

Technische Universität Graz
Fakultät für Maschinenbau und Wirtschaftswissenschaften
Institut für thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik

Implementierung und Evaluierung eines zeta-f Turbulenzmodells für Turbomaschinenströmungen

**Diplomarbeit
von
Andreas Wechtitsch**

Vorgelegt zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieur der Studienrichtung
Wirtschaftsingenieurwesen - Maschinenbau

Betreuer der Diplomarbeit:
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Sanz

Graz, im März 2014

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....

date

.....

(signature)

Kurzfassung

Ziel dieser Diplomarbeit ist es zwei Turbulenzmodelle, das v^2 - f Modell von Lien & Durbin (1996) und das verwandte ζ - f Modell nach Hanjalić et al. (2004), in den CFD-Code Linars zu implementieren und anschließend zu evaluieren. Neben der Erläuterung der theoretischen Grundlagen bildet der Hauptteil dieser Arbeit die Evaluierung der implementierten Modelle anhand der stationären Strömungsberechnung mehrerer Testfälle. Die Berechnungsbeispiele umfassen die ebene Plattenströmung, einen simplen 2d-Stator und einen 3d-Hochdruckstator eines Strahltriebwerkes. Um die implementierten Modelle bewerten zu können, werden Vergleichsrechnungen mit dem v^2 - f Modell des kommerziellen CFD-Programms ANSYS Fluent 14 durchgeführt. Für die ebene Platte stehen zusätzlich Messdaten von der wissenschaftlichen Vereinigung ERCOFTAC zur Verfügung. Beim 2d-Stator werden auch die Auswirkungen des Rechennetzes auf den Wandschubspannungsverlauf untersucht. Dabei zeigt sich, dass das ζ - f Modell sehr empfindlich auf die Rechennetz-Gestaltung in Wandnähe reagiert. Beide Modelle sind in der Lage Ablöseerscheinungen infolge zu steiler Anströmwinkel anzuzeigen.

Abstract

The aim of this diploma thesis is to implement two turbulence models in to the CFD-Code Linars and to evaluate them. These models are the v^2-f model of Lien & Durbin (1996) and the similar $\zeta-f$ model of Hanjalić et al. (2004). The theoretical basics are discussed in the first chapters. The main part deals with the evaluation of the implemented models by steady flow calculations of several test cases. The test cases are the flow over a flat plate, a simple 2d-stator and a 3d high-pressure stator of a jet engine. To evaluate the performance of the implemented models comparative analysis with the v^2-f model of the commercial CFD software ANSYS Fluent 14 are carried out. For the flat plate case there is also the experimental data of the research association ERCOFTAC available. The influence of the computational grid on the skin friction distribution is evaluated for the 2d-stator. The $\zeta-f$ model reacts very sensitive to the design of the computational grid. Both models are able to predict separation due to a large angle of attack.

Inhaltsverzeichnis

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG	ii
STATUTORY DECLARATION.....	ii
Kurzfassung	iii
Abstract.....	iv
Inhaltsverzeichnis.....	v
1 Einleitung	7
2 Entstehung der Turbulenz.....	9
2.1 Grenzschichtströmung	10
2.2 Beeinflussung der Transition.....	11
3 Gleichungen der Strömungsmechanik	13
3.1 Grundgleichungen.....	13
3.2 Reynoldsgleichungen.....	17
3.3 Transportgleichungen	21
4 Statistische Turbulenzmodelle	26
4.1 Einteilung.....	26
4.2 k - ϵ Modell	29
4.3 v^2 - f Modell.....	30
4.4 ζ - f Modell	35
5 CFD-Code Linars	39
6 Evaluierung der implementierten Modelle	42
6.1 Ebene Platte	42
6.1.1 T3A-Testfall.....	43
6.1.2 TC1-Testfall	49
6.2 Stator	54
6.2.1 Mach 0.3	56
6.2.2 Mach 0.6	64

6.2.3	Mach 0.8	72
6.3	Hochdruckstator	78
7	Zusammenfassung und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	84
	Abbildungsverzeichnis	85
	Tabellenverzeichnis	88
	Abkürzungsverzeichnis	89

1 Einleitung

Thermische Turbomaschinen mit großer Leistung werden stationär zur Stromerzeugung oder als Antrieb für Flugzeuge eingesetzt. Der benötigte Treibstoff dieser Maschinen ist enorm und auch nur kleine Verbesserungen im Wirkungsgrad führen zu beachtlichen Einsparungen. Um die Auswirkungen der Turbomaschinen auf die Umwelt in Grenzen zu halten, sind die verschiedenen Emissionen dieser Maschinen durch gesetzliche Regelungen limitiert. Die Herausforderung besteht darin die Entwicklung der Turbomaschinen in ökologischer und ökonomischer Hinsicht voranzutreiben. Dazu ist die genaue Kenntnis der Strömung innerhalb der Gasturbine vonnöten. Die numerische Simulation von Strömungen, auch CFD (Computational Fluid Dynamics) genannt, ist in der Lage, wenn auch nur unter stark vereinfachten Modellannahmen, alle Größen im gesamten Strömungsgebiet zu einem Zeitpunkt wiederzugeben. Die Modellannahmen kommen vor allem in den Turbulenzmodellen zum Ausdruck, die eine Berechnung in einer vertretbaren Zeit ermöglichen. Das auf das Wirbelviskositätsprinzip basierende v^2-f Turbulenzmodell von Durbin erlangte in der Berechnung von Turbomaschinen große Beliebtheit, da es auch richtungsabhängige Effekte der Turbulenz in Wandnähe berücksichtigen kann. Das sehr ähnliche $\zeta-f$ Modell wurde entwickelt, um numerische Defizite des v^2-f Modells abzustellen.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, das v^2-f Modell von Lien & Durbin (1996) und das $\zeta-f$ Modell nach Hanjalić et al. (2004) in den CFD-Code Linars des Instituts für thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik zu implementieren und anschließend zu evaluieren. Diese genannten Turbulenzmodelle stellen eine Modifikation zum v^2-f Modell nach Durbin (1996) dar, um die numerische Stabilität bei Verwendung getrennter Lösungsverfahren, die auch bei Linars zum Einsatz kommen, zu verbessern. Zu Beginn der Arbeit werden verschiedene Phänomene der Turbulenz diskutiert, welche teilweise auch in den Berechnungsbeispielen wiederzufinden sind. Um das Verständnis für die Turbulenzmodellierung zu erhöhen, werden Grundlagen erläutert und wichtige Gleichungen hergeleitet. Auf die konkrete Implementation wird nicht näher eingegangen. Die Evaluierung des $\zeta-f$ und v^2-f Modells geschieht anhand der

stationären Berechnung mehrerer Testfälle. Die Validierungsbeispiele umfassen einfache 2d-Testfälle, wie die Strömung entlang einer ebenen Platte mit und ohne Druckgradienten, und die Strömung in einem einfachen 2d-Stator. Der Abschluss der Beispiele bildet ein 3d-Hochdruckstator eines Strahltriebwerkes. Um Vergleichswerte zu erhalten, werden alle Beispiele auch mit dem v^2 - f Modell des kommerziellen CFD-Programms ANSYS Fluent 14 gerechnet. Für die ebene Platte sind zusätzlich die Messdaten von der wissenschaftlichen Vereinigung ERCOFTAC verfügbar.

2 Entstehung der Turbulenz

Im Jahr 1883 führte O. Reynolds das bekannte Farbfaden-Experiment zur Visualisierung einer turbulenten Rohrströmung durch. Bei genügend kleinen Durchflussgeschwindigkeiten stellt sich im Rohr eine laminare Strömung ein und die eingelassene Farbe bildet eine gerade Linie. Ab einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit wird der Farbfaden zerrissen und die Farbe vermischt sich gleichförmig mit der Flüssigkeit. Die verwirbelte Bewegung nennt man turbulent und die geradlinige laminar.

Bei der turbulenten Rohrströmung treten neben der Hauptbewegung in Richtung Rohrachse auch Querbewegungen auf, die verantwortlich für die starke Durchmischung sind. Die Strömungsform ist durch nichtperiodische, scheinbar zufällige Bewegungen der Fluidteile gekennzeichnet.

Eine wichtige Kennzahl zur Beschreibung einer Strömung ist die Reynoldszahl Re , die eine charakteristische Größe für das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften ist. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$Re = \frac{u l}{\nu} \quad (2.1)$$

wobei u eine charakteristische Geschwindigkeit und l eine charakteristische Länge der jeweiligen Strömung ist. ν repräsentiert die kinematische Zähigkeit und wird zur Beschreibung der Reibungskräfte benötigt.

Bei Strömungen mit kleinen Reynoldszahlen dominieren die Zähigkeitskräfte, ist die Strömung durch große Reynoldszahlen charakterisiert, überwiegen die Trägheitskräfte.

Es kann eine kritische Reynoldszahl Re_{krit} definiert werden. Falls $Re < Re_{krit}$ ist, handelt es sich um eine laminare Strömung, falls $Re > Re_{krit}$ ist, um eine turbulente. Für Re_{krit} kann keine exakte Zahl, sondern immer nur ein Bereich angegeben werden. Re_{krit} liegt bei einer Kanalströmung in der Größenordnung von $10e3$. Falls starke Störungen in der Zulaufströmung vorliegen, verschiebt sich der Bereich zu kleineren Zahlen, bei kleinen Störungen zu größeren.

Der Übergang von laminarer zur turbulenten Strömung, auch Transition genannt, kann als Stabilitätsproblem aufgefasst werden. Die auf die laminare Strömung einwirkenden Störungen können durch die Zähigkeit des Fluids derart gedämpft werden, dass diese abklingen. Bei genug großen Reynoldszahlen ist die dämpfende Wirkung zu klein, die Störungen werden angefacht und die Strömung geht in die turbulente Strömungsform über.

In thermischen Turbomaschinen liegt die Reynoldszahl zwischen 10^5 und 10^7 , was immer eine vollturbulente Strömung zur Folge hat.

2.1 Grenzschichtströmung

Bei der Berechnung von thermischen Turbomaschinen ist es auch wichtig, Grenzschichtströmungen an den Wänden und Schaufeln richtig wiedergeben zu können. Die Strömung in der Grenzschicht hat einen wichtigen Einfluss auf Wärmeübergang, Wandreibungskräfte und Ablösevorgänge. Der Einfachheit halber wird hier die Strömung um eine ebene Platte diskutiert. Die Ergebnisse können mit Einschränkungen auch auf komplexere Strukturen wie die einer Turbomaschinenschaufel übertragen werden.

Für die ebene Platte kann folgende kritische Reynoldszahl angegeben werden:

$$Re_{krit} = \left(\frac{U_{\infty} x}{\nu} \right)_{krit} = 5 \cdot 10^5 \quad (2.2)$$

wobei x der Abstand von der Plattenvorderkante ist. Wenn die Zuströmung störungsarm ist, kann auch hier Re_{krit} höhere Werte annehmen.

Aus Experimenten zur Untersuchung des natürlichen Übergangs von laminarer zu turbulenter Grenzschichtströmung sind die in Abbildung 2.1 dargestellten Erkenntnisse von White F.M. (1974) gewonnen worden:

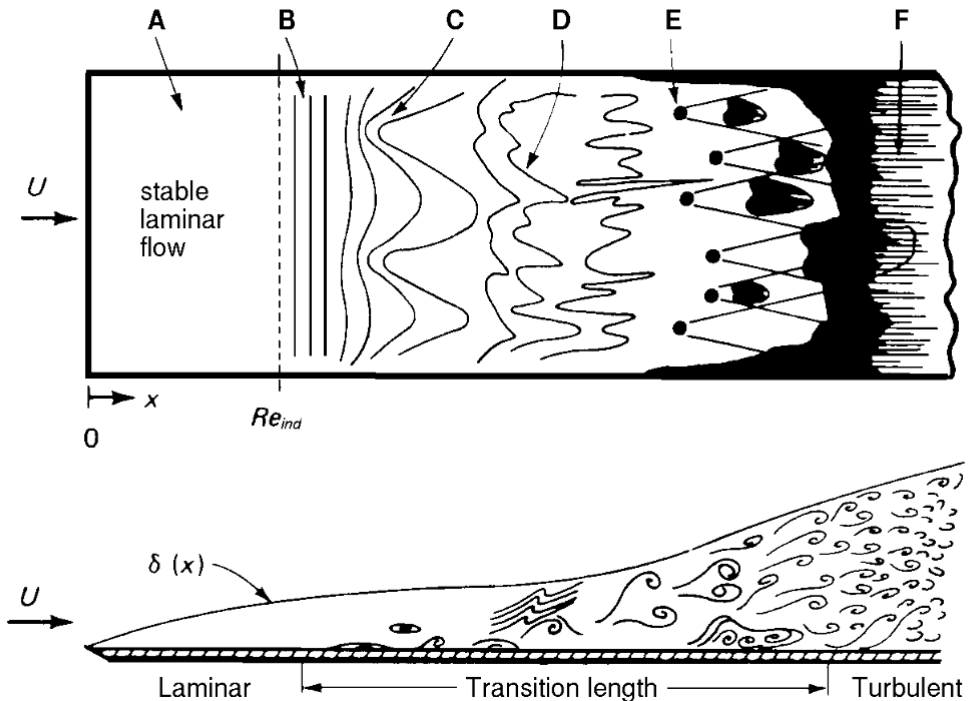


Abbildung 2.1: Transition bei einer ebenen Platte nach White F.M. (1974)

In der Zone A liegt eine stabile, laminare Strömung vor, welche dann in der Zone B von den nach Tollmien-Schlichtling benannten zweidimensionalen Störwellen überlagert wird. Weiter stromabwärts (Zone C) kommen dreidimensionale Störungen hinzu, die verantwortlich für die Bildung der Λ -förmigen Wirbel mit lokalen Scherschichten sind. Mit zunehmendem Abstand x zerfallen die Λ -Wirbel (Zone D), die die Bildung von Turbulenzflecken (Zone E) verursachen. Die Turbulenzflecken gehen am Ende der Transitionszone in eine vollturbulente Grenzschichtströmung (Zone F) über. In der Abbildung ist auch ersichtlich, dass in der Transitionszone die Grenzschichtdicke stark zunimmt. Die Dicke der laminaren Grenzschicht nimmt mit \sqrt{x} zu,

2.2 Beeinflussung der Transition

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Grenzschichtströmung lässt sich gezielt durch geeignete Maßnahmen stromabwärts verschieben, was zu einer Reduzierung des Widerstandes führt. Die Maßnahmen können z.B. Kühlung der Oberfläche, Absaugen der Grenzschicht, Beschleunigung der Grenzschicht durch Ausblasen oder Erzeugung von Druckgradienten sein.

Im Folgenden werden die Auswirkungen des bei einem Schaufelprofil vorliegenden Druckgradienten erläutert. Bei der Umströmung einer ebenen Platte stellen sich in Abhängigkeit des Abstandes von der Vorderkante ähnliche Geschwindigkeitsprofile in der laminaren Grenzschicht ein. Im Gegensatz dazu kann man bei einem Schaufelprofil unterschiedliche laminare Grenzschichtprofile beobachten, was durch den Druckgradienten $\partial p/\partial x$ verursacht wird. In Gebieten negativer Druckgradienten $\partial p/\partial x < 0$ besitzen die Geschwindigkeitsprofile keinen Wendepunkt und in Bereichen positiver Druckgradienten gibt es welche mit Wendepunkt. Bei einem Schaufelprofil gibt es für die einzelnen Geschwindigkeitsprofile unterschiedliche Stabilitätsgrenzen. In Gebieten mit positiven Druckgradienten ergeben sich kleinere kritische Reynoldszahlen Re_{krit} , in Bereichen negativer Druckgradienten größere als bei der Umströmung der ebenen Platte.

3 Gleichungen der Strömungsmechanik

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der Strömungsmechanik angegeben und anschließend werden sie durch eine statistische Behandlung in die Reynoldsgleichungen übergeführt.

3.1 Grundgleichungen

Das Strömungsfeld ist vollkommen bestimmt, wenn in jedem Punkt die Strömungsgrößen Dichte ρ , der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} , mit seinen Komponenten v_1, v_2, v_3 und die Temperatur T bekannt sind. Mit Hilfe der Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung können diese Größen für ein beliebiges Strömungsproblem bestimmt werden. Zuerst werden die Grundgleichungen in integraler Form angeschrieben und anschließend in die differentielle übergeführt.

Kontinuitätsgleichung: Der Satz der Massenerhaltung angewandt auf ein Fluid, das ein raumfestes, nicht infinitesimales Kontrollvolumen durchquert, ergibt folgende Gleichung:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_O (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dO \quad (3.1)$$

Die Änderung der Masse pro Zeiteinheit im Inneren des Kontrollvolumens (linker Term) entspricht den über die Oberfläche des Kontrollvolumens fließenden Massenströmen (rechter Term).

ρ ist die Dichte des Fluids und \vec{n} der Normalvektor des Oberflächenelements dO .

Impulsgleichung: Das zweite Newton'sche Axiom angewandt auf ein Fluid, das ein raumfestes, nicht infinitesimales Kontrollvolumen durchquert, führt zur folgenden Gleichung:

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = - \int_O \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO + \int_O \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n} dO + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (3.2)$$

Die Impulsänderung pro Zeiteinheit im Inneren des Kontrollvolumens (erster Term) entspricht der Summe aus dem konvektiven Impulsfluss über die Oberfläche (zweiter Term), den Oberflächenkräften (dritter Term) und den Massenkräften (vierter Term).

Jeder Integrand der obigen Gleichung repräsentiert einen Vektor, daher werden in dieser Gleichung Vektoren bilanziert. Diese Darstellung entspricht drei skalaren Gleichungen, jeweils in eine Koordinatenrichtung.

σ bezeichnet den Spannungstensor, mit ihm ist die Spannungssituation in einem Punkt des Fluids vollständig beschrieben. \vec{f} ist die Massenkraft mit der Einheit $\left[\frac{N}{kg}\right]$. Für den Fall der Erdbeschleunigung g mit der Annahme, dass die z-Komponente des Koordinatensystems normal auf die Erdoberfläche steht, gilt:

$$\vec{f} = (0 \quad 0 \quad -g)^T$$

Energiegleichung: Der erste Hauptsatz der Thermodynamik angewandt auf ein Fluid, das ein raumfestes, nicht infinitesimales Kontrollvolumen durchströmt, liefert folgende Gleichung:

$$\int_V \frac{\partial E_t}{\partial t} dV = - \int_O E_t (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO + \int_O \vec{v} \cdot (\sigma^T \cdot \vec{n}) dO + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_V \dot{q}_Q dV - \int_O \vec{q} \cdot \vec{n} dO \quad (3.3)$$

Die Änderung der Totalenergie pro Zeiteinheit im Inneren des Kontrollvolumens (erster Term) ist gleich der Summe aus dem Totalenergiefluss über die Oberfläche infolge der Konvektion (zweiter Term), der von den Oberflächenkräften geleisteten Arbeit je Zeiteinheit (dritter Term), der von den Massenkräften verrichteten Arbeit je Zeiteinheit (vierter Term), der von inneren Wärmequellen zugeführten Wärme pro Zeiteinheit (fünfter Term) und dem Wärmefluss über die Oberfläche infolge der Wärmeleitung (fünfter Term).

Gauß'scher Integralsatz: Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale überführen.

$$\int_0 (\vec{A} \cdot \vec{n}) dO = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV \quad (3.4)$$

Wobei \vec{A} ein beliebiger Vektor ist.

Diesen Satz angewendet auf die Kontinuitäts-, Impuls-, und Energiegleichung, um die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale überzuführen, bringt folgende Darstellung:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) dV \quad (3.5)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_V (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v}) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \sigma dV + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial E_t}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (E_t \vec{v}) dV \\ = \int_V \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{v}) dV + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_V \dot{q}_Q dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dieser Satz an Gleichungen kann jetzt ganz einfach in differentieller Form angeschrieben werden, indem bei jedem Integral das Volumen auf infinitesimal geschrumpft wird:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \sigma + \rho \vec{f} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot (E_t \vec{v}) = \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \dot{q}_Q - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (3.10)$$

Der Spannungstensor σ kann in zwei Tensoren, einen isotropen (erster Summand) und einen anisotropen (zweiter Summand), aufgespalten werden:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -p + \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{33} & \tau_{32} & -p + \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

p ist der statische Druck, δ_{ij} das Kronecker-Delta und τ_{ij} sind die Komponenten des viskosen Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$. Damit kann die Impulsgleichung in folgender Form angegeben werden:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho f_i \quad (3.12)$$

Für viele Fluide gilt ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und der Deformationsgeschwindigkeit des Fluids. Solche Fluide werden auch Newton'sche Fluide genannt. Die Beziehung zwischen viskosem Schubspannungstensor τ und der Deformationsgeschwindigkeit kommt in folgender Gleichung zum Ausdruck:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

μ ist die dynamische Viskosität des Fluids und beschreibt den erwähnten linearen Zusammenhang.

Die Totalenergiedichte setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen:

$$E_t = \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} + \dots \right) \quad (3.14)$$

e ist die spezifische innere Energie des Fluids und $\frac{\vec{v}^2}{2}$ die spezifische kinetische Energie. Es könnte zum Beispiel noch die potentielle Energie berücksichtigt werden, wird aber für die weitere Betrachtung nicht gemacht, da sie für Gase unerheblich ist.

Die Impulsgleichung (Glg. (3.9)) multipliziert mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ergibt die mechanische Energie pro Volumeneinheit. Dieses Produkt abgezogen von der Energiegleichung (Glg. (3.10)) und entsprechend umgeformt führt zu der thermischen Energiegleichung:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \dot{q}_Q - \vec{V} \cdot \vec{q} - p(\nabla \cdot \vec{v}) + \Phi \quad (3.15)$$

Φ ist die Dissipationsfunktion. Sie stellt den irreversiblen Anteil der mechanischen Energie dar, welcher aufgrund der Viskosität des Fluids in thermische Energie übergeht. $p(\nabla \cdot \vec{v})$ hingegen ist der reversible Anteil. Φ ist wie folgt definiert:

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

Schließung des Gleichungssystem: Mit der Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichung in vektorieller Form und der Energiegleichung liegen fünf skalare Gleichungen vor. In diesen kommen die sieben Unbekannten ρ , v_1, v_2, v_3 , e , p , T vor. Um dieses Gleichungssystem schließen zu können werden noch zwei weitere Gleichungen benötigt. Der thermodynamische Zustand eines Fluids ist durch zwei voneinander unabhängige thermodynamische Zustandsvariablen bestimmt. So kann der Druck p durch die thermische Zustandsgleichung des Fluids in der Form $p = p(\rho, T)$ und die spezifische innere Energie e durch die kalorische Zustandsgleichung in der Form $e = e(\rho, T)$ bestimmt werden.

Der Wärmestromdichtevektor \vec{q} kann durch die Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung ausgedrückt werden.

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (3.17)$$

λ ist die Wärmeleitfähigkeit des Fluids und beschreibt den proportionalen Zusammenhang zwischen den Temperaturgradienten ∇T und dem Wärmestromdichtevektor \vec{q} .

3.2 Reynoldsgleichungen

Mit den Navier-Stokes Gleichungen können beliebige Strömungsprobleme, laminare als auch turbulente, beschrieben werden. Bei der numerischen Lösung dieser Gleichungen müssen diese geeignet räumlich und zeitlich diskretisiert werden. Liegen turbulente Strömungen vor, so sind auch die kleinsten Wirbel aufzulösen. In Abhängigkeit der Reynoldszahl können somit sehr kleine

Zeitschritte und feinmaschige Netze erforderlich sein. Die Größenordnung der notwendigen Gitterpunkte N kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$N \sim O((L/l_k)^3) = O((u'L/\nu)^{9/4}) = O(Re_t^{9/4}) \quad (3.18)$$

wobei L ein charakteristisches Längenmaß für die großen energietragenden Wirbel ist. l_k bezeichnet das Längenmaß für die kleinsten Wirbel und ist auch als Kolmogorov-Länge bekannt. Die Größe l_k ist unbekannt, aber das Verhältnis L/l_k kann durch die turbulente Reynoldszahl Re_t ausgedrückt werden. Es ist ersichtlich, dass mit steigender Reynoldszahl die Anzahl der erforderlichen Gitterpunkte schlagartig zunimmt.

Obwohl die Rechenleistung heutiger Computer immer besser und die Performance der Lösungsalgorithmen stetig effizienter wird, können keine hochturbulenten Strömungen in einer für die Industrie vertretbaren Zeit gerechnet werden. Der Ausweg dieses Problem ist die zeitliche Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen, die dann RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) – Gleichungen genannt werden. Dabei werden die einzelnen physikalischen Größen in einen Mittelwert und eine fluktuierende Größe zerlegt, in die Grundgleichungen eingesetzt und anschließend zeitlich gemittelt.

