

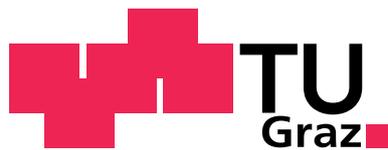
Kerstin SIEBERER

**Numerische Untersuchungen zur
Stabilität der nicht symmetrischen
FEM/BEM Kopplung**

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
einer Diplom-Ingenieurin

Diplomstudium Technische Mathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im März 2012

Diplomarbeit:

Titel: Numerische Untersuchungen zur Stabilität der nicht symmetrischen FEM/BEM Kopplung
Name, Vorname: Sieberer, Kerstin
Matrikelnummer: 0330854
Institut: Institut für Numerische Mathematik
Technische Universität Graz
Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach

Vorwort

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Olaf Steinbach, für die Chance, diese Abschlussarbeit zu schreiben und für seine Unterstützung dabei, bedanken. Vielen Dank auch an Herrn Dr. Günther Of, der mir stets eine große Hilfe war und alle meine Fragen geduldig beantwortet hat.

Zusammenfassung

Bei der nichtsymmetrischen FEM/BEM Kopplung als Lösungsmethode für das freie Transmissionsproblem der Poisson-Gleichung kann die Elliptizität der zugehörigen Bilinearform und damit die Stabilität numerischer Näherungsverfahren gezeigt werden, indem ein Zusammenhang zwischen dem minimalen Eigenwert der Koeffizientenmatrix des Differentialoperators im beschränkten Gebiet und der Kontraktionskonstante des Doppelschichtpotentialoperators hergestellt wird. Die in dieser Arbeit präsentierten numerischen Beispiele unterstreichen die theoretischen Ergebnisse.

Abstract

The ellipticity of the bilinear form which is related to the non-symmetric coupling of finite and boundary element methods to solve a free space transmission problem for the Poisson equation can be ensured by relating the minimal eigenvalue of the coefficient matrix of the partial differential operator in the interior to the contraction constant of the double layer potential integral operator. The presented numerical examples confirm the theoretical results.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1 Randintegralgleichungen	11
1.1 Darstellungsformel und Fundamentallösung	11
1.2 Sobolev-Räume	12
1.3 Randintegraloperatoren	14
1.3.1 Einfachschichtpotential	14
1.3.2 Adjungiertes Doppelschichtpotential	15
1.3.3 Doppelschichtpotential	16
1.3.4 Hypersingulärer Integraloperator	17
1.3.5 Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtpotentials	17
1.4 Randintegralgleichungen	18
1.5 Steklov-Poincaré-Operator	19
2 Formulierung und Analysis des Transmissionsproblems	23
2.1 Problemstellung	23
2.2 Innenraum	24
2.3 Außenraum	25
2.4 Nicht symmetrische BEM/FEM-Kopplung	25
3 Diskretisierung	33
3.1 Näherungsmethoden	33
3.2 Finite Elemente	35
3.3 Randelemente	37
3.4 Diskretisierung der modifizierten Variationsformulierung	38
4 Eigenwertproblem und numerische Beispiele	41
4.1 Interpretation als Eigenwertproblem	41
4.2 Inverse Iteration	43
4.2.1 Konvergenz des Verfahrens	43
4.3 Numerische Beispiele	44
4.3.1 Beschreibung der Gebiete	44
4.3.2 Berechnung der Kontraktionskonstanten c_K	46
4.3.3 Ergebnisse	47
5 Zusammenfassung und Ausblick	51

Einleitung

In manchen technischen Anwendungen, zum Beispiel wenn partielle Differentialgleichungen in einem beschränkten Gebiet auf partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in einem unbeschränkten Gebiet treffen, bietet es sich an, die Finite-Elemente-Methode und die Randelementemethode zu verbinden. Obwohl für die symmetrische Kopplung der beiden Methoden eine solide Stabilitäts- und Fehleranalyse zur Verfügung steht und auch effiziente Implementierungen existieren, ist diese Methode in der Technik nicht besonders beliebt. Eine Alternative dazu stellt die nicht symmetrische Kopplung dar, in der nur das Einfach- und das Doppelschichtpotential vorkommen.

Lange mussten für die zugehörige Analysis strikte Einschränkungen an das Gebiet gefordert werden, zum Beispiel eine glatte Oberfläche, um Kompaktheit des Doppelschichtpotentialoperators zu erreichen, oder es wurde ein hinreichend feines Randelementenetz benötigt. Numerische Experimente deuteten jedoch darauf hin, dass die Methode auch für allgemeinere Gebiete stabil sein dürfte [6].

In [3] konnte die Stabilität für polygonale Oberflächen gezeigt werden; in [9] ist es gelungen die Stabilität für ein Lipschitz-Gebiet zu beweisen unter der Voraussetzung, dass der minimale Eigenwert der Koeffizientenmatrix nach unten durch $\frac{1}{4}$ beschränkt ist. Die Frage, ob diese Bedingung notwendig sei, blieb vorerst offen.

In [11] konnte eine verbesserte Abschätzung gezeigt werden. Der Weg zu dieser verbesserten Abschätzung wird in dieser Arbeit anhand eines zweidimensionalen Modellproblems nachvollzogen und es wurden numerische Experimente durchgeführt, deren Ergebnisse die Theorie unterstreichen.

Die vorliegende Arbeit ist in 4 Kapitel gegliedert. Zunächst werden die Randintegralgleichungen und die zugehörigen Randintegraloperatoren beschrieben. Danach wird ein Modellproblem formuliert und eine geeignete gekoppelte Formulierung hergeleitet, die im darauffolgenden Kapitel diskretisiert wird. Im letzten Teil werden die numerischen Experimente beschrieben und die Ergebnisse präsentiert.

1 Randintegralgleichungen

Zu Beginn des Kapitels wird die Fundamentallösung für den Laplace-Operator im zweidimensionalen Fall eingeführt, mit welcher die Herleitung einer Darstellungsformel für die Lösung des Innen- und Außenraumproblems gleichermaßen möglich wird.

In Abschnitt 1.2 werden kurz die vorkommenden Funktionenräume vorgestellt.

Für das Bestimmen einer Lösung mit Hilfe der Darstellungsformel sind die Randintegraloperatoren wichtig. Sie werden in Abschnitt 1.3 eingeführt und ihre Eigenschaften besprochen. Danach wird gezeigt, wie man mittels direkter Herangehensweise geeignete Randintegralgleichungen erhält.

Im letzten Teil wird ein Zusammenhang zwischen Dirichlet- und Neumanndaten hergestellt.

1.1 Darstellungsformel und Fundamentallösung

Betrachtet wird zuerst die Laplace-Gleichung in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$,

$$-\Delta u_i(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Die 2. Green'sche Formel für eine beliebige, hinreichend glatte Testfunktion v lautet dann

$$\int_{\Omega} [-\Delta v(y)] u_i(y) \, dy = \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} u_i(y) \gamma_0^{\text{int}} v(y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} v(y) \gamma_0^{\text{int}} u_i(y) \, ds_y. \quad (1.2)$$

Dabei sind der innere Spuroperator und die Konormalenableitung folgenderweise definiert:

$$\gamma_0^{\text{int}} u_i(x) = \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u_i(\tilde{x}), \quad \gamma_1^{\text{int}} u_i(x) = \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} n(x) \cdot \nabla u_i(\tilde{x}), \quad x \in \Gamma.$$

$n(x)$ sei dabei der äußere Normalvektor im Punkt $x \in \Gamma$. Wenn eine Funktion v gefunden werden kann, sodass

$$\int_{\Omega} [-\Delta v(y)] u_i(y) \, dy = u_i(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (1.3)$$

dann kann aus (1.2) eine Darstellungsformel für $u_i(x)$ gewonnen werden. Funktionen mit der Eigenschaft (1.3) werden Fundamentallösungen genannt. Für den Laplace-Operator ist die Fundamentallösung bekannt; sie lautet im zweidimensionalen Fall

$$U^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log |x - y|. \quad (1.4)$$

Wird nun in (1.2) $v(y) = U^*(x, y)$ gesetzt, kann die Darstellungsformel für $u_i(x)$ mit $x \in \Omega$ als

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u_i(y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u_i(y) \, ds_y \quad (1.5)$$

angeschrieben werden. Das bedeutet, dass jede Lösung u_i von (1.1) bestimmt werden kann, sobald die Cauchy-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u_i(x)$ und $\gamma_1^{\text{int}} u_i(x)$ für $x \in \Gamma$ bekannt sind. Die Bestimmung der vollständigen Cauchy-Daten erfolgt mittels geeigneter Randintegralgleichungen.

Nun wird die Laplace-Gleichung im Außenraum betrachtet,

$$-\Delta u_e(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega^c := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \quad u_e(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Ziel ist eine Darstellungsformel im Außenraum. Zur Herleitung dieser wird für $y_0 \in \Omega$ eine Kugel $B_R(y_0) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - y_0| < R\}$ um y_0 mit Radius $R > 2 \text{diam}(\Omega)$ betrachtet. Es gilt also $\Omega \subset B_R(y_0)$. Die Darstellungsformel für das beschränkte Gebiet $B_R(y_0) \setminus \bar{\Omega}$ lautet (vergleiche (1.5))

$$\begin{aligned} u_e(x) = & - \int_{\Gamma} U^*(x, y) \gamma_1^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{ext}} U^*(x, y) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y \\ & + \int_{\partial B_R(y_0)} U^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u_e(y) \, ds_y - \int_{\partial B_R(y_0)} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u_e(y) \, ds_y. \end{aligned}$$

Für $R \rightarrow \infty$ und wegen dem vorausgesetzten Abklingverhalten für u_e bleiben am Ende nur die ersten beiden Terme übrig und man erhält die Darstellungsformel

$$u_e(x) = - \int_{\Gamma} U^*(x, y) \gamma_1^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{ext}} U^*(x, y) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y. \quad (1.7)$$

Die Definitionen des äußeren Spuoperators, sowie der äußeren Konormalenableitung lauten

$$\gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) = \lim_{\Omega^c \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u_e(\tilde{x}), \quad \gamma_1^{\text{ext}} u_e(x) = \lim_{\Omega^c \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} n(x) \cdot \nabla u_e(\tilde{x}), \quad x \in \Gamma.$$

Es kann also auch beim Außenraumproblem jede Lösung u_e von (1.6) bestimmt werden, wenn die Cauchy-Daten $\gamma_0^{\text{ext}} u_e(x)$ und $\gamma_1^{\text{ext}} u_e(x)$ für $x \in \Gamma$ bekannt sind. Ihre Bestimmung erfolgt wieder mittels geeigneter Randintegralgleichungen.

1.2 Sobolev-Räume

Für eine ausführliche Beschreibung der Sobolev-Räume sei zum Beispiel auf [1, 7, 8] verwiesen.

$C^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum der auf Ω beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen, $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum der $C^\infty(\Omega)$ -Funktionen mit kompaktem Träger.

Für $1 \leq p \in \mathbb{R}$ wird mit $L_p(\Omega)$ der Raum der Äquivalenzklassen aller auf Ω definierten messbaren Funktionen u bezeichnet, für die

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

gilt. Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.8)$$

eine Norm.

Der Raum $L_2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad (1.9)$$

eine Norm. Die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ ist der Sobolev-Raum

$$W_p^k(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}}, \quad (1.10)$$

die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ definiert entsprechend den Sobolev-Raum $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$.

Für $0 < s \in \mathbb{R}$, $s = k + \kappa$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$, definiert

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} := \left(\|u\|_{W_p^k(\Omega)}^p + |u|_{W_p^k(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

die Sobolev-Slobodeckii-Norm mit der Halbnorm

$$|u|_{W_p^k(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{2+p\kappa}} dx dy.$$

Für $s < 0$ und $1 < p < \infty$ wird der Sobolev-Raum $W_p^s(\Omega)$ als Dualraum von $\overset{\circ}{W}_p^{-s}(\Omega)$ definiert.

