbelos ein Kreisdreieck, der andere ist ein entarteter Arbelos.

3.2 Kongruente Kreise im verallgemeinerten Arbelos

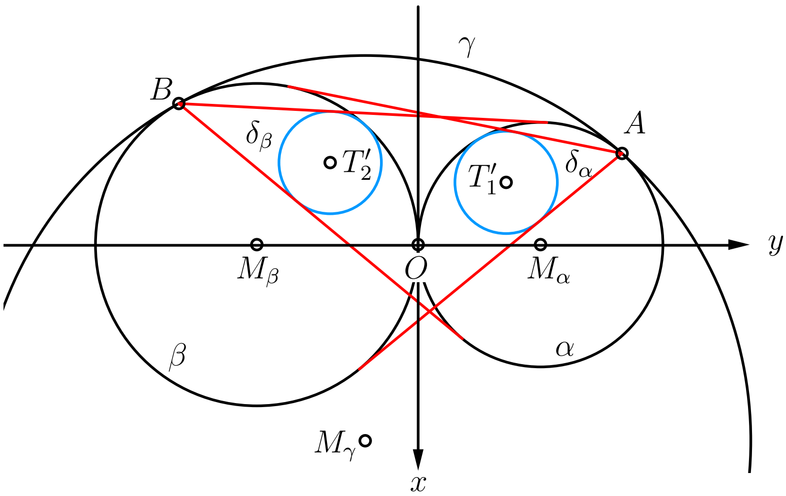


Abbildung 3.2: Kongruente Kreise im verallgemeinerten Arbelos

Gegeben ist ein verallgemeinerter Arbelos.
Für die Radien r_α, r_β und die Koordinaten der Mittelpunkte M_α, M_β der Kreise α und β legen wir folgende Werte fest (für $a, b > 0$):

$$M_\alpha(0/m_\alpha/0) \quad M_\beta(0/m_\beta/0)$$

$$m_\alpha = a, \quad m_\beta = -b$$

$$r_\alpha, r_\beta > 0 \quad \text{mit} \quad r_\alpha = a, \quad r_\beta = b$$

Der Kreis δ_α berührt α und die Tangenten, die aus A an β gelegt werden können, δ_β hingegen den Kreis β und die Tangenten aus B an α. δ_α sei jener von β verschiedene Kreis, dessen Mitte T_1' auf $[A, M_\beta]$ liegt. δ_β hat seinen Mittelpunkt T_2' auf der Geraden $[B, M_\alpha]$. Mit [6] gilt:

Satz 4. *Die Kreise δ_α und δ_β sind kongruent.*

Auch dieser Satz soll mit Hilfe der Zyklographie bewiesen werden. Wie bei Satz 3 müssen hier ebenfalls zwei Fälle unterschieden werden. Wir nehmen an, dass die beiden Kreise δ_α und δ_β positiv orientierte Zykel sind. Im Fall, dass sie negativ orientiert sind, müssen nur die Vorzeichen entsprechend geändert werden.

Beweis. Aufgrund der Annahme, dass δ_α und δ_β positiv orientiert sind, müssen auch die Zykel α und β gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden um die Berührbedingung für Zykel zu erfüllen.
Die Koordinaten der zyklographischen Originale S_α, S_β von α und β sowie die Gleichungen der Drehkegel K_α, K_β durch die zyklographischen Originale, lauten:

$$S_\alpha(0/a/a) \qquad\qquad S_\beta(0/-b/b)$$

$$\begin{aligned} K_\alpha: &\quad x^2+(y-m_\alpha)^2=(z-r_\alpha)^2 \\ K_\beta: &\quad x^2+(y-m_\beta)^2=(z-r_\beta)^2 \end{aligned}$$

Mit den oben festgesetzten Werten erhält man:

$$\begin{aligned} K_\alpha: &\quad x^2+(y-a)^2=(z-a)^2 \\ K_\beta: &\quad x^2+(y+b)^2=(z-b)^2 \end{aligned}$$

Die Punkte A und B hängen vom berührenden Zykel γ ab. Sein zyklographisches Original S_γ muss auf der Restschnittkurve c (in Abb. 3.3 hellblau dargestellt) der beiden Drehkegel K_α und K_β liegen, kann darauf aber beliebig gewählt werden. Da er im Aufriss nur von der Höhe abhängig ist, bezeichnen wir diesen Punkt mit $S_\gamma(h)$, wobei h die z-Koordinate des Punktes $S_\gamma(h)$ misst. Die Schnittkurve c lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} K_\alpha \cap K_\beta: \qquad\qquad (y-a)^2-(y+b)^2 &= (z-a)^2-(z-b)^2 \\ y^2-2ay+a^2-y^2-2by-b^2 &= z^2-2az+a^2-z^2+2bz-b^2 \\ -2y(a+b) &= -2z(a-b) \end{aligned}$$

Damit ist der Aufriss von c projizierend. c liegt in der Ebene mit der Gleichung

$$y=\frac{a-b}{a+b}z.$$

Der Punkt $S_\gamma(h)$ hat demnach die Koordinaten

$$S_\gamma(h)\left(x_{S_\gamma}\Big/\frac{a-b}{a+b}h\Big/\,h\right),$$

wobei die x-Koordinate keine Bedeutung für die weiteren Berechnungen hat und deshalb an dieser Stelle nicht angegeben wird.
A und B sind die Berührpunkte der Zykel α und γ beziehungsweise β und γ und liegen in π. Durch sie verlaufen zwei Erzeugende e_1 und e_2, in denen sich die beiden entsprechenden Drehkegel K_α und K_γ beziehungsweise K_β und K_γ berühren. Diese Berührerzeugenden sind daher zwei Geraden durch die jeweiligen Scheitel der Drehkegel. Auch hier sind die x-Koordinaten der Punkte A und B im weiteren Verlauf nicht relevant, weshalb die folgenden Überlegungen nur für den Aufriss durchgeführt werden.
Die Gleichungen der Aufrisse der beiden Erzeugenden $e_1 = [S_\alpha, S_\gamma]$ und $e_2 = [S_\beta, S_\gamma]$ sind gegeben durch:

$$e_1'' \ldots \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a+b}h - a \\ h - a \end{pmatrix}$$

$$e_2'' \ldots \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a+b}h + b \\ h - b \end{pmatrix}$$

A liegt im Schnitt der Erzeugenden e_1 mit π. Für seine y-Koordinate y_A gilt daher:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a+b}h - a \\ h - a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für λ_1 muss gelten:

$$\begin{aligned} a + \lambda_1(h-a) &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{a}{a-h} \end{aligned}$$

$$y_A = a + \frac{a}{a-h}\left(\frac{a-b}{a+b}h - a\right)$$

$$y_A = \frac{a^3 + a^2b - a^2h - abh + a^2h - abh - a^3 - a^2b}{(a+b)(a-h)}$$

$$y_A = \frac{2abh}{(a+b)(h-a)}$$

A hat somit die Koordinaten:

$$A\left(x_A\Big/\frac{2abh}{(a+b)(h-a)}\Big/0\right)$$

B liegt im Schnitt der Erzeugenden e_2 mit π und besitzt die y-Koordinate y_B, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a+b}h + b \\ h-b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für λ_2 muss daher gelten:

$$\begin{aligned} b + \lambda_2(h-b) &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{b}{b-h} \end{aligned}$$

$$y_B = -b + \frac{b}{b-h}\left(\frac{a-b}{a+b}h + b\right)$$

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{-b^3 - ab^2 + abh + b^2h + abh - b^2h + ab^2 + b^3}{(a+b)(b-h)} \\ y_B &= \frac{2abh}{(a+b)(b-h)} \end{aligned}$$

B hat somit die Koordinaten

$$B\left(x_B\Big/\frac{2abh}{(a+b)(b-h)}\Big/0\right)$$

Die x-Koordinaten von A und B ergeben sich aus der Lage von A und B auf α und β. Da die Zykel δ_α und δ_β die Tangenten aus A an β beziehungsweise aus B an α berühren, müssen ihre zyklographischen Originale T_1 und T_2 auf den Schnittgeraden der beiden zugehörigen Ebenen durch diese Tangenten liegen. Die Ebenen sind gleichzeitig Tangentialebenen aus A an K_β beziehungsweise aus B an K_α. Die Schnittgeraden verlaufen einerseits durch A und S_β, andererseits durch B und S_α, weil die jeweiligen Tangentialebenen diese beiden Punkte enthalten. Lässt man die Punkte A und B auf den Zykeln α und β laufen, so bilden die Schnittgeraden einen schiefen Kreiskegel K_1 beziehungsweise K_2.