Reynoldssche Mittelung

Als Beispiel werden im Folgenden die Geschwindigkeitskomponenten v_i über den Zeitraum Δt gemittelt. Δt ist eine endliche Zeitspanne. Sie muss größer als die Periodendauer der durch turbulente Vorgänge hervorgerufenen Schwankungen sein und sie muss so klein sein, dass auch instationäre Vorgänge abgebildet werden können.

$$\overline{v_i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v_i dt \quad (3.19)$$

Die Geschwindigkeitskomponente v_i setzt sich aus dem Mittelwert $\overline{v_i}$ und dem fluktuierenden Anteil v_i' zusammen.

$$v_i = \overline{v_i} + v'_i \quad (3.20)$$

Es ist klar, dass der Mittelwert einer fluktuierenden Größe gleich null ist. Es gilt also:

$$\overline{v'_i} = 0 \quad (3.21)$$

Mit Hilfe der Größen a und b werden allgemein gültige Zusammenhänge gezeigt:

$$\overline{a b'} = 0 \quad \overline{a b} = \overline{a} \overline{b} \quad \overline{(a + b)} = \overline{a} + \overline{b} \quad (3.22)$$

Die folgenden Strömungsgrößen werden wie gezeigt durch ihren Mittelwert und ihren fluktuierenden Anteil ersetzt.

$$\begin{aligned} v_i &= \overline{v_i} + v'_i & \rho &= \overline{\rho} + \rho' & p &= \overline{p} + p' & h &= \overline{h} + h' \\ T &= \overline{T} + T' \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese Ersatzgrößen werden in die Navier-Stokes Gleichungen eingesetzt und zeitlich gemittelt. Als Bsp. wird hier exemplarisch nur die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung angegeben:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j} + \overline{\rho' u'_j}) = 0 \quad (3.24)$$

Favre Mittelung

Handelt es sich um kompressible Strömungen, so ist die massengewichtete Mittelung vorzuziehen. Die durch Massengewichtung gemittelten Größen werden mit einer Tilde gekennzeichnet. Als Beispiel ist \tilde{v}_i wie folgt definiert:

$$\tilde{v}_i = \frac{\overline{\rho v_i}}{\overline{\rho}} \quad (3.25)$$

Folgende Größen werden Favre-gemittelt, die anderen Reynolds-gemittelt:

$$v_i = \tilde{v}_i + v''_i \quad h = \tilde{h} + h'' \quad T = \tilde{T} + T'' \quad (3.26)$$

Diesmal wird die fluktuierende Größe mit zwei Hochkommas gekennzeichnet. Es kann gezeigt werden, dass nachstehender Zusammenhang Gültigkeit hat:

$$\overline{\rho f''} = 0 \quad (3.27)$$

Im Gegensatz zu Glg. (3.21) ist hier im Allgemeinen der Mittelwert der fluktuierenden Größe nicht mehr null.

Als Beispiel wird die Favre-gemittelte Kontinuitätsgleichung angeschrieben:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0 \quad (3.28)$$

Die Form dieser Gleichung ist dieselbe wie in Glg. (3.8).

Reynoldsspannungen

Wie gezeigt, unterscheiden sich die Reynolds- und die Favre-Mittelung. Die Reynolds Mittelung ergibt für kompressible Strömungen mehr unbekannte Korrelation zwischen den Schwankungsgrößen. Nimmt man aber die Fluktuation der Dichte ρ' als null an, so werden beide Mittelungsarten identisch.

Für kompressible Strömungen führt die Favre-Mittelung der Impulsgleichung zu:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho v_i'' v_j''}) + \bar{\rho} f_i \quad (3.29)$$

Der zeitlich gemittelte, viskose Schubspannungstensor $\bar{\tau}_{ij}$ ist wie folgt definiert:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial \overline{v_i''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j''}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial x_k} \right] \quad (3.30)$$

Der zweite Klammerausdruck in Glg. (3.30) ist klein im Vergleich zum ersten und wird daher im Weiteren vernachlässigt. Bis auf den Term $-\overline{\rho v_i'' v_j''}$ hat die Glg. (3.29) die gleiche Form wie Glg. (3.12). Dieser zusätzliche Term repräsentiert die Reynoldsspannungen. $-\overline{\rho v_i'' v_j''} / \partial x_j$ stellt den Impulsfluss

über die Oberfläche des Kontrollvolumens infolge der turbulenten Schwankungen dar.

3.3 Transportgleichungen

Die Reynoldsspannungen stellen unbekannte Größen dar. Um zusätzliche Informationen bzw. Zusammenhänge zu gewinnen, können die Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen aufgestellt werden. Aus diesen Gleichungen kann auch die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie hergeleitet werden. Für die Herleitungen werden im Folgenden inkompressible Strömungen betrachtet, daher verändern sich die Reynoldsspannungen zu $-\rho \overline{v'_i v'_j}$.

Transportgleichungen der Reynoldsspannungen

Für die Herleitung dieser Transportgleichungen wird der Navier-Stokes Operator $\mathcal{N}(v_i)$ benötigt. Er ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{N}(v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3.31)$$

Die inkompressible Impulsgleichung lässt sich mit dem Navier-Stokes Operator folgendermaßen anschreiben:

$$\mathcal{N}(v_i) = 0 \quad (3.32)$$

Mit nachstehender Gleichung können die Differentialgleichungen für die einzelnen Reynoldsspannungen hergeleitet werden:

$$\overline{v'_i \mathcal{N}(v_j) + v'_j \mathcal{N}(v_i)} = 0 \quad (3.33)$$

Die Aufstellung dieser neun Gleichungen (3.33) ist auch als Bildung des zweiten Moments der Navier-Stokes Gleichung bekannt. Daher werden die Transportgleichungen der Reynoldsspannungen auch Schließungen zweiter Ordnung genannt. Es entstehen folgende Terme, wobei $\tau'_{ij} = -\overline{v'_i v'_j}$:

Lokale Änderung:

$$\overline{v'_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial t}} = -\rho \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial t} \quad (3.34)$$

Konvektiver Term:

$$\begin{aligned} \overline{\rho v'_i v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \rho v'_j v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} \\ = -\rho \bar{v}_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_k} - \rho \tau'_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \rho \tau'_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(v'_i v'_j v'_k)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Term des Druckgradienten:

$$\overline{v'_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \quad (3.36)$$

Viskoser Term:

$$\mu \overline{\left(v'_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_k} + v'_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)} = -\mu \frac{\partial^2 \tau'_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\mu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} \quad (3.37)$$

Zusammengefasst erhält man die Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_k} \\ = -\tau'_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \tau'_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{v'_i \partial p'}{\rho \partial x_j} + \frac{v'_j \partial p'}{\rho \partial x_i}} \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_k} + \overline{v'_i v'_j v'_k} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie ergeben sich sechs Gleichungen für die einzelnen Reynoldsspannungen und es entstehen 22 neue unbekannte Terme:

$$\begin{aligned} \overline{v'_i v'_j v'_k} &\rightarrow 10 \text{ Unbekannte} \\ 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} &\rightarrow 6 \text{ Unbekannte} \\ \frac{v'_i}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{v'_j}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} &\rightarrow 6 \text{ Unbekannte} \end{aligned}$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass bei Schließungen höherer Ordnung mehr unbekannte Ausdrücke hinzukommen.

Durch Umformung gelangt man zu einer kompakteren Darstellung der Transportgleichungen:

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_k} = -\tau'_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \tau'_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right] \quad (3.39)$$

Die neuen Terme sind der Dissipationstensor:

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \quad (3.40)$$

die Druck-Scher-Korrelation oder auch Druckdilatation genannt:

$$\Pi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.41)$$

und die turbulente Diffusions-Korrelation:

$$\rho C_{ijk} = \rho \overline{v'_i v'_j v'_k} + \overline{(p' v'_i)} \delta_{jk} + \overline{(p' v'_j)} \delta_{ik} \quad (3.42)$$

die sich aus der turbulenten Diffusion und der Druckdiffusion zusammensetzt.

Der erste Term auf der linken Seite der Transportgleichung (Glg.(3.39)) stellt die zeitliche Änderung der Reynoldsspannungen und der zweite die Änderung infolge der Konvektion mit der mittleren Geschwindigkeit dar. Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite

$$P_{ij} = -\tau'_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \tau'_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \quad (3.43)$$

werden zusammengefasst zum Produktionsterm. In ihm kommt die dämpfende oder anfachende Wirkung der mittleren Strömung auf die einzelnen Reynoldsspannungen zum Ausdruck. Die beiden Terme können sowohl positiv als auch negativ sein. Der nächste Term ϵ_{ij} ist die turbulente Dissipation, steht also für die Aufzehrung der Turbulenz. Die Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} (Glg.(3.41)) beschreibt die Wechselwirkung der Druck- mit den Geschwindigkeitsschwankungen. Dieser Term bewirkt nur eine Umverteilung der Reynoldsspannungen untereinander und ist daher keine Quelle oder Senke. Er kann bestimmte Reynoldsspannungen unter Reduktion anderer vergrößern, oder unter Verstärkung anderer abschwächen. Bei Strömungen mit isotroper Turbulenz ist dieser Term stets null. Der letzte Term auf der rechten Seite der Transportgleichung (Glg.(3.39)) beinhaltet die von der molekularen Zähigkeit verursachte Diffusion der Reynoldsspannungen und den Term C_{ijk} , der auch Dreifachprodukte der Geschwindigkeitsschwankungen enthält. Dieser Term kann in die Druckdiffusion und in die turbulente Diffusion aufgespalten werden. Allgemein beschreibt C_{ijk} die durch die turbulente Durchmischung hervorgerufene Diffusion der Reynoldsspannungen.

Bei der Druck-Scher-Korrelation kann man den Druck eliminieren und zeigen, dass dieser Term bezüglich der Geschwindigkeit aus zwei Teilen zusammengesetzt ist. Der langsame Teil $(\Pi_{ij})_1$ enthält nur die Schwankungsgeschwindigkeiten und ist somit unabhängig von der mittleren Strömung. Der schnellere Anteil $(\Pi_{ij})_2$ enthält sowohl die mittlere Scherungs- als auch die Schwankungsgeschwindigkeiten.

Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie

Die Definition der turbulenten kinetischen Energie k für inkompressible Strömungen lautet:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (3.44)$$

Die Spur des Reynoldsspannungstensors ist direkt proportional zur turbulenten kinetischen Energie:

$$\tau'_{ii} = -\overline{v'_i v'_i} = -2k \quad (3.45)$$

Mit der Transportgleichung für die Spur der Reynoldsspannungen $\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33}$ (s. Glg. (3.39)) und dem Zusammenhang aus Glg. (3.45) erhält man schließlich die Transportgleichung für k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau'_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' v'_j} \right] \quad (3.46)$$

wobei ϵ die Dissipation ist, die folgendermaßen definiert ist:

$$\epsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)} \quad (3.47)$$

Der erste Term auf der linken Seite der Gleichung (3.46) stellt die zeitliche Änderung der turbulenten kinetischen Energie dar, der zweite Term die Änderung infolge der Konvektion. Im ersten Term auf der rechten Seite kommt k nicht vor, deswegen wird er auch als Produktionsterm bezeichnet. Die Terme in der Klammer sind die molekulare Diffusion, die turbulente Diffusion und die Druckdiffusion.

Es kann auch eine Transportgleichung für die Dissipation ϵ angegeben werden. Sie kann durch die Bildung des folgenden Moments der Navier-Stokes-Gleichung hergeleitet werden:

$$2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathcal{N}(v_i)]} = 0 \quad (3.48)$$

Die Transportgleichung für die Dissipation ist um einiges komplizierter als die Gleichung für die turbulente kinetische Energie und wird deswegen hier nicht angegeben.

4 Statistische Turbulenzmodelle

Wie erwähnt sind die Reynoldsspannungen in den RANS-Gleichungen unbekannt und daher ist das gesamte Gleichungssystem nicht geschlossen. Die Schließung gelingt durch weitere Annahmen in Form von Gleichungen. Diese zusätzlichen Gleichungen liefern die statistischen Turbulenzmodelle.

Falls nicht anders angegeben werden im Folgenden, wie in der Literatur üblich, die Turbulenzmodelle in der inkompressiblen Formulierung angeschrieben.

4.1 Einteilung

Die statistischen Turbulenzmodelle können in die Wirbelviskositätsmodelle und in die Reynoldsspannungsmodelle eingeteilt werden.

Wirbelviskositätsmodelle

In allen Strömungen findet der von molekularen Diffusionsvorgängen verursachte Impulsaustausch auf einer sehr kleinen Skala statt. Er wird in der Navier-Stokes Gleichung durch den Zähigkeitsterm, in welchem die molekulare Viskosität enthalten ist, repräsentiert. In Analogie dazu modelliert man gemäß dem Ansatz von Boussinesq die turbulenten Austauschvorgänge gleichermaßen und führt eine turbulente Viskosität ein.

Der Boussinesq-Ansatz (kompressibel):

$$-\overline{\rho v_i'' v_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (4.1)$$

wobei μ_t die turbulente Wirbelviskosität bezeichnet und der letzte Term auf der rechten Seite den „turbulenten Druck“ darstellt. Die turbulente kinetische Energie k ist für kompressible Strömungen wie folgt definiert:

$$k = \frac{\overline{\rho v_i'' v_i''}}{2\bar{\rho}} \quad (4.2)$$

Der Boussinesq-Ansatz (inkompressibel):

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (4.3)$$

wobei für inkompressible Strömungen $k = 1/2 \overline{v'_i v'_i}$ gilt.

In Gebieten turbulenter Strömungen übersteigt μ_t die molekulare Viskosität um ein Vielfaches, hingegen wird μ_t in der laminaren Grenzschicht sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Die turbulente Wirbelviskosität μ_t lässt sich durch ein turbulentes Geschwindigkeitsmaß U_t und ein turbulentes Längenmaß L_t in der Form $\mu_t \sim \rho U_t L_t$ ausdrücken. Das Schließen der RANS-Gleichungen erfolgt beim Boussinesq-Ansatz durch das Bestimmen der Wirbelviskosität μ_t und der damit verbundenen turbulenten Geschwindigkeits- und Längenmaße. Folgende Gleichungsmodelle können unterschieden werden:

Nullgleichungsmodelle oder algebraische Turbulenzmodelle:

Nullgleichungsmodelle verwenden algebraische Beziehungen zur Bestimmung der Wirbelviskosität und können für ausgewählte, meist einfache Strömungsprobleme zufriedenstellende Ergebnisse liefern.

Zwischen dem Mischungswegansatz von Prandtl und der turbulenten Viskosität gilt folgender Zusammenhang: $-\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Daraus folgt für die Wirbelviskosität: $\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$, wobei $l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$ als turbulentes Geschwindigkeitsmaß identifiziert werden kann. Um die Gleichungen schließen zu können, muss noch die Prandtl'sche Mischungsweglänge l_m bestimmt werden. Meist kann ein empirisch ermittelter Zusammenhang zwischen l_m und dem Wandabstand gefunden werden.

Eingleichungsmodelle

Eingleichungsmodelle beinhalten eine zusätzliche Transportgleichung zur Bestimmung der Wirbelviskosität. Eine einfache Möglichkeit ist die

Transportgleichung der kinetischen Energie in das Modell zu integrieren. Die Wirbelviskosität ergibt sich für diesen Fall über den Zusammenhang: $\mu_t = C\rho L_t\sqrt{k}$, wobei C eine Konstante ist. Durch die zusätzliche Transportgleichung, welche unter anderem auch Konvektionsterme enthält, können Geschichtseffekte besser erfasst werden.

Zweigleichungsmodelle

Zur Schließung des Gleichungssystems wird zusätzlich zur Transportgleichung für k eine weitere gekoppelte Gleichung verwendet. Die bekanntesten Modelle sind das k - ϵ Modell nach W.P. Jones und B.E. Launder (1972) und das k - ω Modell von D.C. Wilcox (1993). Da die Zweigleichungsmodelle viele physikalische Grundlagen wiedergeben können und gleichzeitig robust sind, werden diese Modelle sehr häufig in der Industrie eingesetzt. Jedoch versagen diese Modelle bei komplexeren Strömungen mit Drall- und Krümmungseffekten, weil die Anisotropie der Turbulenz nicht berücksichtigt wird.

Reynoldsspannungsmodelle

Bei Strömungen, die durch starke anisotrope Turbulenz gekennzeichnet sind, kann der Boussinesq-Ansatz nicht mehr angewandt werden, da die Turbulenz eine richtungsabhängige Wirkung auf die mittlere Strömung hat. Die Reynoldsspannungsmodelle werden unterschieden in *differentielle und algebraische Modelle*. Beim differentiellen Modell wird für die sechs unterschiedlichen Reynoldsspannungen jeweils eine eigene Transportgleichung gelöst. Die in Abschnitt 3.3 hergeleiteten Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen müssen jedoch zuvor in geeigneter Weise modelliert werden. Bei den algebraischen Modellen werden die Differentialgleichungen für die Reynoldsspannungen mittels geeigneter Annahmen in algebraische Gleichungen übergeführt. Jede dieser Gleichungen bestimmt mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie k und gegebenenfalls weiterer turbulenter Größen eine einzelne Reynoldsspannung.

4.2 k - ϵ Modell

Bei diesem Zweigleichungsmodell wird jeweils eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k und eine für die turbulente Dissipation ϵ gelöst. Mit Hilfe dieser beiden Größen kann die Wirbelviskosität berechnet werden:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad C_\mu = 0.09 \quad (4.4)$$

Wie in Abschnitt 3.3 hergeleitet, lautet die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau'_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' v'_j} \right] \quad (4.5)$$

Die Reynoldsspannungen im Produktionsterm werden auf die gleiche Weise wie in Glg. (4.3)) mit Hilfe der Wirbelviskosität berechnet. Somit folgt für den Produktionsterm P_k :

$$P_k = \tau'_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \left[\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

Nach diesem Modell findet die Turbulenzproduktion dort statt, wo die Strömung Gradienten der mittleren Geschwindigkeit aufweist. Das ist insoweit plausibel, da Scherschichten wegen ihrer Instabilität eine Quelle für Turbulenz darstellen.

Der nächste zu modellierende Term ist die turbulente Diffusion mit ihren Dreifachprodukten. Es ist zweckmäßig die Diffusion als Gradiententransport anzusehen. Liegen Unterschiede in der turbulenten kinetischen Energie vor, werden diese durch den Mechanismus der Diffusion ausgeglichen. Der Diffusionskoeffizient kann nach dieser Überlegung direkt proportional zur Wirbelviskosität angesetzt werden:

$$-\frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i v'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' v'_j} = \frac{\mu_t}{\sigma_k \rho} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (4.7)$$

wobei σ_k eine Konstante ist und das Verhältnis zwischen Wirbelviskosität und turbulentem Diffusionskoeffizienten angibt. Wie ersichtlich, wird die

Druckdiffusion nicht extra modelliert, sondern in das Modell der turbulenten Diffusion integriert.

Die modellierte Transportgleichung für die kinetische Energie lautet schließlich:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.8)$$

mit $\sigma_k = 1$.

Auch für die Dissipation ϵ kann eine Transportgleichung formuliert werden. Sie kann ähnlich wie die Transportgleichung für die kinetische Energie modelliert werden:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.9)$$

mit den Konstanten $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_\epsilon = 1.3$.

4.3 v^2 - f Modell

Das v^2 - f Modell baut auf dem k - ϵ Modell auf und kann durch eine zusätzliche Transportgleichung die Anisotropie der Turbulenz in Wandnähe berücksichtigen. Dieses zur Gruppe der Low-Reynolds-Modelle gehörende Turbulenzmodell hat auch in Wandnähe Gültigkeit und kommt daher ohne Wandfunktionen aus.

Das v^2 - f Modell beinhaltet drei Transportgleichungen. Es wird jeweils eine für die turbulente kinetische Energie k , eine für die Dissipation der kinetischen Energie ϵ und eine für die Energie der turbulenten Schwankungen normal zu den Stromlinien $\overline{v'^2}$ gelöst. Zusätzlich wird noch eine Helmholtz Gleichung für die Größe f gelöst, welche den Druck-Scher-Korrelationsterm modelliert. Diese Gleichung ist eine elliptische partielle Differentialgleichung, das bedeutet, dass Informationen aus allen räumlichen Richtungen verwendet werden, um die Größe f für einen gegebenen Punkt zu berechnen.

Die Wirbelviskosität wird beim v^2 - f Modell durch das wandnormale Geschwindigkeitsmaß $\overline{v'^2}$ und durch das turbulente Zeitmaß \mathcal{T} bestimmt:

$$\nu_t = C_\mu \overline{v'^2} \mathcal{T} \quad (4.10)$$

Im Folgenden werden zwei verschiedene Versionen des v^2 - f Modells vorgestellt. Jene Variante von Durbin (1995) wird mit Model 1 bezeichnet, die von Lien & Durbin (1996) mit Modell 2.

Modell 1:

Die $\overline{v'^2}$ -Transportgleichung kann wieder von den Transportgleichungen der Reynoldsspannungen (s. Abschnitt 3.3) hergeleitet werden, indem für die Indizes i und j der gleiche Wert eingesetzt wird. Der Diffusionsterm wird wieder als Gradiententransport der Größe $\overline{v'^2}$ interpretiert und dementsprechend in die modellierte Gleichung übernommen. Die Druck-Scher-Korrelation, die Produktion und die Dissipation werden gemeinsam nach dem „Isotropation of Production“ – Prinzip modelliert. Daraus folgt die nachstehende $\overline{v'^2}$ -Transportgleichung:

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \overline{v'^2} = kf - \overline{v'^2} \frac{\epsilon}{k} + \vec{v} \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \overline{v'^2} \right] \quad (4.11)$$

wobei kf die Umverteilung der turbulenten Energie von der strömungsparallelen Komponente bewirkt. Um nicht nur lokale Größen zu erfassen, wird eine elliptische Relaxationsgleichung für f gelöst:

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\mathcal{T}} (C_1 - 1) \left[\frac{\overline{v'^2}}{k} - \frac{2}{3} \right] - C_2 \frac{P_k}{k} \quad (4.12)$$

Vom Standard k - ϵ Modell werden das turbulente Geschwindigkeitsmaß L und das turbulente Zeitmaß \mathcal{T} übernommen:

$$\mathcal{T} = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, 6 \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \right], \quad L = C_L \max \left[\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (4.13)$$

Dabei wirken das Kolmogorov-Längenmaß und -Zeitmaß als untere Schranke für L und \mathcal{T} .

Bei einer rotationsfreien Staupunktströmung gibt der Produktionsterm zu hohe Werte wieder. Das hat zur Folge, dass im Bereich des Staupunktes eine zu hohe turbulente kinetische Energie vorliegt, die durch den Konvektionsprozess die Strömung bzw. die Grenzschichten stromabwärts negativ beeinflusst. Um diesem falschen Verhalten des Modells entgegenzuwirken, werden T und L Beschränkungen unterworfen, welche auch als Realisierbarkeitsbedingungen bekannt sind:

$$\mathcal{T} \leq \frac{k}{\sqrt{3} \overline{v'^2} C_\mu} \frac{1}{\sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}}, \quad L \leq \frac{k^{3/2}}{\sqrt{3} \overline{v'^2} C_\mu} \frac{1}{\sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}} \quad (4.14)$$

wobei die Scherrate S_{ij} wie folgt definiert ist:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.15)$$

Es gelten folgende Wand-Randbedingungen: An den Wänden herrscht Haftbedingung. Nähert man sich mit kleiner werdendem Wandabstand y der Wand an, so gilt für den Grenzwert $y \rightarrow 0$:

$$k(0) = 0, \quad \epsilon(0) = 2\nu \frac{k}{y^2}, \quad \overline{v'^2}(0) = 0, \quad kf(0) = -5 \frac{\overline{v'^2}}{k} \epsilon \quad (4.16)$$

Mit den Grenzwerten $\epsilon(0)$ und $kf(0)$ ergibt sich die Randbedingung für f :

$$f(0) = -\frac{20\nu^2 \overline{v'^2}}{\epsilon(0)y^4} \quad (4.17)$$

Die Randbedingung für f (Glg. (4.17)) beinhaltet im Nenner $\epsilon(0)$, welches im laminaren und transitionalen Bereich nicht eindeutig definiert ist. Dieser Umstand kann zum Oszillieren von $f(0)$ im laminaren Bereich führen, beeinflusst jedoch nicht die laminare Lösung, da sie nur von der kinematischen Viskosität bestimmt wird (Lien et al. 1998).

Numerische Probleme können jedoch auftreten, falls kein simultanes Lösungsverfahren verwendet wird. Die Schwierigkeiten liegen nach Kalitzin (1999) in der starken Koppelung der Turbulenzvariablen durch die ϵ - und f -Randbedingung begründet. Der Faktor, der infolge der Potenzierung von y zustande kommt, kann sehr große Werte annehmen, vor allem bei hochturbulenten Strömungen, die sehr feine Netze in Wandnähe erforderlich machen.

Modell 2:

Lien & Durbin (1996) modifizierten die Funktion f , um eine einfache, von ϵ und y unabhängige Randbedingung zu erhalten. Dazu wird f in den Gleichungen (4.11) und (4.12) durch $\tilde{f} - 5\epsilon\overline{v'^2}/k^2$ ersetzt. Der durch die Transformation bedingte Term $-5L^2\nabla^2(\epsilon\overline{v'^2}/k^2)$ wird im Weiteren in der neuen \tilde{f} -Gleichung vernachlässigt.