Handelt es sich bei Ω um ein Lipschitz-Gebiet, so gilt

$$W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega) \quad \text{für alle } s > 0.$$

Der Spuroperator γ_0^{int} definiert den Sobolev-Raum

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{w = \gamma_0^{\text{int}} v : v \in H^1(\Omega)\}$$

mit der Norm

$$\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \inf_{v \in H^1(\Omega), \gamma_0^{\text{int}} v = w} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist definiert als Dualraum von $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit der Norm

$$\|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \sup_{0 \neq v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{|\langle w, v \rangle_{\Gamma}|}{\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}.$$

1.3 Randintegraloperatoren

Bevor näher auf die Randintegralgleichungen eingegangen wird, werden die vorkommenden Randintegraloperatoren eingeführt und ihre Eigenschaften besprochen. Für eine ausführlichere Diskussion und die Beweise siehe z.B. [10, 8].

1.3.1 Einfachschichtpotential

Mit der Fundamentallösung (1.4) lässt sich für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ das Einfachschichtpotential

$$(\tilde{V} w)(x) := \int_{\Gamma} U^*(x, y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (1.11)$$

eingeführen. Es hat die folgenden Eigenschaften:

- Da $U^*(x, y)$ regulär ist für $x \neq y$, ist das Einfachschichtpotential wohldefiniert.
- $\tilde{V} w$ ist eine Lösung der Laplace-Gleichung, d.h.

$$-\Delta (\tilde{V} w)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

- Für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist $u = \tilde{V} w \in H^1(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\tilde{V} w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Formal lässt sich mit Hilfe des inneren beziehungsweise äußeren Spuoperators ein beschränkter linearer Operator

$$V := \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V} = \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1.12)$$

definieren mit

$$\|V w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^V \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (1.13)$$

Die Darstellung von V als Grenzwert (1.12) ist für die numerische Auswertung ungeeignet. Für $w \in L_{\infty}(\Gamma)$ existiert eine explizite Darstellung

$$(V w)(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.14)$$

als schwach singuläres Integral (siehe z.B. [8, Lemma 6.4]).

Es kann mit der zusätzlichen Voraussetzung $\text{diam}(\Omega) < 1$ gezeigt werden, dass V $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch ist, also eine Abschätzung

$$\langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma} \geq c_1^V \|\tau\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1.15)$$

mit einer positiven Konstante $c_1^V > 0$ erfüllt. Damit ist V nach dem Lemma von Lax-Milgram (siehe z.B. [8, Satz 3.2]) invertierbar. Der Operator $V^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ existiert also und ist beschränkt,

$$\|V^{-1}v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \frac{1}{c_1^V} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (1.16)$$

1.3.2 Adjungiertes Doppelschichtpotential

Die Anwendung der inneren Konormalenableitung auf das Einfachschichtpotential ergibt einen beschränkten linearen Operator

$$\gamma_1^{\text{int}} \tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

mit

$$\|\gamma_1^{\text{int}}(\tilde{V}w)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt die Darstellung

$$\gamma_1^{\text{int}}(\tilde{V}w) = \sigma(x)w(x) + (K'w)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.17)$$

im Sinne von $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Dabei ist

$$(K'w)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma: |x-y| \geq \varepsilon} [\gamma_{1,x}^{\text{int}} U^*(x,y)] w(y) ds_y \quad (1.18)$$

und

$$\sigma(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_{y \in \Omega: |y-x|=\varepsilon} ds_y \quad (1.19)$$

für $x \in \Gamma$. Für einen hinreichend glatten Rand Γ ist $\sigma(x) = \frac{1}{2}$ für fast alle $x \in \Gamma$.

K' wird als adjungierter Doppelschichtpotentialoperator bezeichnet. Es handelt sich um eine beschränkte lineare Abbildung mit

$$\|K'w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^{K'} \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Für die äußere Konormalenableitung ergibt sich die Darstellung

$$\gamma_1^{\text{ext}}(\tilde{V}w)(x) = [\sigma(x) - 1]w(x) + (K'w)(x) = \left(-\frac{1}{2}I + K'\right)w(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.20)$$

im Sinne von $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Aus (1.17) und (1.20) folgt die Sprungbedingung

$$[\gamma_1 \tilde{V} w] := \gamma_1^{\text{ext}}(\tilde{V} w)(x) - \gamma_1^{\text{int}}(\tilde{V} w)(x) = -w(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.21)$$

im Sinne von $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

1.3.3 Doppelschichtpotential

Mit der Fundamentallösung (1.4) kann für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ das Doppelschichtpotential

$$(\mathbb{W} v)(x) := \int_{\Gamma} [\gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, y)] v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (1.22)$$

eingeführt werden. Es hat die folgenden Eigenschaften:

- Da $U^*(x, y)$ für $x \neq y$ regulär ist, ist (1.22) wohldefiniert.
- $\mathbb{W} v$ ist Lösung der Laplace-Gleichung, d.h.

$$-\Delta(\mathbb{W} v)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

- Für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist $u = (\mathbb{W} v) \in H^1(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\mathbb{W} v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Die Anwendung des inneren Spuoperators ergibt ebenfalls eine beschränkte lineare Abbildung

$$\gamma_0^{\text{int}} \mathbb{W} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

mit der Abschätzung

$$\|\gamma_0^{\text{int}} \mathbb{W} v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kann für den inneren Spuoperator die Darstellung

$$\gamma_0^{\text{int}}(\mathbb{W} v) = [-1 + \sigma(x)] v(x) + (\mathbb{K} v)(x) = \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{K}\right) v(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.23)$$

gezeigt werden. Dabei ist

$$(\mathbb{K} v)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma: |x-y| \geq \varepsilon} [\gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, y)] v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.24)$$

Für die Definition von $\sigma(x)$ siehe (1.19).

Wird der äußere Spuoperator angewendet, ergibt sich die Darstellung

$$\gamma_0^{\text{ext}}(\mathbb{W} v)(x) = \sigma(x)v(x) + (\mathbb{K} v)(x) = \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{K}\right) v(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.25)$$

Aus (1.23) und (1.25) folgt die Sprungbedingung

$$[\gamma_0 \mathbb{W}] := \gamma_0^{\text{ext}}(\mathbb{W} v)(x) - \gamma_0^{\text{int}}(\mathbb{W} v)(x) = v(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

1.3.4 Hypersingulärer Integraloperator

Durch die Konormalenableitung des Doppelschichtpotentials wird ein beschränkter Operator

$$\gamma_1^{\text{int}} W : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definiert. Der hypersinguläre Integraloperator

$$(Dv)(x) := -\gamma_1^{\text{int}}(Wv)(x) = -\lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} n_x \cdot \nabla_{\tilde{x}}(Wv)(\tilde{x}) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.26)$$

ist daher ebenso beschränkt, es gilt

$$\|Dv\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^D \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (1.27)$$

D kann nur mittels einer geeigneten Regularisierung explizit dargestellt werden. Wird in der Darstellungsformel (1.5) $u_0 \equiv 1$ eingesetzt, folgt

$$1 = -\int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(\tilde{x}, y) ds_y \quad \text{für } \tilde{x} \in \Omega,$$

weshalb

$$\nabla_{\tilde{x}}(Wu_0)(\tilde{x}) = 0 \quad \text{für } \tilde{x} \in \Omega$$

gilt und damit auch

$$(Du_0)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.28)$$

(1.28) kann auch als $(Du_0) = 0$ mit der Eigenlösung $u_0(x) \equiv 1$ interpretiert werden. Der hypersinguläre Randintegraloperator D kann somit nicht auf ganz $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ elliptisch sein, sondern nur auf Faktorräumen:

D ist $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch, d.h. es gilt

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq c_1^D \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad (1.29)$$

für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} = 0\}$. $t_{\text{eq}} = V^{-1} 1$ wird als natürliche Dichte bezeichnet.

1.3.5 Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtpotentials

Es kann gezeigt werden, dass für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$(1 - c_K) \|v\|_{V^{-1}} \leq \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \leq c_K \|v\|_{V^{-1}} \quad (1.30)$$

gilt [8, Satz 6.8] mit der Kontraktionskonstanten

$$c_K = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^V c_1^D} < 1. \quad (1.31)$$

c_1^V und c_1^D bezeichnen die Elliptizitätskonstanten des Einfachschichtpotentials V (1.15) und des hypersingulären Integraloperators D (1.29). Die Norm

$$\|v\|_{V^{-1}} := \sqrt{\langle V^{-1}u, u \rangle_\Gamma} \quad \text{für alle } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definiert eine in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ äquivalente Norm.

Für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kann

$$\left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \leq c_K \|v\|_{V^{-1}} \quad \text{für alle } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1.32)$$

bewiesen werden [8, Folgerung 6.5].

1.4 Randintegralgleichungen

In Abschnitt 1.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Berechnung der fehlenden Cauchy-Daten mittels geeigneter Randintegralgleichungen erfolgt. Auf diese soll hier näher eingegangen werden.

Das Anwenden des inneren Spuroperators auf die Darstellungsformel (1.5) führt zur Randintegralgleichung

$$\gamma_0^{\text{int}} u_i(x) = \left(V \gamma_1^{\text{int}} u_i \right) (x) + \left(\frac{1}{2}I - K \right) \gamma_0^{\text{int}} u_i(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.33)$$

Die Anwendung der Konormalenableitung liefert eine zweite Randintegralgleichung

$$\gamma_1^{\text{int}} u_i(x) = \left(\frac{1}{2}I + K' \right) \gamma_1^{\text{int}} u_i(x) + \left(D \gamma_0^{\text{int}} u_i \right) (x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.34)$$

Zusammengefasst beschreiben (1.33) und (1.34) das System

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u_i \\ \gamma_1^{\text{int}} u_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix}}_{=:C} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u_i \\ \gamma_1^{\text{int}} u_i \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

von Randintegralgleichungen für $x \in \Gamma$. Die Matrix C wird als Calderón-Projektor bezeichnet. Mit der Projektionseigenschaft $C = C^2$ ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Randintegraloperatoren:

$$\begin{aligned} VD &= \left(\frac{1}{2}I + K \right) \left(\frac{1}{2}I - K \right), & DV &= \left(\frac{1}{2}I + K' \right) \left(\frac{1}{2}I - K' \right), \\ VK' &= KV, & K'D &= DK. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Für den Außenraum kann analog vorgegangen werden. Die Anwendung des äußeren Spuroperators auf die Darstellungsformel (1.7) ergibt

$$\gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) = - \left(V \gamma_1^{\text{ext}} u_e \right) (x) + \left(\frac{1}{2}I + K \right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \quad (1.37)$$

die Anwendung der äußeren Konormalenableitung auf (1.7) ergibt

$$\gamma_1^{\text{ext}} u_e(x) = \left(\frac{1}{2}I - K'\right) \gamma_1^{\text{ext}} u_e(x) - \left(D \gamma_0^{\text{ext}} u_e\right)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \quad (1.38)$$

(1.37) und (1.38) lassen sich analog zu (1.35) als System von Randintegralgleichungen

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} u_e \\ \gamma_1^{\text{ext}} u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + K & -V \\ -D & \frac{1}{2}I - K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} u_e \\ \gamma_1^{\text{ext}} u_e \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

anschreiben.

Ausgehend von den Systemen (1.35) und (1.39) können für verschiedene Randwertprobleme unterschiedliche Randintegralgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Cauchy-Daten abgeleitet werden.

