

Berechnung der Federsteifigkeit von Rundstahlketten

Diplomarbeit an der Technischen Universität Graz

Institut für Technische Logistik



von

Martin Beletz

Betreuer

Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Landschützer

Institutsvorstand

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dirk Jodin

Graz, Mai 2011

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich jenen Personen meinen Dank aussprechen, die zum Gelingen dieser Arbeit einen wesentlichen Beitrag geleistet haben.

Meinem Betreuer, Dr. DI Christian Landschützer, der immer ein offenes Ohr für Fragen hatte, deren es zahlreiche gab, für die seltene Möglichkeit, im Rahmen einer Diplomarbeit Grundlagenforschung zu betreiben und die mir gegebenen Freiheiten bei der inhaltlichen Schwerpunktsetzung. Sein persönliches Interesse am Themengebiet war zudem ein wichtiger Motivationsfaktor.

Herrn Stefan Kratochwill, für seine wertvolle technische Hilfestellung beim experimentellen Teil der Arbeit.

Herrn Ing. Franz Fuchs und der Fa. Pewag Austria für die freundliche Kooperation, die aufschlussreichen Gespräche und das Zurverfügungstellen von Material.

Weiters möchte ich meiner Familie für die Finanzierung meines Studiums und die durchgehende moralische Unterstützung danken.

Danke Franziska für dein Verständnis.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 17.5.2011

Martin Beletz

Kurzfassung

Die Elastizität von Ketten wird vor allem als Eingangsparameter für die simulatorische Untersuchung von polygoneffekterregten Schwingungen an Kettentrieben benötigt. Diese Arbeit behandelt Rundstahlketten, welche in Hebezeugen und Stetigförderern als Antriebsketten eingesetzt werden. Durch Anwendung der Balkentheorie wird ein analytisches Modell abgeleitet, das eine allgemeingültige vereinfachte Berechnung der Federsteifigkeit eines Kettenstranges unter Zuglast ermöglicht. Anhand eines nichtlinearen FEM-Modells wird die vorhandene Lastabhängigkeit sowie der Einfluss der durch die Kalibrierung verursachten Änderung der Kettengliedgeometrie untersucht. Als Ergebnis umfangreicher Simulationsreihen, in denen die mechanischen und geometrischen Parameter variiert werden, wird ein empirisches Berechnungsverfahren für hochfeste Rundstahlketten vorgestellt. Dieses wird durch Vergleichsmessungen an Hebezeugketten mittels Ausschwingversuch verifiziert.

Abstract

The elasticity of chains is required primarily as an input parameter for the simulation of vibrations on chain drives induced by polygonal effect. This thesis covers round-link chains which are used as driving chains in hoisting devices and continuous conveyers. By applying beam theory an analytical model is derived that allows for a universal simplified calculation of the spring stiffness of a part of chain under tensile load. On the basis of a non-linear finite element analysis the existing load dependence as well as the influence of the changes in geometry caused by the calibration process are investigated. As a result of an extensive series of simulated tests, in which the mechanical and geometrical parameters are varied, an empirical method of calculation for high-strength round-link chains is presented. This method is verified by comparative measurements of lifting chains using tests by free oscillations.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation der Arbeit	1
1.2	Aufgabenstellung	2
2	Grundlagen und Stand der Literatur	4
2.1	Definition grundlegender Größen	4
2.2	Einflussgrößen des Steifigkeitsverhaltens	7
2.2.1	Geometrie	8
2.2.2	Fertigungsprüfkraft	10
2.2.3	Werkstoff	12
2.2.4	Lastabhängigkeit	15
2.2.5	Verschleiß	18
2.2.6	Eigenspannungen	18
2.2.7	Gelenkreibung	19
2.3	Besprechung vorangegangener Arbeiten	19
3	Analytische Berechnung	23
3.1	Berechnung nach der Energiemethode	23
3.1.1	Punktlast	23
3.2.1	Streckenlast	26
3.2	Berechnung über die Biegelinie	31
3.2.1	Punktlast	31
3.2.2	Streckenlast	34
3.3	Verkürzung des geraden Balkens durch Biegung	36
4	FEM-Untersuchungen und empirische Berechnung	41
4.1	Validierung der Analytik	41
4.2	FEM-Modell der realen Kette	43
4.2.1	Referenzmodell	44
4.2.2	Parameterstudie	50
4.3	Empirische Berechnung hochfester Ketten	53
4.3.1	Langgliedrige Förderketten	54
4.3.2	Kurzgliedrige Hebezeugketten	56
5	Experimentelle Ermittlung	60
5.1	Messkonzept	60
5.2	Prüfstandbeschreibung	62
5.3	Versuchsdurchführung	65
5.4	Ergebnisse	66
6	Zusammenfassung	70
7	Verzeichnisse	71
7.1	Literaturverzeichnis	71
7.2	Liste verwendeter Formelzeichen	74
7.3	Formelsammlung	77
7.3.1	Analytische Berechnung	77
7.3.2	Empirische Berechnung / Rundstahlketten nach EN 818-7	78
7.3.3	Empirische Berechnung / Hochfeste Rundstahlketten	79
7.4	Abbildungsverzeichnis	81
7.5	Tabellenverzeichnis	82

1 Einleitung

Der Einsatz von Antrieben, welche Rundstahlketten als Zugmittel verwenden, ist im Bereich der Fördertechnik weit verbreitet. Die Rundstahlkette dient dabei als Lastkette in Kleinhebezeugen wie dem Elektrokettenzug sowie als Förderkette in Stetigförderern (v. a. Kratzerförderer).

Wie bei allen Kettentrieben tritt auch bei Antriebssystemen mit Rundstahlketten der ursächlich nicht vermeidbare Polygoneffekt auf. Durch die Vieleckauflage einer Kette auf dem Kettenrad ändert sich beim Umlauf dessen wirksamer Durchmesser periodisch, was bei konstanter Drehzahl zu einer periodischen Schwankung in der Kettengeschwindigkeit führt. Daraus resultieren Längs- und Querschwingungen der Kette sowie aufgrund der Massenbeschleunigungen Zusatzkräfte im Kettenstrang. Bei Antrieben mit Rundstahlketten kommt gegenüber solchen mit Stahlgelenkketten dem Polygoneffekt eine höhere Bedeutung zu, da aus konstruktiven Gründen Kettennüsse mit vergleichsweise geringen Taschenzahlen gebaut werden und die Ungleichförmigkeiten mit größer werdendem Teilungswinkel zunehmen. Dies drückt sich auch in den deutlich niedrigeren maximalen Kettengeschwindigkeiten aus.

Schwingungen von Kettenantrieben können neben dem Polygoneffekt auch durch äußere Anregung (ungleichförmiger Lauf von An- und Abtrieb), Teilungsfehler und Exzentrizität des Kettenrades angeregt werden. Im Resonanzbereich führt dies zu hoher dynamischer Belastung der Kette, erhöhtem Gelenkverschleiß sowie zu verstärkter Geräuscentwicklung [Lit. 1, S.112-120]. Die erzeugten Schwingungen werden darüber hinaus auf die gesamte Konstruktion und das Fördergut übertragen. Zur Gewährleistung von Betriebssicherheit und Funktion muss daher bei der Auslegung eines Kettenfördermittels ein Zusammenfallen von Eigenfrequenzen und Erregerfrequenzen in allen Betriebszuständen ausgeschlossen werden.

1.1 Motivation der Arbeit

Für eine Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Kettenfördermitteln mittels Simulation oder auch für eine näherungsweise analytische Berechnung von Eigenfrequenzen entkoppelter Teilsysteme ist die genaue Kenntnis vor allem eines Systemparameters, nämlich der Elastizität der Kette erforderlich.

Zur Berechnung derselben existieren bereits einige rein theoretische Ansätze [Lit. 2/ 3/ 4], welche auf der Anwendung der bekannten Gleichungen der Festigkeitslehre auf ein einzelnes Rundstahlkettenglied beruhen. Die genaueste Auseinandersetzung mit dem Thema stellt dabei die Arbeit von Oser [Lit. 4] dar, der den Einfluss der Schubspannungen und der starken Krümmung des Kettengliedbugs einbezieht. Die Berechnung der Steifigkeit eines Rundkettengliedes auf analytischem Wege setzt u. a. dessen Modellierung als eindimensionaler Rahmen sowie die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Kraft und Verformung voraus, wodurch die erreichbare Genauigkeit einer theoretischen Behandlung des Problems prinzipiell begrenzt ist.

Im Vergleich ergeben sich große Abweichungen zum einen zwischen den nach den verschiedenen Berechnungsansätzen ermittelten Werten untereinander und zum anderen zwischen berechneten und gemessenen Werten [Lit. 2/ 5, S.50-53/ 6, S.113-121]. Weiters zeigen Messungen von Sebulke [Lit. 2] eine nicht zu vernachlässigende Kraftabhängigkeit der Federsteifigkeit.

Die mit den bisherigen Berechnungsansätzen erhaltenen Werte sind somit in ihrer Qualität für die Erstellung realitätsgetreuer Simulationsmodelle unzureichend, weshalb man weiter auf empirisch ermittelte Daten angewiesen ist. Es steht dazu bisher auch keine Zusammenstellung zuverlässiger Elastizitätswerte für gängige Dimensionen von Hebezeug- oder Förderketten zur Verfügung. Für die maschinendynamische Simulation von auf Rundstahlketten basierenden Fördersystemen wäre daher die Möglichkeit einer exakten Vorausberechnung der Kettenfedersteifigkeit gegenüber einer aufwändigen versuchstechnischen Ermittlung bzw. FEM-Untersuchung augenscheinlich von großem Vorteil, vor allem für Variantenstudien.

Insbesondere die gegenwärtige Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Schwingungssimulation von Elektrokettenzügen gibt aktuellen Anlass zu einer weiterführenden Beschäftigung mit dem Problem. Landschützer [Lit. 7] beschreibt beispielsweise die Möglichkeit der gezielten Vermeidung von polygoneffekterregten Resonanzphänomenen an Kettenzügen im Betrieb durch entsprechende Wahl von konstruktiven Parametern und Hubgeschwindigkeit. Die möglichst genaue modelltechnische Abbildung der Kettenstränge ist für die Güte derartiger Berechnungen maßgeblich.

1.2 Aufgabenstellung

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist es, aufbauend auf die genannten vorangegangenen Arbeiten und zusätzlich mit moderner, leistungsfähiger FEM-Software ausgestattet, die Möglichkeit der Berechnung der Federsteifigkeit von Rundstahlketten in der erforderlichen Genauigkeit zu untersuchen.

Die erhaltenen Berechnungsansätze sollen dabei grundsätzlich möglichst allgemeingültig auf unterschiedliche Ausführungen von Rundgliederketten anwendbar sein. Primär sind jedoch die in der Hebe- und Fördertechnik in Verbindung mit Kettenrädern eingesetzten hochfesten, lehrenhaltigen Ketten von Interesse und von diesen im Hinblick auf die Anwendung Kettenzug vor allem die nach europäischer Norm standardisierte Hebezeugkette gemäß EN 818-7 [Lit. 8]. Rundstahlketten für untergeordnete Zwecke wie z.B. Anschlagketten sind nur von sekundärer Relevanz.

Die im Zuge dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen sollen sich methodisch in drei Teilbereiche gliedern. Den ersten Punkt soll die Erfassung theoretischer Ansätze bilden, wobei die bisher vorgestellten Berechnungsverfahren analysiert und nach Möglichkeit selbige weiterentwickelt bzw. eigene Ansätze gefunden werden sollen. Der zweite Teil soll in der Untersuchung von Kettengliedern mit der Finite-Elemente-Methode bestehen; hierfür steht das Programm ANSYS Workbench 12.1 zur Verfügung. Dies ermöglicht zum einen eine Bewertung der Analytik und die Berücksichtigung von Einflüssen wie nichtlinearem Verhalten von Geometrie und Material. Zum anderen können anhand

von Simulationsreihen eventuell empirische Berechnungsansätze abgeleitet oder zumindest Daten für einige relevante Kettendimensionen bzw. -ausführungen zur Verfügung gestellt werden. Der dritte Teil soll die Messung des Steifigkeitsverhaltens in einer geeigneten Versuchsanordnung umfassen. Damit sollen die in den ersten beiden Arbeitspunkten erhaltenen Ergebnisse validiert werden.

2 Grundlagen und Stand der Literatur

2.1 Definition grundlegender Größen

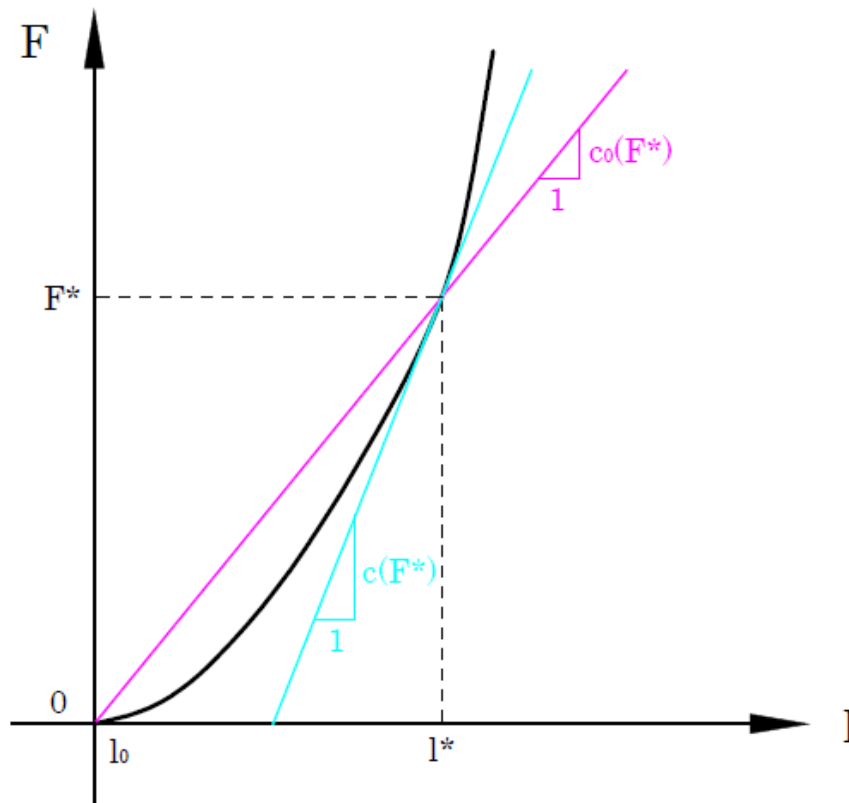


Abbildung 2-1: Kraft-Weg-Diagramm

Die Steifigkeit eines Bauteils kann allgemein definiert werden als das Verhältnis der Änderung einer aufgebrachtten Kraft und der Längenänderung in Richtung dieser Kraft. Geht man von einem beliebigen Zusammenhang zwischen Last und Verformung aus, so ist sie abhängig von Anfangs- und Endkraft, d.h. abschnittsweise zu berechnen:

$$c(F_1; F_2) = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{F_2 - F_1}{l_2 - l_1}. \quad \text{Glg. 2-1}$$

Ist die Anfangskraft F_1 null, kann vereinfacht werden zu

$$c_0(F) = \frac{F}{\Delta l} = \frac{F}{l - l_0}. \quad \text{Glg. 2-2}$$

Durch Differentialbildung kann für eine bestimmte Kraft punktuell ein Steifigkeitswert ermittelt werden, der im Weiteren als differentielle Federsteifigkeit bezeichnet wird:

$$c(F) = \lim_{l_2 - l_1 \rightarrow 0} \frac{F_2 - F_1}{l_2 - l_1} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{F(l_1 + \Delta l) - F(l_1)}{\Delta l} = \frac{dF}{dl}. \quad \text{Glg. 2-3}$$

Im Kraft-Weg-Diagramm (Abb. 2-1) beschreibt $c_0(F)$ die Steigung der durch den Ursprung und den jeweiligen Punkt $(F^*; l^*)$ verlaufenden Sekante an die Kurve; $c(F)$ ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Ist der Zusammenhang $c_0(F)$ gegeben, so kann daraus $c(F)$ nach folgenden Überlegungen errechnet werden:

Durch Einsetzen von Glg. 2-2 in Glg. 2-3 erhält man

$$c(F) = \lim_{l_2 - l_1 \rightarrow 0} \left(c_0(F_2) \frac{l_2 - l_0}{l_2 - l_1} - c_0(F_1) \frac{l_1 - l_0}{l_2 - l_1} \right).$$

Unter Annahme eines linearen Verlaufs von $c(F)$ zwischen F_1 und F_2 , was aufgrund des nachfolgenden Grenzübergangs zulässig ist, gilt:

$$\frac{l_1 - l_0}{l_2 - l_1} = \frac{F_1}{F_2 - F_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l_2 - l_0}{l_2 - l_1} = \frac{F_2}{F_2 - F_1}.$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} c(F) &= \lim_{F_2 - F_1 \rightarrow 0} \frac{c_0(F_2) \cdot F_2 - c_0(F_1) \cdot F_1}{F_2 - F_1} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{c_0(F + \Delta F) \cdot (F + \Delta F) - c_0(F) \cdot F}{\Delta F} = \\ &= \frac{d(c_0(F) \cdot F)}{dF} = c_0(F) + F \frac{dc_0(F)}{dF}. \end{aligned} \quad \text{Glg. 2-4}$$

Mit dem Zwischenschritt

$$c(F_1; F_2) = \frac{c_0(F_2) \cdot F_2 - c_0(F_1) \cdot F_1}{F_2 - F_1} \quad \text{Glg. 2-5}$$

kann die Steifigkeit zwischen zwei beliebigen Punkten aus $c_0(F)$ ermittelt werden.

Praxisrelevant für die Berechnung von Kettentrieben ist vor allem das differentielle Verformungsverhalten, da aufgrund der zu untersuchenden Schwingungen die Betriebskraft i. A. in relativ geringem Maße um das Niveau der Nutzkraft schwankt. Demgegenüber kann mit der abschnittswisen Steifigkeit die Längung eines Kettenstrangs bei Aufbringen einer Zugkraft berechnet werden. Bei linearer Federkennlinie ist eine Unterscheidung zwischen abschnittswiser und differentieller Steifigkeit aufgrund deren Zusammenfallen hinfällig; man kann von einer Federkonstante sprechen.

Für die Federsteifigkeit einer auf Zug belasteten Rundstahlkette in Längsrichtung kann mit der halben Kettenzugkraft F geschrieben werden:

$$c_K = \frac{2F}{\Delta l_K}. \quad \text{Glg. 2-6}$$

Einsetzen der Beziehung

$$l_K = nt \rightarrow \Delta l_K = n\Delta t \quad \text{Glg. 2-7}$$

liefert

$$c_K = \frac{2F}{n\Delta t} = \frac{c_G}{n}. \quad \text{Glg. 2-8}$$

Dies entspricht dem Zusammenhang für die Serienschaltung von Federsteifigkeiten

$$c_{res} = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{c_j}}, \tag{Glg. 2-9}$$

als welche die Kette folglich betrachtet werden darf. Somit reduziert sich die Betrachtung des Problems auf die Änderung der Teilung eines einzelnen Glieds. Für deren Berechnung ist es zweckmäßig, sie gemäß Abb. 2-2 in drei Teilverformungen aufzuteilen; diese beziehen sich aufgrund der Symmetrie nur auf das halbe Kettenglied. Die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte, also die 'Kettengliedmittellinie', erfährt eine Längung $\Delta l_{1,2}$, die sich weiter in die Anteile von Schenkelabschnitt (Δl_1) und Bug (Δl_2) gliedern lässt. Hinzu kommt eine Verkürzung desjenigen Querschnitts, der unter Annahme punktförmiger Berührung im Gelenk in Kontakt zum benachbarten Glied steht, zwischen seinem Schwerpunkt und dem Kontaktpunkt (Δl_3). Damit ergibt sich für die Gesamtverformung:

$$\Delta t = 2 (\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3) = 2 (\Delta l_{1,2} + \Delta l_3), \tag{Glg. 2-10}$$

und mit Glg. 2-8 für die Steifigkeit eines Kettenglieds:

$$c_G = \frac{2F}{\Delta t} = \frac{F}{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3} = \frac{F}{\Delta l}. \tag{Glg. 2-11}$$

Im Sinne einer Serienschaltung können auch den einzelnen Abschnitten Teilsteifigkeiten

$$c_{Gj} = \frac{F}{\Delta l_j} \tag{Glg. 2-12}$$

zugeordnet werden.

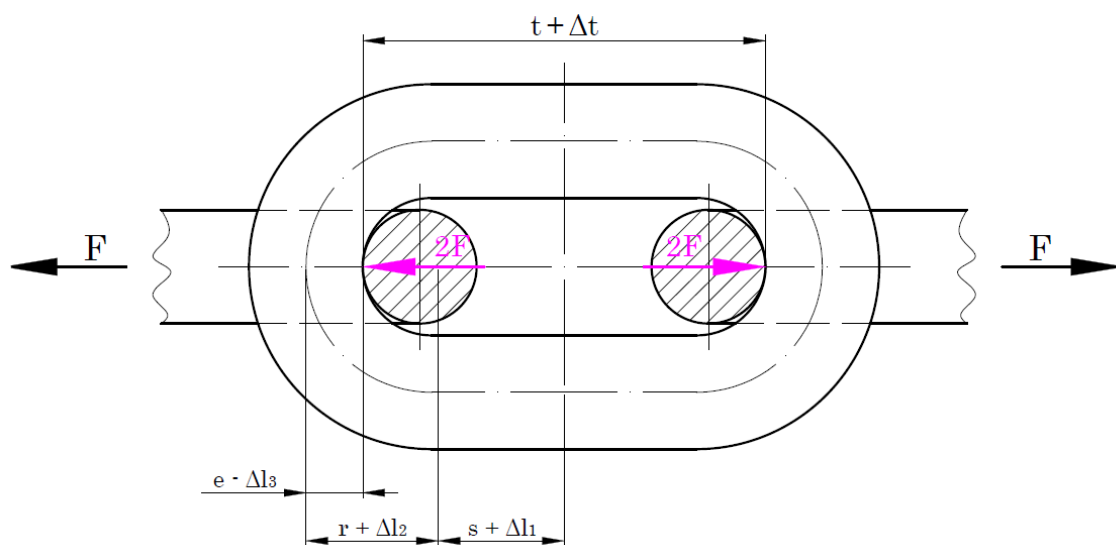


Abbildung 2-2: Kräfte und Verformungen am Kettenglied

Es soll nun gezeigt werden, dass die Federsteifigkeiten geometrisch ähnlicher Kettenglieder unter ähnlicher Belastung zueinander proportional sind. Eine

Ähnlichkeit der Belastungen ist bei gleicher Spannungsverteilung gegeben; als vom Maßstab unabhängige Belastungskenngröße kann beispielsweise die Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{F}{A} = \frac{4F}{d^2\pi} \quad \text{Glg. 2-13}$$

herangezogen werden. Sie ist die auf den doppelten Drahtquerschnitt $2A$ bezogene Zugkraft. Obgleich es sich um keine reale Bauteilspannung handelt, folgt aus Symmetriebetrachtungen, dass bei derselben Nennspannung sämtliche Spannungsüberhöhungen σ / σ_n in Kettengliedern gleicher geometrischer Form identisch sind. Des Weiteren ist geometrische Ähnlichkeit gleichbedeutend mit einem konstanten Verhältnis zwischen zwei beliebigen Abmessungen, welches als Ähnlichkeitsfaktor k bezeichnet werden soll. Für das Verhältnis der Steifigkeiten zweier ähnlicher Glieder gilt damit unter Verwendung von Glg. 2-11 und 2-13:

$$\frac{c_{G,1}(\sigma_n)}{c_{G,2}(\sigma_n)} = \frac{\frac{2\sigma_n A_1}{\Delta t_1} \frac{d_1^2}{d_1^2}}{\frac{2\sigma_n A_2}{\Delta t_2} \frac{d_2^2}{d_2^2}} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{k d_1}{k d_2} = k. \quad \text{Glg. 2-14}$$

Als maßstabs- und längenunabhängige Größe für die Elastizität von Ketten findet sich in der Literatur [Lit. 2/ 3/ 5, S.50-53] neben der Federsteifigkeit mitunter auch ein sogenannter 'Ketten-Elastizitätsmodul', der in Analogie zur Werkstoffkenngröße eine Relation zwischen Spannung und Dehnung angibt. Er bezieht sich dabei auf die Nennspannung:

$$E_K(\sigma_n) = \frac{\sigma_n}{\varepsilon} = \frac{\sigma_n t}{\Delta t} = \frac{\sigma_n l_K}{\Delta l_K}. \quad \text{Glg. 2-15}$$

Der Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und Federsteifigkeit lautet mit Glg. 2-8 und 2-11:

$$E_K = \frac{c_G t}{2A} = \frac{c_K n t}{2A}. \quad \text{Glg. 2-16}$$

2.2 Einflussgrößen des Steifigkeitsverhaltens

Die Eigenschaften technischer Rundstahlketten sind weitgehend in diversen Normen festgelegt. Eine Sammlung betreffender DIN-Normen bildet [Lit. 9]. Diese beziehen sich auf einzelne Verwendungsgruppen und enthalten u. a. Vorgaben für Maße, mechanische Eigenschaften, Werkstoffe, Wärmebehandlungen, Prüfverfahren sowie die Auslegung der Ketten. Weiters nehmen sie eine Einteilung in verschiedene Güteklassen entsprechend den geforderten Bruchkräften vor. Im Rahmen dieser Arbeit soll vorwiegend auf jene Normen Bezug genommen werden, welche lehrerhaltige, hochfeste Rundstahlketten für motorisch angetriebene Förderzeuge behandeln. Unter diesen bildet für Hebezeuge die DIN EN 818-7 [Lit. 8] den wichtigsten und auf europäischer Ebene gültigen Standard. Sie definiert Dimensionen mit geometrisch ähnlichen Gliedern zwischen 4 und 22 mm Nenndurchmesser in den drei Qualitäten T, DT und DAT.

Bei den Ausführungen DT und DAT handelt es sich dabei um einsatzgehärtete Ketten mit hohem Verschleißwiderstand, das Kürzel T bezeichnet dauerfeste, vergütete Ketten; alle drei Ausführungen entsprechen der Güteklasse T nach EN 818-1 [Lit. 10]. Neben solchen mit den in der EN 818-7 festgelegten Vorzugsmaßen werden weiterhin Ketten mit Abmessungen nach der früheren DIN 5684 [Lit. 11] hergestellt und verwendet, was zu einem Entwurf für eine Ergänzung zur neuen Norm geführt hat [Lit. 12].

Für die in Stetigförderern eingesetzten Rundstahlketten ist die DIN 22252 [Lit. 13] als wichtigstes Normenwerk zu nennen. Darin werden hochfeste vergütete Ketten in zwei Güteklassen definiert; der Schwerpunkt liegt dabei auf Anwendungen im Bergbau. Förderketten geringerer Festigkeit werden in der DIN 762 und DIN 764 behandelt [Lit. 14/ 15]. Neben den genannten existieren zahlreiche weitere Normen für nicht in Antrieben eingesetzte Rundstahlketten mit niedrigeren Anforderungen. Darüber hinaus werden für Sonderzwecke Ketten nach diversen Werksnormen hergestellt.

Das Ziel einer möglichst exakten Berechnung der Kettensteifigkeit erfordert es, sämtliche Einflussgrößen zu betrachten. Dem entgegen steht der Wunsch, möglichst allgemeingültige Berechnungsformeln zur Verfügung zu stellen. Selbst innerhalb der Gruppe der angetriebenen Ketten variieren grundlegende Parameter wie Geometrie, Werkstoff oder Fertigungsprüfungskraft stark, da die betreffenden Normen aufgrund unterschiedlicher anwendungsspezifischer Anforderungen diesbezüglich abweichende Vorgaben machen oder dem Kettenhersteller Freiräume bieten. Deshalb kann es eventuell notwendig sein, den Gültigkeitsbereich einzuschränken, um eine brauchbare Lösung zu erzielen. Ebenso kann es die Komplexität des Problems erforderlich machen, gewisse Einflüsse zu vernachlässigen, um überhaupt zu einer Lösung gelangen zu können.

Im Folgenden soll nun geklärt werden, welche konstruktiven, fertigungstechnischen und betriebsbedingten Parameter für das Steifigkeitsverhalten maßgeblich sind und inwiefern diese einer analytischen Berechnung zugänglich sind oder im Rahmen von Simulations- oder Messreihen untersucht werden können.

2.2.1 Geometrie

Die geometrische Form des idealen Kettenglieds setzt sich aus torusförmigen Bögen und kreiszylinderförmigen Schenkelabschnitten (ohne Berücksichtigung der Schweißstelle) zusammen. Sie ist durch Angabe von drei charakteristischen Abmessungen festgelegt. Für die nachfolgenden Berechnungen werden hierzu in Anlehnung an [Lit. 4] die halbe Schenkellänge s , der mittlere Radius des Bugs r und der Radius des Kreisquerschnitts e verwendet.

In einschlägigen Normen und Herstellerangaben werden Rundstahlketten hingegen mit der Teilung t , dem Durchmesser d sowie der minimalen inneren und maximalen äußeren Breite über der Schweißstelle (w_i, w_a) bemaßt.

Für die Umrechnung zwischen diesen Maßen gelten die Beziehungen:

$$r = \frac{w_i + w_a}{4}, \quad \text{Glg. 2-17}$$

$$s = \frac{t + d}{2} - r, \quad \text{Glg. 2-18}$$

$$e = \frac{d}{2}.$$

Glg. 2-19

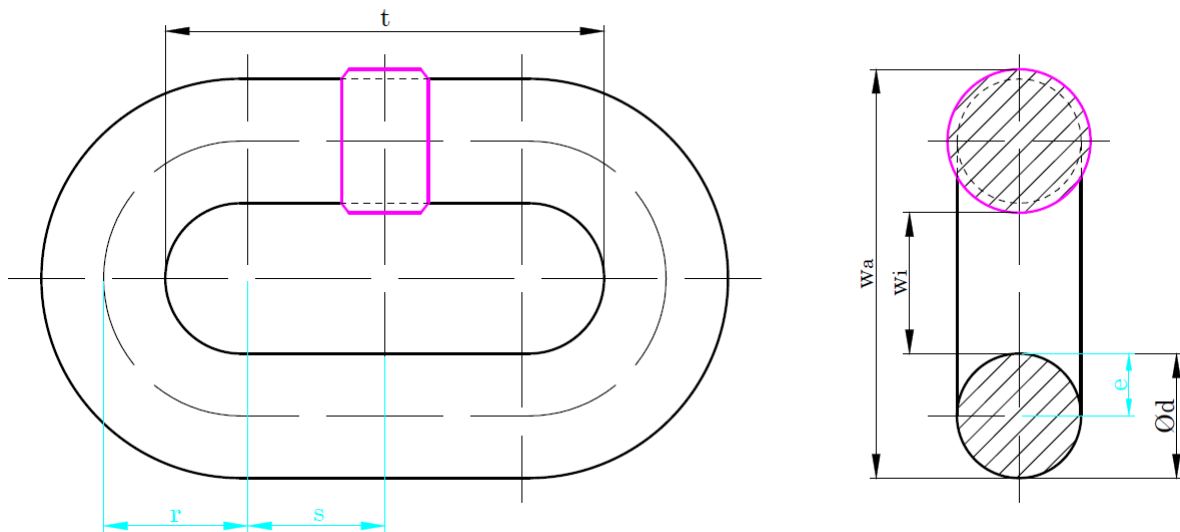


Abbildung 2-3: Rundstahlkettenglied mit charakteristischen Abmessungen

Durch Bildung von Verhältnissen zwischen drei charakteristischen Längen kann die Idealgeometrie mittels zweier dimensionsloser Parameter beschrieben werden. Hierfür erscheinen aufgrund ihrer Anschaulichkeit die Größen s/r und e/r zweckmäßig.

Das Verhältnis s/r stellt ein Maß für die Kurz- bzw. Langgliedrigkeit von Ketten dar; ein größerer Wert ergibt ein länglicheres Glied. Bei nach DIN genormten Hebezeug- und Förderketten liegen die Werte zwischen 0,64 und 1,4. Für Hebezeuge werden kurzgliedrige, für Stetigförderer eher langgliedrige Ketten eingesetzt.

Die Größe e/r kennzeichnet die Krümmung des Buges und zugleich das relative Spiel im Kettengelenk; höhere Werte bedeuten stärkere Gekrümmtheit und geringeres Gelenkspiel. Letzteres wird bei Rothe [Lit. 16] auch als prozentuelles Maß angegeben, wobei die geometrischen Verhältnisse im Rundgliederkettengelenk mit einer zylindrischen Spielpassung verglichen werden:

$$S = \frac{d_a - d_i}{d_a} = \frac{2(r-e) - d}{2(r-e)} = \frac{1 - 2\frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}}. \quad \text{Glg. 2-20}$$

Die Werte für den Parameter e/r schwanken zwischen 0,4 und 0,47; das ergibt Spiele von 10 % bis 33 %. Wegen $r \approx d$ gilt damit der Bug als stark gekrümmt im technischen Sinne, was im Rahmen der Analytik berücksichtigt werden muss.

Die fertigungsbedingten Abweichungen realer Ketten von der Idealgestalt werden in einer Arbeit von Moser [Lit. 17, S.6-17] diskutiert. Darin werden Messergebnisse zu Maß- und Formabweichungen mehrerer Dimensionen und Fertigungslose von Hebezeugkettengliedern zusammengefasst. Von den insgesamt knapp hundert vermessenen Gliedern, die jeweils drei Chargen der Dimensio-

nen 5×16 , $7 \times 21,9$, 9×27 und $11,3 \times 31,2$ zuzuordnen sind, sind im Hinblick auf die Berechnung eines aus zahlreichen Gliedern bestehenden Kettenstrangs nur die Durchschnittswerte über die einzelnen Chargen relevant. Eine Auswertung der Mittelwerte für die Teilungsmaße ergibt durchwegs geringfügig über dem Nennwert liegende Werte (max. 0,3 %), die sich mit den asymmetrischen Toleranzen für die Nennteilung erklären lassen. Für die innere und äußere Breite werden größere Differenzen zwischen den Chargen festgestellt; hier gibt die Norm nur Grenzmaße an. Die Abweichungen der Querschnitte vom Nenn-durchmesser sind erwartungsgemäß im Bereich der Schweißstelle am höchsten, erweisen sich aber mit einer über alle Prüflinge gemittelten maximalen Überhöhung von ca. 6% als relativ gering. Dies führt Moser auf ein exaktes Entgraten nach dem Schweißvorgang zurück. Dass die Innenkonturen der Glieder im Gegensatz zu den Außenkonturen sehr gute Übereinstimmung mit der Idealgeometrie zeigen, ist als Ergebnis des Biegevorgangs zu sehen. Da um einen Dorn gebogen wird, bildet sich dessen Form als Innenkontur ab, während es an der Außenseite des Drahtes unter den wirkenden Zugspannungen zu einer Querschnittsminderung kommt (vgl. [Lit. 18, S.465-466]). Dadurch liegt die Außenkontur des Bugs innerhalb des idealen Kreisbogens. Die von Moser beschriebene leichte ovale Verformung des Querschnitts im Bugbereich resultiert ebenfalls aus den Spannungsverhältnissen während des Biegens und der anschließenden Rückfederung.