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \overline{v'^2} = k\tilde{f} - 6\overline{v'^2} \frac{\epsilon}{k} + \vec{v} \cdot \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \nabla \overline{v'^2} \right] \tag{4.18}$$

$$L^2 \nabla^2 \tilde{f} - \tilde{f} = \frac{1}{\mathcal{J}} \left[(C_1 - 6) \frac{\overline{v'^2}}{k} - \frac{2}{3} (C_1 - 1) \right] - C_2 \frac{P_k}{k} \tag{4.19}$$

Trotz dieser leichten Modifikation von f ist sichergestellt, dass sich $\overline{v'^2}$ in Wandnähe proportional zu y^4 verhält. Führt man die Transformation auch für den Grenzwert $kf(0)$ in Glg. (4.16) durch, so gelangt man zur Randbedingung für \tilde{f} :

$$\tilde{f}(0) = 0 \tag{4.20}$$

Diese Formulierung verhindert eine Koppelung der Randbedingungen an der Wand und eine getrennte Lösung der f - und ϵ -Gleichung wird dadurch erleichtert.

Vereinheitlichter Ansatz:

Diese zwei Varianten des v^2 - f Modells, Modell 1 und Modell 2, können in einen Satz von Gleichungen integriert werden. Alle notwendigen Gleichungen vollständig aufgelistet lauten:

$$v_t = C_\mu \overline{v'^2} \mathcal{T} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon}{\mathcal{T}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \overline{v'^2} = kf - n \overline{v'^2} \frac{\epsilon}{k} + \bar{v} \cdot \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \nabla \overline{v'^2} \right] \quad (4.24)$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\mathcal{T}} \left[(C_1 - n) \frac{\overline{v'^2}}{k} - \frac{2}{3} (C_1 - 1) \right] - C_2 \frac{P_k}{k} \quad (4.25)$$

Mit $n = 1$ erhält man das Modell 1, mit $n = 6$ das Modell 2. Die Konstanten für das Modell 1 ($n = 1$) lauten:

$$C_\mu = 0.22, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 2} = 1.9, \quad C_1 = 1.4, \quad C_2 = 0.3 \quad (4.26)$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.4 \left(1 + 0.045 \sqrt{k/\overline{v'^2}} \right), \quad C_L = 0.25, \quad C_\eta = 80 \quad (4.27)$$

Nur die Konstanten in Glg. (4.27) müssen für das Modell 2 ($n = 6$) geringfügig angepasst werden:

$$C_{\epsilon 1} = 1.4 \left(1 + 0.050 \sqrt{k/\overline{v'^2}} \right), \quad C_L = 0.23, \quad C_\eta = 70 \quad (4.28)$$

Zusammengefasst lauten die Beschränkungen für das turbulente Längen- und Zeitmaß:

$$\mathcal{T} = \max \left[\min \left(\frac{k}{\epsilon}, \frac{k}{\sqrt{3} \overline{v'^2} C_\mu \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}} \right), 6 \left(\frac{v}{\epsilon} \right)^{1/2} \right], \quad (4.29)$$

$$L = C_L \max \left[\min \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \frac{k^{3/2}}{\sqrt{3} \overline{v'^2} C_\mu \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}} \right), C_\eta \left(\frac{v^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (4.30)$$

Transitionskorrektur:

Aus Untersuchungen mit LES ging hervor, dass das turbulente wandnormale Geschwindigkeitsmaß v' einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Transition hat. Daher ist es naheliegend das v^2 - f Modell zur Berechnung von Turbomaschinenströmungen einzusetzen, in denen auch verschiedene Transitionsarten vorkommen. Zur besseren Berechnung dieser Transitionen wurde ein von der Reynoldszahl abhängiger Term zur Kennzahl $C_{\epsilon 1}$ in der Transportgleichung für die Dissipation hinzugefügt, um die Dissipation in Wandnähe zu reduzieren. Durch diese Maßnahme kann bei mäßigem Turbulenzgrad der Transitionsbeginn und die Länge der Transitionszone deutlich besser prognostiziert werden.

Um die Bypass-Transition besser vorhersagen zu können, wird $C_{\epsilon 1}$ aus Glg. (4.27) um einen Transitionskorrektur-Term erweitert (Lien et al. 1999):

$$C_{\epsilon 1} = 1.4 \left(1 + 0.050 \sqrt{k/v'^2} \right) + 0.4e^{-0.1R_t} \quad (4.31)$$

wobei $R_t = k^2/\epsilon v$ die turbulente Reynoldszahl ist.

4.4 ζ - f Modell

Das v^2 - f Modell hat gegenüber anderen Wirbelviskositätsmodellen einen entscheidenden Vorteil. Durch Einführung von $\overline{v'^2}$ und des elliptischen Relaxationskonzeptes, welche $\overline{v'^2}$ empfindlich auf die reibungsfreie Wanddämpfung macht, kann bei diesem Modell auf die sonst übliche empirische Dämpfungsfunktion verzichtet werden.

Das von Hanjalić, Popovac und Hadžiabdić (2004) vorgestellte ζ - f Modell basiert auf Durbins elliptisches Relaxationskonzept, nur mit dem Unterschied, dass eine Transportgleichung für $\zeta = \overline{v'^2}/k$ anstatt für $\overline{v'^2}$ gelöst wird. Dieses Modell wurde entwickelt, um die numerische Stabilität bei nicht simultaner Lösung der v^2 - und f -Gleichung zu verbessern. Wie bereits besprochen, resultieren die Probleme des v^2 - f Modells (Durbin 1995) aus den Wand-Randbedingungen für die turbulenten Variablen f und ϵ .

Durch die geeignetere Formulierung der ζ -Gleichung und der Wand-Randbedingung für die Relaxationsfunktion f reagiert das Modell nicht so empfindlich auf die Gestaltung des Rechennetzes in Wandnähe, was insgesamt zu mehr Stabilität führt.

Die Transportgleichung für ζ kann direkt aus den Gleichungen von Durbin (1995) für $\overline{v'^2}$ und k hergeleitet werden. Durch die Transformation erhält man:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta = f - \frac{\zeta}{k} P_k + \vec{v} \cdot \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\zeta} \right) \nabla \zeta \right] + X \quad (4.32)$$

Der „cross diffusion“ Term X entsteht durch die Transformation und kann in kondensierter Form als

$$X = \frac{2}{k} \left(v + \frac{v_t}{\sigma_\zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (4.33)$$

angegeben werden. Der Term X kann vernachlässigt werden, da er nur eine untergeordnete Rolle spielt, obwohl er einen gewissen Einfluss in der Wandnähe hat. Das Weglassen des Terms X kann durch eine erneute Abstimmung der Koeffizienten ausgeglichen werden.

Die Lösung der ζ -Transportgleichung Glg.(4.32) sollte das gleiche Ergebnis liefern wie die Lösung der $\overline{v'^2}$ Gleichung. Aus numerischer Sicht ergeben sich jedoch zwei Vorteile:

Anstatt dem in der v'^2 -Gleichung vorkommenden ϵ , welches in der wandnahen Schicht sehr schwer reproduzierbar ist, tritt in der ζ Gleichung die Produktion der turbulenten kinetischen Energie P_k auf, welche viel unproblematischer wiederzugeben ist.

Der zweite Vorteil liegt in der Formulierung der Wand-Randbedingung für f . Für den Grenzwert $y \rightarrow 0$ gilt:

$$f(0) = -\frac{2v\zeta}{y^2} \quad (4.34)$$

Diese Randbedingung für f ist unproblematischer im Vergleich zur jenen des v^2 - f Modells (Durbin 1995). Da in dieser Formulierung ϵ nicht mehr vorkommt, kann es auch zu keiner starken Koppelung der Gleichungen über die ϵ - und f -Wand-Randbedingung kommen. Zusätzlich verhalten sich in Wandnähe die im Zähler vorkommende Größe ζ und der Nenner der Glg. (4.34) proportional zu y^2 anstatt proportional zu y^4 .

Beim konventionellen v^2 - f Modell wird zur Modellierung des Druck-Scher-Korrelationsterms das „Isotropation of Production“ (IP) –Prinzip herangezogen, dagegen kommt beim ζ - f Modell der fortschrittlichere quasi-lineare Ansatz von Speziale et al. (1991) (SSG) zum Zug. Für die elliptische Gleichung des Druck-Scher-Korrelationsterms f folgt schließlich:

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\mathcal{T}} \left(c_1 + C_2' \frac{P_k}{\epsilon} \right) \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{C_4}{3} - C_5 \right) \frac{P_k}{k} \quad (4.35)$$

wobei $c_1 = C_1 - 1 = 0.4$ ist. Die Koeffizienten für das SSG Druck-Scher-Korrelationsmodell können bis auf $C_2' = 0.65$ übernommen werden. Der letzte Term in Glg. (4.35) $C_4/3 - C_5$ entspricht ungefähr 0.008 und kann im Vergleich zum ersten Term vernachlässigt werden. Das führt zu folgendem Satz an Gleichungen:

$$v_t = C_\mu \zeta k \mathcal{T} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon}{\mathcal{T}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \zeta = f - \frac{\zeta}{k} P_k + \bar{v} \cdot \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\zeta} \right) \nabla \zeta \right] \quad (4.39)$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\mathcal{T}} \left(c_1 + C_2' \frac{P_k}{\epsilon} \right) \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) \quad (4.40)$$

Das turbulente Zeitmaß \mathcal{T} und Längenmaß L werden wiederum nach oben durch die Realisierbarkeitsbedingungen und nach unten durch die Kolmogorov-Größen beschränkt:

$$\mathcal{T} = \max \left[\min \left(\frac{k}{\epsilon}, \frac{a}{\sqrt{6} \zeta C_\mu \sqrt{S_{ij} S_{ij}}} \right), C_\tau \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \right] \quad (4.41)$$

$$L = C_L \max \left[\min \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \frac{k^{1/2}}{\sqrt{6} \zeta C_\mu \sqrt{S_{ij} S_{ij}}} \right), C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (4.42)$$

Die Koeffizienten des ζ - f Modells sind in unten stehender Tabelle zusammengefasst:

Tabelle 1: Koeffizienten des ζ - f Modells

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	c_1	C'_2	σ_k	σ_ϵ	σ_ζ	C_τ	C_L	C_η
0.22	$1.4(1 + 0.012/\zeta)$	1.9	0.4	0.65	1	1.3	1.2	6.0	0.36	85

5 CFD-Code Linars

In den CFD-Code Linars des Instituts für thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik wurde der vereinheitlichte Ansatz des v^2 - f Modells (s. Abschnitt 4.3) implementiert, bei dem durch die Wahl des Parameters n , zwischen der Version von Durbin (1995) ($n = 1$) und der von Lien & Durbin (1996) ($n = 6$) umgeschaltet werden kann. Weiters wurde das unter Abschnitt 4.4 vorgestellte ζ - f Modell in den Code programmiert. Zusätzlich kann bei beiden Modellen die in Lien et al. (1998) vorgestellte Transitionskorrektur (s. Glg.(4.31)) dazugeschalten werden.

Linars verwendet zur Lösung der Gleichungen ein getrenntes Lösungsverfahren. Die primitiven Variablen (Dichte ρ , Geschwindigkeitskomponenten v_1, v_2, v_3 , Druck p) und die turbulenten Variablen (turbulente kinetische Energie k , Dissipation der turbulenten kinetischen Energie ϵ , wandnormales Geschwindigkeitsmaß $\overline{v'^2}$, bzw. das Geschwindigkeitsmaßverhältnis ζ) werden jeweils gekoppelt gelöst. Da die Gleichung für die elliptische Relaxationsfunktion f eine andere Form aufweist, kann sie nicht gemeinsam mit den anderen turbulenten Variablen gelöst werden. Für die Lösung dieser Gleichung muss ein eigener Lösungsalgorithmus angewendet werden.

Initialisierung:

Die Initialisierung der primitiven und turbulenten Variablen im gesamten Strömungsfeld hat einen großen Einfluss auf die Berechnung. Durch die Wahl einer plausiblen Startverteilung ist die Wahrscheinlichkeit, eine konvergente Berechnung zu erhalten, viel größer. Eine geeignete Startverteilung kann die Lösung eines anderen Turbulenzmodells sein. Steht eine solche Lösung nicht zur Verfügung, so müssen für die Initialisierung der primitiven Variablen der Totaldruck p_{tot} , die Totaltemperatur T_{tot} und die Geschwindigkeitskomponenten v_1, v_2, v_3 über den control-file vorgegeben werden. Mit diesen Werten wird für jede primitive Variable ein Startwert bestimmt, der dann zur Initialisierung im gesamten Rechengebiet herangezogen wird. Die turbulenten Variablen werden in Abhängigkeit vom Wandabstand y wie folgt initialisiert:

$$k = k_{init} \left(1 - e^{-\frac{y}{10\mu}}\right), \quad \epsilon = \epsilon_{init}, \quad \overline{v'^2} = \overline{v'^2}_{init} \left(1 - e^{-\frac{y}{10\mu}}\right), \quad (5.1)$$

$$f = f_{init}$$

Diese Initialisierungsmethode berücksichtigt die dämpfende Wirkung der Wand und ist geeigneter als die Initialisierung mit einem festen Wert. An der Wand ($y = 0$) ergibt sich für k und $\overline{v'^2}$ ein Startwert von null. Die Initialisierungswerte lauten für das v^2 - f Modell:

$$k_{init} = 10^{-4}, \quad \epsilon_{init} = 10^{-6}, \quad \overline{v'^2}_{init} = 2/3 \cdot 10^{-4}, \quad (5.2)$$

$$f_{init} = 10^{-5}$$

und für das ζ - f Modell :

$$k_{init} = 10^{-3}, \quad \epsilon_{init} = 10^2, \quad \overline{v'^2}_{init} = 2/3, \quad f_{init} = 0 \quad (5.3)$$

Eine andere vielversprechende Variante ist, von einer konvergenten k - ω Lösung auszugehen. Die primitiven Variablen dieser Lösung können direkt für die Initialisierung des v^2 - f und ζ - f Modells übernommen werden. Die turbulenten Variablen müssen wie folgt umgerechnet werden, wobei die Variablen der k - ω Lösung mit einem $^\circ$ versehen sind:

$$k = k^\circ, \quad \epsilon = 10^{-2} k^\circ \omega^\circ, \quad (5.4)$$

$$v^2 - f \text{ Modell: } \overline{v'^2} = 2/3 k^\circ, \quad \zeta - f \text{ Modell: } \overline{v'^2} = 2/3$$

Das ζ - f Modell kann auch von einer konvergenten v^2 - f Lösung initialisiert werden. Dabei werden alle primitiven und turbulenten Variablen bis auf $\overline{v'^2}$ übernommen. ζ lässt sich wie folgt bestimmen, wobei die Variablen der v^2 - f Lösung mit einem * gekennzeichnet sind:

$$\zeta = \overline{v'^2}^* / k^* \quad (5.5)$$

Limitier:

Eine Möglichkeit, um die Stabilität der Berechnung zu erhöhen, ist die Begrenzung der primitiven und turbulenten Variablen, damit unrealistische Werte vermieden werden. Nach jedem Rechenschritt wird überprüft, ob die einzelnen Größen im vorgegebenen Bereich liegen und gegebenenfalls werden sie korrigiert. Diese Begrenzer werden Limiter genannt. Von den primitiven Größen können der Druck p und die Dichte ρ einer Begrenzung unterworfen werden. Diese Limiter werden individuell an das Berechnungsbeispiel angepasst und über den control-file gesetzt. Hingegen sind die Limiter für die turbulenten Größen fest im Programm implementiert und können somit nicht einfach verändert werden. Die Begrenzungen für die turbulenten Variablen k und ϵ lauten:

$$10^{-10} \leq k \leq 5 \cdot 10^3, \quad 10^{-6} \leq \epsilon, \quad (5.6)$$

Spezifisch für das v^2 - f Modell gilt zusätzlich:

$$10^{-10} \leq \overline{v'^2}/k \leq 2, \quad 0 \leq f \quad (5.7)$$

Für das ζ - f Modell gilt zusätzlich zu den Begrenzungen in Glg. (5.6):

$$10^{-6} \leq \zeta \leq 2 \quad (5.8)$$

6 Evaluierung der implementierten Modelle

Das in das institutseigene CFD-Rechenprogramm Linars implementierte v^2-f und $\zeta-f$ Modell werden anhand der stationären Berechnung mehrerer Testbeispiele auf Funktionalität und Stabilität untersucht. Für die Berechnung wird die modifizierte Variante des v^2-f Modells (Lien & Durbin, 1996) herangezogen, da sie im Vergleich zur ursprünglichen Version (Durbin, 1995) bei getrennter Lösung viel stabiler läuft und somit konvergente Lösungen leichter zu erreichen sind. Fallweise wird die in Lien et al. (1998) vorgestellte Transitionskorrektur (s. Glg.(4.31)) zur besseren Vorhersage des laminar-turbulenten Umschlags angewandt. Im Allgemeinen sieht die Lösungsstrategie vor, das v^2-f Modell mit einer konvergenten $k-\omega$ Lösung zu initialisieren und für das $\zeta-f$ Modell die Lösung des v^2-f Modells heranzuziehen. Die Validierungsbeispiele umfassen einfache 2d-Testfälle, wie die Strömung entlang einer ebenen Platte mit und ohne Druckgradienten, und die Strömung in einem einfachen Stator, die durch unterschiedliche Randbedingungen variiert wird. Der Abschluss der Validierungsbeispiele bildet ein 3d-Hochdruckstator eines Strahltriebwerkes. Um Vergleichswerte zu erhalten, werden alle Beispiele auch mit dem v^2-f Modell des kommerziellen CFD-Programms ANSYS Fluent 14 gerechnet. Für die ebene Platte sind zusätzlich die Messdaten von der wissenschaftlichen Vereinigung ERCOFTAC verfügbar. Als Basis für die Vergleiche dienen die Verläufe des Wandreibungskoeffizienten bzw. der Wandschubspannung.

6.1 Ebene Platte

Die Umströmung der ebenen, scharfkantigen Platte ist ein vielfach untersuchter Testfall und liefert trotz seines einfachen Aufbaus sehr wichtige Informationen. Es kann überprüft werden, ob die einzelnen Turbulenzmodelle prinzipiell in der Lage sind, die Transition, also den Umschlag von laminarer zu turbulenter Grenzschichtströmung, richtig wiederzugeben. Darüber hinaus können die berechneten Ergebnisse mit vorhandenen Messdaten verglichen werden.

Der Versuchsaufbau zur Untersuchung der Transitionsströmung an einer ebenen Platte ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Luft wird in einem Windkanal durch ein Turbulenzsieb geleitet und umströmt nach einer Vorlaufstrecke die ebene, scharfkantige Platte. Das Turbulenzsieb erzeugt den gewünschten Turbulenzgrad. Die scharfe Vorderkante der Platte soll den Staubereich klein halten, damit vergleichbare Bedingungen wie bei der Simulation herrschen. Mit der Hitzdrahttraverse werden die drei Geschwindigkeitskomponenten und ihre Schwankungen gemessen. Das Wandprofil zur Erzeugung eines Druckgradienten ist als gestrichelte Linie unterhalb der Platte dargestellt. Die aus dem Versuch gewonnen Messdaten wurden von der wissenschaftlichen Vereinigung ERCOFTAC zur Verfügung gestellt.

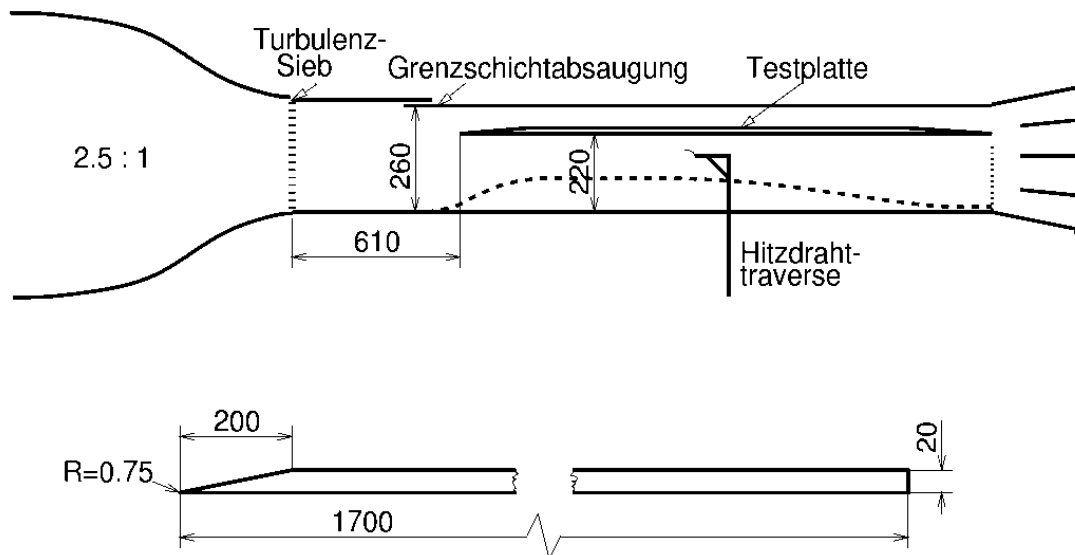


Abbildung 6.1: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung der ebenen Platte

6.1.1 T3A-Testfall

Dieser Testfall untersucht die druckgradientenfreie Strömung an der ebenen Platte. Daher fällt für diesen Fall das strichliert eingezeichnete Wandprofil unterhalb der Platte weg (s. Abbildung 6.1). Die Strömungsgeschwindigkeit nach dem Turbulenzsieb beträgt 5.2 m/s, der Freistromturbulenzgrad auf Höhe der Plattenvorderkante etwa 3 % und die Reynoldszahl bezogen auf die Plattenposition $x = 1495 \text{ mm}$ beträgt 528000.

Simulation

Linars ist ein Simulationsprogramm speziell für die Berechnung von kompressiblen Strömungen, daher wurde dieser Testfall mit höheren Geschwindigkeiten gerechnet. Für die Berechnung wurde eine Eintrittsgeschwindigkeit von Mach 0.3 gewählt. Um Experiment und Simulation trotzdem miteinander vergleichen zu können, müssen beide eine Reynoldsähnlichkeit aufweisen. Durch Anpassen der dynamischen Viskosität und der Plattenlänge kann die gleiche Reynoldszahl wie im Experiment erreicht werden.

Das verwendete Rechennetz (s. Abbildung 6.2) ist 330 mm lang, 110 mm hoch und besteht in x-Richtung aus 80, in y-Richtung aus 64 Zellen. Die Platte selbst ist 300 mm lang und beginnt bei Position $x = 0$ m, $y = 0$ m. Das verdichtete Netz in x-Richtung bei Plattenbeginn und in y-Richtung in Wandnähe ist erforderlich, um die Strömungsgrößen in der Grenzschicht trotz hoher Gradienten richtig berechnen zu können. Dieses Erfordernis haben alle Low-Reynolds-Modelle gemeinsam. Der Wandabstand zu den der Wand angrenzenden Rechenzellen ist über die Plattenlänge konstant und beträgt $1.69\text{e-}6$ m. Am oberen Rand des Netzes und am unteren im Bereich des Vorlaufes wurde die Symmetrierandbedingung gesetzt.

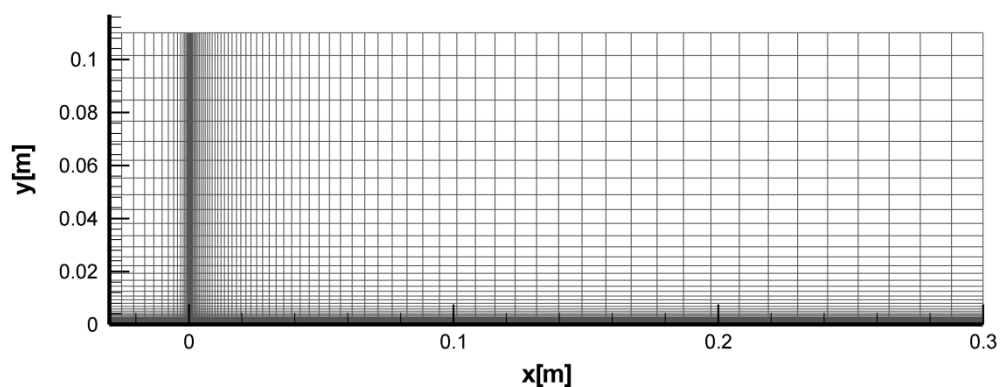


Abbildung 6.2: Rechennetz der ebenen Platte (T3A)

Als turbulente Eintrittsrandbedingungen werden Turbulenzgrad Tu und turbulentes Längenmaß L vorgegeben. Sie sind in Linars und Fluent wie folgt definiert:

$$Tu = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_\infty} \approx \frac{\sqrt{2k/3}}{U_\infty}, \quad L = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (6.1)$$

wobei U_∞ die Geschwindigkeit der Außenströmung und C_μ eine Konstante in der Höhe von 0.09 ist.