1.5 Steklov-Poincaré-Operator

Aus (1.37) folgt

$$\begin{aligned} (V \gamma_1^{\text{ext}} u_e)(x) &= \left(\frac{1}{2}I + K\right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) - \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) \\ &= -\left(\frac{1}{2}I - K\right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x). \end{aligned}$$

Da V invertierbar ist, folgt weiter

$$\gamma_1^{\text{ext}} u_e(x) = -V^{-1} \left(\frac{1}{2}I - K\right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Durch $\gamma_1^{\text{ext}} u_e = -S^{\text{ext}} \gamma_0^{\text{ext}} u_e$ wird ein Zusammenhang zwischen den Cauchy-Daten beschrieben. Der beschränkte Operator S^{ext} wird als äußerer Steklov-Poincaré-Operator bezeichnet und ist gegeben durch

$$S^{\text{ext}} := V^{-1} \left(\frac{1}{2}I - K\right). \quad (1.40)$$

Ausgehend von (1.33) führen analoge Überlegungen zum inneren Steklov-Poincaré-Operator

$$S^{\text{int}} := V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right) = D + \left(\frac{1}{2}I + K'\right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right). \quad (1.41)$$

Lemma 1.1. *Für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gelten die Äquivalenzungleichungen*

$$\frac{1}{c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K\right)v \right\|_{V^{-1}}^2 \leq \langle S^{\text{int}} v, v \rangle_{\Gamma} \leq \frac{1}{1 - c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K\right)v \right\|_{V^{-1}}^2 \quad (1.42)$$

mit der in (1.31) gegebenen Kontraktionskonstante $c_K < 1$.

Beweis. Der Beweis stammt aus [11]. Zunächst wird $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ betrachtet. Der hyper-singuläre Integraloperator D ist $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch mit der Abschätzung (1.29). V^{-1} ist ein beschränkter Operator, daraus folgt

$$\langle V^{-1}v, v \rangle_{\Gamma} \leq \|V^{-1}v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \stackrel{(1.16)}{\leq} \frac{1}{c_1^V} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} c_K(1 - c_K) &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^D c_1^V} \right) \left(1 - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^D c_1^V} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^D c_1^V} \right) \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^D c_1^V} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - c_1^D c_1^V \right) = c_1^D c_1^V. \end{aligned}$$

Zusammenfassend kann $\langle Dv, v \rangle_{\Gamma}$ nun also durch

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \stackrel{(1.29)}{\geq} c_1^D \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \geq c_1^D c_1^V \langle V^{-1}v, v \rangle_{\Gamma} = c_K(1 - c_K) \|v\|_{V^{-1}}^2 \quad (1.43)$$

für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ abgeschätzt werden. Um die untere Abschätzung von (1.42) zu zeigen, wird die symmetrische Darstellung des inneren Steklov-Poincaré-Operators (1.41) verwendet:

$$\begin{aligned} \langle S^{\text{int}}v, v \rangle_{\Gamma} &= \left\langle \left(D + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \right) v, v \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \langle Dv, v \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) v, v \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \langle Dv, v \rangle_{\Gamma} + \left\langle V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) v, \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Nun wird der zweite Term als Norm interpretiert,

$$= \langle Dv, v \rangle_{\Gamma} + \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2,$$

und die Abschätzung (1.43) verwendet

$$\geq c_K(1 - c_K) \|v\|_{V^{-1}}^2 + \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2.$$

Mit (1.32) folgt

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - c_K) \frac{1}{c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 \\
&= \left(\frac{1}{c_K} - 1 \right) \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 \\
&= \frac{1}{c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2.
\end{aligned}$$

Für den Beweis der oberen Abschätzung wird die nicht symmetrische Darstellung von S^{int} verwendet:

$$\langle S^{\text{int}} v, v \rangle_\Gamma = \left\langle V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) v, v \right\rangle_\Gamma \leq \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \|v\|_{V^{-1}}.$$

Mit der unteren Abschätzung aus (1.30) ergibt sich die behauptete Abschätzung

$$\langle S^{\text{int}} v, v \rangle_\Gamma \leq \frac{1}{1 - c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} = \frac{1}{1 - c_K} \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2.$$

Weil $\ker S^{\text{int}} = \ker \left(\frac{1}{2}I + K \right) = \text{span}\{1\}$, gilt die Behauptung für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. \square

Bemerkung 1.1. Während die konkreten Werte von c_1^V und c_1^D von der Definition der Normen $\|\cdot\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ beziehungsweise $\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ abhängen können, kann über das Produkt $c_1^D c_1^V$ eine von den Normen unabhängige Aussage getroffen werden. Aus (1.43), genauer aus

$$\langle D v, v \rangle_\Gamma \geq c_1^D c_1^V \langle V^{-1} v, v \rangle_\Gamma,$$

folgt nämlich

$$c_1^D c_1^V = \inf_{0 \neq v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{\langle D v, v \rangle_\Gamma}{\langle V^{-1} v, v \rangle_\Gamma}.$$

Damit hängt auch die Kontraktionskonstante c_K (1.31) nicht von den verwendeten Normen ab.

2 Formulierung und Analysis des Transmissionsproblems

In diesem Kapitel wird zuerst das Transmissionsproblem vorgestellt, das in weiterer Folge näher betrachtet wird. Variationsformulierungen werden zunächst für Innen- und Außenraum getrennt hergeleitet, um dann in Abschnitt 2.4 zu einer gekoppelten Formulierung verknüpft zu werden. Diese erste gekoppelte Formulierung wird, motiviert durch eine mögliche Zerlegung der Lösung u , modifiziert und eine zugehörige Bilinearform eingeführt. Im Anschluss wird für diese Bilinearform die Elliptizitätseigenschaft in einem Satz formuliert und bewiesen.

Die Grundlage für dieses Kapitel bilden [11] und [9]. Mit der Kopplung von Randintegral- und Finite-Elemente-Methoden beschäftigen sich auch [5, 2].

2.1 Problemstellung

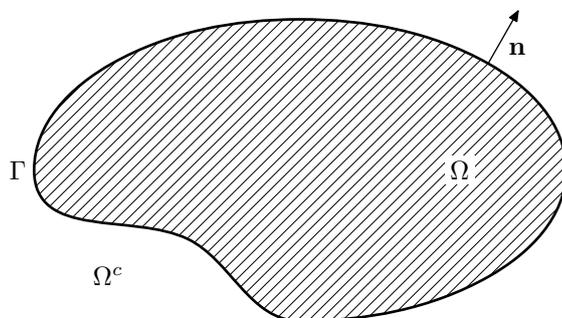


Abbildung 2.1: Gebiet

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\text{diam}(\Omega) < 1$, $\Gamma = \partial\Omega$ sein Lipschitzrand. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$-\alpha \Delta u_i(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$-\Delta u_e(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega^c := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (2.2)$$

mit den Transmissionsbedingungen

$$\gamma_0^{\text{int}} u_i(x) = \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x), \quad t(x) := \alpha \frac{\partial}{\partial n} u_i(x) = \frac{\partial}{\partial n} u_e(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (2.3)$$

und der Abstrahlbedingung

$$u_e(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

$f \in L_2(\Omega)$ sei hierbei eine gegebene Funktion, $\alpha \in \mathbb{R}$ sei konstant und n bezeichne den äußeren Normalvektor.

2.2 Innenraum

Ziel dieses Abschnittes ist die Herleitung einer Variationsformulierung von (2.1). Zu diesem Zweck wird (2.1) zuerst mit einer Testfunktion $v \in H^1(\Omega)$ multipliziert,

$$-\alpha \Delta u_i(x) v(x) = f(x) v(x), \quad (2.5)$$

und das Ergebnis (2.5) über Ω integriert:

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta u_i(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Danach wird der Gauß'sche Integralsatz angewandt

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta u_i(x) v(x) \, dx = - \int_{\Gamma} t(x) \gamma_0^{\text{int}} v(x) \, ds_x + \alpha \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) \, dx. \quad (2.6)$$

Durch Umformen und Einsetzen von (2.1),

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) \, dx &= \int_{\Omega} \underbrace{[-\alpha \Delta u_i(x)]}_{=f(x) \text{ wegen (2.1)}} v(x) \, dx + \int_{\Gamma} t(x) \gamma_0^{\text{int}} v(x) \, ds_x, \\ \alpha \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) \, dx &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma} t(x) \gamma_0^{\text{int}} v(x) \, ds_x, \end{aligned}$$

wird die angekündigte Variationsformulierung erreicht.

Zusammengefasst ist also ein $u_i \in H^1(\Omega)$ gesucht, sodass

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma} t(x) \gamma_0^{\text{int}} v(x) \, ds_x \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega). \quad (2.7)$$

(2.7) gilt insbesondere auch für $v_1(x) \equiv 1$, das heißt es ergibt sich

$$0 = \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\Gamma} t(x) \, ds_x. \quad (2.8)$$

Diese Bedingung wird in Abschnitt 2.4 wieder aufgegriffen.

2.3 Außenraum

Zuerst wird die Darstellungsformel im Außenraum (1.7) mit Hilfe der Randintegraloperatoren geschrieben,

$$\begin{aligned} u_e(x) &= - \int_{\Gamma} U^*(x, y) \gamma_1^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{ext}} U^*(x, y) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(y) \, ds_y \\ &= -(\tilde{V} \gamma_1^{\text{ext}} u_e)(x) + (W \gamma_0^{\text{ext}} u_e)(x) \end{aligned} \quad \text{für } x \in \Omega^c.$$

Wie in Abschnitt 1.4 bereits vorweggenommen, ergibt die Anwendung des äußeren Spuroperators

$$\gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) = -(V \gamma_1^{\text{ext}} u_e)(x) + \frac{1}{2} \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) + (K \gamma_0^{\text{ext}} u_e)(x).$$

Umformen, Zusammenfassen und Ersetzen der Normalenableitung durch (2.3) führt zur Randintegralgleichung

$$(Vt)(x) = \left(-\frac{1}{2}I + K\right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e(x) \quad (2.9)$$

für fast alle $x \in \Gamma$. Um die zugehörige Variationsformulierung zu erhalten, wird (2.9) mit einer Testfunktion $\tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ multipliziert und das Ergebnis über Γ integriert. Die Variationsformulierung lautet damit:

Gesucht ist $t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$\langle Vt, \tau \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K\right) \gamma_0^{\text{ext}} u_e, \tau \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad \text{für alle } \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.10)$$

Damit das geforderte Abklingverhalten (2.4) erreicht wird, wird zusätzlich folgende Skalierungsbedingung für die Normalenableitung vorausgesetzt (siehe [8], Lemma 6.14):

$$\int_{\Gamma} t(x) \, ds_x = 0. \quad (2.11)$$

2.4 Nicht symmetrische BEM/FEM-Kopplung

Zur Vereinfachung wird von jetzt an auf das Anschreiben des Spurooperators verzichtet. Mit den Transmissionsbedingungen (2.3) wird aus den beiden bisher getrennt betrachteten Variationsformulierungen (2.7) und (2.10) eine erste gekoppelte Formulierung:

Gesucht ist $(u, t) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, sodass

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\Gamma} t(x)v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \quad (2.12)$$

und

$$\langle V t, \tau \rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, \tau \right\rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für alle } \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.13)$$

Werden die Bedingung (2.8) und die Skalierungsbedingung (2.11) gemeinsam betrachtet,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\Gamma} t(x) \, ds_x &= 0, \\ \int_{\Gamma} t(x) \, ds_x &= 0, \end{aligned}$$

folgt daraus unmittelbar die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = 0. \quad (2.14)$$

Als Nächstes wird eine Zerlegung von u eingeführt, die durch folgende Überlegungen motiviert ist:

Da das Einfachschichtpotential $V : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ beschränkt und $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch ist, ist V invertierbar, also kann die natürliche Dichte $t_{\text{eq}} := V^{-1} 1$ als Testfunktion gewählt und in (2.13) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \langle V t, V^{-1} 1 \rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma &= 0, \\ \langle t, 1 \rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma &= 0, \\ \langle t, 1 \rangle_\Gamma &= - \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma, \\ \int_{\Gamma} t(x) \, ds_x &= - \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma \stackrel{(2.11)}{=} 0 \end{aligned}$$

Wegen der Relation $V K' = K V$ (1.36) folgt weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma = \langle u, V^{-1} 1 \rangle_\Gamma - \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) u, V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle u, t_{\text{eq}} \rangle_\Gamma - \left\langle u, \left(\frac{1}{2} I + K' \right) V^{-1} 1 \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle u, t_{\text{eq}} \rangle_\Gamma - \left\langle u, V^{-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2} I + K \right) 1}_{=0} \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle u, t_{\text{eq}} \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

u kann also zerlegt werden in

$$u(x) = u_0 + \tilde{u}(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \quad (2.15)$$

