

Institut für Festigkeitslehre

Allseitig gezogene Scheibe mit Kreisloch

Elastoplastische Analyse mittels Methode der komplexen Funktionen und finiten Elementen

Walter Ochsberger

Graz, Mai 2011

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 6. Mai 2011

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen meines Diplomstudiums an der Technischen Universität Graz am Institut für Festigkeitslehre entstanden und wurde als Diplomarbeit eingereicht.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei O.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Celigoj sowohl für das Thema meiner Arbeit als auch für die fachkundige Unterstützung und Einführung in das behandelte Gebiet bedanken. Darüber hinaus bedanke ich mich bei den Assistenten und Arbeitskollegen Dipl.-Ing. Michael Hammer für die Darlegung grundlegender Inhalte im Bereich der finiten Elemente auf eine plausible Art und Weise, sowie Dipl.-Ing. Stefan Hollerer für seine Hilfestellungen und Interesse im Bereich graphischer Darstellungen von Ergebnissen.

Besonderer Dank gebührt Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Ulz für die Vorbereitung in die Theorie zur Lösung plastischer Probleme mittels finiter Elemente und vor allem für seine Betreuung und Empfehlungen während des gesamten Sommersemesters.

Abschließend bedanke ich mich bei meiner Familie, die es mir ermöglicht hat zu studieren und mich auf meinem Weg begleitet sowie unterstützt hat.

Walter Ochensberger, Graz am 6. Mai 2011

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Ausbildung der plastischen Zone einer allseitig gezogenen, theoretisch unendlich ausgedehnten Scheibe mit Kreisloch. Die Vorgehensweise basiert auf einer Veröffentlichung von Galin aus dem Jahr 1946, der eine elegante und bequeme Lösung mittels Methode der komplexen Funktionen herleitete. Außerdem soll die analytische Lösung symbolisch mit dem Computeralgebrasystem Maple nachgeprüft werden.

Im zweiten Teil der Arbeit wird auf anderem Wege an das Problem numerisch mit Hilfe der Methode der finiten Elemente herangegangen. Zu diesem Zweck wird auf die Thematik zur Behandlung elastoplastischer Probleme mittels Finite-Elemente-Methode für plastisches Materialverhalten nach Tresca und von Mises eingegangen. Auf diese Theorie aufbauend erfolgte die Implementierung eines finite Elemente Programms in der Entwicklungsumgebung MATLAB, welches mit gegebenen analytischen Beispielen aus der Plastizität verifiziert wurde.

Abschließend werden die Ergebnisse der analytischen und numerischen Vorgehensweise resümiert und grafisch einander gegenübergestellt.

Abstract

This diploma thesis deals with the derivation of an analytical solution for the elastic-plastic extension of a biaxially loaded infinite plane with circular hole. The approach is based on a paper of Galin published in 1946, who derived an elegant and convenient solution by using the method of complex representation. Moreover the analytical solution should be reviewed and visualized with the aid of the computer algebra system Maple.

In the second part the stress components should be determined in a different way by a numerical approach using the finite element method. Hence, the development of a finite element program which, was implemented in the development environment of MATLAB, is described and instructions on how to solve elastic-plastic problems by using the FE-method for materials with type of Tresca and von Mises are given. For the verification, the program was continuously compared with given analytical examples from the field of plasticity.

Finally the analytical and numerical results are compared and graphically presented for interpretation purposes.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Abbildungsverzeichnis | V |
| I. Analytische Lösung | 1 |
| 1. Grundlegende Bezeichnungen zu Scheiben | 1 |
| 1.1. Airy'sche Spannungsfunktion | 2 |
| 1.2. Scheibengleichung | 3 |
| 2. Methode der komplexen Spannungsfunktionen | 4 |
| 2.1. Vorgehensweise nach Kolosov und Mußchelischwili | 4 |
| 2.2. Vorgehensweise nach Goursat | 6 |
| 2.3. Formeln von Kolosov | 9 |
| 3. Analytische Lösung im plastischen Bereich | 10 |
| 4. Lösung nach Galin | 12 |
| 4.1. Formulierung des Problems | 12 |
| 4.2. Kontinuitätsbeziehungen | 14 |
| 4.3. Konforme Abbildung | 16 |
| 4.4. Ermittlung der komplexen Spannungsfunktionen $\Phi_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$. . . | 19 |
| 4.5. Berechnung der Spannungskomponenten | 26 |
| 5. Zusammenfassung | 33 |
| II. Numerische Lösung | 34 |
| 6. Lineare Finite-Elemente-Methode | 34 |
| 6.1. Elementformulierung | 36 |
| 6.1.1. Hexaederelement mit 27 Knoten - isoparametrischer Ansatz . . . | 36 |
| 6.1.2. Ermittlung der \mathbf{B} -Matrix | 38 |
| 6.1.3. Ermittlung des konsistenten Lastvektors \mathbf{F} | 39 |
| 6.2. FE-Beispiel für linear-elastisches Materialverhalten | 40 |
| 6.2.1. Analytische Lösung | 40 |
| 6.2.2. FE-Lösung | 41 |
| 7. Nichtlineare Finite-Elemente-Methode | 43 |
| 7.1. Iteratives Lösungsverfahren nach Newton-Raphson | 45 |

| | |
|--|-----------|
| 8. Isotrope Plastizität kleiner Verzerrungen | 49 |
| 8.1. Linearelastisches-idealplastisches Körpermodell | 50 |
| 8.2. Rheologisches Grundmodell | 51 |
| 8.3. Werkstoffgesetz | 52 |
| 8.3.1. Materialgesetz im elastischen Bereich | 52 |
| 8.3.2. Materialgesetz im plastischen Bereich | 52 |
| 8.4. Fließhypothesen | 54 |
| 8.4.1. Hypothese nach Tresca | 54 |
| 8.4.2. Hypothese nach von Mises | 57 |
| 9. Lösung plastischer Probleme mittels FE-Methode | 60 |
| 9.1. Prädiktor-Korrektor-Verfahren | 60 |
| 9.2. Algorithmenkonsistente Materialtangente | 65 |
| 9.3. Beispiel zur isotropen Plastizität nach von Mises: Dickwandige Hohlku- gel unter Innenverschiebung | 69 |
| 9.3.1. Analytische Lösung | 69 |
| 9.3.2. Exkurs zur verschiebungsgesteuerten FE-Methode | 71 |
| 9.3.3. FE-Lösung | 73 |
| 9.4. Beispiel zur isotropen Plastizität nach Tresca: Dickwandiges Rohr unter Innendruck | 76 |
| 9.4.1. Analytische Lösung | 76 |
| 9.4.2. FE-Lösung | 78 |
| 10. Zusammenfassung | 85 |
| III. Ergebnisse | 86 |
| 11. Allseitig gezogene Scheibe mit Kreisloch | 86 |
| 11.1. Analytische Lösung | 86 |
| 11.2. FE-Berechnung | 87 |
| 11.3. Darstellung der Vergleichsspannung | 89 |
| 11.4. Darstellung der Spannungskomponenten | 96 |
| Literatur | 98 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|---|----|
| 1. | Scheibe mit Kreisloch, allseitig gezogen | 1 |
| 2. | Koordinatentransformation von x, y auf r, ϑ | 13 |
| 3. | Spannungskomponenten von σ_n auf C | 14 |
| 4. | Konforme Abbildung | 17 |
| 5. | Hexaederelement mit 27 Knoten und korrespondierendes 2d Scheiben- sowie 1d Linienelement | 37 |
| 6. | Hexaederelement Knotennummerierung | 37 |
| 7. | Volumenelement unter Oberflächenlast p | 39 |
| 8. | Scheibe mit Loch | 40 |
| 9. | FE-Resultate für das Kirschproblem mit Postprocessing GiD | 41 |
| 10. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung in MATLAB | 42 |
| 11. | Newton-Raphson Methode | 45 |
| 12. | Linearelastisches-idealplastisches Körpermodell | 50 |
| 13. | Prandtl-Reuss-Körper | 51 |
| 14. | Mohr'scher Spannungskreis | 54 |
| 15. | Fließflächen im Hauptspannungsraum | 56 |
| 16. | Der Radial-Return-Algorithmus für von Mises | 63 |
| 17. | Dickwandige Hohlkugel unter Innenverschiebung | 69 |
| 18. | Ausgewählte Knoten für Evolutionsgraphen | 73 |
| 19. | Verschiebungsevolution des dritten Inkrementes | 73 |
| 20. | Hohlkugel unter Innenverschiebung mit Postprocessing GiD | 75 |
| 21. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung in MATLAB | 75 |
| 22. | Ermittlung von σ_V der Mittelknoten entlang der x -Achse | 76 |
| 23. | Dickwandiges Rohr unter Innendruck | 77 |
| 24. | Resultate für ein FE-Netz mit 60 Elementen | 80 |
| 25. | Resultate für ein FE-Netz mit 300 Elementen | 81 |
| 26. | General-Return-Algorithmus für die verwendete Fließfläche nach Tresca | 82 |
| 27. | Rohr unter Innendruck für ein Netz mit 60 Elementen | 83 |
| 28. | Rohr unter Innendruck für ein Netz mit 300 Elementen | 84 |
| 29. | Scheibe mit Kreisloch - Vernetzung des Ersatzsystems mit GiD | 88 |
| 30. | Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,2k$ | 90 |
| 31. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,2k$ | 90 |
| 32. | Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$ | 91 |
| 33. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,4k$ | 91 |
| 34. | Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,6k$ | 92 |
| 35. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,6k$ | 92 |
| 36. | Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,8k$ | 93 |
| 37. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,8k$ | 93 |
| 38. | Konturplot σ_V für den Lastfall $q = p = 3,0k$ | 94 |
| 39. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 3,0k$ | 94 |

| | | |
|-----|--|----|
| 40. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung entlang der x -Achse für den Belastungsfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$ | 96 |
| 41. | Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung entlang der y -Achse für den Belastungsfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$ | 97 |

Teil I.

Analytische Lösung

Gesucht seien die Spannungskomponenten σ_{xx} , τ_{xy} , sowie σ_{yy} für die elastoplastische Beanspruchung einer allseitig gezogenen Scheibe mit Kreisloch, die durch die im Unendlichen wirkenden Spannungen $\sigma_{xx\infty} = p$, $\sigma_{yy\infty} = q \geq p$ und $\tau_{xy\infty} = 0$ hervorgerufen werden (vgl. [1]).

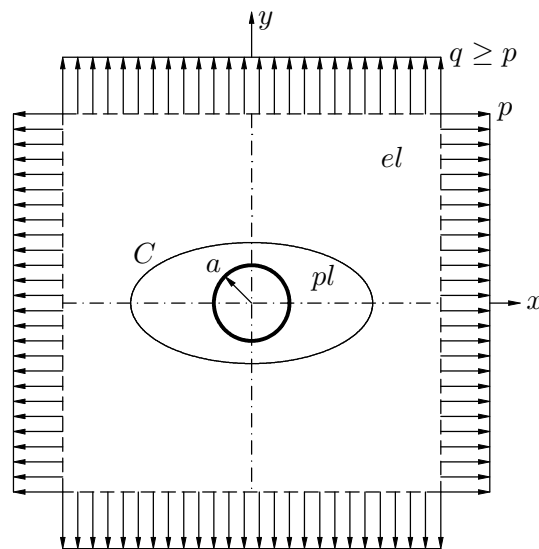


Abbildung 1: Scheibe mit Kreisloch, allseitig gezogen

1. Grundlegende Bezeichnungen zu Scheiben

Ein zweidimensionales Bauteil $l, b \gg h$, unter Krafteinwirkung in seiner Ebene, dessen Mittelfläche bei der Deformation eben bleibt, wird Scheibe genannt. Die charakteristische Wirkung ist die Membranwirkung. Wird der Körper einer Belastung unterworfen, die Biege- und Torsionswirkung hervorruft, wodurch sich die Mittelfläche verwölbt, so wird das zweidimensionale Bauteil als Platte bezeichnet (vgl. [2], S.18).

1.1. Airy'sche Spannungsfunktion

Das statische Grundgesetz der Kontinuumsmechanik wird durch die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_{ji,j} + f_i^B = 0 \quad (1)$$

in Indexschreibweise ausgedrückt, wobei $\sigma_{ji,j} = \nabla \sigma = \text{div } \sigma$.

Im Falle des ebenen Spannungszustandes ($\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$) und ebenen Verzerungszustandes ($\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y)$) ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Elastizitätstheorie, bei verschwindenden Volumskräften $f^B \rightarrow 0$, zu

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Daraus folgt

$$\exists g(x, y) \quad \text{die} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\tau_{xy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \sigma_{xx} \quad \text{erfüllt}$$

$$\exists h(x, y) \quad \text{die} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma_{yy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\tau_{xy} \quad \text{erfüllt}$$

Gleichsetzen von τ_{xy} führt zur Schlußfolgerung, dass eine Funktion $F(x, y)$ existiert, durch die sich die Spannungskomponenten ausdrücken lassen.

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \implies \quad g = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (4)$$

Die Hilfsfunktion F stellt die Airy'sche Spannungsfunktion dar und befriedigt die Gleichgewichtsbedingungen aus Gleichung (1) (vgl. [3], S. 92f).

1.2. Scheibengleichung

Aus der zweidimensionalen Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (5)$$

folgt nach Einsetzen des Stoffgesetzes zusammen mit den Gleichungen (2) und (3) die Verträglichkeitsbedingung für den statischen isothermen Sonderfall, unter Nichtberücksichtigung von Volumskräften, mit

$$\Delta (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad \dots \text{Levy'sche Gleichung} \quad (6)$$

Der Term $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ erfüllt die Laplace-Gleichung und stellt damit eine harmonische Funktion dar.

Unter Berücksichtigung der Airy'schen Spannungsfunktion F schreibt sich Gleichung (6) zu

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \Delta \Delta F = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (7)$$

bzw. ausgeschrieben

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung wird als biharmonische Gleichung, bzw. Bipotentialgleichung bezeichnet, und stellt die Scheibengleichung dar (vgl. [2], S.22f).

Für die weiteren Betrachtungen ist F unter der Voraussetzung biharmonisch, dass ein betrachtetes Gebiet S einfach zusammenhängend ist. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit der 2. Ableitung von F , und somit die Eindeutigkeit der Funktion F .

2. Methode der komplexen Spannungsfunktionen

2.1. Vorgehensweise nach Kolosov und Mußchelischwili

Nach der Methode der komplexen Spannungsfunktionen von Kolosov und Mußchelischwili, sollen die Bestimmungsgleichungen der gesuchten Spannungen $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \sigma_{yy}$ hergeleitet werden, indem die Lösung des Problems auf die Bestimmung zweier komplexer analytischer Funktionen $\varphi(z)$ und $\lambda(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ rückgeführt wird.

Da sich die Spannungskomponenten mithilfe der Airy'schen Spannungsfunktion $F(x, y)$ ausdrücken lassen, gilt es $F(x, y)$ zu bestimmen.

Sei F definiert als die Linearkombination der harmonischen Funktionen p_i für $i = 1, 2, 3$ (vgl. [4], Kap. 2)

$$F = xp_1(x, y) + yp_2(x, y) + p_3(x, y) \quad (9)$$

so ist die Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ aufgrund der Eigenschaft $\Delta p_i = 0$ der Potentiale p_i erfüllt.

Verifikation der Bedingung $\Delta\Delta F = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p_1 + x \frac{\partial p_1}{\partial x} + y \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + x \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \frac{\partial p_1}{\partial y} + p_2 + y \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial y} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + y \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial y^2} \quad (13)$$

Daraus folgt

$$\Delta F = 2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad \text{wegen} \quad \Delta p_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

und

$$\Delta\Delta F = 2\frac{\partial}{\partial x}\Delta p_1 + 2\frac{\partial}{\partial y}\Delta p_2 = 0 \quad (15)$$

Ein Beweis zur Gestalt von Gleichung (9) kann Quelle [3] S. 96 entnommen werden. Dabei wird die allgemeine Form der harmonischen Funktion F hergeleitet unter Berücksichtigung der Aussage, dass eine harmonische Funktion auch biharmonisch ist. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Es soll nun die Spannungsfunktion F in Abhängigkeit der komplexen Veränderlichen z gefunden werden. Also die komplexe Darstellung der biharmonischen Funktion als $F(z, \bar{z})$, wobei $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$.

Die Bestimmung der komplexen biharmonischen Funktion kann auf mehreren Wegen erfolgen.

Nach Quelle [3] S. 96ff gelangt man über folgende Überlegungen auf die gesuchte Darstellung. S sei als das vom Körper eingenommene Gebiet definiert, wobei $S \subset \mathbb{C}$ gilt. Des weiteren sei f eine holomorphe Funktion auf S .

$$f(z) = f(x + iy) = f_r(x, y) + if_i(x, y) \quad (16)$$

Somit erfüllen Realteil und Imaginärteil von f die Cauchy-Riemann Bedingungen

$$\frac{\partial f_r}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f_r}{\partial y} = -\frac{\partial f_i}{\partial x} \quad (17)$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind ein Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit. Unter der Voraussetzung, dass f noch einmal differenzierbar ist, folgt nach Differentiation von (17)

$$\frac{\partial^2 f_r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f_r}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial x} \quad (18)$$

und damit

$$\Delta f_r = \Delta f_i = 0 \quad (19)$$

Daraus folgt die Erkenntnis, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f harmonisch sind, oder jede harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion ist. Es kann nun eine komplexe analytische Funktion φ definiert werden, die auf S holomorph ist:

$$\varphi(z) = p_1 + ip_2 \quad \text{mit} \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = 0 \quad (20)$$

Eine harmonische Funktion U lässt sich nun mit der konjugiert harmonischen $\overline{\varphi(z)}$, als

$$U = 2\Re\{\varphi(z)\} = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} \quad (21)$$

darstellen.

Für $\Delta F = U$, wobei $\Delta\Delta F = \Delta U = 0$ erfüllt ist, ergibt sich die gesuchte Formulierung

$$F = \Re\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\} \quad (22)$$

$$F = \frac{1}{2} \left[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \right] \quad (23)$$

Dabei wurde die komplexe analytische Funktion $\chi(z)$ eingeführt, die auf S ebenfalls eine holomorphe Funktion darstellt. Mit den konjugiert komplexen analytischen Funktionen gelangt man schließlich zur Schreibweise nach Gleichung (23) (vgl. [3], S. 97)/(vgl. [4], Kap. 2).

Es werde noch erwähnt, dass $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ unter der Bedingung, dass S einfach zusammenhängend ist, holomorph sind.

2.2. Vorgehensweise nach Goursat

Die Herleitung nach Goursat geschieht auf anderem Wege und geht von der Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ aus. Eine Überführung der x, y -Koordinaten in neue Variablen der komplexen Ebene z, \bar{z} über die Zusammenhänge

$$\mathcal{J} = \begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \implies \mathcal{J}^{-1} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (24)$$

führt auf die komplexe Form von Gleichung (8) (vgl. [4], Kap.2).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Nach der Kettenregel ergibt sich für die partiellen Ableitungen ∂_x, ∂_y

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (27)$$

bzw. nach Invertieren für $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (29)$$

Der Laplace-Operator schreibt sich somit als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 + i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 \quad (30)$$

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (31)$$

Daraus folgt für die zweimalige Ausführung der Operation die komplexe Darstellung der biharmonischen Funktion.

$$\Delta\Delta = 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \implies \Delta\Delta F = 16 \frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (32)$$

Stufenweises Integrieren liefert

$$F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \right) \quad (33)$$

Da F reell sein muss folgt

$$F(z, \bar{z}) = \Re \{ \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) \} \quad (34)$$

Gleichung (23) und (33) sind die allgemeine Darstellung einer biharmonischen Funktion mit Hilfe zweier komplexer Potentiale $\varphi(z)$ und $\chi(z)$, die sich wie folgt mit den harmonischen Funktionen p_i , für $i = 1 \dots 4$, definieren lassen.

$$\varphi(z) = p_1 + ip_2 \quad , \quad \overline{\varphi(z)} = p_1 - ip_2 \quad (35)$$

$$\chi(z) = p_3 + ip_4 \quad , \quad \overline{\chi(z)} = p_3 - ip_4 \quad (36)$$

Durch Substitution der Gleichungen (35), (36) und (24) in (33) kann gezeigt werden, dass $F(z, \bar{z})$ der Linearkombination (9) entspricht, und somit auch biharmonisch ist (vgl. [4], Kap. 2).

$$\begin{aligned} 2F &= (x - iy)(p_1 + ip_2) + (x + iy)(p_1 - ip_2)p_3 + ip_4 + p_3 - ip_4 \\ 2F &= 2xp_1 + 2yp_2 + 2p_3 \end{aligned} \quad (37)$$

2.3. Formeln von Kolosov

Die Formeln von Kolosov stellen zwei komplexe Gleichungen dar, die die Spannungskomponenten σ_{xx}, τ_{yx} und σ_{yy} auf eine Darstellung über die komplexen Spannungsfunktionen $\varphi(z), \chi(z)$ rückführt.

Folgende Beziehungen seien gegeben:

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 F \quad (38)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 F \quad (39)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F \quad (40)$$

Addition der Gleichungen (38) und (39) liefert

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = \Delta F = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (41)$$

Zweimaliges Differenzieren von (33) nach ∂z und $\partial \bar{z}$ führt auf

$$4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] = \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \quad (42)$$

Multiplikation der Gleichung (39) mit (-1) und der Gleichung (40) mit $(2i)$ und darauf folgender Addition ergibt

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 \left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z) \right] \quad (43)$$

Sei per Definition $\psi'(z) \equiv \chi''(z)$, so lauten die Kolosovschen Formeln (vgl. [3], S.100)/(vgl. [5], S.234):

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] = 4\Re\{\varphi'(z)\} \quad \dots \text{reell} \quad (44)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 \left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \right] \quad \dots \text{komplex} \quad (45)$$

Somit können bei bekanntem $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die drei Spannungskomponenten durch Trennen des Real- und Imaginärteils bestimmt werden.

3. Analytische Lösung im plastischen Bereich

Für eine detaillierte Herleitung für den plastizierten Bereich wird auf die Quellen [5] S. 167 und [6] S. 43ff verwiesen. Dabei liegt der Lösung eine Querdehnungszahl von $\nu = 0,5$ für inkompressibles Material zugrunde, die für die numerische Umsetzung, später in Abschnitt (III), noch von größerer Bedeutung sein wird.

Die Spannungskomponenten in Polarkoordinaten lauten:

$$\sigma_{rr} = 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (46)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = 2k + \sigma_{rr} = 2k \left(1 + \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) \quad (47)$$

$$\tau_{r\vartheta} = 0 \quad (48)$$

Diese Ausdrücke genügen der Fließbedingung nach Tresca

$$(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr})^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = 4k^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_F = 2k \quad (49)$$

Nähere Erläuterungen zur Fließhypothese nach Tresca folgen in Abschnitt (8.4.1).

Da die Kolosov'schen Formeln der plastischen Zone für die Lösung nach Galin (vgl. [1]) gebraucht werden, ist die Bestimmung der Airy'schen Spannungsfunktion F_p für den plastischen Bereich notwendig.

Sei F_p eine Funktion $F_p(r)$, so ergeben sich die einzelnen Spannungen nach Herleitung für Polarkoordinaten zu (vgl. [5], S. 234)/(vgl. [2], S.25f)

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial \vartheta^2} \quad (50)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2 F_p}{\partial r^2} \quad (51)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_p}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_p}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial \vartheta} \right) \quad (52)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Bedingung (49), wobei keine Abhängigkeit von ϑ besteht, erhält man die inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in Polarform

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial r} - \frac{\partial^2 F_p}{\partial r^2} \right)^2 = 4k^2 \quad (53)$$

Daraus errechnet sich die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F_p = kr^2 \left(\ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{1}{2} \right) \quad (54)$$

Die Kontrolle erfolgt durch Bestimmung der Spannungskomponenten nach den Gleichungen (50) bis (52) mittels Airy'scher Spannungsfunktion im plastischen Bereich F_p .

Für den weiteren Rechengang muss F_p der biharmonischen Gleichung $\Delta \Delta F_p$ genügen. Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten schreibt sich nach Quelle [2] S. 26 mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad (55)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta F_p &= \frac{\partial^2 F_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial \vartheta^2} \\ &= 4k \ln \left(\frac{r}{a} \right) + 2k \\ \Delta \Delta F_p &= 4k \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} 4k \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

Somit ist F_p biharmonisch.

4. Lösung nach Galin

4.1. Formulierung des Problems

Bisher wurde das Problem der elastoplastischen Ausdehnung einer Scheibe mit Kreisloch wie folgt formuliert:

Für die elastische Zone lauten die Kolosov'schen Formeln:

$$L(F_e) = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] = 4\Re\{\varphi'(z)\} \quad (56)$$

$$M(F_e) = 2 \left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \right] \quad (57)$$

Die Ausdrücke $L(F_e)$ und $M(F_e)$ stehen stellvertretend als Abkürzungen für

$$L(F_e) \equiv \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \quad , \quad M(F_e) \equiv \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} \quad (58)$$

mit der Airy'schen Spannungsfunktion $F = F_e$ für den elastischen Bereich.

Für die analoge Schreibweise in der plastischen Zone wurde zuerst $L(F_p) = \Delta F_p$ berechnet.

$$L(F_p) = \sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \Delta F_p = 2k \left(2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + 1 \right) \quad (59)$$

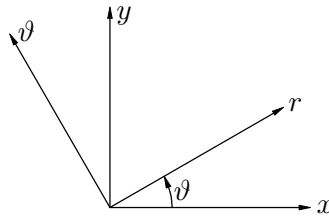
$$(60)$$

Die Ermittlung von $M(F_p)$ ist noch ausständig, und soll nun hergeleitet werden.

Unter Einführung der Polarform für die komplexen Variablen z, \bar{z} lautet deren Exponentialdarstellung

$$z = x + iy = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta} \quad (61)$$

$$\bar{z} = x - iy = r (\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = r e^{-i\vartheta} \quad (62)$$

Abbildung 2: Koordinatentransformation von x, y auf r, ϑ

Transformation von kartesischen auf polare Koordinaten nach den Transformationsgleichungen

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\vartheta) + \tau_{xy} \sin(2\vartheta) \quad (63)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\vartheta) - \tau_{xy} \sin(2\vartheta) \quad (64)$$

$$\tau_{r\vartheta} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\vartheta) + \tau_{xy} \cos(2\vartheta) \quad (65)$$

führt nach geeigneter Umformung auf die Beziehung

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\vartheta} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}) e^{i2\vartheta} \quad (66)$$

Gleichung $M(F_p)$ ergibt sich unter Verwendung der gegebenen Spannungskomponenten zu

$$M(F_p) = \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\vartheta}) e^{-i2\vartheta} = 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (67)$$

mit $e^{-i2\vartheta} = \frac{\bar{z}}{z}$, gebildet aus dem Quotienten der Gleichungen (61) und (62). Weiters gilt $r^2 = z\bar{z}$.