Die Geschwindigkeit der Außenströmung bleibt vom Eintritt bis zum Austritt nahezu konstant, hingegen ist der Turbulenzgrad eine Funktion der Ortskoordinate x . Da der Turbulenzgrad mit zunehmenden x fällt, muss er am Eintritt größer als an der Plattenvorderkante sein. Tu und L müssen so gewählt werden, dass der gemessene mit dem gerechneten Verlauf des Freistromturbulenzgrades übereinstimmt. Mit Hilfe der Gleichungen (6.1) rechnen die Simulationsprogramme intern die gesetzten Eintrittsrandbedingungen Tu und L in die Eintrittsrandbedingungen k und ϵ um. In Tabelle 2 sind die Randbedingungen zusammengefasst, wobei die turbulenten Randbedingungen von früheren Arbeiten bekannt sind.

Tabelle 2: Randbedingungen für ebene Platte (T3A)

Eintritt		
p_{tot}	101633.9	Pa
T_{tot}	293.15	K
Tu	5.6	%
L	0.000205	m
μ	$6.74299 \cdot 10^{-5}$	Ns/m ²
Austritt		
p_{stat}	95300	Pa

Der Freistromturbulenzgrad ist in der Abbildung 6.3 dargestellt. Auf der Abszisse ist die auf die Plattenposition bezogene Reynoldszahl Re_x aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass der von Linars berechnete Verlauf fast

exakt mit den Messergebnissen übereinstimmt. Das ist der Beweis, dass die turbulenten Eintrittsrandbedingungen richtig bestimmt wurden.

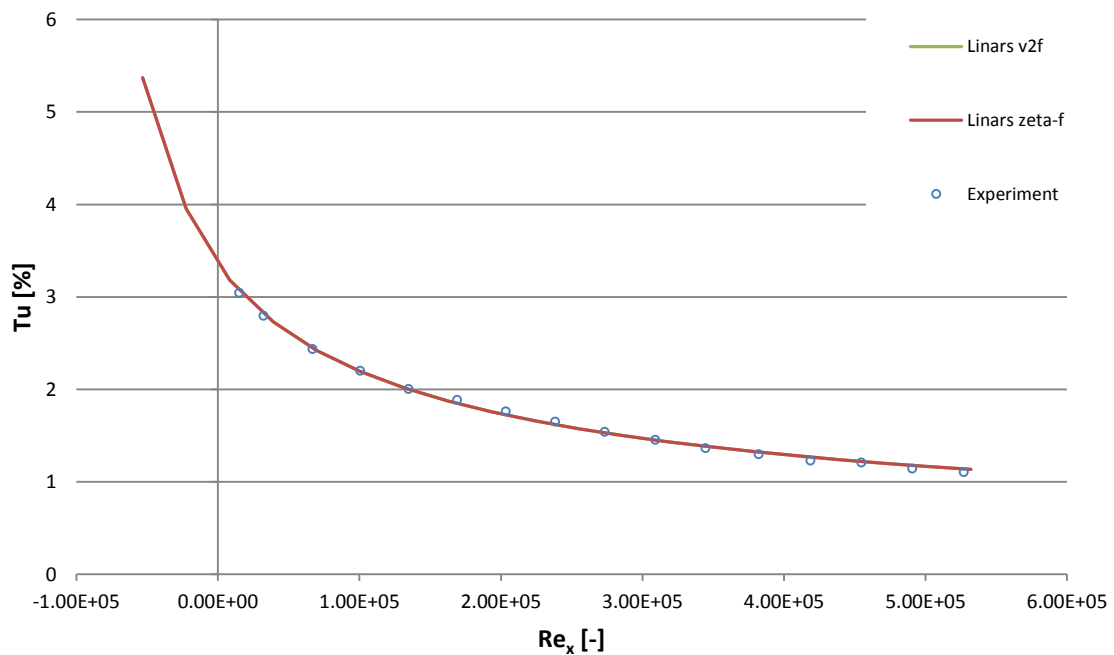


Abbildung 6.3: Freistromturbulenzgrad der ebenen Platte (T3A)

Der Wandwiderstandsverlauf ist dazu geeignet, um die Konvergenz einer numerischen Strömungsberechnung festzustellen. Um die Messdaten mit den Berechnungsergebnissen vergleichen zu können, muss man dimensionslose Größen verwenden. Der dimensionslose Wandreibungskoeffizient c_f ist wie folgt definiert:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (6.2)$$

wobei τ_w die Wandschubspannung repräsentiert.

In Abbildung 6.4 ist der Verlauf des Wandreibungskoeffizienten zu sehen. Das von Fluent berechnete Ergebnis oszilliert sehr stark im laminaren Bereich und kann deshalb nur bedingt als Vergleich herangezogen werden. Die Ursache für die sehr starken Schwankungen konnte nicht ausfindig gemacht werden. Der Transitionsbeginn wird im Vergleich mit der Messung gut angezeigt, wobei im

turbulenten Bereich der Wandwiderstandswert das niedrigste Niveau im Vergleich zu den anderen Modellen besitzt.

Das v^2 - f Modell von Linars sagt den Transitionsbeginn am frühesten voraus, jenes mit Transitionskorrektur liefert ein sehr ähnliches Ergebnis wie das ζ - f Modell. Das ζ - f Modell mit Transitionskorrektur liefert das beste Ergebnis für die Voraussage des Transitionsbeginns. Im turbulenten Bereich kommen alle Linars-Modelle gut an das Niveau der Messung heran.

Weiters sind zum Vergleich die analytischen Lösungen für rein laminare und turbulente Strömungen eingezeichnet. Die Blasius-Lösung, welche die laminare Lösung wiedergibt, lautet:

$$c_{f \text{ laminar}} = 0.664 \cdot Re_x^{-1/2} \quad (6.3)$$

Die analytische Lösung für die rein turbulente Strömung lautet für den hier vorliegenden Reynoldszahlbereich:

$$c_{f \text{ turbulent}} = 0.0576 \cdot Re_x^{-0.2} \quad (6.4)$$

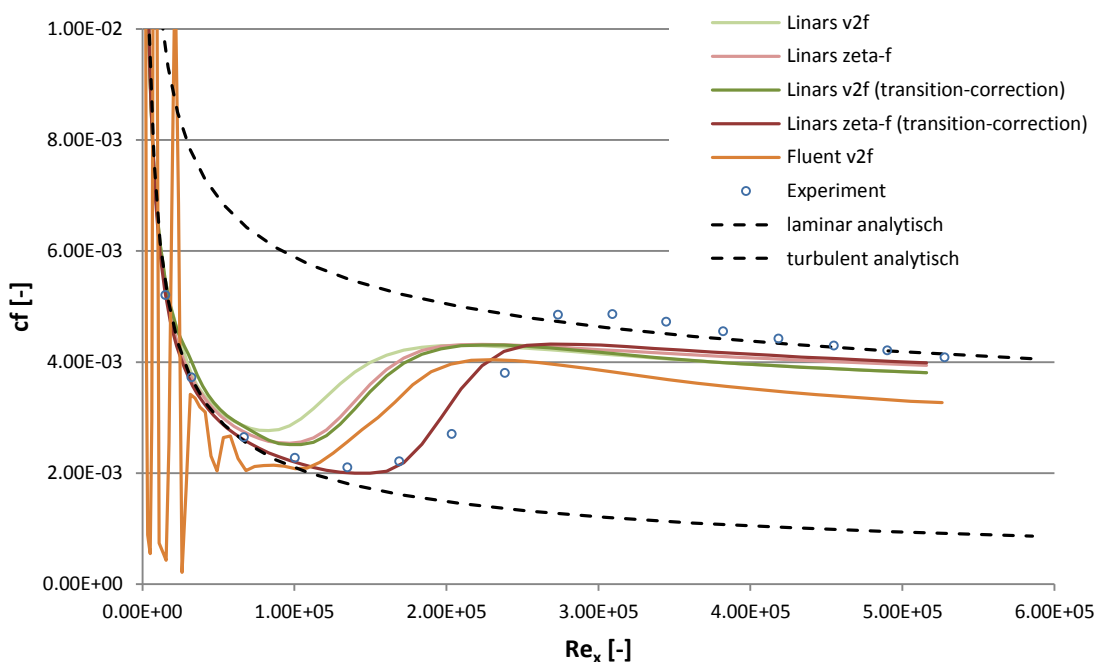


Abbildung 6.4: Wandreibungskoeffizient der ebenen Platte (T3A)

Um akkurate Ergebnisse zu erhalten, ist immer darauf zu achten in welchem Bereich sich der dimensionslose Wandabstand y^+ der an die Wand angrenzenden Rechenzellen befindet. Die Definition von y^+ lautet:

$$y^+ = \frac{y}{\mu} \sqrt{\rho \tau_w} \quad (6.5)$$

Der y^+ Verlauf ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Der höchste Wert mit 0.55 liegt im vorderen Bereich, der niedrigste mit 0.12 im hintern Bereich der Platte. Somit liegt die y^+ Kurve unter der für Low-Reynolds-Modelle empfohlenen Obergrenze von 1.

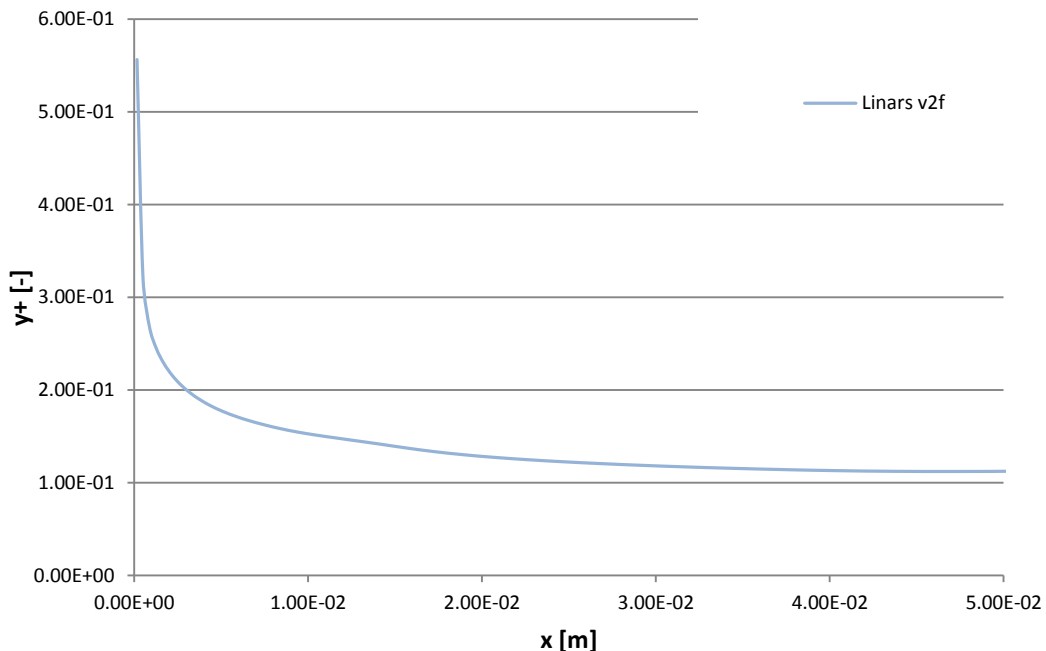


Abbildung 6.5: y^+ Verlauf der ebenen Platte (T3A)

Das v^2 - f Modell von Linars konvergierte nach 10000 Rechenschritten, schnell im Vergleich zum ζ - f Modell, das 20000 Schritte benötigte. Auffallend ist beim ζ - f Modell, wie sich das Ergebnis ausgehend von der konvergenten v^2 - f Lösung entwickelt hat. Ausgangspunkt ist die grüne Linie in Abbildung 6.6. Zu Beginn verschiebt sich der Transitionsbereich sehr stark nach rechts und nach 8000 Schritten (blau strichlierte Linie) wandert der Transitionsbereich zurück nach links. Nach 16000 Schritten (rot strichlierte Linie) ändert sich wieder die Richtung und nach 20000 Schritten wird die konvergente Lösung (rote Linie)

erreicht. Dieses starke „Ausschlagen“ des Transitionsbereichs konnte beim ν^2 - f Modell nicht beobachtet werden.

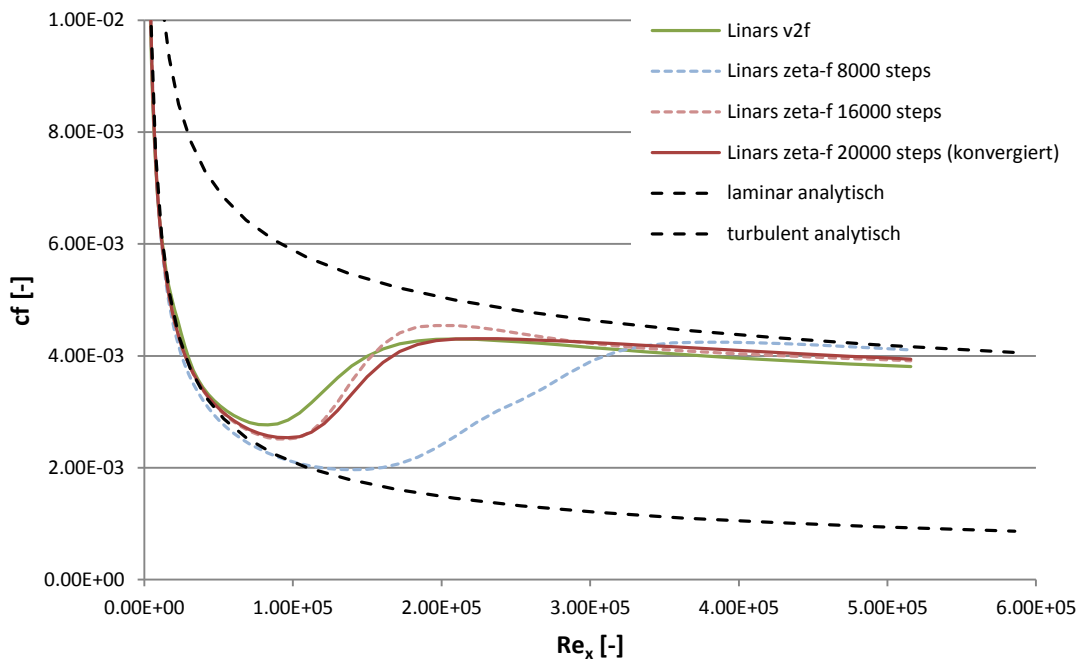


Abbildung 6.6: Entwicklung der ζ - f Lösung bei der ebenen Platte (T3A)

6.1.2 TC1-Testfall

Bei diesem Testfall wird eine Strömung entlang einer ebenen Platte mit aufgeprägtem Druckgradienten untersucht. Der Druckgradient wird durch das in Abbildung 6.1 strichliert eingezeichnete Wandprofil unterhalb der Platte erzeugt. Die Strömungsgeschwindigkeit nach dem Turbulenzsieb beträgt 5.9 m/s, der Freistromturbulenzgrad auf Höhe der Plattenvorderkante etwa 7.7 % und die auf die Plattenposition $x = 1495 \text{ mm}$ bezogene Reynoldszahl beträgt 772000.

Simulation

Für die Berechnung wurde die Geometrie des Versuchsaufbaus im Maßstab 1:1 übernommen, aber es wurde eine andere Eintrittsgeschwindigkeit in der Größenordnung von 80 m/s gewählt. Um Experiment und Simulation trotzdem miteinander vergleichen zu können, müssen beide eine Reynoldsähnlichkeit

aufweisen. Durch Anpassen der dynamischen Viskosität kann die gleiche Reynoldszahl wie im Experiment erreicht werden.

Das in Abbildung 6.7 überhöht dargestellte Rechennetz ist 2160 mm lang, bis zu 220 mm hoch und besteht in x-Richtung aus 290, in y-Richtung aus 80 Zellen. Die Platte erstreckt sich von Position $x = 0$ m, $y = 0$ m bis an das rechte Ende des Rechennetzes. Der Wandabstand zu den der Wand angrenzenden Rechenzellen ist über die Plattenlänge nicht konstant und variiert geringfügig zwischen $1.83e-5$ und $2.63e-5$ m. Am oberen Rand des Netzes und im unteren im Bereich des Vorlaufes wurde die Symmetrierandbedingung gesetzt.

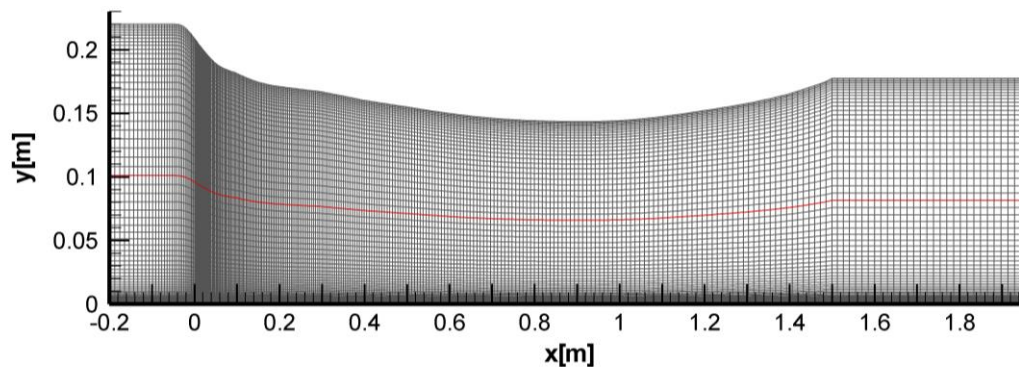


Abbildung 6.7: Rechennetz der ebenen Platte (TC1)

Die turbulenten Eintrittsrandbedingungen Turbulenzgrad Tu und turbulentes Längenmaß L müssen so gewählt werden, dass der gemessene mit dem gerechneten Verlauf des Freistromturbulenzgrads übereinstimmt. Die gesetzten Randbedingungen sind in Tabelle 3 aufgelistet, wobei die turbulenten Randbedingungen wieder von einer früheren Arbeit entnommen wurden.

Tabelle 3: Randbedingungen für ebene Platte (TC1)

Eintritt		
p_{tot}	101633.9	Pa
T_{tot}	293.15	K
Tu	8.5	%
L	0.003	m
μ	$2.26 \cdot 10^{-4}$	Ns/m^2
Austritt		
p_{stat}	95300	Pa

Der Freistromturbulenzgrad wurde entlang der 55. J-Linie, welche in Abbildung 6.7 als rote Linie zu sehen ist, ausgewertet. Der in der Abbildung 6.8 dargestellte Freistromturbulenzgrad lässt erkennen, dass die mit Linars berechneten Verläufe identisch sind, welche im hinteren Teil der Platte sehr gut mit den Messergebnissen übereinstimmen. Im vorderen Bereich liegt der gemessene Freistromturbulenzgrad über den berechneten Werten.

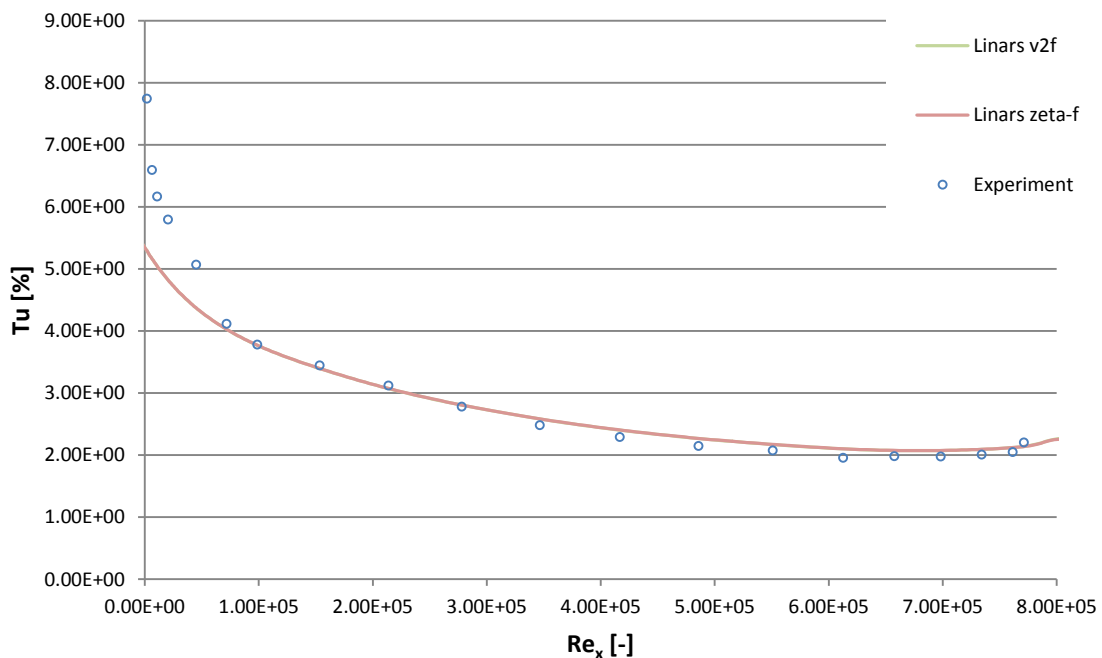


Abbildung 6.8: Freistromturbulenzgrad der ebenen Platte (TC1)

Der Druckverlauf an der Platte ist in Abbildung 6.9 zu sehen. Zu Beginn stellt sich ein negativer und am Ende ein positiver Druckgradient ein. Das Druckminimum liegt bei $Re_x = 5.84 \cdot 10^5$, das einer Plattenposition von 920 mm entspricht.

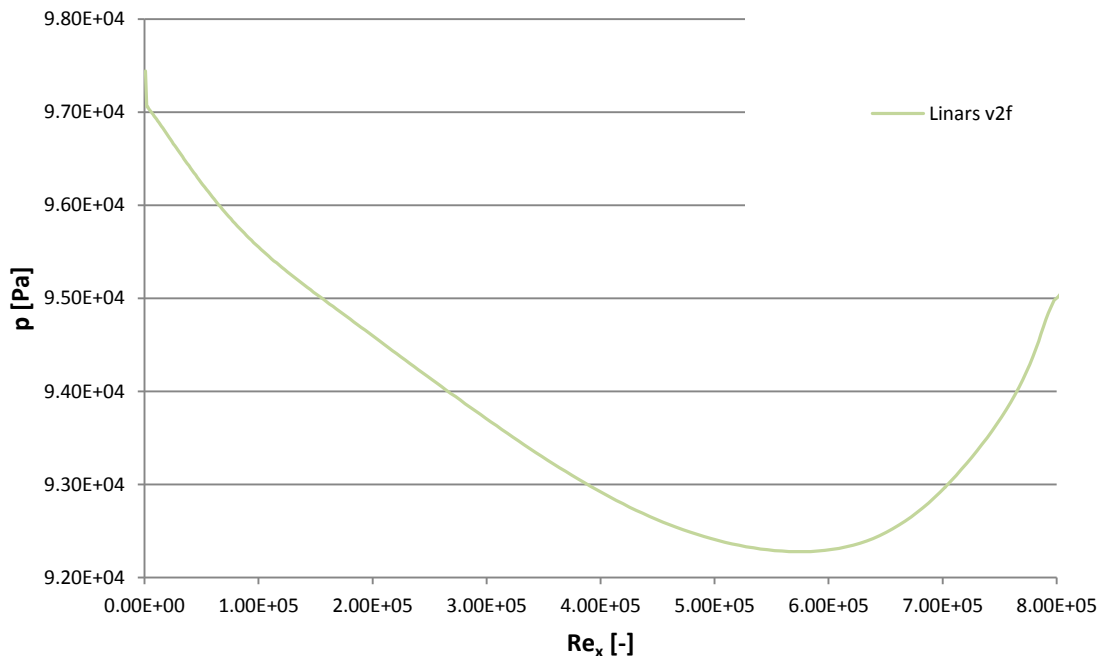


Abbildung 6.9: Druckverlauf an der ebenen Platte (TC1)

In Abbildung 6.10 ist der Verlauf des Wandreibungskoeffizienten zu sehen. Der Beginn der Transitionszone liegt wie beim Testfall T3A ungefähr bei $Re_x = 10e5$. Die destabilisierende Wirkung des höheren Turbulenzgrades von 7.7 % wird anscheinend durch die stabilisierende Wirkung des negativen Druckgradienten ausgeglichen. Das v^2-f und $\zeta-f$ Modell liefern sehr ähnliche Ergebnisse, wobei die Transitionskorrektur nur einen marginalen Einfluss hat. Aus dem gemessenen Verlauf ist eine ausgeprägte Transitionszone erkennbar, welche die Berechnung nicht in dieser Form wiedergeben konnte. Der berechnete Verlauf zeigt größere Abweichungen an, aber die Größenordnung der Ergebnisse stimmt sehr gut überein.