Dabei sei u_0 konstant; \tilde{u} sei aus $H^1(\Omega)$ und erfülle die Bedingung

$$\langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} = 0. \quad (2.16)$$

Der konstante Anteil u_0 kann sogar weggelassen werden, da $u_0 = 0$ gilt, wie leicht nachgerechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \langle u, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} &= 0, \\ \langle u_0, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} + \langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} &= 0, \\ u_0 \underbrace{\langle 1, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}}_{\neq 0} &= 0, \\ \Rightarrow u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Anstelle der gekoppelten Formulierung (2.12)-(2.13) unter der zusätzlichen Bedingung (2.16), kann durch Einführen eines Lagrange-Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$ folgendes erweitertes Problem betrachtet werden:

Gesucht ist $(\tilde{u}, t, \lambda) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \lambda \langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} - \langle t, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx, \quad (2.17)$$

$$\langle \mathbf{V} t, \tau \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K} \right) \tilde{u}, \tau \right\rangle_{\Gamma} = 0, \quad (2.18)$$

$$\langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (2.19)$$

für alle $(v, \tau) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Es ist möglich, λ zu eliminieren. Wird in (2.17) $v \equiv 1$ und in (2.18) $\tau = \mathbf{V}^{-1} 1$ gesetzt, wird sichtbar, dass $\lambda = 0$ gelten muss:

$$\lambda \langle 1, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} - \langle t, 1 \rangle_{\Gamma} = \underbrace{\int_{\Omega} f(x) \, dx}_{=0 \text{ wegen (2.14)}} = 0,$$

$$\langle t, 1 \rangle_{\Gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0.$$

Darum kann (2.19) um den Term $-\frac{\lambda}{\alpha}$ erweitert werden,

$$\langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} - \frac{\lambda}{\alpha} = 0.$$

Nun wird λ ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\alpha} &= \langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}, \\ \lambda &= \alpha \langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

und (2.20) in (2.17) eingesetzt. Das Ergebnis ist die zum ursprünglichen gekoppelten Problem (2.12)-(2.13) äquivalente modifizierte Variationsformulierung:

Gesucht ist $(\tilde{u}, t) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \alpha \langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} \langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} - \langle t, v \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx, \\ \langle \mathbf{V} t, \tau \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K} \right) \tilde{u}, \tau \right\rangle_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

für alle $(v, \tau) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Um die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit von (2.21) beantworten zu können, wird eine Bilinearform eingeführt, die die linken Seiten der zweizeiligen Formulierung (2.21) zusammenfasst:

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, t; v, \tau) &:= \alpha \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \alpha \langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} \langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} - \langle t, v \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \langle \mathbf{V} t, \tau \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K} \right) \tilde{u}, \tau \right\rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für $(\tilde{u}, t), (v, \tau) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist die Bilinearform (2.22) beschränkt. Es wird zunächst jeder Term einzeln betrachtet. Die Beschränktheit von $\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$ folgt unmittelbar aus der Definition von $H^1(\Omega)$. Um die Beschränktheit des zweiten Terms zu zeigen, wird die Abschätzung aus dem Spursatz (siehe [8, Satz 2.9]) benötigt, sie lautet

$$\left\| \gamma_0^{\text{int}} v \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für } v \in H^1(\Omega). \quad (2.23)$$

Damit gilt

$$\langle \tilde{u}, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} = \langle \tilde{u}, \mathbf{V}^{-1} 1 \rangle_{\Gamma} \leq c \left\| \gamma_0^{\text{int}} \tilde{u} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \tilde{c} \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Analog gilt

$$\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma} \leq \tilde{c} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\langle t, v \rangle_{\Gamma} \leq \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \left\| \gamma_0^{\text{int}} v \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Aus der Beschränktheit von \mathbf{V} folgt

$$\langle \mathbf{V} t, \tau \rangle_{\Gamma} \leq c_2^{\mathbf{V}} \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\tau\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Nun zum letzten Term:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K} \right) \tilde{u}, \tau \right\rangle_{\Gamma} &= \left\langle \tilde{u}, \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K}' \right) \tau \right\rangle_{\Gamma} \leq \left\| \gamma_0^{\text{int}} \tilde{u} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \left\| \left(\frac{1}{2} I - \mathbf{K}' \right) \tau \right\| \\ &\leq c_T \left(\frac{1}{2} + c_2^{\mathbf{K}'} \right) \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\tau\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$|a(\tilde{u}, t; v, \tau)| \leq \hat{c} \left[\alpha \|\nabla \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \alpha \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \right. \\ \left. + \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\tau\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\tau\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right]$$

für eine geeignete Konstante \hat{c} . Dass die Bilinearform (2.22) auch elliptisch ist, sagt der folgende Satz aus. Die verwendeten Normen sind definiert durch

$$\|v\|_{H^1(\Omega), \Gamma}^2 := \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 \quad \text{und} \quad \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2 := \langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma}.$$

Theorem 2.1. *Sei $\alpha > \frac{1}{4}c_K$, wobei $c_K < 1$ die Kontraktionskonstante aus (1.31) sei. Dann ist die Bilinearform (2.22) $H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch und erfüllt*

$$a(v, \tau; v, \tau) \geq \frac{1}{2}(1 - c_K) \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] [\|v\|_{H^1(\Omega), \Gamma}^2 + \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2] \quad (2.24)$$

für alle $(v, \tau) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Beweis. Der Beweis stammt aus [11]. Vergleiche auch [9].

Ausgangspunkt des Beweises bildet die Bilinearform (2.22) für $u = v$ und $t = \tau$.

$$a(v, \tau; v, \tau) = \alpha \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \alpha [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 + \langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma} - \underbrace{\langle \tau, v \rangle_{\Gamma}}_{=\langle v, \tau \rangle_{\Gamma}} + \left\langle \left(\frac{1}{2}I - \mathbf{K}\right) v, \tau \right\rangle_{\Gamma} \\ = \alpha \left[\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 \right] + \langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma} - \left\langle \left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) v, \tau \right\rangle_{\Gamma}.$$

Nun wird eine Zerlegung $v = v_{\Gamma} + \bar{v}$ eingeführt mit $\bar{v} \in H_0^1(\Omega)$ und v_{Γ} sei die harmonische Fortsetzung von $v|_{\Gamma}$,

$$-\Delta v_{\Gamma} = 0, \quad v_{\Gamma} = v|_{\Gamma} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Damit gilt

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\Gamma}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) dx = 0, \quad \int_{\Omega} \nabla v_{\Gamma}(x) \cdot \nabla v_{\Gamma}(x) dx = \langle \mathbf{S}^{\text{int}} v, v \rangle_{\Gamma}.$$

Die Betrachtung von $a(v, \tau; v, \tau)$ kann nun wie folgt fortgesetzt werden:

$$a(v, \tau; v, \tau) = \alpha \left[\underbrace{\int_{\Omega} |\nabla v_{\Gamma}(x)|^2 dx}_{=\langle \mathbf{S}^{\text{int}} v, v \rangle_{\Gamma}} + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \nabla v_{\Gamma}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) dx}_{=0} + \int_{\Omega} |\nabla \bar{v}(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 \right] \\ + \langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma} - \left\langle \left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) v, \tau \right\rangle_{\Gamma} \\ = \alpha \left[\langle \mathbf{S}^{\text{int}} v, v \rangle_{\Gamma} + \int_{\Omega} |\nabla \bar{v}(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 \right] + \langle V\tau, \tau \rangle_{\Gamma} - \left\langle \left(\frac{1}{2}I + \mathbf{K}\right) v, \tau \right\rangle_{\Gamma}.$$

Mit der unteren Abschätzung von (1.42) können der erste und die beiden letzten Terme nach unten abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} & \alpha \langle S^{\text{int}} v, v \rangle_\Gamma + \langle V \tau, \tau \rangle_\Gamma - \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) v, \tau \right\rangle_\Gamma \\ & \geq \frac{\alpha}{c_K} \left\| \left(\frac{1}{2} I - K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \|\tau\|_V^2 - \left\| \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \|\tau\|_V. \end{aligned}$$

Für $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} & = \left(\frac{\alpha}{c_K} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2} \right) \left\| \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \|\tau\|_V^2 + \frac{1}{2} \left(\gamma \|\tau\|_V - \frac{1}{\gamma} \left\| \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\|_{V^{-1}} \right)^2 \\ & \geq \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_*^2 \right) \left[\left\| \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \|\tau\|_V^2 \right] \end{aligned}$$

wenn

$$\frac{\alpha}{c_K} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_*^2} = 1 - \frac{1}{2} \gamma_*^2$$

erfüllt ist. Daraus ergibt sich

$$\gamma_*^2 = 1 - \frac{\alpha}{c_K} + \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K} \right)^2 + 1}.$$

Somit ist

$$1 - \frac{1}{2} \gamma_*^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K} \right)^2 + 1} \right] > 0$$

wenn

$$\alpha > \frac{1}{4} c_K.$$

Zusammengefasst lautet die bisherige Abschätzung der Bilinearform

$$\begin{aligned} a(v, \tau; v, \tau) & \geq \alpha \left[\int_\Omega |\nabla \bar{v}(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_\Gamma]^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K} \right)^2 + 1} \right] \left[\left\| \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\|_{V^{-1}}^2 + \|\tau\|_V^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit der oberen Abschätzung von (1.42) erhält man

$$\begin{aligned} & \geq \alpha \left[\int_\Omega |\nabla \bar{v}(x)|^2 dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_\Gamma]^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K} \right)^2 + 1} \right] \left[(1 - c_K) \langle S^{\text{int}} v, v \rangle_\Gamma + \|\tau\|_V^2 \right], \end{aligned}$$

dies ist weiter

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left[\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}(x)|^2 \, dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] \left[(1 - c_K) \int_{\Omega} |\nabla v_{\Gamma}(x)|^2 \, dx + \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} (1 - c_K) \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] \\
&\quad \left[\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla v_{\Gamma}(x)|^2 \, dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 + \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2 \right].
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird die Zerlegung von v wieder rückgängig gemacht,

$$= \frac{1}{2} (1 - c_K) \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] \left[\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx + [\langle v, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 + \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2 \right],$$

und man gelangt schließlich zur Abschätzung

$$= \frac{1}{2} (1 - c_K) \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] \left[\|v\|_{H^1(\Omega), \Gamma}^2 + \|\tau\|_{\mathbb{V}}^2 \right].$$

□

3 Diskretisierung

Die in Abschnitt 2.4 hergeleitete Variationsformulierung von (2.1)-(2.2) soll nun näherungsweise gelöst werden. Zu diesem Zweck werden die kontinuierlichen Ansatz- und Testräume durch Familien endlichdimensionaler Räume ersetzt. Am Ende erhält man dadurch lineare Gleichungssysteme, deren Lösung eine Näherungslösung des Variationsproblems definiert. Das gesamte Kapitel orientiert sich stark an [8].

3.1 Näherungsmethoden

Sei X ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$ sei die induzierte Norm. Sei weiter X' der Dualraum von X mit dem Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Betrachtet wird ein beschränkter, X -elliptischer Operator $A : X \rightarrow X'$ mit

$$\langle Av, v \rangle \geq c_1^A \|v\|_{X'}^2, \quad \|Av\|_{X'} \leq c_2^A \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in X.$$

$u \in X$ ist als Lösung der Variationsformulierung

$$\langle Av, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X \tag{3.1}$$

zu bestimmen für gegebenes $f \in X'$. Nach dem Lemma von Lax-Milgram [8, Satz 3.2] besitzt das Variationsproblem (3.1) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in X$ und es gilt

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}.$$

Für $M \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$X_M := \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M$$

eine Familie von Ansatzräumen. Zusätzlich soll

$$X_M \subset X$$

gelten. Man spricht in diesem Fall von einer Familie von konformen Ansatzräumen. Wird in (3.1) u durch

$$u_M := \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k \in X_M \tag{3.2}$$

ersetzt, kann eine Näherungslösung der Variationsformulierung (3.1) als Lösung der Galerkin-Bubnov-Variationsformulierung

$$\langle Au_M, v_M \rangle = \langle f, v_M \rangle \quad \text{für alle } v_M \in X_M, \tag{3.3}$$

bestimmt werden. Charakteristisch für das Galerkin-Bubnov-Verfahren ist die Verwendung des gleichen Ansatz- und Testraumes.