Die transformierten Kolosov'schen Formeln für die plastische Zone lauten insgesamt

$$L(F_p) = 2k \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{a} \right) + 1 \right) \quad (68)$$

$$M(F_p) = 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (69)$$

Somit ist die Lösung für das plastische Gebiet gegeben. Die Lösung im elastischen Bereich errechnet sich aus den Bestimmungsgleichungen $L(F_e)$ und $M(F_e)$ nach Gleichung (56) und (57), sofern die komplexen Spannungsfunktionen $\varphi(z), \chi(z)$ bestimmt wurden.

4.2. Kontinuitätsbeziehungen

In diesem Abschnitt werden die Kontinuitätsbeziehungen am elastoplastischen Interface C analysiert wodurch sich eine elegante, geschlossene Formulierung unter Einführung einer neuen biharmonischen Funktion $F = F_e - F_p$ ergibt.

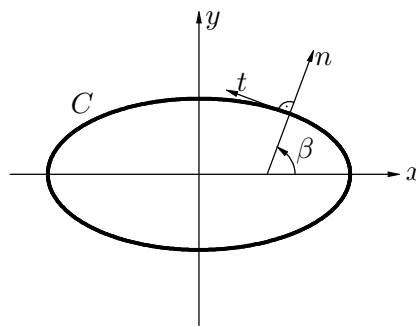


Abbildung 3: Spannungskomponenten von σ_n auf C

Am Rand C gilt, dass weder Normalspannungen σ_{nn} noch Tangentialspannungen τ_{nt} in ihren Verläufen Sprünge aufweisen. In Form zweier Gleichungen drückt sich diese Bedingung wie folgt aus:

$$\sigma_{nn}|_{C-} = \sigma_{nn}|_{C+} \iff [[\sigma_{nn}]]|_C = 0 \quad (70)$$

$$\tau_{nt}|_{C-} = \tau_{nt}|_{C+} \iff [[\tau_{nt}]]|_C = 0 \quad (71)$$

Die Transformationsgleichungen zu einem Spannungsvektor $\sigma_n = [\sigma_{nn} \quad \tau_{nt}]^T$ entsprechen

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\beta) + \tau_{xy} \sin(2\beta) \quad (72)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\beta) + \tau_{xy} \cos(2\beta) \quad (73)$$

Multiplikation von Gleichung (72) mit dem Faktor (2) sowie von Gleichung (73) mit $(-2i)$, und nachfolgender Addition liefert

$$2(\sigma_{nn} - i\tau_{nt}) = \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{L(F)} - \underbrace{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy})}_{M(F)} e^{2i\beta} \quad (74)$$

Damit ist der stetige Übergang an der Schnittstelle C , gemäß den Bedingungen (70) und (71), mit

$$\llbracket 2(\sigma_{nn} - i\tau_{nt}) \rrbracket = \llbracket (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \rrbracket - \llbracket (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}) \rrbracket e^{2i\beta} \quad (75)$$

ausgedrückt.

Wobei mit $F \equiv F_e - F_p$

$$L(F) \equiv L(F_e) - L(F_p) \stackrel{!}{=} 0 \quad (76)$$

$$M(F) \equiv M(F_e) - M(F_p) \stackrel{!}{=} 0 \quad (77)$$

folgt.

Es gilt also

$$L(F_e) = L(F_p) \quad (78)$$

$$M(F_e) = M(F_p) \quad (79)$$

Fazit: In weiterer Folge wird mit der Definition $L(F)$ und $M(F)$ gerechnet. Um die Gleichungen nach Kolosov zu lösen, müssen als nächster Schritt die Randbedingungen des Problems für die neue Funktion F aufgestellt werden.

Wegen Kontinuität auf C ergeben sich zwei Randbedingungen mit

$$L(F) = L(F_e) - L(F_p) = 0 \quad (80)$$

$$M(F) = M(F_e) - M(F_p) = 0 \quad (81)$$

Die im theoretisch Unendlichen, an den Seiten der Scheibe angreifenden Belastungen sind $\sigma_{yy_\infty} = q, \sigma_{xx_\infty} = p$. Für die Randbedingungen $\rightarrow \infty$ müssen zunächst die Bedingungen in den beiden Zonen separat bestimmt werden.

$$\rightarrow \infty : \quad L(F_e) = q + p \quad , \quad M(F_e) = q - p \quad (82)$$

$$\rightarrow \infty : \quad L(F_p) = 2k \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{a} \right) + 1 \right) \quad , \quad M(F_p) = 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (83)$$

Daraus folgen für $L(F)$ und $M(F)$ die zwei Randbedingungen im Unendlichen

$$L(F) = q + p - 2k \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{a} \right) + 1 \right) \quad (84)$$

$$M(F) = q - p - 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (85)$$

Somit stehen vier Gleichungen für die Unbekannten $\varphi'(z)$ und $\psi'(z)$ zur Verfügung. Zwei aufgrund der Randbedingungen auf C und zwei durch die Randbedingungen im Unendlichen.

4.3. Konforme Abbildung

Für grundlegende Eigenschaften zu konformen Abbildungen sei auf die Quelle [3] S. 144ff verwiesen.

Unter einer konformen Abbildung versteht man eine injektive komplex differenzierbare Funktion auf dem Gebiet S nach Gleichung (86). Es wird zwischen zwei komplexen Veränderlichen z und ζ unterschieden, die über die Beziehung

$$z = \omega(\zeta) \quad (86)$$

verknüpft sind. Dabei sei z ein definierter Punkt der z -Ebene im Gebiet $S \subset \mathbb{C}$ und $\omega(\zeta)$ eine in der ζ -Ebene eindeutige analytische Funktion in einem Gebiet $\Sigma \subset \mathbb{C}$. Jedem Punkt z des Gebietes S wird über $\omega(\zeta)$ ein definierter Punkt ζ des Gebietes Σ zugeordnet. Die Umkehrung, dass jeder Punkt ζ ein Punkt z in S entspricht wird ebenfalls vorausgesetzt. Daher spricht man von einer umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung des Gebietes S auf das Gebiet Σ .

Eine Abbildung heißt konform, wenn sie winkel- und orientierungstreu ist. Zwei Linienelemente im Gebiet S schließen somit im Gebiet Σ denselben Winkel ein, und der Richtungssinn bleibt erhalten.

Diese Eigenschaft der Transformation wird in der Elastizitätstheorie häufig angewandt um komplizierte Kurven auf einfachere abzubilden. Wegen der Invarianz ist ein durchgeführter Beweis in ζ auch in z gültig.

Es soll nun mit Hilfe der konformen Abbildung die elastische Zone $\bar{S} \subset \mathbb{C}$ in der z -Ebene (das Äußere der Randkurve C) auf das Äußere des Einheitskreises γ in der ζ -Ebene gemäß Abbildung (4) transformiert werden.

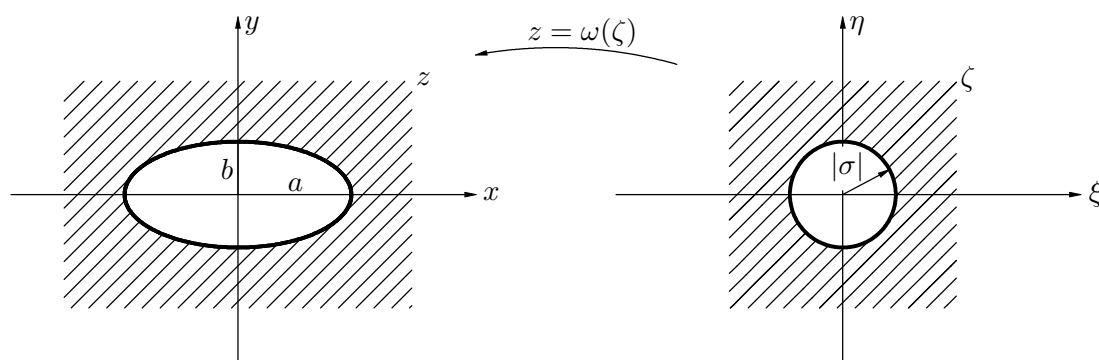


Abbildung 4: Konforme Abbildung $z = \omega(\zeta)$

Das Gebiet \bar{S} ist einfach zusammenhängend, da es nur durch den Rand C begrenzt ist. Theoretisch könnte auch ein Gebiet endlich und das andere unendlich sein. Würde das unendliche Gebiet \bar{S} auf ein endliches $\bar{\Sigma}$ (elastischer Bereich in der ζ -Ebene) abgebildet werden, so müsste die Funktion $\omega(\zeta)$ in einem bestimmten Punkt unendlich werden, der dem unendlich entfernten Punkt in der z -Ebene entspricht. Die Existenz einer Singularität im Punkt $\zeta = 0$ zeigt die folgende Gestalt der Funktion $\omega(\zeta)$:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \text{holomorphe Funktion} \quad (87)$$

Für die Lösung nach Galin sind allerdings beide Gebiete \bar{S} und $\bar{\Sigma}$ unendlich, begrenzt durch eine einfache geschlossene Kurve C beziehungsweise γ .

Es wird die konforme Abbildung auf das Äußere des Einheitskreises γ durchgeführt. Somit entspricht ein Punkt z im Unendlichen von \bar{S} einem eindeutigen Punkt ζ im Unendlichen von $\bar{\Sigma}$. Dadurch ergibt sich die Gestalt der Abbildungsfunktion mit

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \text{holomorphe Funktion} \quad (88)$$

Dabei ist c eine reelle, positive Konstante und die holomorphe Funktion eine analytische Funktion außerhalb des Einheitskreises. Nach Quelle [5] S. 235ff wird z mittels einer Laurent-Reihe dargestellt in der Form

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \quad (89)$$

Der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}$ wird bei einem Grenzübergang $\rightarrow \infty$ zu Null wodurch sich für $z = \infty$ der zugeordnete Punkt $\zeta = \infty$ ergibt.

Die weitere Rechnung wird in Quelle [5] und [1] mit der Darstellung von $\omega(\zeta)$ als Laurent-Reihe fortgesetzt. [5] zeigt auf S. 237 in einer detaillierten Herleitung die Gestalt der elastoplastischen Schnittstelle in Form einer Ellipse, indem Gleichung (89) in den Ausdruck

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \quad (90)$$

umgeformt wird.

In dieser Arbeit soll nun mit Gleichung (90), unter der Annahme der elliptischen Gestalt der Randkurve C , weitergerechnet werden.

Sei ζ am Einheitskreis per Definition σ so gilt für den Radius

$$|\sigma| = \xi^2 + \eta^2 = 1 \quad \text{mit} \quad \zeta|_{\gamma} = \sigma = \xi + i\eta \quad (91)$$

Gleichung (90) ergibt am Einheitskreis

$$z = c \left(\sigma + \frac{\alpha}{\sigma} \right) \quad (92)$$

$$x + iy = c \left(\xi + i\eta + \frac{\alpha}{\xi^2 + \eta^2} (\xi - i\eta) \right) = c (\xi + i\eta + \alpha\xi - \alpha i\eta) \quad (93)$$

Daraus folgt

$$\Re\{z\} = x = c(\xi + \alpha\xi) = c(1 + \alpha)\cos\vartheta \quad (94)$$

$$\Im\{z\} = y = c(\eta - \alpha\eta) = c(1 - \alpha)\sin\vartheta \quad (95)$$

was der Parameterform der Ellipsengleichung entspricht, wobei die Polardarstellung $\xi = 1 \cos \vartheta$ und $\eta = 1 \sin \vartheta$ herangezogen wurde.

Mit der Ellipsenfunktion

$$\text{Ellipse : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (96)$$

zeigt sich, dass Gleichung (90) die Funktion für die konforme Abbildung einer Ellipse C auf einen Einheitskreis γ ist. Die Hauptachsen der Ellipse sind mit

$$a = c(1 + \alpha) \quad , \quad b = c(1 - \alpha) \quad (97)$$

gegeben.

4.4. Ermittlung der komplexen Spannungsfunktionen $\Phi_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$

Die komplexen Spannungsfunktionen in den aufgestellten Randbedingungen lassen sich durch $L(F) = L(F_e) - L(F_p)$ bzw. $M(F) = M(F_e) - M(F_p)$ darstellen. Damit beschreiben sich die Randbedingungen am elastoplastischen Interface C durch Gleichung (56) und (57), indem man $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ durch andere (zunächst unbekannte) komplexe Spannungsfunktionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ ersetzt.

$$L(F) = 2 \left[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} \right] = 4\Re\{\varphi_1'(z)\} \quad (98)$$

$$M(F) = 2 \left[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \right] \quad (99)$$

Aufgrund der konformen Abbildung werden für die weitere Berechnung folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\Phi_1(\zeta) \equiv \varphi_1'(\omega(\zeta)) = \varphi_1'(z) \quad (100)$$

$$\Psi_1(\zeta) \equiv \psi_1'(\omega(\zeta)) = \psi_1'(z) \quad (101)$$

Damit schreiben sich die Randbedingungen am elastoplastischen Interface γ in der ζ -Ebene zu

$$L(F) = 2 \left[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] = 4\Re \{ \Phi_1(\zeta) \} \quad (102)$$

$$M(F) = 2 \left[\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) \frac{d\zeta}{d\omega(\zeta)} + \Psi_1(\zeta) \right] = 2 \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) + \Psi_1(\zeta) \right] \quad (103)$$

unter Verwendung von $\Phi_1'(\zeta) \frac{d\zeta}{d\omega(\zeta)} = \frac{d}{dz} [\varphi_1'(\omega(\zeta))] = \varphi_1''(z)$.

Im Zentrum dieses Abschnitts steht nun die Bestimmung der komplexen Spannungsfunktionen $\Phi_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$.

Für die Kontinuitätsbedingung am Rand γ muss der Term $\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}$ für $\zeta = \sigma$ gebildet werden. Es folgt

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \xrightarrow{\text{auf } \gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = \frac{c(\bar{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma})}{c(1 - \frac{\alpha}{\sigma^2})} = \frac{\sigma^2(\bar{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma})}{\sigma^2 - \alpha}$$

Mit der Eigenschaft $\sigma\bar{\sigma} = (\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = \xi^2 + \eta^2 = 1$ erhält man schließlich

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = \sigma \frac{(1 + \sigma^2\alpha)}{\sigma^2 - \alpha} \quad (104)$$

Nach Substitution letzteren Ausdrucks in Gleichung (103) ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen aus den Randbedingungen am Einheitskreis:

$$L(F) = 0 \quad \implies \quad \Phi_1(\sigma) + \overline{\Phi_1(\sigma)} = 0 \quad (105)$$

$$M(F) = 0 \quad \implies \quad \sigma \frac{(1 + \sigma^2\alpha)}{\sigma^2 - \alpha} \Phi_1'(\sigma) + \Psi_1(\sigma) = 0 \quad (106)$$

Zwei weitere Bestimmungsgleichungen leiten sich aus den Randbedingungen für $\zeta \rightarrow \infty$ ab. Als Grenzwert ergibt sich für z

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} z = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \implies z \rightarrow c\zeta, \quad \bar{z} \rightarrow c\bar{\zeta} \quad (107)$$

Damit folgt im Unendlichen mit Hilfe von Gleichung (84) und (85)

$$L(F) \rightarrow \infty \implies 2 \left[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] = q + p - 2k \left(1 + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) + \ln(\zeta) + \ln(\bar{\zeta}) \right) \quad (108)$$

$$M(F) \rightarrow \infty \implies 2 \left[\bar{\zeta} \Phi_1'(\zeta) + \Psi_1(\zeta) \right] = q - p - 2k \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \quad (109)$$

Mit den Gleichungen (105), (106), (108) und (109) wurden nun die Kontinuitätsbeziehungen zur Ermittlung von $\Phi_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$ ausgedrückt (vgl. [5], S. 236, Gl. 48.10/48.11).

Bei genauerer Betrachtung von Gleichung (108) kann die Funktion $\Phi_1(\zeta)$ in der Form

$$\Phi_1(\zeta) = -k \ln(\zeta) + h(\zeta) \quad (110)$$

dargestellt werden.

Die Nebenrechnung zeigt die Ermittlung der analytischen Funktion $h(\zeta)$:

Aus

$$2 \left[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] = 4\Re \{ \Phi_1(\zeta) \} = q + p - 2k \left(1 + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) \right) - 4k\Re \{ \ln(\zeta) \} \quad (111)$$

folgt über Koeffizientenvergleich die analytische Funktion zu

$$4\Re \{ h(\zeta) \} \equiv q + p - 2k \left(1 + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) \right) \quad (112)$$

womit sich die Darstellung nach (110) ergibt.

Aus Gleichung (105) folgt, dass der Realteil von Φ_1 am Einheitskreis unter

$$\Phi_1(\sigma) + \overline{\Phi_1(\sigma)} = 2\Re\{\Phi_1(\sigma)\} = 0 \quad (113)$$

verschwindet.

Mit dieser Erkenntnis ergibt sich in weiterer Folge aus der modifizierten Gleichung (110) am Einheitskreis γ

$$\begin{aligned} \underbrace{2\Re\{\Phi_1(\sigma)\}}_{\Phi_1(\sigma)+\overline{\Phi_1(\sigma)}} &= 0 = -k \ln(\sigma) + h(\sigma) - k \ln(\bar{\sigma}) + h(\bar{\sigma}) \\ 0 &= -k \ln(\underbrace{\sigma\bar{\sigma}}_{|\sigma|=1}) + h(\sigma) + h(\bar{\sigma}) \\ 0 &= 2\Re\{h(\sigma)\} \end{aligned} \quad (114)$$

Die Konsequenz, dass der Realteil von $h(\sigma)$ am Einheitskreis verschwindet, zieht den Schluss nach sich, dass $\Re\{h(\zeta)\}$ notwendigerweise überall in der gesamten ζ -Ebene verschwindet.

Fazit:

$$\Re\{h(\sigma)\} = 0 \quad \implies \quad \Re\{h(\zeta)\} = 0 \quad (115)$$

Somit folgt aus Gleichung (112) die Forderung für die Konstante c :

$$c = a e^{\left(\frac{q+p}{4k} - \frac{1}{2}\right)} \quad \implies \quad c > 0 \quad (116)$$

Bei der Herleitung der Airy'schen Spannungsfunktion $F(z, \bar{z})$ unter Abschnitt (2.1) wurden bereits die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen (Gleichung (17)) erwähnt. Mit Hilfe dieser Kriterien kann die allgemeine Darstellung der analytischen Funktion $h(\zeta)$ untersucht werden.

Die Funktion sei in allgemeiner Form

$$h(\zeta) = h(\xi, \eta) = h_r(\xi, \eta) + ih_i(\xi, \eta) \quad (117)$$

mit dem Realteil $\Re \{h(\zeta)\} = h_r(\xi, \eta)$ und dem Imaginärteil $\Im \{h(\zeta)\} = h_i(\xi, \eta)$.

Der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil über die Cauchy-Riemann Bedingungen lautet

$$\frac{\partial h_r}{\partial \xi} = \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \quad , \quad \frac{\partial h_r}{\partial \eta} = -\frac{\partial h_i}{\partial \xi} \quad (118)$$

Daraus resultiert folgende Erkenntnis über $h(\zeta)$:

Aus $\frac{\partial h_r}{\partial \xi} = \frac{\partial h_i}{\partial \eta}$ resümiert mit $\Re \{h(\zeta)\} = h_r = 0$, dass der Imaginärteil $\Im \{h(\zeta)\} = h_i$ nur eine Funktion von ξ ist.

$$h_i = h_i(\xi) \quad (119)$$

Mit der zweiten Bedingung $\frac{\partial h_r}{\partial \eta} = -\frac{\partial h_i}{\partial \xi}$ folgt anschließend

$$h_i = \text{const.} \quad (120)$$

Daher ergibt sich

$$h(\zeta) = i \text{ const.} \quad (121)$$

Einsetzen in Gleichung (110) führt auf

$$\Phi_1(\zeta) = -k \ln(\zeta) + h(\zeta) = -k \ln(\zeta) + i \text{ const.} \quad (122)$$

Somit lässt sich die Ableitung

$$\Phi_1'(\zeta) = -\frac{k}{\bar{\zeta}} \quad (123)$$

bestimmen.

Für $\zeta = \sigma$ folgt am Einheitskreis $\Phi_1'(\sigma) = -\frac{k}{\sigma}$. In Gleichung (106) eingesetzt zur Ermittlung von $\Psi_1(\sigma)$ ergibt sich der Ausdruck

$$-\frac{k}{\sigma} \frac{(1 + \sigma^2 \alpha)}{\sigma^2 - \alpha} + \Psi_1(\sigma) = 0 \quad (124)$$

Daraus errechnet sich die Spannungsfunktion $\Psi_1(\sigma)$ zu

$$\Psi_1(\sigma) = k \frac{(1 + \sigma^2 \alpha)}{\sigma^2 - \alpha} \quad (125)$$

Die Randbedingung (109) für $\zeta \rightarrow \infty$ liefert den Grenzwert von $\Psi_1(\zeta)$ im Unendlichen:

$$\begin{aligned} 2 \left[\bar{\zeta} \Phi_1'(\zeta) + \Psi_1(\zeta) \right] &= q - p - 2k \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \\ \implies \Psi_1(\zeta) &= \frac{q - p}{2} \quad \text{für } \zeta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (126)$$

Unter der Bedingung, dass auf der elastoplastischen Schnittstelle $M(F) = 0$ erfüllt ist, kann Gleichung (103) auf die Form nach Gleichung (127) umgeformt werden.

Damit kann die Spannungsfunktion aus (vgl. [5], S. 237, Gl. 48.15)

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \frac{k}{\zeta} \quad (127)$$

für das Gebiet in der ζ -Ebene aufgestellt werden (vgl. [5], S.238)/(vgl. [1], S.373, Gl. 1.46).

$$\Psi_1(\zeta) = k \frac{(1 + \alpha \zeta^2)}{\zeta^2 - \alpha} \quad (128)$$

Durchführen des Grenzübergangs für $\zeta \rightarrow \infty$ liefert zur Kontrolle den Wert in (126):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Psi_1(\zeta) = k\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{(q-p)}{2k} \quad (129)$$

Unter der Annahme, dass $\alpha = 1$ gesetzt wird, ergibt sich im Unendlichen die Spannung $\sigma_{V\infty} = \frac{(q-p)}{2} = k$, woraus sich die Tatsache schließen lässt, dass die gesamte Scheibe in einem plastischen Zustand verharret. Daher ist es notwendig für p und q eine gewisse Beschränkung aufzuerlegen. Aus $\alpha < 1$ folgt die Bedingung

$$\frac{(q-p)}{2} < k \quad (130)$$

Für $\alpha = 0$ folgt $q = p$. Dies entspricht dem Fall der allseitig gleichen Beanspruchung. Nach den Gleichungen (97) ergeben sich die Halbachsen zu $a = b = c$. Die Randkurve C des elastoplastischen Interface geht somit von der Ellipse in einen Kreis mit Radius c über.

$$\text{Ellipse : } \frac{x^2}{c^2(1+\alpha)^2} + \frac{y^2}{c^2(1-\alpha)^2} = 1 \quad \implies \quad \text{Kreis : } x^2 + y^2 = c^2 \quad (131)$$

Der Gültigkeitsbereich von α folgt insgesamt mit $0 \leq \alpha < 1$. Werte dazwischen führen auf die elliptische Gestalt von C .

Eine weitere Einschränkung der Lösung ist das Vorhandensein des plastischen Zustandes um das gesamte Kreisloch. Die kleine Halbachse b muss daher der Bedingung

$$c(1-\alpha) \geq a \quad (132)$$

genügen.

Einsetzen der Ausdrücke für c aus Gleichung (116) und α ergibt die Forderung zur möglichen Lösung:

$$e^{\left(\frac{q+p}{4k}-\frac{1}{2}\right)} \left(1 - \frac{(q-p)}{2}\right) \geq 1 \quad (133)$$

Die Belastungen q und p im Unendlichen können daher nicht beliebig unterschiedlich sein (vgl. [5], S. 239).

Im nächsten Abschnitt werden die Kolosov'schen Bestimmungsgleichungen mit den gefundenen Lösungen für $\Psi_1(\zeta)$ und $\Phi_1(\zeta)$ aufgestellt, woraus sich die gesuchten Spannungskomponenten errechnen lassen.

4.5. Berechnung der Spannungskomponenten

Die Spannungsverteilung der plastischen Zone sind nach den Gleichungen (46) bis (48) unter Kapitel (3) bekannt. Die Bestimmung der Verteilung im elastischen Bereich ist Ziel dieses Abschnitts.

Zuvor wurden die neu eingeführten komplexen Funktionen $\Phi_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$ ermittelt, wodurch sich die erste Kolosov'sche Gleichung für Kontinuität auf C mit

$$L(F) = 2 \left[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] = -2k \left[\ln(\zeta) + \ln(\bar{\zeta}) \right] \quad (134)$$

ergibt.

Über $L(F) = L(F_e) - L(F_p)$ kann somit $L(F_e)$ mit gegebenem $L(F_p)$ aufgestellt werden.

In der abgebildeten Ebene mit der komplexen Veränderlichen ζ folgt für die erste Formel nach Kolosov im plastischen Bereich nach Substitution von

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \quad \text{und} \quad \bar{z} = \overline{\omega(\zeta)} = c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}} \right)$$

mit

$$r = \sqrt{z\bar{z}} = c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

in Gleichung (83)

$$L(F_p) = 2k \left[1 + 2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) + \ln \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) + \ln \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}} \right) \right] \quad (135)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\ln \left(\frac{c}{a} \right) = \frac{(q+p)}{4k} - \frac{1}{2}$$

vereinfacht sich Gleichung (135) zu

$$L(F_p) = q + p + 2k \left[\ln \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) + \ln \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}} \right) \right] \quad (136)$$

Daraus folgt die erste Kolosov'sche Formel für die elastische Zone in der ζ -Ebene mit

$$\begin{aligned} L(F_e) &= L(F) + L(F_p) \\ &= -2k [\ln(\zeta) + \ln(\bar{\zeta})] + q + p + 2k \left[\ln \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) + \ln \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}} \right) \right] \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= q + p + 2k \left[\ln \left(\frac{\zeta + \frac{\alpha}{\zeta}}{\zeta} \right) + \ln \left(\frac{\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\bar{\zeta}}}{\bar{\zeta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (137)$$

Für die Rücktransformation in die ursprüngliche Ebene z ist noch der Ausdruck $\zeta(z)$ ausständig. Die explizite Darstellung von ζ ergibt sich aus der Umkehrung der Funktion $z = \omega(\zeta)$ für die konforme Abbildung.

$$\begin{aligned}
z &= c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \\
\Rightarrow \zeta_{1,2} &= \frac{z}{2c} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4c^2} - \alpha} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}}{2c}
\end{aligned} \tag{138}$$

Unter $\zeta = \zeta_1$ eingesetzt in $L(F_e)$ lautet Gleichung (137) für die komplexe Ebene z

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = q + p + 4k \Re \left\{ \ln \left(\frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right\} \tag{139}$$

Diese Gleichung stimmt mit Gleichung 1.59 auf S. 375 aus [1] überein. Somit steht eine reelle Gleichung für die später folgende Bestimmung der Spannungen zur Verfügung.