Um die Gleichungen der schiefen Kreiskegel zu berechnen, stellen wir zunächst Hilfskegel mit Scheiteln in $(0/m_\alpha/r_\beta)$ und $(0/m_\beta/r_\alpha)$ und den Trägerkreisen von α und β als Basiskreise auf.

$$x^2 + (y - m_\alpha)^2 = \left(\frac{r_\alpha}{r_\beta}\right)^2 (z - r_\beta)^2$$
$$x^2 + (y - m_\beta)^2 = \left(\frac{r_\beta}{r_\alpha}\right)^2 (z - r_\alpha)^2$$

Da die Scheitel zwar die richtige Höhe, aber nicht die passende y-Koordinate haben, muss eine Scherung gefunden werden, um sie in die gewünschte Position zu bringen.

$$(0/m_\alpha/r_\beta) \longrightarrow (0/m_\beta/r_\beta)$$
$$(0/m_\beta/r_\alpha) \longrightarrow (0/m_\alpha/r_\alpha)$$

Eine Scherung, bei der die [xy]-Ebene die Fixpunktsebene ist, und sich nur die y-Werte ändern, hat die Form

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $\sigma \in \mathbb{R}$. Für die erste Scherung muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m_\beta \\ r_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\alpha \\ r_\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{m_\beta - m_\alpha}{r_\beta}$$
$$\Rightarrow y = y^* - \frac{m_\beta - m_\alpha}{r_\beta} z^*.$$

Für die zweite Scherung gewinnen wir analog:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m_\beta \\ r_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\beta \\ r_\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{m_\alpha - m_\beta}{r_\alpha}$$
$$\Rightarrow y = y^* - \frac{m_\alpha - m_\beta}{r_\alpha} z^*.$$

Die Hilfskegel werden diesen Scherungen unterworfen und liefern uns die schiefen Kreiskegel mit folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} K_1 : \quad & x^2 + \left(y - \frac{m_\beta - m_\alpha}{r_\beta} z - m_\alpha \right)^2 = \left(\frac{r_\alpha}{r_\beta} \right)^2 (z - r_\beta)^2 \\ K_2 : \quad & x^2 + \left(x - \frac{m_\alpha - m_\beta}{r_\alpha} z - m_\beta \right)^2 = \left(\frac{r_\beta}{r_\alpha} \right)^2 (z - r_\alpha)^2 \end{aligned}$$

Wir formen noch um:

$$\begin{aligned} K_1 : \quad & x^2 + \left(y + \frac{a+b}{b} z - a \right)^2 = \left(\frac{a}{b} \right)^2 (z - b)^2 \\ K_2 : \quad & x^2 + \left(y - \frac{a+b}{a} z + b \right)^2 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 (z - a)^2 \end{aligned}$$

Die möglichen Orte von T_1 liegen auf der Schnittkurve des Drehkegels K_α mit dem schiefen Kreiskegel K_1. Die Schnittkurve zerfällt, da die beiden Kegel bereits eine Kurve zweiter Ordnung - nämlich den Trägerkreis von α - gemeinsam haben. Die Restschnittkurve muss eine Parabel sein, weil das im Aufriss parallele Erzeugendenpaar einen Fernpunkt als Schnittpunkt hat.

$$\begin{aligned}
K_1 \cap K_\alpha: \qquad & (y-a)^2 - \left(y + \frac{a+b}{b}z - a\right)^2 = \\
& (z-a)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 (z-b)^2 \\
y^2 - 2ay + a^2 - y^2 - 2\frac{a+b}{b}yz + 2ay - \frac{(a+b)^2}{b^2}z^2 + 2\frac{a(a+b)}{b}z - a^2 = \\
& z^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + 2z\left(\frac{a^2}{b} - a\right) \\
-z^2\left(\frac{(a+b)^2 + b^2 - a^2}{b^2}\right) + 2z\left(-\frac{a+b}{b}y + \frac{a(a+b)}{b} - \frac{a^2-ab}{b}\right) &= 0 \\
z\left(-\frac{2(a+b)}{b}z - \frac{2(a+b)}{b}y + 4a\right) &= 0 \\
z_1 &= 0
\end{aligned}$$

p_1 liegt daher in der Ebene mit der Gleichung

$$z_2 = -y + \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\begin{aligned}
K_2 \cap K_\beta: \qquad & (y+b)^2 - \left(y - \frac{a+b}{a}z + b\right)^2 = \\
& (z-b)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 (z-a)^2 \\
y^2 - 2by + b^2 - y^2 + 2\frac{a+b}{a}yz + 2by - \frac{(a+b)^2}{a^2}z^2 + 2\frac{b(a+b)}{a}z - b^2 = \\
& z^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2z\left(\frac{b^2}{a} - b\right) \\
-z^2\left(-\frac{(a+b)^2 - a^2 + b^2}{a^2}\right) + 2z\left(\frac{a+b}{a}y + \frac{b(a+b)}{a} - \frac{b^2-ab}{a}\right) &= 0 \\
z\left(-\frac{2(a+b)}{a}z - \frac{2(a+b)}{a}y + 4b\right) &= 0 \\
z_1 &= 0
\end{aligned}$$

p_2 liegt daher in der Ebene mit der Gleichung

$$z_2 = y + \frac{2ab}{a+b}.$$

Die beiden Trägerebenen der Parabeln sind im Aufriss projizierend (siehe Abb. 3.3). Für die zyklographischen Originale T_1 und T_2 von δ_α und δ_β müssen die Erzeugenden f_1 und f_2 der schiefen Kreiskegel durch A und B mit den soeben berechneten Trägerebenen der Parabeln geschnitten werden. Für uns sind hier nur die z-Koordinaten von Bedeutung um die obige Behauptung zu beweisen, weshalb wir die Berechnung wieder nur für den Aufriss durchführen und die x-Koordinaten der Punkte und Vektoren außer Acht lassen.

Die Gleichungen der Aufrisse der Erzeugenden f_1, f_2 durch A'' und S''_β beziehungsweise B'' und S''_α werden erfasst durch:

$$f_1'' \dots \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} \frac{2abh}{(a+b)(h-a)} + b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$f_2'' \dots \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} \frac{2abh}{(a+b)(b-h)} - a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1 \cap p_1 : \qquad b - b\mu_1 &= -\left(-b + \mu_1 \left(\frac{2abh}{(a+b)(h-a)} + b\right)\right) + \frac{2ab}{a+b} \\ \frac{2abh}{(a+b)(h-a)}\mu_1 &= \frac{2ab}{a+b} \\ \mu_1 &= \frac{h-a}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \cap p_2 : \qquad a - a\mu_2 &= \left(a + \mu_2 \left(\frac{2abh}{(a+b)(b-h)} - a\right)\right) + \frac{2ab}{a+b} \\ \frac{2abh}{(a+b)(b-h)}\mu_2 &= -\frac{2ab}{a+b} \\ \mu_2 &= \frac{h-b}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{T_1} &= b - b\mu_1 & z_{T_2} &= a - a\mu_2 \\ z_{T_1} &= b - \frac{h-a}{h}b & z_{T_2} &= a - \frac{h-b}{h}a \\ z_{T_1} &= \frac{ab}{h} & z_{T_2} &= \frac{ab}{h} \end{aligned}$$

Die Höhen der beiden zyklographischen Originale T_1 und T_2 von δ_α und δ_β stimmen daher überein. Somit sind auch die Radien der beiden Zykel gleich. Da h die z-Koordinate des zyklographischen Originales des Zykels γ ist, können die Radien von δ_α und δ_β allgemeiner geschrieben werden als:

$$r_{\delta_\alpha} = \frac{r_\alpha r_\beta}{r_\gamma} = r_{\delta_\beta}$$

□

Wir definieren beim verallgemeinerten Arbelos daher:

Definition 12. *Der Radius der „neoarchimedischen" Kreise eines verallgemeinerten Arbelos mit den Kreisen α, β, γ beträgt:*

$$\frac{r_\alpha r_\beta}{r_\gamma}.$$

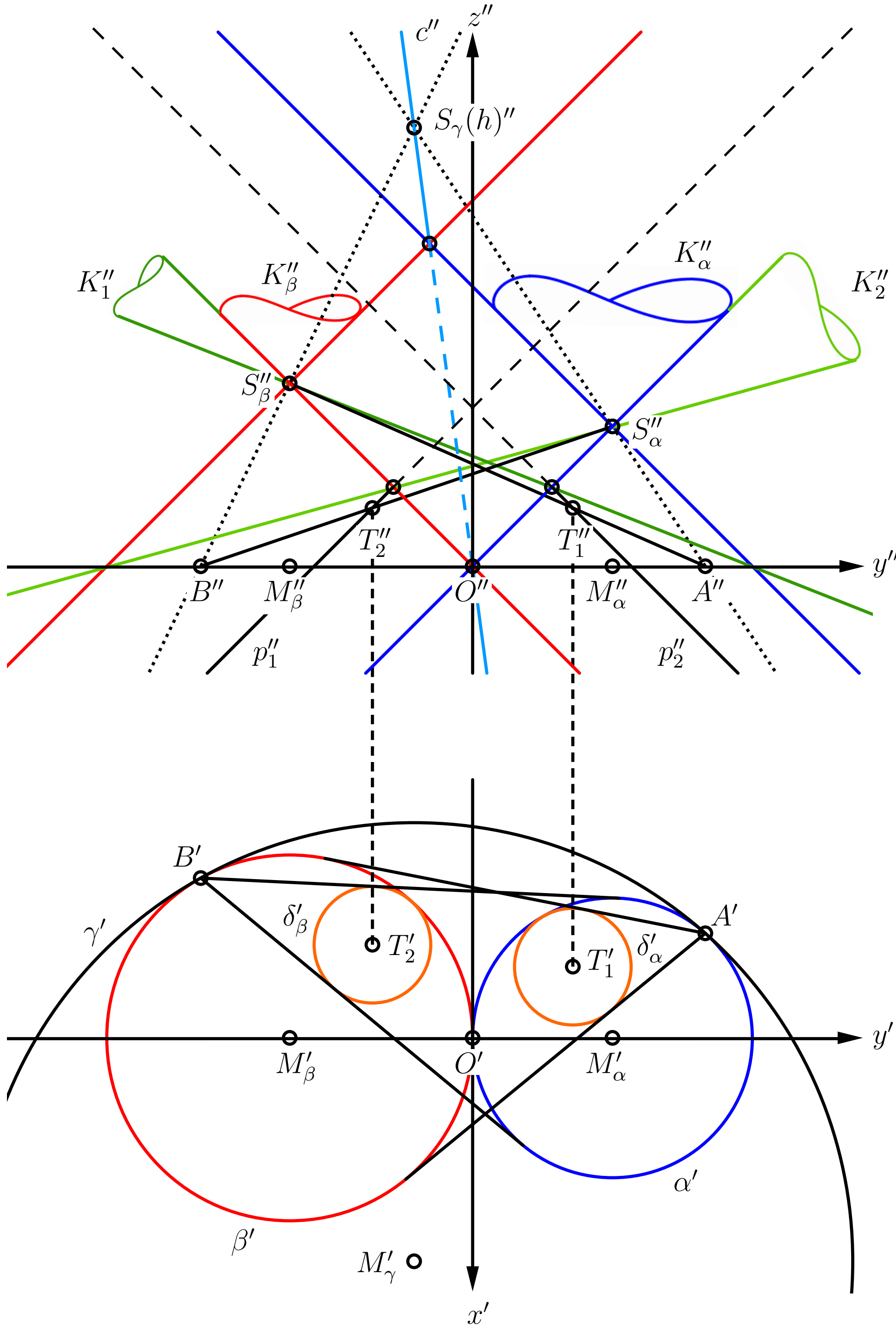


Abbildung 3.3: Konstruktion kongruenter Kreise im verallgemeinerten Arbelos

Damit haben wir für den in [6] angegebenen Beweis eine zyklographische Variante gezeigt. Mit Hilfe von Ähnlichkeiten kann Satz 4 auch wie folgt synthetisch bewiesen werden.