Zusammengefasst lassen die Messergebnisse darauf schließen, dass durch das Heranziehen der Idealgeometrie für die Berechnungen und Simulationen kein allzu großer Fehler entsteht. Eine Berücksichtigung der realen Form mittels FEM-Untersuchung wäre grundsätzlich möglich; entsprechende CAD-Modelle wurden bereits von Schalk [Lit. 19] erstellt. Da aus exemplarischen Messungen jedoch kaum allgemeingültige Parameter für geometrische Abweichungen abgeleitet werden können, wird darauf verzichtet.

Ein weiterer geometrischer Einfluss, der ebenfalls bei Moser [Lit. 17, S.20-21] behandelt wird, ist die relative Lage der Kettenglieder zueinander in einem Strang. Die Haftreibung kann verhindern, dass ein Glied die Idealposition einnimmt, welche ein Zusammenfallen der Symmetrieachsen aller Glieder zur Folge hat. Es kommt dabei zu einem Parallelversatz und / oder einer Verdrehung gegenüber der idealen Symmetrielinie; letztere kann nach Berechnung von Moser für ein Glied mit Abmessungen nach EN 818-7 bis zu 8° betragen.

Hier wird in allen weiteren Ausführungen eine symmetrische Krafteinleitung vorausgesetzt und somit davon ausgegangen, dass sich die Asymmetrien über einen längeren Kettenstrang ausmitteln.

2.2.2 Fertigungsprüfkraft

Die Idealbetrachtung ergibt für den Eingriff zweier Kettenglieder wegen deren torusförmiger Bugflächen einen punktförmigen Kontakt. Die reale Kette weist bereits durch den Biegeprozess eine geringfügige Abflachung des Querschnitts im Bugbereich auf. Dadurch stellt sich ein anfangs sehr kleiner, näherungsweise quadratischer Kontaktbereich ein, welcher sich bei Aufbringen der ersten Zugbelastung unter den damit verbundenen sehr hohen Druckspannungen vergrößert. Während dieser vorwiegend plastischen Verformung, die eine Verringe-

rung der Krümmung im Kontaktbereich bewirkt, nimmt der Kontaktdruck durch die Vergrößerung der Berührfläche ab, bis das Vergleichsspannungsmaximum der Streckgrenze des Werkstoffs entspricht. Eine weitere Plastifizierung findet aufgrund der Werkstoffverfestigung nur bei einem Überschreiten der bisherigen Maximallast statt. Dieser im Grunde nur für die Spannungen im jeweiligen Punkt gültige Zusammenhang darf unter Annahme eines konstant symmetrischen Kraftangriffs auf die Kettenzugkraft übertragen werden. Für das Verformungsverhalten des Kettenglieds bedeutet der breiter werdende Bereich der Krafteinleitung eine Versteifung, da das Biegemoment im Bug abnimmt. Vgl. [Lit. 20].

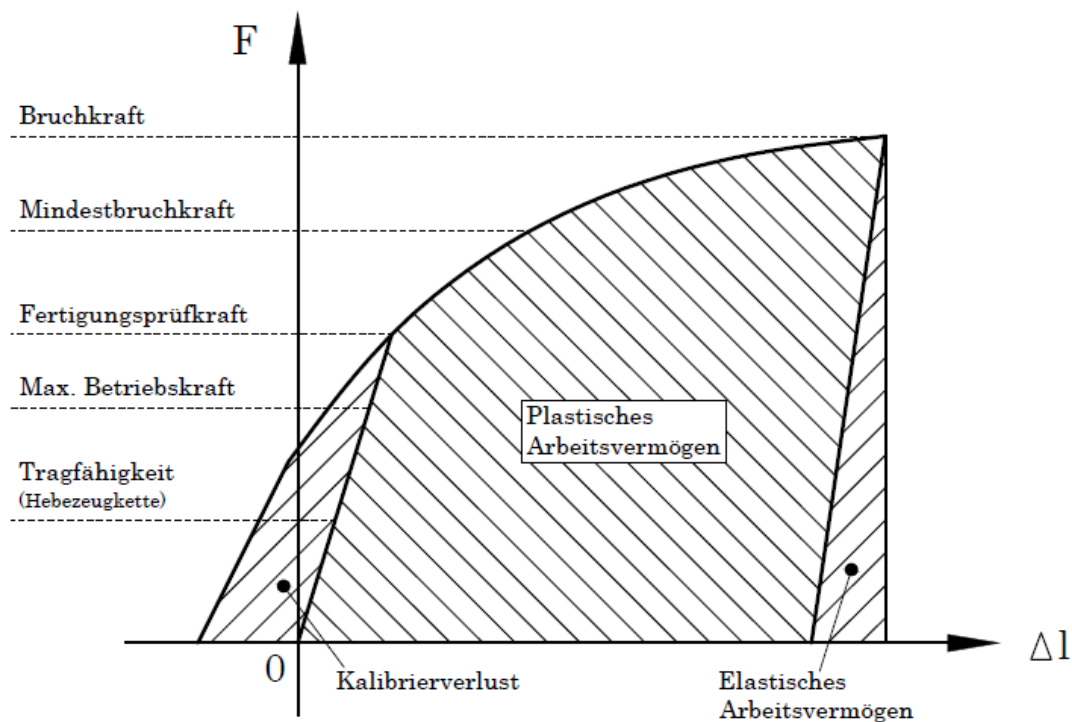


Abbildung 2-4: Kraft-Verlängerungs-Diagramm der Rundstahlkette

(adaptiert aus [Lit. 5, S.53] und [Lit. 21, S.6])

Bei allen geprüften Ketten wird die anfängliche Abflachung in der Kontaktzone bereits im Zuge der Fertigung vorweggenommen. Nach DIN 685-1 [Lit. 22] muss jedes Kettenglied nach erfolgter Wärmebehandlung einer in der betreffenden Norm festgelegten Fertigungsprüfkraft unterworfen werden, um die Qualität von Werkstoff und Schweißvorgang zu überprüfen. Das Einleiten der Prüfkraft dient zugleich auch der genauen Einstellung der Endmaße, insbesondere der Teilung, weshalb dieser Fertigungsschritt auch als Kalibriervorgang bezeichnet wird. Um ein weggesteuertes Kalibrieren unterschiedlicher Fertigungslose zu ermöglichen, darf die Mindestprüfkraft um ein gewisses Maß überschritten werden [Lit. 5, S. 53-61]. Die Prüfkraft wird über einen konstanten Nennspannungswert bestimmt, welcher entsprechend den unterschiedlichen Festigkeitsanforderungen für verschiedene Anwendungen zwischen den einzelnen Normen erheblich variiert. Für die hochfesten Kettenvarianten beträgt die Mindestprüfspannung 500 MPa (EN 818-7 – alle Ausführungen, DIN 22252 – Güteklasse 1) bzw. 600 MPa (DIN 22252 – Güteklasse 2). Dies bedeutet angesichts der im Ket-

tenglied auftretenden Spannungsüberhöhungen (nach Oser [Lit. 4] ergeben sich etwa an der Außenseite des Bugs Zugspannungen, welche im elastischen Bereich die Nennspannung je nach Dimension um den Faktor 3,7 bis 4,1 übersteigen), dass auch außerhalb des Kontaktbereiches die Streckgrenze überschritten wird und somit die plastische Verformung nicht auf diesen beschränkt ist. Während des Betriebs sollte es bei geprüften Ketten zu keinen weiteren nennenswerten Plastifizierungsvorgängen kommen, da die Elastizitätsgrenze durch die Fertigungsprüfkraft festgelegt wird und bei der Auslegung für alle Anwendungen vorgesehen wird, dass die maximalen Betriebskräfte um einen Sicherheitsfaktor darunter liegen (siehe Abb. 2-4). Demnach ist keine durch plastische Verformung verursachte Änderung der Steifigkeit gegenüber der neuen Kette zu erwarten. Bei dieser Überlegung nicht berücksichtigte Einflüsse wie geänderte Beanspruchungsverhältnisse durch Asymmetrien in der Ausrichtung der Glieder oder Geometrieveränderungen infolge Verschleiß erscheinen vernachlässigbar. Dem widersprechen jedoch Messungen von Sebulke [Lit. 2], der einen markanten Anstieg der Federsteifigkeit einer Rundstahlkette 10 x 28 DIN 5684 während mehrerer aufeinanderfolgender Zug- und Ausschwingversuche beobachtet und eine weitere Erhöhung mit zunehmender Einsatzzeit vermutet. Als gesichert kann zumindest die Annahme gelten, dass nach einer hinreichend großen Anzahl von Lastspielen die Federsteifigkeit einen Grenzwert erreicht, wenn man von von erst viel später in Erscheinung tretenden verschleißbedingten Einflüssen absieht.

Der Einfluss der im Kettenglied auftretenden plastischen Deformationen auf dessen Steifigkeit kann durch Simulation der Fertigungsprüfung und einer begrenzten Zahl nachfolgender Lastwechsel unter Voraussetzung idealer geometrischer Anfangsbedingungen untersucht werden. Für die theoretische Berechnung sind die Möglichkeiten für deren Berücksichtigung auf das Ersetzen der Punktlast durch eine empirische Belastungsfunktion beschränkt.

2.2.3 Werkstoff

Die Herstellung von Rundstahlketten in mehreren Festigkeitsklassen bedingt den Einsatz unterschiedlicher Stahlqualitäten. DIN 17115 [Lit. 23] definiert hierfür eine Auswahl von Stahlsorten für die Kettenherstellung, welche in Qualitäts- und Edelstähle unterteilt werden und alle Güteklassen berücksichtigen. Diese Norm stellt keine verbindliche Vorgabe dar; vielmehr ergibt sich die Verwendung eines Stahls entsprechender Güte durch die in jeweiligen Norm geforderten mechanischen Eigenschaften der Kette. Mindestanforderungen an Werkstoffe für höherfeste Ketten werden in DIN 685-2 [Lit. 24] und EN 818-7 formuliert. Diese umfassen u. a. eine Begrenzung der Verunreinigungen durch Phosphor und Schwefel sowie Mindestgehalte der festigkeitssteigernden Elemente Nickel, Chrom und Molybdän; weiters sind Feinkorngüte und volle Beruhigung festgelegt. Für alle Kettenstähle gilt, dass der Kohlenstoffgehalt aufgrund der erforderlichen Schweißbeignung nicht zu hoch sein darf und Wärmebehandelbarkeit gegeben sein muss. Das Einsatzhärten oder Vergüten von Rundstahlketten ist notwendig, um hohe Festigkeit und Härte bei genügender Zähigkeit zu gewährleisten. Die Festigkeitsanforderungen an die Kette werden durch Angabe einer Mindestbruchnennspannung definiert. Diese beträgt für die höchste Güteklasse (Bezeichnung T nach EN 818-1 bzw. 8 nach DIN 685-

1) 800 MPa, was dementsprechend hochfeste Werkstoffe voraussetzt. Die in DIN 17115 für höchste Anforderungen vorgesehenen Edelstähle weisen im vergüteten Zustand eine Streckgrenze von min. 980 MPa und eine Zugfestigkeit von min. 1180 MPa auf; diese Mindestwerte werden in der Praxis zum Teil sogar weit überschritten. Die Randschichthärte korreliert mit dem Verschleißwiderstand und soll für eine hohe Lebensdauer der Kette möglichst hoch sein. Zugleich muss das Material zur Vermeidung von Spröbruchverhalten eine ausreichende Bruchzähigkeit besitzen, um der Ausbreitung von Anrissen Widerstand zu leisten [Lit. 25, S.25-33]. Die genaue Festlegung von Werkstoffzusammensetzung und den Parametern der Wärmebehandlung ist weitgehend Teil der technologischen Kompetenz des Kettenherstellers und unterliegt einer kontinuierlichen Weiterentwicklung. Ein Standardwerkstoff hat sich lediglich im Bereich der Bergbauketten etabliert wegen der durch den rauen Betrieb auftretenden hohen mechanischen Beanspruchung; es wird dort überwiegend die sogenannte 'Bergbaugüte' 23MnNiCrMo5-4 (1.6758) eingesetzt [Lit. 25, S.24-25].

Das linearelastische Verhalten von Werkstoffen wird durch Angabe von zwei der vier Materialkonstanten Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Schubmodul und Kompressionsmodul beschrieben. Allen nachstehenden Berechnungen und FEM-Ergebnissen liegen die allgemeinen Kennwerte für Stahl ($E = 210.000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$) zugrunde. Diese sind für die als Kettenstähle verwendeten, durchwegs niedriglegierten Stahlsorten zutreffend; Sonderwerkstoffe mit davon abweichenden Werten, wie z. B. hochlegierte Chromstähle für korrosionsbeständige Ketten, werden aufgrund ihrer Randbedeutung nicht berücksichtigt.

Werkstoff	Massenanteile in %						
	C	Mn	Ni	Mo	Cr	Si	Al
1.6758	0,20	1,10	0,90	0,50	0,40		0,02
	0,26	1,40	1,10	0,60	0,60	$\leq 0,25$	0,05
4519S	0,19	1,10	1,80	0,25	0,25	0,18	0,035

Tabelle 2-1: Chemische Zusammensetzung hochfester Kettenstähle (exemplarisch)

(Quellen: [Lit. 22] , [Lit. 19, S.6])

Um die bei der Rundstahlkette anfänglich auftretende, der elastischen überlagerte plastische Verformung simulieren zu können, wird zusätzlich ein Materialgesetz für den plastischen Bereich benötigt. Hier zeigen die betrachteten Werkstoffe kein einheitliches Verhalten. Abhängig von der Güteklasse werden Stähle mit sehr unterschiedlichen Fließgrenzen verwendet. Das Verfestigungsverhalten nach Überschreiten der Fließgrenze wird meist als Zusammenhang zwischen der wahren Spannung und dem plastischen Anteil der wahren Dehnung angegeben, welcher als Fließkurve bezeichnet wird. Für die genormten oder andere Kettenstähle werden in der Literatur bislang keine Fließkurven bereitgestellt. Es kann jedoch vermutet werden, dass sich angesichts der Vielzahl verwendeter Stähle auch unter solchen derselben Festigkeitsklasse signifikante Abweichungen im Verlauf der Verfestigungskurve ergeben, zumal bereits

geringfügige Änderungen in der chemischen Zusammensetzung einen merklichen Einfluss auf letztere haben. Eine Gegenüberstellung des für Förderketten eingesetzten Vergütungsstahls 1.6758 und eines vom Hersteller Pewag für Hebezeugketten verwendeten Einsatzstahls (Werksbezeichnung 4519S) in Tab. 2-1 zeigt vorhandene Unterschiede zwischen hochfesten Kettenstählen bezüglich der Anteile verschiedener Legierungselemente auf. Zudem weisen Streckgrenze und Zugfestigkeit der vergüteten Stähle eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Anlasstemperatur auf [Lit. 25, S. 25-34].

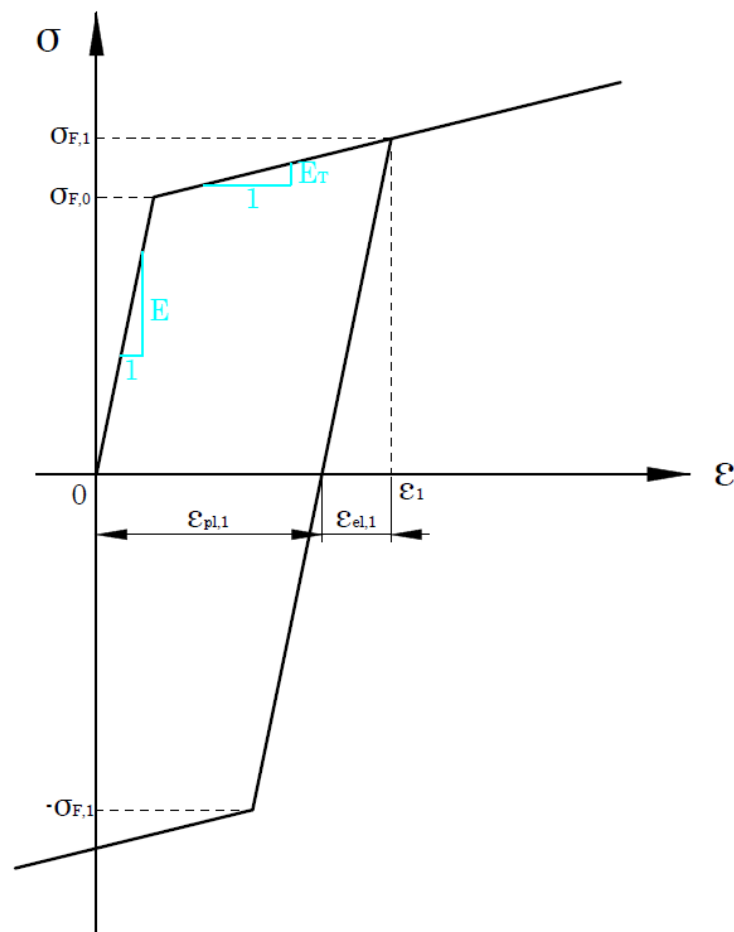


Abbildung 2-5: Bilinear - isotropes Werkstoffmodell

Eine Berücksichtigung des genauen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhangs einzelner Werkstoffe ist mangels vorhandener Daten im Zuge der hier durchgeführten Untersuchungen nicht möglich und für eine allgemeine Betrachtung des Problems auch nicht sinnvoll. Vielmehr müssen vereinfachende Annahmen getroffen werden, um das Materialverhalten einheitlich mit wenigen Parametern beschreiben zu können. Hierfür bietet sich das bilineare Werkstoffmodell an, welches von einer linearen Verfestigung ausgeht. Im wahren Spannungs-Dehnungs-Diagramm ergibt sich ein aus zwei geraden Abschnitten gebildeter Zusammenhang (Abb. 2-5). Die Steigung der zweiten Geraden wird in Analogie zum Elastizitätsmodul über den 'Tangentenmodul' definiert:

$$E_T = \frac{\sigma - \sigma_{F,0}}{\varepsilon - \frac{\sigma_{F,0}}{E}}$$

Glg. 2-21

Neben diesem Materialgesetz ist zur Beschreibung elasto-plastischen Verhaltens weiters die Angabe einer Fließbedingung und einer Verfestigungsregel erforderlich. Die Fließbedingung legt fest, bei welchen der einachsigen Belastung vergleichbaren mehrachsigen Spannungszuständen Fließen eintritt. Dies erfolgt üblicherweise durch Bilden einer Vergleichsspannung, welche der aktuellen Fließgrenze gegenübergestellt wird. Das verwendete FEM-Programm ANSYS zieht hierfür unter den vorgenommenen Einstellungen das Von-Mises-Kriterium heran. Es besagt, dass Fließen bei einem beliebigen Spannungszustand auftritt, wenn die differentielle Gestaltänderungsarbeit in einem Punkt ein bestimmtes Maß erreicht. Die dazugehörige mathematische Formulierung der Fließbedingung lautet in einem beliebigen Koordinatensystem

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2}{2} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \sigma_F, \quad \text{Glg. 2-22}$$

bzw. im Hauptachsensystem

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = \sigma_F. \quad \text{Glg. 2-23}$$

Die Gestaltänderungsenergiehypothese stellt für duktile Werkstoffe wie Stahl eine realitätsnahe Abbildung dar. Ihre Anwendung impliziert, dass das Material im Zug- und Druckbereich mit demselben Gesetz modelliert wird. Die Verfestigungsregel beschreibt das Fließverhalten bei zyklischer Belastung. Metallische Werkstoffe zeigen ein richtungsabhängiges Verfestigungsverhalten; bei Belastungsumkehr nach einer primären plastischen Verformung setzt Fließen bereits bei einer geringeren als der zuvor erreichten Fließspannung ein. Diese als 'Bauschinger-Effekt' bekannte Abhängigkeit der Fließgrenze von der Belastungsgeschichte ist für die nachfolgenden FEM-Berechnungen nicht von Bedeutung, da bei Rundstahlkettengliedern unter schwellender Zugbelastung an keiner Stelle ein Vorzeichenwechsel der auftretenden Spannungen im Belastungsverlauf zu erwarten ist. Es darf daher in ANSYS isotrope Verfestigung eingestellt werden, wodurch sich Vorteile in der numerischen Berechnung ergeben. [Lit. 26, S.170-191].

Durch die Verwendung des bilinear-isotropen Modells kann unter Konstanthaltung der elastischen Materialkennwerte das Verhalten unterschiedlicher Werkstoffe auf zwei zu verändernde Parameter ($\sigma_{F,0}, E_T$) reduziert werden. Die Güte der Modellierung des Werkstoffs durch einen gewählten Wert des Tangentenmoduls hängt nicht nur von der Gestalt der realen Fließkurve, sondern auch von den am Bauteil erreichten Umformgraden ab. Da beides unbekannt ist, soll dieser Parameter im Simulationsteil in einem weiten Bereich variiert werden.

2.2.4 Lastabhängigkeit

Während sämtliche bisherige Berechnungsverfahren wegen der Beschränkungen der Balkentheorie einen konstanten Steifigkeitswert herausgeben, wurde in Vergleichsmessungen ein schwach progressiver Verlauf der Federkennlinie und somit ein kraftabhängiger Anstieg der Federsteifigkeit festgestellt. Sebulke [Lit. 2] ermittelt in einem Zugversuch für eine neue Kette 10 x 28 DIN 5684 eine Zu-

nahme der zwischen der Kraft null und der jeweiligen Zugkraft gemessenen Federsteifigkeit von $c_0(F = 5kN) = 3,87 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$ auf $c_0(F = 10kN) = 4,29 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$, wobei die Werte auf 1 m Kettenlänge bezogen sind. Nach dem Einbau derselben Kette in einen Elektrokettenszug wurde in mittels Stromunterbrechung eingeleiteten Ausschwingversuchen die Federsteifigkeit durch Auswertung der Schwingfrequenz erneut gemessen. Hierbei ergaben sich für unterschiedliche Traglasten mit $c(5kN) = 4,61 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$ und $c(10kN) = 5,14 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$ höhere absolute Werte gegenüber dem Zugversuch, aber derselbe prozentuelle Anstieg von etwa 11 %. Entgegen der Annahme von Sebulke liegt die Ursache für die unterschiedlichen Messwerte beider Versuchsanordnungen nicht oder nur zum Teil in Veränderungen an der Kette, sondern in der Tatsache, dass beim Ausschwingversuch die Kettenszugkraft um den Wert der Gewichtskraft pendelt und daher (näherungsweise) die differentielle Federsteifigkeit an diesem Punkt gemessen wird. Aufgrund der Progressivität der Federkennlinie liegen die Werte $c(F)$ durchwegs über denen von $c_0(F)$. Messergebnisse von Landschützer [Lit. 6, S.116-121] bestätigen tendenziell jene von Sebulke; er erhält für ein einzelnes Glied der Dimension 9 x 27 im Zugversuch abschnittsweise Steifigkeiten von $c(0;10kN) = 1,46 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ und $c(5kN;10kN) = 1,55 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ sowie in auf dieselbe Weise durchgeführten Ausschwingversuchen entsprechend höhere differentielle Werte von $c(16kN) > 1,6 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$. Aus den angegebenen Messwerten geht hervor, dass eine exakte Berechnung der Federsteifigkeit nicht auf einer rein analytischen, linearen Betrachtung basieren kann; der Einsatz der Finite-Elemente-Methode ist hierfür unumgänglich.

Allgemein können in der Strukturmechanik drei Arten von Nichtlinearitäten auftreten:

1. Geometrische Nichtlinearitäten
2. Nichtlineares Materialverhalten
3. Kontakt

Geometrische Nichtlinearität ist gleichbedeutend mit großen Verformungen. Eine lineare Elastokinematik ist nicht mehr gegeben, wenn die Verschiebungen in derselben Größenordnung wie die Bauteilabmessungen liegen bzw. Verdrehungen ein Winkelmaß von einigen Grad übersteigen. In diesem Fall ist es nicht zulässig, das Kräftegleichgewicht am unverformten System aufzustellen. Nichtlineares Materialverhalten tritt bei metallischen Werkstoffen nach dem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze auf, d. h. im plastischen bzw. einem etwaigen nichtlinear-elastischen Bereich bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Streckgrenze. An Stellen des Kontakts zwischen zwei Körpern herrschen aufgrund der wechselseitigen Beeinflussung von Kraftübertragung und Deformation der Grenzfläche und des damit verbundenen Öffnens oder Schließens des Kontakts lokal stark nichtlineare Verhältnisse. Verursacht die Verformung eines Bauteils die Herstellung oder Trennung eines Kontaktbereichs, so bewirkt dies eine sprunghafte Änderung der Steifigkeit und folglich eine Knickstelle in der Last-Verformungs-Kurve. [Lit. 26/ 27, S.53-60].

Bei der vorliegenden Problemstellung treten alle drei genannten nichtlinearen Effekte in überlagerter Form auf. Zumindest während des Kalibriervorgangs kommt es zum Fließen des Materials, was im Eingriffsbereich zweier Glieder deutlich sichtbare Veränderungen der Kontaktgeometrie zur Folge hat. Als Ur-

sache für die Kraftabhängigkeit der Steifigkeit geprüfter, bereits in Betrieb genommener Rundstahlketten kann indes ausschließlich das nichtlineare Kontaktverhalten gelten. Nichtlinearität des Materials kann im Betrieb allenfalls anfänglich auftreten, da überelastische Spannungsspitzen bald durch Plastifizierung abgebaut werden; geometrische Nichtlinearität liegt gemäß den aus vorhandenen Steifigkeitswerten errechenbaren relativen Verformungen ($10^{-3} < \Delta t / t < 10^{-2}$ bei Nennlast), welche als klein zu betrachten sind, nicht vor. Zuzufolge FEM-Untersuchungen von Rothe [Lit. 16, S. 55-56] nimmt die Kontaktzone bereits bei geringer Last eine charakteristische, einem abgerundeten Quadrat ähnliche Form an, welche sich bei Lasterhöhung nur geringfügig ausdehnt. Der beträchtliche Einfluss dieser lokalen Nichtlinearität auf die Federsteifigkeit erklärt sich damit, dass für die Verlängerung der Teilung die Verschiebung des Mittelpunktes der Berührzone bestimmend ist.

In FEM-Rechenprogrammen erfolgt die Berechnung nichtlinearer Aufgaben über eine Inkrementierung vorgegebener Lasten oder Verformungen und die iterative Anwendung des Lösungsalgorithmus. Nach jeder Iteration wird die Zustandsänderung durch eine aktualisierte Steifigkeitsmatrix berücksichtigt. In der Praxis wird eine primäre Unterteilung der Last manuell vorgenommen, was eine direkte Iteration zwischen diesen Schritten zur Folge hat. Innerhalb der einzelnen Lastschritte kommt gewöhnlich das Iterationsverfahren nach Newton-Raphson zum Einsatz [Lit. 28, S.247-249]. Die Kontaktberechnung benötigt die Formulierung einer Bedingung, welche das gegenseitige Eindringen von Körpern verhindert. In ANSYS stehen mehrere gängige Kontaktbedingungen zur Verfügung, aus denen für die hier durchgeführten FEM-Berechnungen die 'Lagrange-Multiplikator-Methode' gewählt wird, welche bei höherer Rechenzeit eine vergleichsweise hohe Genauigkeit aufweist und keine Angabe einer Kontaktsteifigkeit erfordert [Lit. 27, S.169-179].

Für dynamische Untersuchungen an Kettentrieben ist der Verlauf der differentiellen Federsteifigkeit vom unbelasteten Zustand bis hin zur maximal erreichten mittleren Zugkraft von Interesse. Bei Hebezeugketten entspricht diese der Tragfähigkeit, welche in der Norm über einen Nennspannungswert festgelegt ist und höchstens 200 MPa für die Ausführung T nach EN 818-7 beträgt. Für Förderketten existiert kein einheitliches Auslegungskriterium; nach DIN 22252 ist für Ketten höchster Festigkeit (Güteklasse 2) eine zulässige Betriebsnennspannung von 500 MPa vorgegeben. Die konstanten Anteile der Betriebskraft umfassen beim Kettenförderer die über die Länge des Lasttrums abnehmende Nutzkraft (ihr Verlauf hängt von der Verteilung der Bewegungswiderstände ab), die Spannkraft und die Fliehkraft; hinzukommend werden ein Stoßbeiwert zur Nutzkraft, der Ungleichförmigkeiten des angekoppelten Antriebs berücksichtigt und die vorwiegend durch den Polygoneffekt verursachten dynamischen Zusatzkräfte einberechnet [Lit. 29, S.74-76]. Demnach darf davon ausgegangen werden, dass die mittlere Beanspruchung eines Strangs bei Förderketten den Höchstwert der Hebezeugkette nur in seltenen Fällen überschreitet. Um den gesamten relevanten Bereich zu betrachten, werden daher im Zuge der FEM-Simulationsreihen die unterschiedlichen Geometrien jeweils mit einer Kraft belastet, welche einer Nennspannung von 200 MPa entspricht. Die Lastabhängigkeit der Federsteifigkeit soll ebenso im experimentellen Teil untersucht werden.

2.2.5 Verschleiß

Als Verschleiß bezeichnet man den fortschreitenden Oberflächenabtrag aus einem festen Körper, der durch die Relativbewegung mit Gegenkörpern hervorgerufen wird. Er hängt in komplexer Weise von Einflussgrößen wie Flächenpresungsverteilung, Relativgeschwindigkeit und vorhandenen Zwischenstoffen ab, welche zusammen das tribologische System bilden. Bei angetriebenen Rundstahlketten entsteht ein Materialverlust vorwiegend in den Gelenken, als Folge der relativen Verdrehung der Glieder beim Ein- und Auslaufen der Kette am Kettenrad. Er ist bei den liegenden Gliedern stärker ausgeprägt. Die damit einhergehende Teilungsvergrößerung verursacht wiederum eine Störung des Zusammenspiels von Kette und Rad, aufgrund der es beim Eingleisen zu einer Abnutzung der Bugaußenflächen kommt. Ferner ist bei in Förderern eingesetzten Rundstahlketten ein Verschleifen der Schenkelaußenseiten stehender Glieder zu beobachten. Da der Gelenkverschleiß die dominierende Abnutzungserscheinung darstellt und überdies in Korrelation zum Außenrundungsverschleiß steht, darf die bezogene Längung der Kette $(\Delta t / t)_v$ als Parameter für den Fortschritt des Gesamtverschleißes herangezogen werden. Ein Höchstmaß für den Materialabtrag wird in DIN 685-5 [Lit. 30] festgesetzt; demnach ist bei einer Kettenlängung von 2 % oder einer Durchmesserabnahme um 10 % an irgendeiner Stelle die Ablegereife erreicht. [Lit. 5, S.111-118].

Der Einfluss von Verschleiß auf die Federsteifigkeit wird durch zwei unterschiedliche Wirkungen bestimmt. Zum einen bedeutet jede Art von Verschleiß eine Schwächung des Drahtquerschnitts, was aufgrund der Abnahme des Widerstands gegenüber allen auftretenden Beanspruchungsarten ein weicher werdendes Kettenglied erwarten lässt. Zum anderen ergibt sich durch den Abtrag im Gelenk eine undefinierte Kontaktgeometrie und eine gegenüber der neuen Kette geänderte Kraftereinleitung, deren Einfluss auf die Steifigkeit nicht ohne Weiteres vorhergesagt werden kann. Eine seriöse Betrachtung des Parameters Verschleiß kann ausschließlich mittels Messung von unter realen Bedingungen betriebenen Ketten erfolgen. Die Ableitung allgemeingültiger Aussagen aus exemplarischen Messergebnissen ist kaum möglich, da die Abnutzung der Kette in hohem Maße mit der Einsatzumgebung, Betriebsweise und Ausführung der Kettennuss zusammenhängt. Dennoch sollen zur Bestimmung von Tendenz und Größenordnung des Verschleißeinflusses im Rahmen dieser Arbeit Versuche durchgeführt werden. Für diesen Zweck stehen mehrere Ketten gleichen Typs mit unterschiedlichem Verschleißgrad zur Verfügung.

2.2.6 Eigenspannungen

Bei Eigenspannungen handelt es sich um Spannungen, welche in einem Bauteil ohne Angreifen äußerer Kräfte oder Momente vorhanden sind; Bereiche mit Zug- bzw. Druckeigenspannungen bilden dabei stets ein Kräftegleichgewicht. Sie entstehen im Zuge der Fertigung als das Resultat von Rückfederungsbehinderungen infolge lokal im Inneren des Materials herrschender Zwangsbedingungen. Solche liegen bei inhomogener plastischer Verformung oder bei Auftreten größerer Temperaturdifferenzen während der Abkühlung eines Bauteils vor; letzteres aufgrund der damit verbundenen ungleichmäßigen Schrumpfungen und allotropen Phasenumwandlungen. Folglich bilden sich Eigenspannungen

bei nahezu allen Umform-, Schweiß- und Wärmebehandlungsprozessen in unterschiedlichem Grad aus. Bei äußerer Belastung kommt es zu einer Überlagerung der Eigenspannungen mit den Betriebsspannungen; abhängig von deren Verteilung bewirkt die geometrische Addition der beiden Anteile im jeweiligen Punkt eine Verstärkung oder Kompensation. [Lit. 31, S.93-94].

Die im Herstellungsprozess einer Rundstahlkette an der Entstehung von Eigenspannungen bzw. einer Änderung der Eigenspannungsverteilung beteiligten Fertigungsschritte umfassen das Biegen des Pinns, das Verschweißen der Enden, das Vergüten bzw. Einsatzhärten und das Kalibrieren (ein Spannungsarmglühen findet nicht statt). Der Umstand, dass hierbei für die Herstellung verschiedener Kettenausführungen nicht nur Prozessparameter variiert werden, sondern teils unterschiedliche Verfahren eingesetzt werden, lässt darauf schließen, dass keine einheitliche charakteristische Verteilung vorliegt. Das Verformungsverhalten eines Kettenglieds wird von Eigenspannungen insofern beeinflusst, als diese eine Verschiebung der Plastifizierungsgrenze durch betriebliche Spannungen zur Folge haben. Da das Aufbringen der Fertigungsprüfungskraft Teil der FEM-Untersuchung ist, entsteht ein Fehler in der Berechnung nur durch die bereits im unkalibrierten Zustand vorhandenen Eigenspannungen. Hierzu liegen Messergebnisse von Fasel [Lit. 25] vor, die anhand von röntgenographischen Untersuchungen Druckeigenspannungen an der Außenseite der Kettenglieder im Bereich von 100 MPa bis 350 MPa feststellt. Trotz dieser relativ hohen gemessenen Werte ist deren Einfluss auf die Steifigkeit gegenüber den in Bezug auf das Werkstoffverhalten getroffenen Vereinfachungen als vergleichsweise gering einzuschätzen. [Lit. 25, S.62-68].