Ebenfalls sei die abgeleitete komplexe Spannungsfunktion $\varphi'(z)$ von Interesse, die über Koeffizientenvergleich mit Gleichung (44) aus Abschnitt (2.3) einfach gefunden werden kann.

$$\begin{aligned}
4 \Re \{ \varphi'(z) \} &\hat{=} q + p + 4k \Re \left\{ \ln \left(\frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right\} \\
\Rightarrow \varphi'(z) &= k \ln \left(\frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) + \frac{(q + p)}{4}
\end{aligned} \tag{140}$$

Die zweite Kolosov'sche Formel für Kontinuität auf C nach Gleichung (103) ist nach der Bestimmung von $\Phi'_1(\zeta)$ und $\Psi_1(\zeta)$ mit

$$M(F) = 2 \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi'_1(\zeta) + \Psi_1(\zeta) \right] = 2 \left[\frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right)}{c \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta^2} \right)} \left(-\frac{k}{\zeta} \right) + k \frac{(1 + \alpha \zeta^2)}{\zeta^2 - \alpha} \right] \tag{141}$$

gegeben.

Unter Verwendung von

$$M(F_p) = 2k \frac{\bar{z}}{z} = 2k \frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right)}{c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right)} \quad (142)$$

(143)

folgt aus $M(F_e) = M(F) + M(F_p)$

$$M(F_e) = 2k \left[-\frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right)}{c \left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta} \right)} + \frac{\left(\frac{1}{\zeta} + \alpha \zeta \right)}{\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}} + \frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right)}{c \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right)} \right] \quad (144)$$

für die komplexe Ebene ζ . Diese Gleichung ist ident zu [1] auf S. 376.

Analog zur ersten Formel von Kolosov soll jetzt in mehreren Schritten die umgekehrte Abbildung zurück auf die z -Ebene erfolgen.

$$M(F_e) = 2k \left[\frac{\left(-\bar{\zeta} - \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right) + \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta} \right)}{\left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right)} + \frac{\left(\frac{1}{\zeta} + \alpha \zeta \right)}{\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}} \right] \quad (145)$$

$$= 2k \left[\frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(-\frac{2\alpha}{\zeta} \right)}{c \left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta} \right)} + \frac{\left(\frac{1}{\zeta} + \alpha \zeta \right)}{\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}} \right] \quad (146)$$

Substitution von ζ liefert

$$M(F_e) = 2k \left[-\frac{\bar{z}}{z} \frac{\frac{4\alpha c}{z+\sqrt{\dots}}}{\left(\frac{z+\sqrt{\dots}}{2c} - \frac{2\alpha c}{z+\sqrt{\dots}} \right)} + \frac{\frac{2c}{z+\sqrt{\dots}} + \frac{\alpha(z+\sqrt{\dots})}{2c}}{\left(\frac{z+\sqrt{\dots}}{2c} - \frac{2\alpha c}{z+\sqrt{\dots}} \right)} \right] \quad (147)$$

$$= 2k \left[-\frac{\bar{z}}{z} \frac{4\alpha c 2c}{z (z + \sqrt{\dots}) (z + \sqrt{\dots}) - 4\alpha c^2} + \frac{4c^2 + \alpha (z + \sqrt{\dots}) (z + \sqrt{\dots})}{\underbrace{(z + \sqrt{\dots}) (z + \sqrt{\dots}) - 4\alpha c^2}} \right] \quad (148)$$

wobei $\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2} \equiv \sqrt{\dots}$ zwecks besserer Lesbarkeit gesetzt wurde.

Der Unterklammerte Ausdruck im Nenner von Gleichung (148) wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} (z + \sqrt{\dots})(z + \sqrt{\dots}) - 4\alpha c^2 &= z^2 + 2z\sqrt{\dots} + z^2 - 4\alpha c^2 - 4\alpha c^2 \\ &= 2z\sqrt{\dots} + 2(z^2 - 4\alpha c^2) \\ &= 2z\sqrt{\dots} + 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots} \end{aligned} \quad (149)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} M(F_e) &= 2k \left[-\frac{\bar{z}}{z} \frac{4\alpha c^2}{(z^2 + 2z\sqrt{\dots} + z^2 - 4\alpha c^2 - 4\alpha c^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4c^2 + \alpha(z^2 + 2z\sqrt{\dots} + z^2 - 4\alpha c^2 \pm 4\alpha c^2)}{2\sqrt{\dots}(z + \sqrt{\dots})} \right] \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} &= 2k \left[-\frac{\bar{z}}{z} \frac{4\alpha c^2}{\sqrt{\dots}(z + \sqrt{\dots})} \frac{(z - \sqrt{\dots})}{(z - \sqrt{\dots})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4c^2(1 + \alpha^2) + \underbrace{2\alpha\sqrt{\dots}(z + \sqrt{\dots})}}{2\sqrt{\dots}(z + \sqrt{\dots})} \right] \end{aligned} \quad (151)$$

Der hervorgehobene Ausdruck im zweiten Term der eckigen Klammer kürzt sich zu α , gleichbedeutend mit $\frac{(q-p)}{2k}$.

Somit lautet die zweite Formel von Kolosov $M(F_e)$ für die elastische Zone in der komplexen z -Ebene

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} &= 2k \left[\bar{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2c^2(1 + \alpha^2)}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}(z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2})} + \frac{q-p}{2k} \right] \end{aligned} \quad (152)$$

Über Koeffizientenvergleich mit Gleichung (57)

$$M(F_e) = \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (153)$$

können wiederum die komplexen Spannungsfunktionen $\varphi''(z)$ und $\psi'(z)$ bestimmt werden:

$$\Rightarrow \varphi''(z) = k \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \quad (154)$$

$$\Rightarrow \psi'(z) = k \frac{2c^2(1 + \alpha^2)}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2} (z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2})} + \frac{q - p}{2} \quad (155)$$

Zur Kontrolle wird hier noch die Probe beider Funktionen kurz angeführt.

Die Funktion $\varphi'(z)$ wurde bereits in einer detaillierten Herleitung der ersten Kolo-sov'schen Formel bestimmt. Nochmalige Differentiation $\frac{d}{dz}$ führt auf die zweite Ableitung $\varphi''(z)$. Damit ist der Ausdruck (154) korrekt.

Man beachte, dass die Bestimmung von $\psi'(z)$ nach Gleichung (155), bei genauerer Betrachtung der Herleitung ab Gleichung (144), durch Umformung des Terms

$$2k \frac{\left(\frac{1}{\zeta} + \alpha\zeta\right)}{\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}}$$

entstand, wodurch $\psi'_1(z) = \psi'(z)$ gilt und sich für die konforme Abbildung auf die ζ -Ebene

$$\begin{aligned} \psi'_1(\omega(\zeta)) &= k \left(\frac{c(1 + \alpha^2)}{\zeta \sqrt{c^2 \left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta}\right)^2 - 4\alpha c^2}} + \alpha \right) \\ &= k \left(\frac{1 + \alpha^2 + \alpha(\zeta^2 - \alpha)}{\zeta \left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}\right)} \right) \\ &= k \frac{1 + \alpha\zeta^2}{\zeta^2 - \alpha} = \Psi_1(\zeta) \end{aligned} \quad (156)$$

ergibt. Damit wurde die Korrektheit von $\psi'(z)$ gezeigt.

Zusammengefasst errechnen sich die Spannungskomponenten σ_{xx} , τ_{xy} und σ_{yy} für die elastische Zone aus den beiden komplexen Gleichungen

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = q + p + 4k \Re \left\{ \ln \left(\frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right\} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2k \left[\bar{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2c^2 (1 + \alpha^2)}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2} (z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2})} + \frac{q - p}{2k} \right] \end{aligned} \quad (158)$$

mit

$$c = a e^{\left(\frac{q+p}{4k} - \frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha = \frac{q-p}{2k} \quad \text{und} \quad z = x + iy \quad (159)$$

indem man den Real- und Imaginärteil trennt. Daraus ergeben sich σ_{xx} , τ_{xy} und σ_{yy} in Abhängigkeit der x , y -Koordinaten. Da die Gleichungen der Spannungskomponenten ziemlich umfangreich sind, werden sie hier nicht in expliziter Schreibweise angeführt.

Es sei darauf hingewiesen, dass Gleichung (158) mit Gleichung 1.63 auf S. 376 nach [1] korrespondieren sollte. Allerdings ist bei der Umformung auf Gleichung 1.63 nach [1] ein Umformungsfehler aufgetreten, der in der Literatur übernommen wurde. Man vergleiche dazu Gleichung 6.20 nach [7] auf S. 204.

5. Zusammenfassung

Im analytischen Teil dieser Arbeit wurden die Kolosov'schen Formeln zur Bestimmung der Spannungskomponenten σ_{xx} , τ_{xy} und σ_{yy} hergeleitet. Parallel wurden alle vorkommenden Gleichungen in diesem Abschnitt mit Hilfe der Computeralgebrasoftware Maple symbolisch nachgerechnet und somit die Korrektheit sämtlicher angeführter Gleichungen betätigt.

Teil (III) dieser Arbeit stellt die Ergebnisse der analytischen Lösung, wie die Vergleichsspannung σ_V nach Tresca und die Spannungsverläufe σ_{xx} , τ_{xy} , σ_{yy} , für mehrere bzw. einen gewählten Lastfall über die Hauptachsen graphisch dar. Ebenfalls wird auch das Ergebnis für die zweite Kolosov'sche Gleichung von Galin (vgl. [1], S. 376, Gl. 1.63) vor der Korrektur des Umformfehlers zu Vergleichszwecken geplottet.

Teil II.

Numerische Lösung

Dieser Abschnitt schildert die numerische Herangehensweise an die Thematik, mittels Methode der Finiten Elemente. Über dieses Verfahren soll unabhängig von der analytischen Vorgehensweise auf anderem Wege nach der Lösung gesucht werden. Im abschließenden Teil wird die Korrelation der analytischen und numerischen Ergebnisse analysiert.

Für die Finite-Elemente-Methode wird die Struktur des Körpers in mehrere Elemente diskretisiert. Allerdings soll an dieser Stelle auf die grundlegenden Ansätze nicht näher eingegangen werden. Lediglich wichtige Gleichungen, die im Rahmen der Entwicklung des Programmes benötigt wurden, werden in allgemeiner differentieller Form angegeben und für die numerische Umsetzung in diskreter Matrizenschreibweise umgeformt. Detaillierte Herleitungen zur Finiten-Elemente-Methode können den Quellen [8] und [9] entnommen werden.

Zu allererst wird die Notation nach Voigt eingeführt. Gleichung (1) zeigt die Reduktion der 9 Koeffizienten des symmetrischen Spannungstensors \mathbf{S} , unter Verwendung der Voigt'schen Notation, zu einem Spaltenvektor $\boldsymbol{\sigma}$ mit 6 Komponenten.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

Analog folgt für die Verzerrungen:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & 2\varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

6. Lineare Finite-Elemente-Methode

Für die Formulierung sei isotropes Material, sowie geometrische und materielle Linearität vorausgesetzt.

Sei \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur, auch Globalsteifigkeitsmatrix genannt, und \mathbf{F} der globale Knotenkraftvektor, so lassen sich die unbekanntenen Koeffizienten des Knotenpunktverschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$, nach Einbau der Randbedingungen, aus dem inhomogenen Gleichungssystem (3) bestimmen.

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3)$$

Dabei ergibt sich die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nach Assemblierung aller Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^{(m)}$ mit

$$\mathbf{K} = \sum_{(m)} \int_{V^{(m)}} \underbrace{\left[\mathbf{B}^{(m)} \right]^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} |\mathbf{J}^{(m)}|}_{=\mathbf{K}^{(m)}} dV^{(m)} \quad (4)$$

bzw. für die numerische Integration, nach der Gauss-Quadratur, in diskreter Matrixschreibweise

$$\mathbf{K} = \sum_{(m)} \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \left[\mathbf{B}_{i,j,k}^{(m)} \right]^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}_{i,j,k}^{(m)} |\mathbf{J}_{i,j,k}^{(m)}| \quad \text{mit den Gewichten} \quad \alpha_{i,j,k} = \prod_{i,j,k} \alpha_n \quad (5)$$

im jeweiligen Gauss-Punkt $[r_i \ s_j \ t_k]^T$.

Dabei ist $\mathbf{C}^{(m)}$ die Matrix der Materialeigenschaften, $\mathbf{B}^{(m)}$ die Verzerrungsverschiebungs-Matrix und $\mathbf{J}^{(m)}$ die Jakobi-Matrix.

Durch Rückrechnung auf Elementebene lassen sich die Elementverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$, sowie die gesuchten Elementspannungen $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ nach den Ansätzen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i,j,k}^{(m)} = \mathbf{B}_{i,j,k}^{(m)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j,k}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \quad (7)$$

ebenfalls in den jeweiligen Stützpunkten $[r_i \ s_j \ t_k]^T$ bestimmen. Da zunächst von materieller Linearität ausgegangen wird, ist $\mathbf{C}^{(m)}$ konstant.

6.1. Elementformulierung

6.1.1. Hexaederelement mit 27 Knoten - isoparametrischer Ansatz

Für die Diskretisierung wurde ein sechseitiges Volumenelement 2. Ordnung der Lagrange-Klasse gewählt.

Sei $\mathbf{H}^{(m)}$ die Interpolationsmatrix für ein Element, so lässt sich das Gleichungssystem der Verschiebungsansätze, welches Verschiebungen im Element $\mathbf{u}^{(m)}$ über die Ansatzfunktionen $h_{ijk}(r, s, t)$ und Knotenpunktverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ approximiert, nach Gleichung (8) in Matrixschreibweise anschreiben.

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \hat{\mathbf{u}} \quad (8)$$

Darin ist $\mathbf{H}^{(m)}$ durch Ausdruck (9) definiert:

$$\mathbf{H}^{(m)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} h_{N_1} & 0 & 0 & h_{N_2} & 0 & 0 & \cdots & h_{N_{27}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{N_1} & 0 & 0 & h_{N_2} & 0 & \cdots & 0 & h_{N_{27}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{N_1} & 0 & 0 & h_{N_2} & \cdots & 0 & 0 & h_{N_{27}} & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

Die Form des Knotenverschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ ergibt sich mit

$$\hat{\mathbf{u}}^{(m)} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \mid u_2 \quad v_2 \quad w_2 \mid \cdots \mid u_{27} \quad v_{27} \quad w_{27}]^T \quad (10)$$

Die Koeffizienten h_{N_i} der Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(m)}$ werden aus dem Produkt der einzelnen Lagrange-Polynome, pro Dimension für r, s, t , gemäß Gleichung (11) gebildet. Abbildung (5) stellt den allgemeinen Aufbau eines Lagrange-Hexaederelementes noch einmal graphisch dar. Somit lassen sich die Ansatzfunktionen unter Verwendung von

$$h_{N_i} = h_{i,j,k} = l_i^m(r) l_j^n(s) l_k^p(t) \quad (11)$$

herleiten.

Das Lagrange-Polynom in allgemeiner Darstellung nach Gleichung (12) hat im Punkt x_j den Wert 1 und verschwindet an allen anderen Punkten x_i . Abbildung (5) zeigt dies mit $l_i^m(r)$, für $i = 0..2$ (quadratisches Polynom: $m = n = p = 2$), am 1d Linienelement.

$$l_j^k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (12)$$

Für den Elementknoten N_1 , mit den Indizes $i, j, k = 0$, gemäß Referenzelement Abbildung (6), erhält man folgende Formfunktion:

$$h_{N_1}(r, s, t) = h_{0,0,0}^2 = l_0^2(r) l_0^2(s) l_0^2(t) = \frac{1}{8} r (r - 1) s (s - 1) t (t - 1) \quad (13)$$

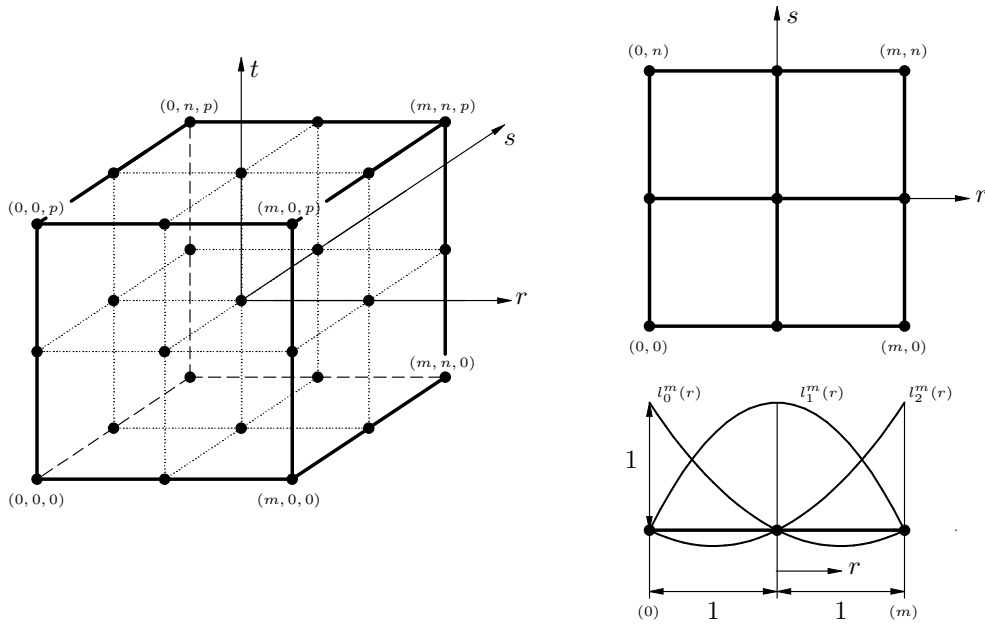


Abbildung 5: Hexaederelement mit 27 Knoten und korrespondierendes 2d Scheiben- sowie 1d Linienelement

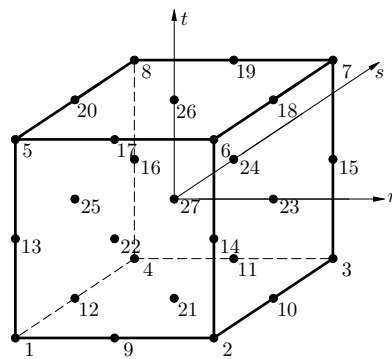


Abbildung 6: Hexaederelement Knotennummerierung

6.1.2. Ermittlung der B-Matrix

Mit den gegebenen Formfunktionen kann nun zusammen mit der Differentialoperatormatrix \mathbf{D} die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix $\mathbf{B}^{(m)}$ betrachtet werden.

$$\mathbf{B}^{(m)}(r, s, t) = \mathbf{D}\mathbf{H}^{(m)}(r, s, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^{(m)}(r, s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{N_1}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_{N_1}}{\partial y} & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial y} & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial z} & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial z} & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_{N_1}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{N_1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{N_{27}}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die erforderlichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ werden nach der Kettenregel in Matrixschreibweise

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{J}^{-1} \quad (16)$$

ermittelt.

Die Inverse der Jacobi-Matrix \mathbf{J}^{-1} existiert, sofern $|\mathbf{J}| \neq 0$.

6.1.3. Ermittlung des konsistenten Lastvektors \mathbf{F}

Für die bevorstehenden Beispiele werden Beanspruchungsformulierungen in Form von Streckenlasten, und Druckbelastungen an den Oberflächen der Elemente benötigt. Man unterscheidet zwischen Lastenkonzentration und konsistenter Last. Bei Oberflächenkräften sollte \mathbf{F} als konsistenter Lastvektor berechnet werden, da bei Lastkonzentration, unter zusätzlicher Verwendung einer groben Diskretisierung, Ergebnisse sehr ungenau werden können (vgl. [8], S. 212ff und S. 360f).

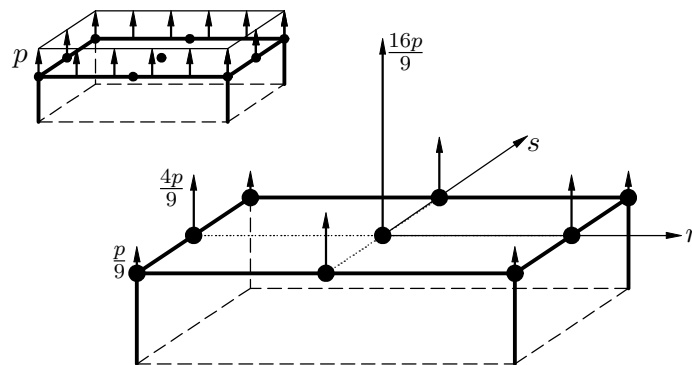


Abbildung 7: Volumelement unter Oberflächenlast p

Sei \mathbf{F}_p^S der konsistente Elementlastvektor, an der Oberfläche S zufolge p , so ergibt sich

$$\mathbf{F}_p^S = \int_S [\mathbf{H}^S]^T \mathbf{f}^S dS \quad (17)$$

Der Lastkoeffizient des Eckknotens 5 lässt sich für eine zweidimensionale Zugbeanspruchung p in der Elementebene $t = +1$ wie folgt bestimmen:

$$f_p^5 = p \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{r}{2} (r-1) \frac{s}{2} (s-1) \left[\frac{t}{2} (t+1) \right]_{t=+1} dr ds = \frac{p}{9} \quad (18)$$

Abbildung (7) zeigt die drei berechneten konsistenten Lastkomponenten der Eck-, Mittelkant- und des Zentralknotens für das gewählte Hexaederelement.

6.2. FE-Beispiel für linear-elastisches Materialverhalten

Um die Implementierung des bis zu diesem Zeitpunkt entwickelten Finite-Elemente-Programmes zu verifizieren, werden die numerisch berechneten Resultate mit einer analytischen Lösung verglichen. Als Beispiel wird eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit kreisförmigem Loch, unter einseitiger Zugbeanspruchung in Abszissenrichtung, gewählt. Abbildung (8) zeigt das Problem, dass erstmals von Kirsch gelöst und daher nach ihm benannt wurde.

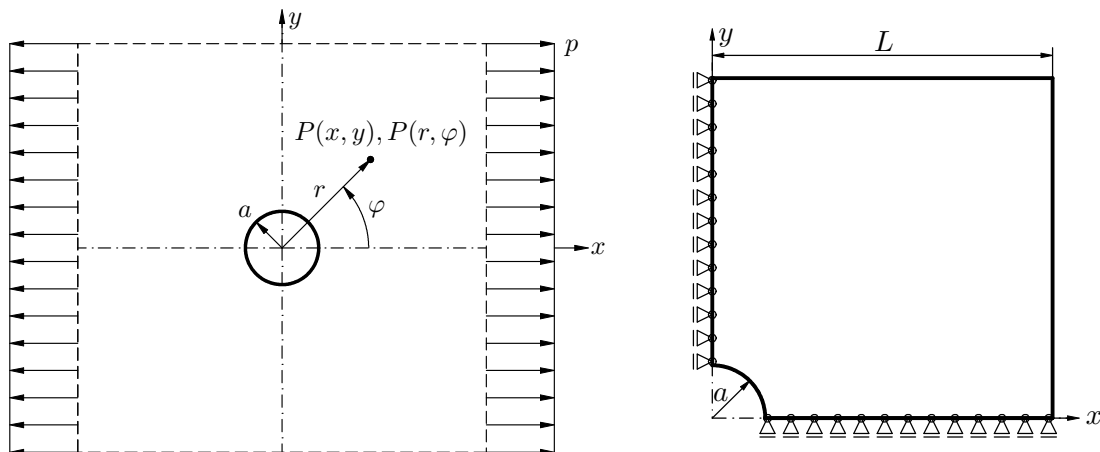


Abbildung 8: Scheibe mit Loch

6.2.1. Analytische Lösung

Für Polarkoordinaten ergeben sich die Spannungsverläufe zu (vgl. [2], S. 141ff)

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2h} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi) \right) \quad (19)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2h} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi) \right) \quad (20)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{p}{2h} \left(-1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin(2\varphi) \quad (21)$$

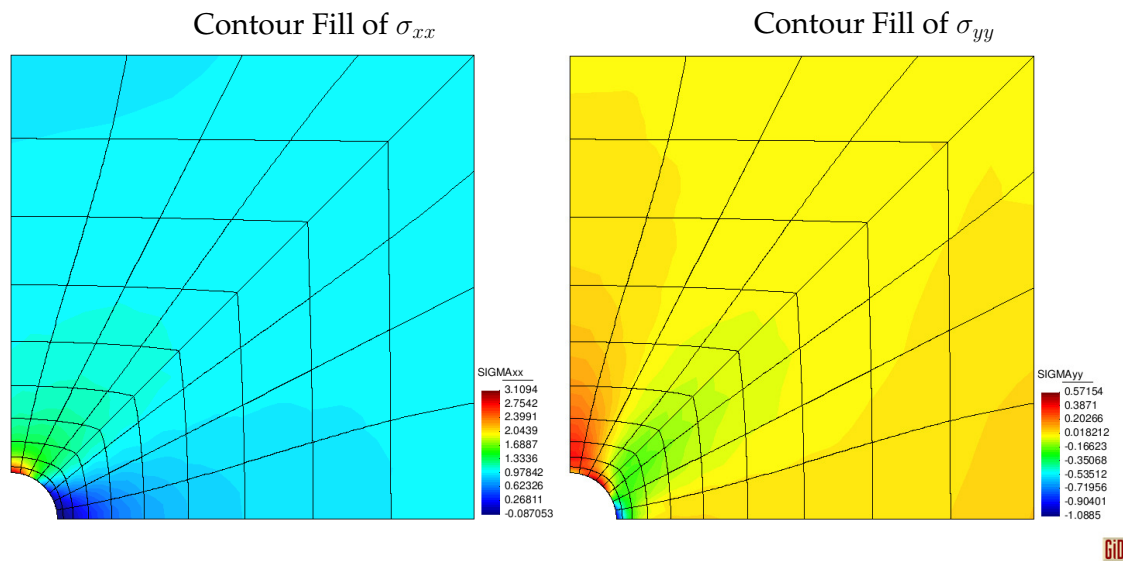


Abbildung 9: FE-Resultate für das Kirschproblem mit Postprocessing GiD

6.2.2. FE-Lösung

Für das Pre- und Postprocessing wurde die kommerzielle Software GiD, Version 10.0.4 verwendet. Der Lösungspart wird von einem für diese Diplomarbeit selbst, in der MATLAB-Umgebung, entwickelten FE-Programm ermittelt.

Im Preprocessing erfolgt die Vernetzung der Geometrie, nach vorgegebener Elementanzahl entlang bestimmter Geometrielinien. Die mit GiD erstellte .msh-Datei, mit Knotenpunktskoordinaten und den 27 Knoten-Elementen im ASCII-Format, wird für die Berechnung in MATLAB eingelesen. Für das Postprocessing wird ein .res file erzeugt, womit Resultate in GiD eingelesen und visualisiert werden können. Das .res file enthält die berechneten Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ und Elementspannungen $\sigma_{i,j,k}^{(m)}$ nach einem Lastinkrement, sowie die r_i, s_j, t_k Werte der 27-Punkt Gauss-Quadratur.