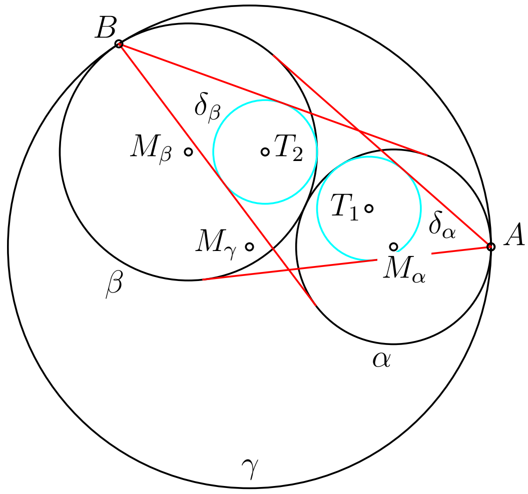


Abbildung 3.4: „Neoarchimedische“ Kreise

Beweis. Wir betrachten zuerst jene Ähnlichkeit ζ_A mit Zentrum A, die den Kreis γ in den Kreis α überführt. Dabei legen die Radien r_α und r_γ der beiden Kreise den Proportionalitätsfaktor dieser Ähnlichkeit fest durch:

$$\frac{r_\alpha}{r_\gamma}$$

Weiters gilt für diese Ähnlichkeit:

$$\zeta_A : \beta \mapsto \delta_\alpha$$

Der Radius r_{δ_α} des Berührkreises lässt sich daher berechnen durch

$$r_{\delta_\alpha} = r_\beta \cdot \frac{r_\alpha}{r_\gamma} = \frac{r_\alpha r_\beta}{r_\gamma}$$

Ebenso kann man die Ähnlichkeit ζ_B mit Zentrum B, die den Kreis γ auf den Kreis β abbildet, auf den Kreis α anwenden. Der Proportionalitätsfaktor dieser Ähnlichkeit beträgt:

$$\frac{r_\beta}{r_\gamma}$$

Es gilt:

$$\zeta_B : \alpha \mapsto \delta_\beta$$

Wie oben kann der Berührkreisradius r_{δ_β} wieder berechnet werden zu

$$r_{\delta_\beta} = r_\alpha \cdot \frac{r_\beta}{r_\gamma} = \frac{r_\alpha r_\beta}{r_\gamma}.$$

Folglich gehören die Kreise δ_α und δ_β zu den „neoarchimedischen“ Kreisen. □

Gegeben sei ein verallgemeinerter Arbelos durch die Kreise α, β, γ. Wir zeichnen nun zwei weitere berührende Kreise $\widetilde{\delta_\alpha}, \overline{\delta_\alpha}$ (siehe Abb. 3.5) ein. Sie berühren γ, α und die gemeinsame Tangente von δ_α und δ_β. Ein Beweis dieses Sachverhaltes findet sich in Abschnitt 4.

Mit [6] gilt:

Satz 5. *Die beiden Kreise $\widetilde{\delta_\alpha}$ und $\overline{\delta_\alpha}$ gehören zu den „neoarchimedischen“ Kreisen.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Kreise δ_α und $\widetilde{\delta_\alpha}$ beziehungsweise $\overline{\delta_\alpha}$ denselben Radius haben.
Betrachten wir die Kreise als Trägerkreise von Zykeln. Dann gilt:
Der Zykel β berührt sowohl den Zykel α als auch den Zykel γ. Je nach Orientierung von β gibt es zwei zyklographische Originale S_β und $\overline{S_\beta}$. Sei γ negativ orientiert, α folglich positiv, so ist β negativ orientiert. Da die Berührung der drei Zykel vorausgesetzt wurde, liegt das zyklographische Original $\overline{S_\beta}$ von β im Aufriss auf der Geraden e'', die die projizierende Trägerebene der Schnittkurve zweiter Ordnung der beiden Drehkegel mit Scheiteln in S_α und S_γ und Basiskreisen α und γ darstellt.
Das zyklographische Original von δ_α muss auf der Erzeugenden f durch A des schiefen Kreiskegels mit Scheitel in S_β und Basiskreis α liegen (siehe voriger Beweis). Eine weitere Begründung für die Lage von S_{δ_α} beruht auf Ähnlichkeiten von Zykeln. Bei der Ähnlichkeit mit Zentrum A, die den Zykel β mit Orientierung in den Zykel δ_α überführt, sind die Scheitel der zugehörigen Drehkegel mit dem Zentrum kollinear (siehe Satz 1).
Die zyklographischen Originale von β können durch eine Spiegelung an der y-Achse im Aufriss ineinander übergeführt werden, weshalb die Geraden e und f denselben Winkel mit der y-Achse einschließen.
Die zyklographischen Originale von $\widetilde{\delta_\alpha}$ und $\overline{\delta_\alpha}$ liegen im Schnitt der Drehkegel K_α und K_γ sowie in der Ebene durch den Speer, der die Tangente an δ_α enthält. Die Ebene fällt im Aufriss mit der Erzeugenden des Drehkegel mit Scheitel in $\overline{S_\beta}$ zusammen. Die gesuchten zyklographischen Originale können durch eine Spiegelung an der y-Achse mit S_{δ_α} in Deckung gebracht werden, weil die Geraden e'' und f'' mit der y-Achse denselben Winkel einschließen. Der gleiche Radius der drei Kreise ist daher gezeigt. □

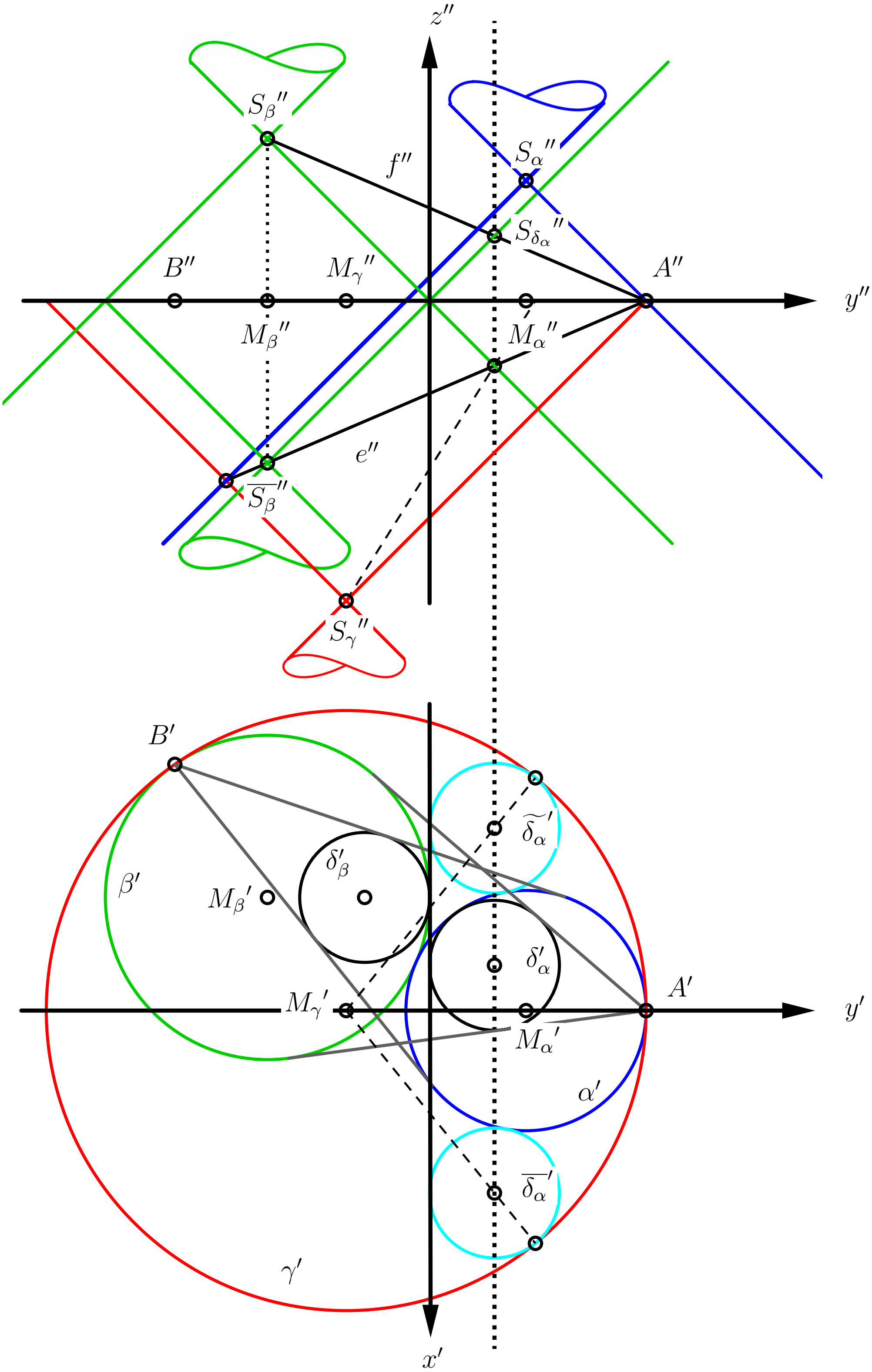


Abbildung 3.5: Verallgemeinerter Arbelos mit „neoarchimedischen“ Kreisen

Es folgt ein dritter Beweis mit Hilfe der projektiven Geometrie:

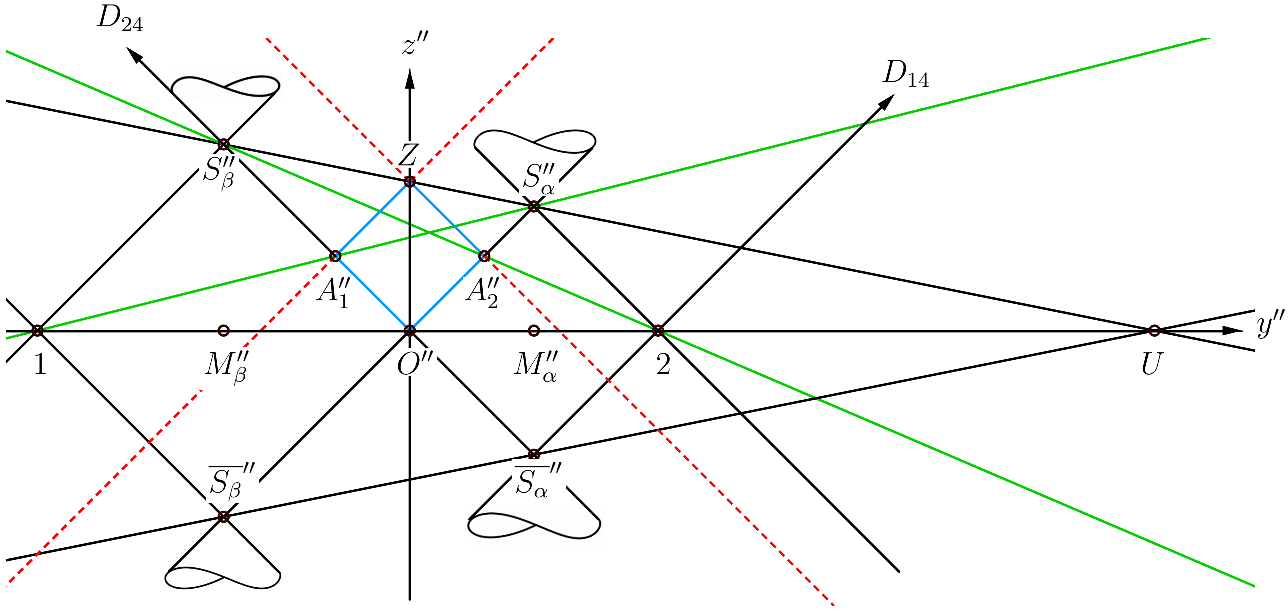


Abbildung 3.6: synthetischer Beweis

Beweis. Wir betrachten das Viereck $\overline{S_\alpha} S_\alpha S_\beta \overline{S_\beta}$ (siehe Abb. 3.6):
Die harmonische Lage der Punkte $M_\beta M_\alpha O U$ wird übertragen auf die Punkte $S_\beta S_\alpha Z U$.
Wir konstruieren anschließend die Punkte $A_1 := [S_\beta, O] \cap [1, S_\alpha]$

und $\quad A_2 := [S_\alpha, O] \cap [2, S_\beta]$

Die Diagonalschnittpunkte des Vierecks $S_\beta 1 O S_\alpha$ sind dann:

$$A_1, U, D_{14},$$

wobei D_{14} ein Fernpunkt ist.
Die Diagonale $[A_1, D_{14}]$ muss die Gerade $[S_\beta, S_\alpha]$ im zu U bezüglich S_β und S_α harmonischen Punkt Z schneiden.
Dasselbe gilt für die Diagonale $[A_2, D_{24}]$ des Vierecks $S_\alpha S_\beta O 2$, die die Gerade $[S_\beta, S_\alpha]$ auch im Punkt Z schneidet.
Das Viereck $A_1 O A_2 Z$ ist aus zwei Gründen ein Quadrat:

- Die Geraden $[O, S_\alpha]$ und $[O, S_\beta]$ schließen mit y-Achse denselben Winkel ein, weil sie die Erzeugenden der zugehörigen Drehkegel von α und β sind.

- Folgende Parallelitäten liegen vor:

$$[A_1, Z] \parallel [O, A_2] \;\text{ und }\; [A_1, O] \parallel [Z, A_2]$$

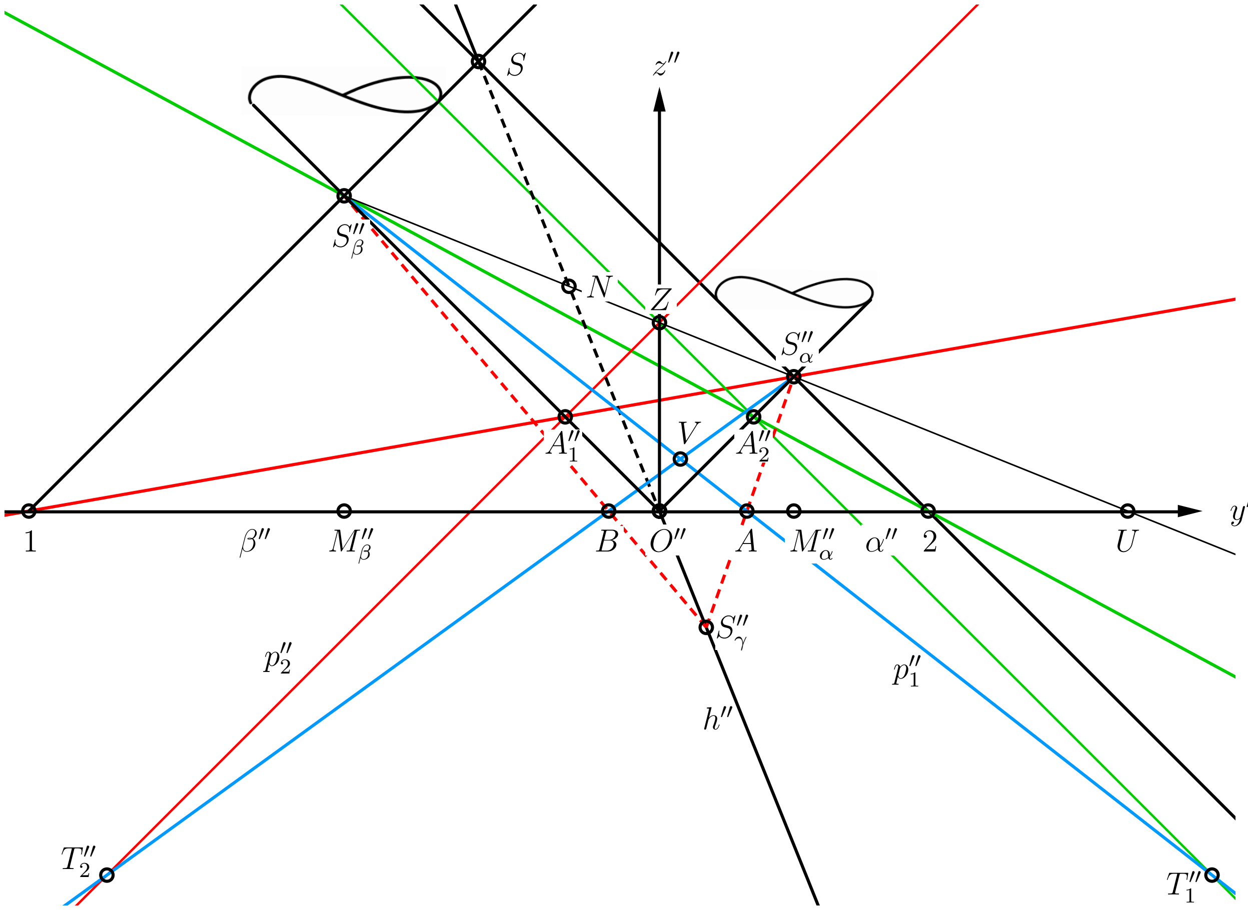


Abbildung 3.7: Aufriss des verallgemeinerten Arbelos

Die Gerade $[A_1, A_2]$ und die y-Achse sind ebenso zueinander parallel, da die Eckpunkte Z und O des Quadrates auf der z-Achse liegen. Im ersten Beweis ist Z der Schnittpunkt der beiden projizierenden Trägerebenen der Parabeln p_1 und p_2, die sich im Schnitt der Drehkegel mit den schiefen Kreiskegeln ergeben. Anhand ihrer Gleichungen erkennt man, dass ihr Achsenabschnitt gleich ist und ihr Schnittpunkt im Aufriss auf der z-Achse liegt. Wir betrachten nun wieder den „allgemeinen Fall“ und dabei den Aufriss der Hyperbel h, die sich aus Schnitt der beiden Drehkegel K_α und K_β ergibt. Die Hyperbelscheitel liegen in den Punkten O und S (siehe Abb. 3.7).

Der Punkt $S_\gamma \in h$ kann beliebig gewählt werden. Er wird aus S_α beziehungsweise S_β auf α beziehungsweise β projiziert. Die Schnittpunkte werden mit A und B bezeichnet und stellen neben O die Berührpunkte der Zykel α, β und γ dar.
Deren Projektionen aus S_α und S_β auf $[Z, A_1]$ und $[Z, A_2]$ benennen wir mit T_1 und T_2. Sie sind die gesuchten zyklographischen Originale der „neoarchimedischen“ Kreise.