2.2.7 Gelenkreibung

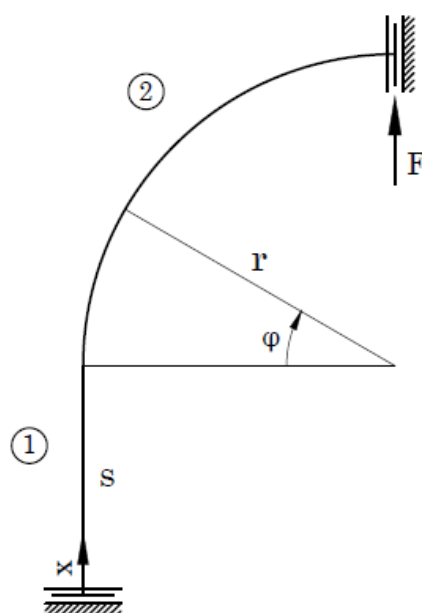
Der Reibung im Kettengelenk ist für die Berechnung der Federsteifigkeit nach ingenieurmäßigem Dafürhalten nur geringe Relevanz beizumessen; gemäß der Idealbetrachtung finden lediglich mikroskopische Relativbewegungen an der Kontaktfläche statt infolge der Änderung der Tangentialspannungen bei einer Zugkraftänderung. Da dennoch im Zuge der Kontaktdefinition in ANSYS die Angabe eines Reibwertes erforderlich ist, soll der Parameter variiert werden, um diese Annahme zu überprüfen; der Wertebereich soll dabei so gewählt werden, dass die in der Praxis vorkommenden verschiedenartigen Oberflächenausführungen, Schmierbedingungen und Zwischenstoffe Berücksichtigung finden.

2.3 Besprechung vorangegangener Arbeiten

Vorschläge für die Berechnung der Federsteifigkeit von Rundstahlketten finden sich bereits in Publikationen von Sebulke [Lit. 2], Ahrens et al. [Lit. 3] und Oser [Lit. 4]. Diese basieren allesamt auf der Anwendung der technischen Balkenbiegungslehre und einer entsprechenden Modellierung des Kettenglieds als aus Balkenelementen zusammengesetzter Rahmen, wobei das bekannte Gleichungsinstrumentarium zur Ermittlung von Spannungsverteilung und Verformungen teils um eigene Ansätze erweitert wird. Den Berechnungsansätzen liegen die folgenden Vereinfachungen zugrunde:

- Linearität
- Ideale Geometrie
- Vernachlässigung der Teilverformung Δl_3
- Punktförmiger Kraftangriff
- Schwache Krümmung des Kreisbogenabschnitts (Sebulke, Ahrens)
- Vernachlässigung des Querkraftschubs (Sebulke, Ahrens)

Aufgrund der Einschränkungen der Balkentheorie vorgegeben sind ein linearer Zusammenhang zwischen Kraft und Verformung, das Heranziehen der Idealgeometrie sowie die Vernachlässigung der Kompression des Querschnittsprofils im Kontaktbereich. Letztgenannter Punkt ist dadurch bedingt, dass sämtliche Ansätze zur Berechnung von Balkenverformungen einer eindimensionalen Betrachtung unterliegen, welche jedem Punkt eines Querschnitts die Verschiebung des der neutralen Faser angehörenden Punktes zuordnet (was streng genommen im Widerspruch zur Bernoulli'schen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte steht). Die Nichtberücksichtigung der Längenänderung Δl_3 und die Modellierung der Krafteinleitung mit einer Einzelkraft sind von gegensätzlichem Einfluss auf das Ergebnis; während sich bei Annahme einer punktförmig in der Bugmitte angreifenden Kraft ein erhöhtes Biegemoment und damit zu niedrige Steifigkeiten ergeben, erhält man durch das Weglassen von Verformungsanteilen zu hohe Werte. Die bei Sebulke und Ahrens getroffenen Vereinfachungen eines schwach gekrümmten Bugabschnitts und der Vernachlässigbarkeit der Schubverformung sind eigentlich nicht zulässig, da die Voraussetzungen niedriger Werte e/r und schlanker Balken nicht erfüllt sind. Oser zeigt unter Anwendung der Theorie des stark gekrümmten Biegeträgers, dass die Möglichkeit zur Einbeziehung dieser Einflüsse besteht; insofern stellt sein Beitrag eine Weiterentwicklung der Berechnung dar. Es wird darin weiters zur Abbildung der in Wirklichkeit über den Kontaktwinkel verteilten Kraftübertragung ein 'verformungsbehinderter Bereich' eingeführt, in welchem bei Lastaufbringung keine Formänderungsarbeit geleistet wird.



Den Ausgangspunkt der jeweiligen Berechnung bildet das statische Ersatzsystem nach Abb. 2-6. Unter Ausnutzung der zweifachen Symmetrie wird nur ein Viertelkettenglied betrachtet; die Einspannungen sind als Parallelführungen zu modellieren, da an Symmetrieachsen die Querkraft verschwindet. Da es sich um ein einfach statisch unbestimmtes System handelt, verbleibt nach dem Lösen der Gleichgewichtsbedingungen ein unbekanntes Biegemoment, welches über die Bedingung gleicher Winkeländerungen am Übergang zwischen Geradstück und Kreisbogen ermittelt wird. Mit dem Schenkelmoment M_A erhält man für die Schnittkräfte im geraden Abschnitt (1):

Abb. 2-6: Statisches Ersatzsystem

$$N_1(x) = F, \quad \text{Glg. 2-24}$$

$$Q_1(x) = 0, \quad \text{Glg. 2-25}$$

$$M_{y,1}(x) = M_A := FrK; \quad \text{Glg. 2-26}$$

sowie für den gekrümmten Abschnitt (2):

$$N_2(\varphi) = F \cos \varphi, \quad \text{Glg. 2-27}$$

$$Q_2(\varphi) = -F \sin \varphi, \quad \text{Glg. 2-28}$$

$$M_{y,2}(\varphi) = M_A + Fr(\cos \varphi - 1) = Fr(K - 1 + \cos \varphi). \quad \text{Glg. 2-29}$$

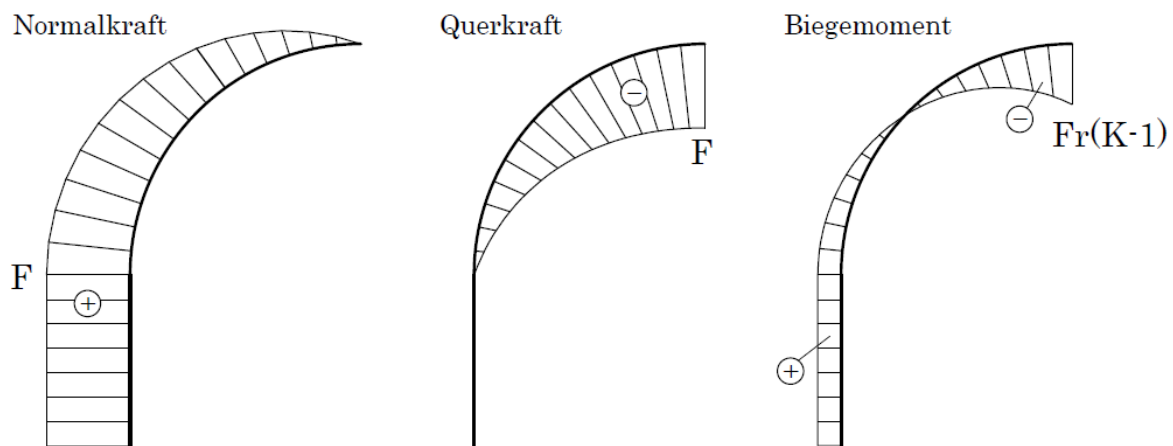


Abbildung 2-7: Schnittgrößenverläufe am Rundstahlkettenglied

In Tab. 2-2 werden die verschiedenen Berechnungsverfahren anhand der Resultate für ein Glied der Dimension 9 x 27 EN 818-7 gegenübergestellt und mittels einer FEM-Betrachtung des Ersatzsystems (siehe Kap. 4.1) validiert. Die bis zu 40 % betragenden Abweichungen gegenüber dem Simulationsergebnis, welches als mit hoher Genauigkeit zutreffend anzusehen ist, zeigen den Bedarf für eine weitere Beschäftigung mit der Analytik auf, zumal beim vorliegenden Problem die Anwendbarkeit der Balkentheorie gegeben und daher eine hohe Übereinstimmung zu erwarten ist. Insbesondere die sich stark unterscheidenden Werte für die Teilsteifigkeiten von Schenkel- (c_{G1}) und Bugabschnitt (c_{G2}) weisen darauf hin, dass die Herleitung der Gleichungen zum Teil nicht korrekt erfolgt. Im Folgenden wird eine vorläufige Korrektur der Ansätze vorgenommen, nach der sich die Tab. 2-2 beigefügten Werte ergeben.

- Die nach Sebulke und Oser berechneten Steifigkeitswerte sind mit dem Faktor 2 zu multiplizieren, da in beiden Arbeiten abweichend zu Glg. 2-11 die Federsteifigkeit mit der halben Kettenzugkraft und der gesamten Längung eines Gliedes gebildet wird.
- Der von Oser postulierte biegesteife Bereich wird nicht berücksichtigt; einerseits wegen der fehlenden physikalischen Grundlage für die Abänderung der Energieterme und andererseits, weil die auf diese Weise erzielte Annäherung der Randspannungen keine Verbesserung in Bezug auf die

Verschiebungen impliziert. Es wird dazu in seiner Rechnung der Biege-
winkel $\beta = 90^\circ$ gesetzt.

- Der mittlere Bugradius und die halbe Schenkellänge werden entgegen den bei Ahrens angegebenen abweichenden Formeln nach Glg. 2-17 und 2-18 berechnet.

		berechnet						simuliert
		Sebulke		Ahrens		Oser		
Größe	Einheit	orig.	korr.	orig.	korr.	orig.	korr.	eigenes FEM-Modell
c_G	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,166	2,332	1,901	2,124	0,961	1,066	1,615
Abw.	$[\%]$	-27,8	44,4	17,7	31,5	-40,5	-34,0	-
c_{G1}	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	8,732	17,464	2,474	2,804	2,370	2,650	18,046
Abw.	$[\%]$	-51,6	-3,2	-86,3	-84,5	-86,9	-85,3	-
c_{G2}	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,345	2,691	8,205	8,762	1,615	1,784	1,774
Abw.	$[\%]$	-24,2	51,7	362,6	394,0	-8,9	0,6	-
K	[1]	0,288	-	0,246	0,247	0,179	0,264	-

Tabelle 2-2: Vergleich der vorhandenen Berechnungsverfahren anhand eines 9x27-Kettenglieds

Es fällt auf, dass nach den obigen Korrekturen die Ergebnisse für c_{G1} bei Sebulke und für c_{G2} bei Oser gute Übereinstimmung mit der Simulation aufweisen. Hingegen zeigen sich weiterhin Abweichungen zwischen den Werten nach Sebulke und Ahrens, welche denselben Modellansatz verwenden und demnach zu identischen Ergebnissen gelangen sollten. Die unterschiedlichen Werte für die Konstante K zur Bildung des statisch unbestimmten Moments sind darauf zurückzuführen, dass Sebulke die differentielle Bogenlänge im gekrümmten Abschnitt mit $d\xi = r \cos \varphi d\varphi$ anstatt $d\xi = r d\varphi$ ansetzt. Die Verschiebung des Kraftangriffspunktes wird bei beiden über eine getrennte Betrachtung der von den Einzelbeanspruchungen hervorgerufenen Teilverformungen ermittelt, wobei die hergeleiteten Belastungs-Verformungs-Zusammenhänge zum Teil ungültig sind. Dadurch erhält etwa Ahrens eine Verlängerung des Schenkels sowie eine fallweise Verkürzung des Bugs in Kettenlängsrichtung infolge der Biegemomentbelastung, was nicht der Realität entspricht. Die Berechnung kann stattdessen entweder nach der Energiemethode oder über die Ermittlung der Biegelinie nach den bekannten Beziehungen erfolgen. Erstere Vorgangsweise findet sich bei Oser; es wird dabei jedoch durch die separate Behandlung der beiden Abschnitte der Satz von Castigliano in unzulässiger Weise angewandt bzw. das Moment M_A in den partiellen Ableitungen nicht berücksichtigt.

Auf eine Berichtigung des Ansatzes, welcher von einer an jeder Stelle linearen Spannungsverteilung ausgeht, wird hier verzichtet, da dieses Modell für den Bereich der Rundung nicht die realen Verhältnisse wiederzugeben vermag. Eine korrigierte Berechnung auf Grundlage von Oser wird in Kap. 3.1.1 angegeben.

3 Analytische Berechnung

Der analytische Teil dieser Arbeit beinhaltet die Berechnung des Ersatzsystems nach Abb. 2-6, bei welchem der Rahmen durch eine Einzelkraft belastet wird, sowie dessen Erweiterung durch den Ansatz einer über einen Winkelbereich gleichförmig verteilten Streckenlast. Diese Maßnahme ermöglicht eine bessere Annäherung an die reale, aus der Kontaktdruckverteilung abzuleitende, eindimensionale Belastungscharakteristik. Mit dem rechnerischen Kontaktwinkel α erhält dabei die Rechnung einen freien Parameter, der erst anhand von empirisch gewonnenen Daten bestimmt werden kann. In weiterer Überlegung wäre auch die Verwendung einer komplexeren Belastungsfunktion denkbar, welche auf FEM-Ergebnissen für das verformte, bereits kalibrierte Kettenglied basiert; beispielsweise in Form eines semiempirischen Ansatzes auf Grundlage Hertzscher Pressungsverteilung (vgl. [Lit. 16, S.47-70]). Aufgrund der Kopplung von Belastung und Verformung im Kontaktbereich kann eine solche jedoch weiterhin nur eine grobe Näherung darstellen, weshalb keine wesentliche Ergebnisverbesserung zu erwarten ist. Hinzu kommt, dass wegen der sich einstellenden mathematischen Komplikationen der Formulierung der Belastungsfunktion enge Grenzen gesetzt sind.

Zu Vergleichszwecken erfolgt die Berechnung parallel nach zwei unterschiedlichen Verfahren; einerseits mittels Energiebetrachtungen unter Anwendung des zweiten Satzes von Castigliano, wobei auf die von Oser in seiner Arbeit [Lit. 4] bereitgestellten Ansätze zurückgegriffen wird, andererseits mithilfe der Differentialgleichungen für die Biegelinie des geraden und des stark gekrümmten Balkens. Da bislang keine Theorie zur Beschreibung der Verformungen eines Kreisbogenträgers unter Querkrafteinwirkung existiert, setzt die Berechnung über die Biegelinie die Vernachlässigung des Schubverformungsanteils im gekrümmten Abschnitt voraus.

3.1 Berechnung nach der Energiemethode

3.1.1 Punktlast

Für die Formänderungsenergie des gesamten Rahmens gilt:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{M_{y,1}^2}{EI_y} \right) dx + \frac{1}{2EA} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa} \frac{M_{y,2}^2}{r^2} - \frac{2M_{y,2}N_2}{r} + N_2^2 + (2 + 2\nu)\alpha' Q_2^2 \right] r d\varphi.$$

Glg. 3-1

Dabei berücksichtigt der Ausdruck für den Kreisbogenabschnitt, dessen Herleitung auf Kappus [Lit. 32] zurückgeht, die bei starker Krümmung infolge der unterschiedlichen Länge der Fasern gegenüber einem geraden Balken veränderten Normal- und Schubspannungsverteilungen. Es bezeichnen darin die Konstanten κ und α' den Bantlinschen Querschnittsfaktor

$$\kappa = \frac{1}{A} \int_{z_a}^{z_i} \frac{b(z)z}{r-z} dz,$$

Glg. 3-2

bzw. den Schubkorrekturfaktor für krumme Balken

$$\alpha' = \frac{1}{r\kappa^2 A} \int_{z_a}^{z_i} \frac{S_y(z)^2}{b(z)(r-z)^3} dz. \quad \text{Glg. 3-3}$$

Für den vorliegenden kreisförmigen Querschnitt werden sie von Oser angegeben mit:

$$\kappa = \tan^2 \left[\frac{\arcsin\left(\frac{e}{r}\right)}{2} \right]; \quad \text{Glg. 3-4}$$

$$\alpha' = \frac{\left\{ \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r}\right)^2} \right) \left[13 \left(\frac{r}{e}\right)^2 - 5 - 7 \frac{r}{e} \sqrt{\left(\frac{r}{e}\right)^2 - 1} \right] - 3 \right\}}{9\kappa^2}. \quad \text{Glg. 3-5}$$

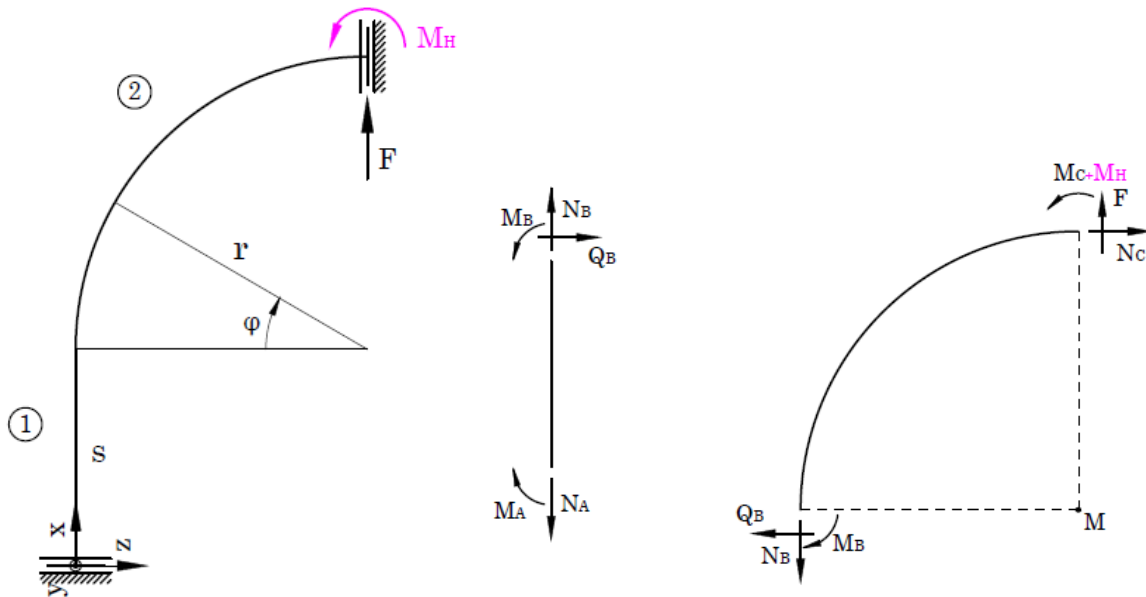


Abbildung 3-1: Freigeschnittenes Ersatzsystem bei Punktlast

Aus der Bedingung, dass an den Einspannstellen der Neigungswinkel aus Symmetriegründen null sein muss, lässt sich mit dem Satz von Castigliano die statisch Unbestimmte ermitteln. Hierzu wird an einem der beiden Punkte ein als Hilfsgröße dienendes Moment M_H mit dem Betrag null eingeführt, das als zusätzliche äußere Last betrachtet wird (Abb. 3-1). Die Winkelverdrehung an dieser Stelle ist dann die partielle Ableitung der gesamten Formänderungsenergie nach dem Hilfsmoment:

$$\psi_2(\varphi = \pi/2) = 0 = \frac{\partial W}{\partial M_H} = \frac{1}{EA} \int_0^s N_1 \frac{\partial N_1}{\partial M_H} dx + \frac{1}{EI_y} \int_0^s M_{y,1} \frac{\partial M_{y,1}}{\partial M_H} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,2} \frac{\partial M_{y,2}}{\partial M_H} - \frac{1}{r} \left(N_2 \frac{\partial M_{y,2}}{\partial M_H} + M_{y,2} \frac{\partial N_2}{\partial M_H} \right) + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial M_H} + (2+2\nu)\alpha' Q_2 \frac{\partial Q_2}{\partial M_H} \right] r d\varphi.$$

Glg. 3-6

Einsetzen der geänderten Schnittgrößenverläufe

$$N_1(x) = F,$$

$$M_{y,1}(x) = M_A + M_H,$$

$$N_2(\varphi) = F \cos \varphi,$$

$$Q_2(\varphi) = -F \sin \varphi,$$

$$M_{y,2}(\varphi) = M_A + Fr(\cos \varphi - 1) + M_H$$

sowie deren partieller Ableitungen

$$\frac{\partial N_1}{\partial M_H} = 0, \quad \frac{\partial M_{y,1}}{\partial M_H} = 1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial M_H} = 0, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial M_H} = 0, \quad \frac{\partial M_{y,2}}{\partial M_H} = 1$$

führt nach Setzen von $M_H = 0$ und Integrieren auf

$$\frac{M_A s}{EI_y} + \frac{1}{EA} \left\{ \frac{1+\kappa}{\kappa r} \left[\frac{\pi}{2} M_A + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) Fr \right] - F \right\} = 0,$$

und mit der Definition $M_A := FrK$ nach einigen Umformungen zur gesuchten Konstante

$$K = \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - 1}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{Ars}{I_y}}. \quad \text{Glg. 3-7}$$

Zur Ermittlung der Durchsenkung im Kraftangriffspunkt, die der halben Verlängerung der Kettengliedteilung entspricht, kann grundsätzlich analog vorgegangen werden. Da allerdings hier eine Verschiebung am Ort und in Richtung einer äußeren Kraft gesucht ist, kann die Verwendung einer Hilfskraft unterbleiben und nach F abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} = w_2(\varphi = \pi/2) &= \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EA} \int_0^s N_1 \frac{\partial N_1}{\partial F} dx + \frac{1}{EI_y} \int_0^s M_{y,1} \frac{\partial M_{y,1}}{\partial F} dx + \\ &+ \frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,2} \frac{\partial M_{y,2}}{\partial F} - \frac{1}{r} \left(N_2 \frac{\partial M_{y,2}}{\partial F} + M_{y,2} \frac{\partial N_2}{\partial F} \right) + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial F} + (2+2\nu)\alpha' Q_2 \frac{\partial Q_2}{\partial F} \right] r d\varphi. \end{aligned}$$

Glg. 3-8

Mit Glg. 2-24 bis 2-29 und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial N_1}{\partial F} = 1, \quad \frac{\partial M_{y,1}}{\partial F} = rK, \quad \frac{\partial N_2}{\partial F} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial F} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial M_{y,2}}{\partial F} = r(K - 1 + \cos \varphi)$$

folgt nach Integration

$$\Delta_{1,2} = \frac{Fr}{EA} \left[\frac{s}{r} + K^2 \frac{Ars}{I_y} + \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{2K-2}{\kappa} + \frac{\pi}{4\kappa} + \frac{\pi\alpha'(1+\nu)}{2} \right]. \quad \text{Glg. 3-9}$$

Der hiervon auf den geraden Abschnitt entfallende Anteil ist gemäß der Überlegung, dass innerhalb der hier verwendeten Theorie ein gerader Balken infolge Biegung keine Verschiebung in Längsrichtung erfährt und es sich somit in diesem Zusammenhang um einen mit der Zugkraft F belasteten Stab handelt:

$$\Delta_1 = \frac{Fs}{EA} \quad \text{Glg. 3-10}$$

Es ist demzufolge der überwiegende Teil der Gesamtverformung dem Bogenabschnitt zuzuordnen:

$$\Delta_2 = \frac{Fr}{EA} \left[K^2 \frac{Ars}{I_y} + \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{2K-2}{\kappa} + \frac{\pi}{4\kappa} + \frac{\pi\alpha'(1+\nu)}{2} \right] \quad \text{Glg. 3-11}$$

Nach Einsetzen in Glg. 2-12 bzw. 2-11 erhält man für die Teilsteifigkeiten

$$c_{G1} = \frac{EA}{s}, \quad \text{Glg. 3-12}$$

$$c_{G2} = \frac{EA}{K^2 \frac{Ars}{I_y} + r \left[\frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{2K-2}{\kappa} + \frac{\pi}{4\kappa} + \frac{\pi\alpha'(1+\nu)}{2} \right]}, \quad \text{Glg. 3-13}$$

und mit der Voraussetzung $\Delta_3 = 0$ schließlich für die Federsteifigkeit eines Kettenglieds

$$c_G = \frac{EA}{s + K^2 \frac{Ar^2s}{I_y} + r \left[\frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{2K-2}{\kappa} + \frac{\pi}{4\kappa} + \frac{\pi\alpha'(1+\nu)}{2} \right]}. \quad \text{Glg. 3-14}$$

Für den Elastizitätsmodul der Kette ergibt sich mit Glg. 2-16

$$E_K = \frac{Et}{2s + 2K^2 \frac{Ar^2s}{I_y} + r \left[\frac{\pi(1+\kappa)}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{4K-4}{\kappa} + \frac{\pi}{2\kappa} + \pi\alpha'(1+\nu) \right]}. \quad \text{Glg. 3-15}$$

3.1.2 Streckenlast

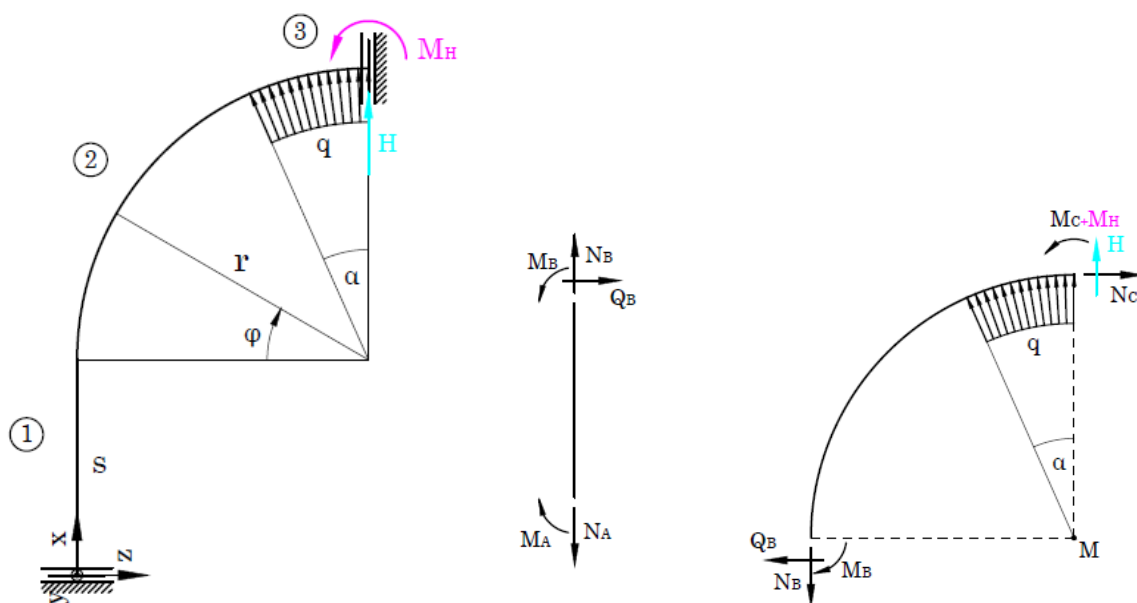


Abbildung 3-2: Freigeschnittenes Ersatzsystem bei Streckenlast

Der Betrag der konstanten radialen Streckenlast q ist vorgegeben durch die Bedingung, dass die Resultierende aus dem vertikalen Anteil gleich der halben Kettenzugkraft ist:

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q_V(\varphi) d\varphi = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q \sin \varphi d\varphi = F. \quad \text{Glg. 3-16}$$

Damit folgt

$$q = \frac{F}{\sin \alpha} \quad \text{Glg. 3-17}$$

und

$$q_H(\varphi) = \frac{F \cos \varphi}{\sin \alpha}, \quad \text{Glg. 3-18}$$

$$q_V(\varphi) = \frac{F \sin \varphi}{\sin \alpha}. \quad \text{Glg. 3-19}$$

Zur Ermittlung der Schnittgrößenverläufe wird in einem ersten Schritt der Rahmen an den Lagerstellen und am Übergang zwischen geradem und gekrümmtem Teil geschnitten (Abb. 3-2). Die jeweils drei Gleichgewichtsbedingungen für den geraden Balken

$$\sum F_H = 0: N_A = N_B,$$

$$\sum F_V = 0: Q_B = 0,$$

$$\sum M_{(A)} = 0: M_A + Q_B s = M_B,$$

sowie für den gesamten Bogen

$$\sum F_H = 0: N_B = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q_V(\varphi) d\varphi,$$

$$\sum F_V = 0: N_C = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q_H(\varphi) d\varphi,$$

$$\sum M_{(M)} = 0: M_B + N_C r = M_C + N_B r,$$

liefern sechs der sieben unbekanntten Kräfte und Momente an den Schnittstellen (wobei wiederum M_A als unbestimmtes Moment gewählt wird):

$$N_A = F,$$

$$N_B = F,$$

$$N_C = F \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$Q_B = 0,$$

$$M_B = M_A,$$

$$M_C = M_A + Fr \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$

Damit können nun durch Schneiden der drei Abschnitte an einer allgemeinen Stelle x bzw. φ gemäß Abb. 3-3 und Aufstellen der Kräftegleichgewichte die

Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentenverläufe für jeden Abschnitt ermittelt werden:

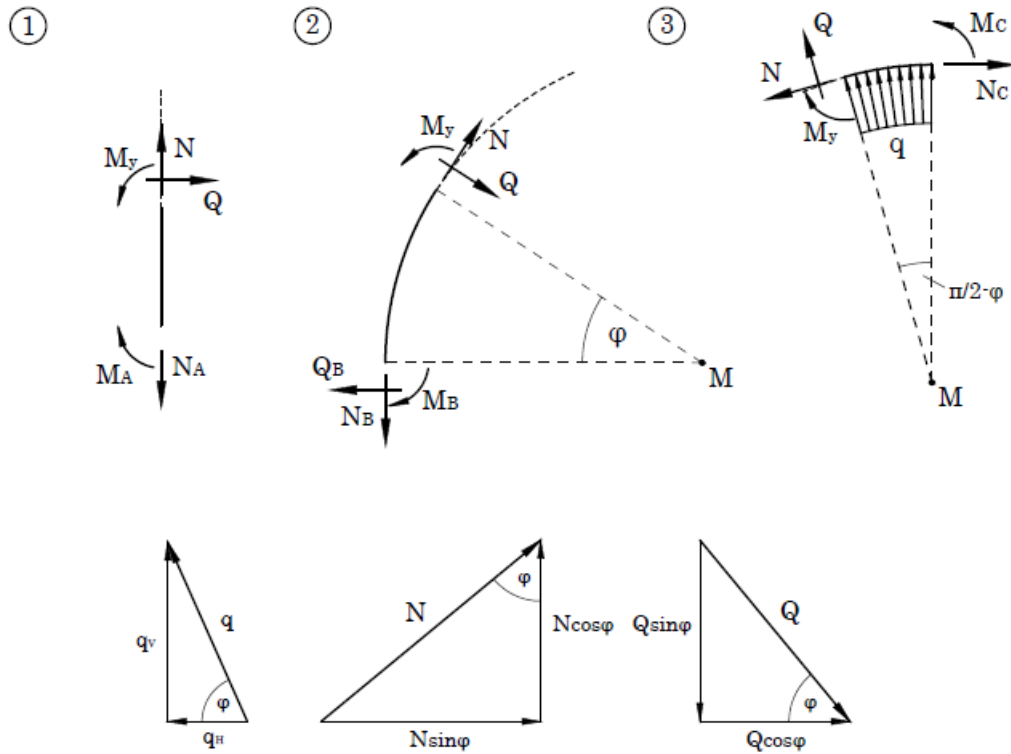


Abbildung 3-3: Ermittlung der Schnittgrößen

Abschnitt 1

$$\sum F_H = 0: N = F$$

$$\sum F_V = 0: Q = 0$$

$$\sum M_{(A)} = 0: M_y = M_A$$

$$N_1(x) = F$$

Glg. 3-20

$$Q_1(x) = 0$$

Glg. 3-21

$$M_{y,1}(x) = M_A$$

Glg. 3-22

Abschnitt 2

$$\sum F_H = 0: N \cos \varphi + Q \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_V = 0: F + Q \sin \varphi = N \sin \varphi$$

$$\sum M_{(M)} = 0: M_A + Nr = M_y + Fr$$

$$N_2(\varphi) = F \cos \varphi$$

Glg. 3-23

$$Q_2(\varphi) = -F \sin \varphi$$

Glg. 3-24

$$M_{y,2}(\varphi) = M_A + Fr(\cos \varphi - 1)$$

Glg. 3-25

Abschnitt 3

$$\sum F_H = 0: F \tan \frac{\alpha}{2} = N \cos \varphi + Q \sin \varphi + \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q_H(\varphi) d\varphi$$

$$\sum F_V = 0: N \sin \varphi = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} q_V(\varphi) d\varphi + Q \cos \varphi$$

$$\sum M_{(M)} = 0: M_y + Fr \tan \frac{\alpha}{2} = M_A + Fr \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + Nr$$

$$N_3(\varphi) = F \frac{1 - \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} \quad \text{Glg. 3-26}$$

$$Q_3(\varphi) = -F \frac{\cos \varphi}{\tan \alpha} \quad \text{Glg. 3-27}$$

$$M_{y,3}(\varphi) = M_A + Fr \left(\frac{1 - \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} - 1 \right). \quad \text{Glg. 3-28}$$

Für die Abschnitte 1 und 2 sind die erhaltenen Beziehungen gleichlautend mit jenen für den Lastfall Einzelkraft. Die Größe M_A unterscheidet sich jedoch bei Streckenlast und wird in bekannter Weise bestimmt aus:

$$\begin{aligned} \psi_3(\varphi = \pi/2) = 0 &= \frac{\partial W}{\partial M_H} = \frac{\partial W_1 + \partial W_2 + \partial W_3}{\partial M_H} = \frac{1}{EA} \int_0^s N_1 \frac{\partial N_1}{\partial M_H} dx + \frac{1}{EI} \int_0^s M_{y,1} \frac{\partial M_{y,1}}{\partial M_H} dx + \\ &+ \frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2-\alpha} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,2} \frac{\partial M_{y,2}}{\partial M_H} - \frac{1}{r} \left(N_2 \frac{\partial M_{y,2}}{\partial M_H} + M_{y,2} \frac{\partial N_2}{\partial M_H} \right) + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial M_H} + (2+2\nu)\alpha' Q_2 \frac{\partial Q_2}{\partial M_H} \right] r d\varphi + \\ &+ \frac{1}{EA} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,3} \frac{\partial M_{y,3}}{\partial M_H} - \frac{1}{r} \left(N_3 \frac{\partial M_{y,3}}{\partial M_H} + M_{y,3} \frac{\partial N_3}{\partial M_H} \right) + N_3 \frac{\partial N_3}{\partial M_H} + (2+2\nu)\alpha' Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial M_H} \right] r d\varphi. \end{aligned}$$