Eingangsdaten der FE-Rechnung:

- Geometriedaten: $L = 100 \text{ mm}$ $a = 10 \text{ mm}$ $h = 1 \text{ mm}$
- Materialeigenschaften: $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0,3$
- Streckenlast: $p = 1 \text{ N/mm}^2$

Es wird das entsprechend richtig gelagerte Viertelsystem der Scheibe (siehe Abbildung (8)), mit Länge L , Radius a sowie Scheibendicke h , als Ersatzmodell herangezogen und diskretisiert. Das Netz der Konfiguration enthält 80 Elemente mit 1071 Knoten. Weiters

gilt der ebene Verzerrungszustand (EVZ), indem die z -Verschiebungen w gleich Null gesetzt werden für alle Knoten an der Ober- und Unterseite der Scheibe. Zur Kontrolle sollte sich $w = 0$ für alle Knoten ergeben, deren z -Verschiebung nicht gesperrt ist.

Für die Liniengraphen wurden die Spannungswerte aus den Gausspunkten in die Eckknoten der Elemente extrapoliert. Mittelkantenknoten werden von der Software nicht dargestellt, könnten aber bei Bedarf aus einem Point-Evolution-Graphen herausgelesen werden. Abbildung (9) und (10) zeigen die Ergebnisse der FE-Berechnung. Man sieht, dass sich trotz größerer Vernetzung, die Spannungswerte für das 27 Knoten Hexaederelement der analytischen Lösung nach Kirsch gut annähern. Abweichungen entstehen durch gemachte Annahmen in der Berechnung, wie zum Beispiel, der endlich modellierten Scheibe. Den Spannungen nach Kirsch der Gleichungen (19) bis (21) liegt eine unendlich ausgedehnte Scheibe zugrunde.

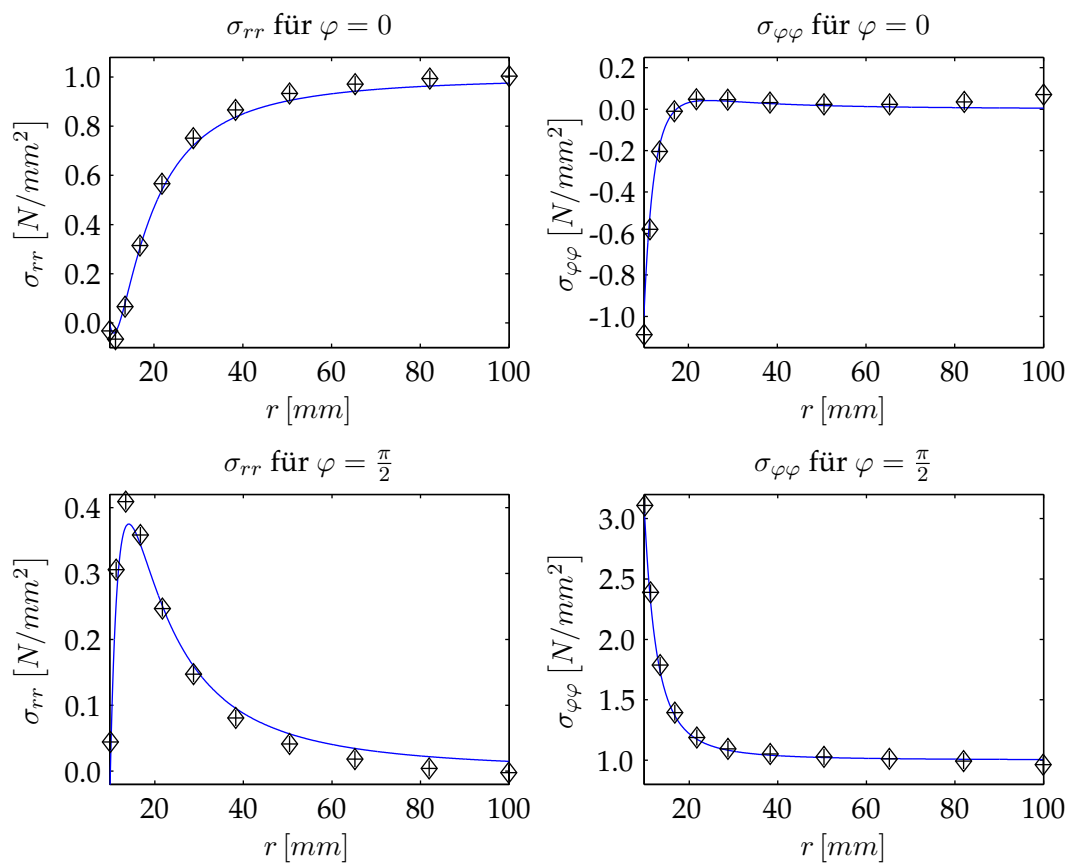


Abbildung 10: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung in MATLAB

7. Nichtlineare Finite-Elemente-Methode

Unter folgenden Annahmen wurde in Abschnitt (6) die lineare Finite-Elemente-Gleichgewichtsbeziehung

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (22)$$

hergeleitet:

- Infinitesimale Verschiebungen \mathbf{u}
- Randbedingungen bleiben während der Lastaufbringung unverändert
- Linear-elastisches Materialverhalten

Da \mathbf{K} keine Funktion von $\hat{\mathbf{u}}$ ist ($\mathbf{K} \neq \mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}})$), ist Gleichung (22) für $\hat{\mathbf{u}}$ explizit lösbar.

Für weitere Berechnungen soll nun die nichtlineare FE-Methode (vgl. [8], S. 485ff), im speziellen für materielle Nichtlinearität (Plastizität), abgeleitet werden. Ein wesentliches Problem bei der nichtlinearen Berechnung, ist die Ermittlung des Gleichgewichtszustandes, da die Koeffizienten der Globalsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} nicht mehr konstant sind, sondern von den Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ abhängen. Es gilt $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}})$.

Somit ist das folgende Problem zu lösen: Die Herleitung der neuen nichtlinearen Gleichgewichtsbeziehung.

Für ein Inkrement sei die Gleichgewichtsbedingung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

$$\delta W^{int}|_t + \delta W^{ext}|_t = 0 \quad \implies \quad \mathbf{f}^{ext}|_t - \mathbf{f}^{int}|_t = \mathbf{0} \quad (23)$$

Dieses Gleichgewicht muss ebenfalls für jede Konfiguration zu einem weiteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ erfüllt sein.

$$\delta W^{int}|_{t+\Delta t} + \delta W^{ext}|_{t+\Delta t} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{f}^{ext}|_{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{int}|_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (24)$$

Der Ausdruck $\mathbf{f}^{ext}|_{t+\Delta t}$ fasst die äußeren Knotenlasten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zusammen. $\mathbf{f}^{int}|_{t+\Delta t}$ enthält die den Elementspannungen äquivalenten Knotenpunktkräfte, auch interne Knotenkräfte genannt, und sei wie folgt definiert:

$$\mathbf{f}^{int}|_{t+\Delta t} = \sum_{(m)} \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}|_{t+\Delta t} \left| \mathbf{J}^{(m)} \right| dV^{(m)} \quad (25)$$

bzw. numerisch

$$\mathbf{f}^{int}|_{t+\Delta t} = \sum_{(m)} \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \mathbf{B}_{i,j,k}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}_{i,j,k}^{(m)}|_{t+\Delta t} \left| \mathbf{J}_{i,j,k}^{(m)} \right| \quad (26)$$

Die Summe über alle Elemente bedeutet, dass, wie bereits zuvor für die Globalsteifigkeitsmatrix, die Vektoren $\mathbf{f}^{int(m)}$ assembliert werden müssen.

Man beachte, dass der Zeitfaktor bei statischen Berechnungen nur als Variable zur Differenzierung zwischen den einzelnen Lastschritten dient. Die Endkonfiguration einer Gesamtbelastung wird daher Schritt für Schritt, in Lastinkrementen, zu diskreten Zeiten bestimmt. Ausgangspunkt für die laufende Berechnung eines Inkrementes bildet dabei der zuletzt berechnete Gleichgewichtszustand.

Sei die Lösung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht, so ergibt sich mit bekannter Lösung zur Zeit t , und Zuwachs der Knotenpunktskräfte $\Delta \mathbf{f}^{int}$

$$\mathbf{f}^{int}|_{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{int}|_t + \Delta \mathbf{f}^{int} \quad (27)$$

Der Zuwachs lässt sich mit der Tangentensteifigkeitsmatrix nach Ausdruck

$$\Delta \mathbf{f}^{int} \doteq \mathbf{K}|_t \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (28)$$

approximieren.

Gleichung (28) und Gleichung (27) in Gleichung (24) eingesetzt ergibt die linearisierte Gleichgewichtsbedingung für die nichtlineare FE-Methode, die sich explizit nach $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ auflösen lässt (vgl. [8], S. 493).

$$\mathbf{K}|_t \Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext}|_{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{int}|_t \quad (29)$$

Das aktuelle Verschiebungsfeld zur Zeit $t + \Delta t$ ergibt sich aus

$$\hat{\mathbf{u}}|_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{u}}|_t + \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (30)$$

Damit Gleichung (24) aber erfüllt, und die Lösung somit erreicht wird, muss allerdings noch hinreichend lang iteriert werden. Im nächsten Abschnitt wird eine Iterationsmethode vorgestellt unter der die nichtlineare FE-Gleichung (29) bis zu einer hinreichenden Bedingung gelöst wird.

7.1. Iteratives Lösungsverfahren nach Newton-Raphson

Als Basis für diesen Abschnitt dient Quelle [8], Kap. 8.4 und 8.4.1, sowie Quelle [10], Kap. 7.2.

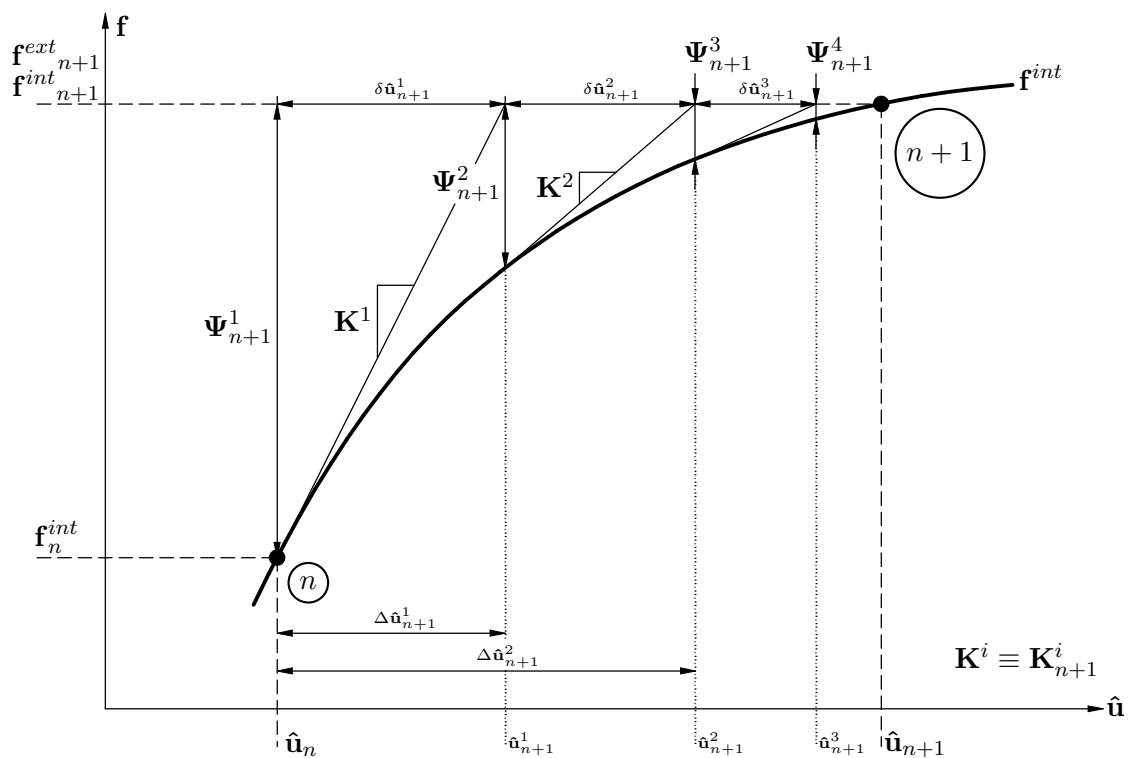


Abbildung 11: Newton-Raphson Methode

Zuerst werden die Argumente t und $t + \Delta t$ für die Implementierung in die geeignetere Form n und $n + 1$ umbenannt. Dabei bezieht sich n auf den vorherigen Gleichgewichtszustand, und $n + 1$ auf den gesuchten, also das aktuelle Inkrement. Somit lauten die Gleichungen (29) und (30) in inkrementeller Schreibweise:

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{int^i} \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i = \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i-1} + \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (32)$$

Nach jedem Lastinkrement muss das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Knotenkräften erfüllt sein. Sei das Residuum Ψ das noch nicht ausbalancierte Gleichgewicht, als die Differenz zwischen \mathbf{f}^{int} und \mathbf{f}^{ext} definiert, so lässt sich die Gleichgewichtsbedingung als

$$\Psi_{n+1}^i = \mathbf{f}_{n+1}^{int^i} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0} \quad (33)$$

darstellen.

Zu Beginn des ersten Inkrements wird der Ausgangszustand mit folgenden Größen definiert:

| | |
|---|---|
| $\hat{\mathbf{u}}_n = \mathbf{0}$ | gespeichertes Verschiebungsfeld aus letztem Inkrement n |
| $\hat{\mathbf{u}}_n^{i-1} = \mathbf{0}$ | Knotenpunktverschiebungen der vorangegangenen Iteration |
| $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{0}$ | gespeicherte Spannungen aus letztem Inkrement |
| \mathbf{f}_{n+1}^{ext} | externe Knotenkräfte für laufendes Inkrement $n + 1$ |

Ausgangspunkt für die erste Iteration i eines Lastschrittes bildet der letzte Gleichgewichtszustand

$$\Psi_n^{\bar{i}} = \Psi_n = \mathbf{0} \quad (34)$$

wobei die Bedingung

$$\Psi_n^{\bar{i}} = \mathbf{f}_n^{int^{\bar{i}}} - \mathbf{f}_n^{ext} = \mathbf{0} \quad (35)$$

mit den Iterationsschritten $i = 1 \dots \bar{i}$ im Inkrement n , als erfüllt gilt.

Die äußeren Knotenkräfte wachsen mit

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_n^{ext} + \Delta \mathbf{f}_n^{ext} \quad (36)$$

Um die den Elementspannungen proportionalen Knotenkräfte $\mathbf{f}_{n+1}^{int^i}$ gemäß Gleichung (25) zu berechnen, müssen die aus der Verschiebungsdifferenz $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ resultierenden Spannungen ermittelt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i = \mathbf{C} \mathbf{B} \underbrace{(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i-1} - \hat{\mathbf{u}}_n)}_{\Delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i-1}} + \boldsymbol{\sigma}_n \quad (37)$$

Daraus wird $\mathbf{f}_{n+1}^{int^i}$ nach Gleichung (26) berechnet, dass im nächsten Schritt auf das verbleibende Residuum der momentanen Iteration führt.

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i = \mathbf{f}_{n+1}^{int^i} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} \quad (38)$$

Damit kann der Verschiebungszuwachs der i -ten Iteration nach Gleichung (31), mit der bekannten Steifigkeitstangente \mathbf{K}_{n+1}^i

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i = -\mathbf{K}_{n+1}^i{}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i \quad (39)$$

bestimmt werden.

Mit dem verbesserten Verschiebungsfeld, können die neuen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$ im nächsten Iterationsschritt errechnet werden. Womit $\mathbf{f}_{n+1}^{int^{i+1}}$, $\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^{i+1}$ folgen und mit \mathbf{K}_{n+1}^{i+1} wie in (39) analog $\delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}$ erreicht wird.

Wenn nach einer gewissen Anzahl an Iterationen der Gleichgewichtszustand (33) mit einer vorgegebenen Genauigkeit hinreichend erfüllt ist, wird die Iterationsschleife verlassen. Dieser erreichte Gleichgewichtszustand ist nun Ausgangspunkt für das nächste Inkrement. Die Gesamtverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{n+1}$ ergeben sich durch Aufsummieren der Verschiebungsinkremente zu

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{\bar{i}} = \sum_{k=1}^{\bar{i}} \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^k \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_n + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{\bar{i}} \quad (41)$$

mit \bar{i} als letzten Iterationsschritt.

Als Abbruchkriterium wird die unbalanced energy W_{unb} nach Gleichung (42) herangezogen.

$$W_{unb} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i T \Psi_{n+1}^i \quad (42)$$

Für die Implementierung in MATLAB wurde die vorimplementierte Konstante $eps = 2,2204 \cdot 10^{-16}$ als Genauigkeitsschranke verwendet. Gleichgewicht ist somit näherungsweise für

$$\left| \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i T \Psi_{n+1}^i \right| \leq eps \quad (43)$$

erreicht.

Die formale Herleitung des Newton-Raphson-Iterationsverfahrens läuft darauf hinaus, die Lösung der Gleichung (33) zu finden. Sei $\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i-1}$ aus einer vorhergehenden Iteration berechnet worden, so liefert die Taylor-Reihenentwicklung, unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung (vgl. [8], S. 755)/(vgl. [10], S. 214f):

$$\Psi(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \doteq \Psi(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \right) \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i} \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i = \mathbf{0} \quad (44)$$

Bereits in Gleichung (28) wurde eine Linearisierung durchgeführt. Daher ergibt sich die Tangentensteifigkeitsmatrix aus dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \right) \right|_{\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i} &= \left. \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \right) \right|_{\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i} = \sum_{(m)V^{(m)}} \int \mathbf{B}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\hat{\mathbf{u}}} |\mathbf{J}| dV^{(m)} \\ \sum_{(m)V^{(m)}} \int \mathbf{B}^T \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1}^i}_{\mathbf{C}_{n+1}^i} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dV^{(m)} &= \mathbf{K}_{n+1}^i \end{aligned} \quad (45)$$

Siehe Abbildung (11): Die Tangente entspricht \mathbf{K}_{n+1}^i . Die Tangentensteifigkeitsmatrix wird auch als Materialtangente bezeichnet. Abhängig von den Verschiebungszuwächsen wird zwischen der elastischen und plastischen Materialtangente unterschieden. Die Herleitung der plastischen Materialtangente wird unter Abschnitt (9.2) durchgeführt.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (46)$$

$$= \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (47)$$

Für rein elastisches Verhalten gilt der Elastizitätstensor \mathbf{C}^{el} . Bei plastischen Verhalten gilt \mathbf{C}^{ep} .

Ein wesentliches Merkmal der Newton-Raphson-Methode ist, dass in jeder Iteration eine neue Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{n+1}^i berechnet wird. Des Weiteren besteht Konvergenz, sobald die aktuelle Lösungsiteration nahe genug am Gleichgewichtszustand liegt. Somit wird der Aufwand der Neuberechnung von \mathbf{K}_{n+1}^i durch rascher konvergierendes Gleichgewicht wettgemacht (vgl. [8], S. 757).

8. Isotrope Plastizität kleiner Verzerrungen

Als Grundlage dieses Kapitels dienen die Quellen [6], Kap. 1 und [12], Kap. 12.

Auf dem Gebiet der Festigkeitsberechnungen wird zwischen drei Arten von Nichtlinearitäten unterschieden:

- Nichtlinearität zufolge großer Verformungen, Geometrienichtlinearität
- Materialnichtlinearität
- Strukturnichtlinearität

In diesem Kapitel wird näher auf die zweite Art, plastisches Materialverhalten, eingegangen. Somit unterteilt sich das Kontinuum in zwei Materialgesetze, einem elastischen und plastischen Gesetz.

8.1. Linearelastisches-idealplastisches Körpermodell

Es gilt die geometrisch lineare Theorie: $\varepsilon \leq 0,02$.

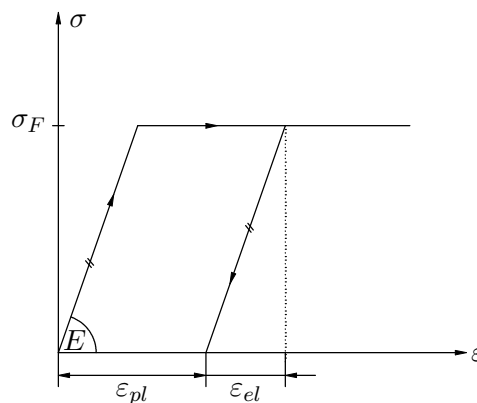


Abbildung 12: Linearelastisches-idealplastisches Körpermodell

Für die mathematische Behandlung plastischer Probleme wird eine Idealisierung gemäß Abbildung (12) vorgenommen. Unter dieser Modellannahme wird von nun an zwischen dem linearen elastischen und dem konstanten plastischen Bereich unterschieden. Wird die Fließspannung σ_F nicht erreicht, verhält sich das Material rein elastisch. Auftretende Deformationen in diesem Gebiet unterliegen vollständiger Reversibilität. Wird σ_F überschritten, so tritt Fließen des Materials ein. Plastische Verformung bei gleichbleibender Spannung σ_F tritt ein. Diese Gestaltänderungen des Systems sind von Dauer.

Eine Verfestigung, isotroper bzw. kinematischer Art, wird durch dieses Modell nicht berücksichtigt. Der Radius σ_F der Fließfläche, sowie ihre Raumlage, bleiben gleich. Ein Spannungspunkt kommt nur innerhalb bzw. auf dieser Fläche regulär zum Erliegen.

Aufgrund der Definition des linearelastischen-idealplastischen Körpermodells ergeben sich sämtliche Nichtlinearitäten durch das Materialgesetz.

8.2. Rheologisches Grundmodell

Um reales Materialverhalten zu veranschaulichen werden idealisierte Grundelemente der Rheologie miteinander kombiniert. Die Grundmodelle, sowie Kombinationen zu Modellen realer Materialverhaltensweisen, können der Quelle [6] entnommen werden. Hier wird nur das verwendete Modell für ideale Plastizität angeführt und im Weiteren erörtert.

Linearelastisches-idealplastisches Verhalten ergibt sich aus der Serienanordnung von Feder und Reiber. Das Modell wird als Prandtl-Reuss-Körper bezeichnet und kann der Abbildung (13) entnommen werden.



Abbildung 13: Prandtl-Reuss-Körper

Als Kurzzeichen für rein elastisches Verhalten dient die Hooke'sche Feder. Die Verformungsenergie wird im Körper gespeichert. Es gelte das Hooke'sche Gesetz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{el} = [\mathbf{C}_{el}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (48)$$

Der Reiber, als Kurzzeichen nach de-Saint-Venant bei idealplastischem Materialverhalten dient als Sinnbild, dass jede Krafteinwirkung bis zu einem bestimmten Grenzwert ohne Bewegungsreaktion bleibt. Gleiten tritt erst bei Überschreitung der Fließgrenze ein. Sei $\dot{\varepsilon}$ die Verzerrungsrate, so folgt

$$\dot{\varepsilon} = 2\dot{\lambda}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{für} \quad \sigma > \sigma_F \dots \text{Gleiten} \quad (49)$$

Dabei stellt der Term λ den plastischen Konsistenzparameter dar. Aufgrund der Reibung dissipiert ein Teil der umwandelbaren Dehnungsenergie in irreversible Verformungsenergie. Aus der Serienschaltung von Feder und Reiber ergibt sich die Gesamtverzerrungsrate zu

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl} \quad (50)$$

Multiplikation mit dem infinitesimalen Zeitschritt dt führt auf die infinitesimal inkrementelle Beziehung

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + 2d\lambda\sigma \quad (51)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{el} + d\varepsilon_{pl} \quad (52)$$

Diese additive Zerlegung des Verzerrungstensors \mathbf{V} ist auf Prantdl-Reuss zurückzuführen. In beiden Teilen $d\varepsilon_{el}$ und $d\varepsilon_{pl}$ herrscht dieselbe Spannung. Man sieht, dass Gleichung (52) zeitunabhängig ist.

Alle kommenden Berechnungen stützen sich von nun an auf dieses Körpermodell.

8.3. Werkstoffgesetz

8.3.1. Materialgesetz im elastischen Bereich

Für den Elastizitätsbereich gelte das Hooke'sche Gesetz. Mit den Abkürzungen $\varrho = \frac{\nu}{1-2\nu}$ und $\varrho_1 = \varrho + 1$ für die Elastizitätsmatrix \mathbf{C} lautet es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varrho_1 & \varrho & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ \varrho & \varrho_1 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ \varrho & \varrho & \varrho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (54)$$

8.3.2. Materialgesetz im plastischen Bereich

Ein auf elasto-plastisches Materialverhalten beruhendes Werkstoffgesetz benötigt eine Fließfunktion und eine Fließregel (vgl. [12], S. 367ff).

Fließfunktion: Als Kriterium, ob der Werkstoff elastische oder plastische Verzerrungen erfährt, wird eine Fließfunktion $F = F(\boldsymbol{\sigma})$ benötigt. Die mechanische Bedeutung der Werte von $F(\boldsymbol{\sigma})$ sei

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{linear-elastisches Materialverhalten} \\ = 0 & \rightarrow \text{plastisches Materialverhalten} \end{cases} \quad (55)$$

Der Fall $F(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ ist nicht definiert, da keine Viskoplastizität vorliegt. Daher ist maximal eine Bewegung auf der Fließfläche möglich. Es ändern sich weder Größe noch Lage, der durch $F(\boldsymbol{\sigma})$ aufgestellten Fläche im Hauptnormalspannungsraum.

Fließregel: Diese dient zur Beschreibung der Evolution der plastischen Verzerrungen. Gesucht sei der mathematische Ausdruck des infinitesimalen Inkrementes $d\varepsilon_{pl}$.

Eine Formulierung des infinitesimalen plastischen Verzerrungszuwachses $d\varepsilon_{pl}$ geht auf Drucker zurück. Daher die Bezeichnung als Drucker'sches Postulat. Die mit einer Fließfunktion $F(\boldsymbol{\sigma})$ assoziierte Fließregel lautet

$$d\varepsilon_{pl} = d\lambda \frac{dF}{d\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{wobei} \quad d\varepsilon_{pl} \begin{cases} = 0 & : \text{ wenn elastisch} \\ \neq 0 & : \text{ wenn plastisch} \end{cases} \quad (56)$$

Der Ausdruck $\frac{dF}{d\boldsymbol{\sigma}}$ steht normal auf die Fließfläche, daher wird Gleichung (56) auch Normalenregel genannt.

Prandtl-Reuss-Gleichungen: Das inkrementelle Werkstoffgesetz, für eine bestimmte Fließfunktion, erhält man durch Einsetzen des Hooke'schen Gesetzes und des Drucker'schen Postulates in Gleichung (52).

$$d\varepsilon = [C_{el}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{dF}{d\boldsymbol{\sigma}} \quad (57)$$

8.4. Fließhypothesen

In der Realität treten im Gegensatz zur einaxialen Beanspruchung, wie im Zugversuch, mehraxiale Spannungszustände auf. Es ist somit zu prüfen, ob ein solcher Zustand in einem Punkt eines Materials Fließen verursacht. Man bedient sich eines Vergleichs des einaxialen Zustandes mit dem mehraxialen im betreffenden Körperpunkt mittels geeigneter Kenngröße als Kennzeichen der verwendeten Hypothese. Man führt einen Übergang vom dreidimensionalen auf den eindimensionalen Zustand durch. Als Kenngröße dient die auf eine Fließhypothese basierende Vergleichsspannung σ_V , die mit der Fließspannung σ_F verglichen wird (vgl. [12], S. 313f).