Es wird nun folgende Behauptung bewiesen:

$$[T_1, T_2] \parallel [M_\alpha, M_\beta]$$

a) Es gilt:
$h(S_\gamma) \overset{S_\beta}{\bar{\bar{\wedge}}} x(B) \overset{S_\alpha}{\bar{\bar{\wedge}}} p_2(T_2)$ $\qquad$ $h(S_\gamma) \overset{S_\alpha}{\bar{\bar{\wedge}}} x(A) \overset{S_\beta}{\bar{\bar{\wedge}}} p_1(T_1)$
Daraus folgt, dass $p_1(T_1)\bar{\wedge}p_2(T_2)$.

b) Wir wählen nun S_γ in „speziellen Punkten“:
   - $S_\gamma = O$ Daraus ergibt sich: $A = B = O$
     T_1 und T_2 sind somit Fernpunkte von p_1 und p_2.
   - $S_\gamma = S$ Daraus ergibt sich: $B = 1$ bzw. $A = 2$
     $T_2 = A_1$ und $T_1 = A_2$
   - $P = N$ (Hyperbelmitte der Hyperbel h) Daraus ergibt sich: $A = B = U$
     $T_1 = T_2 = Z$.
     Die Projektivität ist daher sogar eine Perspektivität.

c) Perspektivitätszentrum ist der Schnittpunkt $[A_1, A_2] \cap$ Ferngerade, also ein Fernpunkt.

Somit gilt

$$[T_1, T_2] \parallel [M_\alpha, M_\beta] \quad \forall P \in h,$$

und die Gleichheit der Radien ist daher bewiesen.

$\square$

4 Einige elementargeometrische Beweise für Tripel berührender Kreise

Wir zeigen in diesem Abschnitt einige der vorher mit Methoden der Zyklographie bewiesenen Sätze mit Methoden der Elementargeometrie.

Gegeben sind drei paarweise berührende Kreise α, β, γ. Dabei berühren sich α und β in O, β und γ in B und α und γ im Punkt A (siehe Abb. 4.1). Die Mittelpunkte und Radien der Kreise werden entsprechend mit M_α, M_β, M_γ beziehungsweise mit r_α, r_β, r_γ bezeichnet.
Für die Radien treffen wir folgende Vereinbarung:
Der Radius einer der drei Kreise werde mit negativem Vorzeichen gemessen, wenn der entsprechende Kreis die beiden anderen umschließt. In Abb. 4.1 ist der Radius r_γ negativ.

Die Seitenlängen des Dreiecks ABO lassen sich mit Hilfe der Radien berechnen. Es gelten

$$\overrightarrow{A1} = \frac{-r_\gamma}{r_\alpha}\,\overrightarrow{AO} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{B2} = \frac{-r_\gamma}{r_\beta}\,\overrightarrow{BO}$$

und daher

$$\overrightarrow{O1} = \overrightarrow{A1} - \overrightarrow{AO} = \frac{-r_\gamma - r_\alpha}{r_\alpha}\,\overrightarrow{AO} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{O2} = \overrightarrow{B2} - \overrightarrow{BO} = \frac{-r_\gamma - r_\beta}{r_\beta}\,\overrightarrow{BO}$$

Nach dem Sekantensatz erhalten wir die Beziehung

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{O1} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{O2}$$

woraus sofort

$$\frac{r_\gamma + r_\alpha}{r_\alpha}\,\overrightarrow{AO}^2 = \frac{r_\gamma + r_\beta}{r_\beta}\,\overrightarrow{BO}^2$$

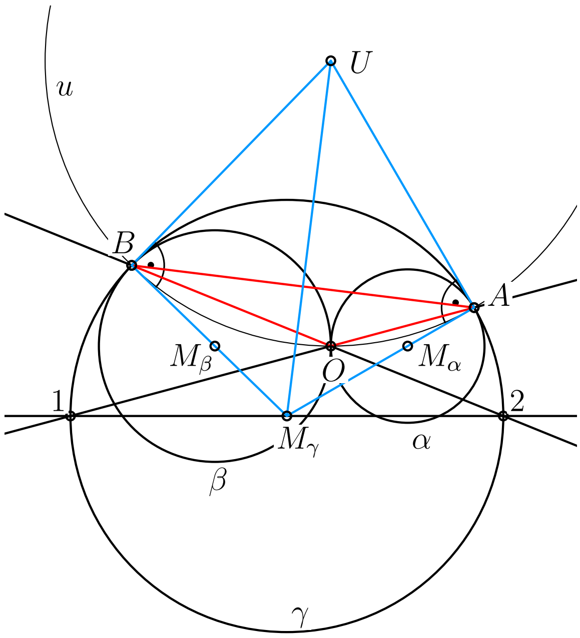


Abbildung 4.1

folgt und durch zyklische Vertauschung gelten auch:

$$\frac{r_\beta + r_\gamma}{r_\gamma}\ \overrightarrow{BA}^2 = \frac{r_\beta + r_\alpha}{r_\alpha}\ \overrightarrow{OA}^2$$
$$\frac{r_\alpha + r_\beta}{r_\beta}\ \overrightarrow{OB}^2 = \frac{r_\alpha + r_\gamma}{r_\gamma}\ \overrightarrow{AB}^2$$

Die dritte dieser Gleichungen ist von den ersten beiden abhängig.

Das Viereck $M_\gamma BUA$ ist ein Deltoid mit rechten Winkeln in A und B, wobei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABO ist. Der Umkreisradius soll mit r bezeichnet werden. Für den Flächeninhalt des Deltoids berechnen wir daher einerseits $F = |r \cdot r_\gamma|$ und andererseits

$$F^2 = \frac{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{UM_\gamma}^2}{4} = \frac{\overrightarrow{AB}^2\ (r^2 + r_\gamma^2)}{4}$$

Insgesamt gelten daher wieder nach zyklischer Vertauschung

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}^2\, r_\gamma^2 &= r^2\left(4r_\gamma^2 - \overrightarrow{AB}^2\right)\\
\overrightarrow{BO}^2\, r_\beta^2 &= r^2\left(4r_\beta^2 - \overrightarrow{BO}^2\right)\\
\overrightarrow{OA}^2\, r_\alpha^2 &= r^2\left(4r_\alpha^2 - \overrightarrow{OA}^2\right)
\end{aligned}$$

Elimination des Umkreisradius r aus den letzten beiden Gleichungen ergibt

$$4r_\alpha^2 r_\beta^2\left(\overrightarrow{BO}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right) = \left(r_\beta^2 - r_\alpha^2\right)\overrightarrow{BO}^2 \cdot \overrightarrow{OA}^2 \tag{4.1}$$

Daraus und aus zwei der vorhin ermittelten Gleichungen

$$\frac{r_\gamma + r_\alpha}{r_\alpha}\,\overrightarrow{AO}^2 = \frac{r_\gamma + r_\beta}{r_\beta}\,\overrightarrow{BO}^2 \tag{4.2}$$

$$\frac{r_\beta + r_\gamma}{r_\gamma}\,\overrightarrow{BA}^2 = \frac{r_\beta + r_\alpha}{r_\alpha}\,\overrightarrow{OA}^2 \tag{4.3}$$

$$\frac{r_\alpha + r_\beta}{r_\beta}\,\overrightarrow{OB}^2 = \frac{r_\alpha + r_\gamma}{r_\gamma}\,\overrightarrow{AB}^2 \tag{4.4}$$

können aus den Radien die Kantenlängen des Dreiecks ABO ermittelt werden und umgekehrt. Um die Radien zu berechnen setzen wir für die Vektoren folgende Bezeichnungen fest:

$$\overrightarrow{AO}^2 = a^2 = \overrightarrow{OA}^2, \qquad \overrightarrow{BO}^2 = b^2 = \overrightarrow{OB}^2, \qquad \overrightarrow{AB}^2 = c^2 = \overrightarrow{BA}^2.$$

Die Gleichungen (4.3) und (4.4) formen wir um zu:

$$r_\gamma\left[a^2(r_\alpha + r_\beta) - c^2 r_\alpha\right] = c^2 r_\alpha r_\beta \tag{4.5}$$

$$r_\gamma\left[b^2(r_\alpha + r_\beta) - c^2 r_\beta\right] = c^2 r_\alpha r_\beta \tag{4.6}$$

Die Division von (4.5) durch (4.6) liefert:

$$\frac{a^2(r_\alpha + r_\beta) - c^2 r_\alpha}{b^2(r_\alpha + r_\beta) - c^2 r_\beta} = 1$$

$$r_\alpha(-a^2 + b^2 + c^2) = r_\beta(a^2 - b^2 + c^2) \tag{4.7}$$

Die Gleichung (4.1) wird umgeformt zu:

$$r_\alpha^2 a^2 b^2 = r_\beta^2 \left[a^2 b^2 + 4r_\alpha^2(a^2 - b^2)\right] \tag{4.8}$$

Die Gleichung (4.8) wird durch das Quadrat der Gleichung (4.7) dividiert und wir erhalten daraus den Radius r_α des Kreises α:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 b^2}{(-a^2 + b^2 + c^2)^2} &= \frac{a^2 b^2 + 4r_\alpha^2(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2 + c^2)^2} \\ r_\alpha &= \frac{abc}{-a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

So ergibt sich folgende Lösung bei den gegebenen Seitenlängen a, b und c des Dreiecks:

$$r_\alpha = \frac{abc}{-a^2 + b^2 + c^2}, \qquad r_\beta = \frac{abc}{a^2 - b^2 + c^2}, \qquad r_\gamma = \frac{abc}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Umgekehrt lassen sich aus gegebenen Radien r_α, r_β und r_γ die Seitenlängen des Dreiecks wie folgt ermitteln:

$$\overrightarrow{AB}^2 = \frac{4r_\alpha r_\beta r_\gamma^2}{(r_\alpha + r_\gamma)(r_\beta + r_\gamma)}, \qquad \overrightarrow{OA}^2 = \frac{4r_\alpha^2 r_\beta r_\gamma}{(r_\beta + r_\alpha)(r_\gamma + r_\alpha)}, \qquad \overrightarrow{OB}^2 = \frac{4r_\alpha r_\beta^2 r_\gamma}{(r_\gamma + r_\beta)(r_\alpha + r_\beta)}.$$

Bemerkung 4. *Die Ermittlung der Seitenlängen des Dreiecks der Berührpunkte ABO ist von der zu Beginn fixierten Verteilung der Vorzeichen der Radien (und damit der Orientierung der Berührung) abhängig.*