Da $X_M \subset X$, kann in (3.1) auch $v = v_M \in X_M$ gewählt werden. Die Differenz von (3.1) und (3.3) ergibt die Galerkin-Orthogonalität

$$\langle A(u - u_M), v_M \rangle = 0 \quad \text{für alle } v_M \in X_M. \quad (3.4)$$

Wird der Ansatz (3.2) in die Galerkin-Bubnov-Variationsformulierung (3.3) eingesetzt, führt dies zum endlichdimensionalen Variationsproblem

$$\sum_{k=1}^M u_k \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle = \langle f, \varphi_l \rangle \quad \text{für } l = 1, \dots, M.$$

Dies ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$A_M \underline{u} = \underline{f} \quad (3.5)$$

zur Bestimmung des Koeffizientenvektors $u \in \mathbb{R}^M$. Dabei ist

$$A_M[l, k] := \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle, \quad f_l := \langle f, \varphi_l \rangle \quad \text{für } k, l = 1, \dots, M.$$

Die Zuordnung $\underline{v} \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow v_M \in X_M$ ist umkehrbar eindeutig, es gilt also für beliebige Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^M$

$$\begin{aligned} (A_M \underline{u}, \underline{v}) &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M A[l, k] u_k v_l = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle u_k v_l \\ &= \left\langle A \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k, \sum_{l=1}^M v_l \varphi_l \right\rangle = \langle Au_M, v_M \rangle. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Eigenschaften des Operators A auf die Matrix A_M übertragen werden. Ist A selbstadjungiert, so ist A_M symmetrisch; ist A X -elliptisch, so ist A_M positiv definit. Aus der X -Elliptizität von A folgt damit nicht nur die eindeutige Lösbarkeit von (3.1), sondern auch die eindeutige Lösbarkeit von (3.5).

Theorem 3.1 (Cea's Lemma). *Sei $A : X \rightarrow X'$ beschränkt und X -elliptisch. Für die eindeutige Lösung $u_M \in X_M$ der Variationsformulierung (3.3) gilt die Stabilitätsabschätzung*

$$\|u_M\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}, \quad (3.6)$$

sowie die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_M\|_X \leq \frac{c_2^A}{c_1^A} \inf_{v_M \in X_M} \|u - v_M\|_X. \quad (3.7)$$

Die Näherungslösung $u_M \in X_M$ ist also stabil und konvergiert gegen die Lösung $u \in X$, wenn der Ansatzraum X_M die Approximationseigenschaft

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \inf_{v \in X} \inf_{v_M \in X_M} \|v - v_M\|_X = 0 \quad (3.8)$$

erfüllt.

3.2 Finite Elemente

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand. Betrachtet wird eine Folge von Unterteilungen

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{N^F} = \bigcup_{l=1}^{N^F} \bar{\tau}_l. \quad (3.9)$$

Als finite Elemente τ_l werden hier Dreiecke verwendet.

$\{x_k\}_{k=1}^{M^F}$ sei die Menge aller Knoten der Unterteilung $\Omega_{N^F}^F$. Die Unterteilung (3.9) sei zulässig, zwei benachbarte Elemente haben also entweder einen Knoten oder eine Kante gemeinsam; es gibt keine sogenannten hängenden Knoten.

Für jedes Element τ_l ist

$$\Delta_l^F := \int_{\tau_l} dx$$

das Volumen und

$$h_l^F := \sqrt{\Delta_l^F}$$

die lokale Maschenweite. Die globale Maschenweite h^F ist definiert durch

$$h^F = h_{\max}^F := \max_{l=1, \dots, N^F} h_l^F.$$

Entsprechend sei

$$h_{\min}^F := \min_{l=1, \dots, N^F} h_l^F.$$

Eine Familie von Unterteilungen Ω_{N^F} wird global gleichmäßig genannt, wenn

$$\frac{h_{\max}^F}{h_{\min}^F} \leq c_G$$

mit einer globalen, von N^F unabhängigen Konstanten $c_G > 1$.

Jedes finite Element τ_l kann durch eine lokale Parametrisierung dargestellt werden. Für einen Punkt $x \in \tau_l$ gilt die Darstellung

$$x = x_{l_1} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (x_{l_{i+1}} - x_{l_1}) = x_{l_1} + J_l \xi \quad \text{für } \xi \in \tau$$

mit

$$J_l = \begin{pmatrix} x_{l_{2,1}} - x_{l_{1,1}} & x_{l_{3,1}} - x_{l_{1,1}} \\ x_{l_{2,2}} - x_{l_{1,2}} & x_{l_{3,2}} - x_{l_{1,2}} \end{pmatrix}.$$

Das Element

$$\tau = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}$$

wird als Referenzelement bezeichnet.

Für eine in $x \in \tau_l$ gegebene Funktion gilt die Darstellung

$$v(x) = v(x_{l_1} + J_l \xi) = \tilde{v}_l(\xi) \quad \text{für } \xi \in \tau.$$

Lemma 3.2. Für $d = 2$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gelten die Normäquivalenzungleichungen

$$\frac{1}{c_m} (2\Delta_l)^{1-m} \left\| \nabla_{\xi}^m \tilde{v}_l \right\|_{L_2(\tau)}^2 \leq \left\| \nabla_x^m v \right\|_{L_2(\tau_l)}^2 \leq c_m (2\Delta_l)^{1-m} \left\| \nabla_{\xi}^m \tilde{v}_l \right\|_{L_2(\tau)}^2 \quad (3.10)$$

mit der Konstanten

$$c_m = \left(\frac{c_F^2}{\pi} \right)^m.$$

Beweis. Siehe [8]. □

Bezüglich der Unterteilung (3.9) werden nun Ansatzräume stückweise polynomialer Funktionen erklärt. Diese werden lokal durch Formfunktionen auf den Elementen τ_l definiert und globalen Freiheitsgraden zugeordnet.

Eine im Referenzelement τ betrachtete lineare Funktion ist eindeutig durch ihre Funktionswerte \tilde{v}_k in den Knoten des Referenzelements bestimmt,

$$\tilde{v}_h(\xi) = \sum_{k=1}^3 \tilde{v}_k \psi_k^1(\xi) \quad \text{für } \xi \in \tau. \quad (3.11)$$

Dabei lauten die linearen Formfunktionen

$$\psi_1^1(\xi) := 1 - \xi_1 - \xi_2, \quad \psi_2^1(\xi) := \xi_1, \quad \psi_3^1(\xi) := \xi_2.$$

Als Ansatzraum wird der Raum $S_h^1(\Omega_{NF})$ der stückweise linearen und global stetigen Funktionen verwendet, d.h.

$$S_h^1(\Omega_{NF}) := \text{span}\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M^F}$$

mit

$$\varphi_i^1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{für } x = x_k \neq x_i \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine Funktion $v_h \in S_h^1(\Omega_{NF})$ gilt die Darstellung

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^{M^F} v_k \varphi_k^1(x),$$

wobei $v_k = v_h(x_k)$.

Theorem 3.3. Sei $u \in H^s(\Omega_{NF})$ mit $s \in [\sigma, 2]$ mit $\sigma \in \{0, 1\}$. Dann gilt die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^1(\Omega_{NF})} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\Omega_{NF})} \leq c (h^F)^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Omega_{NF})}. \quad (3.12)$$

Beweis. Siehe z.B. [8]. □

3.3 Randelemente

Wie in [8] werden an dieser Stelle endlich-dimensionale Ansatzräume eingeführt, um Randintegralgleichungen näherungsweise lösen zu können. Sei dafür der Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$ stückweise glatt und es existiere eine Zerlegung $\bar{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$, wobei jedes der Randstücke Γ_j durch eine lokale Parametrisierung gegeben sei.

Betrachtet wird eine Folge $\{\Gamma_{NB}\}_{NB \in \mathbb{N}}$ von Unterteilungen

$$\Gamma_N = \bigcup_{l=1}^{NB} \bar{\sigma}_l. \quad (3.13)$$

Für jedes Randelement σ_l existiere genau ein Index j mit $\sigma_l \subset \Gamma_j$. $\{x_k\}_{k=1}^{MB}$ sei die Menge der Knoten der Randdiskretisierung.

Da Randelemente als finite Elemente auf dem Rand interpretiert werden können, sind die folgenden Definitionen analog zu Abschnitt 3.2, wobei sich die Betrachtungen auf den zweidimensionalen Fall beschränken.

$$\Delta_l^B := \int_{\tau_l} ds_x$$

ist das Volumen und

$$h_l^B := \Delta_l^B$$

die lokale Maschenweite des Randelements σ_l .

$$h^B = h_{\max}^B := \max_{l=1, \dots, NB} h_l^B$$

bezeichnet die globale Maschenweite der Randzerlegung (3.13) und

$$h_{\min}^B := \min_{l=1, \dots, NB} h_l^B.$$

Eine Familie von Randdiskretisierungen heißt global gleichmäßig, wenn

$$\frac{h_{\max}^B}{h_{\min}^B} \leq c_G$$

mit einer globalen, von N^B unabhängigen Konstanten $c_G > 1$.

Die betrachteten Randelemente entsprechen Geradenstücken, das bedeutet: Ein Randelement σ_l mit den Knoten x_{l_1} und x_{l_2} ist gegeben durch

$$x(\xi) = x_{l_1} + \xi(x_{l_2} - x_{l_1})$$

für ξ aus dem Referenzelement $\sigma = (0, 1)$. Für eine in $x \in \sigma$ betrachtete Funktion gilt

$$v(x) = v(x_{l_1} + \xi h_l) =: \tilde{v}_l(\xi) \quad \text{für } \xi \in \sigma \quad (3.14)$$

mit

$$\|v\|_{L_2(\sigma_l)}^2 = \int_{\sigma_l} |v(x)|^2 ds_x = \int_{\sigma} |\tilde{v}_l(\xi)|^2 h_l d\xi = \Delta_l^B \|\tilde{v}_l\|_{L_2(\sigma)}^2.$$

Die Funktion im Referenzelement entspricht (3.11) mit den Formfunktionen

$$\psi_1^1(\xi) := 1 - \xi, \quad \psi_2^1(\xi) := \xi.$$

Als Ansatzraum für den Randelemente-Teil wurde der Raum $S_h^0(\Gamma_{NB})$ der stückweise konstanten Funktionen gewählt, d.h.

$$S_h^0(\Gamma_{NB}) = \text{span}\{\varphi_j^0\}_{j=1}^{N^B} \quad (3.15)$$

mit den Basisfunktionen

$$\varphi_j^0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \sigma_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Theorem 3.4. Sei $\sigma \in [-1, 0]$. Für $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\sigma, 1]$ gilt die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma_{NB})} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\Gamma_{NB})} \leq c(h^B)^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma_{NB})}.$$

Beweis. Siehe z.B. [8]. □

3.4 Diskretisierung der modifizierten Variationsformulierung

Sei N_Ω die Anzahl der FE-Freiheitsgrade im Gebiet Ω , N_Γ bezeichne die Anzahl der BE-Freiheitsgrade am Rand. N_Ω sei weiter unterteilt in die Anzahl der FE-Freiheitsgrade im Inneren des Gebietes N_Ω^I und die Anzahl der FE-Freiheitsgrade am Rand N_Ω^C . Um eine Galerkin-Variationsformulierung zu erhalten, werden in (2.21) \tilde{u} und t durch die Funktionen u_h und t_h ,

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^{N_\Omega} u_k \varphi_k^1(x), \quad t_h(x) = \sum_{l=1}^{N_\Gamma} t_l \varphi_l^0(x), \quad (3.16)$$

ersetzt. Die natürliche Dichte t_{eq} wird analog als

$$t_{\text{eq},h}(x) := \sum_{l=1}^{N_\Gamma} t_{\text{eq},l} \varphi_l^0(x) \quad (3.17)$$

angesetzt und näherungsweise bestimmt als Lösung von

$$\langle V t_{\text{eq},h}, \varphi_k^0 \rangle_\Gamma = \langle 1, \varphi_k^0 \rangle_\Gamma \quad \text{für } k = 1, \dots, N_\Gamma.$$

Gesucht ist $(u_h, t_h) \in S_h^1(\Omega) \times S_h^0(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x) \, dx + \alpha \langle u_h, t_{\text{eq},h} \rangle_{\Gamma} \langle v_h, t_{\text{eq},h} \rangle_{\Gamma} - \langle t_h, v_h \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Omega} f(x) v_h(x) \, dx, \\ \langle V t_h, \tau_h \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) u_h, \tau_h \right\rangle_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

für alle $(v_h, \tau_h) \in S_h^1(\Omega) \times S_h^0(\Gamma)$.