8.4.1. Hypothese nach Tresca

Aufgrund des Gleitens der Metallkristalle entlang bestimmter Ebenen kommt man zur Annahme, dass die maximale Schubspannung τ_{max} für den Fließeintritt in einem Körperpunkt maßgebend ist. Daher wird Die Fließhypothese nach Tresca auch Hypothese der maximalen Schubspannungen genannt (vgl. [12], S. 316ff).

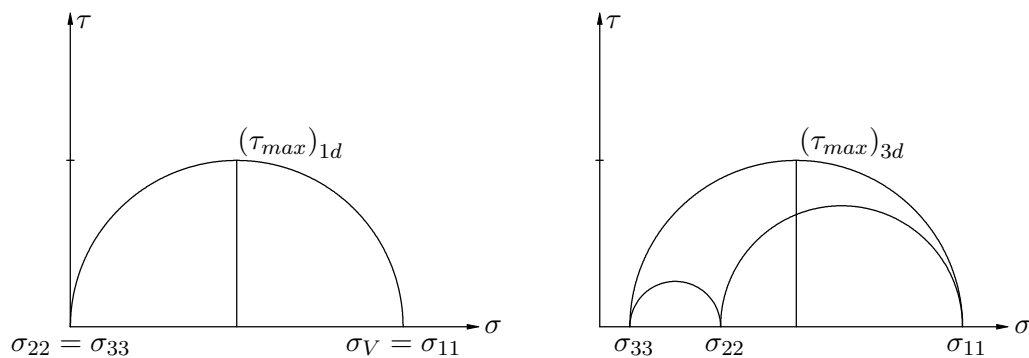


Abbildung 14: Mohr'scher Spannungskreis

Gegeben sei folgender Spannungszustand $\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}$. Aus dem Mohr'schen Spannungskreis ist ersichtlich, dass die größte Schubspannung in diesem Punkt zu

$$(\tau_{max})_{3d} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \quad (58)$$

folgt.

Für den eindimensionalen Fall ergibt sich mit $\sigma_V = \sigma_{11}$ und $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$

$$(\tau_{max})_{1d} = \frac{\sigma_V}{2} \quad (59)$$

σ_V erhält man aus Gleichsetzen von $(\tau_{max})_{1d}$ mit $(\tau_{max})_{3d}$, wodurch sich unter Berücksichtigung der Fließbedingung $\sigma_F^2 = \sigma_V^2$

$$\left[(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - \sigma_F^2 \right] = 0 \quad (60)$$

ergibt.

Allgemein formuliert, tritt Fließen ein, sobald die Differenz zwischen größter und kleinster Hauptnormalspannung den Spannungswert σ_F bei einaxialer Zugbeanspruchung erreicht.

Durch geeignete Permutation zwischen den einzelnen σ -Ebenen ergibt sich aus

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_F \quad (61)$$

die Fließbedingung nach Tresca in allgemeiner Form zu

$$F = \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \sigma_F^2 \right] \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - \sigma_F^2 \right] \left[(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - \sigma_F^2 \right] = 0 \quad (62)$$

Diese Gleichung beschreibt ein sechseckiges Prisma von $-\infty$ bis $+\infty$ im Hauptnormalspannungsraum. Elastische Punkte liegen innerhalb des Zylinders, plastische genau auf der Prismenfläche.

Tresca in Matrizenform: Zur kompakten Darstellung und Implementierung in den später folgenden numerischen Algorithmus wird die Fließhypothese nach Tresca in Matrizenform dargestellt. Dazu wird die Einschränkung angenommen, dass in der 12-Hauptnormalspannungsebene die größte und kleinste Hauptnormalspannung vorliegt.

Die dazugehörige Fließgleichung im Hauptnormalspannungsraum lautet

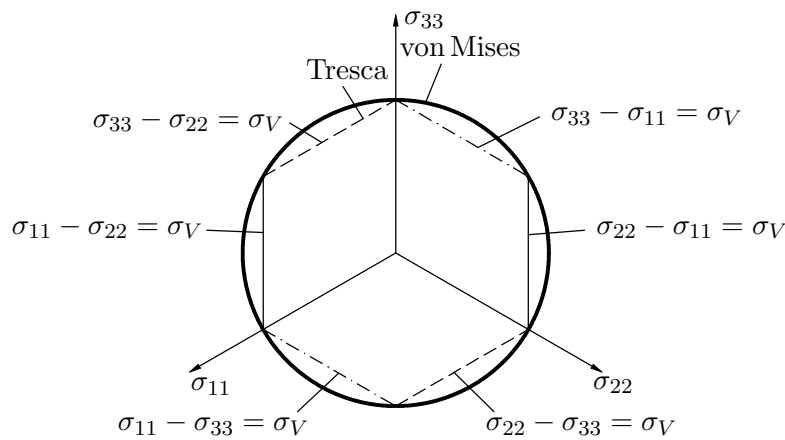


Abbildung 15: Fließflächen im Hauptspannungsraum

$$F = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \sigma_F^2] = 0 \quad (63)$$

Mit den Transformationsgleichungen

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi_1) + \sigma_{xy} \sin(2\varphi_1) \quad (64)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi_1) - \sigma_{xy} \sin(2\varphi_1) \quad (65)$$

$$0 = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi_1) + \sigma_{xy} \cos(2\varphi_1) \quad (66)$$

eingesetzt in Gleichung (63) folgt für das beliebige Koordinatensystem

$$F = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 - \sigma_F^2 = 0 \quad (67)$$

Mit

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}]^T \quad (68)$$

und

$$\mathbf{M}_{\text{Tresca}} = \frac{1}{\sigma_F^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

schreibt sich die Fließbedingung in kompakter Matrixschreibweise in der Form

$$F = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M}_{\text{Tresca}} \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0 \quad (70)$$

Die Äquivalenz zur analytischen Gleichung (77) lässt sich durch Ausmultiplizieren zeigen.

Da später auch die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ benötigt wird, soll diese hier noch kurz gebildet werden.

Gegeben sei

$$F = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_{\text{Tresca}} : \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0 \quad (71)$$

Daraus ergibt sich nach der Produktregel

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{M}_{\text{Tresca}}}_{\mathbf{M}_{\text{Tresca}}} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\mathbf{M}_{\text{Tresca}} : \mathbf{1}}_{\mathbf{M}_{\text{Tresca}}} = 2\mathbf{M}_{\text{Tresca}} \boldsymbol{\sigma} \quad (72)$$

8.4.2. Hypothese nach von Mises

Für den Fließeintritt in einem Körperpunkt bei metallischen Werkstoffen ist der gestaltändernde Anteil der spezifischen Verzerrungsenergie U_0 maßgebend. Eine alternative Annahme beruht auf die Formulierung der Oktaederschubspannungen τ_{okt} . Daher auch Hypothese der Oktaederschubspannung (vgl. [12], S. 319ff).

Zur Herleitung der Fließbedingung wird von der Cauchy'schen Formel ausgegangen und $\sigma_{n_{okt}}$ ermittelt. Daraus folgt für den dreidimensionalen Fall

$$(\tau_{okt})_{3d} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2} \quad (73)$$

Der eindimensionale Fall liefert unter Berücksichtigung von $\sigma_V = \sigma_{11}$ und $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$

$$(\tau_{okt})_{1d} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_V \quad (74)$$

Gleichsetzen führt auf die Fließbedingung nach von Mises:

$$F = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] - \sigma_F^2 = 0 \quad (75)$$

Dies ergibt einen Kreis im Hauptnormalspannungsraum, der das sechseckige Prisma von Tresca umschreibt, wie in Abbildung (15) ersichtlich.

Von Mises in Matrizenform: Analog zur Fließfunktion von Tresca soll nun die Fließbedingung nach von Mises für ein beliebiges Koordinatensystem x, y, z in kompakter Matrizenform hergeleitet werden.

Für den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand lautet die Fließbedingung

$$F = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right] - \sigma_F^2 = 0 \quad (76)$$

Daraus folgt

$$F = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M}_{v.Mises} \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0 \quad (77)$$

mit

$$\mathbf{M}_{v.Mises} = \frac{1}{\sigma_F^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Die Ableitung sei nach

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{M}_{v.Mises}}_{\mathbf{M}_{v.Mises}} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\mathbf{M}_{v.Mises} : \mathbf{1}}_{\mathbf{M}_{v.Mises}} = 2\mathbf{M}_{v.Mises} \boldsymbol{\sigma} \quad (79)$$

gegeben.

9. Lösung plastischer Probleme mittels FE-Methode

9.1. Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Unter Abschnitt (7.1) wurde eine iterative Vorgehensweise, zur Lösung der nichtlinearen Gleichgewichtsbedingung

$$\Psi_{n+1}^i = \mathbf{0} \quad (80)$$

vorge stellt. Dabei wurden in jedem Iterationsschritt die aus den Verschiebungszuwächsen $\delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ resultierenden Spannungen σ_{n+1}^i berechnet und daraus wiederum $\mathbf{f}_{n+1}^{int i}$ für das verbleibende Residuum. Liegen aber die Spannungen außerhalb der Fließfläche, so müssen sie, aufgrund der vorgenommenen Modellannahme unter (8.1), algorithmisch für einen zulässigen Zustand auf der Fließfläche neu bestimmt werden.

In dieser Arbeit werden Materialien mit einer definierten Fließfläche behandelt. Daher können die Spannungszuwächse σ_{n+1}^i ausgehend von den Prandtl-Reuss-Gleichungen, implizit bestimmt werden. Zur Bestimmung von σ_{n+1}^i wird das Prädiktor-Korrektor-Verfahren (vgl. [6], Kap. 3, S. 29ff)/(vgl. [11], S. 143ff) herangezogen, dass die Erfüllung des Fließgesetzes sicherstellt.

Ausgangspunkt der folgenden Berechnungen seien die Prandtl-Reuss-Gleichungen in Differenzenschreibweise:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{el} + \Delta \varepsilon_{pl} \quad (81)$$

mit

$$\Delta \varepsilon_{pl} = \varepsilon_{pl}|_{t_n + \Delta t} - \varepsilon_{pl}|_{t_n} \quad (82)$$

zu zwei diskreten Zeitpunkten t_n und $t_n + \Delta t$.

Das Drucker'sche Postulat lautet in Differenzenschreibweise

$$\Delta \varepsilon_{pl} = \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (83)$$

wobei

$$\Delta\lambda = \lambda|_{t_n+\Delta t} - \underbrace{\lambda|_{t_n}}_{=0} = \lambda \quad (84)$$

gesetzt werden kann, da λ eine Proportionalitätskonstante darstellt, und zu Beginn der Rechnung mit Null initialisiert wird.

Die Integration der Gleichung (56) ergibt sich durch einen Euler-Schritt zu

$$\Delta\varepsilon_{pl} = \lambda \left[(1 - \Theta) \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t_n} + (\Theta) \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t_n+\Delta t} \right] \quad (85)$$

mit $\Theta = 0$ für "forward Euler" und $\Theta = 1$ für "backward Euler".

Setzt man $\Theta = 1$ so ergibt sich ein einfach handzuhabendes stabiles Verfahren, in dem nur der Verzerrungszuwachs

$$\Delta\varepsilon_{pl} = \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t_n+\Delta t} \quad (86)$$

approximiert wurde.

Dies führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, aus dem λ und $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t}$ iterativ gelöst werden können.

$$\Delta\varepsilon - \underbrace{\mathbf{C}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}}_{\Delta\varepsilon_{el}} - \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t_n+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (87)$$

$$\mathbf{F} = 0 \quad (88)$$

Die skalare Gleichung (88) entspricht der Fließbedingung und dient als Bestimmungsgleichung, ob Plastizität vorhanden ist.

Für die Entwicklung des endgültigen Lösungsalgorithmus wird \mathbf{F} gleich der Fließhypothese nach von Mises gesetzt. Daher gilt $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_{v.Mises}$. Daraus ergibt sich das modifizierte nichtlineare Gleichungssystem zu

$$\Delta \varepsilon - \mathbf{C}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} - 2\lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t} = \mathbf{0} \quad (89)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0 \quad (90)$$

Aus (89) folgt mittels Approximation des Spannungszuwachses

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t} - \boldsymbol{\sigma}|_{t_n} = \mathbf{C} [\Delta \varepsilon - 2\lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t}] \\ \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}|_{t_n} + \underbrace{\mathbf{C} \Delta \varepsilon}_{\text{el. Prädiktor}} - \underbrace{2\lambda \mathbf{C} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t}}_{\text{plast. Korrektor}} \end{aligned} \quad (91)$$

Der Wert $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n}$ entspricht $\boldsymbol{\sigma}_n$ aus Gleichung (37), der aus dem letzten Inkrement gespeichert wurde.

Sei die Versuchsspannung per Definition

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} \equiv \boldsymbol{\sigma}|_{t_n} + \mathbf{C} \Delta \varepsilon \quad (92)$$

so lässt sich die neue Spannung $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t}$, gemäß Gleichung (91), als Differenz der Versuchsspannung $\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$ und des plastischen Korrektors interpretieren. Abbildung (16) veranschaulicht das Zustandekommen des Spannungsvektors $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t}$ noch einmal graphisch. Der Abbildung kann entnommen werden, dass der plastische Korrekturvektor orthogonal auf die Fließfläche F steht. Es erfolgt somit eine Korrektur in radialer Richtung. Deshalb der Name "Radial-Return-Algorithmus".

Für den Lösungsalgorithmus unter Verwendung der Fließhypothese nach von Mises ergibt sich die explizite Bestimmungsgleichung für $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t}$ nach Umformung mit

$$\begin{aligned} [\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{C} \mathbf{M}] \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}|_{t_n} + \mathbf{C} \Delta \varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}|_{t_n + \Delta t} &= [\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{C} \mathbf{M}]^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (93)$$

wobei

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon|_{t_n + \Delta t} - \varepsilon|_{t_n} = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (94)$$

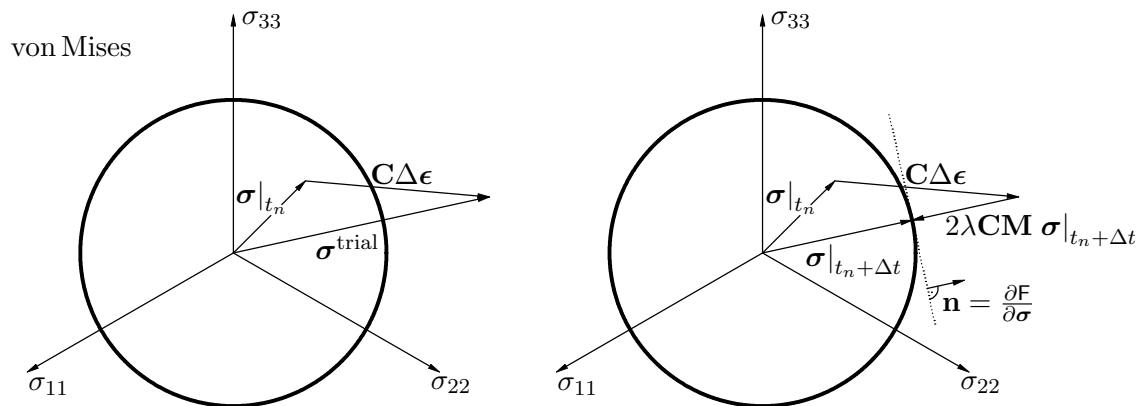


Abbildung 16: Der Radial-Return-Algorithmus für von Mises

gilt, wie auch aus Gleichung (37) entnommen werden kann.

Nimmt λ den Wert Null an, gleichbedeutend mit elastischem Materialverhalten, so liegt der Spannungszustand innerhalb der Fließfläche. Folglich ist $\sigma|_{t_n+\Delta t} = \sigma^{\text{trial}}$. Daher ist keine Spannungskorrektur notwendig, womit die Iteration nach Abschnitt (7.1) mit $\sigma|_{t_n+\Delta t}$ einfach fortgesetzt werden kann.

Für den plastischen Fall bleibt noch die Bestimmung des plastischen Konsistenzparameters λ offen.

Nach Substitution der Versuchsspannung $\sigma|_{t_n+\Delta t}$ in die Fließbedingung (90) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 F|_{t_n+\Delta t} &= \sigma^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} \sigma|_{t_n+\Delta t} - 1 = 0 \\
 \left[\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM} \right]^{-1} \sigma^{\text{trial}} \Big]^T \mathbf{M} \left[\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM} \right]^{-1} \sigma^{\text{trial}} - 1 &= 0
 \end{aligned} \tag{95}$$

mit der verbleibenden Unbekannten λ .

Die Bestimmung erfolgt ausgehend vom Startwert $\lambda_0 = 0$ in einem lokalen Newton-Verfahren iterativ. Die Schleife kann einfach im globalen Newton-Raphson-Verfahren eingebaut werden.

Der Wert der Fließfunktion $F(\lambda)$ entspricht dabei dem Funktionswert des Verfahrens. Durch legen der Tangente in $\left[\lambda_i \quad F(\lambda_i) \right]$ und anschließendem Nullsetzen, ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{F(\lambda_i)}{F'(\lambda_i)} \quad (96)$$

Für die Ableitung gilt

$$F'(\lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2 \left[(-1) [\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM}]^{-2} 2 \mathbf{CM} \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} \right]^T \mathbf{M} [\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM}]^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} \quad (97)$$

Sofern das Matrixprodukt \mathbf{CM} symmetrisch ist, lässt sich der Term $[\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM}]^{-2}$ nach

$$[\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM}]^{-2} = \mathbf{VDV}^T \quad (98)$$

bestimmen. Dabei sei \mathbf{V} die Matrix mit den Eigenvektoren, und \mathbf{D} die Diagonalmatrix der reziproken Eigenwerte zum Quadrat von $[\mathbf{1} + 2\lambda \mathbf{CM}]$.

Die Iteration ist beendet, wenn $F(\lambda_i) = 0$ als erfüllt gilt. Für die Implementierung wird wie zuvor eine Genauigkeitskonstante gewählt, wodurch die Abbruchbedingung wie folgt definiert sei:

$$|F(\lambda_{i+1})| \leq 10^{-12} \quad (99)$$

Somit ist der Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der neuen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t}$ vollständig ausformuliert. Für eine analoge Schreibweise nach Abschnitt (7.1) wird

$$\boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i \quad (100)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}|_{t_n+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}^i} \quad (101)$$

gesetzt.

Der Programmausschnitt des Radial-Return-Algorithmus wird in die Newton-Raphson-Iteration auf Elementebene für jeden Gausspunkt nach Gleichung (37) eingebaut. Ist die Abfragebedingung $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}^i}) > 0$ erfüllt, liegt plastisches Materialverhalten vor. Es folgt der Eintritt in den Radial-Return-Algorithmus. Bei Elastizität kann

$\mathbf{f}_{n+1}^{int^i}$ sofort mit $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial^i}$ nach Gleichung (26) berechnet und so die Newton-Raphson-Iteration fortgesetzt werden.

Die zur Ermittlung der Tangentensteifigkeitsmatrix benötigte plastische Spannung-Verzerrungs-Beziehung \mathbf{C}^{ep} , im Falle $F > 0$, wird anschließend an diesen Abschnitt hergeleitet.

9.2. Algorithmenkonsistente Materialtangente

Nach Berechnung von λ und $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i$ aus dem Radial-Return-Algorithmus fehlt noch die Herleitung der plastischen Materialtangente. Dazu wird auf Quelle [10] Kap. 7.8 und 7.9 verwiesen.

Per Definition ergibt sich die Spannung-Verzerrungs-Beziehung \mathbf{C}^{ep} aus der Beziehung:

$$\mathbf{C}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (102)$$

Der Herleitung liegen folgende zwei Gleichungen zugrunde:

$$g \equiv \mathbf{1} \boldsymbol{\varepsilon}|_{t_n+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}|_{t_n} - \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} + \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n} - 2\lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} = 0 \quad (103)$$

$$F = \boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} - 1 = 0 \quad (104)$$

unter Berücksichtigung der verwendeten von Mises Fließbedingung, sowie mit den gespeicherten Werten $\boldsymbol{\varepsilon}|_{t_n}$ und $\boldsymbol{\sigma}|_{t_n}$ aus dem letzten Inkrement n .

Im elastischen Fall besteht der konstante Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{el}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (105)$$

Dabei entspricht \mathbf{C}^{el} gleich \mathbf{C} aus Gleichung (53).

Wenn der plastische Zustand eintritt schreibt sich das totale Differential des Spannungsvektors

$$d\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbf{C}^{ep}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (106)$$

bzw. virtuell als Variation

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (107)$$

Variation nach $\delta \hat{\mathbf{u}}$: Wie ändern sich die Größen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta \boldsymbol{\sigma}$ und $\delta \lambda$?

Bilden der totalen Differentiale beider Gleichungen (103), (104) und anschließendes Vertauschen von $d \leftrightarrow \delta$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda &= \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M}) \delta \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} \delta \lambda &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (108)$$

und aus Gleichung (104)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \delta \lambda &= 0 \\ 2 \boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} \delta \boldsymbol{\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

In Matrizenform ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M} & 2\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} \\ 2 \boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} \quad (110)$$

Zur besseren Übersicht werden die Abkürzungen

$$\mathbf{A}^T \equiv 2 \boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} \quad (111)$$

$$\mathbf{B}^{-1} \equiv \mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M} \quad (112)$$

eingeführt.

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$, unter Verwendung der zweiten Gleichung, führt zu

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\mathbf{A}^T \delta \boldsymbol{\sigma}}_{=0} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A} \delta \lambda \quad (113)$$

Daraus folgt

$$\delta \lambda = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{B}}{\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (114)$$

Eingesetzt in Gleichung 1 aus (110) ergibt sich die plastische Materialtangente in abgekürzter Schreibweise:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}^{-1} \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{B}}{\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\sigma} &= \underbrace{\left[\mathbf{B} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{B}}{\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}} \right]}_{\mathbf{C}^{ep}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (115)$$

Unter Einführung eines Faktors $\beta = \begin{cases} 0 & : \lambda < 0 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$, erhält man

$$\mathbf{C}^{ep} = [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M}]^{-1} - \beta \frac{[\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t} \otimes \boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M}]^{-1}}{\boldsymbol{\sigma}^T|_{t_n+\Delta t} \mathbf{M} [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}|_{t_n+\Delta t}} \quad (116)$$

bzw. in inkrementeller Form ausgeschrieben

$$[\mathbf{C}^{ep}]_{n+1}^i = [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda\mathbf{M}]^{-1} - \beta \frac{[\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i \otimes [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i]^T \mathbf{M} [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda\mathbf{M}]^{-1}}{[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i]^T \mathbf{M} [\mathbf{C}^{-1} + 2\lambda\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i} \quad (117)$$

Für elastisches Materialverhalten reduziert sich \mathbf{C}^{ep} nach Gleichung (117) auf $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^{el}$.

9.3. Beispiel zur isotropen Plastizität nach von Mises: Dickwandige Hohlkugel unter Innenverschiebung

Zur Verifizierung des um die Plastizität weiterentwickelten FE-Programmes wird ein geometrisch einfaches Problem mit existierender analytischen Lösung herangezogen. Es sollen die Radialverschiebung $u(r)$, sowie die Vergleichsspannung σ_V anhand der von Mises Plastizität errechnet werden. Zu Beginn wird daher $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{v.Mises}$ gesetzt.

Abbildung (17) enthält einen Radialschnitt der dickwandigen Hohlkugel, und den Querschnitt des Achtel-Ersatzsystems zur FE-Analyse.

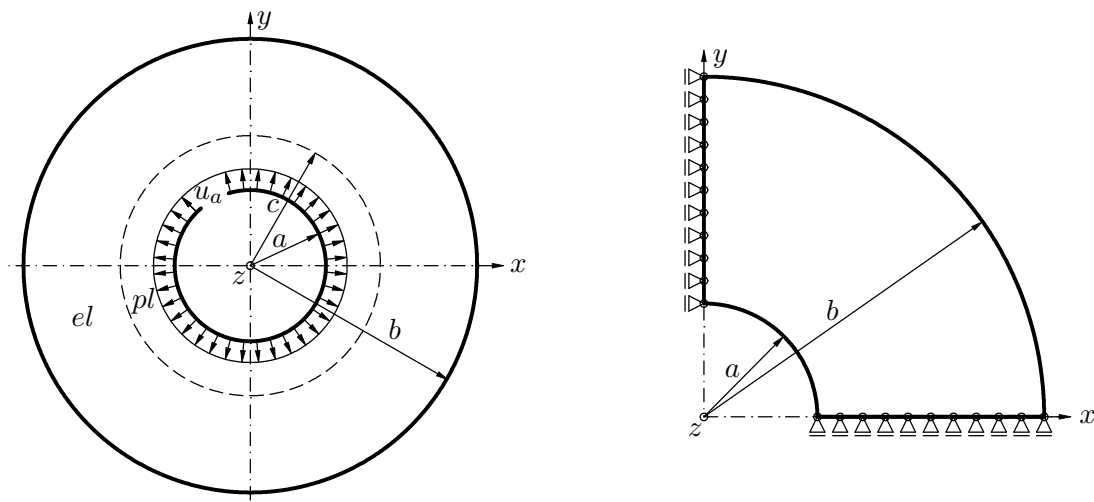


Abbildung 17: Dickwandige Hohlkugel unter Innenverschiebung

9.3.1. Analytische Lösung

Die Ermittlung des konsistenten Lastvektors, resultierend aus einem Innendruck p , auf die gekrümmte Kugelinnenfläche mit Radius a , erweist sich als kompliziert. Daher wird eine Innenverschiebung u_a zufolge eines Innendruckes inkrementell aufgebracht. Die Berechnung für dieses Beispiel sei somit, aufgrund der einfacheren Modellierung, verschiebungsgesteuert.

Herleitungen zur analytischen Lösung der Dickwandigen Hohlkugel unter Innenverschiebung können den Quellen [5] und [6] entnommen werden:

$$u(r) = \begin{cases} u_{el}(r) & : F < 0 \\ u_{pl}(r) & : F = 0 \end{cases} \quad (118)$$

$$u_{el}(r) = \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4G} \left(\frac{b}{r} \right)^3 \right) \left(\frac{c}{b} \right)^3 \frac{2}{3} r \sigma_F \quad (119)$$

$$u_{pl}(r) = \left(\left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{3K} \right) \left(\frac{c}{r} \right)^3 - \frac{2}{3K} \right) \frac{r}{3} \sigma_F + \left(2\sigma_F \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p + \frac{2}{3} \sigma_F \right) \frac{r}{3K} \quad (120)$$

Eingabeparameter:

- Geometriedaten: $a = 50 \text{ mm}$ $b = 150 \text{ mm}$

- Materialeigenschaften: $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0,3$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\sigma_F = 100 \text{ N/mm}^2$$

- Innenverschiebung: $u_a = 0,1 \text{ mm}$

Die korrespondierenden Größen c und p ergeben sich aus der Randbedingung

$$u_{pl}(a) = u_a \quad (121)$$

und der Übergangsbedingung

$$\llbracket u \rrbracket \Big|_{r=c} = 0 \quad \implies \quad u_{pl}(c) = u_{el}(c) \quad (122)$$

Das Gleichungssystem wurde im Computeralgebrasystem Maple gelöst, und ergab folgende Werte:

$$c = 94,384 \text{ mm} \quad p = 177,128 \text{ N/mm}^2$$

9.3.2. Exkurs zur verschiebungsgesteuerten FE-Methode

Im Gegensatz zum kraftgesteuerten Verfahren wird bei Wegsteuerung die vorgegebene Verschiebungsrandbedingung u_a nur zu Beginn eines Inkrementes, zur ersten Iteration, aufgebracht. Die unten angeführten Tabellen zeigen die Unterschiede der Wegsteuerung zur Lastaufbringung der Kraftsteuerung zu einzelnen Iterationen i .