Wir bestimmen nun die von den Berührpunkten A, B und O der Kreise α, β und γ verschiedenen Ähnlichkeitszentren Z_A, Z_B und Z_O und zeigen der Reihe nach:

1. Das Ähnlichkeitszentrum Z_A gehört der Geraden [A,O] an.

   Beweis. Wir betrachten die Ähnlichkeit ζ_A, mit Zentrum A:

$$\begin{aligned} \zeta_A : \quad \alpha &\mapsto \gamma \\ M_\alpha &\mapsto M_\gamma \\ O &\mapsto 1 \end{aligned}$$

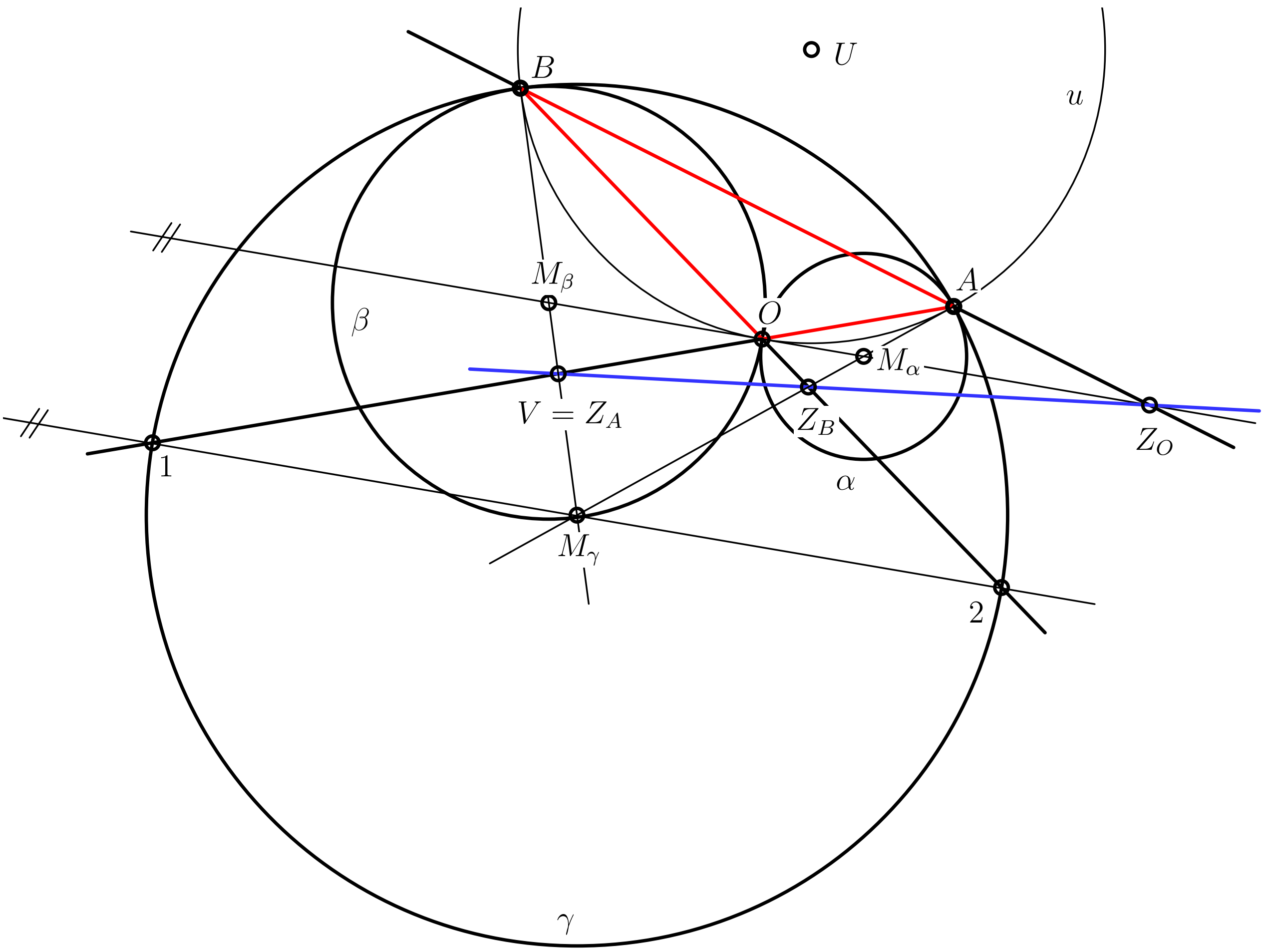


Abbildung 4.2: Konstruktion der Ähnlichkeitszentren

Die Verbindungsgeraden $[1, M_\gamma]$ und $[M_\alpha, M_\beta]$ sind daher parallel. Sei V der Schnittpunkt von $[M_\beta, M_\gamma]$ und $[A, O]$. Die Ähnlichkeit mit Zentrum V, die den Punkt 1 nach O bringt, transformiert wegen obiger Parallelität daher M_γ in M_β und somit auch γ in β. V stimmt daher mit dem Ähnlichkeitszentrum Z_A überein (siehe Abb. 4.2). □

2. Analog liegt das Ähnlichkeitszentrum Z_B im Schnittpunkt der Geraden $[B, O]$ und $[M_\alpha, M_\gamma]$. Da auch die Verbindung des zweiten Schnittpunktes 2 von $[B, O]$ und γ mit M_γ parallel zu $[M_\alpha, M_\beta]$ liegt, bildet die Gerade $[1, 2]$ den zu $[M_\alpha, M_\beta]$ parallelen Durchmesser des Kreises γ.

3. Die so konstruierten Ähnlichkeitszentren

$$Z_A = ([A, O], [M_\beta, M_\gamma]) \qquad Z_B = ([B, O], [M_\alpha, M_\gamma]) \qquad Z_O = ([A, B], [M_\alpha, M_\beta])$$

liegen auf einer gemeinsamen Geraden (siehe Abb. 4.2).

Beweis. Wir betrachten den Umkreis u des Dreiecks ABO. Für die sechs Punkte $1 = 2 := A$, $3 = 4 := B$, $5 = 6 := O$ gilt nach dem Satz von Pascal: Die Schnittpunkte der Verbindungen

$$[1, 2] \cap [4, 5] = Z_B \qquad [3, 4] \cap [6, 1] = Z_A \qquad [5, 6] \cap [2, 3] = Z_O$$

sind kollinear. □

4. Die Gerade $[A, B]$ schneidet die beiden Kreise α und β in zwei weiteren Punkten A^* und B^* (siehe Abb. 4.3), in denen die Verbindungsgeraden mit der jeweiligen Kreismitte parallel zu $[M_\alpha, A]$ bzw. $[M_\beta, B]$ sind. Die beiden Geraden $[M_\beta, B^*]$ und $[M_\alpha, A^*]$ schneiden sich im Punkt M^*_γ. Die eben angesprochenen Parallelitäten weisen das Viereck $M_\gamma M_\beta M^*_\gamma M_\alpha$ als Parallelogramm aus. Der den Punkt B^* enthaltende Kreis mit Mitte M^*_γ werde mit γ^* bezeichnet. Für seinen Radius $r^*_\gamma > 0$ gewinnen wir: $r^*_\gamma = -r_\alpha - r_\beta - r_\gamma$. Dieser Wert stimmt genau mit dem Abstand des Punktes A^* von M^*_γ überein. Der Kreis γ^* enthält daher auch den Punkt A^* und berührt nach Konstruktion dort den Kreis α.

   Bemerkung 5. *Wenn γ die Kreise α und β nicht umfasst, erhalten wir analoge Beziehungen.*

5. Die im vorigen Punkt gezeigte Konstruktion kann für alle Seiten des Dreiecks ABO durchgeführt werden. Sie führt auf insgesamt drei kongruente Kreise α^*, β^* und γ^*, die in entsprechenden Punkten Paare der Kreise α, β, γ berühren. Nach Konstruktion ist das Dreieck $M^*_\alpha, M^*_\beta M^*_\gamma$ der Mittelpunkte dieser Kreise ähnlich zum Dreieck der Mittelpunkte $M_\alpha M_\beta M_\gamma$.

6. Da der Abstand des Punktes M_β vom Punkt M^*_γ den Wert $r^*_\gamma + r_\beta = -r_\alpha - r_\beta - r_\gamma + r_\beta = -r_\alpha - r_\gamma$ besitzt, und er auch als Abstand des Punktes M^*_α von M_β auftritt, ist M_β Mitte der Strecke $M^*_\alpha M^*_\gamma$. Analog ist M_α Mittelpunkt der Strecke $M^*_\beta M^*_\gamma$; M_γ ist Mitte der Strecke $M^*_\alpha M^*_\beta$.