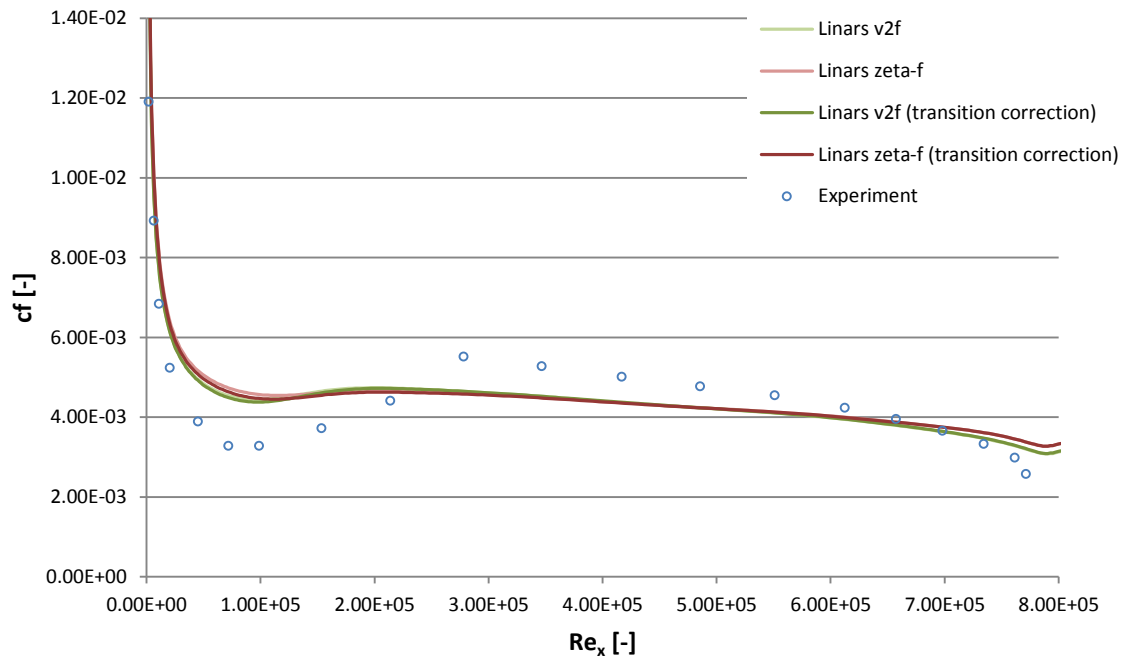


Abbildung 6.10: Wandreibungskoeffizient der ebenen Platte (TC1)

Der dimensionslose Wandabstand y^+ zu den der Platte angrenzenden Rechenzellen bewegt sich in einem Bereich zwischen 0.48 und 1.22.

6.2 Stator

Als nächstes Beispiel wird ein Stator mit 15 geraden Schaufeln in Quasi-3d gerechnet, wobei die Dimension in radialer Richtung vernachlässigt wird. Der Querschnitt der Schaufeln ist dem gängigen NACA-Profil 0012 nachempfunden. In Abbildung 6.11 ist das gewölbte Rechennetz Grid 1 mit Blick in radialer Richtung dargestellt. Unter Ausnutzung der Umfangsperiodizität kann das Rechennetz vereinfacht werden, daher umfasst es nur einen Sektor mit einer Schaufel. Die zwei gespiegelten Blöcke sind durch die farbliche Trennung zu erkennen. Das Rechennetz ist 150 mm lang und erstreckt sich in Umfangrichtung um 24° . Der Innenradius des Quasi 3D-Netzes beträgt 248 mm und der Außenradius 252 mm.

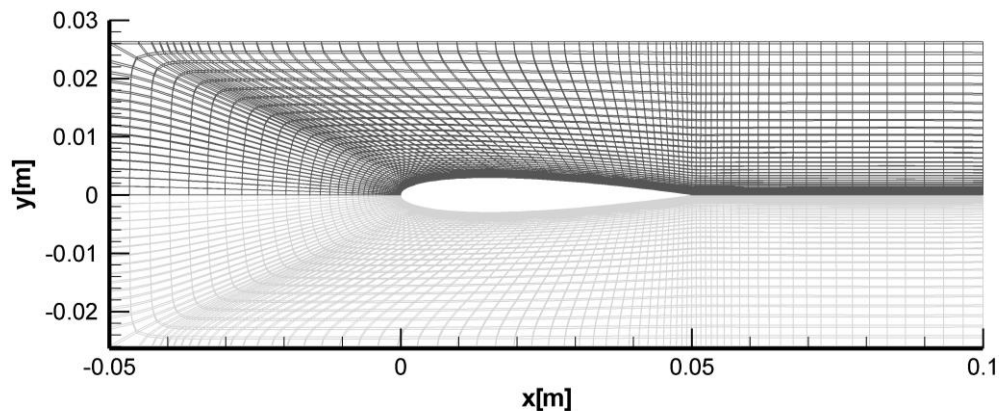


Abbildung 6.11: Rechennetz des Stators

Um die Netzabhängigkeit untersuchen zu können, wird mit 3 verschiedenen Netzen gerechnet. Das strukturierte Rechennetz besteht aus I- und J-Isolinien, welche die einzelnen Rechenzellen begrenzen. Die um das Profil führenden Linien sind die J-Isolinien, jene Linien die vom Profil weggehen die I-Isolinien. Jeder Zelle kann somit eine Kombination aus dem Index I und J zugeordnet werden. Alle drei Netze haben je Block 84 Rechenzellen in I-Richtung. Grid 1 hat pro Block 56, Grid 2 und Grid 3 jeweils 112 Rechenzellen in J-Richtung. Grid 3 hat gegenüber Grid 2 im wandnahen Bereich in J-Richtung feiner gegliederte Rechenzellen. In Abbildung 6.12 sind die Wandabstände zu den der Wand angrenzenden Rechenzellen über die Ortskoordinate x für die

verschiedenen Grids aufgetragen. Für das Grid 1 liegen die Werte zwischen $2.26e-6$ und $5.14e-6$ m, für das Grid 2 zwischen $1.09e-6$ und $2.48e-6$ m und für das Grid 3 zwischen $1.86e-7$ und $4.23e-7$ m. Es ist ersichtlich, dass bei Grid 1 größere Schwankungen des Wandabstandes als bei Grid 2 auftreten. Grid 3 weist die absolut kleinsten Änderungen auf.

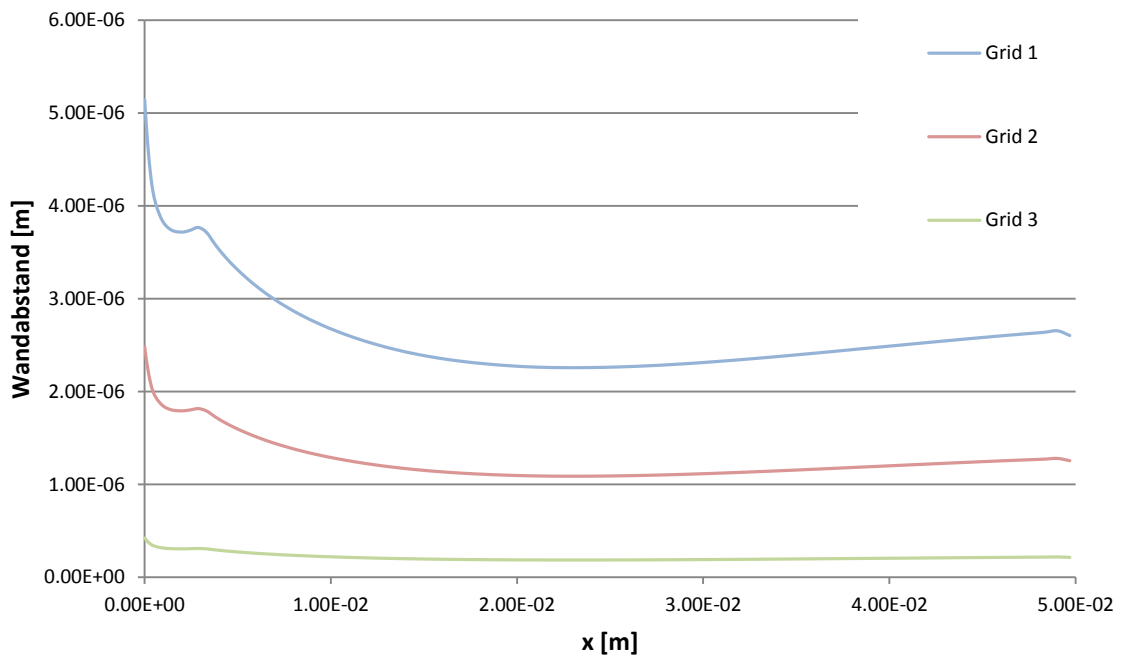


Abbildung 6.12: Wandabstände der verschiedenen Rechnetze (Stator)

Dieser Stator wird mit verschiedenen Randbedingungen gerechnet, so dass insgesamt 7 unterschiedliche Testfälle entstehen. Die Randbedingungen unterscheiden sich von Testfall zu Testfall nur durch den Totaldruck p_{tot} am Eintritt, welcher maßgeblich für die Strömungsgeschwindigkeit ist, und durch den Eintrittswinkel des strömenden Mediums.

Zur Benennung der Testfälle: Der erste Teil des Namens (Mach x) steht für die Strömungsgeschwindigkeit und der zweite Teil (Incidence y) für den Zuströmwinkel. Folgende Testfälle werden unterschieden

- Mach 0.3
 - Incidence 0
 - Incidence 4
- Mach 0.6

- Incidence 0
- Incidence 4
- Incidence 12
- Mach 0.8
 - Incidence 0
 - Incidence 4

6.2.1 Mach 0.3

Für die Testfälle mit einer Strömungsgeschwindigkeit von Mach 0.3 gelten folgende Randbedingungen, wobei die turbulenten Randbedingungen angenommen wurden.

Tabelle 4: Randbedingungen für Stator (Mach 0.3)

Eintritt		
p_{tot}	100000	Pa
T_{tot}	300	K
Tu	3	%
L	0.0005	m
μ	$1.876 \cdot 10^{-5}$	Ns/m^2
Austritt		
p_{stat}	93950	Pa

Testfall Mach 0.3, Incidene 0:

Das Strömungsfeld des v^2-f Modells wurde sowohl in Linars als auch in Fluent mit einer konvergenten Menter SST $k-\omega$ Lösung initialisiert. Abbildung 6.13 zeigt die Machzahlverteilung, welche mit dem Linars v^2-f Modell berechnet wurde. Wie erwartungsgemäß ist bei einem Anströmungswinkel von 0° die Geschwindigkeitsverteilung bezüglich der x-Ache symmetrisch.

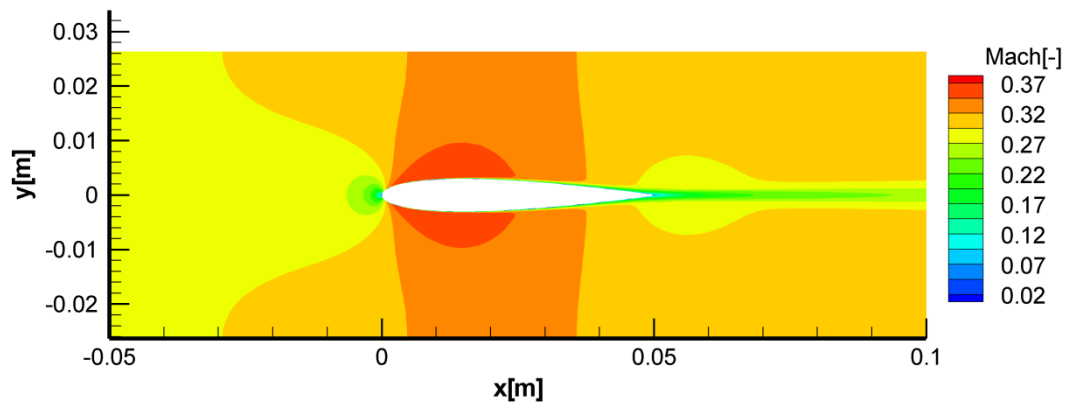


Abbildung 6.13: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.3, Incidence 0)

In Abbildung 6.14 ist die Wandschubspannung an der Schaufel über die Ortskoordinate x aufgetragen. Beim Vergleich der v^2 - f Modelle untereinander zeigt sich, dass Fluent eine etwas später einsetzende Transition vorhersagt als Linars. Ansonsten ist das Ergebnis der beiden Modelle im laminaren und turbulenten Bereich deckungsgleich. Das ζ - f Modell prognostiziert eine noch frühere Transition. Auffallend ist der „Ausreißer“ im vorderen Bereich, welche auf eine numerische Instabilität hinweist. Die Ursache dieser Instabilität wird in der Ungleichmäßigkeit des Netzes in Wandnähe vermutet, was sich im Verlauf des Wandabstandes widerspiegelt. Da in der Wand-Randbedingung für f (s. Glg. (4.34)) der Wandabstand zur zweiten Potenz im Nenner eingeht, kann sich das negativ auf die Stabilität auswirken.

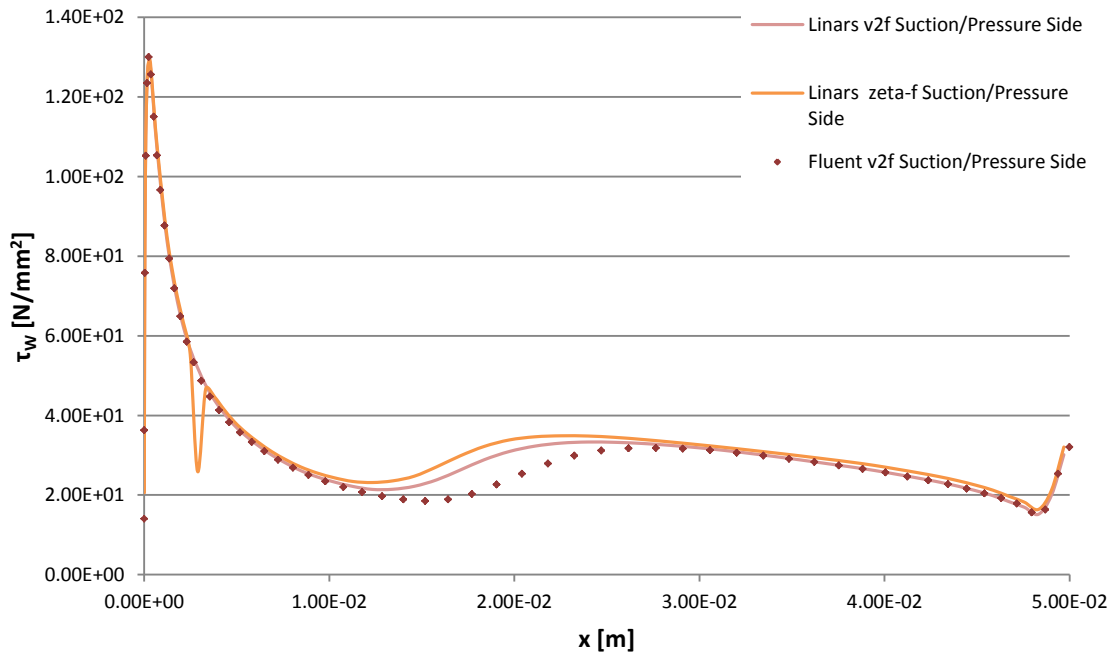


Abbildung 6.14: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 1)

Es wurde daher versucht, durch Wahl eines feineren Netzes die numerische Instabilität des ζ - f Modells beim Ausgangsnetz Grid 1 wegzubringen. Das gelingt auch mit dem nächst feineren Netz Grid 2 (siehe Abbildung 6.15). Es ist hervorzuheben, dass beim v^2 - f Modell keine Netzabhängigkeit festzustellen ist. Der Transitionsbeginn beginnt beim ζ - f Modell geringfügig später, ansonsten sind die Ergebnisse der beiden Modelle sehr ähnlich.

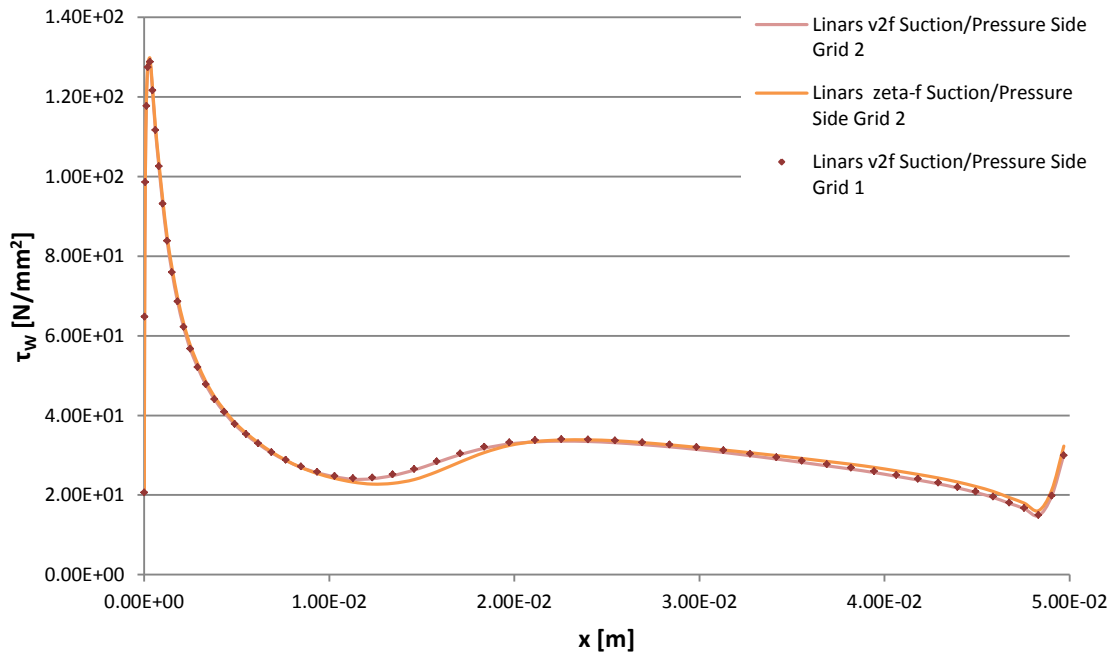


Abbildung 6.15: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 2)

Das Verhalten der verschiedenen Modelle bei Anwendung des feinsten Netzes (Grid 3) ist in Abbildung 6.16 zu sehen. Das Linars v^2-f Modell zeigt auch hier keine Rechennetzabhängigkeit. Das v^2-f Modell von Fluent verhält sich sehr ähnlich wie bei der ebenen Platte (Abbildung 6.4). Im laminaren Bereich treten sehr starke Oszillationen auf, der turbulente Bereich wird jedoch richtig wiedergegeben. Das $\zeta-f$ Modell liefert eine scheinbar rein laminare Lösung, bevor die Berechnung divergiert. Die Ursache dafür konnte jedoch gefunden werden und liegt in der unteren Begrenzung des ζ Wertes. In Linars ist diese Begrenzung mit $10e-6$ gewählt, um numerische Instabilitäten zu vermeiden. Bei einer unteren Begrenzung von $10e-10$ kann die gleiche $\zeta-f$ Lösung wie mit Grid 2 gefunden werden.

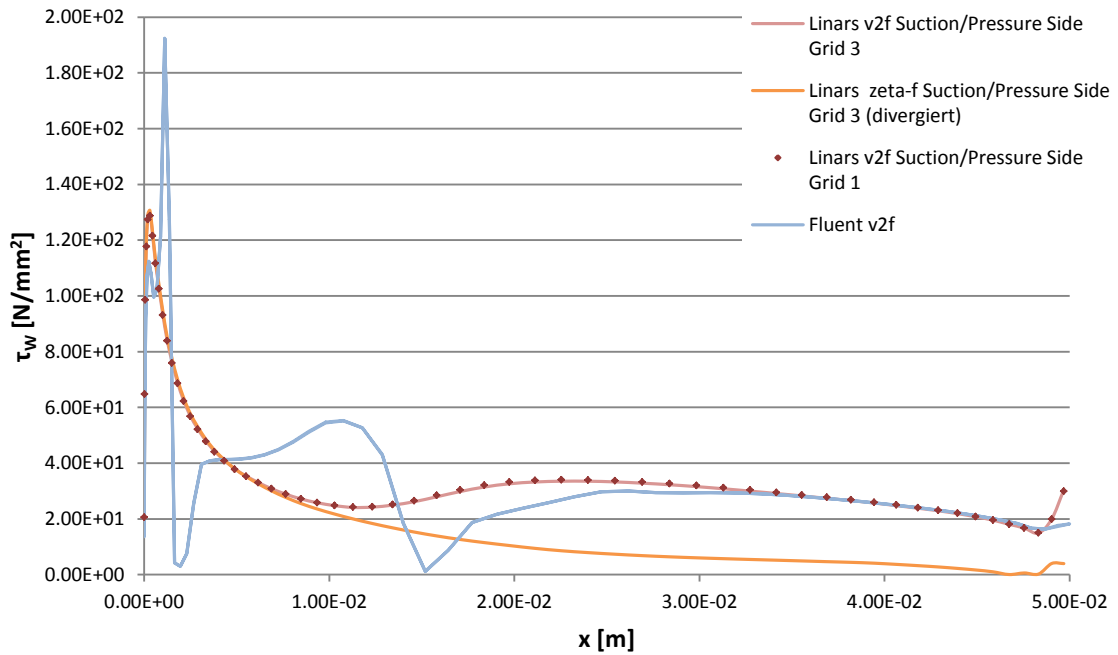


Abbildung 6.16: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 3)

Der Verlauf des dimensionslosen Wandabstandes y^+ der dem Profil angrenzenden Rechenzellen ist der Abbildung 6.17 zu entnehmen. Beim Grid 1 liegen die Werte zwischen 3 und 0.6, beim Grid 2 zwischen 1.5 und 0.3, beim Grid 3 zwischen 0.25 und 0.05. Obwohl der y^+ Verlauf des Grid 1 im laminaren Bereich über der für Low-Reynolds-Modelle empfohlene Obergrenze von 1 liegt, hat das keine Auswirkungen auf das Ergebnis. Der v^2-f Verlauf von Linars bestätigt dies, da er für alle drei Netze gleich ist.

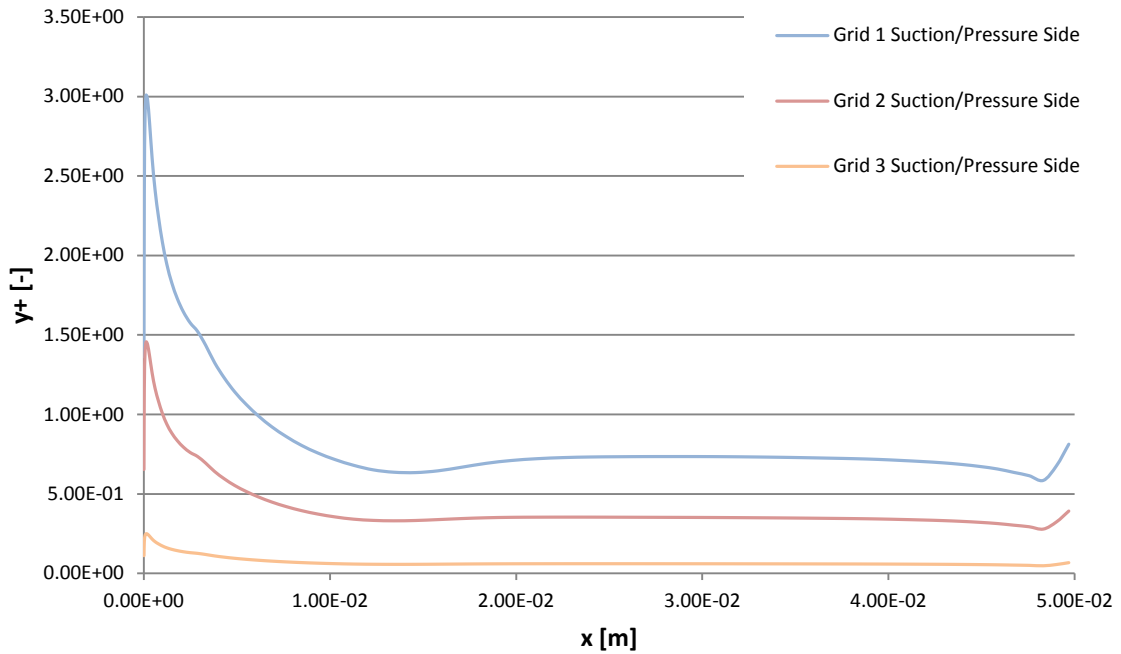


Abbildung 6.17: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 1, 2 und 3)

Mach 0.3 Incidence 4

Anhand der Machzahlverteilung in Abbildung 6.18 ist zu erkennen, dass durch den Anströmwinkel von 4° sich auf der Saugseite eine leicht höhere Geschwindigkeit einstellt als auf der Druckseite.