Glg. 3-29

Das Hilfsmoment M_H scheint wiederum nur in den Momentenverläufen auf, denen es sich überlagert, wodurch die Ableitungen $\partial M_{y,i} / \partial M_H = 1$, alle anderen hingegen null werden. Einsetzen von Glg. 3-20 bis 3-28 und Lösen der Integrale ergibt dann

$$M_A = Fr \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \alpha}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{Ars}{I_y}} := FrK'. \quad \text{Glg. 3-30}$$

Die Berechnung der Verschiebung des Scheitelpunktes benötigt, da hier nun keine Einzelkraft angreift, eine Hilfskraft H an dieser Stelle (siehe Abb. 3-2). Es gilt daher:

$$\begin{aligned} \Delta l = w_3(\varphi = \pi/2) &= \frac{\partial W}{\partial H} = \frac{1}{EA} \int_0^s N_1 \frac{\partial N_1}{\partial H} dx + \frac{1}{EI} \int_0^s M_{y,1} \frac{\partial M_{y,1}}{\partial H} dx + \\ &+ \frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2-\alpha} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,2} \frac{\partial M_{y,2}}{\partial H} - \frac{1}{r} \left(N_2 \frac{\partial M_{y,2}}{\partial H} + M_{y,2} \frac{\partial N_2}{\partial H} \right) + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial H} + (2+2\nu)\alpha' Q_2 \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right] r d\varphi + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{EA} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \left[\frac{1+\kappa}{\kappa r^2} M_{y,3} \frac{\partial M_{y,3}}{\partial H} - \frac{1}{r} \left(N_3 \frac{\partial M_{y,3}}{\partial H} + M_{y,3} \frac{\partial N_3}{\partial H} \right) + N_3 \frac{\partial N_3}{\partial H} + (2+2\nu)\alpha' Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial H} \right] r d\varphi.$$

Glg. 3-31

Aufgrund des geltenden Superpositionsprinzips erhält man die Schnittgrößen für die aus äußerer Last und Hilfskraft zusammengesetzte Belastung durch Überlagerung der Ergebnisse für Punktlast und Streckenlast:

$$N_1(x) = F + H,$$

$$M_{y,1}(x) = FrK' + HrK,$$

$$N_2(\varphi) = (F + H) \cos \varphi,$$

$$Q_2(\varphi) = -(F + H) \sin \varphi,$$

$$M_{y,2}(\varphi) = Fr(K' + \cos \varphi - 1) + Hr(K + \cos \varphi - 1),$$

$$N_3(\varphi) = F \frac{1 - \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} + H \cos \varphi,$$

$$Q_3(\varphi) = -F \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha} - H \sin \varphi,$$

$$M_{y,3}(\varphi) = Fr(K' + \frac{1 - \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} - 1) + Hr(K + \cos \varphi - 1).$$

Die partiellen Ableitungen nach der Einzelkraft sind somit unverändert

$$\frac{\partial N_1}{\partial H} = 1, \quad \frac{\partial M_{y,1}}{\partial H} = rK,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial H} = \frac{\partial N_3}{\partial H} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial H} = \frac{\partial Q_3}{\partial H} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial M_{y,2}}{\partial H} = \frac{\partial M_{y,3}}{\partial H} = r(K + \cos \varphi - 1).$$

Damit wird die Längung des halben Kettenglieds

$$\Delta l = \frac{Fr}{EA} \left\{ \frac{s}{r} + KK' \frac{Ar^2 s}{I_y} + \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (KK' - K - K' + 1) + \frac{1}{\kappa} \left[(K-1) \frac{\alpha}{\sin \alpha} + K' + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right] + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha'(1+\nu)}{2} \right) \right\}. \quad \text{Glg. 3-32}$$

und die Federsteifigkeit

$$c_G = \frac{EA}{s + KK' \frac{Ar^2 s}{I_y} + r \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (KK' - K - K' + 1) + \frac{1}{\kappa} \left[(K-1) \frac{\alpha}{\sin \alpha} + K' + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right] + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha'(1+\nu)}{2} \right) \right\}}.$$

Glg. 3-33

Hierbei gilt für den geraden Abschnitt gemäß den Erläuterungen in Kap. 3.1.1 wiederum

$$\Delta l_1 = \frac{Fs}{EA} \quad \text{Glg. 3-34}$$

bzw.

$$c_{G1} = \frac{EA}{s}, \quad \text{Glg. 3-35}$$

und infolgedessen für den gekrümmten Teil

$$\Delta_2 = \frac{Fr}{EA} \left\{ KK' \frac{Ars}{I_y} + \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (KK' - K - K' + 1) + \frac{1}{\kappa} \left[(K-1) \frac{\alpha}{\sin \alpha} + K' + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right] + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha'(1+\nu)}{2} \right) \right\} \quad \text{Glg. 3-36}$$

bzw.

$$c_{G2} = \frac{EA}{KK' \frac{Ar^2s}{I_y} + r \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (KK' - K - K' + 1) + \frac{1}{\kappa} \left[(K-1) \frac{\alpha}{\sin \alpha} + K' + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right] + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha'(1+\nu)}{2} \right) \right\}} \quad \text{Glg. 3-37}$$

Es sei angemerkt, dass sämtliche Gleichungen aus Kap. 3.1.2 durch Grenzwertbildung $\lim_{\alpha \rightarrow 0}()$ in die entsprechenden Beziehungen für punktförmige Belastung übergehen.

3.2 Berechnung über die Biegelinie

3.2.1 Punktlast

(Vgl. Kap. 3.1.1.) Die Verformungslinie des auf Zug und Biegung beanspruchten geraden Balkenabschnitts folgt aus den bekannten Beziehungen

$$w_1'' = \frac{-M_{y,1}}{EI_y} \quad \text{Glg. 3-38}$$

und

$$u_1' = \frac{N_1}{EA} \quad \text{Glg. 3-39}$$

Hierbei bewirkt zufolge Glg. 3-39 nur die Normalkraft eine Verschiebung in Längsrichtung. Tatsächlich ist dieser unter Einwirkung eines Biegemoments eine Verkürzung des Balkens infolge der Durchbiegung überlagert; dies ist leicht einzusehen, da die Bogenlänge der von der neutralen Faser beschriebenen Biegelinie gleich der Ausgangslänge sein muss. Eine Berechnung dieser Längenänderung erfolgt in Kap. 3.3; sie erweist sich dabei als vernachlässigbar für das vorliegende Problem und wird daher nicht angesetzt.

Die Belastungs-Verformungs-Zusammenhänge für den stark gekrümmten Kreisbogenträger lauten nach [Lit. 33, S.313-317] bei einer Vorzeichenfestlegung gemäß Abb. 3-4:

$$\ddot{w}_2 + w_2 = \frac{-M_{y,2}}{E\kappa A} \quad \text{Glg. 3-40}$$

$$\dot{u}_2 - w_2 = \frac{N_2 r - M_{y,2}}{EA} \quad \text{Glg. 3-41}$$

Wie aus Glg. 3-41 hervorgeht, kommt es beim gekrümmten Balken im Gegensatz zum geraden zu einer Kopplung der Verschiebungskomponenten in tangentialer und (auf den jeweiligen Krümmungsmittelpunkt bezogen) radialer Rich-

tung. Der im gekrümmten Abschnitt vorhandene Querkraftschub kann nicht berücksichtigt werden, da dafür keine entsprechenden Gleichungen zur Verfügung stehen. Eine Ableitung solcher erscheint angesichts der Schwierigkeit, dem durch eine Querkraft verformten Kreisbogenelement eine Geometrie zuzuordnen sowie aufgrund der Interdependenzen zwischen den Verformungsanteilen kaum möglich.

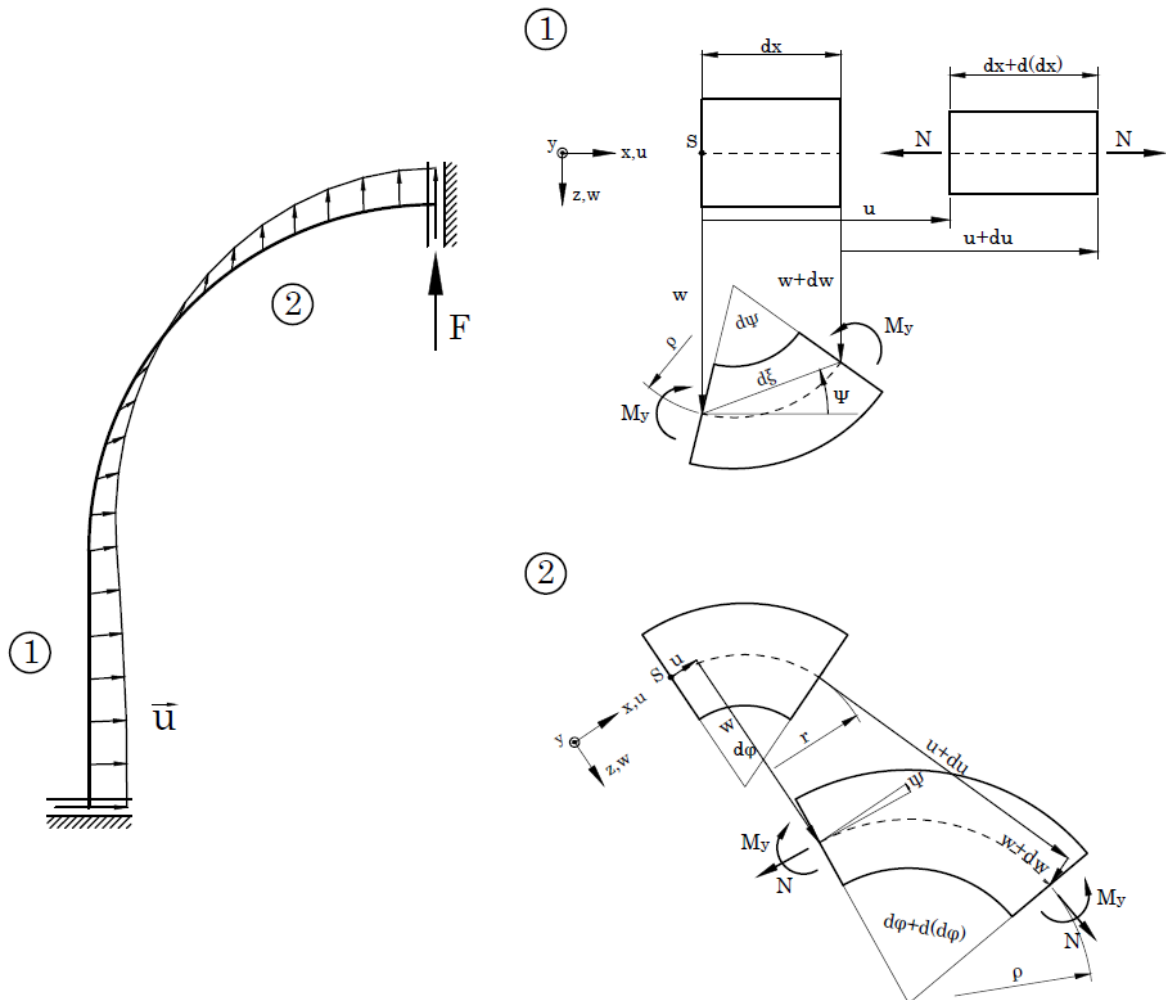


Abbildung 3-4: Biegelinie und Verformung des differentiellen Balkenelements

Für die weitere Berechnung wird noch der Verlauf der Balkenneigung benötigt, für den die kinematischen Beziehungen

$$\psi_1 = -w_1' \tag{Glg. 3-42}$$

bzw.

$$\psi_2 = -\frac{\dot{w}_2}{r} \tag{Glg. 3-43}$$

gelten. Nach Einsetzen der Schnittgrößen liegt im Fall von Glg. 3-40 eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{w}(\varphi) + w(\varphi) = K_1 + K_2 \sin \varphi + K_3 \cos \varphi \tag{Glg. 3-44}$$

vor, deren allgemeine Lösung nach [Lit. 33, S.318]

$$w(\varphi) = K_1 - \frac{K_2}{2} \varphi \cos \varphi + \frac{K_3}{2} \varphi \sin \varphi + c_4 \sin \varphi + c_5 \cos \varphi \quad \text{Glg. 3-45}$$

lautet. Die übrigen Gleichungen sind durch Integration einfach lösbar; man erhält:

$$w_1(x) = -\frac{M_A x^2}{2EI_y} + c_1 x + c_2, \quad \text{Glg. 3-46}$$

$$u_1(x) = \frac{Fx}{EA} + c_3, \quad \text{Glg. 3-47}$$

$$\psi_1(x) = \frac{M_A x^2}{2EI_y} - c_1 x, \quad \text{Glg. 3-48}$$

$$w_2(\varphi) = c_4 \sin \varphi + c_5 \cos \varphi - \frac{Fr}{2E\kappa A} \varphi \sin \varphi + \frac{Fr - M_A}{E\kappa A}, \quad \text{Glg. 3-49}$$

$$u_2(\varphi) = -c_4 \cos \varphi + c_5 \sin \varphi - \frac{Fr}{2E\kappa A} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + (Fr - M_A) \left(\frac{1}{E\kappa A} + \frac{1}{EA} \right) \varphi + c_6, \quad \text{Glg. 3-50}$$

$$\psi_2(\varphi) = \left(\frac{c_5}{r} + \frac{F}{2E\kappa A} \right) \sin \varphi + \left(\frac{F\varphi}{2E\kappa A} - \frac{c_4}{r} \right) \cos \varphi. \quad \text{Glg. 3-51}$$

Um die sieben Unbekannten in den Verschiebungsverläufen zu bestimmen, sind ebensoviele Aussagen über die Verformung des Rahmens zu treffen. Es bestehen diese in den Verträglichkeitsbedingungen an der Übergangsstelle

$$w_1(x=s) = w_2(\varphi=0),$$

$$u_1(x=s) = u_2(\varphi=0),$$

$$\psi_1(x=s) = \psi_2(\varphi=0),$$

sowie in den durch die Einspannung beschriebenen Symmetriebedingungen

$$u_1(x=0) = u_2(\varphi=\pi/2) = 0,$$

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(\varphi=\pi/2) = 0.$$

Einsetzen von Glg. 3-46 bis 3-51 in die Rand- und Übergangsbedingungen ergibt ein lineares Gleichungssystem der Unbekannten, dessen Auflösung für die Integrationskonstanten

$$c_1 = 0, \quad \text{Glg. 3-52}$$

$$c_2 = M_A \left(\frac{s^2}{2EI_y} - \frac{1}{E\kappa A} \right) + \frac{Fr}{2E\kappa A}, \quad \text{Glg. 3-53}$$

$$c_3 = 0, \quad \text{Glg. 3-54}$$

$$c_4 = -\frac{M_A r s}{EI_y}, \quad \text{Glg. 3-55}$$

$$c_5 = -\frac{Fr}{2E\kappa A}, \quad \text{Glg. 3-56}$$

$$c_6 = \frac{Fr}{E\kappa A} + \frac{\pi}{2} (M_A - Fr) \left(\frac{1}{E\kappa A} + \frac{1}{EA} \right), \quad \text{Glg. 3-57}$$

und für die statisch Unbestimmte

$$M_A = Fr \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\kappa s}{r}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{Ar s}{I_y}} := FrK. \quad \text{Glg. 3-58}$$

liefert. Verglichen mit dem Ergebnis aus Kap. 3.1.1 (Glg. 3-7) enthält die Formel für die Konstante K einen zusätzlichen Term $\kappa s/r$ im Zähler. Dieser stammt aus der Bedingung gleicher Längsverschiebungen am Übergang zwischen geradem und gekrümmtem Abschnitt, welche keinen Eingang in die Berechnung nach der Energiemethode findet. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass mit Glg. 3-58 eine genauere Beziehung für das Schenkelmoment M_A vorliegt, was im Weiteren anhand einer FEM-Berechnung des statischen Ersatzsystems abgeklärt werden soll. (Die Vernachlässigung der Schubverformung ist hierbei nicht von Bedeutung, da diese keinen Einfluss auf den Momentenverlauf hat.)

Die Radialverschiebung im Bogenabschnitt wird mit Glg. 3-55 und 3-56 zu

$$w_2(\varphi) = -\frac{Fr^2 s K}{EI_y} \sin \varphi - \frac{Fr}{2E\kappa A} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + \frac{Fr(1-K)}{E\kappa A}. \quad \text{Glg. 3-59}$$

Hieraus kann die Verlängerung des halben Glieds entnommen werden:

$$\Delta l = -w_2(\varphi = \pi/2) = F \left(\frac{Kr^2 s}{EI_y} - \frac{r(1 - \frac{\pi}{4} - K)}{E\kappa A} \right). \quad \text{Glg. 3-60}$$

Für die Federsteifigkeit folgt damit weiter

$$c_G = \frac{EA}{K \frac{Ar^2 s}{I_y} - \frac{r(1 - \frac{\pi}{4} - K)}{\kappa}}. \quad \text{Glg. 3-61}$$

Die Biegelinie als Verbindungslinie der Verschiebungsvektoren der Querschnittsschwerpunkte wird durch geometrisches Addieren der berechneten Verschiebungskomponenten erhalten, womit sich qualitativ ein Bild wie in Abb. 3-4 dargestellt ergibt. Alternativ kann sie auch (unter Berücksichtigung der Schubverformung) mit dem Satz von Castigliano ermittelt werden, indem sowohl im geraden als auch im gekrümmten Abschnitt an allgemeinen Punkten Hilfskräfte tangential und senkrecht zur Balkenlängsachse angesetzt werden; dies soll hier jedoch nicht Gegenstand sein.

3.2.2 Streckenlast

(Vgl. Kap. 3.1.2.) Für die Abschnitte 1 und 2 können die Verläufe der Verformungsgrößen vor dem Einsetzen der Konstanten aus der Berechnung für punktförmige Belastung übernommen werden (Glg. 3-46 bis 3-51), da sie sich gegenüber dem linienförmigen Ansatz nur in diesen unterscheiden. Auf Abschnitt 3, an dem die äußere Last angreift, sind wiederum die Differentialgleichungen für den Kreisbogenträger anzuwenden:

$$\ddot{w}_3 + w_3 = \frac{-M_{y,3}}{E\kappa A}, \quad \text{Glg. 3-62}$$

$$\dot{u}_3 - w_3 = \frac{N_3 r - M_{y,3}}{EA}, \quad \text{Glg. 3-63}$$

$$\psi_3 = -\frac{\dot{w}_3}{r}. \quad \text{Glg. 3-64}$$

Mit den in Kap. 3.1.2 hergeleiteten Schnittgrößen (Glg. 3-26 und 3-28) wird daraus unter Verwendung von Glg. 3-45:

$$w_3(\varphi) = c_7 \sin \varphi + c_8 \cos \varphi - \frac{Fr}{2E\kappa A \tan \alpha} \varphi \cos \varphi + \frac{Fr \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha}\right) - M_A}{E\kappa A}, \quad \text{Glg. 3-65}$$

$$u_3(\varphi) = -c_7 \cos \varphi + c_8 \sin \varphi - \frac{Fr}{2E\kappa A \tan \alpha} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \left[(Fr - M_A) \left(\frac{1}{E\kappa A} + \frac{1}{EA} \right) (1 + \kappa) - \frac{Fr}{E\kappa A \sin \alpha} \right] \varphi + c_9, \quad \text{Glg. 3-66}$$

$$\psi_3(\varphi) = \left(\frac{c_8}{r} - \frac{F\varphi}{2E\kappa A \tan \alpha} \right) \sin \varphi + \left(\frac{F}{2E\kappa A \tan \alpha} - \frac{c_7}{r} \right) \cos \varphi. \quad \text{Glg. 3-67}$$

Für die drei hinzukommenden Integrationskonstanten stehen mit der geforderten geometrischen Verträglichkeit der beiden Abschnitte des Kreisbogens drei weitere Gleichungen zur Verfügung. Die insgesamt zehn Bedingungen lauten damit:

- 1) $w_1(x=s) = w_2(\varphi=0)$
- 2) $u_1(x=s) = u_2(\varphi=0)$
- 3) $\psi_1(x=s) = \psi_2(\varphi=0)$
- 4) $w_2(\varphi=\pi/2-\alpha) = w_3(\varphi=\pi/2-\alpha)$
- 5) $u_2(\varphi=\pi/2-\alpha) = u_3(\varphi=\pi/2-\alpha)$
- 6) $\psi_2(\varphi=\pi/2-\alpha) = \psi_3(\varphi=\pi/2-\alpha)$
- 7) $u_1(x=0) = 0$
- 8) $\psi_1(x=0) = 0$
- 9) $u_3(\varphi=\pi/2) = 0$
- 10) $\psi_3(\varphi=\pi/2) = 0$

Durch Verbinden der Verformungsgleichungen mit den Rand- und Übergangsbedingungen entsteht ein umfangreiches Gleichungssystem; nach aufwändiger Rechnung erhält man

$$c_1 = 0, \quad \text{Glg. 3-68}$$

$$c_2 = M_A \left(\frac{s^2}{2EI_y} - \frac{1}{E\kappa A} \right) + \frac{Fr\alpha}{2E\kappa A \tan \alpha}, \quad \text{Glg. 3-69}$$

$$c_3 = 0, \quad \text{Glg. 3-70}$$

$$c_4 = -\frac{M_A r s}{EI_y}, \quad \text{Glg. 3-71}$$

$$c_5 = \frac{Fr}{E\kappa A} \left(\frac{\alpha}{2 \tan \alpha} - 1 \right), \quad \text{Glg. 3-72}$$

$$c_6 = -\frac{M_A r s}{EI_y} + \frac{Fs}{EA}, \quad \text{Glg. 3-73}$$

$$c_7 = -\frac{M_A r s}{EI_y} + \frac{Fr}{E\kappa A} \left(+\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \tan \alpha \right), \quad \text{Glg. 3-74}$$

$$c_8 = \frac{Fr\pi}{4E\kappa A \tan \alpha}, \quad \text{Glg. 3-75}$$

$$c_9 = \frac{Fr}{E\kappa A \sin \alpha} + \frac{\pi}{2} (M_A - Fr) \left(\frac{1}{E\kappa A} + \frac{1}{EA} \right), \quad \text{Glg. 3-76}$$

$$M_A = Fr \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\kappa s}{r}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{Ar s}{I_y}} := FrK', \quad \text{Glg. 3-77}$$

Wiederum unterscheidet sich die Beziehung für die Konstante zur Bildung des Moments M_A gegenüber jener mit dem Satz von Castigliano ermittelten (Glg. 3-30) um den Ausdruck $\kappa s / r$ im Zähler.

Zur Berechnung der Federsteifigkeit wird der Verlauf von $w_3(\varphi)$ benötigt, der sich mit Glg. 3-75 und 3-76 zu

$$w_3(\varphi) = Fr \left\{ \left[-\frac{K' r s}{EI_y} + \frac{1}{E\kappa A} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \tan \alpha \right) \right] \sin \varphi + \frac{\pi}{4E\kappa A \tan \alpha} \cos \varphi - \frac{1}{2E\kappa A \tan \alpha} \varphi \cos \varphi + \frac{1-K'}{E\kappa A} - \frac{1}{E\kappa A \sin \alpha} \right\} \quad \text{Glg. 3-78}$$

ergibt. Damit folgt weiter

$$\Delta l = -w_3(\varphi = \pi/2) = F \left(\frac{K' r^2 s}{EI_y} - \frac{r \left(1 - K' - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} - \tan \alpha \right)}{E\kappa A} \right) \quad \text{Glg. 3-79}$$

und

$$c_G = \frac{EA}{K' \frac{Ar^2 s}{I_y} - \frac{r \left(1 - K' - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} - \tan \alpha \right)}{\kappa}. \quad \text{Glg. 3-80}$$

3.3 Verkürzung des geraden Balkens durch Biegung

Der gerade Balken des Ersatzsystems wird durch ein konstantes Moment M_A auf Biegung beansprucht. Infolge der sich einstellenden Krümmung erfährt er dadurch eine Verkürzung in Längsrichtung $\Delta l_1^{(M, \cdot)}$, welche aufgrund der zulässigen Superposition von Einzelverformungen unabhängig von der Längung durch die Normalkraft $\Delta l_1^{(N)}$ betrachtet werden darf. Da sich in der gängigen Literatur kein Verfahren zur Berechnung dieser Längenänderung findet, soll an dieser Stelle ein solches hergeleitet werden. Es wird dabei eine allgemeine Herangehensweise gewählt, um die Übertragbarkeit der Methode auf beliebige Verformungsfälle zu gewährleisten.

Der Berechnung wird die Annahme zugrunde gelegt, dass auch unter Berücksichtigung der Verkürzung des Balkens die nach Glg. 3-38 ermittelte geometrische Form der Biegelinie zutrifft. Dabei handelt es sich um den Abschnitt einer Parabel der Form

$$y = a x^2 \quad \text{Glg. 3-81}$$

im Intervall $0 \leq x \leq s$. Aus Glg. 3-46 liest man ab:

$$a = \frac{M_A}{2EI_y}. \quad \text{Glg. 3-82}$$

(Nach der Bernoulli'schen Theorie beschreibt ein durch ein konstantes Biegemoment belasteter Balken eigentlich einen Kreisbogen; die errechnete parabolische Form resultiert aus einer Vereinfachung im Zuge der Herleitung der Balkengleichung.)

Gesucht ist nun eine mathematische Beschreibung jenes Kurvenabschnitts, welcher geometrische Ähnlichkeit zum ursprünglich berechneten aufweist, also aus einer zentrischen Streckung desselben hervorgeht, und dessen Bogenlänge der Länge des unverformten Balkens entspricht (siehe Abb. 3-5).

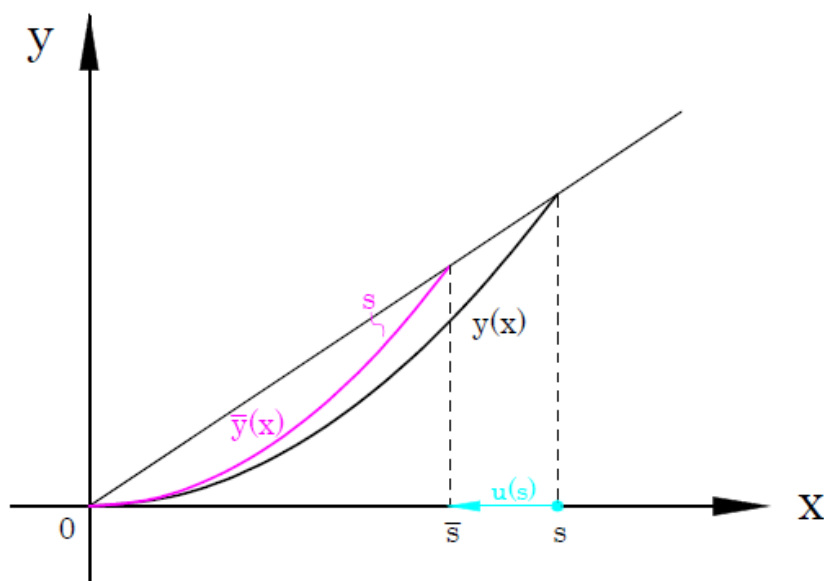


Abbildung 3-5: Ermittlung der Verschiebung des Balkenendpunktes

Allgemein erzielt man eine zentrische Streckung einer gegebenen Kurve $y(x)$ mit dem Koordinatenursprung als Zentrum, indem man sie in Polarkoordinatendarstellung $R(\varphi)$ überführt und mit dem Streckungsfaktor k multipliziert. Die durch ein beliebiges Intervall $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ abgegrenzten Abschnitte aller Kurven der Schar $R(\varphi, k)$ sind dann zueinander ähnlich. Der Beweis hierfür folgt nach Abb. 3-6 aus dem Strahlensatz, wobei man sich eine Kurve aus einer unendlichen Zahl gerader Abschnitte bestehend vorstellt, deren Endpunkte auf vom Ursprung ausgehenden Winkelstrahlen φ_i verschoben werden.

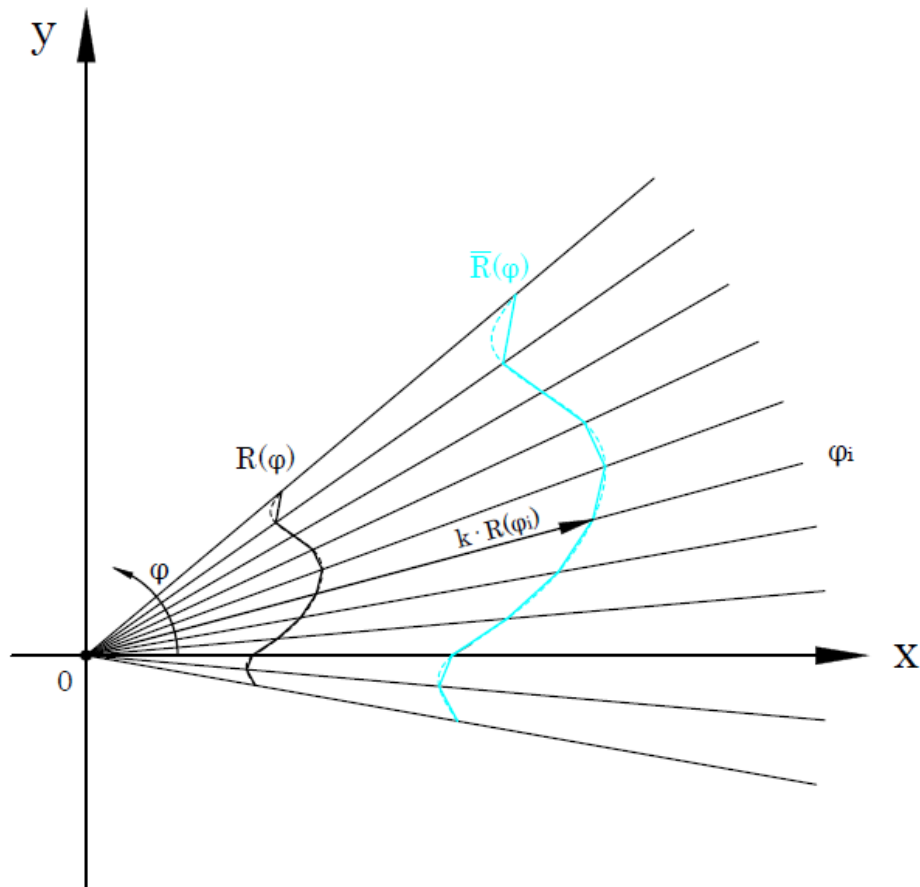


Abbildung 3-6: Zentrische Streckung einer Kurve

Die Vorschriften für die Transformation zwischen polaren und kartesischen Koordinaten lauten:

$$x = R \cos \varphi, \quad \text{Glg. 3-83}$$

$$y = R \sin \varphi, \quad \text{Glg. 3-84}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{Glg. 3-85}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad \text{Glg. 3-86}$$

Einsetzen von Glg. 3-81 in Glg. 3-85 ergibt

$$R = \sqrt{x^2 + ax^4};$$

mit Glg. 3-83 wird daraus

$$R = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + a^2 R^4 \cos^4 \varphi}.$$

Nach Umformung unter Anwendung der Beziehung

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad \text{Glg. 3-87}$$

erhält man die Gleichung der Parabel in Polarkoordinaten:

$$R = \frac{\sin \varphi}{a \cos^2 \varphi}. \quad \text{Glg. 3-88}$$

Multiplikation mit k und anschließende Rücktransformation führt abermals auf eine Parabel:

$$\bar{R} = k \frac{\sin \varphi}{a \cos^2 \varphi} \rightarrow \bar{y} = \frac{a}{k} x^2 := \bar{a} x^2. \quad \text{Glg. 3-89}$$

Dies stellt das zu erwartende Ergebnis dar, da alle Kurven, welche nur von einem Parameter abhängen, untereinander ähnlich sind.

Die Bogenlänge eines Kurvenabschnitts berechnet sich bekanntermaßen mit

$$\xi = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad \text{Glg. 3-90}$$

Für den gesuchten Parabelbogen wird daher gefordert:

$$\int_0^{\bar{s}} \sqrt{1 + \bar{y}'^2} dx = \int_0^{\bar{s}} \sqrt{1 + 4\bar{a}^2 x^2} dx = s. \quad \text{Glg. 3-91}$$

Nach Zwischenrechnung folgt als Lösung des bestimmten Integrals

$$\frac{\ln\left(\sqrt{4\bar{a}^2 \bar{s}^2 + 1} + 2\bar{a} \bar{s}\right)}{4\bar{a}} + \frac{\bar{s} \sqrt{4\bar{a}^2 \bar{s}^2 + 1}}{2} = s. \quad \text{Glg. 3-92}$$

Da der Streckungsfaktor das Verhältnis einer beliebigen Abmessung von gestreckter und ursprünglicher Kurve angibt, kann geschrieben werden:

$$k = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{\bar{s}}{s}. \quad \text{Glg. 3-93}$$

Durch Einsetzen in Glg. 3-92 kann darin die Parabelkonstante \bar{a} eliminiert werden, und man erhält nach Explizitmachen die obere Integrationsgrenze und damit die Ausdehnung der verformten Nulllinie in Längsrichtung:

$$\bar{s} = \frac{4as^2}{\ln\left(\sqrt{4a^2 s^2 + 1} + 2as\right) + 2as\sqrt{4a^2 s^2 + 1}}. \quad \text{Glg. 3-94}$$

Die Längsverschiebung des Balkenendes ergibt sich schließlich aus der Differenz der Positionen nach und vor der Verformung:

$$u_1^{(M_y)}(x=s) = \Delta l_1^{(M_y)} = \bar{s} - s. \quad \text{Glg. 3-95}$$

Mit Glg. 3-94, 3-82 und 3-58 lautet die endgültige Beziehung

$$\Delta l_1^{(M_y)} = \frac{2FKrs^2}{EI_y \left[\ln \left(\sqrt{\left(\frac{FKrs}{EI_y} \right)^2 + 1} + \frac{FKrs}{EI_y} \right) + \frac{FKrs}{EI_y} \sqrt{\left(\frac{FKrs}{EI_y} \right)^2 + 1} \right]} - s. \quad \text{Glg. 3-96}$$

Das Ergebnis ist ein stark nichtlinearer Zusammenhang von Verformung und Biegemoment bzw. Kettenzugkraft, der mit einer quadratischen Funktion angenähert werden kann, also progressiv verläuft. Setzt man die Längenänderungen infolge des Biegemoments und der Normalkraft in Relation, so zeigt sich, dass erstere zu vernachlässigen ist: Für ein Kettenglied nach EN 818-7 ergibt sich bei der zulässigen Höchstlast ein Wert von $\Delta l_1^{(M_y)} / \Delta l_1^{(N)} = -0,003$. Die in den Berechnungen von Kap. 3.2 getroffene Voraussetzung $u_1(x) = u_1^{(N)}(x)$ ist daher gerechtfertigt.