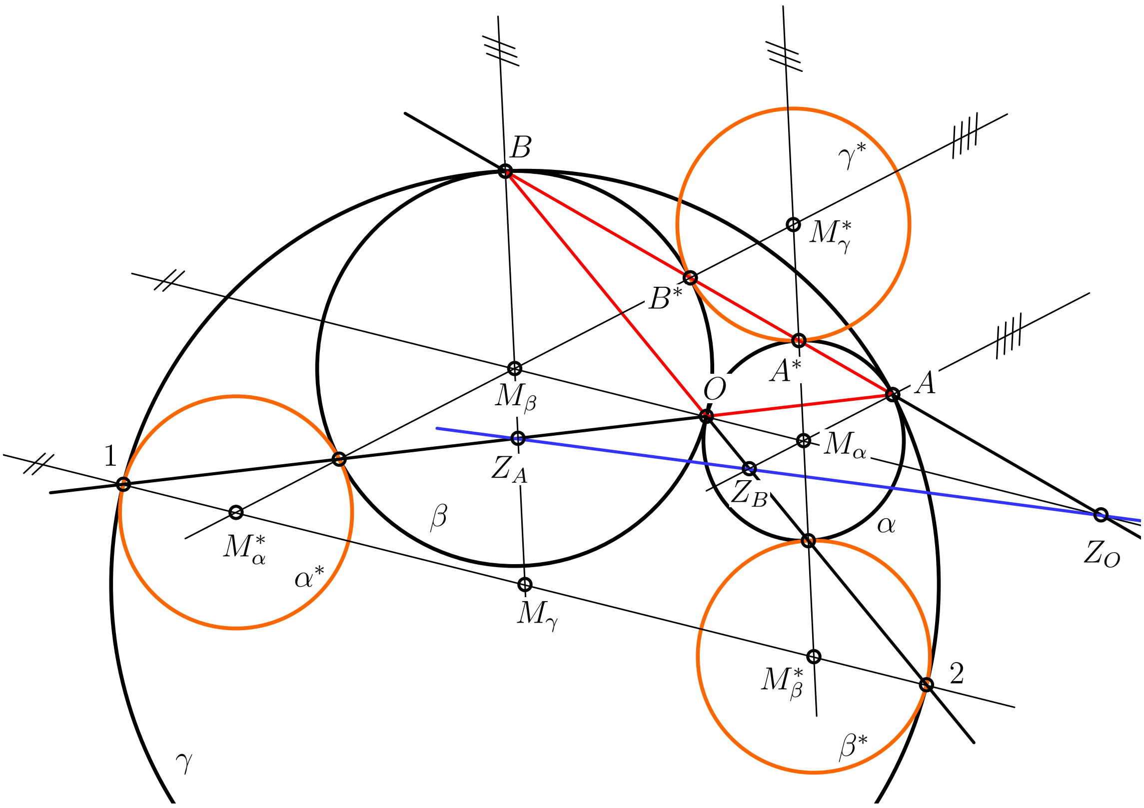


Abbildung 4.3: Kongruente Kreise

7. Nun wollen wir aus einem der Berührpunkte zweier der Basiskreise (etwa dem Berührpunkt A der Kreise α und γ) die Tangenten an den dritten Kreis β legen. Dann gibt es bis auf den bereits vorhandenen Kreis β genau einen Kreis β_γ mit Mitte auf der Verbindung $[A, M_\beta]$, der diese Tangenten und den Kreis γ berührt.
   Zur Konstruktion dieses Kreises verwenden wir die Ähnlichkeit mit Zentrum A, die den Kreis α in den Kreis γ überführt. Sie transformiert den Berührpunkt O der Kreise α und β in den Berührpunkt 3 des Kreises γ mit dem Bildkreis von β. Da dieser auch die eben konstruierten Tangenten berührt, handelt es sich bei diesem Kreis bereits um den gesuchten Kreis β_γ. Sein Mittelpunkt ist der Punkt N_β. Der Ähnlichkeitsfaktor dieser Ähnlichkeit ist $\frac{r_\gamma}{r_\alpha}$, womit wir für den Radius r_{β_γ} des Kreises β_γ den Wert
$$r_{\beta_\gamma} = r_\beta \, \frac{r_\gamma}{r_\alpha}$$
   erhalten.

8. Analog gehen wir nun für den Punkt O vor und legen die Tangenten an γ: Wir

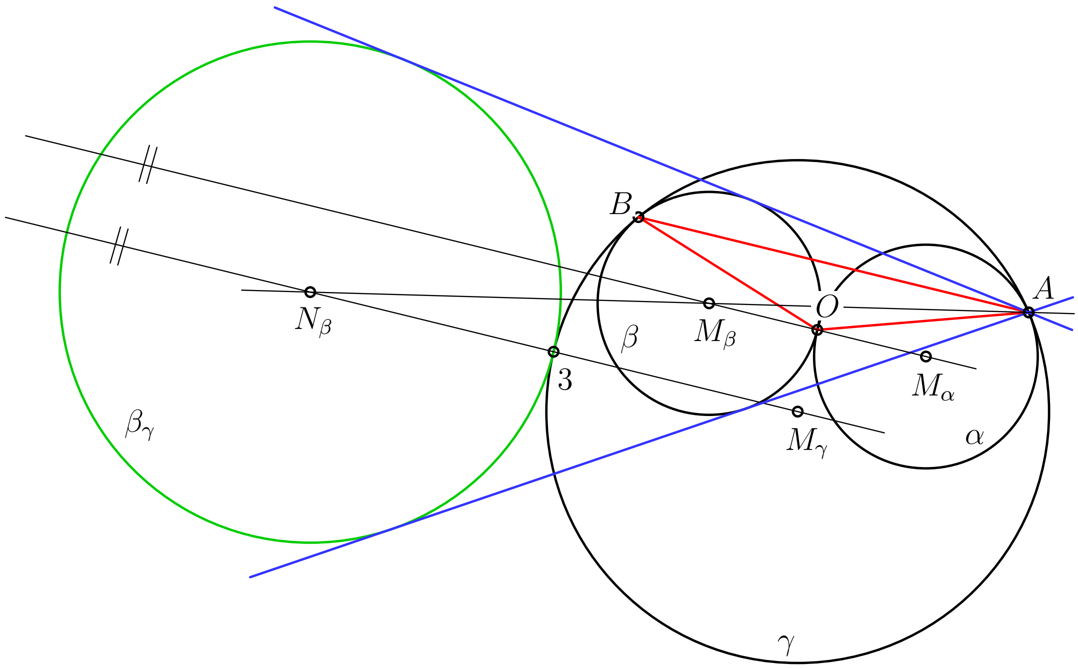


Abbildung 4.4: Konstruktion des berührenden Kreises β_γ

ermitteln jenen von γ verschiedenen Kreis γ_β mit Mitte auf der Verbindung $[O, M_\gamma]$, der nicht nur diese beiden Tangenten, sondern auch den Kreis β berührt. In Abb. 4.5 können zwar keine Tangenten an γ gelegt werden, aber die Ähnlichkeit mit Zentrum O, die α in β überführt, liefert den Kreis γ_β als Bildkreis von γ.

9. Nun gilt: Die beiden soeben ermittelten Kreise sind kongruent.

   Beweis. Der Kreis β_γ besitzt nach obigen Ausführungen den Radius $r_{\beta_\gamma} = r_\beta \, \frac{r_\gamma}{r_\alpha}$. Analoge Überlegungen liefern für den Radius r_{γ_β} den Wert $r_{\gamma_\beta} = r_\gamma \, \frac{r_\beta}{r_\alpha}$. Damit stimmen die Radien der beiden Kreise β_γ und γ_β überein. □

10. Zusätzlich haben wir:
    Die Verbindungsgerade $[N_\beta, N_\gamma]$ ist parallel zur Geraden $[A, O]$.

    Beweis. Die Tangenten der Kreise β_γ und γ_β in den Punkten 1 und 5 sind parallel. Da die beiden Kreise gleich groß sind und auf der gleichen Seite der Tangenten liegen, ist $[N_\beta, N_\gamma]$ parallel zur Verbindung $[1, 5]$. □

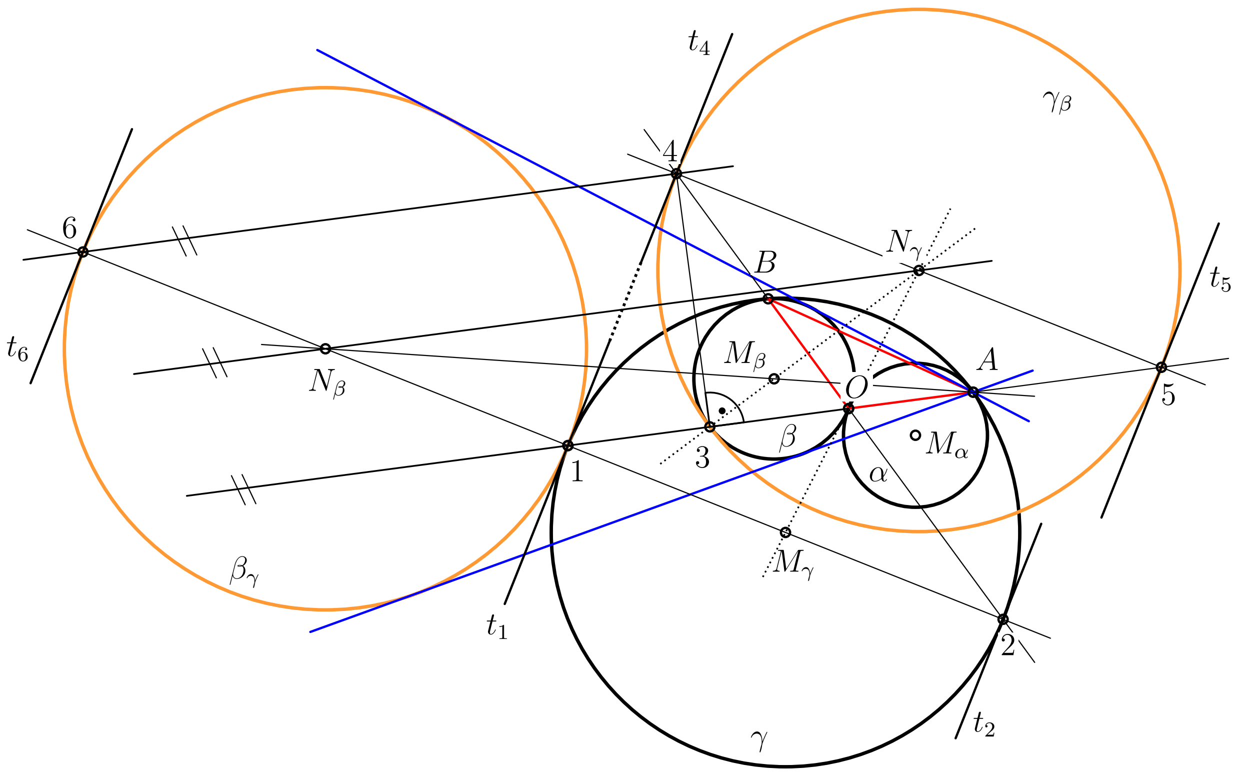


Abbildung 4.5: Kongruente Kreise β_γ und γ_β

11. Ferner können wir die Berührtangente t_1 der Kreise γ und β_γ betrachten. Bei der vorhin angesprochenen Ähnlichkeit mit Zentrum O gehen die Durchmesserendpunkte 1 und 2 von γ (mit parallelen Tangenten t_1 und t_2) in die Durchmesserendpunkte 4 und 5 von γ_β (mit zu t_1 parallelen Tangenten t_4 und t_5) über. Nun beweisen wir zusätzlich: t_1 und t_4 fallen sogar in eine Gerade zusammen. Dies beweist die im Abschnitt 3 offen gebliebene Eigenschaft.