Kraftgesteuert:

| | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ | ... | i_{max} |
|---------|---------|---------|---------|-----|-----------|
| $n = 1$ | 20 N | 20 N | 20 N | ... | 20 N |
| $n = 2$ | 40 N | 40 N | 40 N | ... | 40 N |
| $n = 3$ | 60 N | 60 N | 60 N | ... | 60 N |

Die Gesamtlast von $\mathbf{f}^{ext} = 60 \text{ N}$ wird in drei Inkrementen n Schritt für Schritt zu gleichen Teilen $\Delta \mathbf{f}^{ext} = 20 \text{ N}$ aufgebracht. Da das System elastisch ist, muss der inkrementelle Kraftanteil ständig aufrechterhalten werden, damit es nicht zu Rückverformungen kommt.

Weggesteuert:

| | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ | ... | i_{max} |
|---------|---------|---------|---------|-----|-----------|
| $n = 1$ | 2 mm | 0 mm | 0 mm | ... | 0 mm |
| $n = 2$ | 2 mm | 0 mm | 0 mm | ... | 0 mm |
| $n = 3$ | 2 mm | 0 mm | 0 mm | ... | 0 mm |

Die Gesamtverschiebung $\hat{\mathbf{u}} = 6 \text{ mm}$ soll bei der Wegsteuerung ebenfalls in drei Inkrementen aufgebracht werden. Das Verschiebungsinkrement $\Delta \hat{\mathbf{u}} = 2 \text{ mm}$ wird nur in der jeweils ersten Iteration aufgebracht. Danach muss sich das Gleichgewicht in den übrigen Knoten für diesen Verschiebungszuwachs einstellen.

Aufgrund der Tatsache, dass neben den Randbedingungen der Einspannung nun u_a vorgegeben ist, muss das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{n+1}^i \delta \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i = -\mathbf{\Psi}_{n+1}^i = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{int^i} \quad (123)$$

für das Weggrößenverfahren umstrukturiert werden.

In allgemeiner Darstellungsweise sei die Struktur des zu lösenden Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{bmatrix} \quad (124)$$

Bisher wurden nur Randbedingungen der Lagerung eingebaut. Sei $\delta u_1 = 0$ die unverschiebliche Lagerung, so ergibt sich das reduzierte Gleichungssystem durch Streichen der 1. Zeile und 1. Spalte:

$$\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{bmatrix} \quad (125)$$

Für eine Randbedingung der Form $\delta u_1 = \alpha \neq 0$ entsteht ein Ungleichgewicht, das sich im Laufe mehrerer Iterationsschritte stabilisiert. Die gegebene Verschiebung muss im Residuum berücksichtigt werden. Das Gleichungssystem lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_2 - a_{21}\alpha \\ \vdots \\ \Delta f_n - a_{n1}\alpha \end{bmatrix} \quad (127)$$

Die Verschiebungsevolution der Knoten bei Wegsteuerung soll nun beispielhaft erläutert werden. Abbildung (18) gibt 21 Knoten entlang der x -Achse der Hohlkugel wieder. Die Verschiebungsevolution dieser Knoten über sämtliche Iterationen des dritten Inkrementes ist in Abbildung (19) ersichtlich.

Man erkennt, dass für den Innenknoten 922 nur in der ersten Iteration der Verschiebungsbetrag 0,015 mm aufgebracht wird. Der Verschiebungsverlauf für Knoten 922 ist während des gesamten Inkrementes konstant. Die restlichen Knoten in radialer Richtung erfahren einen zunächst überhöhten Verschiebungswert, der mit weiter fortschreitender Iteration gegen das Gleichgewicht konvergiert. Sobald sich die laufende Iteration der Lösung nähert, stellt sich quadratische Konvergenz ein. Für dieses Beispiel ab Iterationsschritt 3.

Knotennummerierung entlang der x -Achse

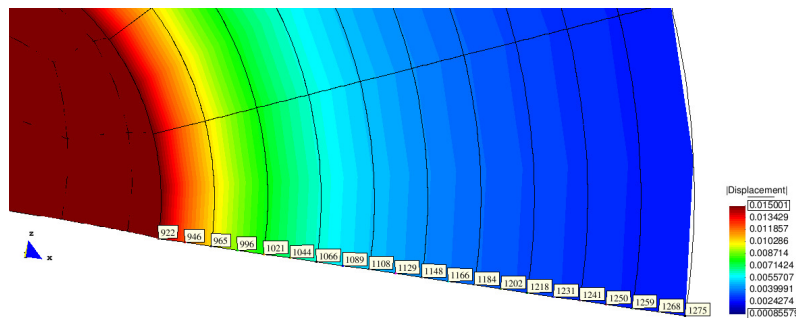


Abbildung 18: Ausgewählte Knoten für Evolutionsgraphen

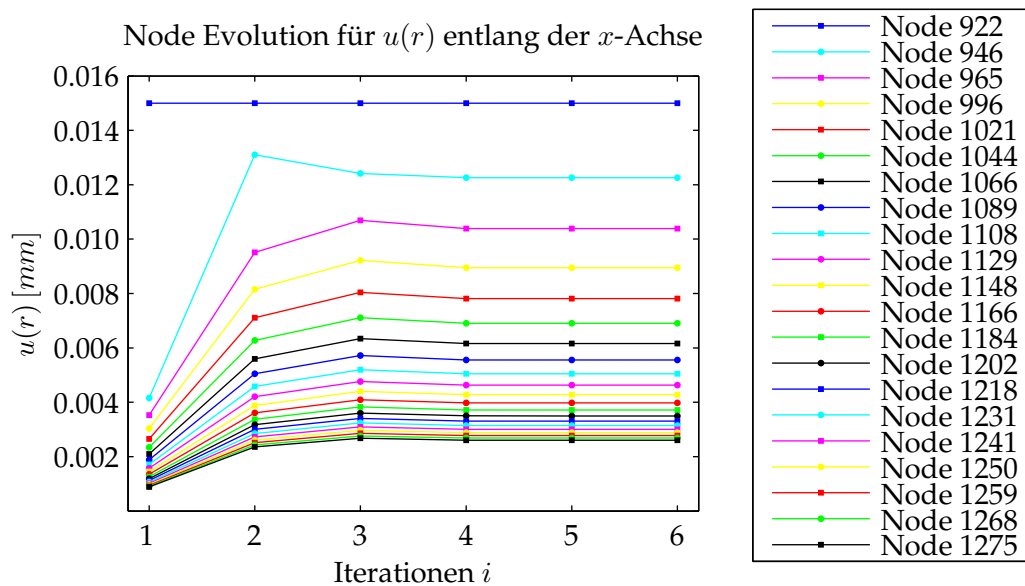


Abbildung 19: Verschiebungsevolution des dritten Inkrementes

9.3.3. FE-Lösung

Zum Verifizierungsbeispiel seien folgende Randbedingungen gegeben.

Für die Lagerung des Ersatzsystems gilt, dass die zu den Koordinatenebenen angrenzende Strukturfläche in Normalenrichtung gesperrt ist. Daraus folgen die Verschiebungsrandbedingungen der unverschieblichen Lagerung:

$$\hat{u}_{N_i} = 0 \quad \forall x_{N_i} = 0$$

$$\hat{v}_{N_i} = 0 \quad \forall y_{N_i} = 0$$

$$\hat{w}_{N_i} = 0 \quad \forall z_{N_i} = 0$$

Die vorgegebene Radialverschiebung u_a wird auf die Strukturinnenfläche an den Knoten N_i aufgebracht. Die Komponenten der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_{N_i}$ lauten mit den normierten Normalvektorkomponenten $[n_{N_i}^x \quad n_{N_i}^y \quad n_{N_i}^z]^T$ des jeweiligen Knotens

$$\hat{\mathbf{u}}_{N_i} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{N_i} \\ \hat{v}_{N_i} \\ \hat{w}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a n_{N_i}^x \\ u_a n_{N_i}^y \\ u_a n_{N_i}^z \end{bmatrix} \quad (128)$$

Das Preprocessing des Kugelsegments wurde in GiD für eine vorgegebene Anzahl an Elementen entlang mehrerer Geometrielinien durchgeführt. Um eine zufriedenstellende Qualität der Ergebnisse zu erhalten, wurde eine Diskretisierung mit 120 Elementen und 1281 Knoten vorgenommen.

Im Zentrum steht die Verifizierung des um den Plastizitätsalgorithmus für das Fließkriterium nach von Mises erweiterten FE-Programmes. Abbildung (20) zeigt den Konturplot der berechneten Gesamtverschiebung $|u(r)|$ und der Vergleichsspannung σ_V dargestellt mittels Postprocessing GiD. Darunter dokumentieren die Liniengraphen die Korrelation der analytischen Lösung zur numerischen.

Eingangs wurde erwähnt, dass Zwischenknoten in GiD nicht dargestellt werden. Die Werte erhält man aber durch einen Knoten-Evolutionsgraphen. Dabei werden einzelne Mittelknoten auf der x -Achse selektiert und ihre Belastungsgeschichte anhand eines Evolutionsgraphen über alle Inkremente (hier 20) aufgetragen. Der Spannungswert des letzten Inkrements 20 kann somit für die Liniengraphen in Abbildung (21) übernommen werden.

Abbildung (22) stellt einen solchen Evolutionsgraphen der Zwischenknoten für σ_V dar. Man sieht, dass der Funktionswert des Knotens 1129 nach Konvergenz des letzten Inkrements gerade noch 1 beträgt, und somit Fließen eintritt. Die x -Koordinate von 1129 entspricht daher circa dem Radius der elastoplastischen Grenze. Daraus folgt $c_{FE} = 95$ mm. Laut analytischer Lösung beträgt der äußere Radius der plastischen Zone $c_{analytisch} = 94,384$ mm.

Für einen stabilen Berechnungsablauf mit quadratischer Konvergenz wird die Verschiebung u_a in 20 Inkremente unterteilt. Dabei benötigte ein konvergierter Gleichgewichtszustand, mit der vorgegebenen hinreichenden Genauigkeit $eps = 2,2204 \cdot 10^{-16}$ gemäß

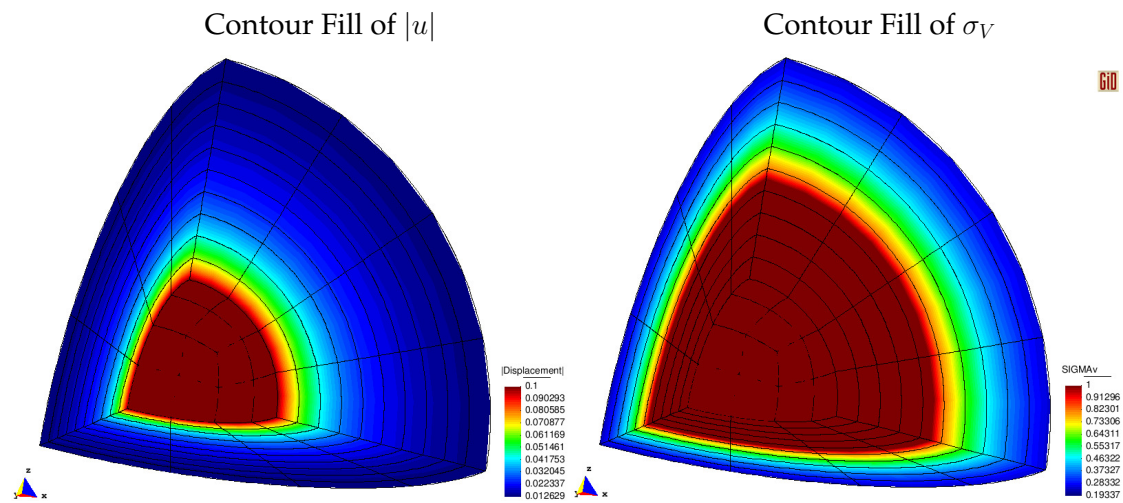


Abbildung 20: Hohlkugel unter Innenverschiebung mit Postprocessing GiD

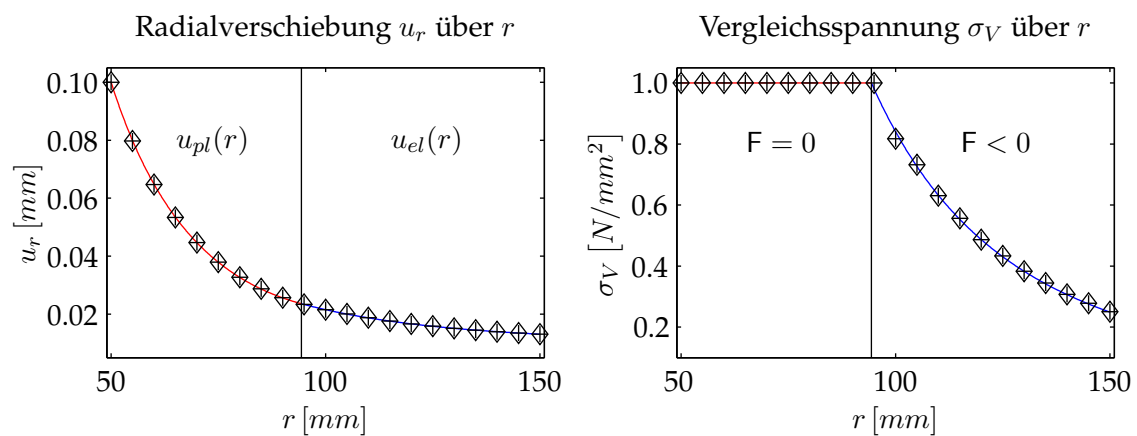
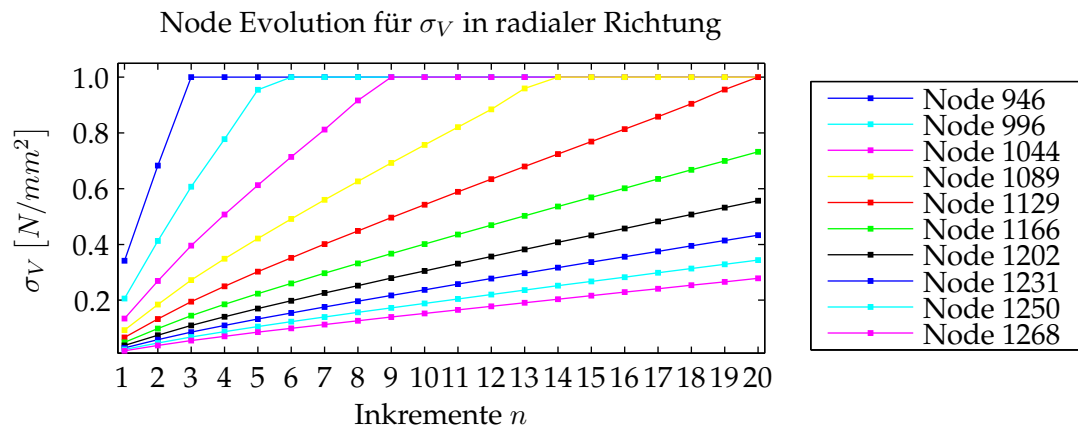


Abbildung 21: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung in MATLAB

Gleichung (43), ca. 7 bis maximal 10 Iterationen. Für eine obere Schranke der Iterationen wurde $i_{max} = 15$ gesetzt.

Abbildung 22: Ermittlung von σ_V der Mittelknoten entlang der x -Achse

9.4. Beispiel zur isotropen Plastizität nach Tresca: Dickwandiges Rohr unter Innendruck

Analog zum vorangegangenen Beispiel soll das FE-Programm nun für die Verwendung der Fließhypothese nach Tresca verifiziert werden. Somit wird zu Beginn der FE-Berechnung $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{Tresca}}$ gesetzt. Aus analytischen Berechnungen ist die Lösung für das Dickwandige Rohr mit ebenen Verzerrungszustand und Fließkriterium nach Tresca gegeben.

9.4.1. Analytische Lösung

Für die detaillierte Herleitung der analytischen Lösung wird auf die Quellen [5] und [6] verwiesen. Voraussetzung für die Lösung des elastoplastischen Problems sei inkompressibles Material mit einer Querkontraktionszahl $\nu = 0,5$. Aufgrund dieser Annahme ist später zu prüfen, ob die analytische Lösung für die FE-Rechnung geeignet ist. Aus Symmetriegründen wird zur FE-Analyse das Viertelsystem des Rohres nach Abbildung (23) modelliert.

Für den ebenen Verzerrungszustand und der Fließbedingung nach Tresca

$$(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) - 2k = 0 \quad \text{mit} \quad \sigma_F = 2k \quad (129)$$

errechnen sich die Spannungen wie folgt:

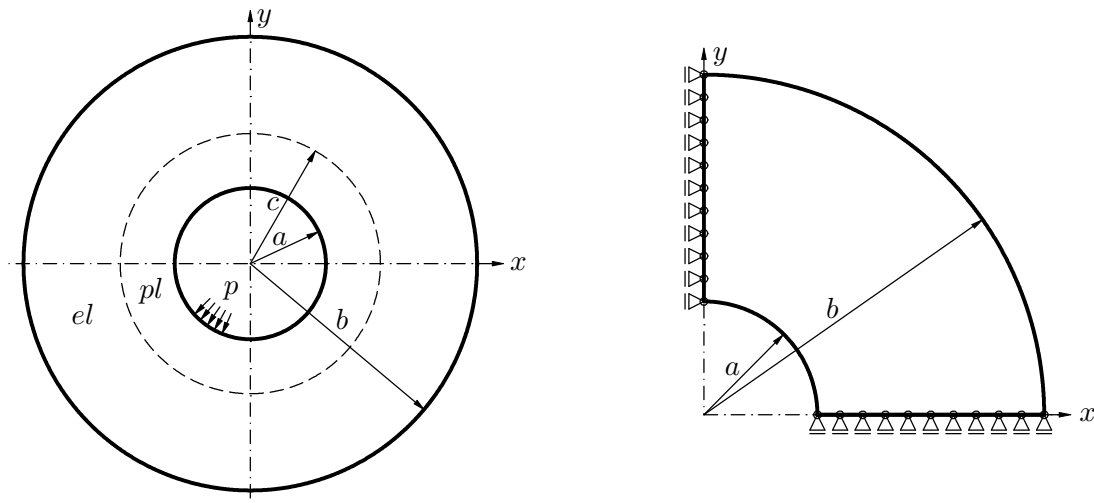


Abbildung 23: Dickwandiges Rohr unter Innendruck

plastischer Bereich: $a \leq r \leq c$

$$\sigma_{rr} = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (130)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{rr} + 2k \quad (131)$$

elastischer Bereich: $c \leq r \leq b$

$$\sigma_{rr} = k \left(\frac{c}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (132)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = k \left(\frac{c}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (133)$$

Der Radius c , der Schnittstelle zwischen plastischer und elastischer Zone, lässt sich aus der Bedingung für den stetigen Verlauf von σ_{rr} am Übergangsbereich nach Gleichung (134) ermitteln.

$$\llbracket \sigma_{rr} \rrbracket \Big|_{r=c} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{rrpl}(c) = \sigma_{rrel}(c) \quad (134)$$

Eingabeparameter:

- Geometriedaten: $a = 50 \text{ mm}$ $b = 150 \text{ mm}$

- Materialeigenschaften: $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0,5$

$$\sigma_F = 100 \text{ N/mm}^2$$

- Innendruck: $p = 90 \text{ N/mm}^2$

Bei genauerer Betrachtung der Gleichungen (130) bis (133) erkennt man die Unabhängigkeit der Spannungsverläufe von den Parametern E und ν . Diese werden somit erst für die numerische Berechnung relevant.

Aus der Übergangsbedingung (134) lässt sich der Radius der elastoplastischen Schnittstelle zu $c = 88,919 \text{ mm}$ bestimmen. Dabei wurde zur Lösung der Gleichung wieder das Computeralgebrasystem Maple verwendet.

9.4.2. FE-Lösung

Das Ersatzsystem zur FE-Analyse wurde als Scheibe der Dicke $t = 10 \text{ mm}$ modelliert. In diesem Abschnitt der numerischen Berechnungen soll das Augenmerk auf zwei wesentliche Schwerpunkte gelegt werden. Zum einen, dass sich das Material elastoplastisch verhält und der analytischen Lösung eine Querkontraktionszahl $\nu = 0,5$ zugrunde liegt. Zum anderen die Modellierung der Fließfläche nach Tresca und die graphische Darstellung des General-Return-Algorithmus für diese Hypothese.

Berechnung für inkompressibles Material: Aufgrund des Ausdrucks

$$\varrho = \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \infty \quad \text{für } \nu = 0,5 \quad (135)$$

in der Elastizitätsmatrix \mathbf{C}_{el} , ist die Berechnung der Beispielpromblemstellung für das aktuell vorliegende FE-Program nicht durchführbar.

Es ist somit zu prüfen, ob die elastoplastische Analyse zufriedenstellende Ergebnisse, für nahezu inkompressibles Material (Querkontraktionszahl $\nu \rightarrow 0,5$) liefert.

Selbst bei nahezu inkompressiblen Zuständen, für z.B. $\nu = 0,49$, verlieren die Finiten Elemente der Berechnung an Robustheit und liefern bei grober und feinerer Vernetzung große Spannungsschwankungen. Dieser numerische Defekt der Elementformulierung

wird als Volumenlocking bezeichnet, da die Elemente sperren. Um eine gute Lösungsgenauigkeit mit kompressibler Finite-Elemente-Methode zu erhalten, kann daher eine sehr feine Diskretisierung erforderlich sein. Generelle Erkenntnisse zur Thematik, Lösung beinahe inkompressibler Zustände, liefert Quelle [8], S. 279ff. Zur Lösung vollständiger inkompressibler Zustände bei Materialien, mit $\nu \rightarrow 0,5$ als Grenzwertproblem, wird auf Quelle [8], S. 291ff hingewiesen.

Die Berechnung für ein $\nu \rightarrow 0,5$ ist ebenfalls Thema von Quelle [13]. Darin wird der relative Fehler zufolge Volumenlocking-Effekte in Abhängigkeit vom Diskretisierungsgrad untersucht. Die gewonnene Erkenntnis, dass sich der relative Fehler zur analytischen Lösung mit zunehmendem Diskretisierungsgrad verringert, soll hier nun für diese Arbeit genutzt werden (vgl. [13], S. 128ff).

Für ein gegebenes Netz mit 60 Elementen und 819 Knoten wird das Verhalten der Spannungen bei variierender Querkontraktionszahl ν untersucht. Die gewählten ν -Werte können der Legende der Liniengraphen in Abbildung (24) entnommen werden. Es zeigt sich eine zunehmende Abweichung der numerischen Lösung zur analytischen mit steigender Querdehnungszahl ab 0,4 gegen 0,5. So ergibt sich für $\nu = 0,49$ nach der FE-Berechnung ein Wert von $\sigma_{rr}(a) = -74,404 \text{ N/mm}^2$ am Innenradius, anstatt des tatsächlich aufgetragenen Innendrucks $p = 90 \text{ N/mm}^2 = -\sigma_{rr}(a)$. Ein relativer Fehler von 17,33%.

Durch eine feinere Strukturvernetzung müsste sich nach Quelle [13] eine bessere Approximation ergeben. Abbildung (25) dokumentiert die FE-Ergebnisse für ein Netz von 300 Elementen mit 3813 Knoten. Daraus resümiert, dass sich der Fehler im plastischen Bereich tatsächlich für $\nu = 0,49$ auf 6,965% vermindert. Es ergibt sich am Innenradius ein Spannungswert von $\sigma_{rr}(a) = -83,731 \text{ N/mm}^2$. Das Verhalten der Spannungen für die 300 Elemente Konfiguration wurde ebenfalls für die Werte $\nu = 0,40$ und $\nu = 0,47$ analysiert und dadurch eine bessere Näherung der numerischen Lösung durch höheren Diskretisierungsgrad gezeigt.

Trotz besserer Approximation durch erhöhte Elementanzahl, weichen die Spannungswerte aber ab einer Querdehnungszahl $\nu = 0,45$ von der analytischen Lösung um einen bestimmten Fehlerbetrag ab. In einem Bereich unter $\nu = 0,45$ zeigt sich eine näherungsweise Unabhängigkeit der numerischen Lösung von der Querdehnungszahl. Allerdings basiert die analytische Lösung für das dickwandige Rohr unter Innendruck auf einer Herleitung für vollkommene Inkompessibilität. Somit muss ein für die existierende analytische Lösung gültiges ν -Intervall bestimmt werden, wodurch die Relevanz der analytischen Lösung für den Vergleich nicht an Bedeutung verliert und gleichzeitig in der kompressiblen FE-Berechnung zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Mit dieser letzten Aussage wird nun auf die Implementierung für das Fließkriterium nach Tresca übergeleitet.