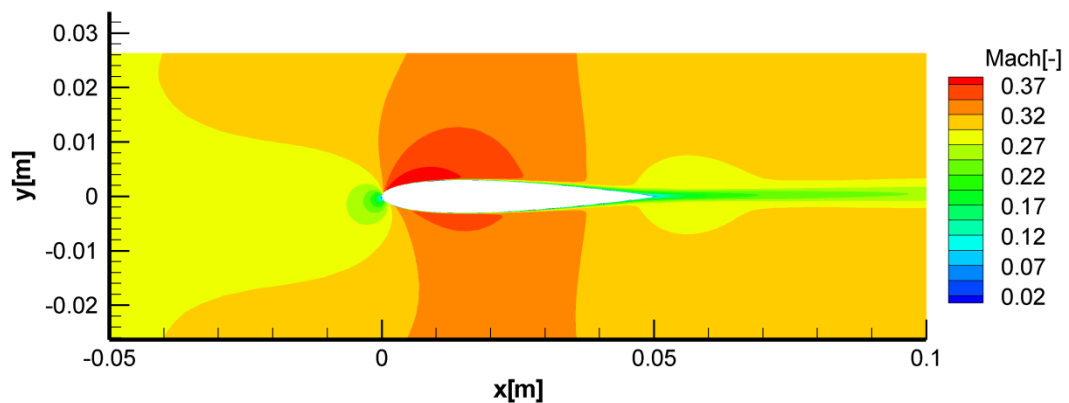


Abbildung 6.18: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.3, Incidence 4)

In Abbildung 6.19 ist der Wandschubspannungsverlauf des Profils entlang der Ortskoordinate für das grobe Rechenetz (Grid 1) zu sehen. Auf der Saugseite

stellen sich am Beginn des Schaufelprofils deutlich höhere Werte als auf der Druckseite ein. Für den turbulenten Bereich im hinteren Teil der Schaufel sagen alle Modelle, sowohl für die Druckseite als auch für die Saugseite, den gleichen Verlauf voraus. Vergleicht man die Ergebnisse der beiden v^2-f Modelle untereinander, so ist zu erkennen, dass der laminare Bereich gleich ist, aber Fluent einen späteren Transitionsbeginn als Linars prognostiziert. Das $\zeta-f$ Modell reagiert so wie beim Testfall Mach 0.3, Incidence 0 bei Verwendung des Grid 1 mit einer numerischen Instabilität. Der „Ausreißer“ tritt im vorderen Bereich nur auf der Saugseite auf.

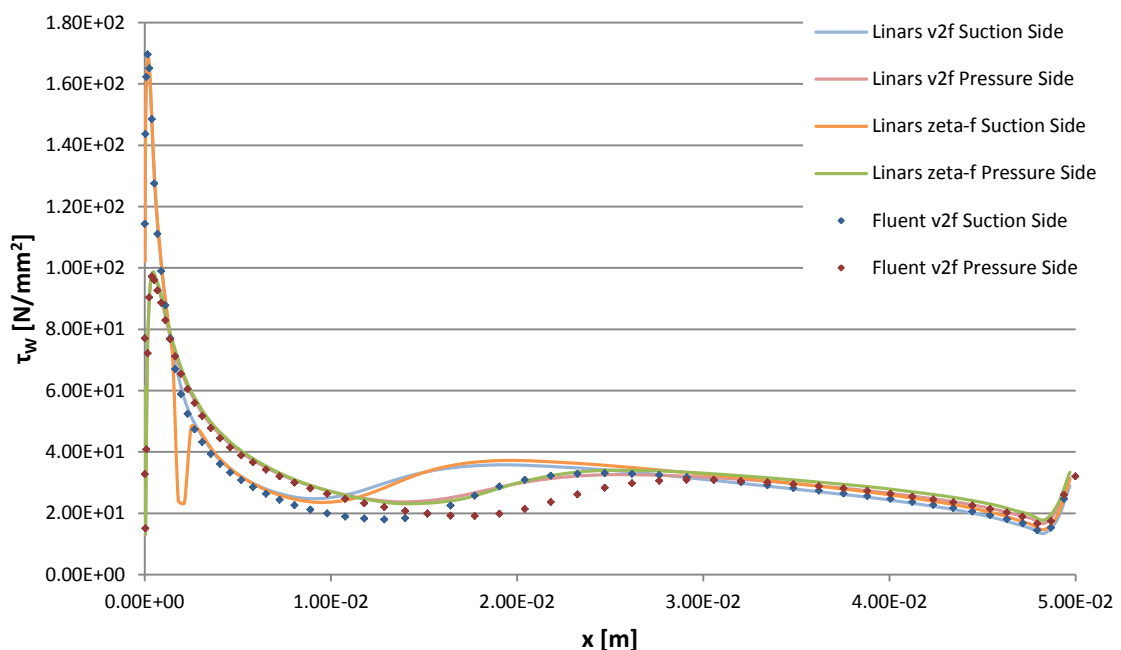


Abbildung 6.19: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 1)

Im Vergleich mit dem vorigen Testfall treten hier durch die geänderte Anströmung auf der Saugseite höhere und auf der Druckseite niedrigere Maximalwerte für y^+ auf (s. Abbildung 6.20).

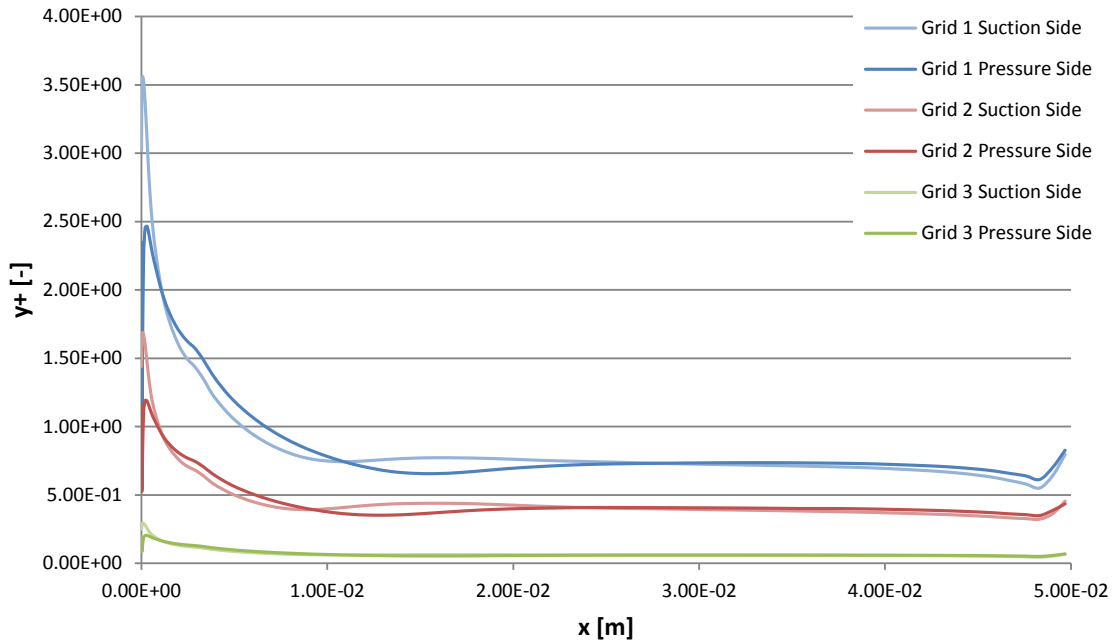


Abbildung 6.20: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 1, 2 und 3)

In Abbildung 6.21 ist zu erkennen, dass bei Einsatz des nächst feineren Netzes (Grid 2), die numerische Instabilität beim ζ - f Modell nicht mehr auftritt. Der Verlauf ergibt nun eine glatte Kurve und unterscheidet sich kaum zur jenen des v^2 - f Modells.

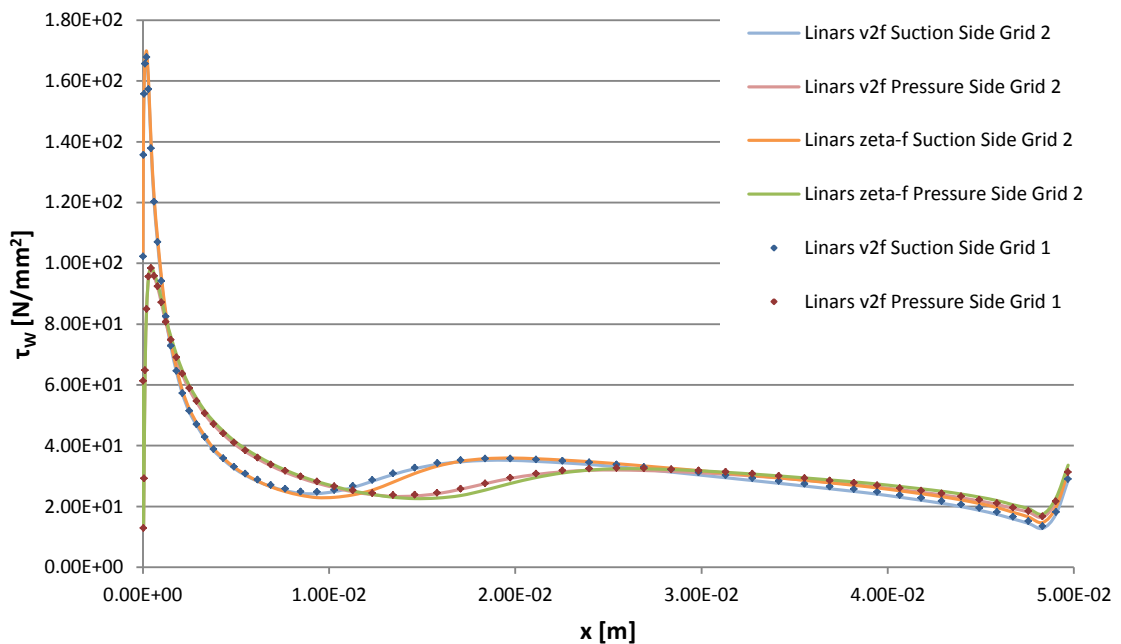


Abbildung 6.21: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 2)

Die Auswirkungen des feinsten Rechennetzes (Grid 3) auf den Wandschubspannungsverlauf sind in Abbildung 6.22 zu erkennen. Auch hier sind die Ergebnisse des v^2 - f Modells nicht abhängig von der Wahl des Rechennetzes. Der v^2 - f Verlauf, der mit Grid 1 errechnet wurde, ist identisch mit jenem, der mit Grid 3 zustande kommt.

Beim ζ - f Modell verschieben sich ausgehend von der v^2 - f Lösung beide Transitionsbereiche der Saug- und Druckseite nach hinten. Der Transitionsbeginn der Druckseite verschiebt sich bis ans Profilende und eine der laminaren Lösung ähnliche Kurve entsteht, bevor die Berechnung divergiert. Das Ergebnis kommt mit einer unteren Begrenzung des ζ Wertes von $10e-6$ zustande. Bei einer unteren Begrenzung von $10e-10$ kann die gleiche ζ - f Lösung wie mit Grid 2 gefunden werden.

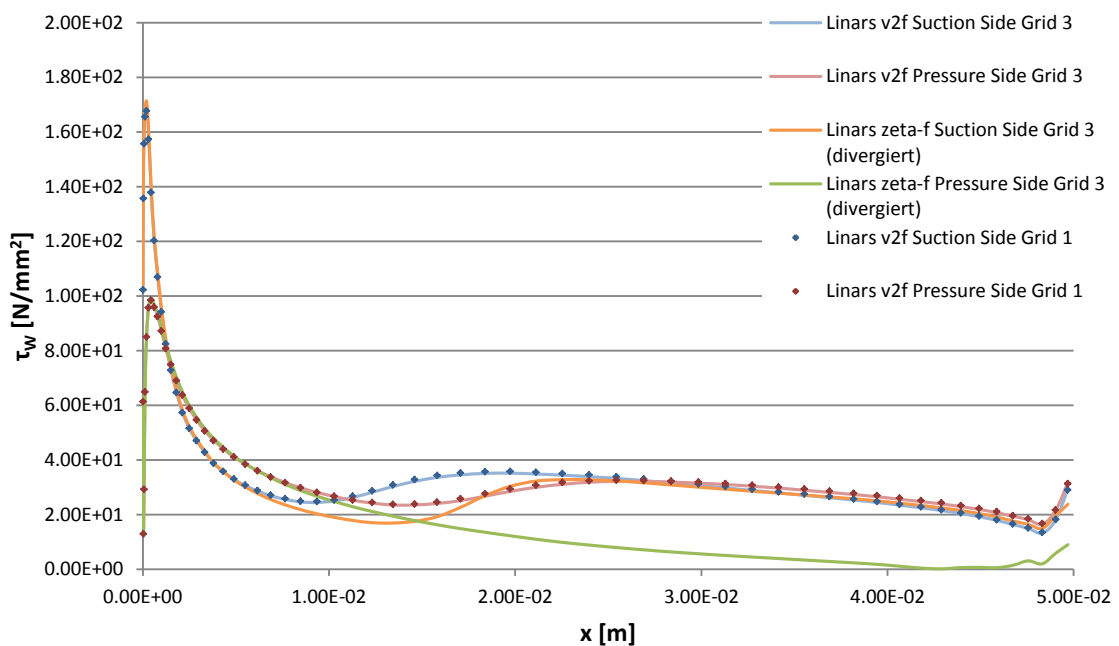


Abbildung 6.22: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 3)

6.2.2 Mach 0.6

Alle in diesem Unterkapitel beschriebenen Testfälle ergeben für das ζ - f Modell nur in Kombination mit Grid 3 keine Instabilitäten im laminaren Bereich, weshalb nur die mit Grid 3 berechneten ζ - f Ergebnisse dargestellt werden. Die

Randbedingungen für die Testfälle mit Mach 0.6 sind in Tabelle 5 zusammen gefasst.

Tabelle 5: Randbedingungen für Stator (Mach 0.6)

Eintritt		
p_{tot}	121605.9	Pa
T_{tot}	300	K
Tu	3	%
L	0.0005	m
μ	$1.876 \cdot 10^{-5}$	Ns/m ²
Austritt		
p_{stat}	93950	Pa

Mach 0.6, Incidence 0

Für diesen Testfall liegt die im Rechengebiet maximal auftretende Strömungsgeschwindigkeit von Mach 0.87 noch deutlich unter dem transsonischen Bereich. Die Geschwindigkeitsverteilung ist der Abbildung 6.23 zu entnehmen. Um eine bessere Vergleichbarkeit der verschiedenen Testfälle zu gewährleisten, wurde die gleiche Farbenskala wie für den Testfall Mach 0.6, Incidence 12 verwendet.

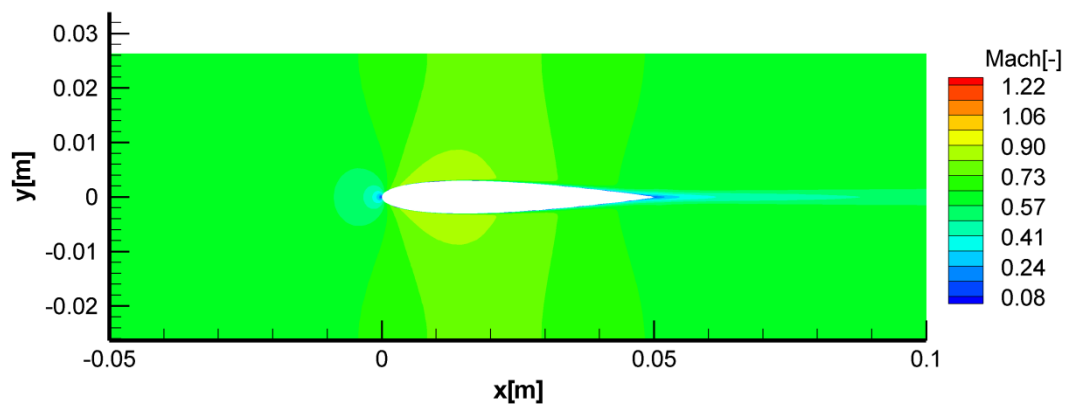


Abbildung 6.23: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 0)

In Abbildung 6.24 ist der Wandschubspannungsverlauf des v^2 - f Modells für Linars und Fluent für das Grid 1 dargestellt. Fluent sagt einen etwas später einsetzenden Transitionsbeginn als Linars voraus. Das Niveau des mit Fluent berechneten Wandschubspannungsverlaufs stimmt im laminaren Bereich mit dem von Linars überein, fällt aber zu Transitionsbeginn leicht ab und nähert sich zum Schaufelende hin wieder an. Die Wandschubspannungen sind deutlich höher, der Transitionsbeginn ist etwas früher als bei Testfall Mach 0.3, Incidence 0.

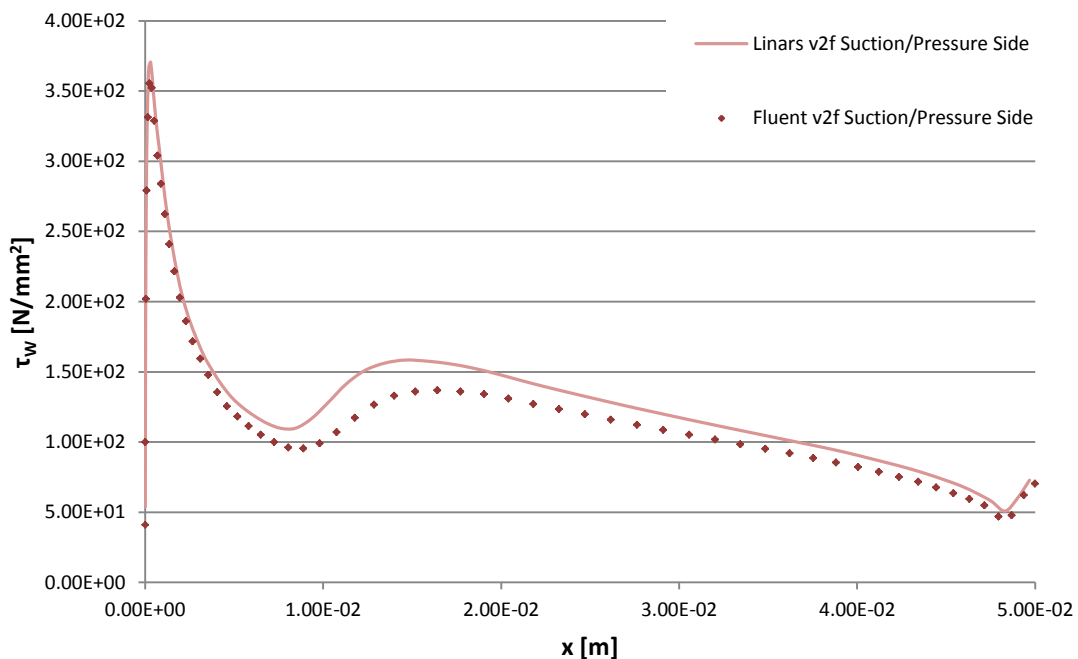


Abbildung 6.24: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 1)

Der Wandschubspannungsverlauf der Linars Modelle in Kombination mit dem Grid 3 ist in Abbildung 6.25 zu sehen. Beim ζ - f Modell beginnt die Transition etwas später als beim v^2 - f Modell, das Transitionsende ist bei beiden Modellen gleich. Im turbulenten Bereich liegt die Kurve des ζ - f Modells geringfügig über der des v^2 - f Modells. Wiederum ist keine Netzabhängigkeit beim v^2 - f Modell festzustellen.

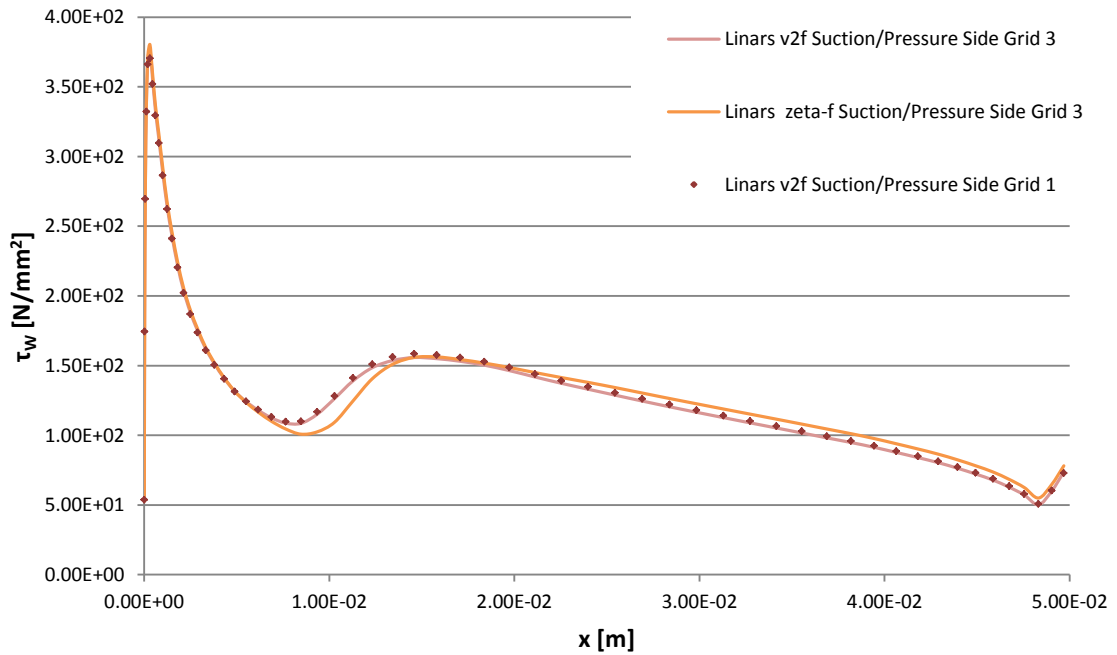


Abbildung 6.25: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 3)

In Abbildung 6.26 ist der y^+ Verlauf für das Grid 1 und Grid 3 zu sehen. Die Werte auf der Saugseite bewegen sich für das Grid 1 zwischen 1.08 und 5.45, für das Grid 3 zwischen 0.09 und 0.45. Obwohl der y^+ Verlauf des Grid 1 über der für Low-Reynolds-Modelle empfohlenen Obergrenze von 1 liegt, hat das keine Auswirkungen, da der v^2 - f Verlauf für alle drei Netze gleich ist. Für die anderen Testfälle mit Mach 0.6 wird dieser Verlauf aufgrund der gleichen Größenordnung nicht mehr gezeigt.

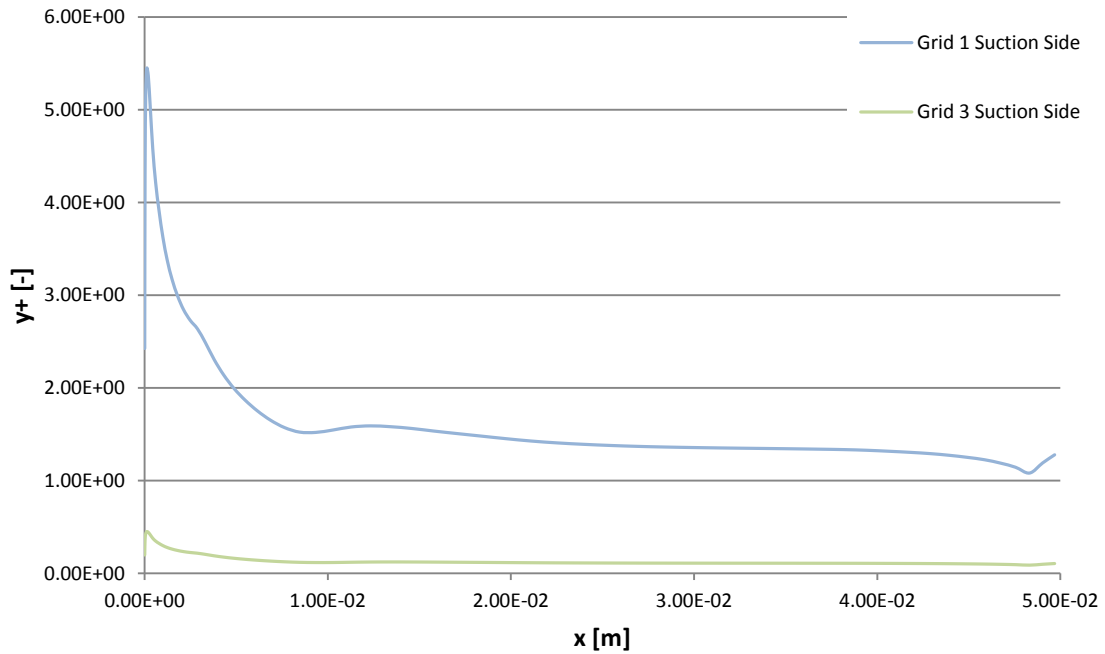


Abbildung 6.26: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 1 und 3)

Mach 0.6 Incidence 4

Die Machzahlverteilung für diesen Testfall ist in Abbildung 6.27 dargestellt. Aufgrund der geänderten Anströmrichtung ist die maximal auftretende Geschwindigkeit von Mach 0.94 etwas höher als beim Testfall Mach 0.6, Incidence 0, liegt aber immer noch im subsonischen Bereich.