    Beweis. Zum Beweis betrachten wird das Dreieck 541 und zeigen, dass es einen rechten Winkel im Punkt 4 besitzt. Die Strecke 34 trägt eine Höhe in diesem Dreieck. Wir berechnen nun:

$$\overrightarrow{13} = \overrightarrow{OA}\ \frac{-r_\gamma - r_\alpha - r_\beta}{r_\alpha}$$
$$\overrightarrow{35} = -\overrightarrow{OA}\ \frac{r_\beta r_\gamma}{r_\alpha^2}$$

Weiters gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$\overrightarrow{34}^2 = 4r_{\gamma_\beta}^2 - \overrightarrow{35}^2 = \frac{(r_\beta r_\gamma)^2}{r_\alpha^2}\left(4 - \overrightarrow{OA}^2\ \frac{1}{r_\alpha^2}\right).$$

Wir bilden

$$\overrightarrow{34}^2 - \overrightarrow{35}\cdot\overrightarrow{13} = \frac{(r_\beta r_\gamma)^2}{r_\alpha^2}\left(4 - \overrightarrow{OA}^2\ \frac{1}{r_\alpha^2}\right) + \overrightarrow{OA}^2\ \frac{r_\beta r_\gamma(-r_\gamma - r_\alpha - r_\beta)}{r_\alpha^3}$$

und errechnen

$$\overrightarrow{34}^2 - \overrightarrow{35}\cdot\overrightarrow{13} = \frac{4(r_\beta r_\gamma)^2}{r_\alpha^2} - \overrightarrow{OA}^2\ r_\beta r_\gamma\frac{(r_\gamma + r_\alpha)(r_\beta + r_\alpha)}{r_\alpha^4}.$$

Nun ist nach unseren anfänglichen Berechnungen

$$\overrightarrow{OA}^2 = \frac{4r_\alpha^2 r_\beta r_\gamma}{(r_\gamma + r_\alpha)(r_\beta + r_\alpha)},$$

was sofort auf $\overrightarrow{34}^2 - \overrightarrow{35}\cdot\overrightarrow{13} = 0$ führt. Da im Dreieck 541 der Höhensatz gilt, ist es rechtwinkelig mit rechtem Winkel im Punkt 4. □

12. Damit lassen sich nun zu jedem der Berührpunkte A, B und O zwei solche Berührkreise ermitteln. Ihre Radien sind der Reihe nach

$$r_{\alpha_\beta} = \frac{r_\alpha r_\beta}{r_\gamma} = r_{\beta_\alpha}, \qquad r_{\beta_\gamma} = \frac{r_\beta r_\gamma}{r_\alpha} = r_{\gamma_\beta}, \qquad r_{\gamma_\alpha} = \frac{r_\gamma r_\alpha}{r_\beta} = r_{\alpha_\gamma}.$$

Auf diese Art entstehen insgesamt sechs solche Berührkreise, die zu Paaren kongruent sind (siehe Abb. 4.6).

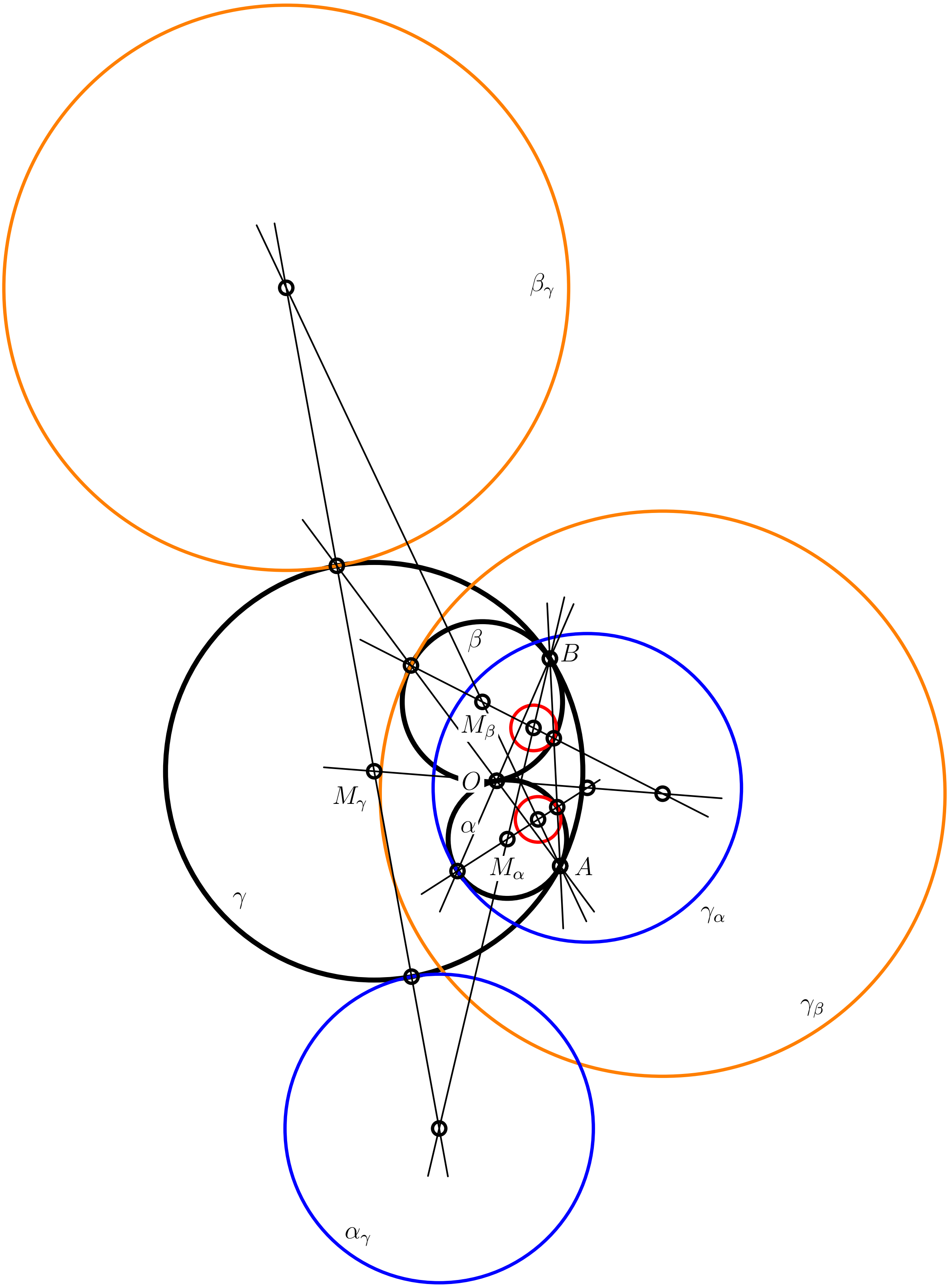


Abbildung 4.6: Paare kongruenter Kreise

Literaturverzeichnis

[1] Brauner, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie. Springer, Wien, New York, 1986.

[2] Johnson, R. A.: Advanced Euclidean Geometry (Modern Geometry). An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle. New York: Dover Publications, Inc., 1960.

[3] Köller, J.: Arbelos unter http://www.mathematische-basteleien.de/arbelos.htm (abgerufen am 27. April 2014).

[4] Müller, E., Krames, J.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie II: Die Zyklographie. Deuticke, Leipzig, Wien, 1929.

[5] Nakajima R., Okumura, H.: Archimedean Circles Induced by Skewed Arbeloi. Journal for Geometry and Graphics **16**, S. 13 – 17 (2012).

[6] Okumura, H.: Archimedean Circles of the Collinear Arbelos and the Skewed Arbelos. Journal for Geometry and Graphics **17**, S. 31 – 52 (2013).

[7] Okumura, H.: Ubiquitous Archimedean Circles of the Collinear Arbelos. KoG **16**, S. 17 – 20 (2012).

[8] Okumura H., Watanabe, M.: Characterizations of an Infinite Set of Archimedean Circles. Forum Geometricorum **7**, S. 121 – 123, (2007).

[9] Okumura, H., Watanabe, M.: The Twin Circles of Archimedes in a Skewed Arbelos. Forum Geometricorum **4**, S. 229 – 251, (2004)

[10] Pillwein, G., Müllner, R., Kollars, K.: DG8. Darstellende Geometrie für die 8. Klasse AHS. öbv&hpt, Wien, 2002.

[11] Pottmann, H., Wallner, J.: Computational Line Geometry. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.

[12] Röschel, O.: Nichtlineare Abbildungmethoden. Mitschrift zur Vorlesung, SS 2006. Technische Universität Graz. Institut für Geometrie.

[13] Wagner, A.: Potenzen und Potenzgeraden, unter: cage.ugent.be/~klein/geometrie-WS2004/12_Wagner_Anja.doc (abgerufen am 12. März 2014).

[14] Weisstein, E. W.: „Arbelos.“ unter MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html (abgerufen am 27. April 2014).

[15] Wikipedia (Hrsg.) (2013): Potenz, http://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Geometrie) (abgerufen am 12. März 2014).

[16] Wikipedia (Hrsg.) (2013): Potenzgerade, http://de.wikipedia.org/wiki/Potenzgerade (abgerufen am 12. März 2014).

[17] Wikipedia (Hrsg.) (2013): Arbelos, http://de.wikipedia.org/wiki/Arbelos (abgerufen am 27. April 2014).