4 FEM-Untersuchungen und empirische Berechnung

Im simulatorischen Teil sollen durch Anwendung der FEM die in Kap. 2.2 identifizierten relevanten Einflussgrößen einer quantitativen Betrachtung unterzogen werden und in eine kraftabhängige Berechnung der Federsteifigkeit eingehen, welche vorrangig für die hochfesten Kettenausführungen den Anspruch hoher Genauigkeit erfüllt. Hierzu wird zunächst anhand eines stark vereinfachten Simulationsmodells geprüft, mit welcher Güte die aus der Analytik erhaltenen Gleichungen das zugrundegelegte Ersatzsystem abbilden. Danach wird der reale Eingriff zweier Kettenglieder modelliert und beispielhaft an der Geometrie der Hebezeugkette nach EN 818-7 eine Parameterstudie durchgeführt. Darin wird der Einfluss einer Änderung der Werkstoffparameter Fließgrenze und Tangentenmodul, des Betrags der Fertigungsprüfkraft und des Reibungskoeffizienten auf das Verformungsverhalten untersucht. Für eine ausgewählte Konfiguration dieser Parameter werden darauf folgend in umfangreichen Simulationsreihen die beiden geometrischen Kennzahlen des Rundkettenglieds systematisch variiert. Dies erlaubt es, unter Einbeziehung des analytischen Modells mit linienförmiger Last einen semiempirischen Berechnungsansatz abzuleiten, der für eine beliebige Geometrie das Simulationsergebnis wiedergibt und dessen Gültigkeitsbereich sich aus der zuvor getroffenen Wahl der Parameter bestimmt.

Sämtliche FEM-Berechnungen werden mit dem Strukturmechanik-Modul der Multiphysik-Software ANSYS 12.1 ausgeführt, welche in der Workbench-Version mit graphischer Benutzeroberfläche verwendet wird. Aufgrund einer lizenzbedingten Beschränkung ist für die Netzfeinheit eine Obergrenze von 256.000 Knotenpunkten vorgegeben, wodurch eine Sensibilitätsanalyse größtenteils entfallen kann.

4.1 Validierung der Analytik

Um die im analytischen Teil hergeleiteten Gleichungen zu verifizieren, wird für den Fall Punktlast ein dreidimensionales Simulationsmodell erstellt, welches nicht die reale Kette, sondern das statische Ersatzsystem abbilden soll, dessen Vereinfachungen also übernimmt. Auf diese Weise wird jener Fehler, welcher durch die in der Balkentheorie enthaltenen vereinfachenden Annahmen entsteht, vom Modellfehler abgegrenzt.

Zur Erhöhung der Genauigkeit bei gegebener Netzauflösung wird die Betrachtung auf ein Achtelglied reduziert. Dessen räumliche Lagerung erfolgt durch die Bedingung, dass zu den drei Symmetrieebenen gehörende Punkte keine Verschiebung in Richtung der Ebenennormalen erfahren, wodurch zugleich eine Verdrehung der Randquerschnitte unterbunden wird. Das FE-Netz wird für jede der untersuchten Geometrien aus etwa 58.000 Hexaeder-Elementen (250.000 Knotenpunkte) gebildet. Die Last, welche einem Viertel der Kettenzugkraft bzw. $F/2$ entspricht, wird nicht als Einzelkraft an der Unterseite des Scheitelquer-

schnitts, sondern gleichförmig über diesen verteilt aufgebracht, sodass in Kraft-richtung eine konstante Schubspannung wirkt. Dies wird damit begründet, dass gemäß der eindimensionalen Theorie die Spannungen und Verschiebungen aus den resultierenden Kräften und Momenten in den Querschnitten berechnet werden und dadurch der lokale Einfluss unterschiedlicher Angriffspunkte z einer äußeren Kraft auf die Verformung unberücksichtigt bleibt. Es wird linear-elastisches Verhalten und geometrische Linearität vorausgesetzt; der Betrag der aufgetragenen Kraft ist daher unerheblich, das Ergebnis skalierbar. Aus den Verschiebungen der Querschnittsmittelpunkte des Scheitels $\Delta_{1,2} = \Delta l$ und des Übergangs der beiden Teilabschnitte Δl_1 werden nach Glg. 2-11 und 2-12 die (Teil-)Federsteifigkeiten ermittelt.

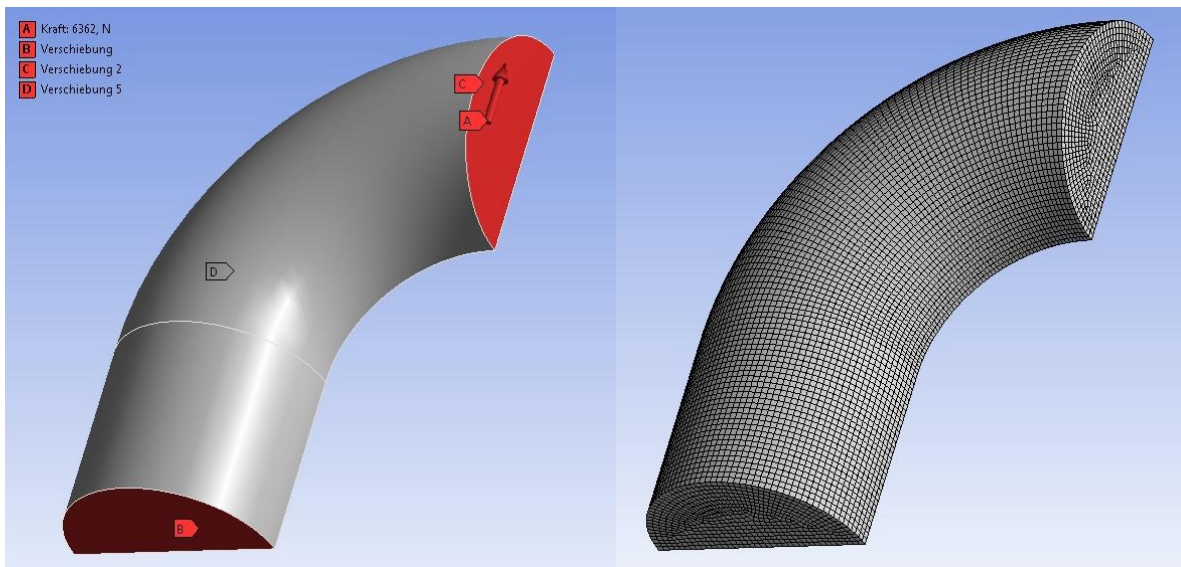


Abbildung 4-1: FEM-Modell des Ersatzsystems der Analytik

In Tab. 4-1 sind die Ergebnisse für einige relevante Kettendimensionen angegeben, welche den Bereich der geometrischen Parameter hochfester Rundstahlketten weitgehend abdecken. Diesen werden die nach den Gleichungen aus Kap. 3.1.1 berechneten Werte gegenübergestellt, wobei die darin vorkommende Konstante K zum einen nach Glg. 3-7 berechnet wird, zum anderen diese durch die in Kap. 3.2.1 gefundene, anderslautende Beziehung Glg. 3-58 ersetzt wird. In beiden Fällen zeigt sich jenes hohe Maß an Übereinstimmung von Berechnung und Simulation, welches aufgrund der Gültigkeit der Balkentheorie bei korrekter Vorgehensweise erwartbar ist. Die Abweichungen liegen jeweils deutlich unter 1 % und nehmen für höhere Werte von s/r zu. Da bei Verwendung von Glg. 3-58 durchwegs ein genaueres Ergebnis erzielt wird, empfiehlt es sich, diese für die Berechnung heranzuziehen. Dieses Vorgehen soll im Weiteren auch für den Fall Streckenlast übernommen werden (Ersetzen von Glg. 3-30 durch Glg. 3-77). Vergleicht man die Ergebnisse für die Dimensionen 9×27 und 18×54 , so findet man in Kap. 2.1 hergeleiteten proportionalen Zusammenhang der Federsteifigkeiten ähnlicher Glieder.

Wird die Federkonstante nach der in Kap. 3.2.1 ermittelten Beziehung (Glg. 3-61) berechnet, so ergeben sich stark überhöhte Werte, welche aus der Nichtberücksichtigung des Querkraftschubs resultieren. Zuzüglich Glg. 3-9 beträgt für ein

Glied nach EN 818-7 dessen Anteil an der Gesamtverformung 27 % (auf die restliche Verformung des Bugabschnitts infolge Normalkraft und Biegemoment entfallen 64 %, auf den Schenkelabschnitt 9 %). Ein anschaulicher Vergleich zwischen den Berechnungen nach der Energiemethode und mittels der Differentialgleichungen für die Verschiebungsverläufe ist gegeben, wenn man bei ersterer schubstarres Verhalten annimmt, was durch Nullsetzen des Querkraftterms in Glg. 3-14 erreicht wird. Für die Dimension 9 x 27 erhält man dann Steifigkeitswerte von $c_G = 2,218 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ bzw. $2,295 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$; dies entspricht einem Unterschied von ca. 3 %. Daran lässt sich erkennen, dass es sich grundsätzlich um zwei gleichwertige Verfahren handelt.

Größe	Einheit	9 x 27	18 x 54	14 x 50	18 x 64	30 x 108	38 x 137
		EN 818-7	EN 818-7	DIN 22252	DIN 22252	DIN 22252	DIN 22252
e/r	[1]	0,435	0,435	0,431	0,444	0,458	0,466
s/r	[1]	0,739	0,739	0,969	1,025	1,107	1,147
simuliert							
c_G	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,615	3,230	2,301	3,118	5,426	7,065
c_{G1}	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	18,064	36,093	20,993	26,322	41,797	51,976
c_{G2}	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,774	3,548	2,584	3,537	6,235	8,176
berechnet							
c_G K nach Glg. 3-7	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,618	3,237	2,311	3,135	5,459	7,110
Abw.	[%]	0,21	0,21	0,47	0,52	0,61	0,65
c_G K nach Glg. 3-58	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,616	3,232	2,307	3,127	5,442	7,087
Abw.	[%]	0,07	0,07	0,26	0,28	0,31	0,32
c_{G1}	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	17,464	34,927	20,525	25,753	40,949	50,944
Abw.	[%]	-3,23	-3,23	-2,23	-2,16	-2,03	-1,98
c_{G2} K nach Glg. 3-7	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,784	3,568	2,605	3,569	6,298	8,264
Abw.	[%]	0,56	0,56	0,81	0,89	1,01	1,08
c_{G2} K nach Glg. 3-58	$[10^8 \text{ Nm}^{-1}]$	1,781	3,562	2,599	3,559	6,277	8,232
Abw.	[%]	0,40	0,40	0,58	0,61	0,67	0,69

Tabelle 4-1: Gegenüberstellung von Berechnungs- und Simulationsergebnissen für das Ersatzsystem

4.2 FEM-Modell der realen Kette

Nach einer eingehenden Analyse aller zu betrachtenden Einflussfaktoren in Kap. 2.2 stellt sich die Federsteifigkeit der Rundstahlkette als Funktion von elf Variablen dar:

$$c_K = f(F_1, F_2, n, d, e/r, s/r, F_K, \sigma_{F,0}, E_T, (\Delta t/t)_V, \mu).$$

Bereits bekannt aus Kap. 2.1 sind der Zusammenhang zwischen differentieller und abschnittsweiser Steifigkeit sowie die Abhängigkeit von der Kettenlänge und dem Drahtdurchmesser als charakteristischer Abmessung bei konstanter geometrischer Form. Zudem wurde mit der Nennspannung ein größenunabhän-

giger Belastungsparameter definiert. Es gilt daher folgende Parameterabhängigkeiten noch zu ermitteln:

$$c_G = f(\sigma_n, e/r, s/r, F_K, \sigma_{F,0}, E_T, (\Delta t/t)_V, \mu).$$

Mit Ausnahme des Verschleißes kann der Einfluss sämtlicher angeführten Größen durch deren Variation an einem geeigneten FEM-Modell untersucht werden. Im Folgenden wird zunächst ein Referenzmodell erstellt, mit welchem durch entsprechende Wahl der Parameter eine Hebezeugkette 9 x 27 nach EN 818-7 abgebildet wird. Dieses wird für eine Analyse des elastisch-plastischen Verhaltens der Rundstahlkette unter Einwirkung von Fertigungsprüfkraft und betrieblicher Belastung herangezogen und dient als Ausgangspunkt für die nachfolgenden Parametervariationen.

4.2.1 Referenzmodell

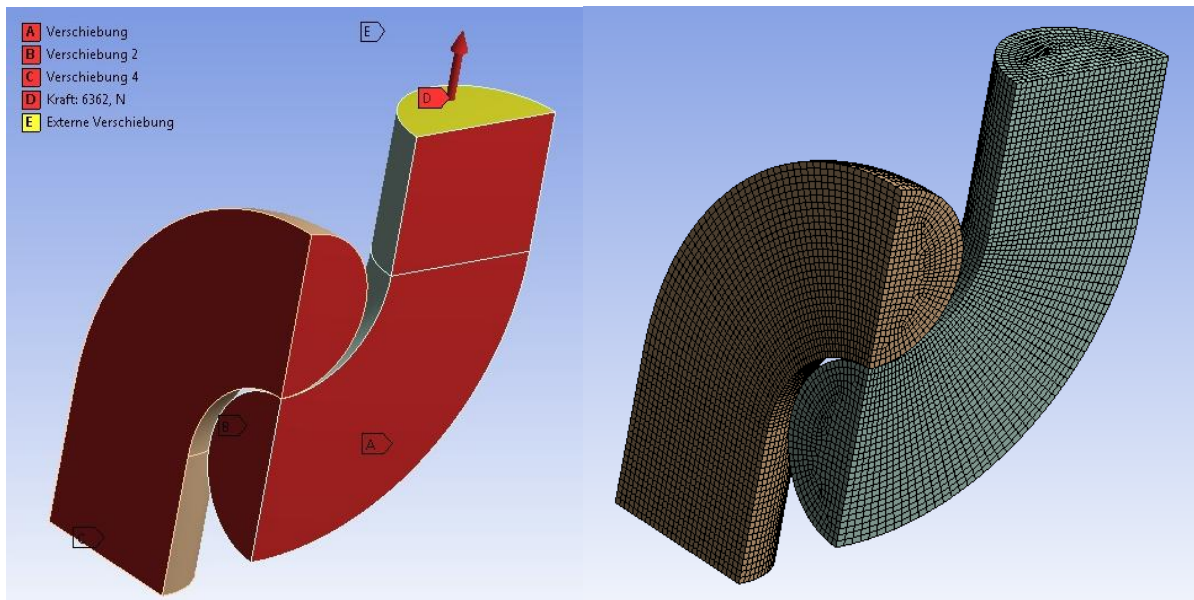


Abbildung 4-2: FEM-Modell der Rundstahlkette

Das Ersatzsystem wird unter Ausnutzung der Symmetrien von Geometrie und Belastung aus zwei Achtelgliedern gebildet. Die Lagerung erfolgt durch Fixieren aller zur Längsachse parallelen sowie einer der beiden schenkelseitigen Symmetrieflächen in ihren Ebenen. An der verbleibenden Schnittfläche wird die Zugkraft $F/2$ aufgebracht; die Punkte dieses Querschnitts sind frei verschiebbar in allen Freiheitsgraden, Verdrehungen der gesamten Fläche jedoch um alle Achsen gesperrt. Für das eingespannte Glied wird mit dieser Modellierung die tatsächliche Lastangriffssituation mit als exakt anzusehender Genauigkeit wiedergegeben; die korrekten Ergebnisse werden an diesem abgelesen. Das verwendete Hexaeder-Netz besteht für jedes der Achtelglieder aus ca. 28.000 Elementen und 122.000 Knotenpunkten. Der Kontakt wird als reibungsfrei angenommen ($\mu = 0$); er wird in normaler Richtung mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren und in tangentialer Richtung mit dem Penalty-Verfahren berechnet. Das Materialverhalten im plastischen Bereich wird unter Verwendung des bilinear-isotropen Werkstoffmodells mit einer linearen Fließ-

kurve modelliert. Entsprechend der in DIN 17115 für hochfeste Kettenstähle vorgeschriebenen Mindeststreckgrenze von 980 MPa wird ein Wert von $\sigma_{F,0} = 1000$ MPa gewählt. Für den Pseudo-Materialparameter Tangentenmodul wird als Richtwert für Stahl $E_T = 5000$ MPa vorgegeben.

Der simulierte Belastungsverlauf (Abb. 4-3) setzt sich aus fünf Segmenten zusammen und besteht im Aufbringen der Fertigungsprüfkraft (entsprechend der in EN 818-7 festgelegten Mindestprüfspannung von 500 MPa) und einer anschließenden zweimaligen Belastung in Höhe der maximalen Tragfähigkeit von $\sigma_n = 200$ MPa. Um die Konvergenz der nichtlinearen Berechnung zu erreichen, sowie zur Bestimmung einer ausreichenden Anzahl von Stützstellen für die gesuchten Kurvenverläufe, wird eine Aufteilung in insgesamt 69 Lastschritte vorgenommen. Diese werden teils durch manuelle Vorgabe, teils programmgesteuert bei Nichterzielen der Konvergenz für einen Schritt weiter in Zwischenschritte (substeps) unterteilt.

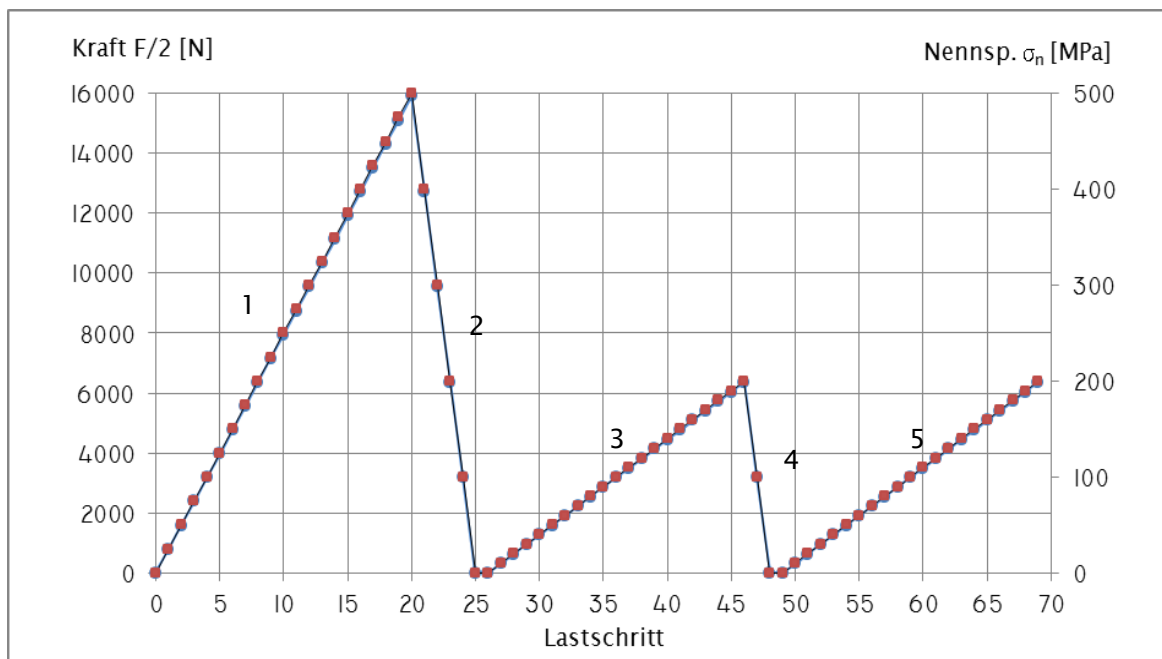


Abbildung 4-3: Vorgegebener Kraftverlauf

Für die Verschiebung des Kontaktpunktes der unverformten Glieder, die der Verlängerung eines halben Kettengliedes Δl entspricht, ergibt sich der in Abb. 4-4 dargestellte Verlauf. Darin stellt die vom Kurvenzug und der Abszisse eingeschlossene Fläche die beim Kalibriervorgang für ein Achtelglied geleistete plastische Umformarbeit dar, die Fläche unter der Entlastungslinie die elastische Formänderungsarbeit. Wie aus Abb. 4-7 zu ersehen ist, erstreckt sich der von plastischer Verformung betroffene Bereich des Kettengliedes über einen weiten Teil des Bugs sowie die gesamte Innenseite des Schenkelabschnitts. Die nach Entlastung verbleibende Kettenlängeung $(\Delta l/t)_K$ beträgt 2,6 %. Es zeigt sich, dass die beiden darauffolgenden Belastungen der vom Entlastungsvorgang nach dem Kalibrieren beschriebenen Arbeitslinie folgen. Dies lässt sich damit erklären, dass letzterer rein elastisch bzw. reibungsfrei erfolgt und daher eine neuerliche Belastung bei derselben Zugkraft die exakt selbe Belastungssituation

herbeiführt. Demnach kommt es erst dann zu weiterer Plastifikation und einem Verlassen der ursprünglichen Arbeitslinie, wenn im Betrieb die Kalibrierkraft überschritten wird. Dies bedeutet, dass unterhalb dieser Elastizitätsgrenze in keinem Punkt die Van-Mises-Vergleichsspannung die Fließgrenze $\sigma_{F,1}$ erreicht. Eine Abweichung des Verhaltens von dieser Idealbetrachtung ergibt sich für die reale Kette infolge der Asymmetrien in der Lage der Glieder, da dadurch die Gleichheit der Spannungsverteilungen nicht mehr gegeben ist und somit bereits bei niedrigeren Kräften lokale plastische Verformungen auftreten können.

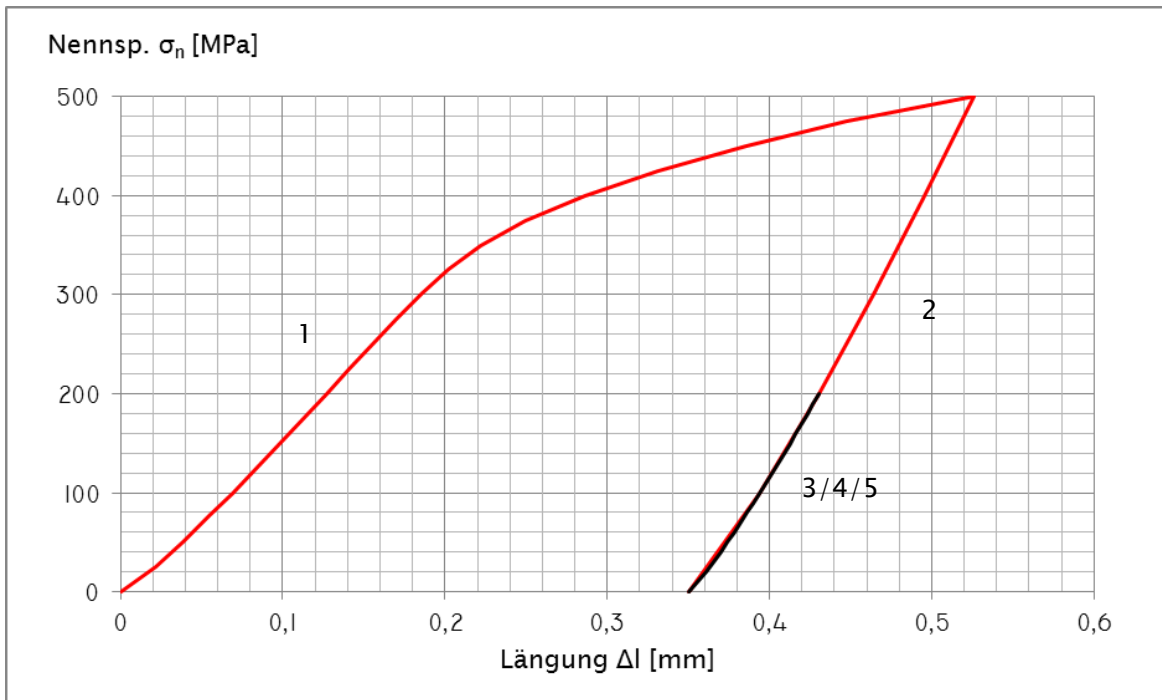


Abbildung 4-4: Verlauf der Kettengliedlänge

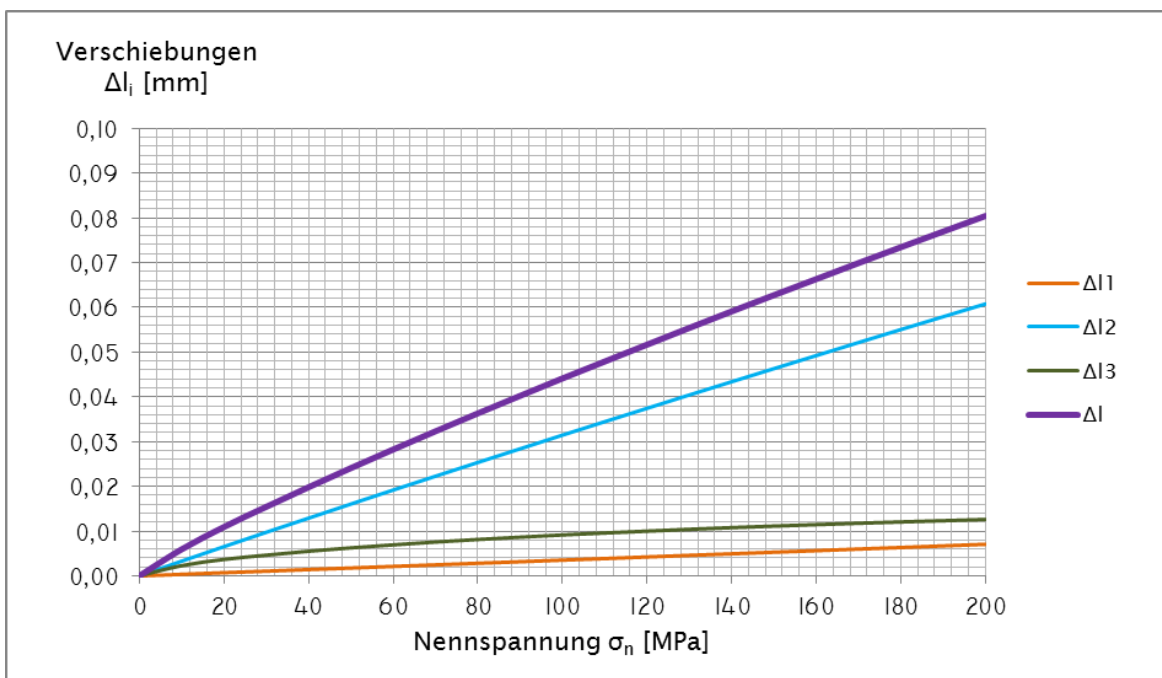


Abbildung 4-5: Verformung des kalibrierten Kettenglieds

Eine Zerlegung der Verformungskurve des kalibrierten Kettenglieds in die drei Teilverformungen Δl_j (Abb. 4-5) zeigt, dass deren Nichtlinearität aus dem Verhalten des Scheitelquerschnitts Δl_3 resultiert. Unter dem Einfluss der Flächenpressung erfahren im Kontaktbereich die Querschnitte eine Verkürzung, welche vor allem im unteren Lastbereich eine stark nichtlineare Charakteristik aufweist. Die sich aus den Anteilen von Schenkel Δl_1 und Bug Δl_2 zusammensetzende Verformung der Kettengliedmittellinie verläuft hingegen weitgehend linear. Die Anteile der einzelnen Teilverformungen an der Gesamtlängung $\Delta l_j / \Delta l$ schwanken lastabhängig gemäß nachstehender Tabelle.

Nennspannung σ_n [MPa]	Verformungsanteile in %		
	$\Delta l_1 / \Delta l$	$\Delta l_2 / \Delta l$	$\Delta l_3 / \Delta l$
0,1	3,8	46,2	50,0
100	8,0	71,3	20,7
200	8,8	75,5	15,7

Tabelle 4-2: Verformungsanteile

Aus den Ergebnissen kann nun an den berechneten Stellen σ_n eine punktweise lineare Steifigkeit $c_0(\sigma_n)$ ermittelt werden (Abb. 4-6). Man erkennt, dass die vergleichsweise geringe Abweichung der Arbeitslinie von einer Geraden eine ausgeprägte (degressive) Lastabhängigkeit der Federsteifigkeit zur Folge hat. Vom unbelasteten Zustand bis hin zur oberen Grenze des betrachteten Bereichs ist ein Anstieg von $c_0(0,1 \text{ MPa}) = 0,795 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ auf $c_0(200 \text{ MPa}) = 1,581 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ zu verzeichnen, was einer Zunahme um 98,9 % entspricht. Vergleicht man den mittels der Analytik (Glg. 3-14 und 3-58) errechneten, konstanten Wert von $c = 1,616 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ mit dem Simulationsergebnis, so ist zu sehen, dass der Fehler infolge der Vernachlässigung der Querschnittsverkürzung Δl_3 jenen sich durch die Annahme punktförmiger Krafteinleitung ergebenden im gesamten Bereich überwiegt. Das analytische Ergebnis stellt hier näherungsweise einen Grenzwert für sehr hohe Lasten dar.

Um aus den an einzelnen Punkten ermittelten Werten $c_0(\sigma_n)$ den Verlauf der differentiellen Federsteifigkeit berechnen zu können, muss für erstere eine Näherung durch eine geschlossene Funktion gefunden werden. Wie in Abb. 4-6 gezeigt, lässt sich mithilfe einer Potenzfunktion der Form

$$c_0(\sigma_n) = a \sigma_n^b \quad \text{Glg. 4-1}$$

eine sehr gute Approximation erzielen. Mit $a = 0,7881 \cdot 10^8$, $b = 0,1313$ und σ_n [MPa] beträgt im Nennspannungsbereich von 10 MPa bis 200 MPa der relative Fehler maximal 0,51 %. Lediglich für sehr niedrige Belastungen kann auf diese Weise das Ergebnis nicht abgebildet werden, da die Näherungsfunktion durch den Koordinatenursprung verläuft, während der tatsächliche Zusammenhang auf einen Grenzwert $\lim_{\sigma_n \rightarrow 0} c_0(\sigma_n)$ größer null zustrebt. Mit Glg. 2-4 folgt nun für die differentielle Steifigkeit im angegebenen Gültigkeitsbereich:

$$c(\sigma_n) = a(b+1) \sigma_n^b. \quad \text{Glg. 4-2}$$

Die Funktionen $c_0(\sigma_n)$ und $c(\sigma_n)$ unterscheiden sich also um den konstanten Faktor $b+1$, womit die differentiellen Werte jeweils um 13,1 % höher liegen. Analytische Berechnung und Simulationsergebnis stimmen hier etwa im mittleren Lastbereich überein.

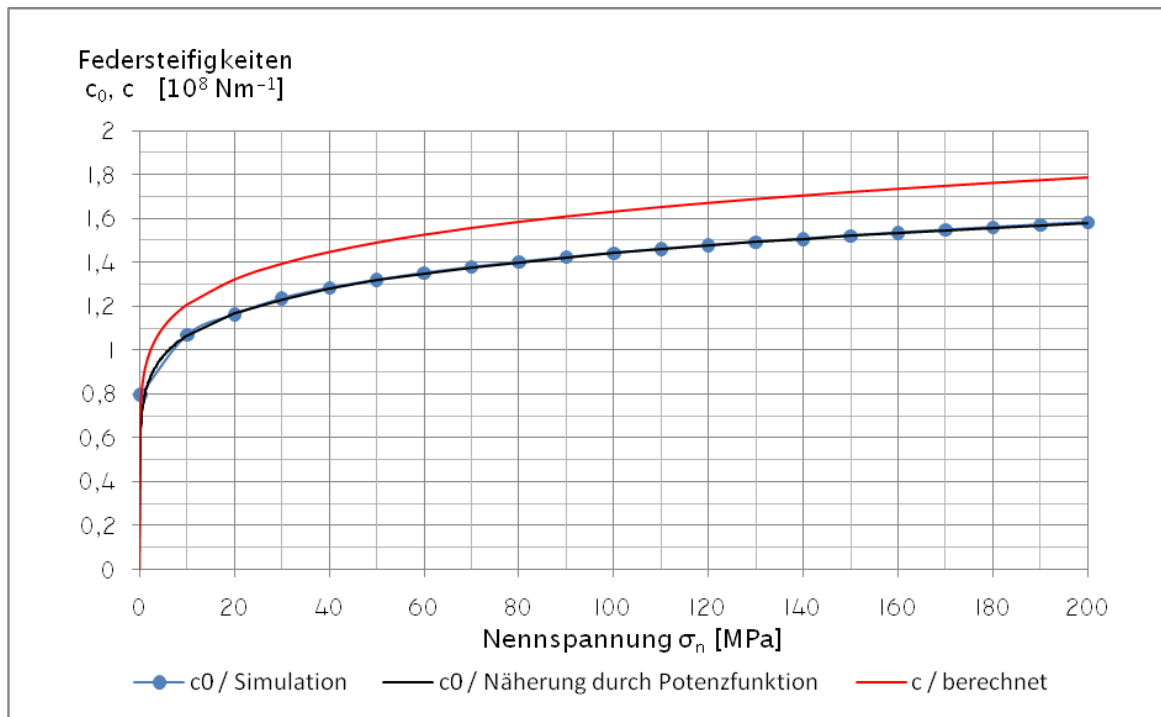


Abbildung 4-6: Federsteifigkeiten

Aufgrund der geometrischen Ähnlichkeit der in EN 818-7 definierten Kettenlieddimensionen dürfen laut Glg. 2-14 die für die Dimension 9 x 27 abgeleiteten Zusammenhänge auf diese verallgemeinert werden:

$$c_0(\sigma_n) = 8,7567 \cdot 10^9 d \sigma_n^{0,1313}; \quad \text{Glg. 4-3}$$

$$c(\sigma_n) = 9,9064 \cdot 10^9 d \sigma_n^{0,1313}. \quad \text{Glg. 4-4}$$

Damit stehen zwei einfache empirische Berechnungsformeln für Rundstahlketten mit Anforderungen und Vorzugsmaßen nach EN 818-7 zur Verfügung. Für die praktische Anwendung erscheint eine weitere Umformung sinnvoll, da i. A. die Federsteifigkeit des gesamten Strangs in Abhängigkeit der Kettenzugkraft $F_Z = 2F$ gesucht sein wird. Nach Einsetzen von Glg. 2-13 in Glg. 4-3 bzw. 4-4 erhält man mit Glg. 2-8 schließlich

$$c_{0,K}(F_Z) = \frac{1,3452 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313}}{n} \quad \text{Glg. 4-5}$$

und

$$c_K(F_Z) = \frac{1,5218 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313}}{n}. \quad \text{Glg. 4-6}$$

Infolge der stark degressiven Verläufe beider Funktionen ist bei einer Extrapolation über den untersuchten Lastbereich hinaus bis zu einer gewissen Grenze der entstehende Fehler sicherlich als gering anzunehmen. Als Gültigkeitsbereich soll daher $10 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq 300 \text{ MPa}$ festgesetzt werden.

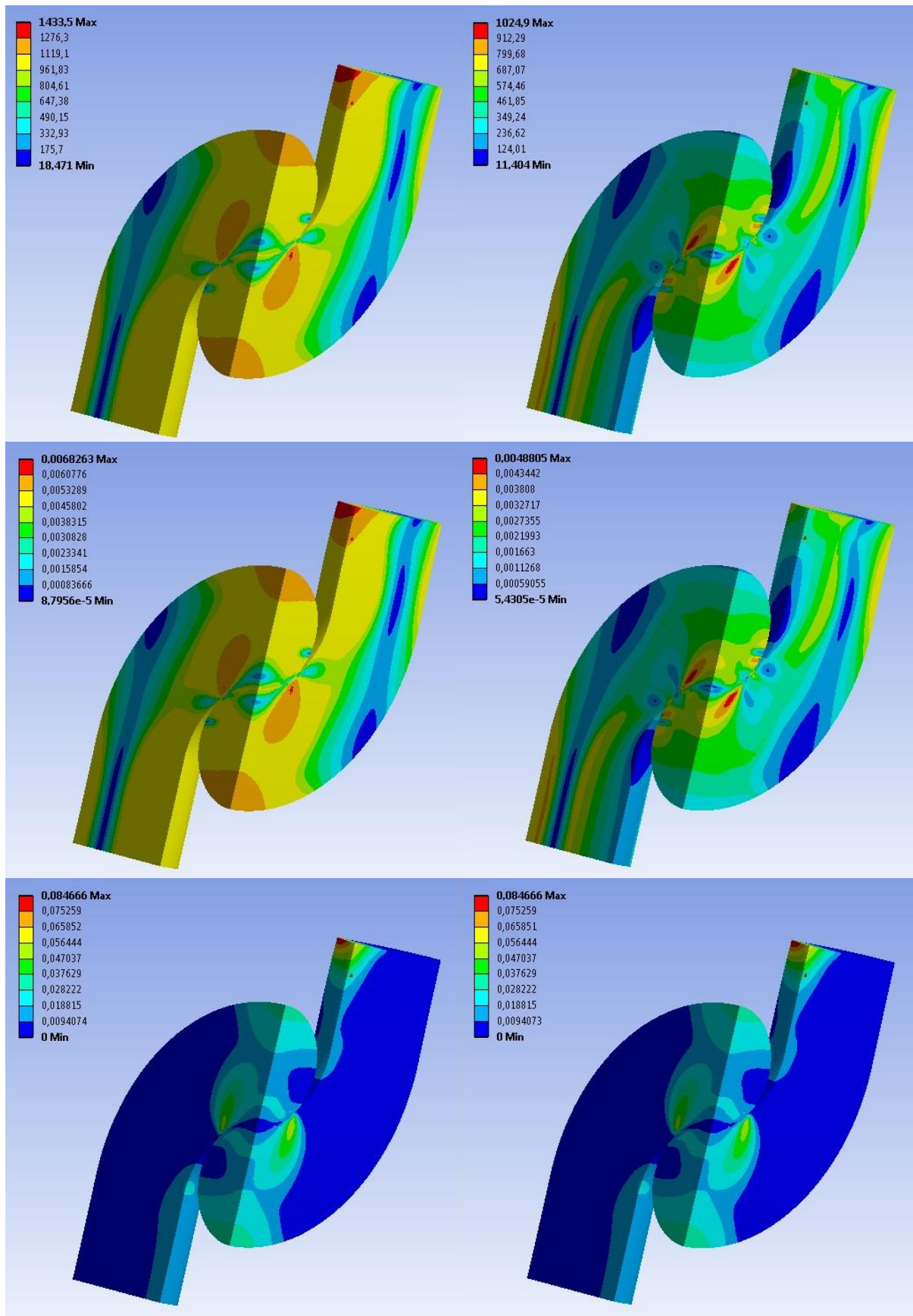


Abbildung 4-7: Ergebnisse: Spannungen und Verzerrungen

(links Seite: nach Lastschritt 20 / Kalibrierkraft, rechte Seite: nach Lastschritt 46 / max. Betriebskraft; oben: Van-Mises-Vergleichsspannungen [MPa]; Mitte: elastische Vergleichsdehnungen; unten: plastische Vergleichsdehnungen)

4.2.2 Parameterstudie

Um den Einfluss unterschiedlicher Prüfkraften und Werkstoffe auf das Steifigkeitsverhalten der kalibrierten Kette zu untersuchen, werden ausgehend vom Referenzmodell in mehreren Simulationsdurchgängen die betreffenden Parameter in den folgenden Bereichen variiert:

- Fertigungsprüfspannung $\sigma_n(F_K)$: 300.....600 MPa
- Streckgrenze $\sigma_{F,0}$: 600.....1200 MPa
- Tangentenmodul E_T : 0.....20000 MPa
- Reibungskoeffizient μ : 0.....0,2

Der vorgegebene Belastungsverlauf wird dabei zur Verkürzung der wegen der mehrfachen Nichtlinearität des Problems erheblichen Rechenzeiten geändert. Da das Verhalten bei wiederholter Belastung nach erfolgter Kalibrierung bereits vorhergesagt werden kann und anstatt der genauen Kurvenverläufe lediglich ein Vergleich an einigen Punkten benötigt wird, wird auf eine nachfolgende Belastung bei erhöhter Lastschrittweite reduziert. Die Ergebnisse der Parameterstudie sind Abb. 4-8 und Tab. 4-3 zu entnehmen.

Es wird deutlich, dass Parameteränderungen, welche eine verstärkte Plastifizierung des Materials während des Kalibrierens zur Folge haben (Erhöhung der Prüfkraft, Verringerung von Streckgrenze und Tangentenmodul), einen Anstieg der Steifigkeit bewirken. Durch die stärkere Anschmiegung der Kontaktflächen nimmt die Flächenpressung ab, während sich der Kontaktwinkel vergrößert; ersteres bedeutet eine verminderte Verformung der Querschnitte im Kontaktbereich, zweiteres infolge der geringeren Schnittmomente ein steiferes Verhalten entlang der gesamten Kettengliedmittellinie. An der näherungsweise Parallelität der Parameterlinien im Steifigkeits-Kraft-Diagramm ist zu erkennen, dass hierbei der Einfluss auf die linearen Verformungsanteile überwiegt. Ein grobes Maß für das Ausmaß der plastischen Umformung und die Lage der Kurve $c_0(\sigma_n)$ kann die bleibende Längung der Kette $(\Delta t/t)_K$ liefern.

Bezüglich der Abhängigkeiten von der Prüfspannung und dem Tangentenmodul zeigt sich, dass diese einem stark nichtlinearen Zusammenhang unterliegen. So ist bei einer Erhöhung des Tangentenmoduls von 0 (ideal-plastisches Verhalten) auf 5000 MPa keine Änderung der Federsteifigkeit zu verzeichnen, bei einer weiteren Erhöhung auf 10000 MPa hingegen eine Abnahme um bis zu 11 %. Der geringe festzustellende Unterschied bei einer Änderung der Prüfspannung im niedrigen Bereich ist auf die Vorgabe einer hohen Streckgrenze zurückzuführen. Tatsächlich steht die in der jeweiligen Norm festgelegte Kalibrierkraft in Zusammenhang mit der geforderten Festigkeit der Kette und damit mit der Fließgrenze des zu verwendenden Werkstoffs. Die Ergebnisse für reibungsbehafteten Kontakt müssen kritisch betrachtet werden: Da hier kein erkennbarer Trend vorliegt, sind numerische Rechenungenauigkeiten als wahrscheinlichste Ursache für die Abweichungen gegenüber reibungsfreiem Verhalten zu nennen, zumal die Anzahl der Kontaktelemente bedingt durch die anfänglich punktförmige Berührung und die gewählte Vernetzung relativ niedrig ist. Insgesamt zeigen die durchwegs hohen Abweichungen von der Parameterkonfiguration des Referenzmodells den beträchtlichen Einfluss des Kalibriervorgangs auf das Verformungsverhalten der Rundstahlkette auf.

Sim. Nr.	Eingangsparameter					Ergebnisse								
	$\sigma_n(F_K)$ [MPa]	$\sigma_{F,0}$ [MPa]	E_T [MPa]	μ	$c_{0,G}$ (25 MPa) [10 ⁸ Nm ⁻¹]	Abw. [%]	$c_{0,G}$ (50 MPa) [10 ⁸ Nm ⁻¹]	Abw. [%]	$c_{0,G}$ (100 MPa) [10 ⁸ Nm ⁻¹]	Abw. [%]	$c_{0,G}$ (200 MPa) [10 ⁸ Nm ⁻¹]	Abw. [%]	$(\Delta t/t)_K$ [%]	
1	500	1000	0	0	1,206	0,2	1,317	0,0	1,439	0,0	1,578	0,0	2,6	
2	500	1000	5000	0	1,203	-	1,317	-	1,439	-	1,579	-	2,6	
3	500	1000	10000	0	1,093	-11,5	1,228	-8,1	1,363	-6,0	1,505	-5,1	2,1	
4	500	1000	20000	0	1,081	-10,3	1,196	-9,2	1,315	-8,6	1,444	-8,5	1,5	
5	600	1000	0	0	1,439	19,5	1,546	17,4	1,667	15,9	1,816	15,1	5,3	
6	600	1000	5000	0	1,438	19,4	1,546	17,3	1,667	15,8	1,816	15,1	5,3	
7	600	1000	10000	0	1,284	6,7	1,404	6,6	1,531	6,4	1,673	6,0	4,0	
8	600	1000	20000	0	1,159	-3,7	1,277	-3,1	1,400	-2,7	1,533	-2,9	2,7	
9	500	600	5000	0	1,565	30,1	1,667	26,6	1,780	23,7	1,925	21,9	5,6	
10	500	1200	5000	0	1,023	-14,9	1,144	-13,1	1,270	-11,7	1,406	-10,9	1,1	
11	300	1000	5000	0	1,023	-14,9	1,134	-13,8	1,251	-13,1	1,372	-13,1	0,4	
12	400	1000	5000	0	0,996	-17,2	1,113	-15,5	1,231	-14,4	1,356	-14,1	0,5	
13	500	1000	5000	0,1	1,158	-3,8	1,277	-3,1	1,405	-3,2	1,558	-1,3	2,6	
14	500	1000	5000	0,2	1,404	16,7	1,411	7,2	1,482	3,0	1,598	1,2	2,6	

Tabelle 4-3: Ergebnisse der Parameterstudie

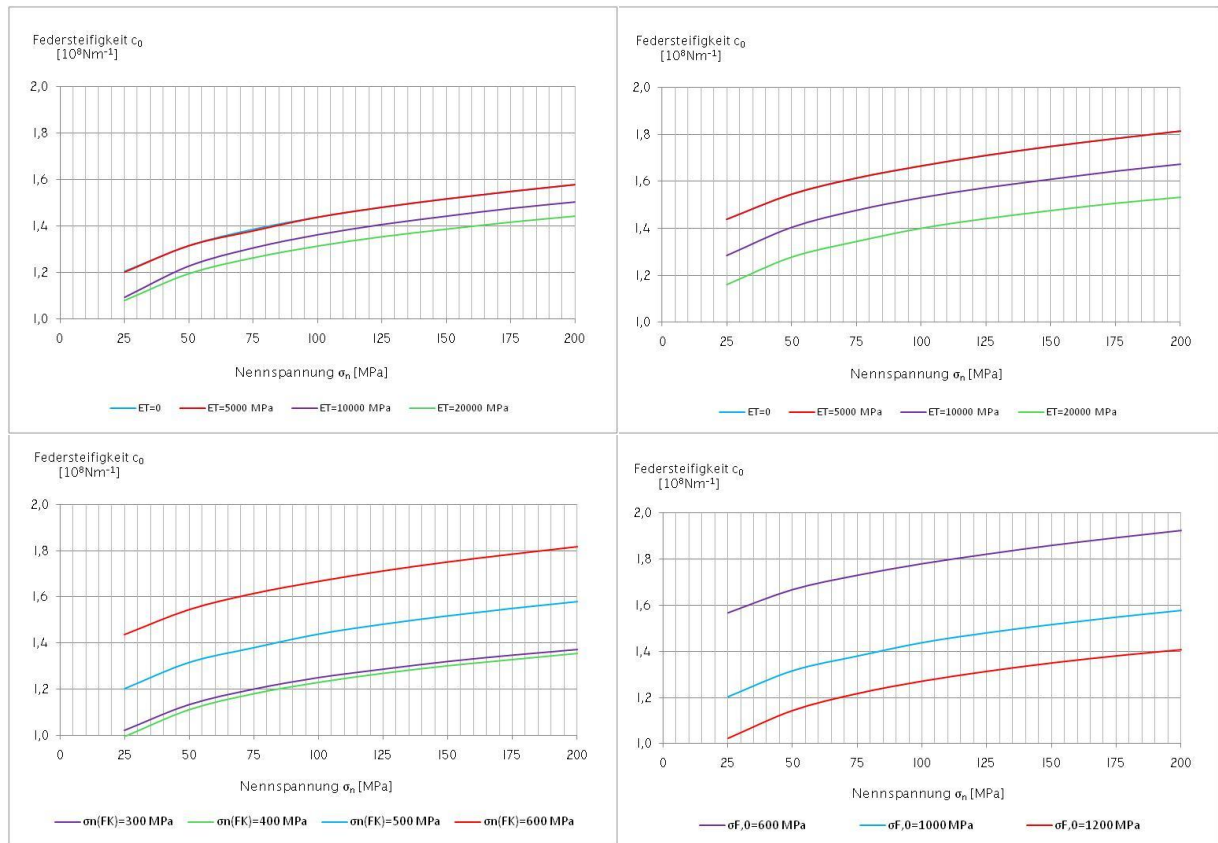


Abbildung 4-8: Parametervariationen

(links oben: Variation des Tangentenmoduls bei $\sigma_n(F_K) = 500 \text{ MPa}$; rechts oben: Variation des Tangentenmoduls bei $\sigma_n(F_K) = 600 \text{ MPa}$; links unten: Variation der Prüfkraft; rechts unten: Variation der Streckgrenze)

Angesichts der ausgeprägten Abhängigkeit der Federsteifigkeit von den mechanischen Einflussgrößen erscheint die Aufstellung eines durchgängigen Berechnungsmodells, welches für beliebige Werkstoffe und Prüfkräfte Gültigkeit besitzt, nicht möglich. Im Folgenden soll sich deshalb die Betrachtung auf hochfeste Ketten beschränken, welche durch den Bereich

- Prüfspannung $\sigma_n(F_K)$: 500.....600 MPa
- Streckgrenze $\sigma_{F,0}$: 1000.....1200 MPa
- Tangentenmodul E_T : 0.....20000 MPa

eingegrenzt werden können. Um Hebezeugketten mit mechanischen Anforderungen nach EN 818-7, denen das zentrale Interesse gilt, mit größtmöglicher Genauigkeit abzubilden, sollen diese mit der Ausgangskonfiguration ($\sigma_n(F_K) = 500 \text{ MPa}$; $\sigma_{F,0} = 1000 \text{ MPa}$; $E_T = 5000 \text{ MPa}$; $\mu = 0$) modelliert werden. Zuzufolge der Ergebnisse für die Dimension 9 x 27 ist damit für den gesamten Definitionsbereich in Bezug auf die Steifigkeit c_0 von einem maximalen Fehler von etwa 20 % auszugehen.

4.3 Empirische Berechnung hochfester Ketten

Unter Konstanthaltung der mechanischen Parameter des Simulationsmodells sollen nun die geometrischen Parameter e/r und s/r mittels systematischer Kombination von Werten verändert und daraus ein Berechnungsverfahren für hochfeste Rundstahlketten beliebiger Geometrie entwickelt werden. Hierzu müssen nach Durchsicht der betreffenden Normen zunächst die zu untersuchenden Parameterbereiche definiert werden. Weil den Gruppen der Hebezeugketten und Förderketten jeweils typische Geometriebereiche zugeordnet werden können, wird dabei eine Fallunterscheidung getroffen:

- Langgliedrige Förderketten: e/r : 0,43.....0,47; s/r : 0,95.....1,20
- Kurzgliedrige Hebezeugketten: e/r : 0,40.....0,44; s/r : 0,55.....0,85

Dadurch kann der betrachtete Bereich eingeeengt und damit die erreichbare Genauigkeit für eine Abbildung der Ergebnisse durch einen empirischen Berechnungsansatz erhöht werden. Für jeden der beiden Geometriefälle werden zehn Kombinationen der Parameter simuliert, die sich durch Bildung einer Matrix aus fünf verschiedenen Werten für e/r und der oberen und unteren Grenze von s/r ergeben (Tab. 4-4 und 4-5). Um den (bereits bekannten) Größeneinfluss von der Betrachtung auszuschließen, sind die absoluten Maße der Dimensionen durch Vorgabe eines konstanten Wertes für eine beliebige Abmessung festzulegen; hierfür wird $d = 10$ mm gesetzt. Alle weiteren Abmessungen können nun aus Glg. 2-17 bis 2-19 bestimmt werden.

e/r	s/r	d [mm]	t [mm]	$(w_i+w_a)/2$ [mm]
0,43	0,95	10	35,33	23,25
0,43	1,20	10	41,15	23,25
0,44	0,95	10	34,30	22,72
0,44	1,20	10	39,99	22,72
0,45	0,95	10	33,33	22,22
0,45	1,20	10	38,89	22,22
0,46	0,95	10	32,37	21,73
0,46	1,20	10	37,81	21,73
0,47	0,95	10	31,47	21,27
0,47	1,20	10	36,80	21,27

Tabelle 4-4: Simulationsmatrix / Langgliedrige Förderketten

e/r	s/r	d [mm]	t [mm]	$(w_i+w_a)/2$ [mm]
0,40	0,55	10	28,75	25,00
0,40	0,85	10	36,25	25,00
0,41	0,55	10	27,80	24,39
0,41	0,85	10	35,13	24,39
0,42	0,55	10	26,89	23,80
0,42	0,85	10	34,03	23,80
0,43	0,55	10	26,03	23,25
0,43	0,85	10	33,03	23,25
0,44	0,55	10	25,21	22,72
0,44	0,85	10	32,04	22,72

Tabelle 4-5: Simulationsmatrix / Kurzgliedrige Hebezeugketten

Zum Zwecke einer Validierung der angegebenen Berechnungsverfahren anhand der am häufigsten eingesetzten Geometrien werden weiters sämtliche Dimensionen nach DIN 22252 (Förderketten) und DIN 5684 (Hebezeugketten) simuliert. Aufgrund dieses hohen Simulationsumfangs muss zur Verringerung der Rechenzeiten gegenüber dem Basismodell die Netzfeinheit reduziert werden. Das Netz wird nun aus ca. 15.000 Elementen je Achtelglied (insgesamt 130.000 Knoten) gebildet. Verglichen mit der höchsten verfügbaren Auflösung ergibt sich durch die um den Faktor 1,9 gröbere Vernetzung ein vertretbarer Fehler, welcher etwa bei der Dimension 9 x 27 EN 818-7 für die berechneten Steifigkeitswerte $c_0(\sigma_n)$ 0,5 % nicht übersteigt.

4.3.1 Langgliedrige Förderketten

Der hier vorgestellte Berechnungsansatz geht wiederum von dem in Kap. 4.2.1 abgeleiteten Zusammenhang Glg. 4-1 aus, welcher sich, wie das Ergebnis zeigen wird, für beliebige Kettengliedgeometrien des untersuchten Bereichs bestätigt. Zur Bestimmung der beiden Konstanten der Approximationsfunktion wird die Längung Δl an zwei Stellen σ_n benötigt. Hierfür erweist es sich als zweckmäßig, die Punkte $\sigma_n = 100 \text{ MPa}$ und $\sigma_n = 200 \text{ MPa}$ auszuwählen. Da die beiden Teilverformungen $\Delta l_{1,2}$ und Δl_3 eine unterschiedlich ausgeprägte Lastabhängigkeit aufweisen, sollen diese getrennt behandelt und die Ergebnisse anschließend addiert werden.

Für die Berechnung von $\Delta l_{1,2}$ steht mit Glg. 3-32 eine analytische Beziehung zur Verfügung, welche durch den freien Parameter α eine Anpassung an das Simulationsergebnis ermöglicht. Ermittelt man die zu den Ergebnissen gehörenden rechnerischen Kontaktwinkel (Tab. 4-6), so ist festzustellen, dass diese bei beiden Lastpunkten nur in geringem Maße voneinander abweichen. Es wird daher vorgeschlagen, die gemittelten Werte $\bar{\alpha}$ heranzuziehen:

$$\bar{\alpha} (100 \text{ MPa}) = 0,4054 \text{ rad}; \quad \text{Glg. 4-7}$$

$$\bar{\alpha} (200 \text{ MPa}) = 0,4854 \text{ rad}. \quad \text{Glg. 4-8}$$

Die Berechnung von Δl_3 basiert auf der Überlegung, da es sich um eine lokale Verformung in der Mitte des Bugs handelt, dass diese durch das Verhältnis s/r nicht maßgeblich beeinflusst wird. Die auf die Ausgangslänge bezogene Querschnittsänderung $\Delta l_3/e$ ist dann eine alleinige Funktion des Parameters e/r . Am Zusammenfallen der Ergebnisse für Dimensionen mit unterschiedlichen Werten von s/r im entsprechenden Diagramm (Abb. 4-9) ist zu sehen, dass diese Annahme zutreffend ist und überdies der Zusammenhang mit guter Näherung durch eine lineare Ausgleichsfunktion beschrieben werden kann. Auf diese Weise erhält man

$$\frac{\Delta l_3}{e} (100 \text{ MPa}) = 0,019151 \frac{e}{r} - 0,006224 \quad \text{Glg. 4-9}$$

und

$$\frac{\Delta l_3}{e} (200 \text{ MPa}) = 0,022971 \frac{e}{r} - 0,007128. \quad \text{Glg. 4-10}$$

Größe	$\Delta l_{1,2}$ (100 MPa)	α (100 MPa)	$\Delta l_{1,2}$ (200 MPa)	α (200 MPa)	Δl_3 (100 MPa)	$\Delta l_3/e$ (100 MPa)	Δl_3 (200 MPa)	$\Delta l_3/e$ (200 MPa)
Einheit	[10 ⁻⁵ m]	[°]	[10 ⁻⁵ m]	[°]	[10 ⁻⁵ m]	[10 ⁻³]	[10 ⁻⁵ m]	[10 ⁻³]
10 x 31,47	3,527	22,43	6,809	27,38	1,389	2,778	1,841	3,681
10 x 32,37	3,683	22,78	7,121	27,46	1,270	2,540	1,701	3,401
10 x 33,33	3,860	22,92	7,478	27,32	1,190	2,380	1,604	3,208
10 x 34,30	4,041	23,26	7,833	27,54	1,075	2,150	1,465	2,929
10 x 35,33	4,233	23,82	8,218	27,83	1,013	2,026	1,393	2,785
10 x 36,80	3,775	22,54	7,283	27,80	1,403	2,806	1,845	3,690
10 x 37,81	3,938	22,97	7,616	27,83	1,298	2,596	1,722	3,444
10 x 38,89	4,121	23,28	7,978	27,94	1,233	2,466	1,634	3,268
10 x 39,99	4,305	23,88	8,345	28,29	1,083	2,166	1,465	2,929
10 x 41,15	4,509	24,40	8,740	28,74	1,025	2,050	1,389	2,779
Mittelwert	-	23,229	-	27,813	-	-	-	-

Tabelle 4-6: Ergebnisse der Simulationsreihe / Förderketten

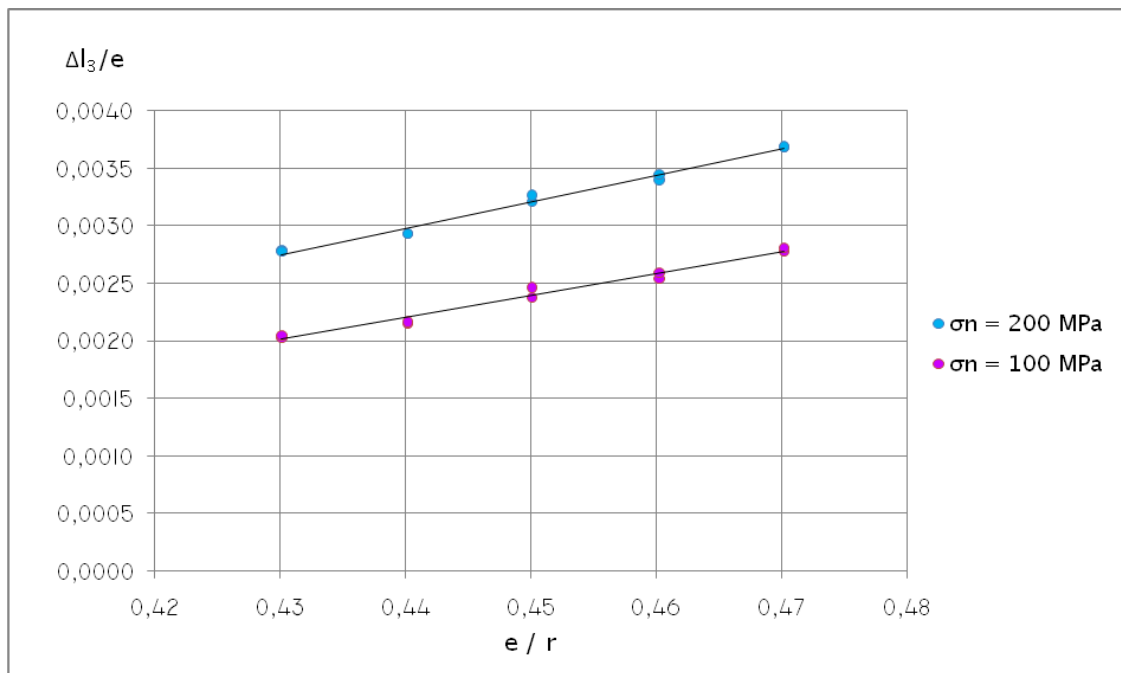


Abbildung 4-9: Ermittlung der Näherungsfunktion für Δl_3 / Förderketten

Nach Umformung von Glg. 4-9 bzw. 4-10 und Addition der beiden Verformungsanteile folgt für die gesamte Längenänderung:

$$\Delta l(100) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4054) + 0,00478775 \frac{d^2}{r} - 0,003112d ; \quad \text{Glg. 4-11}$$

$$\Delta l(200) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4854) + 0,00574275 \frac{d^2}{r} - 0,003564d . \quad \text{Glg. 4-12}$$

Setzt man die empirische Relation für $c_0(\sigma_n)$ mit der Definition Glg. 2-2 gleich,

$$a \sigma_n^b = \frac{\sigma_n A}{\Delta l(\sigma_n)}, \quad \text{Glg. 4-13}$$

so liegen durch die nach Glg. 4-11 und 4-12 berechneten Werte Δl zwei Gleichungen vor, aus denen die Unbekannten a und b ermittelt werden können:

$$b = \frac{\ln\left(2 \cdot \frac{\Delta l(100)}{\Delta l(200)}\right)}{\ln 2}, \quad \text{Glg. 4-14}$$

$$a = \frac{100^{4-b} \cdot A}{\Delta l(100)}. \quad \text{Glg. 4-15}$$

Tab. 4-8 gibt eine Auflistung der nach obigen Gleichungen berechneten Konstanten für die in DIN 22252 definierten Geometrien sowie der relativen Fehlerwerte, die sich gegenüber den Simulationen ergeben. Für den Bereich $10 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq 200 \text{ MPa}$ beträgt die durchschnittliche Abweichung 0,37 %. Dieser Fehler darf in Anbetracht des Genauigkeitsanspruchs, welcher infolge der Festlegung der mechanischen Eingangsparameter des Modells an die Berechnung gestellt werden kann, als vernachlässigbar betrachtet werden. Aus diesem Grund hat das Berechnungsmodell auch für langgliedrige Ketten mit vom Definitionsbereich abweichenden Geometrien eingeschränkte Gültigkeit. Entsprechend den Erläuterungen in Kap. 4.2 wird der Gültigkeitsbereich mit $500 \text{ MPa} \leq \sigma_n(F_K) \leq 600 \text{ MPa}$ und $10 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq 300 \text{ MPa}$ angegeben.

Die differentielle Federsteifigkeit $c(\sigma_n)$ wird wiederum nach Glg. 4-2 berechnet; für die Ermittlung der Kettendehnung zwischen zwei beliebigen Lastniveaus aus $c(\sigma_{n,1}; \sigma_{n,2})$ ist Glg. 2-5 anzuwenden.

4.3.2 Kurzgliedrige Hebezeugketten

Eine völlig analoge Vorgehensweise wie in Kap. 4.3.1 führt mit den Ergebnissen aus Tab. 4-7 auf

$$\Delta l(100) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4165) + 0,00239175 \frac{d^2}{r} - 0,0010555d \quad \text{Glg. 4-16}$$

und

$$\Delta l(200) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4838) + 0,00350625 \frac{d^2}{r} - 0,0016335d. \quad \text{Glg. 4-17}$$

Bei der Validierung der Gleichungen für die kurzgliedrige Kette anhand der Geometrien nach DIN 5684 in Tab. 4-9 sind bei einem mittleren Wert von 0,70 % vergleichsweise höhere Abweichungen zu konstatieren. Diese resultieren aus der größeren Streuung der Rechengröße α bei niedrigeren Werten von e/r und s/r . Dennoch ist mit dem hier angegebenen Berechnungsmodell für die hochfeste Hebezeugkette i. A. eine genauere Nachbildung des realen Verhaltens im Vergleich zur Förderkette zu erwarten; zum einen, weil für erstere die in EN 818-7 festgelegte Prüfspannung von $\sigma_n(F_K) = 500 \text{ MPa}$ bindend ist, und zum anderen, weil die hohe Übereinstimmung mit den in Kap. 5.4 angeführten Vergleichsmessungen darauf schließen lässt, dass für diese die gewählten Werk-

stoffparameterwerte ein zutreffendes Verformungsbild nach dem Kalibriervorgang erzeugen.

Größe	$\Delta l_{1,2}$ (100 MPa)	α (100 MPa)	$\Delta l_{1,2}$ (200 MPa)	α (200 MPa)	Δl_3 (100 MPa)	$\Delta l_3/e$ (100 MPa)	Δl_3 (200 MPa)	$\Delta l_3/e$ (200 MPa)
Einheit	[10 ⁻⁵ m]	[°]	[10 ⁻⁵ m]	[°]	[10 ⁻⁵ m]	[10 ⁻³]	[10 ⁻⁵ m]	[10 ⁻³]
10 x 25,21	3,538	22,57	6,862	26,48	1,049	2,098	1,453	2,906
10 x 26,03	3,715	22,87	7,210	26,67	0,973	1,946	1,359	2,717
10 x 26,89	3,904	23,24	7,577	26,99	0,930	1,859	1,295	2,590
10 x 27,80	4,106	23,85	7,973	27,48	0,902	1,805	1,245	2,491
10 x 28,75	4,320	24,55	8,386	28,15	0,837	1,674	1,156	2,312
10 x 32,04	3,925	23,11	7,612	27,25	1,086	2,171	1,487	2,973
10 x 33,02	4,116	23,54	7,990	27,51	0,993	1,986	1,371	2,742
10 x 34,03	4,318	24,06	8,372	28,12	0,967	1,933	1,317	2,635
10 x 35,13	4,532	24,94	8,795	28,79	0,905	1,810	1,239	2,478
10 x 36,25	4,755	25,93	9,222	29,75	0,897	1,793	1,202	2,404
Mittelwert	-	23,866	-	27,719	-	-	-	-

Tabelle 4-7: Ergebnisse der Simulationsreihe / Hebezeugketten

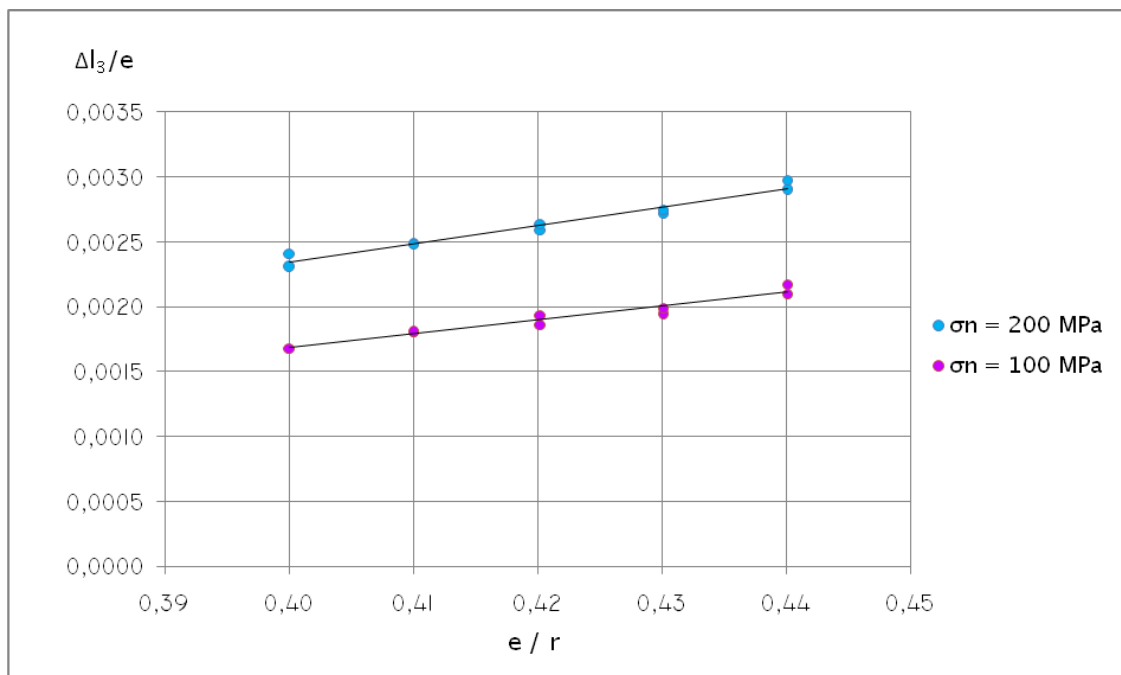


Abbildung 4-10: Ermittlung der Näherungsfunktion für Δl_3 / Hebezeugketten

Dimension	14 x 50	18 x 64	19 x 64,5	22 x 86	24 x 86	24 x 87,5	26 x 92	30 x 108	34 x 126	38 x 137	42 x 152
e/r	0,431	0,444	0,447	0,444	0,449	0,449	0,452	0,458	0,463	0,466	0,469
s/r	0,969	1,025	0,965	1,182	1,056	1,084	1,052	1,107	1,177	1,147	1,168
a [10 ⁶] (ber.)	1,1344	1,3802	1,4483	1,6669	1,8060	1,8024	1,9285	2,1637	2,3954	2,6376	2,8731
b (ber.)	0,1322	0,1478	0,1530	0,1433	0,1521	0,1513	0,1568	0,1626	0,1663	0,1720	0,1752
σ_n [MPa]	Abweichungen Berechnung / Simulation für $c_0(\sigma_n)$ [%]										
0,1	-21,19	-3,51	0,56	-14,87	1,25	-15,62	0,00	-9,49	-11,85	-9,22	-25,20
10	-2,59	-0,91	-0,17	-1,50	-0,50	-1,85	0,22	1,13	1,22	-0,55	-0,69
20	-0,88	0,15	-0,42	-1,49	-0,83	-0,56	0,81	1,27	2,23	-0,69	-0,85
30	-1,55	-1,20	-0,90	-1,58	-0,91	-1,59	-0,57	-0,02	0,36	-0,62	-0,78
40	-1,10	-1,00	-0,77	-1,39	-0,74	-1,31	-0,51	-0,04	0,26	-0,09	-0,69
50	-0,76	-0,82	-0,63	-1,16	-0,67	-1,18	-0,40	-0,07	0,28	-0,34	-0,28
60	-0,59	-0,69	-0,45	-1,00	-0,48	-0,95	-0,37	-0,08	0,27	-0,17	-0,41
70	-0,47	-0,52	-0,35	-0,83	-0,38	-0,79	-0,26	-0,03	0,21	-0,35	-0,32
80	-0,33	-0,43	-0,19	-0,68	-0,29	-0,63	-0,19	0,06	0,21	-0,25	-0,24
90	-0,19	-0,29	-0,12	-0,60	-0,21	-0,49	-0,10	0,08	0,22	-0,17	-0,16
100	-0,06	-0,18	-0,01	-0,51	-0,12	-0,44	-0,01	0,10	0,24	0,02	-0,12
110	0,03	-0,11	0,16	-0,46	-0,08	-0,33	0,04	0,11	0,24	-0,17	-0,07
120	0,09	-0,01	0,11	-0,40	0,02	-0,27	0,09	0,16	0,26	-0,15	-0,11
130	0,13	-0,02	0,20	-0,31	0,01	-0,25	0,11	0,17	0,26	-0,13	-0,07
140	0,17	0,02	0,23	-0,29	0,04	-0,19	0,11	0,17	0,23	-0,09	-0,08
150	0,22	0,08	0,24	-0,28	0,08	-0,16	0,13	0,15	0,23	-0,12	-0,10
160	0,22	0,02	0,27	-0,27	0,07	-0,17	0,12	0,14	0,18	-0,13	-0,09
170	0,23	0,03	0,29	-0,29	0,07	-0,19	0,12	0,14	0,16	-0,14	-0,13
180	0,19	0,04	0,29	-0,31	0,07	-0,21	0,14	0,14	0,14	-0,21	-0,20
190	0,15	0,06	0,29	-0,34	0,12	-0,24	0,15	0,13	0,10	-0,23	-0,22
200	0,12	0,07	0,32	-0,39	0,07	-0,30	0,12	0,09	0,09	-0,25	-0,21

Tabelle 4-8: Gegenüberstellung von Berechnung und Simulation anhand der Geometrien nach DIN 22252

Dimension	4 x 12	5 x 15	5 x 18,5	6 x 18	6 x 18,5	7 x 21	7 x 22	8 x 24	9 x 27	10 x 28	11 x 31	13 x 36	14 x 41	16 x 45	18 x 50
e/r	0,428	0,437	0,437	0,438	0,438	0,438	0,438	0,437	0,437	0,435	0,435	0,435	0,435	0,435	0,426
s/r	0,711	0,747	1,052	0,752	0,788	0,750	0,813	0,749	0,748	0,652	0,660	0,639	0,708	0,658	0,608
a [10 ⁸] (ber.)	0,3492	0,4352	0,4211	0,5220	0,5198	0,6091	0,6048	0,6962	0,7833	0,8802	0,9673	1,1461	1,2240	1,4074	1,5921
b (ber.)	0,1294	0,1338	0,1249	0,1345	0,1333	0,1342	0,1322	0,1341	0,1339	0,1359	0,1357	0,1364	0,1339	0,1357	0,1316
Abweichungen Berechnung / Simulation für $c_0(\sigma_n)$ [%]															
σ_n [MPa]															
0,1	-17,48	-34,85	-3,48	-32,28	-45,89	-7,05	-18,86	-28,80	-27,64	-26,25	26,61	-24,32	-41,59	-35,99	-35,30
10	-2,31	0,75	2,92	0,89	0,70	1,33	1,21	0,90	0,56	-0,53	-1,45	-0,52	0,33	-0,54	-1,15
20	-0,92	1,44	3,19	1,77	1,67	1,74	1,93	1,51	1,33	0,20	-0,33	-0,69	0,95	-0,69	-0,52
30	-1,34	0,40	1,22	0,52	0,76	0,69	0,89	0,59	0,39	-0,56	-0,95	-0,22	0,23	-0,02	-1,63
40	-0,97	0,50	1,13	0,42	0,69	0,79	0,77	0,78	0,55	-0,21	-0,49	-0,42	0,34	-0,16	-1,52
50	-0,71	0,57	1,09	0,47	0,76	0,69	0,85	0,58	0,53	0,03	-0,50	-0,12	0,35	-0,09	-1,45
60	-0,42	0,70	1,05	0,53	0,84	0,82	0,90	0,67	0,67	-0,10	-0,30	-0,05	0,49	0,07	-1,38
70	-0,24	0,86	0,98	0,58	0,76	0,82	0,82	0,79	0,77	0,04	-0,14	0,12	0,51	0,18	-1,36
80	-0,13	0,85	0,98	0,54	0,79	0,98	0,87	0,81	0,86	0,11	-0,03	0,20	0,56	0,25	-1,30
90	-0,03	0,85	0,89	0,62	0,80	0,95	0,85	0,81	0,88	0,25	0,12	0,37	0,61	0,36	-1,27
100	0,06	0,90	0,89	0,64	0,83	0,96	0,88	0,84	0,91	0,31	0,21	0,44	0,66	0,44	-1,19
110	0,14	0,88	0,77	0,63	0,89	0,94	0,93	0,82	0,95	0,33	0,25	0,48	0,71	0,55	-1,22
120	0,15	0,88	0,69	0,64	0,85	0,92	0,89	0,81	0,90	0,41	0,38	0,56	0,72	0,58	-1,26
130	0,15	0,90	0,67	0,61	0,83	0,90	0,86	0,80	0,90	0,46	0,36	0,53	0,72	0,67	-1,26
140	0,15	0,86	0,62	0,59	0,82	0,88	0,83	0,78	0,89	0,42	0,40	0,56	0,73	0,57	-1,29
150	0,18	0,81	0,58	0,57	0,80	0,83	0,78	0,74	0,83	0,47	0,42	0,57	0,70	0,59	-1,32
160	0,18	0,80	0,49	0,57	0,74	0,82	0,73	0,73	0,79	0,49	0,46	0,58	0,70	0,64	-1,32
170	0,19	0,72	0,45	0,54	0,71	0,82	0,69	0,72	0,74	0,48	0,47	0,52	0,70	0,62	-1,36
180	0,19	0,69	0,38	0,51	0,65	0,77	0,64	0,69	0,69	0,48	0,47	0,49	0,68	0,62	-1,38
190	0,18	0,64	0,27	0,46	0,62	0,75	0,58	0,67	0,66	0,47	0,47	0,47	0,65	0,61	-1,41
200	0,18	0,60	0,18	0,44	0,57	0,71	0,56	0,63	0,61	0,46	0,45	0,46	0,65	0,59	-1,44

Tabelle 4-9: Gegenüberstellung von Berechnung und Simulation anhand der Geometrien nach DIN 5684

5 Experimentelle Ermittlung

Der experimentelle Teil der Arbeit dient der Verifikation der in Kap. 4 abgeleiteten empirischen Gleichungen sowie der Untersuchung des Verschleißeinflusses. Er umfasst die Bestimmung der differentiellen Federsteifigkeit dreier Rundstahlketten EN 818-7-DAT-9 x 27 an fünf Lastpunkten mittels Ausschwingversuchen. Bei den geprüften Ketten handelt es sich um Exemplare des Modells Pewag HE G80-RAS, welche in unterschiedlichem Verschleißzustand vorliegen: fabriksneuer Zustand, 1 % und 2 % gleichmäßiger Teilungsverschleiß. Die beiden letztgenannten Ketten wurden an einem Dauerprüfstand der Fa. Pewag einer gezielten Behandlung unterworfen. Die Messungen wurden an einem bereits vorhandenen Versuchsstand des Instituts für Technische Logistik der TU Graz durchgeführt, dessen Komponenten im Rahmen vorangegangener Projekte gefertigt worden waren. Eine Beschreibung des konstruktiven Aufbaus und der verwendeten Messmittel findet sich in Kap. 5.2.

5.1 Messkonzept

Zur experimentellen Bestimmung der Federkennwerte von Bauteilen kommen i.A. zwei Methoden in Betracht. Üblicherweise führt diese über einen Zug- bzw. Druckversuch und die Auswertung der daraus erhaltenen Arbeitslinie. Für Objekte mit geringer Eigenmasse, deren Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Länge klein sind (Ketten, Seile etc.), und deren Steifigkeit bei Zugbelastung gesucht ist, eignet sich als alternative Bestimmungsmethode ein Ausschwingversuch. Dabei wird ein Ende des Bauteils fest eingespannt, das andere Ende mit einem Prüfgewicht versehen, und das daraus gebildete Einmassenschwingsystem durch Auslenkung in Längsrichtung zur Eigenschwingung angeregt. Über die Bewegungsgleichung kann aus der Schwingfrequenz die Federsteifigkeit errechnet werden. Dieses Messkonzept kommt vorwiegend dann zur Anwendung, wenn zugleich das Dämpfungsverhalten erfasst werden soll. Obgleich das Verfahren bei Problemstellungen, bei denen eine Lastabhängigkeit berücksichtigt werden muss, aufgrund der erforderlichen Variation des Gewichts den Nachteil eines höheren Versuchsaufwands mit sich bringt, ergeben sich gegenüber dem Zugversuch entscheidende Vorteile hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit, weshalb ihm hier der Vorzug gegeben wird. Diese bestehen zum einen darin, dass beim Ausschwingversuch die Steifigkeit an einem näherungsweise konstanten Lastniveau, also ein differentieller Steifigkeitswert, gemessen wird, wenn die Schwankungen durch die dynamischen Kräfte gegenüber der Gewichtskraft als klein gelten dürfen; dies ist bei einer Aufnahme der Bewegungsgrößen über eine hinreichend lange Zeitspanne und dem Heranziehen der gemittelten Frequenz aufgrund des Abklingens der Schwingung (infolge von Reibungsvorgängen und Werkstoffdämpfung) zumeist der Fall. Eine exakte Ermittlung punktueller Werte mittels Zugversuch stellt hingegen außerordentlich hohe Anforderungen an die Präzision von Messung und Auswertung. Zum anderen können in Zugprüfmaschinen bei Messwegen im Bereich von 1 m lediglich sehr geringe Prüflängen untersucht werden, wodurch

sich die Nachgiebigkeit der Einspannung in höherem Maße auf das Ergebnis auswirkt. Eine vergleichende Ermittlung der Federsteifigkeit einer Rundstahlkette nach beiden Methoden beinhalten die Arbeiten von Sebulke [Lit. 2] und Landschützer [Lit. 6, S.116-121].

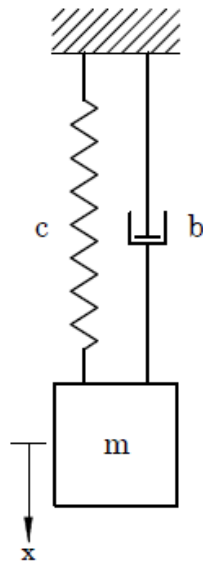


Abb. 5-1: Modell des Einmassenschwingers

Das maschinendynamische Modell der Versuchsanordnung bildet der freie, gedämpfte Einmassenschwinger (Abb. 5-1). Bei Annahme konstanter, geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung (diese Voraussetzung trifft, wie aus den Messergebnissen hervorgeht, nicht tatsächlich zu, und gilt deshalb nur für die nachfolgenden abschätzenden Überlegungen) und Zählung der Längenkoordinate von der statischen Gleichgewichtslage lautet dessen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0. \quad \text{Glg. 5-1}$$

Als Messgröße dient die Beschleunigung des Massekörpers. Für diese folgt aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung für den schwach gedämpften Fall (Dämpfungsgrad $D < 1$),

$$x(t) = Ce^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t - \gamma), \quad \text{Glg. 5-2}$$

durch zweimaliges Ableiten:

$$\ddot{x}(t) = Ce^{-\frac{b}{2m}t} \left[\left(\frac{b^2}{4m^2} - \omega^2 \right) \cos(\omega t - \gamma) + \frac{b\omega}{2m} \sin(\omega t - \gamma) \right] = \bar{C}e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t - \bar{\gamma}),$$

Glg. 5-3

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad \text{Glg. 5-4}$$

[Lit. 34, S.232-242]. Anhand von Anhaltswerten aus vergleichbaren Versuchen kann gezeigt werden, dass im vorliegenden Fall der Dämpfungsterm in Glg. 5-4 zu vernachlässigen ist. Landschützer ermittelt für eine Kette der Dimension 9 x 27 bei einer Kettenlänge von $l_k = 5,5$ m und einer Gewichtsbelastung von $m = 1666$ kg eine Federkonstante von $c = 8,13 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-1}$, sowie eine Dämpfungskonstante von $b = 150 \text{ Nsm}^{-1}$ [Lit. 6, S.119]. Die Versuchsparameter entsprechen in etwa jenen der Punkte 1 bis 3 der Messreihe (siehe Tab. 5-3). Stellt man die damit berechneten Werte für die Eigenfrequenzen des gedämpften (f) und des ungedämpften Systems $f_0 = f(b=0)$ einander gegenüber, so ergibt sich eine relative Abweichung von $(f_0 - f)/f = 2,1 \cdot 10^{-6}$. Folglich ist es zulässig, die Federsteifigkeit nach der Beziehung für den ungedämpften Einmassenschwinger zu bestimmen:

$$f \approx f_0 = \frac{\sqrt{c}}{2\pi\sqrt{m}} \rightarrow c = 4\pi^2 f^2 m. \quad \text{Glg. 5-5}$$

Die Steifigkeit des Gesamtsystems c setzt sich aus den seriell angeordneten Steifigkeiten des Kettenstrangs $c_K = n c_G$ sowie der Aufhängung und der Einspannvorrichtungen zusammen. Werden letztere durch eine Größe c_A zusammengefasst, so gilt gemäß Glg. 2-9 der Ansatz

$$c = \frac{1}{\frac{n}{c_G} + \frac{1}{c_A}}. \quad \text{Glg. 5-6}$$

Umgeformt ist die Federsteifigkeit eines einzelnen Kettenglieds

$$c_G = \frac{n}{\frac{1}{c} - \frac{1}{c_A}} = \frac{n}{\frac{1}{4\pi^2 f^2 m} - \frac{1}{c_A}}. \quad \text{Glg. 5-7}$$

Die Elastizität der Einspannung kann durch Variation der Kettenlänge wie folgt bestimmt werden:

$$c_1 = \frac{1}{\frac{n_1}{c_G} + \frac{1}{c_A}}; \quad c_2 = \frac{1}{\frac{n_2}{c_G} + \frac{1}{c_A}} \rightarrow c_A = \frac{n_1 - n_2}{\frac{n_1}{c_2} - \frac{n_2}{c_1}} = \frac{4\pi^2 m (n_1 - n_2)}{\frac{n_1}{f_2^2} - \frac{n_2}{f_1^2}}. \quad \text{Glg. 5-8}$$

Bei der Ermittlung der Gewichtslast, die mit der mittleren Kettenzugkraft während des Ausschwingvorgangs gleichzusetzen ist,

$$F_Z = mg, \quad \text{Glg. 5-9}$$

müssen sämtliche vorhandenen Zusatzmassen berücksichtigt werden. Diese umfassen die Masse des unteren Einlegeteils, des Schlagholzes und der auf dem Prüfgewicht abgelegten Restkette. Zusätzlich werden die Glieder des Kettenstrangs im Mittel durch dessen halbes Eigengewicht belastet. Die Gesamtmasse ist daher anzusetzen mit

$$m = m_{\text{Pr}} + m_Z + \frac{n m_G}{2}. \quad \text{Glg. 5-10}$$

5.2 Prüfstandsbeschreibung

Der Ausschwingprüfstand besteht aus vier Baugruppen (Abb. 5-2): der Aufhängung (a), der zu prüfenden Kette (b), dem Prüfgewicht (c) und der Auswertelektronik (d). Der Aufbau wird über eine Aufhängevorrichtung am Querträger eines in der Versuchshalle installierten Brückenkrans befestigt (siehe Abb. 5-3). Die Montage erfolgt in unmittelbarer Nähe eines Auflagers, um unerwünschte Schwingungen der Kranbrücke möglichst gering zu halten. (Treten am Ort der Aufhängung hohe Beschleunigungen auf, verliert aufgrund der großen Masse des Trägers das Modell des Einmassenschwingers seine Gültigkeit und muss durch ein Zweimassenmodell ersetzt werden (vgl. [Lit. 6]).) Der Kettenstrang ist mit Aufhängevorrichtung und Gewicht jeweils durch ein universelles Einlegeteil (Abb. 5-4) verbunden. Dieses ermöglicht eine sichere und weitgehend starre Kraftübertragung und ist für die Aufnahme verschiedener Dimensionen von Hebezeugketten mit Drahtdurchmessern zwischen 4 und 11 mm konzipiert. Das Prüfgewicht (Abb. 5-5) besteht aus einer Rahmenkonstruktion, auf die an drei

Stellen Gewichtsplatten von 40 kg bzw. 100 kg mittels zweier Gewindestäbe fixiert werden. Auf diese Weise kann die Masse im Bereich von etwa 320 kg bis 1660 kg variiert werden. An der Oberseite des mittleren Gewichtsblocks wird ein induktiver Beschleunigungsaufnehmer eingeschraubt. Die verwendete Messkette ist in Abb. 5-6 schematisch dargestellt. Das analoge Ausgangssignal des Sensors wird durch einen Trägerfrequenz-Verstärker angehoben und mittels eines Analog-Digital-Umsetzers für die rechnergestützte Auswertung diskretisiert. Mithilfe der Mess- und Auswertesoftware LabView 7.1 wird der Verlauf der Beschleunigung erfasst und eine FFT (*Fast Fourier Transform*)-Analyse durchgeführt, welche dessen Frequenzspektrum ausgibt. Der amplitudenhöchste Frequenzanteil entspricht dabei der gesuchten Eigenfrequenz des Systems.

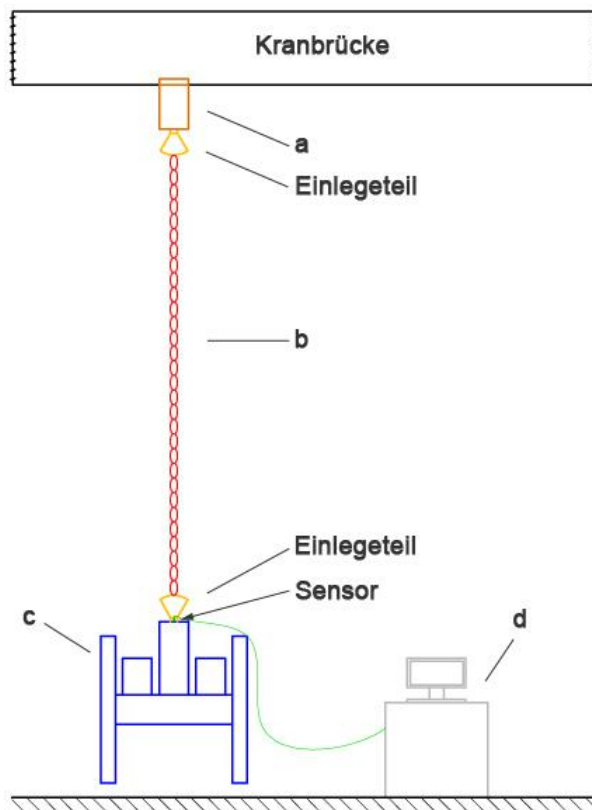


Abb. 5-2: Skizze des Prüfstands

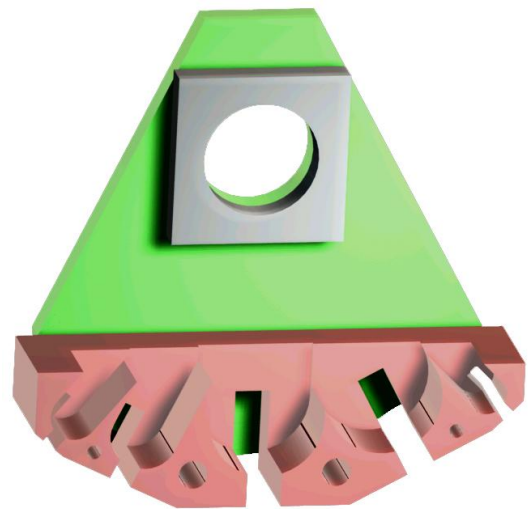


Abb. 5-4: Hälfte eines Einlegeteils

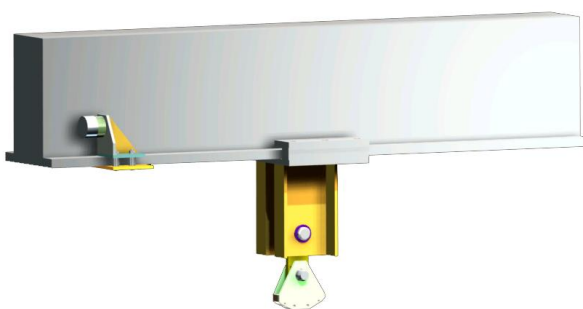


Abb. 5-3: Aufhängung

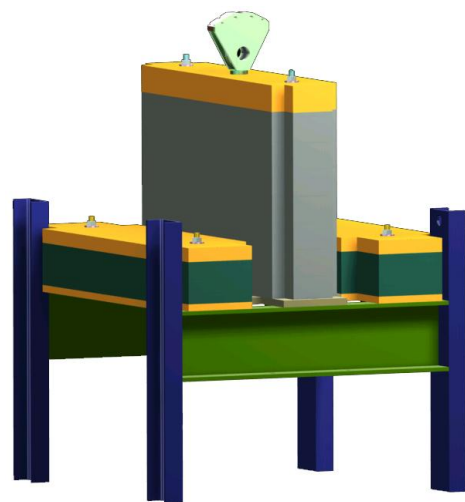


Abb. 5-5: Prüfgewicht

Messwertaufnehmer

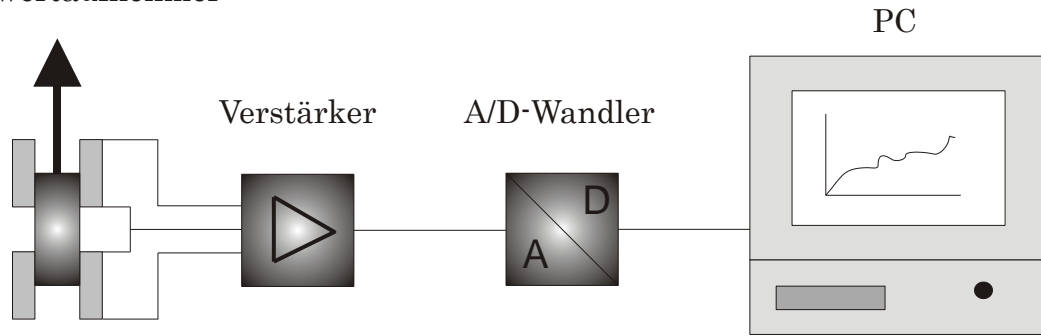


Abbildung 5-6: Messdatenerfassung

(entnommen aus: [Lit. 35, S.31])

Benennung	Anzahl	Hersteller / Modell	Spezifikationen
Aufhängevorrichtung	1	Eigenfertigung	-
Einlegeteil	2	Eigenfertigung	Aufnahmemöglichkeit für die Dimensionen 4 x 12, 5 x 15, 7 x 21, 9 x 27 und 11 x 33
Prüfkette A	1	Pewag HE G80-RAS 9x27 (einsatzgehärtet)	0 % Kettenlängung infolge Verschleiß
Prüfkette B	1	Pewag HE G80-RAS 9x27 (einsatzgehärtet)	1 % Kettenlängung infolge Verschleiß
Prüfkette C	1	Pewag HE G80-RAS 9x27 (einsatzgehärtet)	2 % Kettenlängung infolge Verschleiß
Gewicht	1	Eigenfertigung	zwischen ca. 320 kg und 1660 kg in Stufen variierbar
Beschleunigungsaufnehmer	2	HBM B12/200	- induktives Messsystem mit Differentialdrossel - Nennbeschleunigung $\pm 200 \text{ m/s}^2$ - Arbeitsfrequenzbereich 0.....100 Hz - Nennkennwert 80 mV/V - Linearitätsfehler $< \pm 2\%$
Messverstärker	1	HBM KWS 3073	- 5 kHz-Trägerfrequenzmessverstärker - Genauigkeitsklasse 0,1
A/D-Wandlerkarte	1	National Instruments PCI-6221	- Auflösung: 16 bit - Abtastrate: 250 kHz - Eingangsspannungsbereich: $\pm 10\text{V}$
PC	1	-	Mess-Software LabView 7.1

Tabelle 5-1: Geräteliste

5.3 Versuchsdurchführung

Die Anregung des Gewichtskörpers erfolgt stoßförmig mittels Hammerschlag. Aufgrund der Aufhängungssituation muss das Gewicht etwas außermittig angeschlagen werden, wodurch sich der Schwingung in Längsrichtung eine leichte Pendelbewegung überlagert. Wie in Abb. 5-7 gut zu erkennen ist, schwankt infolge der Schrägstellung des Beschleunigungssensors die gemessene Amplitude geringfügig unterhalb des tatsächlichen Wertes. Versuche mit unterschiedlich stark ausgeprägter Pendelschwingung (herbeigeführt durch Variation der Exzentrizität des Anschlagpunktes) ergaben, dass der ermittelte Wert für die Frequenz hierdurch nicht verändert wird.

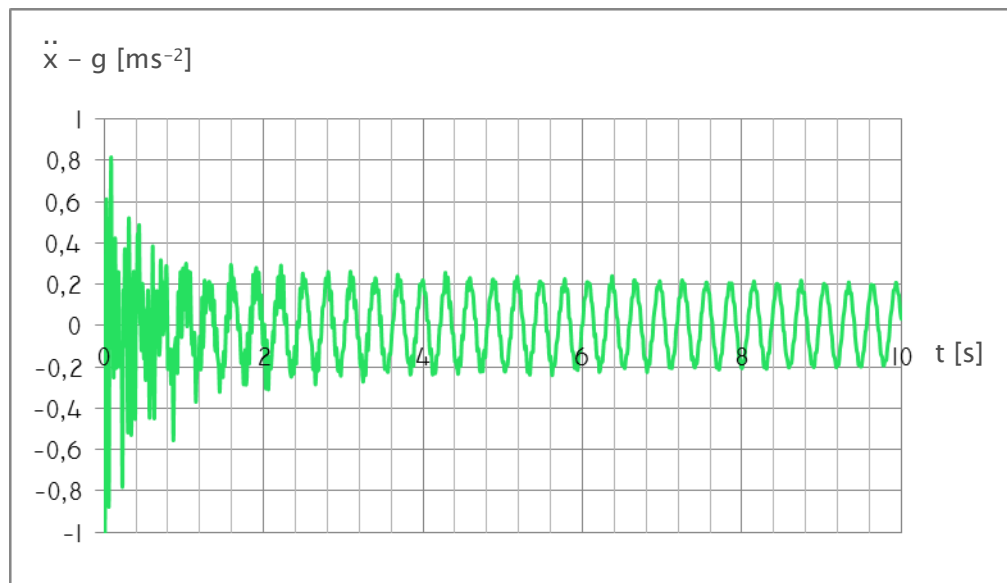


Abbildung 5-7: Beschleunigung Masse

(Messpunkt Nr. 1, Zeitfenster 10 s, Abtastrate 100 Hz)

Um den störenden Einfluss des Auslenkvorgangs auf die Eigenschwingung nicht in die Messung einzubeziehen, wird diese um einige Sekunden versetzt gestartet. Dadurch kann zugleich eine Verschiebung der Eigenfrequenz durch die Schwingung der Kranbrücke ausgeschlossen werden: Durch Anbringen eines zweiten Aufnehmers an der Aufhängevorrichtung während Messung Nr. 1 wurde festgestellt, dass diese innerhalb eines Zeitraums von 1 s infolge starker Dämpfung nahezu vollständig abklingt. Die Aufnahmezeit beträgt $t_A = 100$ s bei einer Samplingrate von $f_s = 1$ kHz; es werden somit 10^5 Einzelwerte für die Beschleunigung der Masse erfasst. Für die FFT-Analyse bedeutet dies wegen des Zusammenhangs

$$\Delta f = \frac{1}{t_A}$$

Glg. 5-11

eine Auflösung von $\Delta f = 0,01$ Hz und somit eine Genauigkeit von $\Delta f / 2 = 0,005$ Hz [Lit. 36, S.184]. Dieser Diskretisierungsfehler darf mit der Gesamtmessunsicherheit gleichgesetzt werden, da demgegenüber der aus den zufälligen Abweichungen der einzelnen Geräte resultierende Fehler der Beschleunigungsmessung das Ergebnis im Frequenzbereich nicht beeinflusst. Dies zeigte sich daran,

dass bei sämtlichen Messpunkten wiederholte Messungen stets denselben Frequenzwert lieferten (mit Ausnahme von Messpunkt Nr. 19; hier wurde der am häufigsten gemessene Wert aus zehn Messungen herangezogen). Nicht erfasst werden können jedoch etwaige unbekannt systematische Fehler der Messeinrichtung. Insgesamt erweist sich das Verfahren als sehr robust, was ein Resultat dessen ist, dass die Frequenz infolge der auftretenden Dämpfung kaum veränderlich ist und aus einer großen Anzahl von Perioden bestimmt wird.

Die Messreihe (Tab. 5-3) umfasst 20 Konfigurationen der Parameter Gewichtslast, Verschleiß und Kettenlänge. Sämtliche Ketten werden bei einer Einspannlänge von etwa 6 m an fünf Belastungspunkten zwischen $\sigma_n = 34$ und 130 MPa geprüft (die Tragfähigkeit der Ausführung DAT beträgt 160 MPa). Zur (lastabhängigen) Ermittlung der Aufhängungssteifigkeit c_A werden für Prüfkette A zusätzlich bei einer Kettenlänge von 10 m Werte bestimmt.

5.4 Ergebnisse

Aus den für Kette A erhaltenen Systemeigenfrequenzen bei unterschiedlichen Gliederzahlen errechnen sich mit Glg. 5-8 die in Tab. 5-2 angegebenen Werte für $c_A(\sigma_n)$. Anhand der Abweichungen zwischen den verschiedenen Lastpunkten wird deutlich, dass die Bestimmungsmethode für die Steifigkeit der Aufhängung bei der vorhandenen Frequenzauflösung sehr ungenau ist. Ausgehend von der Annahme, dass diese im betrachteten Zugkraftbereich näherungsweise konstant ist, können jedoch aus einer Fehlerbetrachtung weitere Rückschlüsse gezogen werden:

Entsprechend den obigen Ausführungen gilt für den wahren Wert der Eigenfrequenz:

$$f_{mess} - \frac{\Delta f}{2} \leq f \leq f_{mess} + \frac{\Delta f}{2}.$$

Durch Einsetzen der Grenzwerte in Glg. 5-8 folgt damit für den wahren Wert der Einspannsteifigkeit bei der jeweiligen Last:

$$c_{A,uG} \leq c_A \leq c_{A,oG}$$

mit

$$c_{A,uG} = \frac{4\pi^2 m (n_1 - n_2)}{\frac{n_1}{\left(f_2 - \frac{\Delta f}{2}\right)^2} - \frac{n_2}{\left(f_1 + \frac{\Delta f}{2}\right)^2}} \quad \text{Glg. 5-12}$$

und

$$c_{A,oG} = \frac{4\pi^2 m (n_1 - n_2)}{\frac{n_1}{\left(f_2 + \frac{\Delta f}{2}\right)^2} - \frac{n_2}{\left(f_1 - \frac{\Delta f}{2}\right)^2}}, \quad \text{Glg. 5-13}$$

wenn $n_1 > n_2$. Die Bildung einer Schnittmenge aus den Intervallen für c_A ermöglicht eine Eingrenzung zwischen $1,735 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ (untere Grenze / Lastpunkt 4)

und $1,894 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ (obere Grenze / Lastpunkt 3). Damit ist gezeigt, dass der in diesem Bereich liegende Mittelwert der fünf Belastungspunkte von $c_A = 1,826 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ eine ausreichend gute Näherung liefert (Restunsicherheit $\sim 5\%$).

Lastpunkt	Nennsp.	Differenzielle Federsteifigkeit		
	σ_n	$c_{A,\text{mess}}$	$c_{A,\text{uG}}$	$c_{A,\text{oG}}$
	[MPa]	[10^7 Nm^{-1}]	[10^7 Nm^{-1}]	[10^7 Nm^{-1}]
1	129,7	1,426	1,057	2,194
2	106,8	2,153	1,396	4,705
3	85,7	1,291	0,979	1,894
4	60,8	2,835	1,735	7,757
5	34,3	1,427	1,123	1,956
Mittelwert		1,826		

Tabelle 5-2: Bestimmung der Aufhängungssteifigkeit

Unter Verwendung dieses Wertes werden nun nach Glg. 5-7 die Kettengliedsteifigkeiten an jedem Messpunkt berechnet und mit den entsprechenden Ergebnissen der empirischen Berechnung nach Kap. 4.3.2 (allgemeine Berechnung der hochfesten Hebezeugkette) sowie nach Kap. 4.2.1 (vereinfachte Berechnung für Ketten nach EN 818-7) verglichen (Tab. 5-3). Für die neue Kette ergibt sich bei Abweichungen von höchstens 0,8 % eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung über den gesamten Lastbereich. Demzufolge wird im Falle der Hebezeugkette das reale Verhalten des Materials durch das den Gleichungen zugrunde liegende Modell wiedergegeben.