Die in Abschnitt 3.1 beschriebene Vorgehensweise führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha K_h^{\text{FEM}} & -M_h^{10} \\ \frac{1}{2} M_h^{01} - K_h & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

mit der Massematrix

$$M_h^{10}[l, k] = \langle \varphi_{N_{\Omega}^I+k}^1, \varphi_l^0 \rangle_{\Gamma} \quad k = 1, \dots, N_{\Omega}^C, \quad l = 1, \dots, N_{\Gamma},$$

der transponierten Massematrix

$$M_h^{01}[l, k] = M_h^{10}[k, l] = \langle \varphi_k^0, \varphi_{N_{\Omega}^I+l}^1 \rangle_{\Gamma} \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma}, \quad l = 1, \dots, N_{\Omega}^C,$$

der zum Doppelschichtpotential gehörenden Matrix

$$K_h[l, k] = \langle K \varphi_k^0, \varphi_{N_{\Omega}^I+l}^1 \rangle_{\Gamma} \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma}, \quad l = 1, \dots, N_{\Omega}^C$$

und der zum Einfachschichtpotential gehörenden Matrix

$$V_h[l, k] = \langle V \varphi_k^0, \varphi_l^0 \rangle_{\Gamma} \quad k, l = 1, \dots, N_{\Gamma}.$$

Unterscheidet man im FE-Teil zusätzlich zwischen inneren Knoten und Knoten am Rand, kann die Steifigkeitsmatrix K_h^{FEM} in Blöcke zerlegt werden,

$$K_h^{\text{FEM}} = \begin{pmatrix} K^{\text{II}} & K^{\text{IC}} \\ K^{\text{CI}} & K^{\text{CC}} + \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^{\top} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Die Blockmatrizen sehen dabei, nach entsprechender Umnummerierung, folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} K^{\text{II}}[l, k] &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_k^1(x) \cdot \nabla \varphi_l^1(x) \, dx & k, l &= 1, \dots, N_{\Omega}^I, \\ K^{\text{IC}}[l, k] &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_{M_{\Omega}^I+k}^1(x) \cdot \nabla \varphi_l^1(x) \, dx & k &= 1, \dots, N_{\Omega}^C, \quad l = 1, \dots, N_{\Omega}^I, \\ K^{\text{CI}}[l, k] &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_k^1(x) \cdot \nabla \varphi_{N_{\Omega}^I+l}^1(x) \, dx & k &= 1, \dots, N_{\Omega}^I, \quad l = 1, \dots, N_{\Omega}^C, \\ K^{\text{CC}}[l, k] &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_{N_{\Omega}^I+k}^1(x) \cdot \nabla \varphi_{N_{\Omega}^I+l}^1(x) \, dx & k, l &= 1, \dots, N_{\Omega}^C. \end{aligned}$$

$\tilde{\underline{a}}$ ist der Vektor, der das Produkt mit der natürlichen Dichte t_{eq} realisiert. Er lässt sich berechnen durch

$$\tilde{\underline{a}} = M_h^{10} \underline{t}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{N_\Omega^C}.$$

Entsprechend (3.20) werden auch \underline{u} und \underline{f} in

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

unterteilt. Für die Einträge der rechten Seite \underline{f} bedeutet das

$$\begin{aligned} f_I[l] &= \int_{\Omega} f(x) \varphi_l^1(x) \, dx & l &= 1, \dots, M_\Omega^I, \\ f_C[l] &= \int_{\Omega} f(x) \varphi_{M_\Omega^I+l}^1(x) \, dx & l &= 1, \dots, M_\Omega^C. \end{aligned}$$

Mit Cea's Lemma (3.1) und mit der Approximationseigenschaft des jeweiligen Ansatzraumes erhält man die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|t - t_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c \left\{ \inf_{v_h \in S_h^1(\Omega)} \|\tilde{u} - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \inf_{\tau_h \in S_h^0(\Gamma)} \|t - \tau_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right\} \\ &\leq ch |\tilde{u}|_{H^2(\Omega)} + ch^{\frac{3}{2}} |t|_{H_{\text{pw}}^1(\Gamma)} \end{aligned}$$

für \tilde{u}, t hinreichend glatt. $H_{\text{pw}}^1(\Gamma)$ sei der Raum der stückweise glatten Funktionen. Für die genaue Definition siehe z.B. [8, S. 43].

4 Eigenwertproblem und numerische Beispiele

Ziel dieses Kapitels ist die nähere Untersuchung der Elliptizitätsabschätzung aus Satz 2.1 durch numerische Versuche. Zu diesem Zweck wird aus der Elliptizitätsabschätzung ein verallgemeinertes Eigenwertproblem (siehe z.B. [4]) abgeleitet und der betragskleinste Eigenwert bestimmt. Abschnitt 4.2 beschreibt kurz das dafür verwendete Verfahren der inversen Iteration, eine Abwandlung der Potenzmethode, und geht auf das Konvergenzverhalten der Methode ein. Die numerischen Experimente wurden für drei zweidimensionale Gebiete durchgeführt, die in Abschnitt 4.3.1 beschrieben werden. In Abschnitt 4.3.2 wird die Kontraktionskonstante näherungsweise bestimmt, damit die Ergebnisse der Eigenwertberechnungen mit der Elliptizitätsabschätzung verglichen werden können, was in Abschnitt 4.3.3 geschieht.

Über die inverse Iteration und die Potenzmethode allgemein kann z.B. bei [12, 14] nachgelesen werden.

4.1 Interpretation als Eigenwertproblem

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Elliptizitätsabschätzung (2.24) aus Satz 2.1. Werden in der Bilinearform (2.22) mit $u = v$ und $t = \tau$ sowie v und τ durch

$$v_h = \sum_{k=1}^M v_k \varphi_k^1 \quad \text{und} \quad \tau_h = \sum_{l=1}^N \tau_l \varphi_l^0 \quad (4.1)$$

ersetzt,

$$a(v_h, \tau_h; v_h, \tau_h) = \alpha \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \alpha [\langle v_h, \tau_h \rangle_{\Gamma}]^2 - \langle \tau_h, v_h \rangle_{\Gamma} \quad (4.2)$$

$$+ \langle V \tau_h, \tau_h \rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K \right) v_h, \tau_h \right\rangle_{\Gamma}, \quad (4.3)$$

führen weitere Umformungsschritte (siehe Diskretisierung) zu

$$a(v_h, \tau_h; v_h, \tau_h) = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha K_h^{\text{FEM}} & -M_h^{10} \\ \frac{1}{2} M_h^{01} - K_h & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (4.4)$$

Nun werden auch auf der rechten Seite v und τ durch v_h und τ_h ersetzt, wobei die von α und c_K abhängige Konstante

$$c(\alpha, c_K) = \frac{1}{2}(1 - c_K) \left[1 + \frac{\alpha}{c_K} - \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{c_K}\right)^2 + 1} \right] \quad (4.5)$$

für einen Moment ignoriert wird:

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega), \Gamma}^2 + \|\tau_h\|_V^2 = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + [\langle v_h, t_{\text{eq}} \rangle_{\Gamma}]^2 + \langle V\tau_h, \tau_h \rangle_{\Gamma} \quad (4.6)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} K_h^{\text{FEM}} & 0 \\ 0 & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (4.7)$$

Die Elliptizitätsabschätzung aus Satz 2.1 kann also zusammengefasst als

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha K_h^{\text{FEM}} & -M_h^{10} \\ \frac{1}{2} M_h^{01} - K_h & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle \geq c(\alpha, c_K) \left\langle \begin{pmatrix} K_h^{\text{FEM}} & 0 \\ 0 & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.8)$$

geschrieben werden. Um der Frage auf den Grund zu gehen, ob es sich bei $c(\alpha, c_K)$ um die bestmögliche Konstante handelt, wird (4.8) als Eigenwertproblem interpretiert. Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ , für den

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha K_h^{\text{FEM}} & -M_h^{10} \\ \frac{1}{2} M_h^{01} - K_h & V_h \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} K_h^{\text{FEM}} & 0 \\ 0 & V_h \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.9)$$

erfüllt ist.

Über symmetrische Matrizen ist bekannt, dass sie ausschließlich reelle Eigenwerte besitzen, was eine Erleichterung für ihre Berechnung darstellt. Leider ist die Matrix A nicht symmetrisch. Es ist aber möglich, eine Symmetrisierung durchzuführen, die durch folgende Überlegungen motiviert ist:

Sei \mathbf{A} der zur Matrix A gehörende lineare Operator, \mathbf{A}^* sei der zu \mathbf{A} adjungierte Operator.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}v, v \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}v, v \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}v, v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}v, v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, \mathbf{A}^*v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}v, v \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}^*v, v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)v, v \rangle. \end{aligned}$$

Weil A eine reelle Matrix ist, entspricht dem adjungierten Operator \mathbf{A}^* die zu A transponierte Matrix A^\top . Der selbstadjungierte Operator $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ wird repräsentiert durch die symmetrische Matrix $\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^\top)$. Anstelle des Eigenwertproblems

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$$

kann also

$$\tilde{A}\underline{x} = \lambda B\underline{x} \quad (4.10)$$

betrachtet werden.

4.2 Inverse Iteration

Für eine nichtsinguläre Matrix B entspricht (4.10)

$$B^{-1}\tilde{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}.$$

Gestartet wird mit einem zufälligen Anfangsvektor \underline{x}^0 . Für $k \geq 0$ wird iterativ

$$\hat{\underline{x}}^{k+1} = \tilde{A}^{-1}B\underline{x}^k$$

berechnet und wie folgt normiert

$$\underline{x}^{k+1} = \frac{\hat{\underline{x}}^{k+1}}{\|\hat{\underline{x}}^{k+1}\|_B},$$

wobei die Norm $\|\cdot\|_B$ als

$$\|\hat{\underline{x}}^{k+1}\|_B^2 = (B\hat{\underline{x}}^{k+1}, \hat{\underline{x}}^{k+1}) = (B\tilde{A}^{-1}B\underline{x}^k, \tilde{A}^{-1}B\underline{x}^k)$$

zu verstehen ist. Die Vektoren \underline{x}^k konvergieren gegen den Eigenvektor, der zum betragskleinsten Eigenwert von $B^{-1}\tilde{A}$ gehört. Näherungswerte für diesen betragskleinsten Eigenwert erhält man durch

$$\lambda^{k+1} = (BB^{-1}\tilde{A}\underline{x}^{k+1}, \underline{x}^{k+1}) = (\tilde{A}\underline{x}^{k+1}, \underline{x}^{k+1}).$$

4.2.1 Konvergenz des Verfahrens

Die Potenzmethode und damit auch die inverse Iteration gehören zu den sogenannten Unterraummethoden, denn für eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und den Startvektor \underline{x} kann die Folge $\underline{x}, M\underline{x}, M^2\underline{x}, \dots$, die beiden Verfahren zugrunde liegt, als Folge von Unterräumen S, MS, M^2S, \dots mit $S = \text{span}\{\underline{x}\}$ interpretiert werden.

Definition 4.1 (Invarianter Unterraum). S ist ein invarianter Unterraum von M , wenn $M(S) = \{M\underline{x} : \underline{x} \in S\} \subseteq S$.