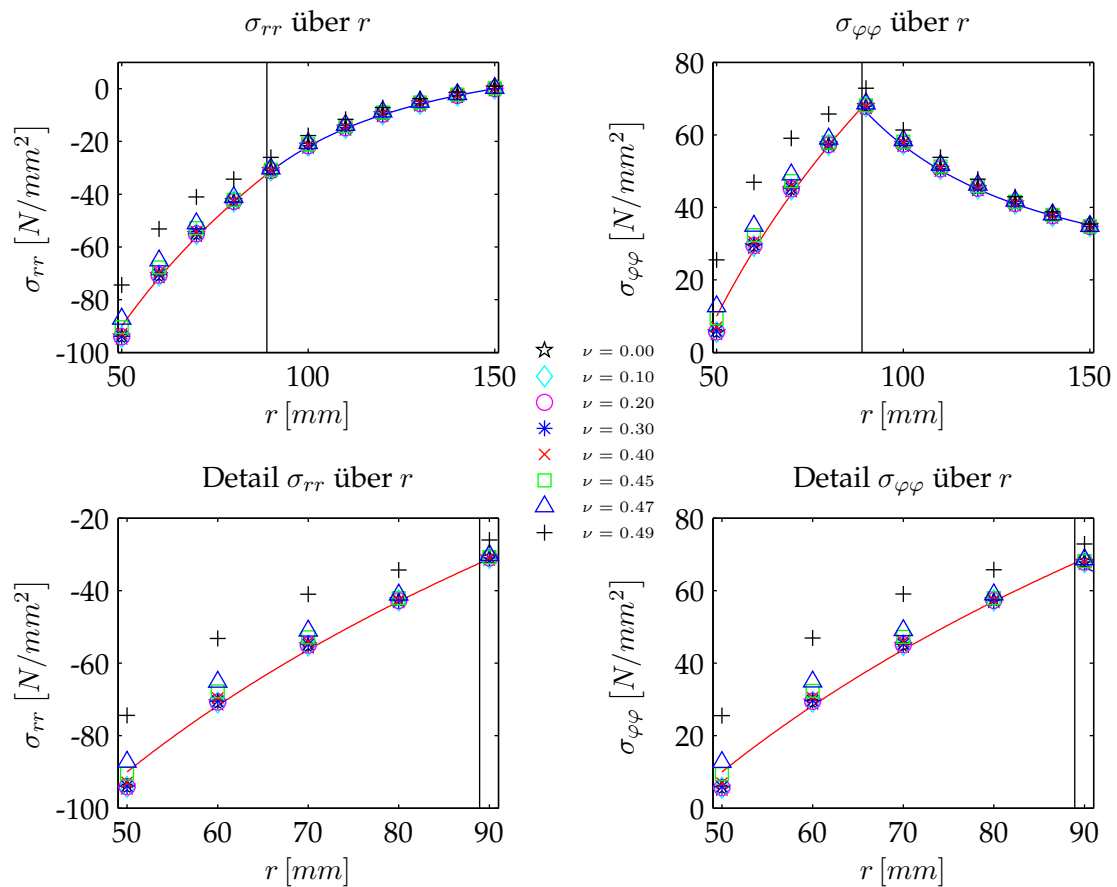


Abbildung 24: Resultate für ein FE-Netz mit 60 Elementen

Isotrope Plastizität nach Tresca: Das Problem der Implementierung für Plastizität nach Tresca ist die geometrische Form der Fließfläche. Diese stellt eine allgemein zusammenhängende Kurve, nämlich die eines sechsseitigen Prismas, im Hauptnormalspannungsraum dar. Nach der analytischen Lösung muss allerdings nur die Fließfläche einer Ebene, nach Gleichung (129), programmiert werden. Abbildung (26) zeigt die hervorgehobene Fließfläche, die für den General-Return-Algorithmus verwendet wurde.

Die Annahme der Fließfläche

$$(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) - 2k = 0 \quad (136)$$

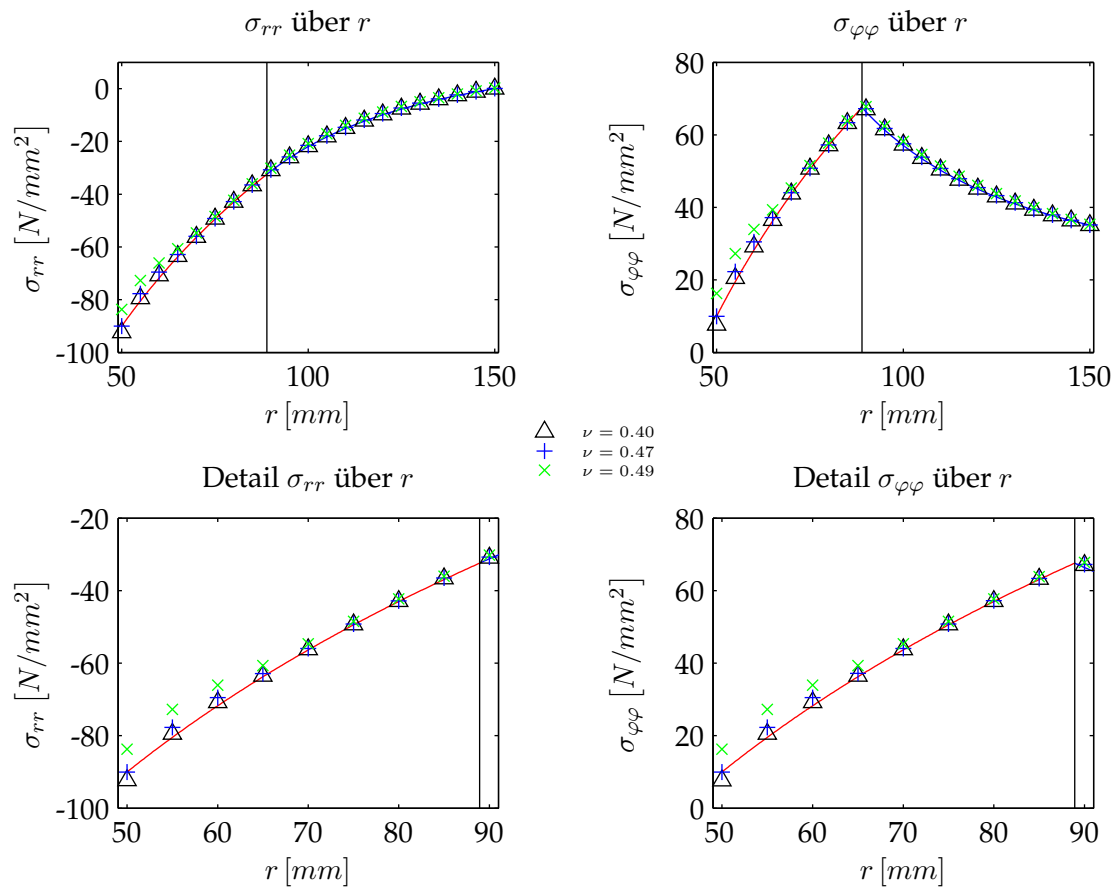


Abbildung 25: Resultate für ein FE-Netz mit 300 Elementen

ist nur richtig wenn σ_{zz} dazwischen liegt: $\sigma_{rr} \leq \sigma_{zz} \leq \sigma_{\vartheta\vartheta}$

Unter Voraussetzung des EVZ ist $\varepsilon_{zz} = 0$ und die Spannung σ_{zz} kann direkt aus dem Hooke'schen Gesetz bestimmt werden:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr}) \quad (137)$$

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis erkennt man, dass die Bedingung (137) für inkompressibles Material mit $\nu = 0,5$, immer erfüllt ist, und die Spannung σ_{zz} immer dazwischen liegt.

Für die numerische Berechnung sind aber bereits Berechnungen bei nahezu inkompressiblen Zuständen von Defekten begleitet. Ein sinnvoller Wertebereich für ν , wodurch

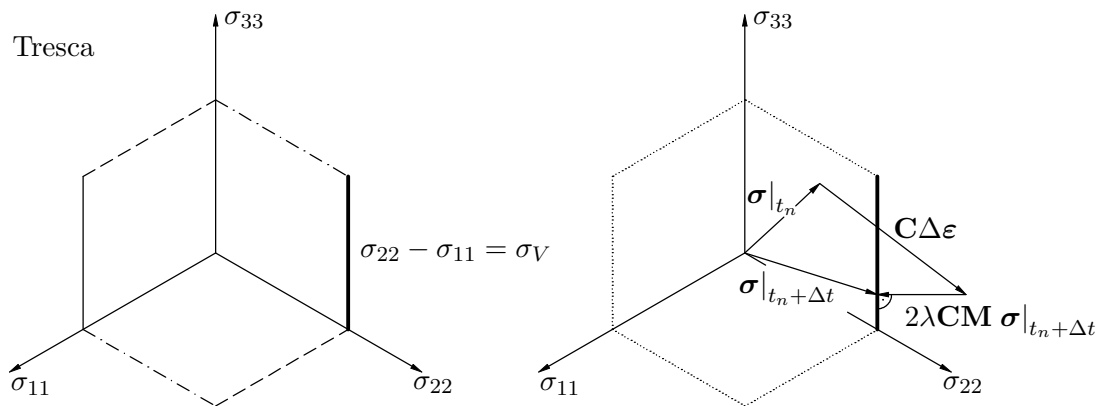


Abbildung 26: General-Return-Algorithmus für die verwendete Fließfläche nach Tresca

die Relevanz der analytischen Lösung noch gegeben ist, und Spannungszustände auf der richtigen Fließfläche zum Erliegen kommen, liefert folgende Überlegung:

Die Grenzfälle der Bedingung $\sigma_{rr} \leq \sigma_{zz} \leq \sigma_{\vartheta\vartheta}$ lauten

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} \implies \sigma_{rr} = \nu(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr}) \implies \nu = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr}} \quad (138)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\vartheta\vartheta} \implies \sigma_{\vartheta\vartheta} = \nu(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr}) \implies \nu = \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr}} \quad (139)$$

Unter Berücksichtigung des allgemeinen Gültigkeitsbereiches $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ ist im Weiteren nur mehr die untere Grenze nach Gleichung (138) von Interesse. Es ergibt sich für die analytische Lösung das Intervall

$$\frac{\ln \frac{r}{a}}{2 \ln \frac{r}{a} + 1} \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (140)$$

Die Wahl eines ν -Wertes ist somit durch den Ausdruck $\ln \frac{r}{a}$ eingeschränkt. Für einen Grenzwert des Innenradius $a \rightarrow 0$ bekommt man eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,5$.

Falls man $a > 0$ und ein physikalisches Materialverhalten gemäß $\nu \geq 0$ wählt, ergibt sich für das vorliegende Beispiel aufgrund von $\sigma_{rr}(a) = -p$ ein mögliches Intervall mit

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (141)$$

Dadurch sind sämtliche ν -Werte der numerischen Berechnungen aus den Liniengraphen (24) und (25) abgedeckt.

Die Ergebnisse der Abbildungen (27) und (28) zeigen die zum Konturplot, nach Post-processing GiD, korrespondierenden Spannungsverläufe σ_V . In beiden Modellen wurde das Viertelsystem derart diskretisiert, sodass ein Elementendknoten das elastoplastische Interface ungefähr trifft.

Mit einer Vernetzung nach 60 Elementen, ergibt sich die Grenze knapp unter $c_{FE} \cong 90$ mm. Der Vergleichsspannungswert des Knotens an der Stelle $x = 90$ beträgt $\sigma_V = 0,9883 \text{ N/mm}^2$. Es wurden dieselben Querdehnungszahlen wie unter Abbildung (24) verwendet.

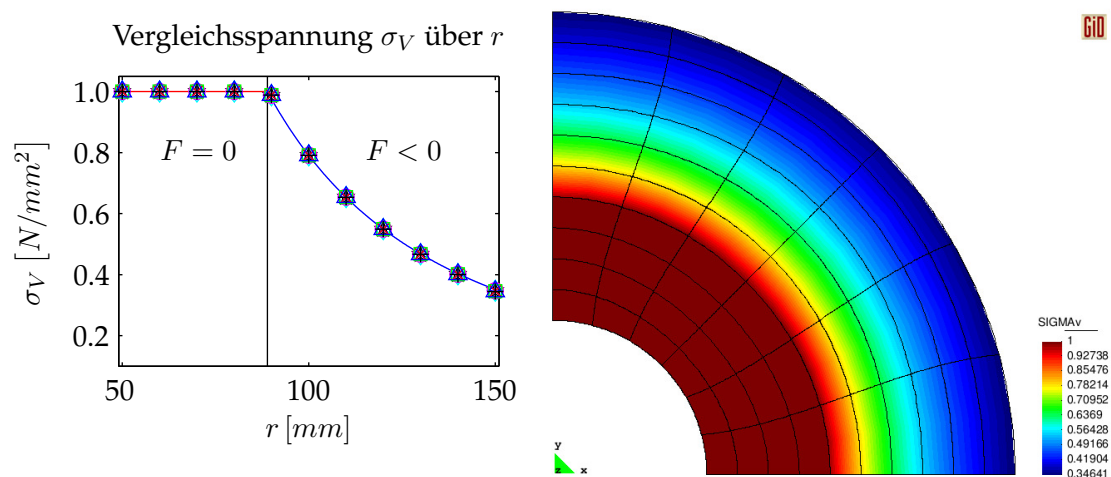


Abbildung 27: Rohr unter Innendruck für ein Netz mit 60 Elementen

Die feinere Vernetzung mit 300 Elementen ergibt analog eine Grenze knapp unter $c_{FE} \cong 90$ mm. Der Vergleichsspannungswert des Knotens an der Stelle $x = 90$ beträgt $\sigma_V = 0,9989 \text{ N/mm}^2$. Es wurden dieselben Querdehnungszahlen wie unter Abbildung (25) verwendet.

In allen Darstellungen dieses Abschnittes wurden zur besseren Übersicht keine Mittelknoten dargestellt. Der zur Innendruckbelastung p korrespondierende Lastvektor \mathbf{f}^{ext} , wurde in den angeführten FE-Berechnungen mit $k = 10$ Inkrementen aufgebracht. Die

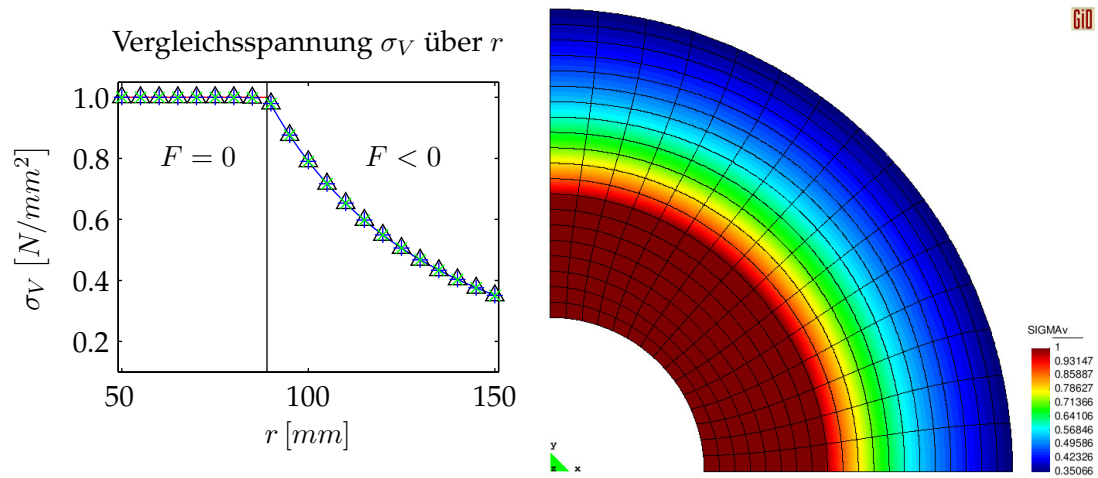


Abbildung 28: Rohr unter Innendruck für ein Netz mit 300 Elementen

obere Schranke der letzten Iteration wurde auf $i_{max} = 15$ gesetzt. Tatsächlich konvergierte die Iteration eines Inkrementes nach ca. 8 Schleifendurchläufen quadratisch gegen den Gleichgewichtszustand.

10. Zusammenfassung

Unter Teil (II) wurde die Entwicklung eines selbst geschriebenen FE-Programmes dokumentiert, das iterativ über den Vergleich mit gegebenen analytischen Lösungen zu Beispielen aus der Elastizität und Plastizität verifiziert wurde. Somit liegt nun ein Programm vor, das eine Lösung für die gesuchte Problemstellung dieser Arbeit unabhängig von der Vorgehensweise aus Teil (I) numerisch berechnet.

Im abschließenden dritten Teil werden die Ergebnisse der analytischen Lösung und der numerischen Berechnung miteinander verglichen. Dadurch soll gezeigt werden, dass die Spannungsverläufe beider Lösungen koinzidieren und die Konturplots der Vergleichsspannung σ_V mittels GiD in der elastischen Zone denen aus der symbolischen Berechnung in Maple entsprechen.

Teil III.

Ergebnisse

Im Zentrum dieses Abschnittes steht die Darstellung der gewonnenen Ergebnisse für die Spannungen σ_{xx} , τ_{xy} , σ_{yy} und σ_V aus dem analytischen Teil (siehe Teil (I)) und numerischen Teil (siehe Teil (II)) dieser Arbeit.

11. Allseitig gezogene Scheibe mit Kreisloch

11.1. Analytische Lösung

Für den plastischen Bereich lauten die Spannungen (siehe Gleichung (46) bis (48) unter Abschnitt (I)):

$$\sigma_{rr} = 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = 2k + \sigma_{rr} = 2k \left(1 + \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) \quad (2)$$

$$\tau_{r\vartheta} = 0 \quad (3)$$

Dabei liegt der Lösung im plastischen Bereich eine Querdehnungszahl $\nu = 0,5$ für inkompressibles Material zugrunde.

Die Spannungskomponenten σ_{xx} , τ_{xy} , σ_{yy} der elastischen Zone können aus den Kološov'schen Formeln (siehe Gleichung (157) und (158) unter Abschnitt (I))

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = q + p + 4k \Re \left\{ \ln \left(\frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2k \left[\bar{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2c^2 (1 + \alpha^2)}{\sqrt{z^2 - 4\alpha c^2} (z + \sqrt{z^2 - 4\alpha c^2})} + \frac{q - p}{2k} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

mit

$$c = a e^{\left(\frac{q+p}{4k} - \frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha = \frac{q-p}{2k} \quad \text{und} \quad z = x + iy \quad (6)$$

nach Trennung von Real- und Imaginärteil ermittelt werden. Die daraus resultierenden Gleichungen sind jedoch ziemlich umfangreich, weshalb sie hier nicht explizit dargestellt werden. Deshalb gibt es in der Literatur nur Darstellungen zur Vergleichsspannung σ_V (siehe dazu Quelle [1] auf S. 378 und [7] auf S. 205), da diese auf einfachem Weg durch Bildung des Absolutbetrages der zweiten Formel von Kolosov entsprechend Gleichung (5) bestimmt werden kann.

Aus

$$|\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}| \quad (7)$$

folgt

$$\sqrt{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (8)$$

was gemäß Gleichung (49) aus Abschnitt (I) der Fließspannung σ_F nach Tresca entspricht.

Daraus ergibt sich die Vergleichsspannung zu

$$\sigma_V = \frac{1}{\sigma_F} |\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}| \quad (9)$$

11.2. FE-Berechnung

Unter Ausnützung der Symmetrie wird das Ersatzsystem zur FE-Analyse als Viertelscheibe der Dicke $t = 1$ mm modelliert. Abbildung (29) zeigt die mit Preprocessing GiD vernetzte Viertelscheibe.

Die Struktur wurde Abbildung (29) entsprechend mit 220 Elementen zu 2835 Knoten diskretisiert.

Wie bereits im Beispiel "Dickwandiges Rohr unter Innendruck" aus Kapitel (9.4), liegt auch der analytischen Lösung im plastischen Bereich der allseitig gezogenen Scheibe mit Kreisloch inkompressibles Materialverhalten zugrunde. Details zur FE-Berechnung

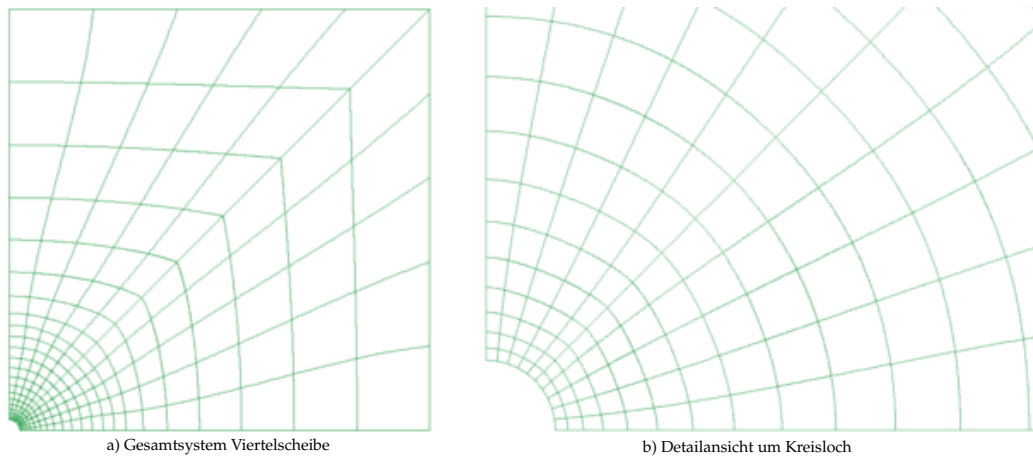


Abbildung 29: Scheibe mit Kreisloch - Vernetzung des Ersatzsystems mit GiD

für inkompressibles Material wurden bereits unter Abschnitt (9.4) behandelt, weshalb an dieser Stelle nicht näher auf diese Thematik eingegangen wird.

Um das Sperren der Elemente (auch als Volumenlocking bezeichnet) zu unterbinden und ein zufriedenstellendes Ergebnis der kompressiblen FE-Berechnung zu erhalten, muss ein geeigneter ν -Wert gewählt werden.

Gleichung (140) aus Teil (II) bietet ein Intervall zur Wahl eines ν -Wertes:

$$\frac{\ln \frac{r}{a}}{2 \ln \frac{r}{a} + 1} \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (10)$$

Man beachte, dass die analytische Lösung nur für eine Querdehnungszahl ν , die die abgeleitete Bedingung

$$r \leq e^{-\frac{\nu}{2\nu-1}} \quad (11)$$

aus der unteren Schranke von Gleichung (10) erfüllt, gültig ist.

Für die folgenden Beispiele wurde $\nu = 0,4$ gesetzt. Gemäß Bedingung (11) darf sich die plastische Zone daher für eine Querdehnungszahl $\nu = 0,4$ nur innerhalb des Radius $r = 7,389$ mm erstrecken.

Insgesamt lauten die Eingabeparameter für dieses Beispiel:

- Geometriedaten: $L = 40 \text{ mm}$ $a = 1 \text{ mm}$

- Materialeigenschaften: $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0,4$

$$k = 1 \text{ N/mm}^2 = \frac{\sigma_F}{2}$$

- Belastungen: $q = 3k$

$$p_1 = 2,2k \quad p_2 = 2,4k \quad p_3 = 2,6k$$

$$p_4 = 2,8k \quad p_5 = 3k$$

Dabei ist q gleich der Streckenbelastung in y -Richtung, und p entspricht der Streckenlast in x -Richtung, die bei gleichbleibendem $q = 3k$ zwischen den Werten $2,2k$ bis einschließlich $3k$ variiert.

Die Belastungswerte wurden derart gewählt, dass die Bedingung (133) aus Teil (I)

$$e^{\left(\frac{q+p}{4k} - \frac{1}{2}\right)} \left(1 - \frac{(q-p)}{2}\right) \geq 1 \quad (12)$$

erfüllt ist, und die elliptische Randkurve C des elastoplastischen Interface das Kreisloch komplett umschließt.

Der Faktor $\frac{L}{a}$ wurde bewusst etwas größer gewählt aufgrund der Erkenntnis unter Abschnitt (6.2), um Modellierungseinflüsse möglichst gering zu halten.

11.3. Darstellung der Vergleichsspannung

Im Folgenden sind die Ergebnisse der Vergleichsspannung σ_V aus der analytischen Lösung und der Berechnung mittels Finite-Elemente-Methode für fünf Beanspruchungsfälle graphisch veranschaulicht.

Die Abbildungen (30), (32), (34), (36) und (38) zeigen jeweils links die symbolisch berechnete Lösung geplottet in Maple. Die jeweils rechte Abbildung stellt den Konturplot der numerischen Resultate mittels Postprocessing GiD zum Vergleich dar.

Unter den Konturplots zu den einzelnen Lastfällen befinden sich die korrespondierenden Spannungsverläufe für σ_V entlang der Hauptachsen. Die blau gestrichelte Linie entspricht dem Verlauf nach Gleichung 1.63 von Galin (vgl. [1], S. 376). Die korrigierte Gleichung (158) ist in den Grafiken rot dargestellt. Die numerische Lösung ist durch Diamantsymbole gegeben.