Aus den Ergebnissen für die beiden verschlissenen Ketten geht hervor, dass die Federsteifigkeit sich mit zunehmendem Verschleißgrad geringfügig erhöht (siehe Abb. 5-8). Dies wird auf eine Vergrößerung der Berührungsfläche der Glieder durch die Abrasion des Materials im Kettengelenk zurückgeführt. Der durchschnittliche Anstieg beträgt bei 1 % Längung 1,8 % sowie bei 2 % Längung 2,4 %. Die Ableitung eines statistischen Zusammenhanges aus den Messergebnissen erscheint angesichts des geringen Versuchsumfanges nicht zulässig. Soll der Verschleißeinfluss dennoch zur Erhöhung der Genauigkeit der Berechnung berücksichtigt werden, so wird für die Rundstahlkette nach EN 818-7 vorgeschlagen, die Ergebnisse mit einem Korrekturfaktor von $1 + (\Delta t / t)_v$ zu versehen, welcher einen linearen Zusammenhang zwischen bezogener Längung und relativer Steifigkeitszunahme abbildet. Wie aus Abb. 5-8 ersichtlich ist, wird dadurch eine Annäherung an die experimentell ermittelten Werte erzielt. Die korrigierte Berechnung lautet dann

$$c_{0,K}(F_Z) = \frac{1,3452 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_v)}{n} \quad \text{Glg. 5-14}$$

bzw.

$$c_K(F_Z) = \frac{1,5218 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_v)}{n}. \quad \text{Glg. 5-15}$$

Messung Nr.	Versuchsparameter						Messwert		Berechnete differentielle Federsteifigkeit			
	Prüfkette / Verschleiß	Masse Prüfgewicht	Masse gesamt	Nennspannung	Anzahl der Glieder	Länge	Frequenz	aus Messung	Berechnung EN818-7 (Glg. 4-4)	Abw. Ber./ Mess.	Berechnung Hebezeugkette (Kap. 4.3.2)	Abw. Ber./ Mess.
	($\Delta t/t$)/v [%]	mPr [kg]	m [kg]	σ_n [MPa]	n [1]	lk [m]	f [Hz]	CG [10 ⁸ Nm ⁻¹]	CG [10 ⁸ Nm ⁻¹]	[%]	CG [10 ⁸ Nm ⁻¹]	[%]
1	C / 2	1663	1677,7	129,3	223	6,14	3,37	1,749	1,688	-3,50	1,695	-3,14
2	B / 1	1663	1681,5	129,6	224	6,11	3,33	1,718	1,689	-1,72	1,695	-1,35
3	A / 0	1663	1684,3	129,8	225	6,08	3,30	1,696	1,689	-0,44	1,695	-0,06
4	A / 0	1663	1681,0	129,6	364	9,83	2,62	1,701	1,689	-0,70	1,695	-0,33
5	A / 0	1366	1383,8	106,7	371	10,02	2,82	1,651	1,646	-0,31	1,652	0,04
6	A / 0	1366	1387,1	106,9	234	6,32	3,53	1,659	1,647	-0,73	1,652	-0,39
7	B / 1	1366	1384,4	106,7	231	6,30	3,58	1,683	1,646	-2,17	1,652	-1,83
8	C / 2	1366	1384,2	106,7	229	6,31	3,60	1,687	1,646	-2,44	1,652	-2,10
9	C / 2	1093	1111,0	85,6	237	6,53	3,91	1,650	1,599	-3,06	1,604	-2,76
10	B / 1	1093	1111,2	85,6	238	6,49	3,90	1,648	1,599	-2,97	1,604	-2,67
11	A / 0	1093	1113,9	85,9	240	6,48	3,83	1,605	1,600	-0,32	1,605	-0,01
12	A / 0	1093	1110,7	85,6	378	10,21	3,08	1,609	1,599	-0,61	1,604	-0,30
13	A / 0	769	786,7	60,6	378	10,21	3,56	1,521	1,528	0,52	1,532	0,77
14	A / 0	769	789,9	60,9	240	6,48	4,45	1,534	1,529	-0,31	1,533	-0,05
15	B / 1	769	787,2	60,7	238	6,49	4,52	1,566	1,529	-2,37	1,532	-2,12
16	C / 2	769	787,0	60,7	236	6,50	4,56	1,581	1,528	-3,30	1,532	-3,05
17	C / 2	426	444,0	34,2	238	6,55	5,76	1,430	1,418	-0,82	1,420	-0,66
18	B / 1	426	444,2	34,2	240	6,54	5,74	1,432	1,418	-0,98	1,420	-0,81
19	A / 0	426	446,9	34,4	242	6,53	5,68	1,422	1,419	-0,19	1,421	-0,02
20	A / 0	426	443,6	34,2	381	10,29	4,56	1,416	1,418	0,14	1,420	0,31

Tabelle 5-3: Ergebnisse der Messreihe

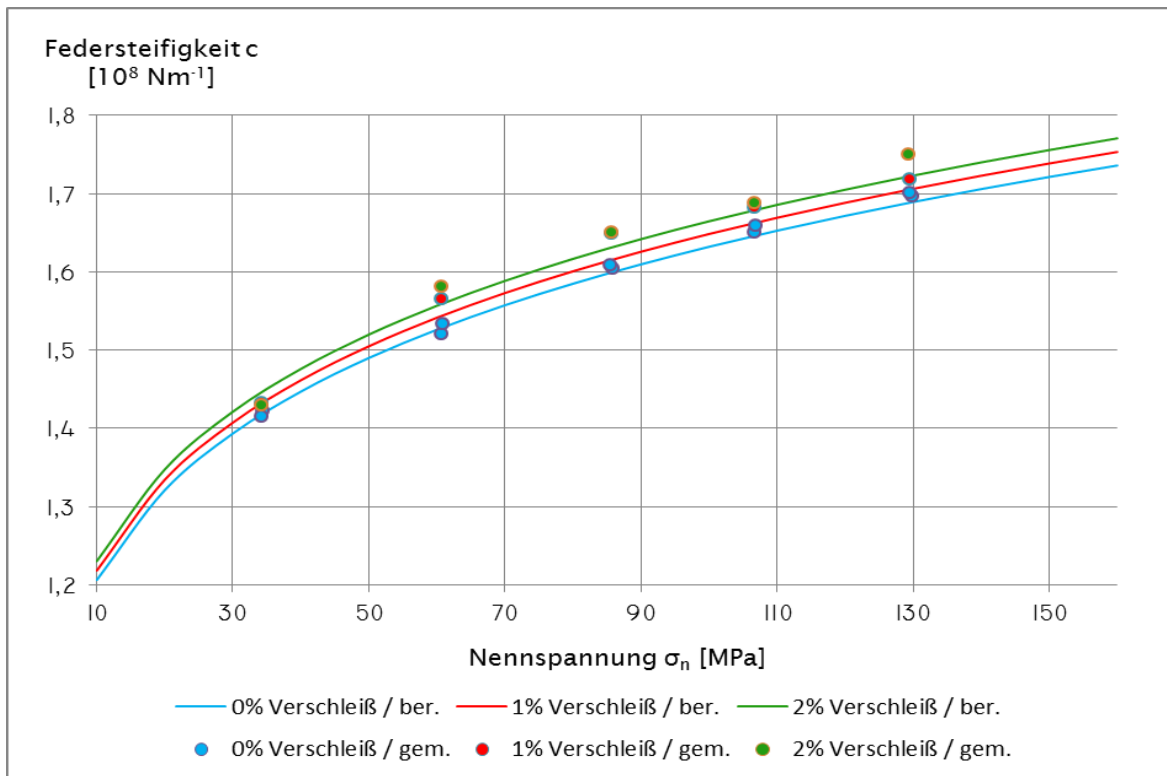


Abbildung 5-8: Vergleich von Messung und Berechnung

6 Zusammenfassung

Die Federsteifigkeit der Rundstahlkette bei Zugbelastung weist aufgrund des nichtlinearen Verformungsverhaltens im Bereich des Kettengelenks, resultierend aus der Interdependenz von Belastung und Verformung an der Kontaktfläche, eine ausgeprägte Lastabhängigkeit auf. Die Kontaktgeometrie wird durch die plastische Verformung des Materials während des am Ende des Fertigungsprozesses angeordneten Kalibriervorgangs definiert. Daraus ergibt sich ein starker Einfluss der in der betreffenden Norm festgelegten Höhe der Kalibrierkraft und der Fließkurve des Werkstoffs auf die Kettensteifigkeit. Ferner ist ein geringer Anstieg der Federrate mit fortschreitender Einsatzzeit infolge des Gelenkverschleißes zu beobachten.

Ausgehend von der linearen Theorie des geraden und des stark gekrümmten Biegeträgers und dem Modell punktförmiger Kraftübertragung wurde ein analytisches Berechnungsverfahren hergeleitet, mit dem ein konstanter Steifigkeitswert berechnet wird. Aufgrund der Veränderlichkeit der Steifigkeit mit der Last kann dieses zumeist nur eine grobe Näherung liefern. Der Vorteil der analytischen Methode besteht indes in der allgemeinen Anwendbarkeit: sämtliche Geometrien, Festigkeitsklassen, Werkstoffe und Querschnittsprofile können berücksichtigt werden. Letzteres ermöglicht auch eine Berechnung der als Neuentwicklung auftretenden 'Profilstahlketten' mit von der Kreisform abweichendem Drahtquerschnitt.

Das Ziel der Entwicklung eines Berechnungsmodells, welches die für die dynamische Auslegung von Kettenfördermitteln erforderliche hohe Genauigkeit aufweist, konnte bei Einschränkung der Gültigkeit auf hochfeste Rundstahlketten erreicht werden. Für diese Gruppe gelang es, aus Verformungsuntersuchungen an diversen Kettengliedgeometrien mittels eines nichtlinearen Finite-Elemente-Modells (unter Einbeziehung der Kalibrierverformung), geeignete empirische Zusammenhänge abzuleiten. Als Eingangsgrößen werden lediglich die aus der Norm bzw. Herstellerangabe bekannten geometrischen Abmessungen, die Zugkraft und die Anzahl der Kettenglieder benötigt. Die einfachste Form nimmt die Berechnung bei der hochfesten Hebezeugkette nach EN 818-7 an, bedingt durch die geometrische Ähnlichkeit der Dimensionen; für diese Ausführung wurde zur Erhöhung der Genauigkeit zudem ein Verschleißkorrekturfaktor eingeführt. In Vergleichsmessungen an Hebezeugketten der Dimension 9 x 27 wurde lastunabhängig eine sehr gute Übereinstimmung mit den rechnerisch ermittelten Werten festgestellt. Für eine Bewertung der für hochfeste Förderketten angegebenen Gleichungen sind weitere experimentelle Untersuchungen erforderlich. Eine anwendungsgerechte Zusammenstellung der in dieser Arbeit abgeleiteten Berechnungsformeln wird in Kap. 7.3 gegeben.

7 Verzeichnisse

7.1 Literaturverzeichnis

- [1] Niemann, G. / Winter, H.: Maschinenelemente; Band 3: Schraubrad-, Kegelarad-, Schnecken-, Ketten-, Riemen-, Reibradgetriebe, Kupplungen, Bremsen, Freiläufe. Springer Verlag, 2. Auflage 2004.
- [2] Sebulke, J.: Theoretische und experimentelle Ermittlung der Federkonstante von Rundstahlketten. F+H (Fördern und Heben) 31, Heft Nr.2/1981, S. 105-108.
- [3] Ahrens, K. / Müller, W. / Rieckhof, J.: Elastizitätsmodul von Rundstahlgliederketten für den Bergbau. Glückauf-Forschungshefte 42, Heft 5/1981, S. 200-204.
- [4] Oser, J.: Zur Spannungsverteilung und Federsteifigkeit in Rundstahlkettengliedern (I+II). dhf (Deutsche Hebe- und Fördertechnik), Hefte 11/12-82, S. 29-33 und 1/2-83, S.39-40.
- [5] Philipp, G. B.: Die Rundstahlkette als Element der Leistungsübertragung bei Förderern im StREBBAU. Dissertation RWTH Aachen 1999.
- [6] Landschützer, C.: Analyse von Schwingungen an einsträngigen Elektrokettenzügen. Dissertation TU Graz 2004.
- [7] Landschützer, C.: Schwingungssimulation von Rundstahl-Elektrokettenzügen. Konstruktion, Heft 04/2010, S. 59-66.
- [8] DIN EN 818-7: Kurzgliedrige Rundstahlketten für Hebezwecke; Sicherheit; Teil 7: Feintolerierte Rundstahlketten für Hebezeuge, Güteklasse T (Ausführung T, DAT und DT). Beuth Verlag; 09/2002.
- [9] DIN-Taschenbuch 392: Rundstahlketten; Normen. Beuth Verlag, 1. Auflage 2006.
- [10] DIN EN 818-1: Kurzgliedrige Rundstahlketten für Hebezwecke; Sicherheit; Teil 1: Allgemeine Abnahmebedingungen. Beuth Verlag; 08/1996.
- [11] DIN 5684-1/2: Rundstahlketten für Hebezeuge; Teil 1: Güteklasse 5; lehrenhaltig; geprüft und Teil 2: Güteklasse 6; lehrenhaltig; geprüft. Beuth Verlag; 05/1984.
- [12] DIN 5684-3 (Entwurf): Rundstahlketten; Fein tolerierte Hebezeugketten; Teil 3: Güteklasse T (Ausführung T, DAT und DT). Beuth Verlag; 11/2010.
- [13] DIN 22252: Rundstahlketten für Stetigförderer und Gewinnungsanlagen im Bergbau; Beuth Verlag; 09/2001.

- [14] DIN 762-1/2: Rundstahlketten für Stetigförderer; Teil 1: Güteklasse 2; lehrenhaltig; Teilung 5d; geprüft und Teil 2: Güteklasse 3; lehrenhaltig; Teilung 5d; geprüft. Beuth Verlag; 09/1992.
- [15] DIN 764-1/2: Rundstahlketten für Stetigförderer; Teil 1: Güteklasse 2; lehrenhaltig; Teilung 3,5d; geprüft und Teil 2: Güteklasse 3; lehrenhaltig; Teilung 3,5d; geprüft. Beuth Verlag; 09/1992.
- [16] Rothe, F.: Spielbehaftete Laschenverbindungen bei quasistatischer Belastung unter Berücksichtigung nichtlinearer Randbedingungen. Dissertation TU Clausthal 1994.
- [17] Moser, C.: Kraftübertragung an Hebezeugkettentrieben. Dissertation TU Graz 2007.
- [18] Fritz, H. / Schulze, G. (Hrsg.): Fertigungstechnik. Springer Verlag, 9. Auflage 2010.
- [19] Schalk, M.: Messung und Auswertung geometrischer Größen hochfester Hebezeugkettenglieder. Diplomarbeit TU Graz 2006.
- [20] Dietz, P. / Rothe, F.: Rechnerische Ansätze zum Beanspruchungsverhalten von Ketten und symmetrischen Tragmitteln. F+H (Fördern und Heben) 45, Heft Nr.11/1995, S. 772-774.
- [21] DIN 685-3: Geprüfte Rundstahlketten; Teil 3: Prüfung. Beuth Verlag; 02/2001.
- [22] DIN 685-1: Geprüfte Rundstahlketten; Begriffe. Beuth Verlag; 11/1981.
- [23] DIN 17115: Stähle für geschweißte Rundstahlketten; Technische Lieferbedingungen. Beuth Verlag; 02/1987.
- [24] DIN 685-2: Geprüfte Rundstahlketten; Teil 2: Sicherheitstechnische Anforderungen. Beuth Verlag; 02/2001.
- [25] Fasel, A.: Grundsatzuntersuchungen an Kettentrieben zur Steigerung der übertragbaren Leistung. Dissertation RWTH Aachen 1998.
- [26] Rust, W.: Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen; Kontakt, Geometrie, Material. Vieweg + Teubner Verlag, 1. Auflage 2009.
- [27] Gebhardt, C.: Konstruktionsbegleitende Berechnung mit ANSYS DesignSpace; FEM-Simulation für Konstrukteure. Hanser Verlag, 1. Auflage 2009.

- [28] Klein, B.: FEM; Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau. Vieweg + Teubner Verlag, 8. Auflage 2010.
- [29] Scheffler, M.: Grundlagen der Fördertechnik - Elemente und Triebwerke. Vieweg Verlag, 1. Auflage 1994.
- [30] DIN 685-5: Geprüfte Rundstahlketten; Benutzung. Beuth Verlag; 11/1981.
- [31] Bargel, H.-J. / Schulze, G. (Hrsg.): Werkstoffkunde. Springer Verlag, 9. Auflage 2005.
- [32] Kappus, R.: Die Schubspannungen in krummen Balken. Der Stahlbau 21, Heft 7/1952, S.126-127.
- [33] Dankert, J. / Dankert, H.: Technische Mechanik; Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. Teubner Verlag, 3. Auflage 2004.
- [34] Gross, M. / Hauger, W. / Schröder, J. / Wall, W.: Technische Mechanik; Band 3: Kinetik. Springer Verlag, 9. Auflage 2006.
- [35] Luftensteiner, W.: Modelltechnische Abbildung und Simulation eines zweisträngigen Elektrokettenzuges. Diplomarbeit TU Graz 2007.
- [36] Meyer, M.: Signalverarbeitung. Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter. Vieweg + Teubner Verlag, 5. Auflage 2009.

7.2 Liste verwendeter Formelzeichen

Zeichen	Beschreibung	Einheit
a	Konstante zur empirischen Berechnung (Kap. 4)	
	Parabelkonstante (Kap. 3.3)	m^{-1}
b	Konstante zur empirischen Berechnung (Kap. 4)	
	Dämpfungskonstante (Kap. 5.1)	Nsm^{-1}
	Querschnittsbreite (Kap. 3.1.1)	m
c / c_G / c_K	differentielle Federsteifigkeit (G...Glied, K...Kette)	Nm^{-1}
	Federkonstante (Kap. 3)	Nm^{-1}
c_0 / $c_{0,G}$ / $c_{0,K}$	abschnittsweise Federsteifigkeit (G...Glied, K...Kette)	Nm^{-1}
c_A / $c_{A,uG}$ / $c_{A,oG}$	differentielle Steifigkeit der Aufhängung (uG...untere Grenze, oG...obere Grenze)	Nm^{-1}
c_j	Konstanten	
d	Drahtdurchmesser	m
d_a / d_i	Durchmesser (a...außen, i...innen)	m
e	halber Drahtdurchmesser	m
	Eulersche Zahl	1
f	Frequenz der gedämpften Schwingung	s^{-1}
f_0	Frequenz der ungedämpften Schwingung	s^{-1}
f_S	Abtastrate (Samplingrate)	s^{-1}
g	Erdbeschleunigung	ms^{-2}
j	Zählvariable	
k	Ähnlichkeitsfaktor	1
l	Länge	m
l_1 / l_2	Anfangs- und Endlänge des betrachteten Intervalls	m
l_K	Kettenlänge	m
m / m_G / m_{Pr} / m_Z	Masse (G...Glied, Pr...Prüfgewicht, Z...Zusatz)	kg
n	Anzahl der Kettenglieder	1
q / q_H / q_V	Linienkraft (H...in horizontaler Richtung, V...in vertikaler Richtung)	$N rad^{-1}$
r	mittlerer Bugaradius	m
s	halbe Schenkellänge	m
t	Teilung	m
	Zeit (Kap. 5.1 und 5.3)	s
t_A	Aufnahmezeit	s
u_j	Längs-(Tangential-)Verschiebungen	m
x	Längenkoordinate in Balkenlängsrichtung (Kap. 3)	m
	Längenkoordinate in Kettenlängsrichtung (Kap. 5)	m
w_a	minimale innere Breite über der Schweißnaht	m
w_i	maximale äußere Breite über der Schweißnaht	m
w_j	Quer-(Radial-)Verschiebungen	m
y	Längenkoordinate	m

z	Längencoordinate in Balkenquerrichtung	m
A	Querschnittsfläche	m^2
C	Konstante	
D	Dämpfungsgrad	1
E	(Werkstoff-)Elastizitätsmodul	Nm^{-2}
E_K	Ketten-Elastizitätsmodul	Nm^{-2}
E_T	Tangentenmodul	Nm^{-2}
F	halbe Kettenzugkraft	N
F_1 / F_2	Anfangs- und Endkraft des betrachteten Intervalls	N
F_K	Fertigungsprüfkraft (Kalibrierkraft)	N
F_Z	Kettenzugkraft	N
H	Hilfskraft	N
I_y	axiales Flächenträgheitsmoment bzgl. der y-Achse	m^4
K	Konstante zur Bildung der statisch Unbestimmten (Punktlast)	1
K'	Konstante zur Bildung der statisch Unbestimmten (Streckenlast)	1
K_j	Konstanten	m
$M_{y,j} / M_j$	Biegemomente um die y-Achse	Nm
M_A	statisch unbestimmtes Biegemoment	Nm
M_H	Hilfsmoment	Nm
N_j	Normalkräfte in x-Richtung	N
Q_j	Querkräfte in z-Richtung	N
R	Radialcoordinate	m
S	Spiel	1
S_y	statisches Moment der durch z abgegrenzten Querschnittsteile um die y-Achse	m^3
W_j	Formänderungsarbeiten (-energien)	J
α	rechnerischer Kontaktwinkel	rad
α'	Schubkorrekturfaktor für den gekrümmten Balken	1
β	Biegewinkel nach Oser	rad
γ	Phasenwinkel	rad
ε	Dehnung	1
κ	Bantlinscher Querschnittsfaktor	1
μ	Reibungskoeffizient	1
ν	Querkontraktionszahl (Poissonzahl)	1
ξ	Bogenlänge	m
Π	Kreiszahl	1
σ	Spannung	Nm^{-2}
σ_n	Nennspannung	Nm^{-2}
$\sigma_x / \sigma_y / \sigma_z$	Normalspannung in x-/y-/z-Richtung	Nm^{-2}
$\sigma_1 / \sigma_2 / \sigma_3$	Hauptspannungen	Nm^{-2}
$\sigma_F / \sigma_{F,0} / \sigma_{F,1}$	Fließgrenze (Steckgrenze) (0...unverfestigtes Material, 1... verfestigtes Material)	Nm^{-2}

σ_v	Vergleichsspannung nach van Mises	Nm^{-2}
τ_{ij}	Schubspannung (i...Richtung der Ebenennormale der Schnittfläche, j... Wirkrichtung der Spannung)	Nm^{-2}
φ	Winkelcoordinate	rad
ψ_j	Balkenneigungswinkel	rad
ω	Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung	s^{-1}
$\Delta()$	Änderung	
Δf	Frequenzauflösung	s^{-1}
Δl	Verlängerung des halben Kettenglieds	m
Δl_1	Verlängerung des Schenkelabschnitts	m
Δl_2	Verlängerung des Bugabschnitts	m
$\Delta l_{1,2}$	Verlängerung der Kettengliedmittelinie	m
Δl_3	Verkürzung des Scheitelquerschnitts	m
Σ_j	Summe aller j	
$(\Delta t/t)_K$	bleibende Kettenlänge nach Kalibrierung	1
$(\Delta t/t)_V$	Kettenlänge durch Verschleiß	1
$()'$	Ableitung nach x	
$(\dot{ })$	Ableitung nach φ (Kap. 3.2)	
	Ableitung nach t (Kap. 5)	

7.3 Formelsammlung

- Falls nicht gesondert angegeben, sind sämtliche Größen in SI-Einheiten einzusetzen!

7.3.1 Analytische Berechnung

- Keine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs; gilt für beliebige Querschnittsprofile

Federkonstante Kettenglied

$$c_G = \frac{EA}{s + K^2 \frac{Ar^2 s}{I_y} + r \left[\frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{2K-2}{\kappa} + \frac{\pi}{4\kappa} + \frac{\pi\alpha'(1+\nu)}{2} \right]} \quad \text{Glg. 3-14}$$

Federkonstante Kette

$$c_K = \frac{c_G}{n} \quad \text{Glg. 2-8}$$

Ketten-Elastizitätsmodul

$$E_K = \frac{E t}{2s + 2K^2 \frac{Ar^2 s}{I_y} + r \left[\frac{\pi(1+\kappa)}{\kappa} (1-K)^2 + \frac{4K-4}{\kappa} + \frac{\pi}{2\kappa} + \pi\alpha'(1+\nu) \right]}, \quad \text{Glg. 3-15}$$

$$E_K = \frac{c_G t}{2A} \quad \text{Glg. 2-16}$$

Konstante zur Bildung des statisch unbestimmten Moments

$$K = \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\kappa s}{r}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{Ar s}{I_y}} \quad \text{Glg. 3-58}$$

Bantlinscher Querschnittsfaktor / Kreisquerschnitt

$$\kappa = \tan^2 \left[\frac{\arcsin\left(\frac{e}{r}\right)}{2} \right] \quad \text{Glg. 3-4}$$

Bantlinscher Querschnittsfaktor / allgemeiner Querschnitt

$$\kappa = \frac{1}{A} \int_{z_a}^{z_i} \frac{b(z)z}{r-z} dz \quad \text{Glg. 3-2}$$

Schubkorrekturfaktor / Kreisquerschnitt

$$\alpha' = \frac{\left\{ \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r}\right)^2} \right) \left[13 \left(\frac{r}{e}\right)^2 - 5 - 7 \frac{r}{e} \sqrt{\left(\frac{r}{e}\right)^2 - 1} \right] - 3 \right\}}{9\kappa^2} \quad \text{Glg. 3-5}$$

Schubkorrekturfaktor / allgemeiner Querschnitt

$$\alpha' = \frac{1}{r\kappa^2 A} \int_{z_a}^{z_i} \frac{S_y(z)^2}{b(z)(r-z)^3} dz \quad \text{Glg. 3-3}$$

Flächenmoment 2. Ordnung / Kreisquerschnitt

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64} \quad \text{Glg. 7-1}$$

Flächenmoment 2. Ordnung / allgemeiner Querschnitt

$$I_y = \int_{z_a}^{z_i} z^2 b(z) dz \quad \text{Glg. 7-2}$$

Querschnittsfläche / Kreisquerschnitt

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} \quad \text{Glg. 2-13}$$

Mittlerer Bugradius

$$r = \frac{w_i + w_a}{4} \quad \text{Glg. 2-17}$$

Halbe Schenkellänge

$$s = \frac{t + d}{2} - r \quad \text{Glg. 2-18}$$

7.3.2 Empirische Berechnung / Rundstahlketten nach EN 818-7

- Gültigkeitsbereich: Ketten mit Vorzugsmaßen und mechanischen Anforderungen nach EN 818-7 (Ausführungen DAT, DT und T), Lastbereich $\sigma_n \geq 10 \text{ MPa}$

Abschnittsweise Federsteifigkeit Kette

$$c_{0,K}(F_Z) = \frac{1,3452 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_V)}{n} \quad \text{Glg. 5-14}$$

Differentielle Federsteifigkeit Kette

$$c_K(F_Z) = \frac{1,5218 \cdot 10^9 d^{0,7374} F_Z^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_V)}{n} \quad \text{Glg. 5-15}$$

Abschnittsweise Federsteifigkeit Kettenglied

$$c_{0,G}(\sigma_n) = 8,7567 \cdot 10^9 d \sigma_n^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_V) \quad (\sigma_n \text{ [MPa=Nmm}^{-2}\text{]}); \quad \text{Glg. 4-3}$$

$$c_{0,G}(\sigma_n) = n c_{0,K}(\sigma_n) \quad \text{Glg. 2-8}$$

Differentielle Federsteifigkeit Kettenglied

$$c_G(\sigma_n) = 9,9064 \cdot 10^9 d \sigma_n^{0,1313} (1 + (\Delta t / t)_V) \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}); \quad \text{Glg. 4-4}$$

$$c_G(\sigma_n) = n c_K(\sigma_n) \quad \text{Glg. 2-8}$$

Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{2F_Z}{d^2 \pi} \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}, d \text{ [mm]}) \quad \text{Glg. 2-13}$$

7.3.3 Empirische Berechnung / Hochfeste Rundstahlketten

- Gültigkeitsbereich: Ketten mit genormter Mindestprüfspannung im Bereich von $500 \text{ MPa} \leq \sigma_n(F_K) \leq 600 \text{ MPa}$ (z.B. Ketten nach EN 818-7 und DIN 22252), Lastbereich $10 \text{ MPa} \leq \sigma_n \leq 300 \text{ MPa}$
- Für gängige Kettendimensionen sind die Werte der empirischen Konstanten a und b in Tab. 4-8 und Tab. 4-9 zusammengestellt

Abschnittsweise Federsteifigkeit Kette

$$c_{0,K}(\sigma_n) = \frac{a \sigma_n^b}{n} \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}) \quad \text{Glg. 4-1}$$

Differentielle Federsteifigkeit Kette

$$c_K(\sigma_n) = \frac{a(b+1) \sigma_n^b}{n} \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}) \quad \text{Glg. 4-2}$$

Abschnittsweise Federsteifigkeit Kettenglied

$$c_{0,G}(\sigma_n) = a \sigma_n^b \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}) \quad \text{Glg. 4-1}$$

Differentielle Federsteifigkeit Kettenglied

$$c(\sigma_n) = a(b+1) \sigma_n^b \quad (\sigma_n \text{ [MPa]}) \quad \text{Glg. 4-2}$$

Konstanten der Approximationsfunktion

$$b = \frac{\ln\left(2 \cdot \frac{\Delta l(100)}{\Delta l(200)}\right)}{\ln 2}, \quad \text{Glg. 4-14}$$

$$a = \frac{100^{4-b} \cdot A}{\Delta l(100)} \quad \text{Glg. 4-15}$$

Verlängerung des halben Kettenglieds / Förderketten

$$\Delta l(100) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4054) + 0,00478775 \frac{d^2}{r} - 0,003112d, \quad \text{Glg. 4-11}$$

$$\Delta l(200) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4854) + 0,00574275 \frac{d^2}{r} - 0,003564d \quad \text{Glg. 4-12}$$

Verlängerung des halben Kettenglieds / Hebezeugketten

$$\Delta l(100) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4165) + 0,00239175 \frac{d^2}{r} - 0,0010555d, \quad \text{Glg. 4-16}$$

$$\Delta l(200) = \Delta l_{1,2}(\alpha = 0,4838) + 0,00350625 \frac{d^2}{r} - 0,0016335d \quad \text{Glg. 4-17}$$

Verlängerung der Kettengliedmittellinie

$$\Delta l_{1,2}(\alpha) = \frac{Fr}{EA} \left\{ \frac{s}{r} + KK' \frac{Ars}{I_y} + \frac{\pi}{2} \frac{1+\kappa}{\kappa} (KK' - K - K' + 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa} \left[(K-1) \frac{\alpha}{\sin \alpha} + K' + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right] + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha'(1+\nu)}{2} \right) \right\} \quad \text{Glg. 3-32}$$

Elastische Materialkennwerte

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa,}$$

$$\nu = 0,3$$

Konstante zur Bildung des statisch unbestimmten Moments (Punktlast)

$$K = \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\kappa s}{r}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{A r s}{I_y}} \quad \text{Glg. 3-58}$$

Konstante zur Bildung des statisch unbestimmten Moments (Streckenlast)

$$K' = \frac{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\kappa s}{r}}{(1+\kappa) \frac{\pi}{2} + \kappa \frac{A r s}{I_y}} \quad \text{Glg. 3-77}$$

Bantlinscher Querschnittsfaktor

$$\kappa = \tan^2 \left[\frac{\arcsin \left(\frac{e}{r} \right)}{2} \right] \quad \text{Glg. 3-4}$$

Schubkorrekturfaktor

$$\alpha' = \frac{\left\{ \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r} \right)^2} \right) \left[13 \left(\frac{r}{e} \right)^2 - 5 - 7 \frac{r}{e} \sqrt{\left(\frac{r}{e} \right)^2 - 1} \right] - 3 \right\}}{9\kappa^2} \quad \text{Glg. 3-5}$$

Flächenmoment 2. Ordnung

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64} \quad \text{Glg. 7-1}$$

Querschnittsfläche

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} \quad \text{Glg. 2-13}$$

Mittlerer Bugradius

$$r = \frac{w_i + w_a}{4} \quad \text{Glg. 2-17}$$

Halbe Schenkellänge

$$s = \frac{t + d}{2} - r \quad \text{Glg. 2-18}$$

Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{2F_z}{d^2 \pi} = \frac{4F}{d^2 \pi} \quad (\sigma_n \text{ [MPa], } d \text{ [mm]}) \quad \text{Glg. 2-13}$$

7.4 Abbildungsverzeichnis

Abb. 2-1: Kraft-Weg-Diagramm	4
Abb. 2-2: Kräfte und Verformungen am Kettenglied	6
Abb. 2-3: Rundstahlkettenglied mit charakteristischen Abmessungen	9
Abb. 2-4: Kraft-Verlängerungs-Diagramm der Rundstahlkette	11
Abb. 2-5: Bilinear-isotropes Werkstoffmodell	14
Abb. 2-6: Statisches Ersatzsystem	20
Abb. 2-7: Schnittgrößenverläufe am Rundstahlkettenglied	21
Abb. 3-1: Freigeschnittenes Ersatzsystem bei Punktlast	24
Abb. 3-2: Freigeschnittenes Ersatzsystem bei Streckenlast	26
Abb. 3-3: Ermittlung der Schnittgrößen	28
Abb. 3-4: Biegelinie und Verformung des differentiellen Balkenelements	32
Abb. 3-5: Ermittlung der Verschiebung des Balkenendpunktes	37
Abb. 3-6: Zentrische Streckung einer Kurve	38
Abb. 4-1: FEM-Modell des Ersatzsystems der Analytik	42
Abb. 4-2: FEM-Modell der Rundstahlkette	44
Abb. 4-3: Vorgegebener Kraftverlauf	45
Abb. 4-4: Verlauf der Kettengliedlänge	46
Abb. 4-5: Verformung des kalibrierten Kettenglieds	46
Abb. 4-6: Federsteifigkeiten	48
Abb. 4-7: Ergebnisse: Spannungen und Verzerrungen	49
Abb. 4-8: Parametervariationen	52
Abb. 4-9: Ermittlung der Näherungsfunktion für Δl_3 / Förderketten	55
Abb. 4-10: Ermittlung der Näherungsfunktion für Δl_3 / Hebezeugketten	57
Abb. 5-1: Modell des Einmassenschwingers	61
Abb. 5-2: Skizze des Prüfstands	63
Abb. 5-3: Aufhängung	63
Abb. 5-4: Hälfte eines Einlegeteils	63
Abb. 5-5: Prüfgewicht	63
Abb. 5-6: Messdatenerfassung	64
Abb. 5-7: Beschleunigung Masse	65
Abb. 5-8: Vergleich von Messung und Berechnung	69

7.5 Tabellenverzeichnis

Tab. 2-1: Chemische Zusammensetzung hochfester Kettenstähle	13
Tab. 2-2: Vergleich der vorhandenen Berechnungsverfahren anhand eines 9x27-Kettenglieds	22
Tab. 4-1: Gegenüberstellung von Berechnungs- und Simulationsergebnissen für das Ersatzsystem	43
Tab. 4-2: Verformungsanteile	47
Tab. 4-3: Ergebnisse der Parameterstudie	51
Tab. 4-4: Simulationsmatrix / Langgliedrige Förderketten	53
Tab. 4-5: Simulationsmatrix / Kurzgliedrige Hebezeugketten	53
Tab. 4-6: Ergebnisse der Simulationsreihe / Förderketten	55
Tab. 4-7: Ergebnisse der Simulationsreihe / Hebezeugketten	57
Tab. 4-8: Gegenüberstellung von Berechnung und Simulation anhand der Geometrien nach DIN 22252	58
Tab. 4-9: Gegenüberstellung von Berechnung und Simulation anhand der Geometrien nach DIN 5684	59
Tab. 5-1: Geräteliste	64
Tab. 5-2: Bestimmung der Aufhängungssteifigkeit	67
Tab. 5-3: Ergebnisse der Messreihe	68