Definition 4.2. Der Abstand zweier Unterräume U und V sei definiert als

$$d(U, V) := \max_{u \in U, \|u\|=1} \min_{v \in V} \|u - v\|.$$

Der folgende Satz (siehe [13, Theorem 5.1.1 und Theorem 5.1.2]) liefert eine sehr allgemeine Konvergenzaussage für stationäre Unterraumverfahren, die im Anschluss konkret auf die inverse Iteration angewandt wird.

Theorem 4.3. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, p sei ein Polynom vom Grad $< n$. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seien die Eigenwerte von A und so geordnet, dass $|p(\lambda_1)| \geq |p(\lambda_2)| \geq \dots \geq |p(\lambda_n)|$ gilt. Für $k \in \mathbb{N}$ gelte $|p(\lambda_k)| > |p(\lambda_{k+1})|$ und $\rho = \frac{|p(\lambda_{k+1})|}{|p(\lambda_k)|}$. U und V seien invariante Unterräume von A . U sei mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ assoziiert, V mit $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$. Betrachtet wird die Unterraumiteration*

$$S_i = p(A)S_{i-1} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei $S_0 = S$ ein k -dimensionaler Unterraum von A mit $S \cap V = \{0\}$. Dann existiert, wenn A diagonalisierbar ist, eine Konstante c mit

$$d(S_i, U) \leq c\rho^i \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

Wenn A nicht diagonalisierbar ist gilt

$$d(S_i, U) \leq \hat{c}\hat{\rho}^i \quad \text{für } \rho < \hat{\rho} < 1 \text{ und } i = 1, 2, 3, \dots$$

Beweis. Für den Beweis sei ebenfalls auf [13] verwiesen. □

Für den Fall der inversen Iteration ist $p = \frac{1}{x}$ und $k = 1$ zu wählen. Die Konvergenzrate im besten Fall ist dann $\rho = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$. Das Verfahren konvergiert also umso schneller, je größer $|\lambda_2 - \lambda_1|$ ist.

4.3 Numerische Beispiele

Das Eigenwertproblem (4.10) wurde für drei verschiedene Gebiete betrachtet: ein Quadrat, einen Kreis und ein L-Shape. Der Einfachheit halber wurden die jeweiligen FEM- und BEM-Netze so gewählt, dass sie zusammenpassen. Die Verfeinerung der Netze erfolgt gleichmäßig. Gerechnet wurde jeweils bis inklusive Verfeinerungslevel 5.

4.3.1 Beschreibung der Gebiete

Gebiet 1: Quadrat

Geometrie: Das Quadrat wurde durch die Punkte $A(-0.25, -0.25)$, $B(0.25, -0.25)$, $C(0.25, 0.25)$ und $D(-0.25, 0.25)$ festgesetzt.

FEM-Netz: Zu Beginn (Verfeinerungslevel 0) findet eine Zerlegung in 4 gleich große Dreiecke statt, mit den jeweiligen Eckpunkten ABM, BCM, CDM, DAM , wobei M der Mittelpunkt $(0, 0)$ sei. Jedes dieser FE-Dreiecke wird in jedem weiteren Verfeinerungsschritt wiederum in 4 Teile zerlegt. Dadurch ergibt sich für ein Verfeinerungslevel n die Anzahl der Elemente als $4 \cdot 4^n$.

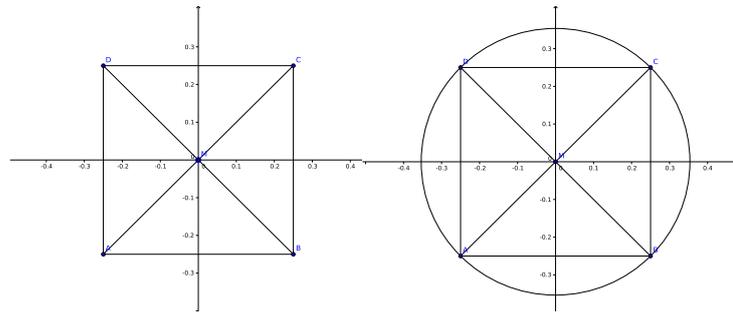


Abbildung 4.1: Kreis und Quadrat, Anfangsdiskretisierung

BEM-Netz: Als Ausgangsdiskretisierung für den Rand dienen die 4 Seiten des Quadrats. Die vorhandenen Randelemente werden in jedem weiteren Verfeinerungsschritt halbiert, es gibt also im Level n $4 \cdot 2^n$ Elemente.

Gebiet 2: Kreis

Geometrie: Der gewählte Kreis k wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 0.125$ beschrieben, sein Mittelpunkt M liegt also im Koordinatenursprung $(0, 0)$, sein Radius ist $\sqrt{0.125}$.

FEM-Netz: Die Punkte $A(-0.25, -0.25)$, $B(0.25, -0.25)$, $C(0.25, 0.25)$ und $D(-0.25, 0.25)$ liegen allesamt auf k . Dadurch ist es möglich, von der Diskretisierung des Quadrats $ABCD$ auszugehen. Wie schon in (4.3.1) beschrieben, findet eine Zerlegung in 4 gleich große Dreiecke statt, die in jedem weiteren Verfeinerungsschritt wiederum in 4 Teile zerlegt werden. Um den Kreis k zu approximieren, werden in jedem Schritt die neuen Randknoten auf k projiziert. Die Anzahl der FE-Elemente im Verfeinerungslevel n beträgt wieder $4 \cdot 4^n$.

BEM-Netz: Aus der Voraussetzung, das FE- und das BE-Netz sollen zusammenpassen, folgt, dass die BE-Elemente im Level 0 mit den Seiten des Quadrates übereinstimmen und nach weiteren Verfeinerungsschritten mit den Randkanten des approximierten Kreises. Die Anzahl der Randelemente stimmt mit der Anzahl der Randelemente des Quadrates (4.3.1) überein, d.h. es gibt in einem Level n $4 \cdot 2^n$ Elemente.

Gebiet 3: L-Shape

Geometrie: Das L-Shape wird beschrieben durch die Punkte

$A(0,0)$	$C(0.5,0)$	$E(0.25,0.25)$	$G(0,0.5)$
$B(0.25,0)$	$D(0.5,0.25)$	$F(0.25,0.5)$	$H(0,0.25)$

FEM-Netz: Am Anfang wird das L-förmige Gebiet in die 3 Quadrate $ABEH$, $BCDE$ und $HEFG$ zerteilt mit den jeweiligen Mittelpunkten $M1(0.125, 0.125)$, $M2(0.375, 0.125)$

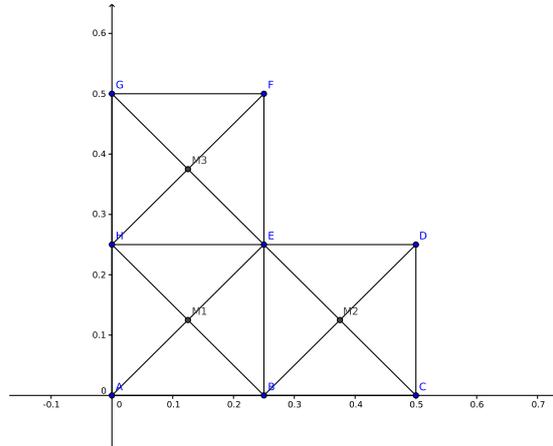


Abbildung 4.2: L-Gebiet, Anfangsdiskretisierung

und $M3(0.125, 0.375)$. Jedes dieser Quadrate wird, wie im Abschnitt 4.3.1, in 4 Dreiecke zerlegt. Die weitere Verfeinerung erfolgt analog. Die Anzahl der FE-Elemente in einem Verfeinerungslevel n lässt sich mit $12 \cdot 4^n$ berechnen.

BEM-Netz: Die entsprechende Randdiskretisierung geht von den 8 Strecken $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA$ aus. Jedes Randelement wird in jedem weiteren Verfeinerungsschritt halbiert. Daraus folgt für ein Level n die Anzahl $8 \cdot 2^n$ der Elemente am Rand.

4.3.2 Berechnung der Kontraktionskonstanten c_K

Da die Kontraktionskonstante c_K im Allgemeinen nicht bekannt ist, wurde sie näherungsweise als betragsgrößter Eigenwert des Eigenwertproblems

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)v = \lambda v \quad \text{für } v \in L_2(\Gamma) \quad (4.11)$$

bestimmt. Das betrachtete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei beschränkt mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Die Definition des Randintegraloperators K entspricht der Definition in Abschnitt 1.3.3. Durch Einsetzen des Ansatzes

$$v_h = \sum_{k=1}^{N_\Gamma} v_k \varphi_k^0$$

in die Variationsformulierung

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)v, w \right\rangle_\Gamma = \lambda \langle v, w \rangle_\Gamma$$

gelangt man zur diskretisierten Formulierung

$$\left(\frac{1}{2}M_h + K_h\right)\underline{v} = \lambda M_h \underline{v} \quad (4.12)$$

mit

$$M_h[l, k] = \langle \varphi_k^0, \varphi_l^0 \rangle_\Gamma \quad k, l = 1, \dots, N_\Gamma,$$

$$K_h[l, k] = \langle \mathbb{K} \varphi_k^0, \varphi_l^0 \rangle_\Gamma \quad k, l = 1, \dots, N_\Gamma.$$

Das algebraische Eigenwertproblem (4.12) wurde für die drei in Abschnitt 4.3.1 eingeführten Gebiete gelöst. Die Matrizen wurden mittels eines C++-Programms aufgestellt. Die Eigenwertberechnungen selbst wurden in Octave durchgeführt. Gerechnet wurde jeweils bis Verfeinerungslevel 9. Tabelle 4.1 zeigt die Ergebnisse zusammengefasst. $\#Q/K$ steht dabei für die Anzahl der Randlelemente von Quadrat und Kreis, $\#L$ symbolisiert die Anzahl der Randlelemente des L-Gebietes.

L	$\#Q/K$	$\#L$	Quadrat	Kreis	L-Shape
0	4	8	0.7206356001526513	0.7206356001526513	0.7851210048588131
1	8	16	0.7206356001526525	0.6074655536107332	0.7978354787052745
2	16	32	0.7268722046174507	0.5533955841236782	0.8014788514767224
3	32	64	0.7318268018037499	0.5266562106933517	0.8030205332368261
4	64	128	0.7354068345752441	0.5133229251485274	0.8037963815115907
5	128	256	0.7380102573466732	0.5066608155935682	0.8042130227794598
6	256	512	0.7399543439062384	0.5033303269431467	0.804444130936486
7	512	1024	0.7414465072903751	0.5016651533667617	0.8045748384866186
8	1024	2048	0.7426196470888883	0.5008325753868862	0.804649673571753
9	2048	4096	0.7435607874500043	0.5004162878673967	0.8046928527412514

Tabelle 4.1: Die betragsgrößten Eigenwerte als Näherung von c_K

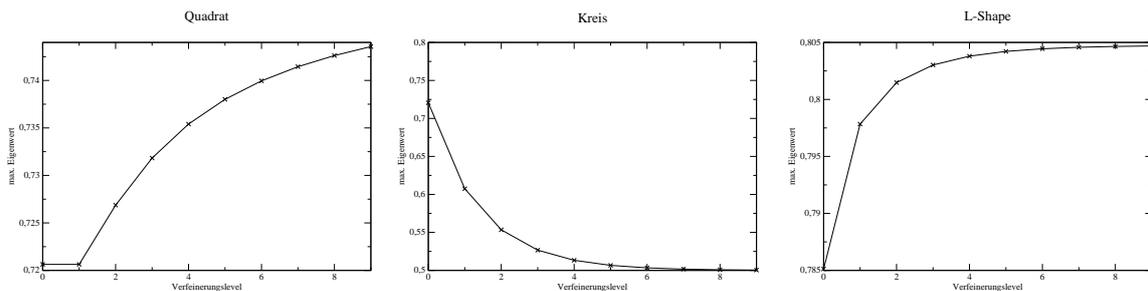


Abbildung 4.3: Die betragsgrößten Eigenwerte als Näherung von c_K

4.3.3 Ergebnisse

Die betragskleinsten Eigenwerte von (4.10) der Level 1, 3 und 5 und zum Vergleich die Funktion (4.5) wurden für jedes der betrachteten Gebiete geplottet.

Für den Kreis als einziges der betrachteten Gebiete ist $c_K = 0.5$ bekannt. Die durch die

Eigenwerte der verschiedenen Level gelegten Kurven scheinen in Abbildung 4.4 übereinander zu liegen, allein im unteren Bereich, $\alpha \in (0, \sim 0.125]$, erkennt man Unterschiede. Die Unregelmäßigkeiten ergeben sich dadurch, dass der kleinste und der betragskleinste Eigenwert nicht mehr übereinstimmen. Um dies zu veranschaulichen wurden zusätzlich die kleinsten Eigenwerte mittels Octave berechnet und die Ergebnisse für Level 1 (Abb. 4.7) und Level 5 (Abb. 4.8) graphisch dargestellt. Die Grenze des 'kritischen' Intervalls für α aus der Graphik deckt sich mit dem kritischen Wert aus Satz 2.1 $\alpha > \frac{1}{4}c_K = \frac{1}{8}$.

Beim Quadrat (Abb. 4.5) wurde die Vergleichskurve $c(\alpha, c_K)$ mit $c_K \approx 0.744$ berechnet, was dem gerundeten Wert für Level 9 in Tabelle 4.1 entspricht. Der kritische Wert aus Satz 2.1, $\alpha > \frac{1}{4}c_K \approx 0.186$, stimmt in etwa mit der Stelle überein, von der an Unregelmäßigkeiten in der Abbildung zu sehen sind.

Beim L-Shape (Abb. 4.6) wurde mit $c_K \approx 0.805$ gerechnet. Die beobachtete Grenze ungefähr bei 0.2 stimmt fast mit dem theoretischen Wert $\alpha > \frac{1}{4}c_K \approx 0.20125$ überein.

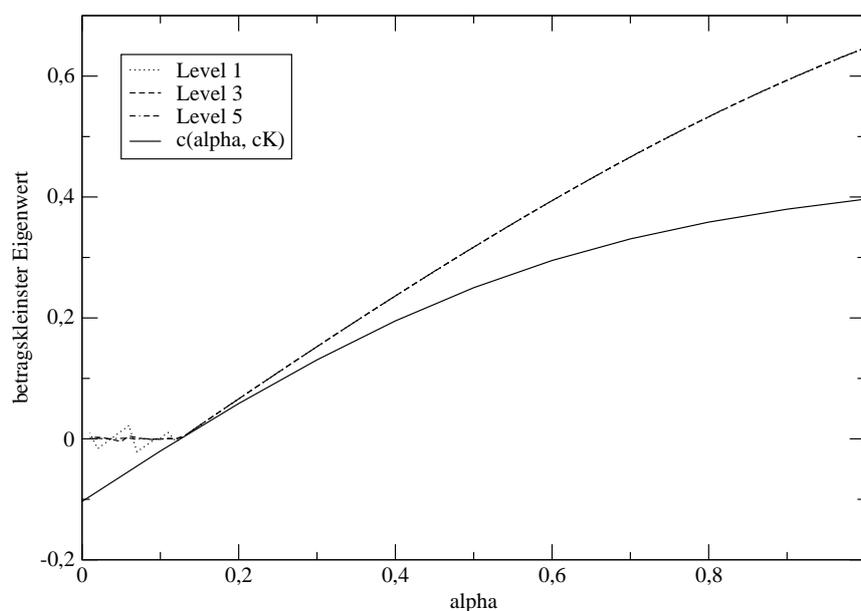
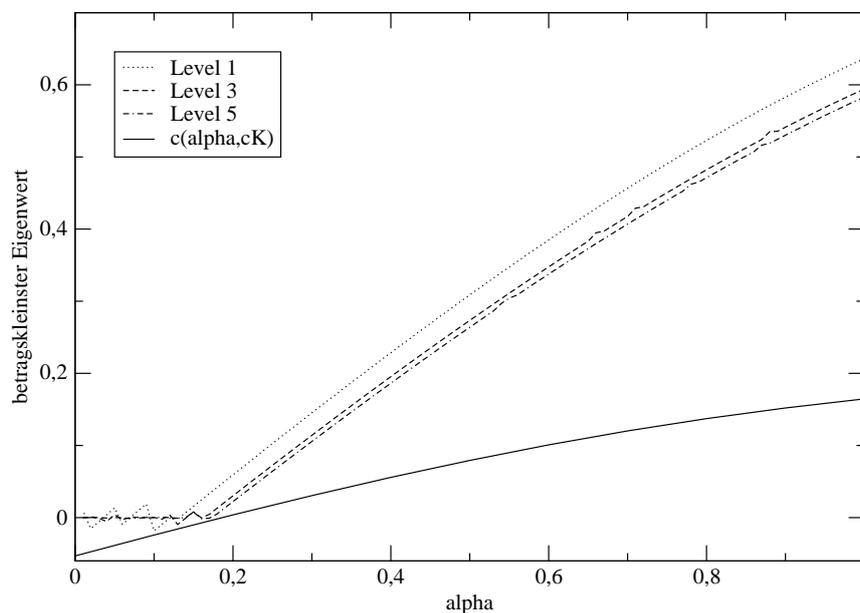
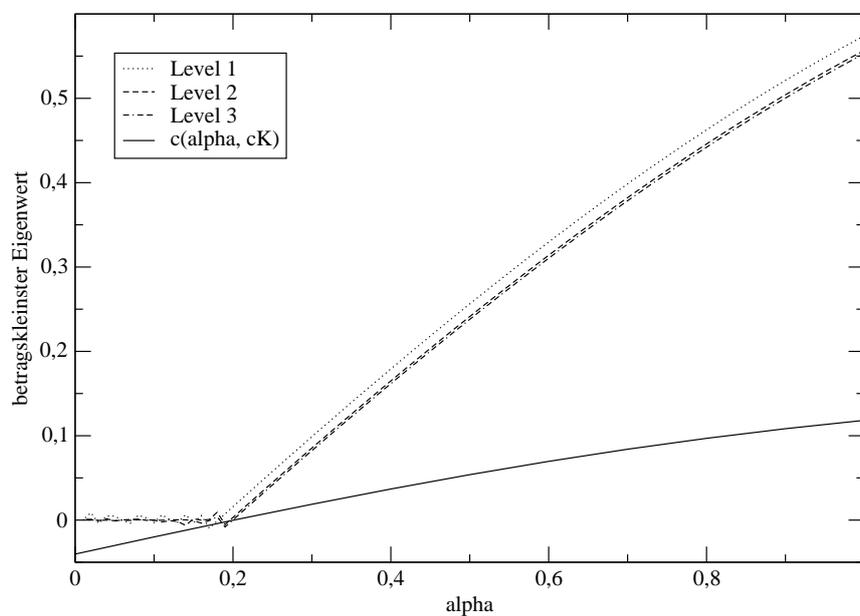


Abbildung 4.4: Betragskleinster Eigenwert für das jeweilige α beim Kreis für $c_K = 0.5$

Abbildung 4.5: Betrag kleinster Eigenwert für das jeweilige α beim Quadrat für $c_K \approx 0.744$ Abbildung 4.6: Betrag kleinster Eigenwert für das jeweilige α beim L-Shape für $c_K \approx 0.805$

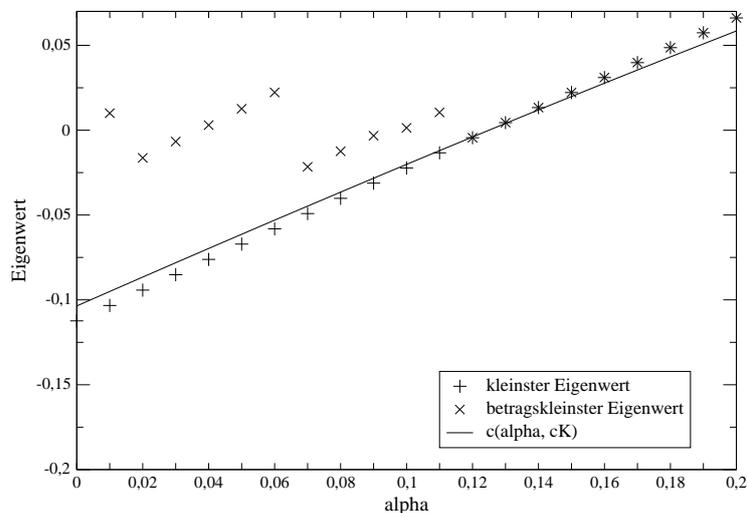


Abbildung 4.7: Vergleich zwischen den kleinsten und den betragskleinsten Eigenwerten beim Kreis, Level 1

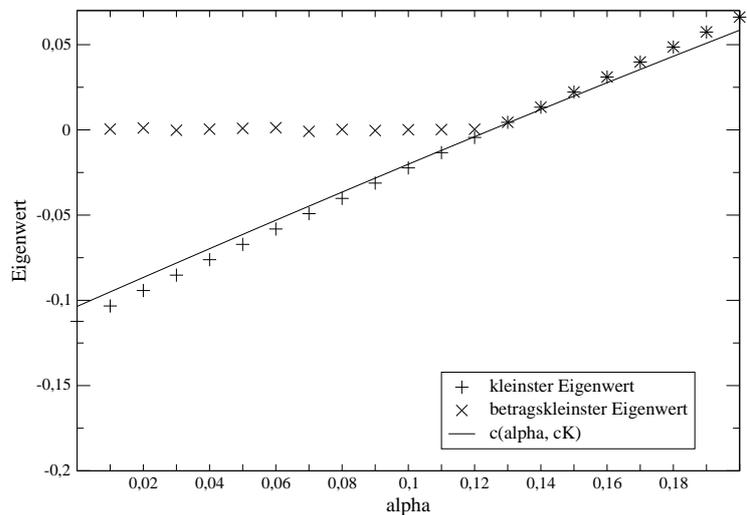


Abbildung 4.8: Vergleich zwischen den kleinsten und den betragskleinsten Eigenwerten beim Kreis, Level 5

5 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde die Stabilität der nicht symmetrischen gekoppelten Formulierung eines Transmissionsproblems für ein zweidimensionales Lipschitz-Gebiet in der Theorie und anhand von numerischen Beispielen untersucht. In den Beispielen wurden zugehörige Eigenwertprobleme für verschiedene einfache Gebiete betrachtet. Wie sich herausstellt, ist für eine stabile Diskretisierung die Energie des Problems im Gebiet wesentlich.

Die theoretischen Ergebnisse existieren auch für den 3D-Fall [11], es spricht damit nichts dagegen, entsprechende numerische Experimente durchzuführen. Der hier diskutierte Zugang kann außerdem auf die lineare Elastizitätstheorie ausgedehnt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] F. Brezzi and C. Johnson. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo*, 16:189–201, 1979.
- [3] F.-J. Sayas. The validity of Johnson-Nédélec’s BEM-FEM coupling on polygonal interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47:3451–3463, 2009.
- [4] G.W. Stewart and Ji-guang Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, Boston [u.a.], 1990.
- [5] C. Johnson and J. C. Nedelec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [6] M. Costabel, V. J. Ervin, E. P. Stephan. Experimental convergence rates for various couplings of boundary and finite elements. *Math. Comput. Modelling*, 15:93–102, 1991.
- [7] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [8] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [9] O. Steinbach. A note on the stable one-equation coupling of finite and boundary elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(4):1521–1531, 2011.
- [10] S. Sauter und C. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Teubner, Wiesbaden, 2004.
- [11] G. Of und O. Steinbach. Is the one-equation coupling of finite and boundary element methods always stable? *Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik*, (6), 2011.
- [12] D.K. Faddejew und W.N. Faddejewa. *Numerische Methoden der linearen Algebra*. R. Oldenburg, München-Wien, 1979.
- [13] D. S. Watkins. *The Matrix Eigenvalue Problem. GR and Krylov Subspace Methods*. SIAM, Philadelphia, 2007.
- [14] J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1967.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)