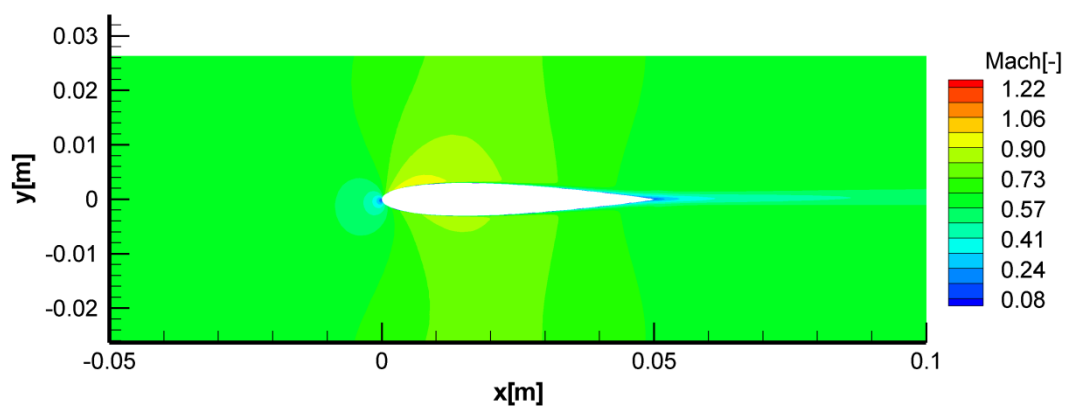


Abbildung 6.27: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 4)

In Abbildung 6.28 ist der Wandschubspannungsverlauf des ν^2 - f Modells für Linars und Fluent für das Grid 1 zu sehen. Der laminare Bereich wird von beiden Codes gleich wiedergegeben. Der Transitionseinsatz erfolgt bei Fluent etwas später und der Wandschubspannungsverlauf liegt im turbulenten Bereich um Nuancen niedriger als bei Linars.

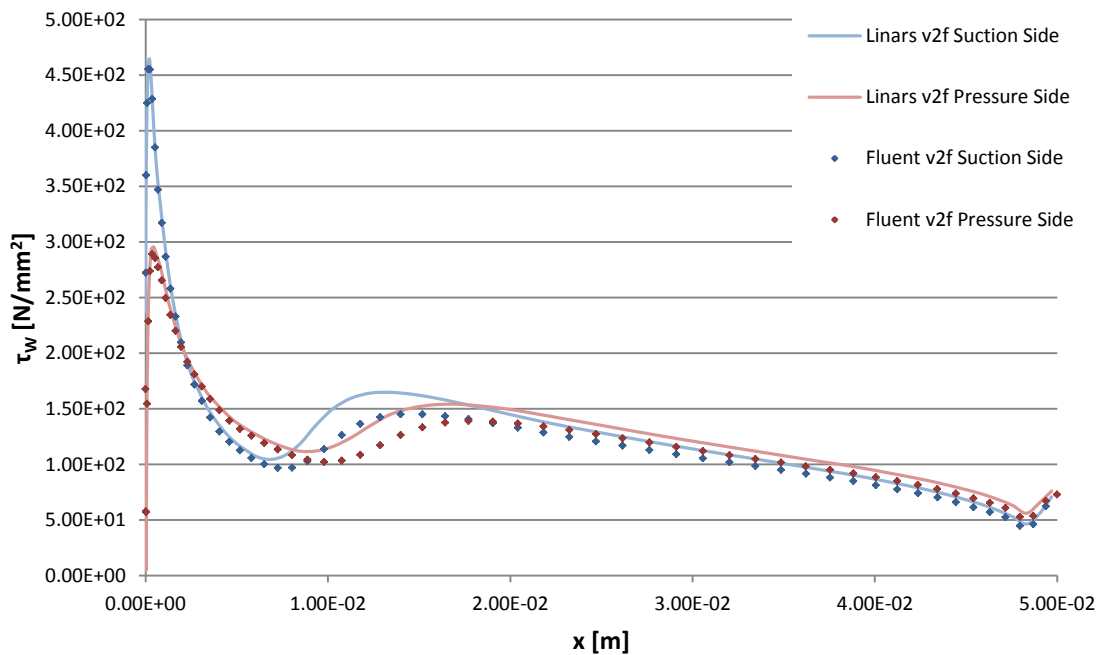


Abbildung 6.28: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 4, Grid 1)

Die beiden Linars Modelle ergaben für das Grid 3 den in Abbildung 6.29 dargestellten Wandschubspannungsverlauf. Die Ergebnisse sind bis auf den Transitionsbereich der Saugseite nahezu gleich. Das ζ - f Modell prognostiziert einen etwas späteren Transitionsbeginn, daher ergibt sich bei gleichem Transitionsende eine etwas steilere Kurve im Übergangsbereich. Das ν^2 - f Modell errechnet mit Grid 1 den gleichen Verlauf wie mit Grid 3.

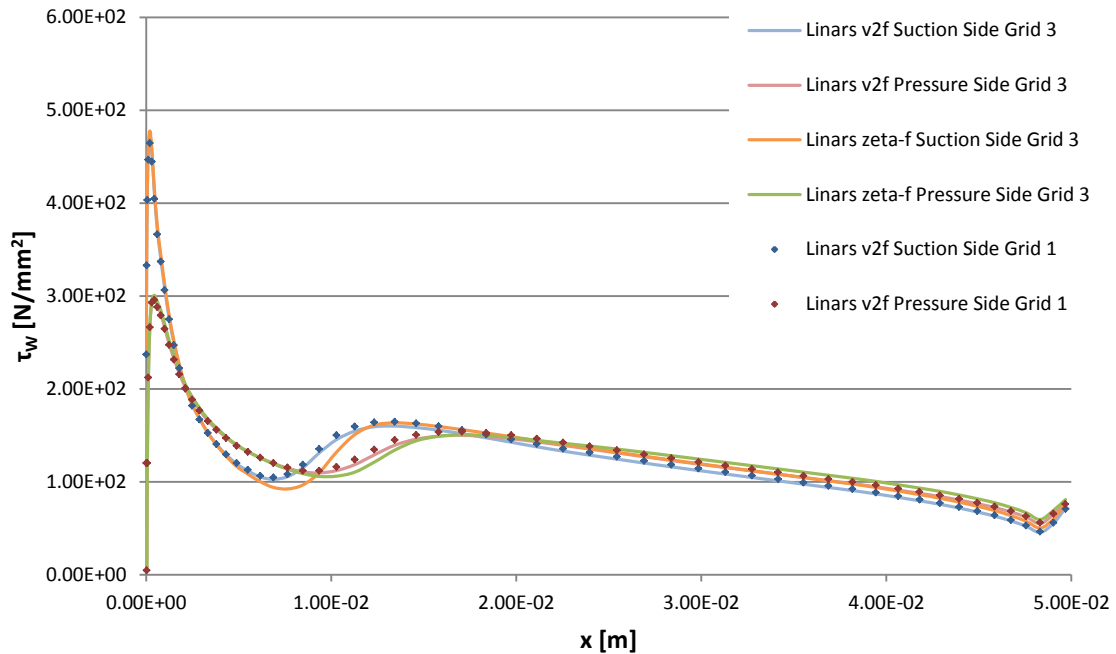


Abbildung 6.29: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 4, Grid 3)

Mach 0.6 Incidence 12

Die Machzahlverteilung ist in Abbildung 6.30 dargestellt. Durch den großen Anströmwinkel von 12° ergibt sich im vorderen Bereich der Saugseite eine sehr hohe Geschwindigkeit. Die Maximalgeschwindigkeit von Mach 1.3 liegt deutlich im Überschallbereich und es erfolgt ein Verdichtungsstoß. Solche ungünstigen Anströmwinkel können eine Ablösung der Grenzschicht hervorrufen. Mit diesem Testfall soll untersucht werden, ob die einzelnen Turbulenzmodelle eine Ablösung anzeigen.

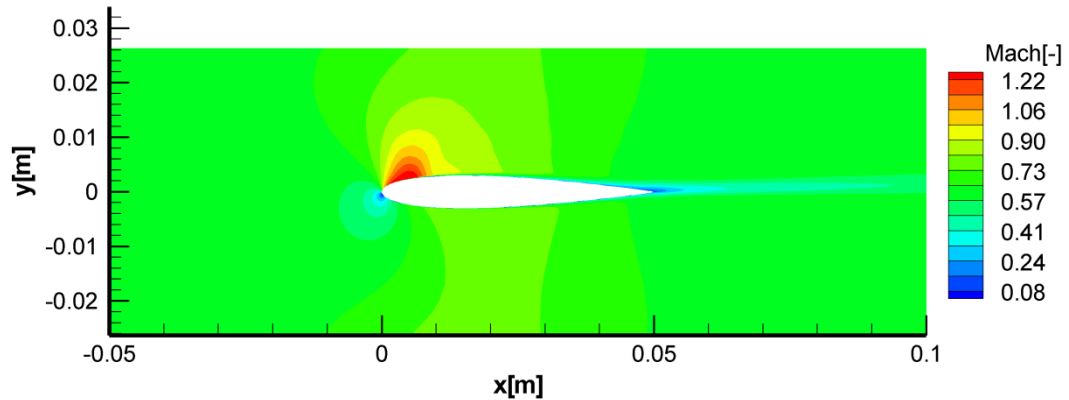


Abbildung 6.30: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 12)

In Abbildung 6.31 ist der mit dem v^2 - f Modell berechnete Wandschubspannungsverlauf für Linars und Fluent für das Grid 1 dargestellt. Im Bereich des Verdichtungsstoßes fallen die Wandschubspannungen bei beiden Modellen sehr stark ab. Linars zeigt sogar eine geringe Ablösung der Strömung durch negative Wandschubspannungen an. Nach dem Spannungsminimum ist der Gradient bei Fluent niedriger und ein etwas geringerer Anstieg der Wandschubspannung im Vergleich zu Linars entsteht. Ansonsten sind beide Verläufe nahezu identisch.

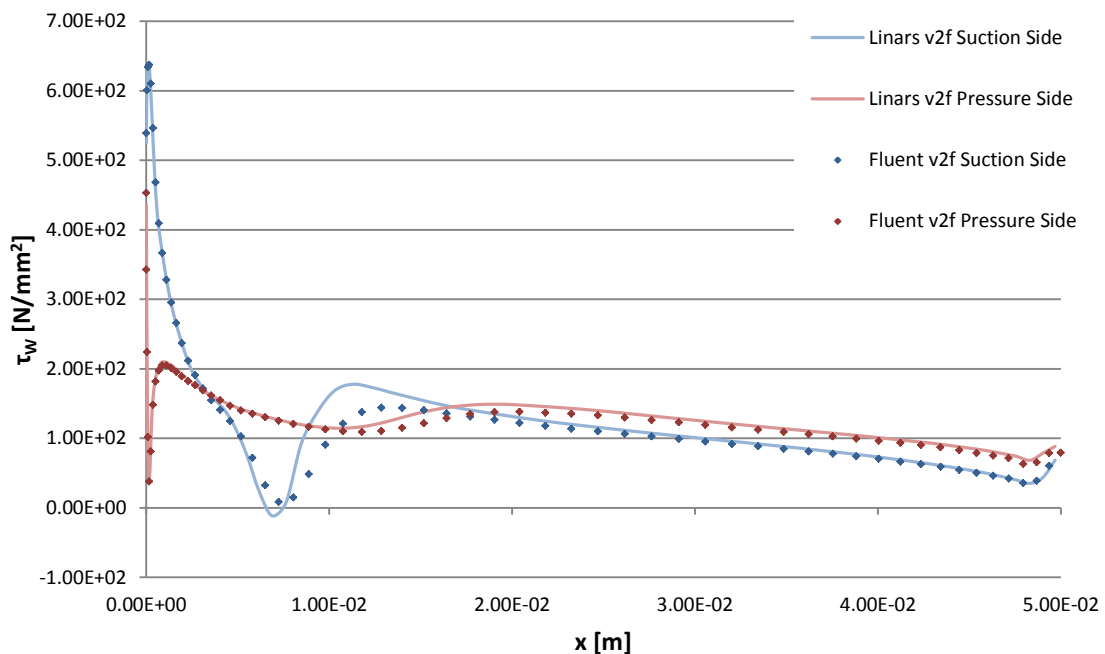


Abbildung 6.31: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 12, Grid 1)

Die Wandschubspannungsverläufe des ζ - f und v^2 - f Modells für das Grid 3 (Abbildung 6.32) stimmen qualitativ überein, wobei beim ersteren eine stärkere Ablösung der Grenzschicht angezeigt wird. Das v^2 - f Modell liefert mit dem Grid 1 das gleiche Ergebnis wie mit dem Grid 3.

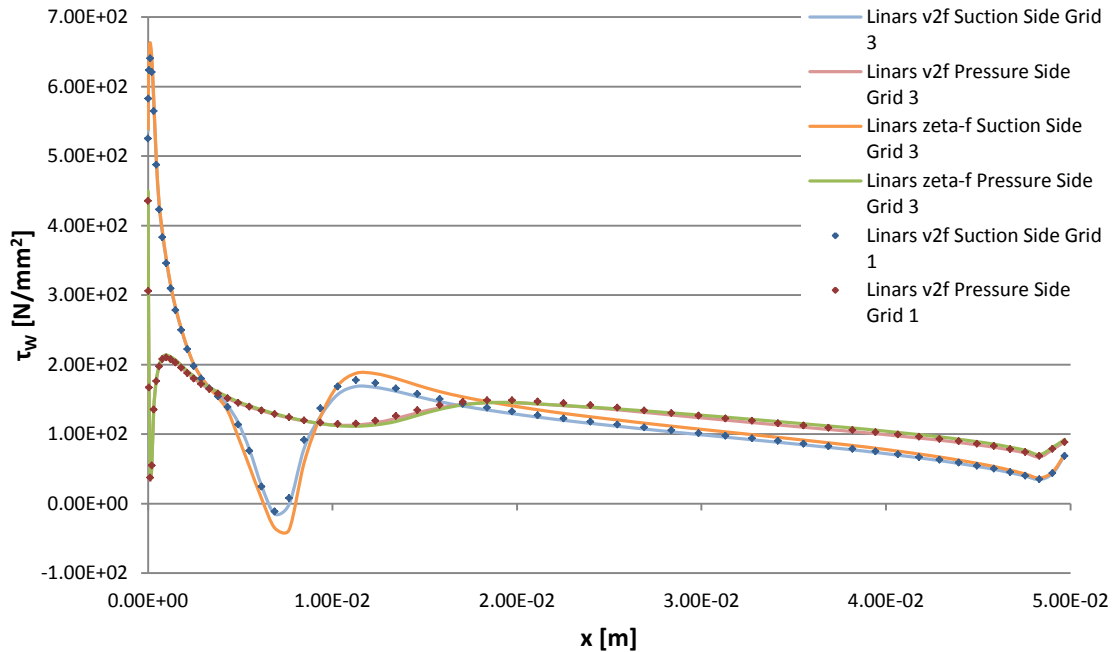


Abbildung 6.32: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 12, Grid 3)

6.2.3 Mach 0.8

Alle in diesem Unterkapitel folgenden Testfälle ergeben für das ζ - f Modell nur in Kombination mit Grid 3 stabile Lösungen im laminaren Bereich, weshalb nur die mit Grid 3 berechneten ζ - f Ergebnisse dargestellt werden. Die Randbedingungen für den Testfall sind in Tabelle 6 aufgelistet.

Tabelle 6: Randbedingungen für Stator (Mach 0.8)

Eintritt		
p_{tot}	143211.7	Pa
T_{tot}	300	K
Tu	3	%
L	0.0005	m
μ	$1.876 \cdot 10^{-5}$	Ns/m ²
Austritt		
p_{stat}	93950	Pa

Mach 0.8, Incidence 0

Der Druckunterschied zwischen Eintritt und Austritt ist so hoch gewählt, dass die Strömung zwischen den Statorschaufeln Überschallgeschwindigkeit erreicht und am Ende der Schaufel ein Verdichtungsstoß auftritt (s. Abbildung 6.33).

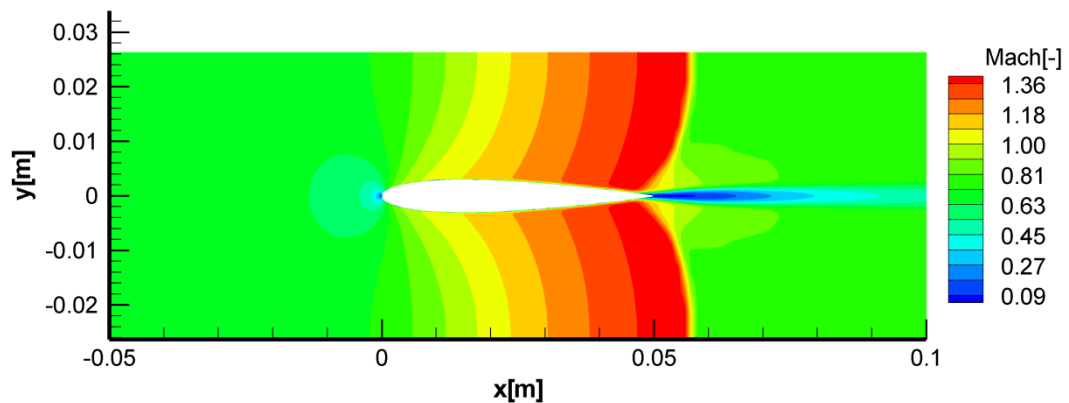


Abbildung 6.33: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.8, Incidence 0)

In Abbildung 6.34 ist der Wandschubspannungsverlauf der beiden Codes für das v^2 - f Modell für Grid 1 zu sehen. Ab Transitionsbeginn stromabwärts stellen sich bei Fluent etwas niedrigere Spannungen als bei Linars ein. Im turbulenten Bereich zeigen beide Modelle einen nahezu konstanten Verlauf an. Die

Spannungen fallen in der Zone des Verdichtungsstoßes schlagartig ab und Linars prognostiziert sogar eine Strömungsablösung.

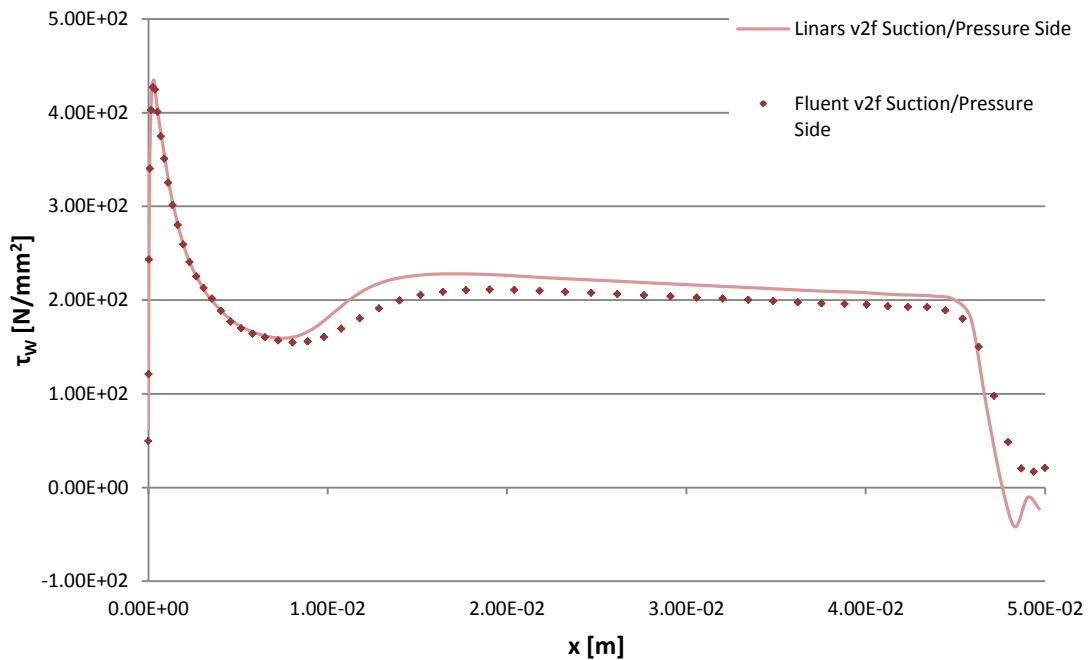


Abbildung 6.34: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 1)

Die Wandschubspannungsverläufe der Linars Modelle für das Grid 3 sind in Abbildung 6.35 dargestellt. Als einziger Unterschied kann die etwas später einsetzende Transition beim ζ - f Modell im Vergleich zum v^2 - f Modell genannt werden. Diesmal kann beim v^2 - f Modell eine geringfügige Netzabhängigkeit im Transitionsbereich und eine etwas stärkere am Schaufelende im Bereich des stark instationären Verdichtungsstoßes beobachtet werden.

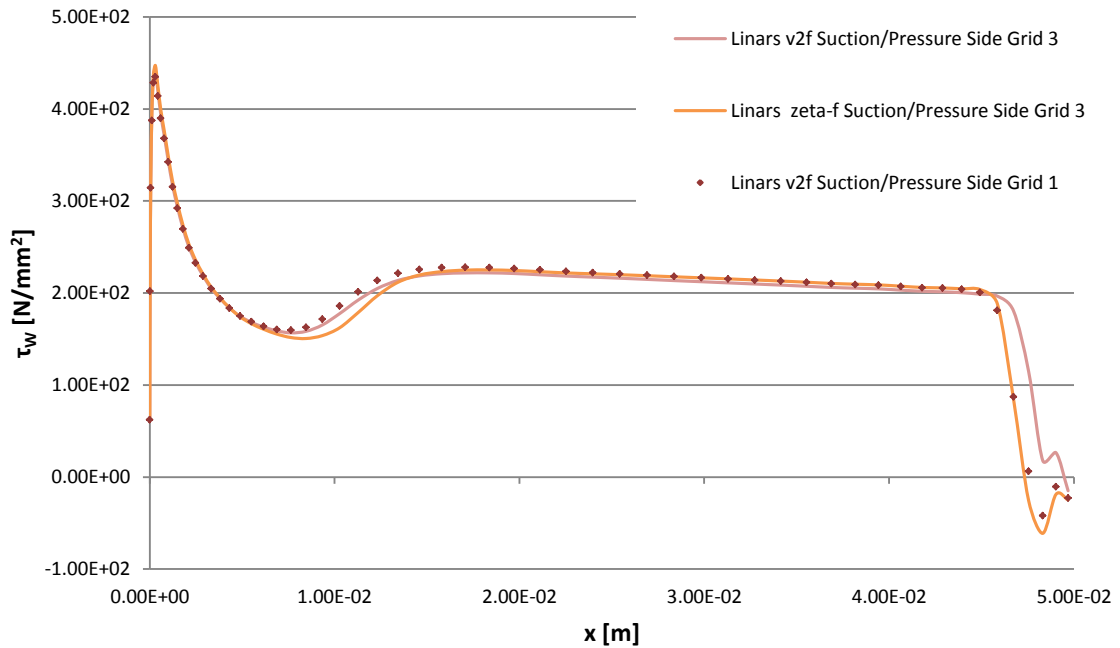


Abbildung 6.35: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 3)

In Abbildung 6.36 ist der y^+ Verlauf für Grid 1 und Grid 3 zu sehen. Die Werte auf der Saugseite bewegen sich für das Grid 1 zwischen 0.28 und 6.37, für das Grid 3 zwischen 0.04 und 0.53. Der y^+ Verlauf des Grid1 liegt im laminaren Bereich deutlich über der für Low-Reynolds-Modelle empfohlenen Obergrenze von 1, dennoch hat das keine Auswirkungen auf das Ergebnis. Der v^2-f Verlauf bis zum Verdichtungsstoß bestätigt dies, da er für alle drei Netze gleich ist. Da dieser Verlauf hinsichtlich der Größenordnung auch für den Testfall Mach 0.8, Incidence 4 repräsentativ ist, wird nur dieser angegeben.

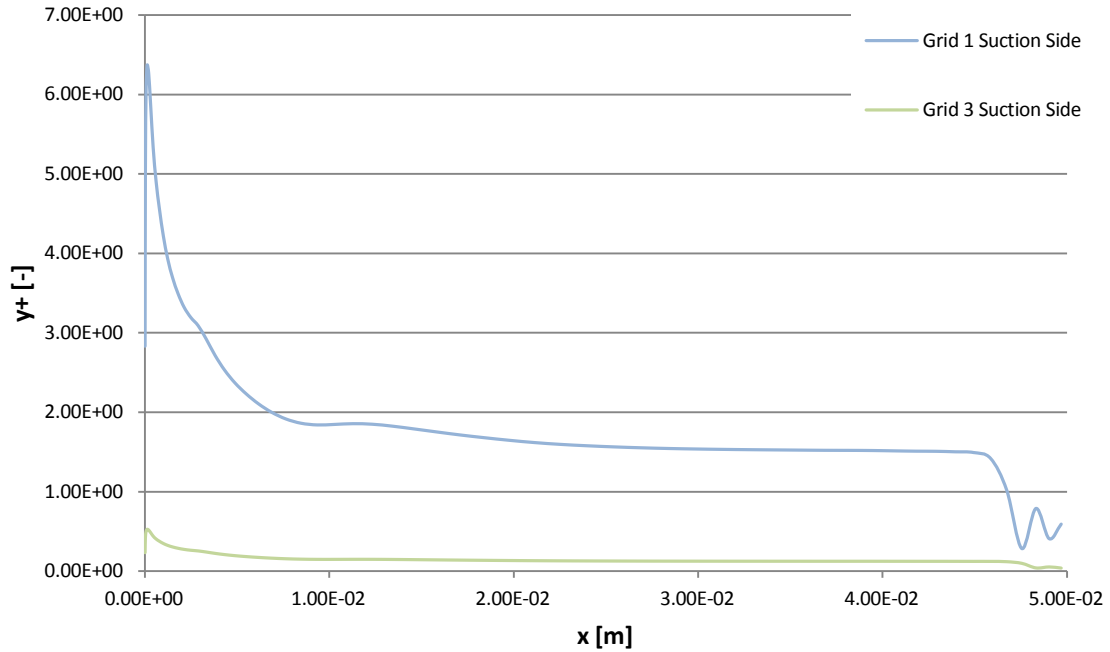


Abbildung 6.36: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 1 und 3)

Mach 0.8, Incidence 4

Im Vergleich zum vorigen Testfall treten durch den geänderten Anströmwinkel Asymmetrien in der Geschwindigkeitsverteilung auf, welche aber ab Profilmitte verschwinden (s. Abbildung 6.37).

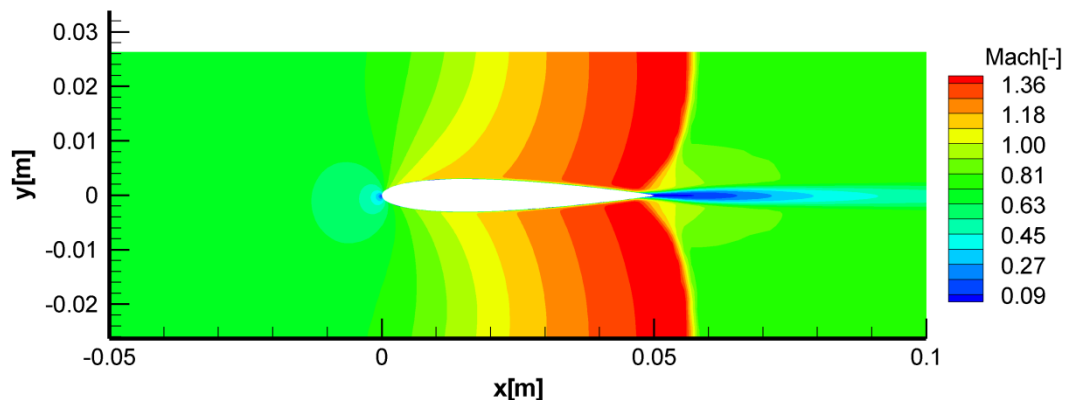


Abbildung 6.37: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.8, Incidence 4)

In Abbildung 6.38 ist der mit dem v^2-f Modell berechnete Wandschubspannungsverlauf für Linars und Fluent für das Grid 1 dargestellt.

Im hinteren Bereich nach dem Verdichtungsstoß treten große turbulente Störungen auf, die mit der stationären Rechnung nicht immer adäquat zu erfassen sind. Darin liegt der große Unterschied zwischen der Fluent- und Linars-Lösung begründet. Linars zeigt sogar eine Strömungsablösung am Profilende an. Die Transition wird durch Linars etwas früher vorhergesagt.

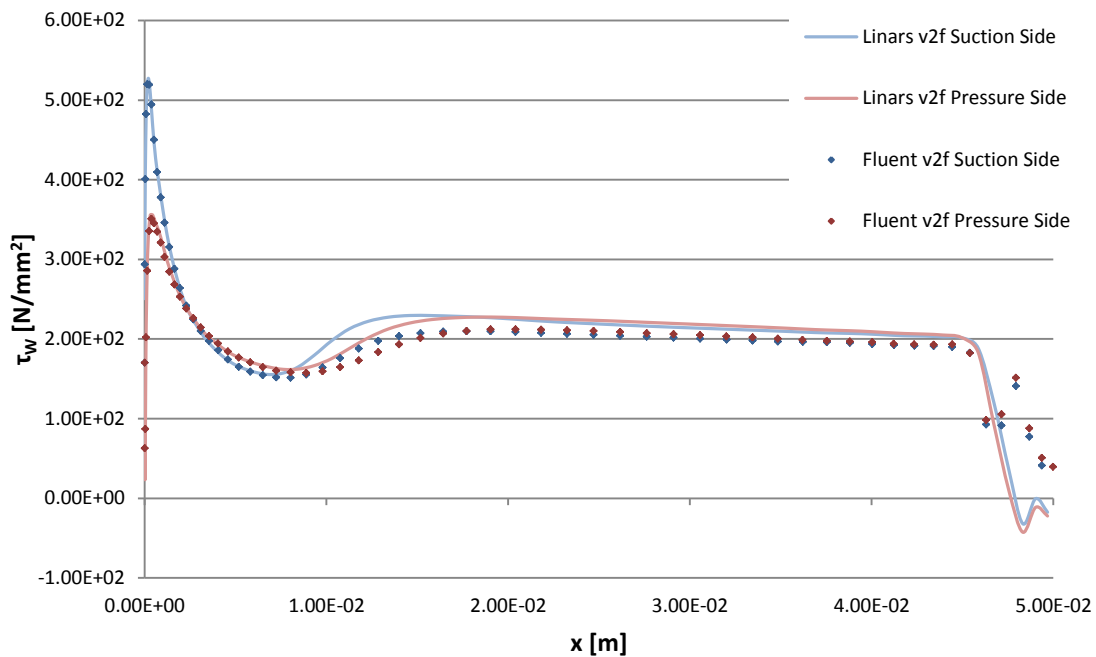


Abbildung 6.38: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 4, Grid 1)

Der Wandschubspannungsverlauf der Linars-Modelle für das Grid 3 ist in Abbildung 6.39 dargestellt. Auch das ζ - f Modell sagt nach dem Verdichtungsstoß eine Ablösung voraus. Die v^2 - f Lösung für das Grid 3 deckt sich nahezu mit der für das Grid 1. Es ist also nur eine sehr geringe Netzabhängigkeit auszumachen.

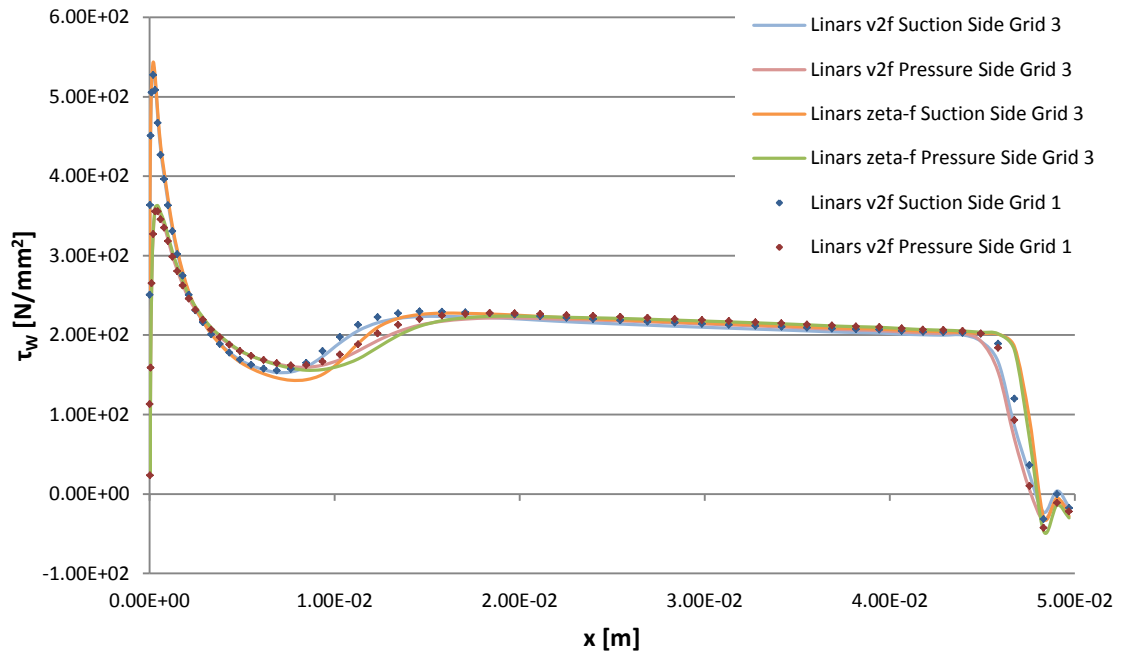


Abbildung 6.39: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 4, Grid 3)

6.3 Hochdruckstator

Bei diesem Validierungsbeispiel handelt es sich um einen Hochdruckstator eines Strahltriebwerkes. Der Stator besteht aus 24 Schaufeln. Unter Ausnützung der Umfangsperiodizität wird nur ein Sektor mit einer Schaufel gerechnet. Das in Abbildung 6.40 dargestellte Rechennetz besteht aus fünf Blöcken, die insgesamt 896512 Zellen beinhalten. Die Randbedingungen sind in Tabelle 7 zusammengefasst. Die turbulenten Randbedingungen wurden wieder angenommen.

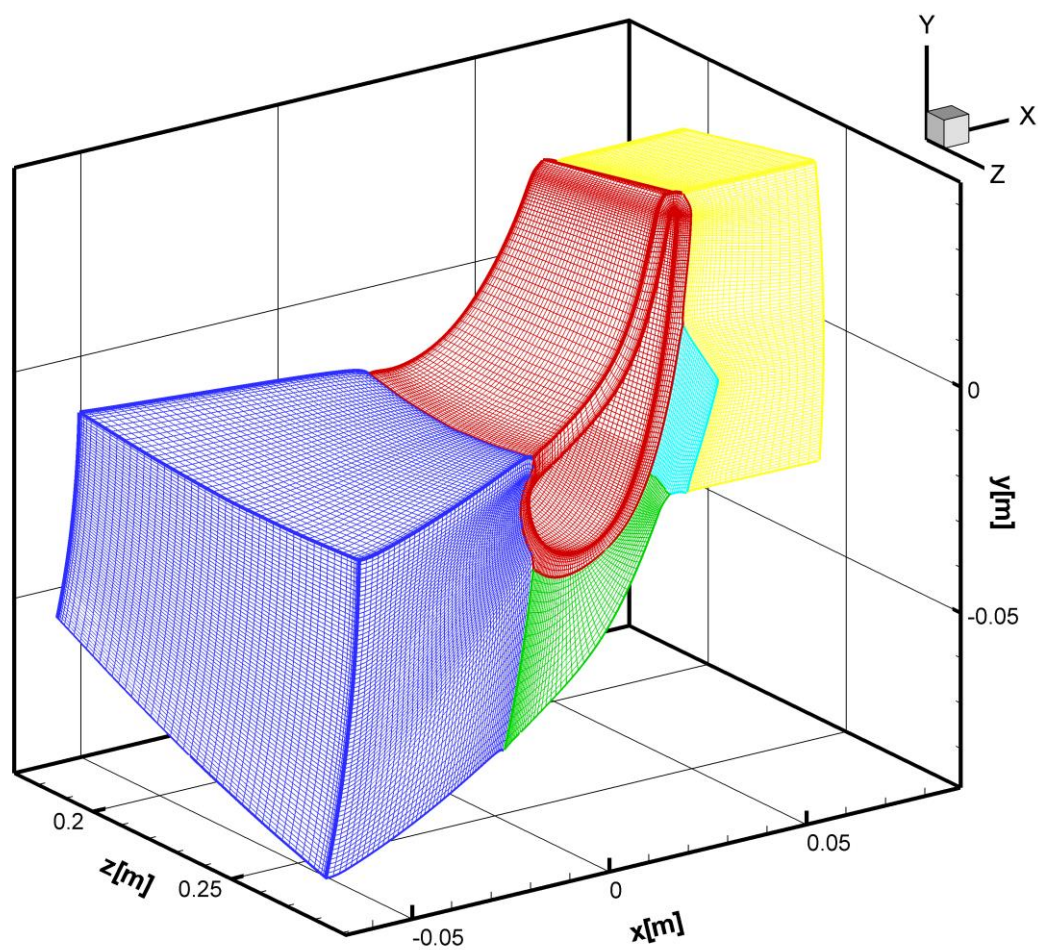


Abbildung 6.40: Rechenetz des Hochdruckstators

Tabelle 7: Randbedingungen für Hochdruckstator

Eintritt		
p_{tot}	400800	Pa
T_{tot}	442	K
Tu	5	%
L	0.0005	m
μ	$1.876 \cdot 10^{-5}$	Ns/m^2
Austritt		
Radiales Gleichgewicht		
$p_{stat} = 2 \cdot 10^5$ Pa bei $r = 0.235$ m		

Bei diesem Hochdruckstator stellt sich ein sehr hohes Druckgefälle zwischen Ein- und Austritt ein. Das v^2-f Modell von Linars wurde mit einer konvergenten Menter-SST $k-\omega$ Lösung initialisiert und divergierte bereits nach wenigen Rechenschritten. Das $\zeta-f$ Modell zeigte das gleiche Verhalten. Verschiedene Initialisierungsvarianten wurden für beide Modelle durchgeführt, aber keine führte zu einem Erfolg. Eine Möglichkeit, die Stabilität der beiden Modelle zu erhöhen, liegt in der Wahl geeigneter Limiter für die primitiven und turbulenten Variablen. Aus zeitlichen Gründen konnte dies aber nicht mehr durchgeführt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Zwei Turbulenzmodelle, das v^2 - f Modell von Lien & Durbin (1996) und das verwandte ζ - f Modell nach Hanjalić et al. (2004), wurden in den CFD-Code Linars implementiert und anschließend anhand der stationären Strömungsberechnung mehrerer Testfälle evaluiert. Für die Bewertung der implementierten Modelle wurden Vergleichsrechnungen mit dem v^2 - f Modell des kommerziellen CFD-Programms ANSYS Fluent 14 durchgeführt. Zusätzlich standen für die ebene Platte Messdaten von der wissenschaftlichen Vereinigung ERCOFTAC zur Verfügung.

Für die verschiedenen Testfälle wurde der Verlauf des Wandreibungskoeffizienten bzw. der Wandschubspannungen bestimmt, der als Basis für die Vergleiche diente. Die im Folgenden verwendete Bezeichnung v^2 - f Modell bezieht sich auf das in Linars implementierte Modell (Lien & Durbin 1996) und die Bezeichnung Fluent bezieht sich auf das in Fluent implementierte v^2 - f Modell.

Strömung entlang einer ebenen Platte ohne Druckgradienten: Der Testfall T3A ist durch einen Freistromturbulenzgrad von 3% auf Höhe der Plattenvorderkante gekennzeichnet. Das ζ - f Modell konnte die Transitionslage am besten vorhersagen, jedoch benötigte es doppelt so viele Rechenschritte wie das v^2 - f Modell. Durch Aktivieren der Transitionskorrektur konnte das Ergebnis der beiden Modelle verbessert werden, wobei der Wandreibungskoeffizient-Verlauf des ζ - f Modells fast mit jenem der Messung übereinstimmte. Die Lösung von Fluent oszillierte im Bereich der laminaren Grenzschichtströmung und konnte deswegen nicht als Vergleich herangezogen werden.

Strömung entlang einer ebenen Platte mit Druckgradienten: Der Testfall TC1 ist durch einen höheren Freistromturbulenzgrad von 7.7% gekennzeichnet. Das ζ - f und v^2 - f Modell zeigten ziemlich das gleiche Ergebnis an. Die Transitionskorrektur führte zu keiner besseren Voraussage der Transitionslage. Der berechnete Wandreibungskoeffizient-Verlauf weist größere Abweichungen im Vergleich zur Messung auf. Es gibt Bereiche, in denen der

Wandreibungskoeffizient entweder unter- oder überschätzt wird. Für diesen Testfall wurden keine Berechnungen mit Fluent durchgeführt.

Stator: Der 2d-Stator wurde mit unterschiedlichen Zuströmwinkeln und Geschwindigkeiten gerechnet. Das gröbere Ausgangsnetz (Grid1) führte beim ζ - f Modell zu Problemen, der Verlauf der Wandschubspannungen weist im laminaren Bereich ein unnatürliches Verhalten auf. Es wird vermutet, dass dieses Phänomen auf die numerische Instabilität aufgrund der Wand-Randbedingung für die Relaxationsfunktion zurückzuführen ist. Durch die Verwendung zwei weiterer Rechenetze gelang es, für alle Testfälle ein vernünftiges Ergebnis zu erreichen. Das v^2 - f Modell lieferte immer plausible Resultate, die unabhängig vom verwendeten Netz sind. Beide Modelle konnten beim Testfall Mach 0.6, Incidence 12 infolge des großen Zuströmwinkels eine Ablösung der Grenzschicht auf der Saugseite anzeigen. Beim Testfall Mach 0.8, Incidence 0 tritt am Profilende ein Verdichtungsstoß auf, der bei beiden Modellen ebenfalls zur einer Ablösung führte. Im Allgemeinen lieferten das ζ - f und v^2 - f Modell sehr ähnliche Resultate. Die Berechnungen mittels Fluent wurden für sämtliche Testfälle mit Grid 1 ausgeführt. Im Vergleich zu den Linars-Modellen zeigte die Tendenz eine später einsetzende Transition und eine etwas niedrigere Wandschubspannung im turbulenten Bereich der Grenzschicht.

Hochdruckstator: Der 3d-Hochdruckstator eines Strahltriebwerkes ist durch ein hohes Druckverhältnis zwischen Ein- und Austritt gekennzeichnet. Beide Turbulenzmodelle wurden mit einer konvergenten k - ω Lösung initialisiert und divergierten bereits nach wenigen Rechenschritten. Auch andere Initialisierungsversuche blieben erfolglos. Mit Fluent wurden keine Berechnungen angestellt, da keine Ergebnisse mit den Linars-Modellen zustande kamen.

Im Weiteren könnte untersucht werden, ob durch Variation der Limiter für die primären und turbulenten Variablen eine erfolgreiche Berechnung des Hochdruckstators möglich ist. Am Beispiel des 2d-Stators ist ersichtlich, dass die Ergebnisse des ζ - f Modells sehr stark vom Rechenetz abhängig sind. Bei in Wandnähe feineren Netzen lieferte das ζ - f Modell plausible Ergebnisse. Die

feineren Netze haben zwei Effekte, zum ersten wird der Wandabstand zu den der Wand angrenzenden Rechenzellen kleiner und zum zweiten werden die Wandabstände gleichmäßiger. Eine weitere Untersuchung könnte beide Effekte isoliert betrachten, um deren Auswirkungen auf das ζ - f Modell aufzuzeigen.

Literaturverzeichnis

Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. 1984: Computational fluid mechanics and heat transfer in: Minkowycz W.J., Sparrow E.M (Hrsg): series in computational methods in mechanics and thermal science, Hemisphere Publishing Corporation

Brenn G., Meile W. 2008: Stömungslehre und Wärmeübertragung I, Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung, Technische Universität Graz (Veranst.)

Hanjalić K., Popovac M., Hadžiabdić M. 2004: A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD, in: International Journal of Heat and Fluid Flow, 25, Elsevier Inc.

Kalitzin G. 1999: Application of the v^2 - f model to aerospace configurations, in: Annual Research Briefs 1999, Center for Turbulence Research, NASA-Ames/Stanford University

Lien F.S., Kalitzin G., Durbin P.A. 1998: RANS modeling for compressible and transitional flows, in: Proceedings of the Summer Program 1998, Center for Turbulence Research, NASA-Ames/Stanford University, S. 267-286

Oertel H. jr. et al. 2012: Prandtl-Führer durch die Strömungslehre, Grundlagen und Phänomene, 13. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden

Sanz W. 2012: Computational Fluid Dynamics, Institut für thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik, Technische Universität Graz (Veranst.)

Unger D. 1999: Numerische Simulation des laminar-turbulent Grenzschichtumschlages unter Turbomaschinenbedingungen, Technische Universität Darmstadt (Dissertation)

Wilcox D. 2002: Turbulence Modeling for CFD, 2. Auflage, DCW Industries, Inc., Kalifornien

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Transition bei einer ebenen Platte nach White F.M. (1974)	11
Abbildung 6.1: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung der ebenen Platte..	43
Abbildung 6.2: Rechennetz der ebenen Platte (T3A)	44
Abbildung 6.3: Freistromturbulenzgrad der ebenen Platte (T3A)	46
Abbildung 6.4: Wandreibungskoeffizient der ebenen Platte (T3A)	47
Abbildung 6.5: y^+ Verlauf der ebenen Platte (T3A)	48
Abbildung 6.6: Entwicklung der ζ - f Lösung bei der ebenen Platte (T3A)	49
Abbildung 6.7: Rechennetz der ebenen Platte (TC1)	50
Abbildung 6.8: Freistromturbulenzgrad der ebenen Platte (TC1)	51
Abbildung 6.9: Druckverlauf an der ebenen Platte (TC1)	52
Abbildung 6.10: Wandreibungskoeffizient der ebenen Platte (TC1)	53
Abbildung 6.11: Rechennetz des Stators	54
Abbildung 6.12: Wandabstände der verschiedenen Rechennetze (Stator)	55
Abbildung 6.13: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.3, Incidence 0)	57
Abbildung 6.14: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 1)	58
Abbildung 6.15: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 2)	59
Abbildung 6.16: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 3)	60
Abbildung 6.17: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 0, Grid 1, 2 und 3)	61

Abbildung 6.18: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.3, Incidence 4)	61
Abbildung 6.19: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 1)	62
Abbildung 6.20: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 1, 2 und 3)	63
Abbildung 6.21: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 2)	63
Abbildung 6.22: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.3, Incidence 4, Grid 3)	64
Abbildung 6.23: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 0)	65
Abbildung 6.24: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 1)	66
Abbildung 6.25: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 3)	67
Abbildung 6.26: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 0, Grid 1 und 3)	68
Abbildung 6.27: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 4)	68
Abbildung 6.28: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 4, Grid 1)	69
Abbildung 6.29: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 4, Grid 3)	70
Abbildung 6.30: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.6, Incidence 12)	71
Abbildung 6.31: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 12, Grid 1)	71
Abbildung 6.32: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.6, Incidence 12, Grid 3)	72

Abbildung 6.33: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.8, Incidence 0)	73
Abbildung 6.34: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 1)	74
Abbildung 6.35: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 3)	75
Abbildung 6.36: y^+ Verlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 0, Grid 1 und 3)	76
Abbildung 6.37: Machzahlverteilung des Stators (Mach 0.8, Incidence 4)	76
Abbildung 6.38: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 4, Grid 1)	77
Abbildung 6.39: Wandschubspannungsverlauf des Stators (Mach 0.8, Incidence 4, Grid 3)	78
Abbildung 6.40: Rechennetz des Hochdruckstators.....	79

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Koeffizienten des ζ - f Modells.....	38
Tabelle 2: Randbedingungen für ebene Platte (T3A)	45
Tabelle 3: Randbedingungen für ebene Platte (TC1)	51
Tabelle 4: Randbedingungen für Stator (Mach 0.3)	56
Tabelle 5: Randbedingungen für Stator (Mach 0.6)	65
Tabelle 6: Randbedingungen für Stator (Mach 0.8)	73
Tabelle 7: Randbedingungen für Hochdruckstator	79

Abkürzungsverzeichnis

CFD	Computational Fluid Dynamics
ERCOFTAC	European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
c_f	Wandreibungskoeffizient
C_{ijk}	turbulente Diffusions-Korrelation
e	spezifische innere Energie
E_t	Totalenergiedichte
f	elliptische Relaxationsfunktion
\vec{f}	Massenkraft
g	Erdbeschleunigung
h	Enthalpie
k	turbulente kinetische Energie
l	charakteristische Länge
L, L_t	Längenmaß der großen Wirbel; turbulentes Längenmaß
l_k	Kolmogorov-Länge
l_m	Prandtlische Mischungsweglänge
\vec{n}	Normalvektor
$\mathcal{N}()$	Navier-Stokes Operator
P_{ij}	Produktion der Reynoldsspannungen
P_k	Produktion der kinetischen Energie
\vec{q}	Wärmestromdichtevektor
\dot{q}_Q	innere Wärmequelle
Re	Reynoldszahl
Re_t	turbulente Reynoldszahl
S_{ij}	Scherratentensor
T	Temperatur
\mathcal{T}	turbulentes Zeitmaß
t	Zeit

Tu	Turbulenzgrad
u	charakteristische Geschwindigkeit
U_t	turbulentes Geschwindigkeitsmaß
U_∞	Geschwindigkeit der Außenströmung
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
$\overline{v'^2}$	wandnormales Geschwindigkeitsmaß
y	Wandabstand
y^+	dimensionsloser Wandabstand
δ_{ij}	Kronecker-Delta
ϵ	turbulente Dissipation
ϵ_{ij}	Dissipationstensor
ζ	wandnormales Geschwindigkeitsmaßverhältnis
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	dynamische Viskosität
μ_t	turbulente (dynamische) Viskosität
ν	kinematische Viskosität
ν_t	turbulente (kinematische) Viskosität
Π_{ij}	Druck-Scher-Korrelation
ρ	Dichte
ρ_∞	Dichte der Außenströmung
σ	Spannungstensor
τ	viskoser Spannungstensors
τ'_{ij}	Reynoldsspannungen
Φ	Dissipationsfunktion
-	Reynolds-gemittelte Größe
'	Reynolds-Fluktuationsgröße
~	Favre-gemittelte Größe
"	Favre-Fluktuationsgröße