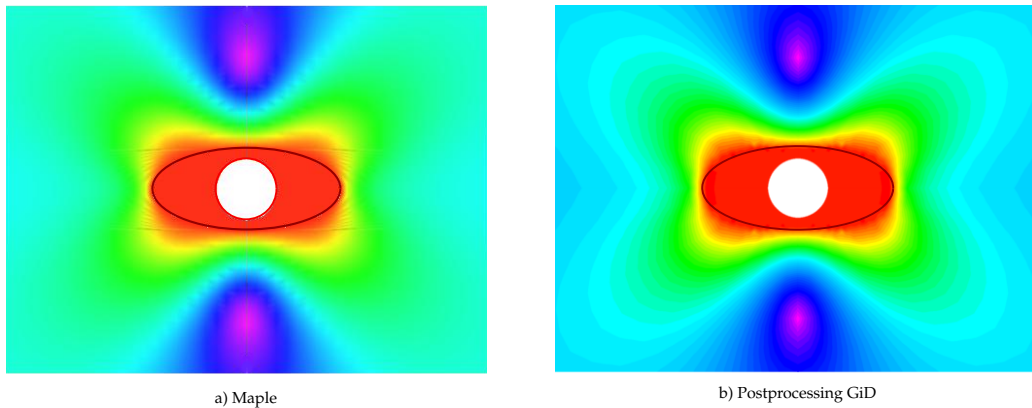


Abbildung 30: Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,2k$

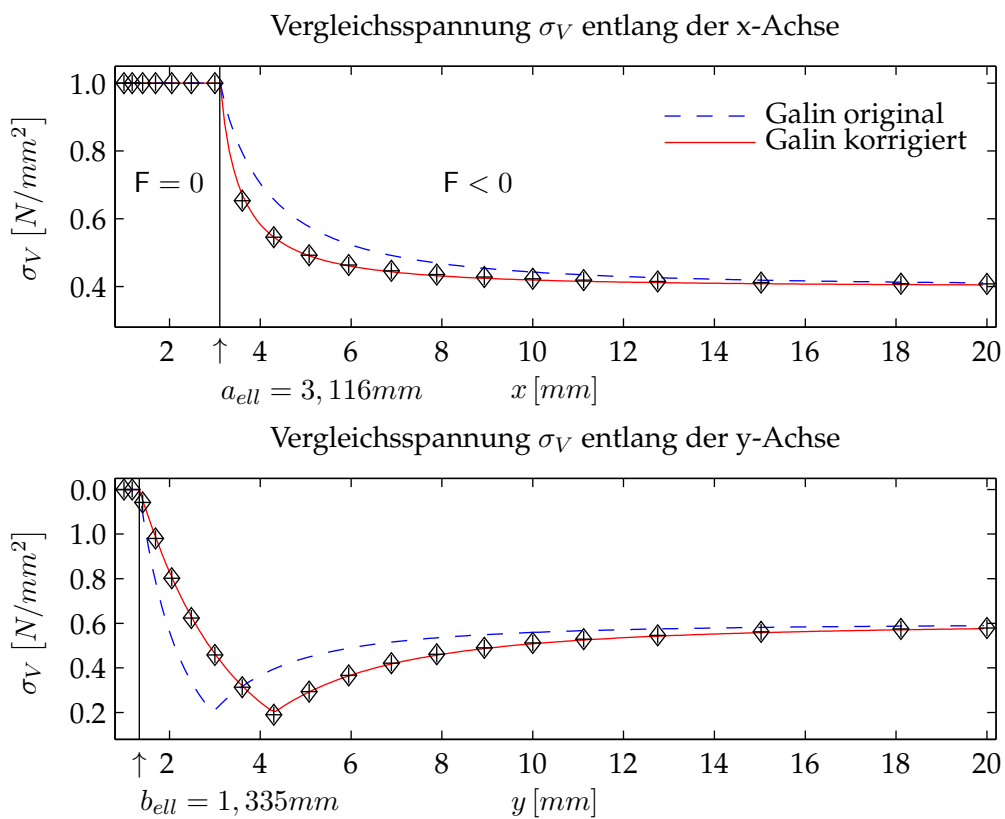


Abbildung 31: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,2k$

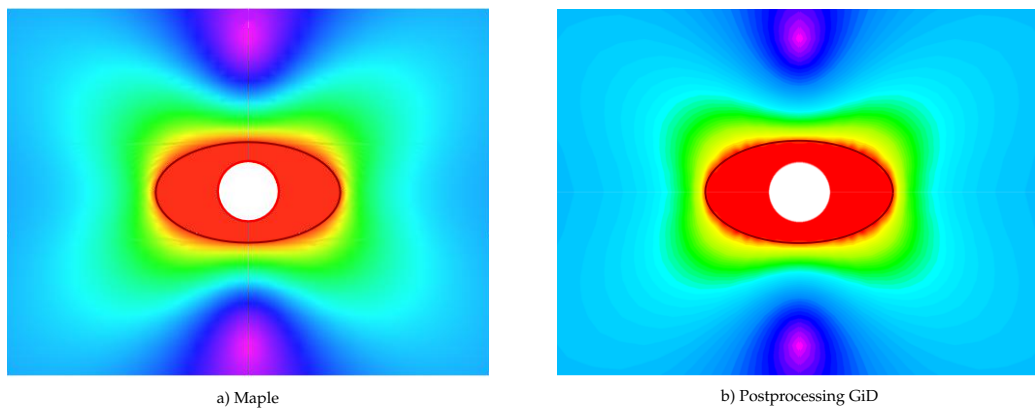


Abbildung 32: Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$

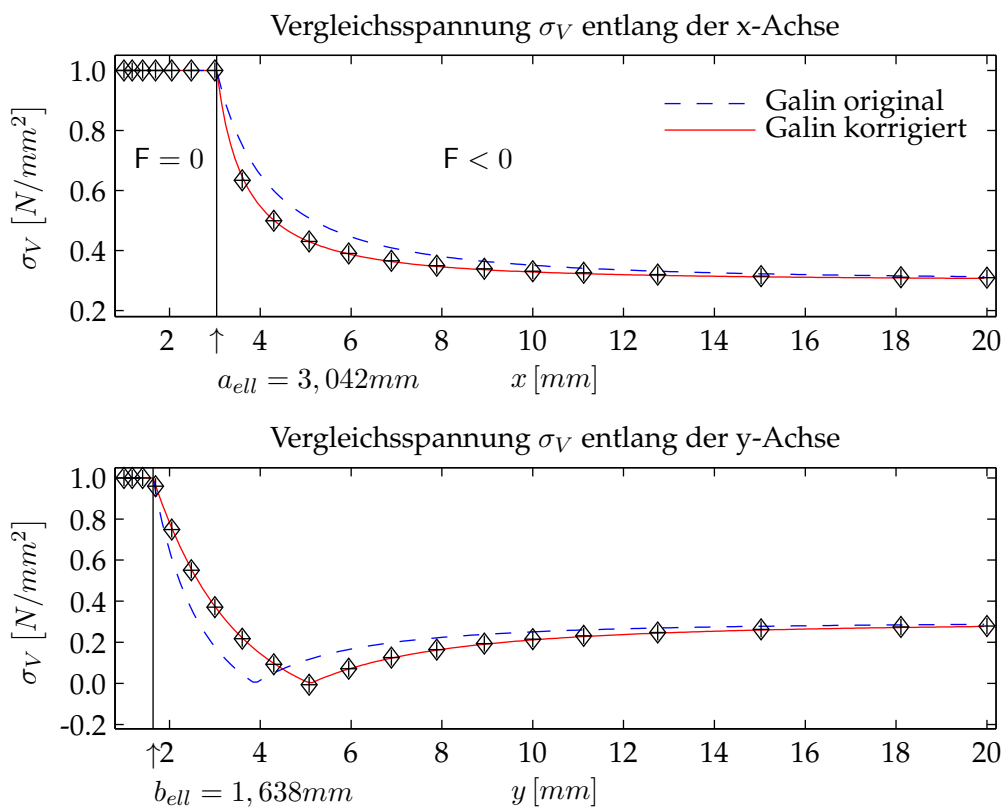
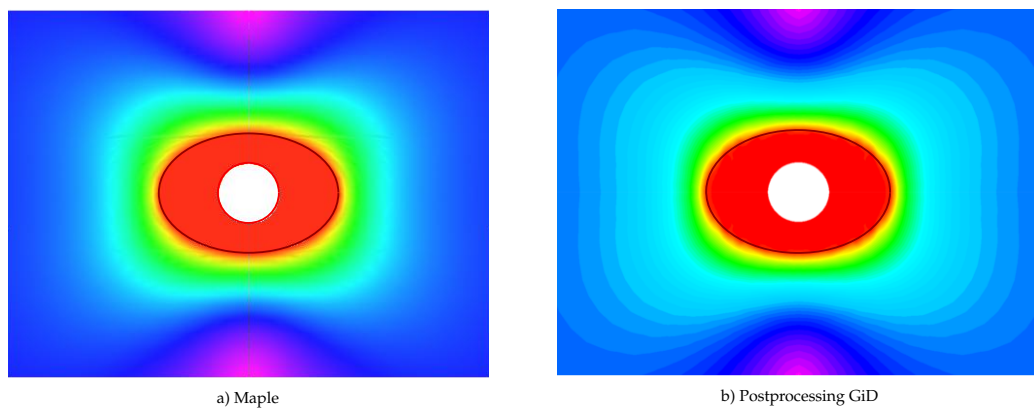
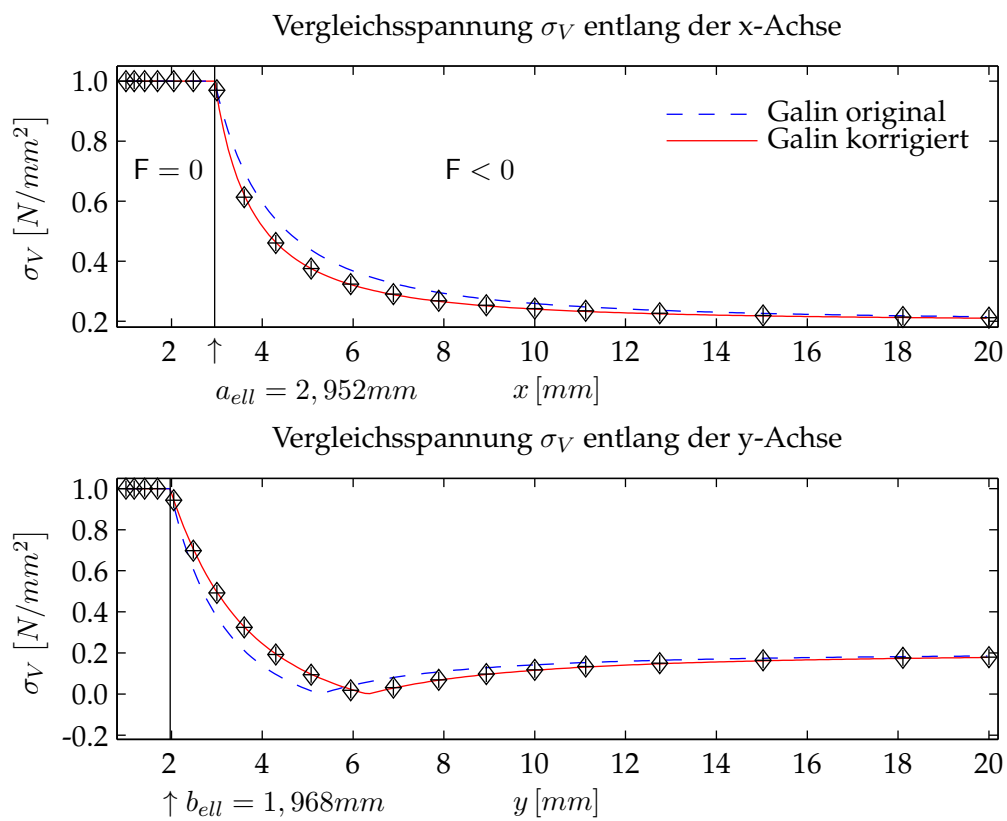


Abbildung 33: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,4k$

Abbildung 34: Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,6k$ Abbildung 35: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,6k$

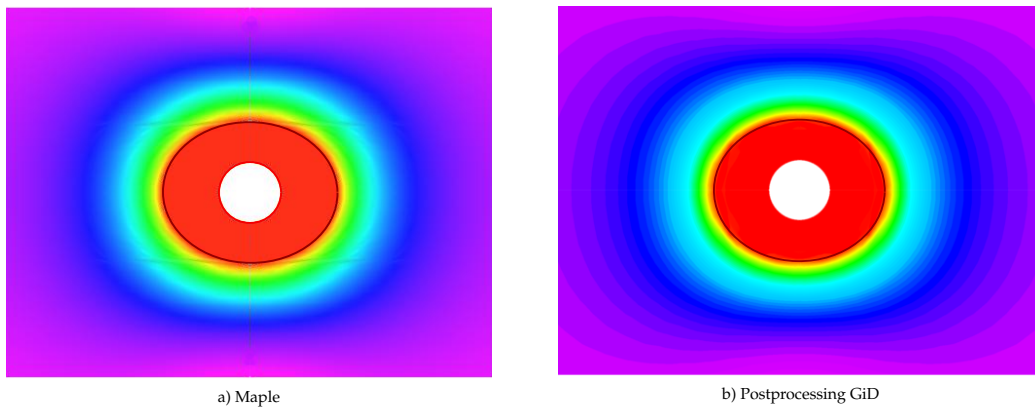


Abbildung 36: Konturplot σ_V für den Lastfall $q = 3,0k$ und $p = 2,8k$

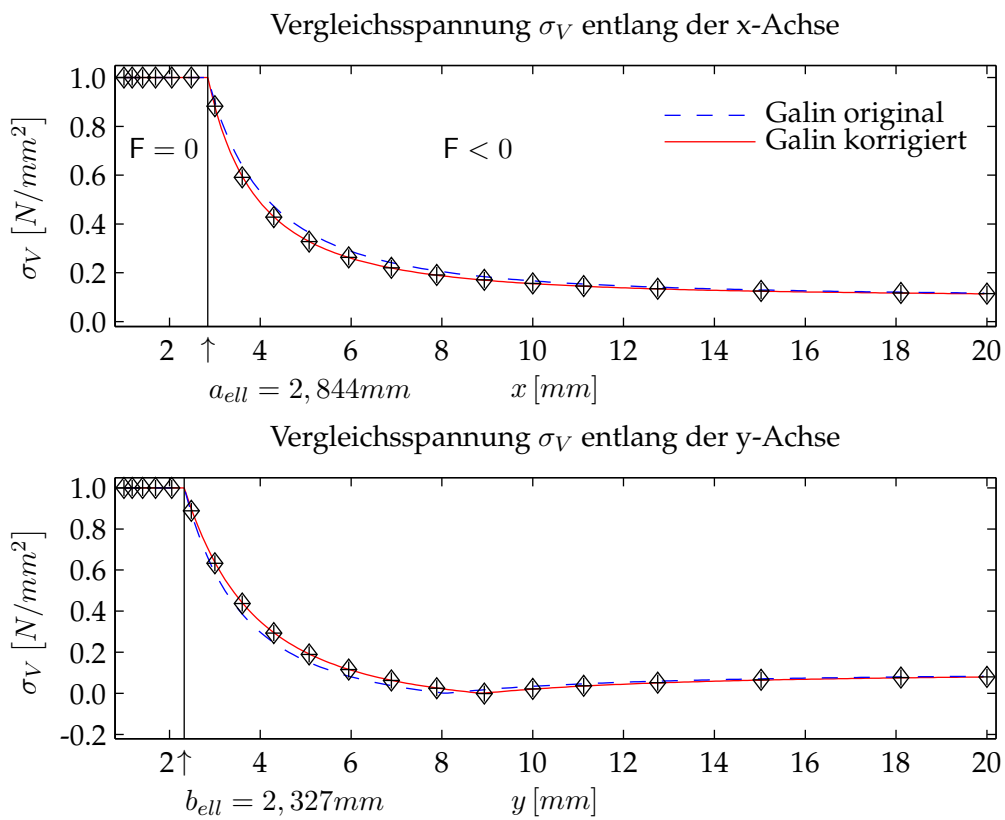
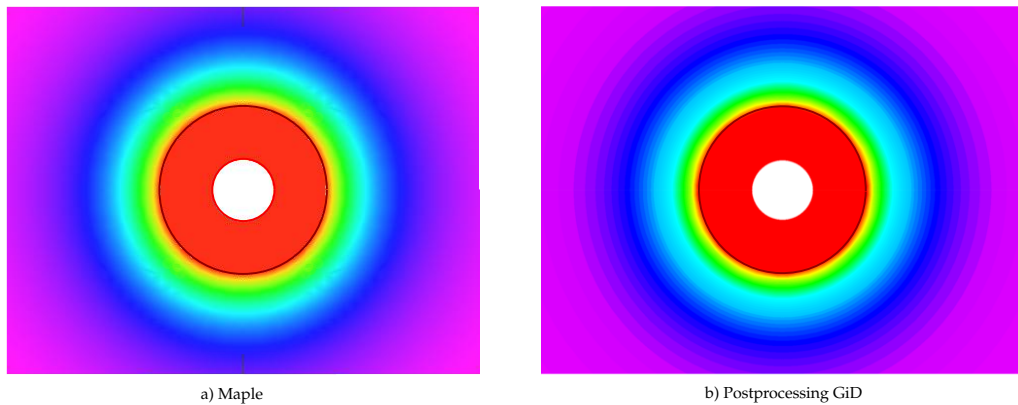
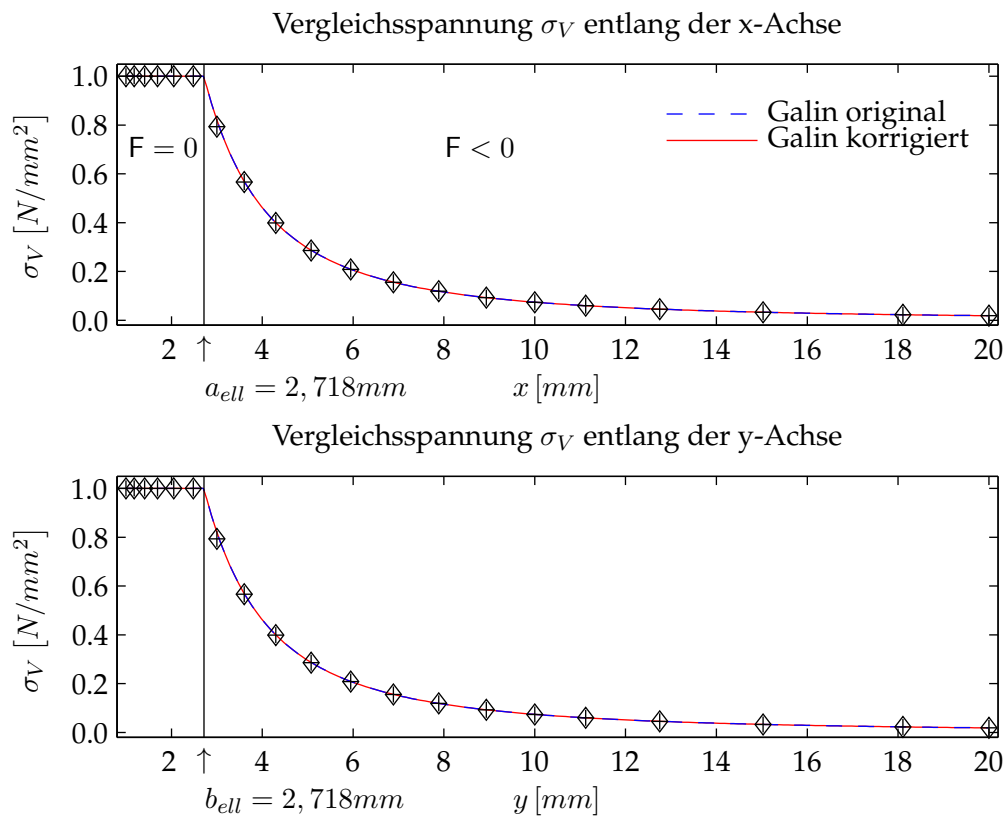


Abbildung 37: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 2,8k$

Abbildung 38: Konturplot σ_V für den Lastfall $q = p = 3, 0k$ Abbildung 39: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung für $p = 3, 0k$

Man sieht, dass sich bei der Annäherung des Belastungsverhältnisses $\frac{q}{p}$ gegen 1, die Differenz beider analytischer Lösungen gegen Null wandert. Der letzte Fall entspricht der allseitig gezogenen Scheibe unter gleicher Belastung $q = p = 3k$. Der Wert $\alpha = \frac{(q-p)}{2k}$ verschwindet und die Verläufe beider analytischer Lösungen decken sich. Die Hauptachsen der Ellipse a_{ell} , b_{ell} sind gleich dem Radius c . Die plastische Zone ist somit ein Kreis.

Des Weiteren ist aus den Liniengraphen ersichtlich, dass die berechneten Spannungspunkte der FE-Berechnung auf dem korrigierten Verlauf zum Erliegen kommen. Die numerische Lösung entspricht daher einer guten Näherungslösung und bestätigt die Richtigkeit von Gleichung (158).

In der unten angeführten Tafel können die Halbachsen

$$c(1 \pm \alpha) = \begin{cases} a_{ell} \\ b_{ell} \end{cases} \quad (13)$$

der Grenzellipse der einzelnen Belastungsfälle $q = 3k$ zu p_i für den Kreisradius $a = 1$ mm entnommen werden (vgl. [7], S. 205).

| $\frac{p}{k}$ | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,4 | 2,2 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_{ell} [mm] | 2,718 | 2,844 | 2,952 | 3,042 | 3,116 |
| b_{ell} [mm] | 2,718 | 2,327 | 1,968 | 1,638 | 1,335 |

11.4. Darstellung der Spannungskomponenten

Das Hauptziel der Diplomarbeit ist die graphische Darstellung der Spannungsverläufe sowohl im plastischen als auch im elastischen Bereich entlang der Hauptachsen. Zur Ermittlung der Spannungen im elastischen Gebiet wurden die Kolosov'schen Formeln hergeleitet und diese nun mit Hilfe des Computeralgebrasystems Maple in ihren Real- und Imaginärteil getrennt und aus den resultierenden drei Gleichungen die Spannungskomponenten σ_{xx} , τ_{xy} , σ_{yy} für das elastische Gebiet bestimmt.

Für die Eingabeparameter ändert sich nur der Wert der Querdehnungszahl. Da die Spannungsverläufe nur für einen Belastungsfall, nämlich $q = 3k$ und $p = 2,4k$, von Interesse sind, wird $\nu = 0,35$ gesetzt. Dadurch ergibt sich aus der Bedingung (11) ein Radius von $r = 3,211 \text{ mm} > 3,042 \text{ mm} = a_{ell}$ und somit bleibt die Gültigkeit der analytischen Lösung bestehen.

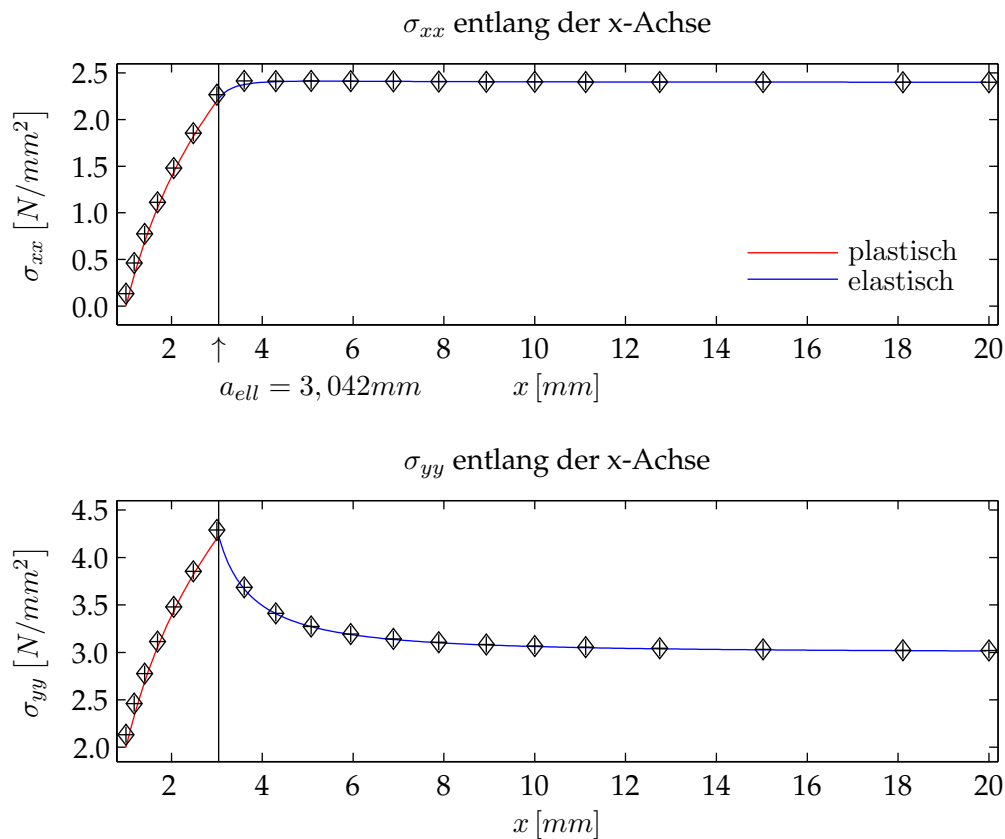


Abbildung 40: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung entlang der x -Achse für den Belastungsfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$

Abbildung (40) und (41) zeigen die Liniengraphen der gewonnenen Resultate für die Spannungskomponenten. Die analytische Lösung für den plastischen Bereich, nach den Gleichungen (46) und (47) in Abschnitt (I), verlaufen stetig über die elastoplastische Schnittstelle C in den elastischen Bereich, deren analytische Lösung aus Gleichung (157) und (158) in (I) ermittelt wurde.

Man sieht, dass die diskreten Spannungswerte der FE-Lösung mit den Spannungsverläufen sehr gut koinzidieren. Zur Kontrolle müssen die Spannungen gegen die Grenzwerte $\sigma_{xx\infty}, \sigma_{yy\infty}$, die den Belastungen p, q im Unendlichen der Scheibe entsprechen, konvergieren. Die Schubspannung τ_{xy} entlang der Abszisse und der Ordinate ist gleich Null und daher nicht grafisch dargestellt.

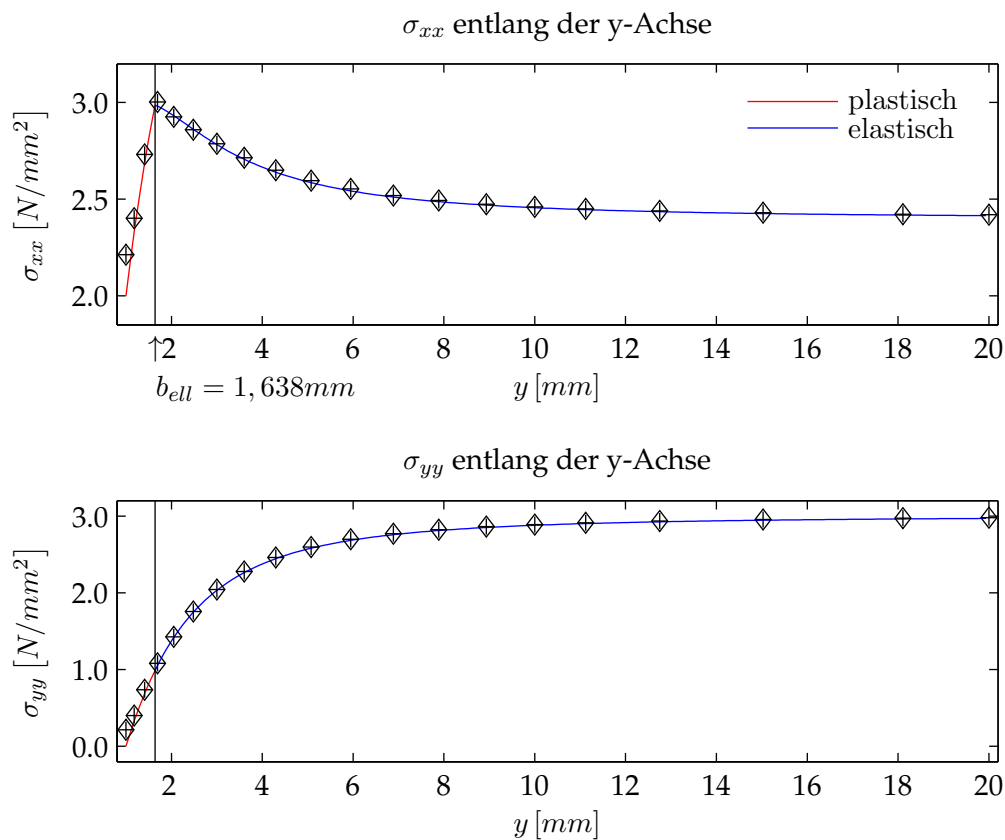


Abbildung 41: Korrelation der FE-Resultate mit analytischer Lösung entlang der y -Achse für den Belastungsfall $q = 3,0k$ und $p = 2,4k$

Literatur

- [1] Galin, L.A. (1946), Plane elastoplastic problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 10, S. 367-386
- [2] Girkmann, K. (1956), *Flächentragwerke*, Springer Verlag Wien
- [3] Mußchelischwili, N. I. (1971), *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*, VEB Fachbuchverlag Leipzig
- [4] Celigoj, C. (2000), *Skriptum 2d-Bauteile (Scheiben, Platten, Schalen)*, TU Graz, Institute for Strength of Materials
- [5] Kachanov, L.M. (1971), *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- [6] Celigoj, C. (2006), *Skriptum Plastizitätstheorie*, TU Graz, Institute for Strength of Materials
- [7] Sokolovskij, V.V. (1955), *Theorie der Plastizität*, VEB Verlag Technik Berlin
- [8] Bathe, K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey
- [9] Celigoj, C. (1998), *Skriptum Methode der Finiten Elemente*, TU Graz, Institute for Strength of Materials
- [10] Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L. (1991), *The Finite Element Method, Volume 2*, McGraw-Hill International, England
- [11] Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer Verlag New York
- [12] Mang, H., Hofstetter, G. (2004), *Festigkeitslehre*, 2. Auflage, Springer Verlag Wien
- [13] Nübel, V. (2005), *Die adaptive rp-Methode für elastoplastische Probleme*, Dissertation an der TU München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen