

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
INSTITUT FÜR GEOMETRIE

Einem Dreieck umschriebene Rhomben und Kiepert- Dreiecke

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra rerum naturalium

verfasst und vorgelegt von
Lisa Widowitz

betreut von
Univ.Prof. Dr. Otto Röschel

Zeltweg, 24. April 2014

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich herzlichst bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. *Otto Röschel* bedanken. Erst durch ihn bin ich auf das Thema meiner Diplomarbeit aufmerksam geworden. Danke für die ganze Zeit, die Sie sich für mich und meine Arbeit genommen haben. Sie waren mir bei der Erstellung dieser Arbeit die größte und beste Hilfe die man sich vorstellen kann.

Mein Dank gilt natürlich auch meiner ganzen Familie und meinem Freund, die mich die ganzen Jahre meiner Studienzeit unterstützt und immer wieder aufgebaut haben.

Ebenfalls danke ich meiner Freundin und Studienkollegin *Kathrin*. Ohne sie wäre mein gesamtes Studium sicherlich anders verlaufen. In ihr habe ich die perfekte Lernpartnerin gefunden.

Weiters möchte ich auch meinem früheren Mathematiklehrer *Mag. Günter Grayer* danken, der mir bei meinem Studium immer wieder beratend zur Seite gestanden ist. Er war es auch der mich der Mathematik in meiner Schulzeit näher gebracht hat.

Abschließend bedanke ich mich bei allen Lehrenden, vor allem jenen des DG- Instituts, dafür, dass sie mir das Studieren so angenehm machten.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Zeltweg, am

.....

(Unterschrift)

Kurzfassung

Kürzlich wurden von *F. von LAMOEN* Rhomben untersucht, die einem gegebenen Dreieck ABC umschrieben sind. Den Ecken des Dreiecks werden Rhomben $R_A(2\varphi)$, $R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$ mit Ecken A, B und C zugeordnet, die in diesen den vorgegebenen Winkel 2φ besitzen. Ihre Diagonalen, welche nicht durch den festbleibenden Eckpunkt des Ausgangsdreiecks gehen, bilden überraschend die Seiten sogenannter *Kiepert- Dreiecke* zum Dreieck ABC .

Weiters bilden die den Punkten A, B und C der Rhomben gegenüberliegenden Punkte A', B' und C' ein Dreieck, welches perspektiv zum Ausgangsdreieck liegt. Das Zentrum dieser Perspektivität liegt überraschenderweise ebenfalls auf der *Kiepert- Hyperbel*. Hier wird in Ergänzung nachgewiesen, dass die Perspektivitätsachsen eine Kurve umhüllen, welche im Allgemeinen rational und von 4. Ordnung ist.

Bei der von *F. von LAMOEN* angegebenen Erzeugung der umschriebenen Rhomben des Dreiecks ABC wurde eine weitere Schar solcher umschriebener Rhomben übersehen. Sofort stellt sich die Frage, ob für diese zweite Rhombenschar analoge Resultate existieren. Daraufhin habe ich in dieser Arbeit die von *F. von LAMOEN* gefundenen Resultate für ebene Dreiecke bezüglich der zweiten Rhombenschar auf ihre Gültigkeit hin getestet. Es stellte sich heraus, dass auch diese zweite Rhombenschar dieselben Eigenschaften aufweist wie die erste.

Da überdies unlängst überraschende Resultate zu dualen *Kiepert- Konstruktionen* für sphärische Dreiecke publiziert wurden, könnten Analoga zum obigen Resultat für Rhomben auch für die sphärischen Gegenstücke gelten. Aufgrund dessen habe ich entsprechende Konstruktionen für sphärische Dreiecke und Rhomben entwickelt. Dann habe ich für die sphärische Geometrie den im ebenen Fall gültigen Zusammenhang mit *Kiepert- Dreiecken* untersucht. Es stellte sich jedoch heraus, dass die Diagonalen der sphärischen Rhomben nicht die Seiten eines *Kiepert- Dreiecks* bilden, und diese beiden Dreiecke auch nicht perspektiv zueinander liegen.

Als weiters Resultat kann man festhalten, dass ebenfalls keine Perspektivität zwischen den sphärischen Dreiecken ABC und den analog konstruierten Punkten A', B' and C' der sphärischen Rhomben vorliegt.

Abstract

Lately, *F. von LAMOEN* was studying certain rhombi circumscribed to a triangle ABC . Let the rhombus $R_A(2\varphi)$ have one corner in A where its angle is 2φ . Let the two opposite edges run through B and C , respectively. This way a one-parameter set of rhombi is defined. In the same way a set of rhombi $R_B(2\varphi)$ (or $R_C(2\varphi)$) can be defined starting with the vertex B (or C) of the triangle.

Surprisingly, in each of the three sets the rhombus diagonals that do not contain the corner of the triangle form the sides of *Kiepert-triangles* to ABC . Moreover, the points of these rhombi that are opposite to the triangle vertex form triangles perspective to the initial triangle ABC . Surprisingly, the center of perspectivity lies on the *Kiepert-hyperbola* of ABC . The respective axes of perspectivity envelope a rational curve of order 4.

The generation of such ‘circumrhombi’ of a triangle has been described by *F. von LAMOEN*. He obviously overlooked a second family of circumrhombi. This thesis tries to close this gap. The question whether that additional family shares the same intriguing properties as the initial one is also posed. Fortunately, the answer is positive.

Recently, spherical triangles and their *Kiepert-triangles* have been investigated with encouraging results. In the view of these results circumrhombi to a triangle in spherical geometry have also been examined in this thesis. The respective constructions for the spherical complement, however, unveiled a significant difference to the planar situation. It turned out that the diagonals of the spherical rhombi do not lead to *Kiepert-triangles* of the triangle ABC . They are not perspective to ABC . This is why some of the questions that had been asked in the planar case are idle for spherical triangles and their circumrhombi.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	iv
1 Einleitung	1
2 Vorbereitung	3
2.1 Baryzentrische Koordinaten	3
2.1.1 Berechnung und Eigenschaften	3
2.1.2 Umrechnungsformeln zwischen baryzentrischen und kartesischen Koordinaten	5
2.2 Perspektive Kollineation und Perspektive Dreiecke	5
2.3 Der Satz von Desargues	7
2.4 Kiepert Dreieck und Kiepert Hyperbel	8
2.4.1 Vorbereitung	8
2.4.2 Kiepert Dreieck	12
2.4.3 Kiepert Hyperbel	14
3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben	17
3.1 Ein Ergebnis von F. van LAMOEN	17
3.2 Die Perspektivitätsachse der Dreiecke ABC und $A'B'C'$	37
3.3 Die Hüllkurve der Perspektivitätsachse	43
4 Die sphärische Darstellung des Problems	46
Literaturverzeichnis	52

1 Einleitung

Der holländische Mathematiker *Floor van Lamoen* veröffentlichte im Jahr 2003 auf dem öffentlichen *Forum Geometricorum* einen Artikel zu Rhomben, die einem allgemeinen Dreieck ABC umschrieben werden (Siehe [3]). Da ich mich in der ganzen Arbeit mit den euklidischen Eigenschaften von Dreiecken beschäftige, habe ich in Kapitel 1 Begriffe wie *baryzentrische Koordinaten*, *perspektive Dreiecke* und *Kiepert- Dreieck*, *-Hyperbel*, *- Parabel* erklärt.

In Kapitel 3.1 gehe ich dann näher auf die Ergebnisse aus der Arbeit von *F. v. Lamoen* ein. Dieser erklärt zu Beginn seiner Arbeit genau, wie solche umschriebenen Rhomben entstehen und weshalb diese eindeutig sein sollten. Jedoch kann man durch genauere Betrachtung der Konstruktionsbeschreibung erkennen, dass es eine zweite Schar solcher Rauten gibt, welche vom Autor nicht erwähnt wurde. Hierbei stellte sich nun natürlich sofort die Frage ob diese, ebenfalls die von *F. v. Lamoen* angeführten Eigenschaften besitzen. In Kapitel 3 meiner Arbeit habe ich deshalb diese Frage verfolgt. Es stellt sich heraus, dass die Diagonalen dieser zweiten Rhombenschar, welche die Eckpunkte ABC nicht enthalten, die Seiten eines *Kiepert- Dreiecks* zum Ausgangsdreieck bilden. Natürlich liegt somit auch das zugehörige Perspektivitätszentrum auf der *Kiepert- Hyperbel*.

Als nächstes habe ich festgestellt, dass die Eckpunkte A' , B' und C' der Rhomben, welche den Eckpunkten A , B und C gegenüberliegen, ebenfalls ein zum Ausgangsdreieck perspektives Dreieck bilden. Auch bei dieser Perspektivität gibt es natürlich ein Perspektivitätszentrum, welches ebenfalls auf der *Kiepert- Hyperbel* liegt.

Da man weiß, dass zu jeder Perspektivität auch eine Perspektivitätsachse existiert, welche eine bestimmte Kurve umhüllt, habe ich daraufhin untersucht, wie diese Kurve für diese Perspektivität aussieht. Ich kam zu dem Ergebnis, dass es sich im Allgemeinen um eine rationale Kurve 3. Klasse bzw. 4. Ordnung handelt.

Im letzten Kapitel meiner Arbeit habe ich dann versucht, die Ergebnisse aus Kapitel 3 auch

1 Einleitung

auf sphärischer Dreiecke bzw. Rhomben umzulegen und Analoga zu den Ergebnissen aus der Ebene für die Sphäre zu finden. Jedoch stellte sich relativ schnell heraus, das zumindest die Erkenntnisse bezüglich des *Kiepert- Dreiecks* auf der Kugel nicht gelten. Genauso können die Resultate bezüglich der Perspektivität der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ für die Sphäre nicht bewiesen werden.

2 Vorbereitung

Alle Abbildungen in dieser Arbeit wurden von mir mit der dynamischen Software *Cinderella* (Version 2.8) erzeugt und ebenfalls beschriftet.

2.1 Baryzentrische Koordinaten

Im Folgenden betrachten wir euklidische Eigenschaften von Dreiecken. Daher werden wir unseren Untersuchungen die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene zugrunde legen.

Die in der Dreiecksgeometrie unter anderen sehr häufig verwendeten Koordinaten sind die *homogenen baryzentrischen Koordinaten*. Die gebräuchliche Schreibweise ist (u, v, w) oder man schreibt einfach nur $u : v : w$.

2.1.1 Berechnung und Eigenschaften

- Man wähle drei Basispunkte A, B, C die nicht auf einer Geraden liegen, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems Ortsvektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} besitzen. Punkte der Ebene die durch diese drei Punkte aufgespannt werden, können durch die Parameterdarstellung $\vec{x}(u, v) = \vec{c} + u(\vec{a} - \vec{c}) + v(\vec{b} - \vec{c})$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Umformen ergibt die Parameterdarstellung: $\vec{x}(u, v) = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} + (1 - u - v)\vec{c}$. Aus Symmetriegründen kann man $w := 1 - u - v$ als dritte Koordinate ansetzen und erhält $\vec{x}(u, v, w) = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$. Die Koordinaten u, v, w sind hier die *baryzentrischen Koordinaten* des Punktes bezüglich der Basispunkte A, B, C , wobei $u + v + w = 1$ gilt.

Die *homogenen baryzentrischen Koordinaten* haben die Form $(u : v : w)$ wobei die Summe bei ihnen aber nicht festgelegt ist. Das heißt, dass $(xu : xv : xw)$ den gleichen Punkt darstellen wie $(u : v : w)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Ohne Beweis seien die folgenden einfachen Bedeutungen der *baryzentrischen Koordinaten* angegeben die auch in [1] zu finden sind:

2 Vorbereitung

$$u = \frac{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{x}(u, v, w), \vec{b}, \vec{c})}{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

$$v = \frac{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{a}, \vec{x}(u, v, w), \vec{c})}{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

$$w = \frac{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}(u, v, w))}{\text{Flächeninhalt } \Delta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

Hierbei ist zu erwähnen, dass der Flächeninhalt eines Dreiecks immer positiv ist. *Baryzentrische Koordinaten* können aber durchaus ein negatives Vorzeichen besitzen. Daraus folgt folgende **Vereinbarung**: Die Gerade BC teile die Ebene in zwei Halbebenen. Die u -Koordinate von P sei positiv, wenn P in der gleichen Halbebene wie A liegt, sonst negativ. Analoges gelte auch für die v - und w -Koordinaten von P .

- Drei Punkte mit baryzentrischen Koordinaten (u_1, v_1, w_1) , (u_2, v_2, w_2) und (u_3, v_3, w_3) liegen genau dann auf einer Geraden wenn

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Durch diese Beziehung kann man auch Geradengleichungen in baryzentrischen Koordinaten aufstellen. Diese Gleichungen haben dann die Form

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0, \tag{1}$$

wobei zumindest einer der reellen Koeffizienten α, β oder γ ungleich 0 sein muss. $(\alpha : \beta : \gamma)$ werden als homogene Geradenkoordinaten der Geraden mit der Gleichung (1) bezeichnet.

2 Vorbereitung

- Sind drei Geraden mit den Gleichungen $\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w = 0$, $\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w = 0$ und $\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w = 0$ gegeben, so schneiden sich diese genau dann in einem Punkt P oder sind zueinander parallel, wenn die folgende Bedingung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Zwei Geraden der Form $\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w = 0$ und $\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w = 0$ sind parallel, wenn sie sich auf der Ferngeraden $u + v + w = 0$ schneiden. Parallele Geraden sind daher durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

charakterisiert.

2.1.2 Umrechnungsformeln zwischen baryzentrischen und kartesischen Koordinaten

- Sind $(u : v : w) \neq (0 : 0 : 0)$ die homogenen baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$ und (x_A, y_A) , (x_B, y_B) und (x_C, y_C) die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks in kartesischen Koordinaten, so gilt:

$$x = \frac{u \cdot x_A + v \cdot x_B + w \cdot x_C}{u + v + w}$$
$$y = \frac{u \cdot y_A + v \cdot y_B + w \cdot y_C}{u + v + w}$$

2.2 Perspektivische Kollineation und Perspektivische Dreiecke

Als *perspektive Kollineation* wird in der ebenen Geometrie eine Kollineation bezeichnet, die eine Fixpunktgerade und ein Zentrum besitzt. Das Zentrum ist jener Punkt, durch den jede Gerade eine Fixgerade ist.

Zwei Dreiecke heißen zueinander *perspektiv* bezüglich eines Punktes Z , wenn sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte (also zum Beispiel $[AA']$) alle in diesem Punkt schneiden. Siehe Abbildung 2.1.

2 Vorbereitung

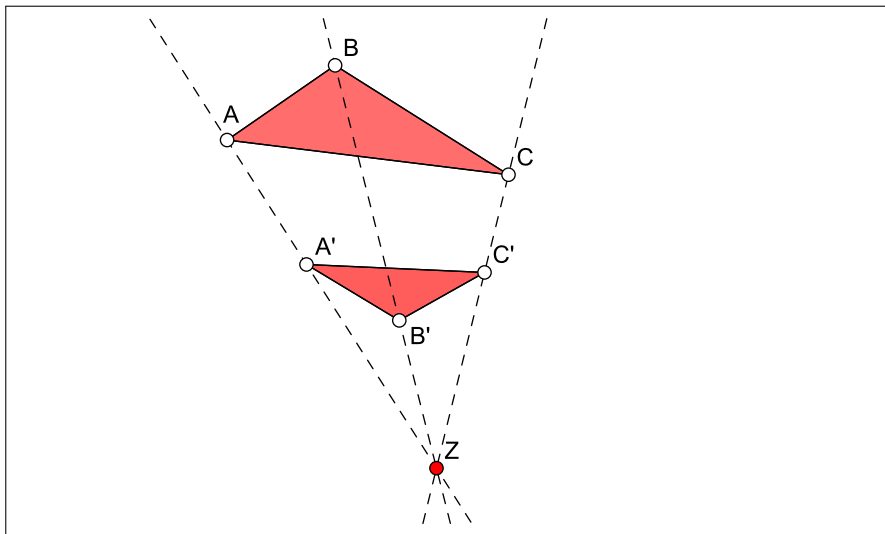


Abbildung 2.1: Perspektive Dreiecke bzgl eines Punktes

Dreieckspaare der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene die bezüglich eines Zentrums perspektiv liegen, sind dies auch bezüglich einer Achse. Diesen als Satz von Desargues bekannten Satz beweisen wir hier als Satz 1 im nächsten Abschnitt.

Zwei Dreiecke heißen zueinander *perspektiv* bezüglich einer Geraden a , wenn die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke (also $[AB] \cap [A'B']$) alle auf dieser Geraden liegen. Siehe auch Abbildung (2.2).

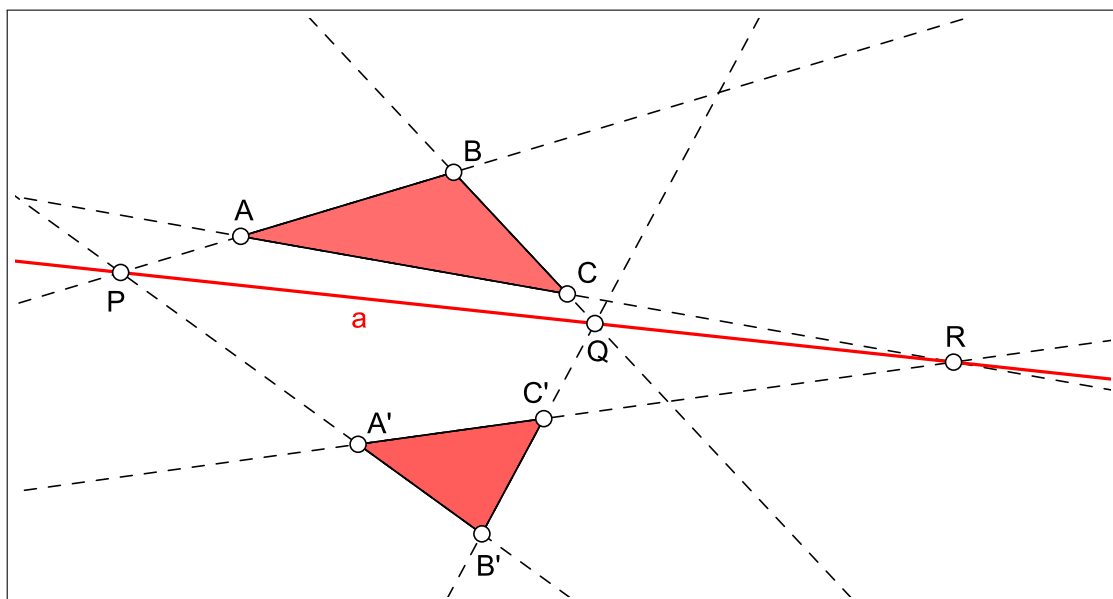


Abbildung 2.2: Perspektive Dreiecke bzgl einer Achse

2.3 Der Satz von Desargues

Satz 1 (Desargues). *Seien A, B, C und A', B', C' paarweise verschiedene Punkte in einer projektiven Ebene, sodass sich die Verbindungsgeraden $[AA']$, $[BB']$ und $[CC']$ in einem Punkt Z schneiden. Dann folgt, dass*

$$P := [AB] \cap [A'B'], \quad Q := [BC] \cap [B'C'], \quad R := [CA] \cap [C'A']$$

kollinear, also auf einer Geraden liegen.

Beweis: Zur Vorbereitung setzt man folgende Hilfspunkte, die auch in der Abbildung (2.3) zu sehen sind:

$$S := [AB] \cap [CC']$$

$$T := [A'B'] \cap [CC']$$

$$U := [PR] \cap [CC']$$

$$V := [PR] \cap [BC]$$

$$T := [PR] \cap [B'C']$$

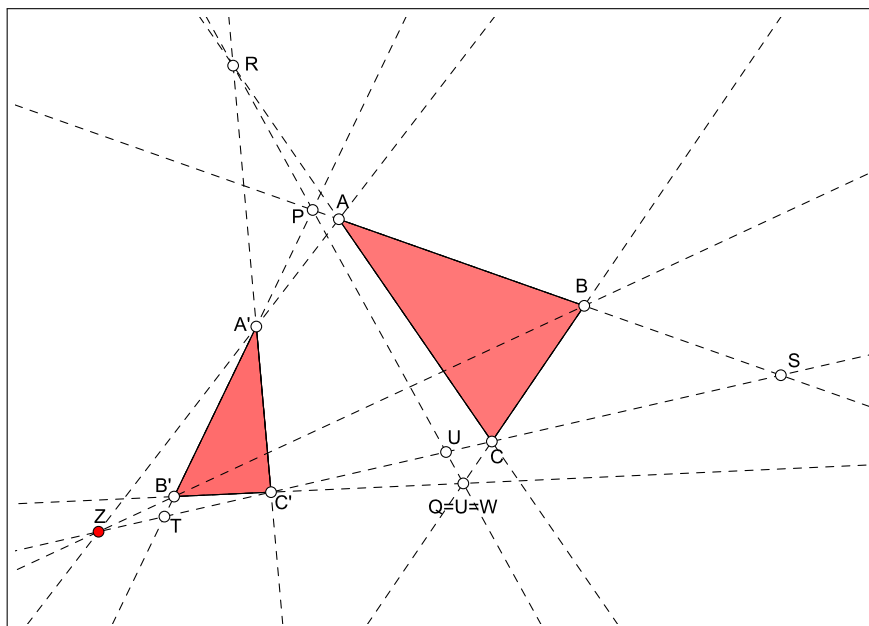


Abbildung 2.3: Satz von Desargues

2 Vorbereitung

Nun wendet man mehrmals eine Zentralprojektion an und es folgt

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Proj. } a \rightarrow a_1 \text{ mit Zentrum } C & \text{Proj. } a_1 \rightarrow a'_1 \text{ mit Zentrum } Z \\
 DV(P, R, U, V) & \xrightarrow{\cong} & DV(P, A, S, B) \\
 & \text{Proj. } a'_1 \rightarrow z \text{ mit Zentrum } C' & \\
 DV(P, A', T, B') & \xrightarrow{\cong} & DV(P, R, U, W)
 \end{array}$$

Daraus folgt $Q = V = W$ und aus dieser Beziehung auch die Behauptung. ■

Interessant ist auch die Umkehrung des Satzes von Desargues, denn dieser entspricht genau der Dualisierung des ursprünglichen Satzes.

Satz 2 (Umkehrung des Satzes von Desargues). *Seien $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ paarweise verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene deren Schnittpunkte*

$$a_1 \cap a'_1, \quad a_2 \cap a'_2, \quad a_3 \cap a'_3$$

auf einer Geraden liegen, dann schneiden sich die Geraden

$$(a_1 \cap a_2) \vee (a'_1 \cap a'_2), \quad (a_2 \cap a_3) \vee (a'_2 \cap a'_3), \quad (a_3 \cap a_1) \vee (a'_3 \cap a'_1)$$

in einem Punkt.

Beweis: Durch Identifikation der Geraden a_1, \dots, a'_3 mit den Dreiecksseiten aus Satz 1 ergibt sich die identische Ausgangslage und der Beweis funktioniert deshalb analog.

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = A \vee B, & a'_1 = A' \vee B' \\
 a_2 = A \vee C, & a'_2 = A' \vee C' \\
 a_3 = B \vee C, & a'_3 = B' \vee C'
 \end{array}$$

■

2.4 Kiepert Dreieck und Kiepert Hyperbel

2.4.1 Vorbereitung

Sei ein Dreieck ABC , welches nicht gleichschenkelig ist, mit Seitenlängen a, b und c und Winkeln α, β und γ gegeben. Sei S der zweifache Flächeninhalt des Dreiecks ABC , und für jeden Winkel φ sei $S_\varphi := S \cdot \cot \varphi$. Dann folgt aus dem Cosinussatz:

$$S_\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

2 Vorbereitung

Diese Bezeichnungen folgen den in [2]verwendeten.

Satz 3. Sei ABC ein Dreieck und P ein Punkt außerhalb von ABC . Seien φ und ψ die Winkel $\sphericalangle(PBC)$ und $\sphericalangle(PCB)$. Dann sind die homogenen baryzentrischen Koordinaten von P gegeben durch:

$$(-a^2 : S_\gamma + S_\psi : S_\beta + S_\varphi)$$

Nachdem der Cotangens die Periode π hat, seien $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi$ und $\psi \leq \frac{\pi}{2}$.

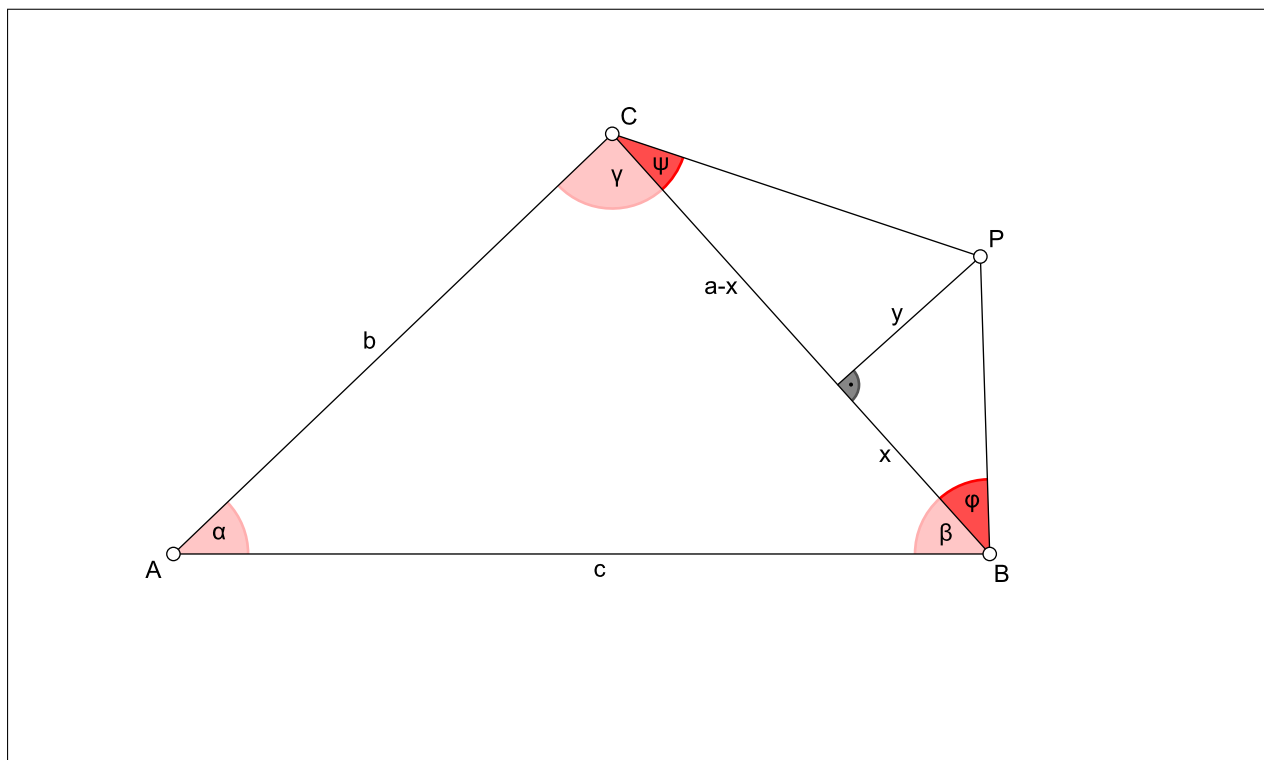


Abbildung 2.4

Beweis: Die baryzentrischen Koordinaten des Punktes P sind gegeben durch $u : v : w$ wobei

$$u = -\frac{F(\triangle BCP)}{F(\triangle ABC)}, \quad v = \frac{F(\triangle ACP)}{F(\triangle ABC)}, \quad w = \frac{F(\triangle ABP)}{F(\triangle ABC)}$$

Das „-“ in der u -Koordinate kommt daher, weil der Punkt P bezüglich $[BC]$ in der anderen Halbebene als der Punkt A liegt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCP lautet mit den Bezeichnungen von Abbildung 2.4

$$F(\triangle BCP) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot y,$$

2 Vorbereitung

wobei man y mithilfe der Winkel φ und ψ wie folgt ausdrücken kann:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow x \cdot \tan \varphi = y$$

und

$$\tan \psi = \frac{y}{(a-x)} \Rightarrow (a-x) \cdot \tan \psi = y$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \tan \varphi = y \quad | \cdot \tan \psi \\ (a-x) \cdot \tan \psi = y \quad | \cdot \tan \varphi \end{array} \right\} +$$

$$\Rightarrow a \cdot \tan \varphi \tan \psi = y \cdot (\tan \varphi + \tan \psi)$$

$$\Rightarrow y = a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}$$

Wenn man jetzt den Ausdruck für y in die Formel für den Flächeninhalt einsetzt, erhält man,

$$F(\triangle_{BCP}) = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}.$$

Und daraus folgt für die u -Komponente der baryzentrischen Koordinaten des Punktes P

$$u = -\frac{F(\triangle_{BCP})}{F(\triangle_{ABC})} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{\frac{1}{2} \cdot S} = -\frac{a^2 \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{S},$$

wobei S wieder den doppelten Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ABC bezeichnet.

Für die v -Koordinate der baryzentrischen Koordinaten des Punktes P benötigt man nun den Flächeninhalt des Dreiecks ACP .

$$\begin{aligned} F(\triangle_{ACP}) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\gamma + \psi) \cdot b \cdot \overline{CP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi) \cdot b \cdot \overline{CP} \end{aligned}$$

Aus der Abbildung (2.4) kann man auch folgenden Zusammenhang erkennen:

$$\sin \psi = \frac{y}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \overline{CP} = \frac{y}{\sin \psi} = a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot \frac{1}{\sin \psi}.$$

Daraus folgt nun für den Flächeninhalt $F(\triangle_{ACP})$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\triangle_{ACP}) &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi) \cdot b \cdot \frac{1}{\sin \psi} \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \gamma \cot \psi + \cos \gamma) \cdot b \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}. \end{aligned}$$

2 Vorbereitung

Und daraus folgt nun die v -Koordinate des Punktes P in baryzentrischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} v &= \frac{F(\triangle ACP)}{F(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\sin \gamma \cot \psi + \cos \gamma) \cdot b \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma} \\ &= \frac{\sin \gamma \left(\cot \psi + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{\sin \gamma} \\ \Rightarrow v &= \frac{(\cot \psi + \cot \gamma) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot S}{S}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der w -Koordinate des Punktes P geht man analog vor wie bei der v -Koordinate. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABP lautet:

$$\begin{aligned} F(\triangle ABP) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot c \cdot \overline{BP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) \cdot c \cdot \overline{BP}. \end{aligned}$$

Wieder ersichtlich in der Abbildung 2.4 ist:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{y}{\sin \varphi} = a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Nun folgt wieder für den Flächeninhalt $F(\triangle ABP)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\triangle ABP) &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) \cdot c \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \beta \cot \varphi + \cos \beta) \cdot c \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}. \end{aligned}$$

Wiederum folgt nun sofort die w -Koordinate des Punktes P in baryzentrischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} w &= \frac{F(\triangle ABP)}{F(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\sin \beta \cot \varphi + \cos \beta) \cdot c \cdot a \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \beta \left(\cot \varphi + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{\sin \beta} \\ \Rightarrow w &= \frac{(\cot \varphi + \cot \beta) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot S}{S}. \end{aligned}$$

Noch einmal zusammengefasst lauten die baryzentrischen Koordinaten des Punktes P also:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{a^2 \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}}{S} \\ v &= \frac{(\cot \psi + \cot \gamma) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot S}{S} \\ w &= \frac{(\cot \varphi + \cot \beta) \cdot \frac{\tan \varphi \tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi} \cdot S}{S} \end{aligned}$$

2 Vorbereitung

Die zugehörigen *homogenen baryzentrischen Koordinaten* sind daher:

$$(u : v : w) = (-a^2 : (\cot \psi + \cot \gamma) \cdot S : (\cot \varphi + \cot \beta) \cdot S)$$

Aus $S_\varphi = S \cdot \cot \varphi$ folgt nun:

$$(u : v : w) = (-a^2 : S_\gamma + S_\psi : S_\beta + S_\varphi)$$

■

2.4.2 Kiepert Dreieck

Satz 4 (siehe: [3]). *Man errichte über den Seiten eines allgemeinen Dreiecks ABC drei ähnliche gleichschenklige Dreiecke ABC^φ , $AB^\varphi C$ und $A^\varphi BC$, wobei die Punkte A^φ , B^φ und C^φ jeweils den Basen der gleichschenkligen Dreiecke gegenüberliegen und nicht in derselben Halbebene liegen wie der nicht verwendete Punkt des Ausgangsdreiecks ABC . (φ bezeichnet den Winkel den die Geraden AC^φ , BC^φ , BA^φ , BC^φ , CA^φ und CB^φ mit den jeweiligen Basen einschließen.) Dann schneiden sich die Verbindungen von A^φ und A , B^φ und B und C^φ und C in einem Punkt Z . (siehe auch Abbildung 2.5).*

Definition 1. *Die Punkte A^φ , B^φ und C^φ bilden das sogenannte Kiepert Dreieck $K(\varphi)$.*

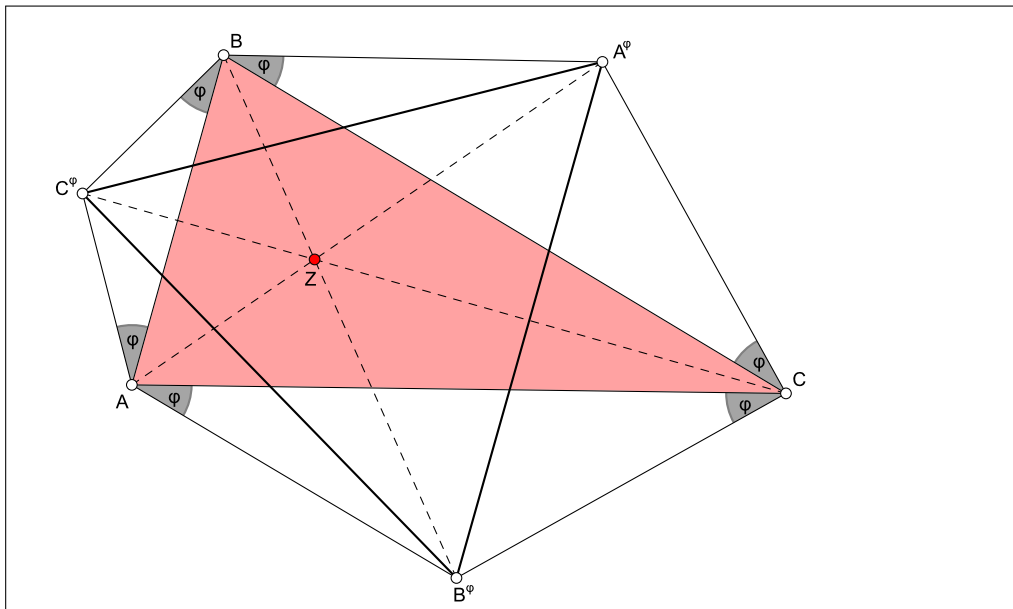


Abbildung 2.5: Kiepert Dreieck

2 Vorbereitung

Beweis: Seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Aus Satz 3 kann man die baryzentrischen Koordinaten des Punktes A^φ angeben. Diese lauten:

$$A^\varphi = (-a^2 : S_\gamma + S_\varphi : S_\beta + S_\varphi).$$

Die Berechnung der homogenen baryzentrischen Koordinaten der Punkte B^φ und C^φ erfolgt analog und ergibt mit den zyklischen Vertauschungen $((A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A) \Rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a) \Rightarrow ((\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\beta, \gamma, \alpha) \rightarrow (\gamma, \alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)) \Rightarrow ((u : v : w) \rightarrow (w : u : v) \rightarrow (v : w : u) \rightarrow (u : v : w))$:

$$B^\varphi = (S_\gamma + S_\varphi : -b^2 : S_\alpha + S_\varphi)$$

$$C^\varphi = (S_\beta + S_\varphi : S_\alpha + S_\varphi : -c^2).$$

Nun verbinden wir wie in Abbildung (2.5) die Punkte A und A^φ , B und B^φ und C und C^φ durch Geraden die dann miteinander zu schneiden sind. Die homogenen Geradenkoordinaten errechnen sich so:

$$[AA^\varphi] \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a^2 \\ S_\gamma + S_\varphi \\ S_\beta + S_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(S_\beta + S_\varphi) \\ S_\gamma + S_\varphi \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

$$[BB^\varphi] \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_\gamma + S_\varphi \\ -b^2 \\ S_\alpha + S_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_\alpha + S_\varphi \\ 0 \\ -(S_\gamma + S_\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

$$[CC^\varphi] \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_\beta + S_\varphi \\ S_\alpha + S_\varphi \\ -c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(S_\alpha + S_\varphi) \\ S_\beta + S_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

Um zu überprüfen ob sich diese Geraden tatsächlich in einem Punkt schneiden, bildet man die Determinante der Matrix der Spaltenvektoren (2.4.1), (2.4.2) und (2.4.3). Es ist

2 Vorbereitung

$$\det \begin{pmatrix} 0 & S_\alpha + S_\varphi & -(S_\alpha + S_\varphi) \\ -(S_\beta + S_\varphi) & 0 & S_\beta + S_\varphi \\ S_\gamma + S_\varphi & -(S_\gamma + S_\varphi) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (S_\beta + S_\varphi)(S_\gamma + S_\varphi)(S_\alpha + S_\varphi) - (S_\beta + S_\varphi)(S_\gamma + S_\varphi)(S_\alpha + S_\varphi) = 0$$

Die drei Geraden sind daher kopunktal. ■

Zur Berechnung der Koordinaten des Zentrums Z schneidet man einfach zwei Verbindungsgeraden von vorn, zum Beispiel $[AA^\varphi]$ und $[BB^\varphi]$. Wir berechnen

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -(S_\beta + S_\varphi) \\ S_\gamma + S_\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_\alpha + S_\varphi \\ 0 \\ -(S_\gamma + S_\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S_\beta + S_\varphi) \cdot (S_\gamma + S_\varphi) \\ (S_\gamma + S_\varphi) \cdot (S_\alpha + S_\varphi) \\ (S_\beta + S_\varphi) \cdot (S_\alpha + S_\varphi) \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{S_\alpha + S_\varphi} \\ \frac{1}{S_\beta + S_\varphi} \\ \frac{1}{S_\gamma + S_\varphi} \end{pmatrix}.$$

Korollar 1. *Es lässt sich leicht nachweisen, dass die homogenen baryzentrischen Koordinaten $(u : v : w)$ dieser Zentren die Gleichung $\frac{a \cdot \sin(\beta - \gamma)}{u} + \frac{b \cdot \sin(\gamma - \alpha)}{v} + \frac{c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{w} = 0$ erfüllen. Dies ist die Gleichung der sogenannten Kiepert-Hyperbel.*

Weiters umhüllen die Achsen eine Parabel, nämlich die Kiepert-Parabel. Siehe auch [4] und [5].

2.4.3 Kiepert Hyperbel

Definition 2. *Die Kiepert Hyperbel ist der Ort der Punkte der Zentren Z für variables $\varphi \in [-(\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2})]$.*

2 Vorbereitung

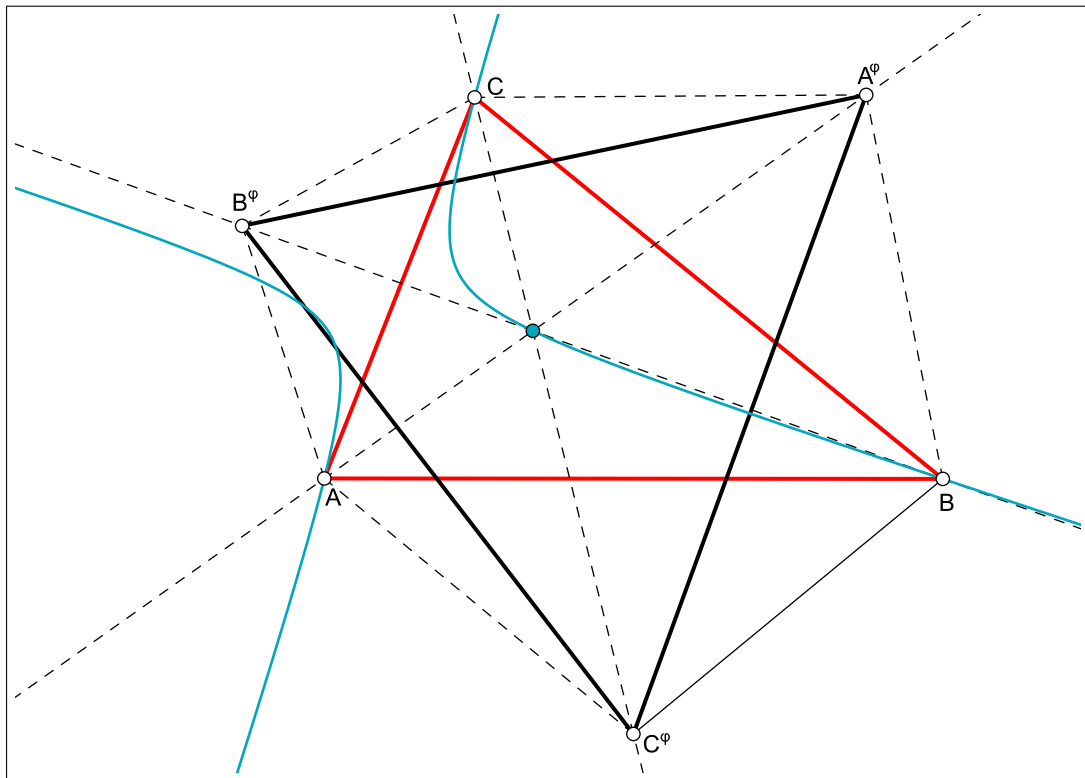


Abbildung 2.6: Kiepert Hyperbel

Korollar 2. Nach [6] ist die Kiepert Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel welche durch folgende Punkte verläuft:

- die Ecken des gegebenen Dreiecks ABC ,
- den Höhenschnittpunkt,
- den Schwerpunkt
- den Spieker- Punkt
- beide Napolen- Punkte,
- beide Fermat- Punkte und
- beide Vecten- Punkte.

2 Vorbereitung

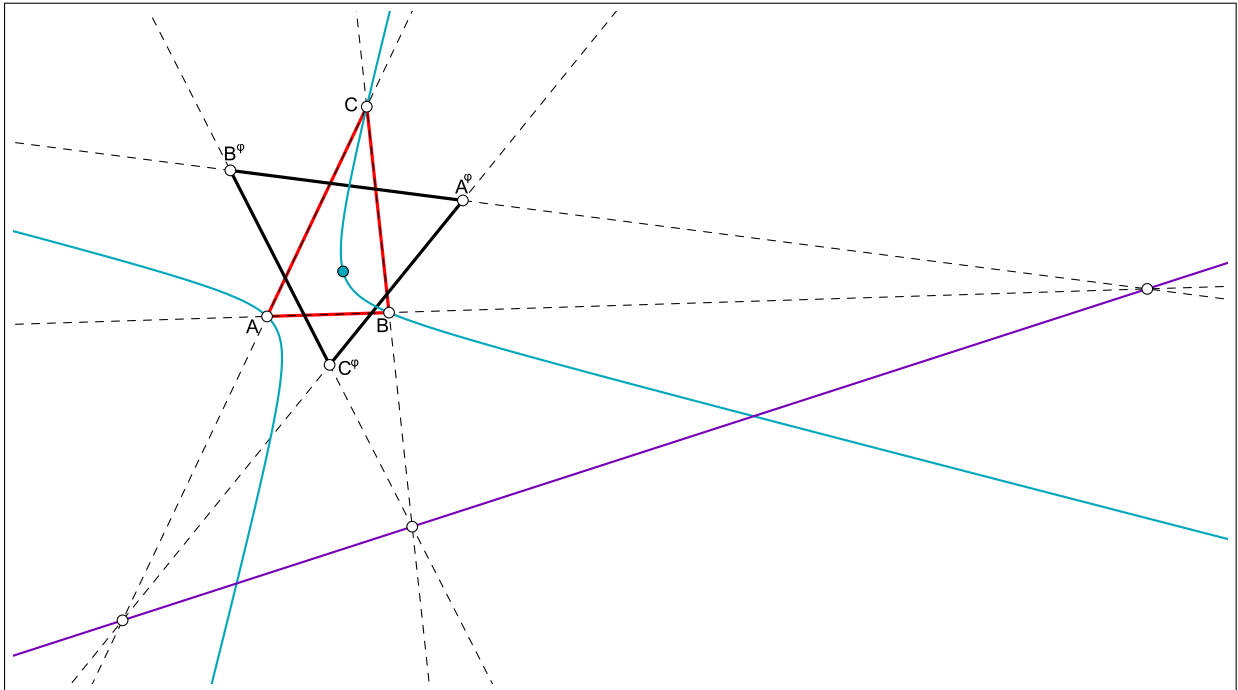


Abbildung 2.7: Perspektivitätsachse

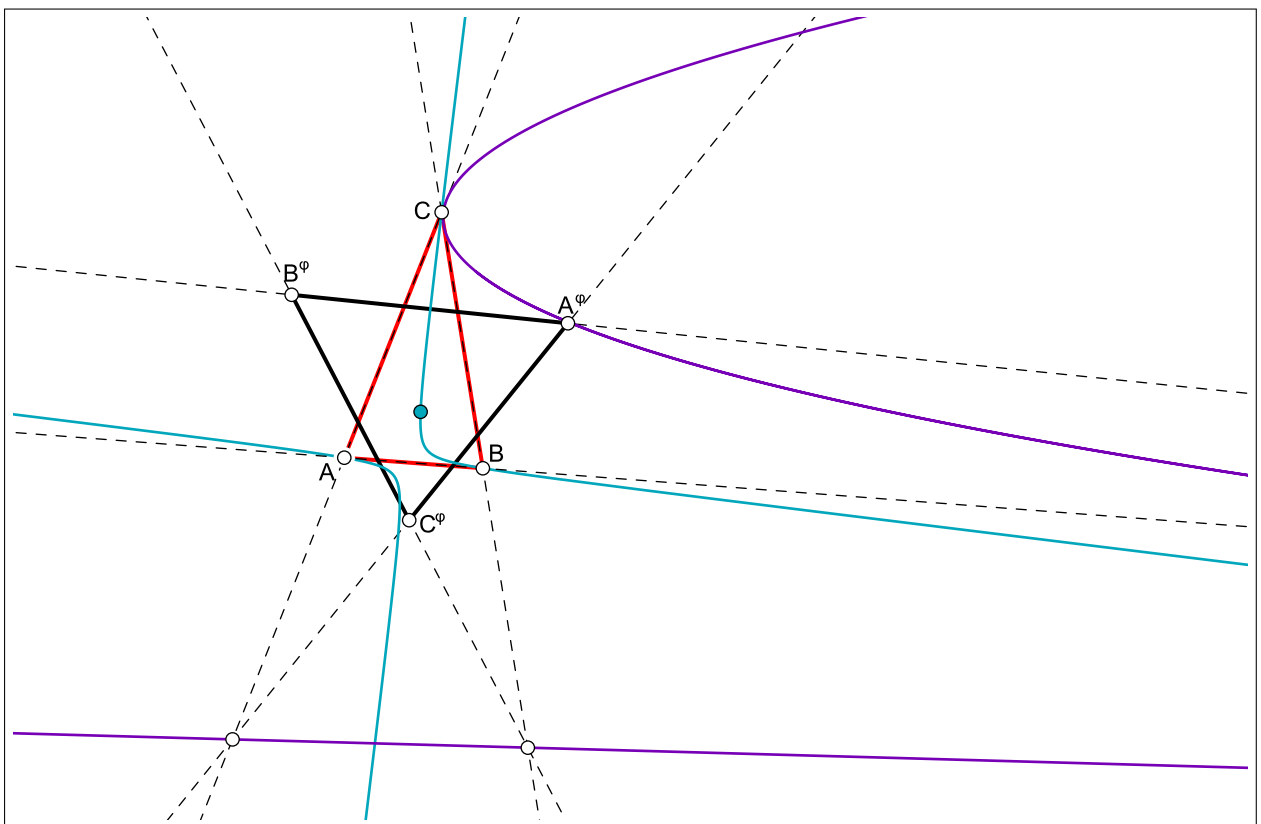


Abbildung 2.8: Kiepert Hyperbel und Parabel

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

3.1 Ein Ergebnis von F. van LAMOEN

Die folgenden Ergebnisse finden sich bei F. van LAMOEN in [3].

Gegeben ist ein Dreieck ABC . Wir bestimmen Rhomben $R_A(2\varphi)$ mit Ecken in A, A_b, A', A_c , deren A gegenüberliegende Seiten $[AA_b]$ bzw. $[AA_c]$ die Dreiecksecken B und C enthalten (eventuell auch in der Verlängerung), wobei der Winkel $\sphericalangle A_bAA_c$ mit 2φ bezeichnet werde. So ein Rhombus lässt sich dann wie folgt konstruieren (siehe auch Abbildung 3.1):

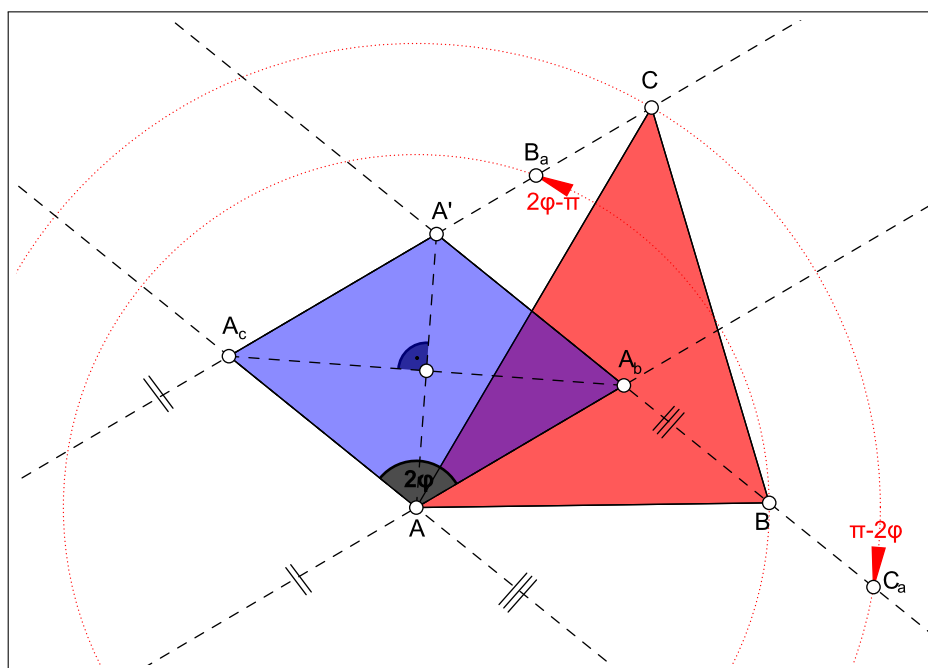


Abbildung 3.1: Rhombus bei Drehung um A

Sei $R_A(2\varphi)$ der Rhombus $AA_bA'A_c$ mit $\sphericalangle A_bAA_c = 2\varphi$, B_a das Bild des Punktes B bei der Rotation um $\pi - 2\varphi$ um A und C_a das Bild des Punktes C nach der Rotation um $2\varphi - \pi$.

A' sei der Schnittpunkt der Geraden $[B_aC]$ und $[C_aB]$ also $A' = [B_aC] \cap [C_aB]$.

Die Punkte $A_c \in [C_aA']$ und $A_b \in [B_aA']$ können nun durch Parallelverschieben so konstruiert

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

werden, dass AA_cA_bA' ein Parallelogramm ist.

Da die Dreiecke AC_aB und ACB_a kongruent sind, sind die Abstände von A zu $[B_aA']$ und $[C_aA']$ gleich lang. Damit ist das Parallelogramm AA_cA_bA' ein Rhombus.

Weiters gilt, dass die Gerade $[B_aC] = [A'A_c]$ das Bild der Geraden $[C_aB] = [A'A_b]$ nach der Rotation um A mit Winkel $\sphericalangle \pi - 2\varphi$ ist, sodass für den Winkel $\sphericalangle A_cA'A_b$ gilt: $\sphericalangle A_cA'A_b = 2\varphi$. Damit ist der Rhombus $AA_bA'A_c := R_A(2\varphi)$ einer der gesuchten Rhomben.

Es ist ebenfalls leicht erkennbar, dass dieser Rhombus $R_A(2\varphi)$ der einzige Rhombus mit diesen Voraussetzungen ist.

Analog gehen wir für Rhomben mit Ecken in B bzw. C vor und erhalten Rhomben $R_B(2\varphi)$ bzw. $R_C(2\varphi)$.

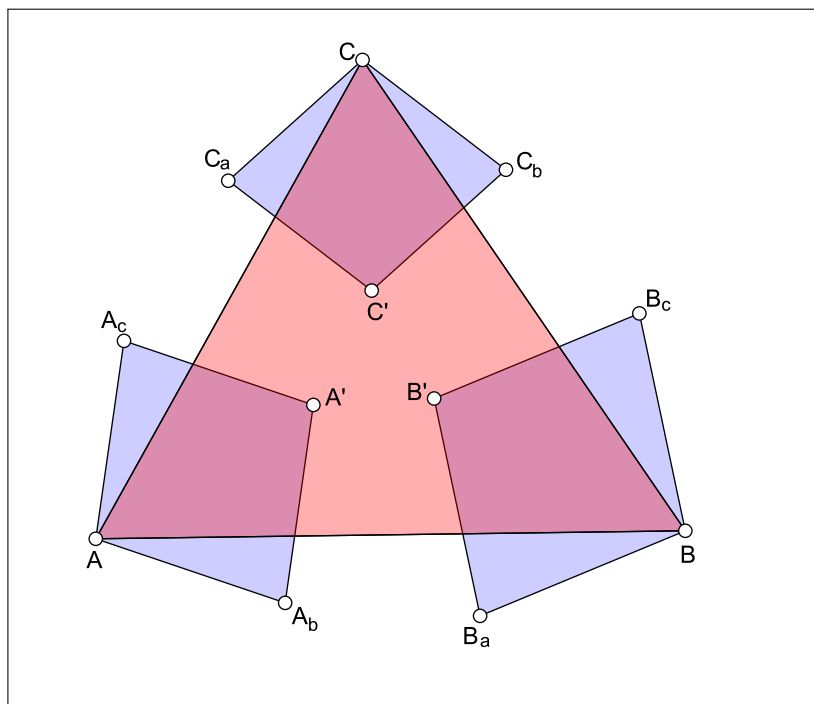


Abbildung 3.2: Die Rhomben $R_A(2\varphi), R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$

Die obige Konstruktion liefert für Drehung um den Winkel $-(\pi - 2\varphi)$ ebenfalls einen Rhombus mit den angegebenen Eigenschaften. Dieser zweite Rhombus $R_A(-2\varphi)$ besitzt im Punkt A ebenfalls den Öffnungswinkel $|2\varphi|$ und wurde in der Arbeit [3] nicht erwähnt. (Siehe auch Abbildung 3.3)

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

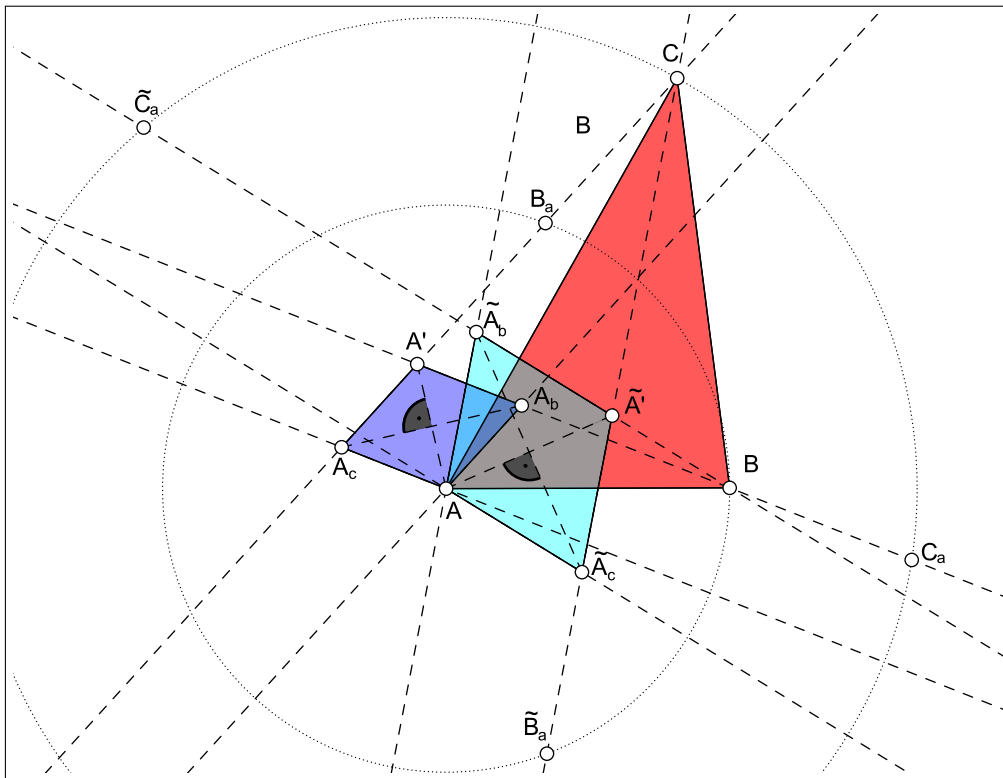


Abbildung 3.3: Beide Rhomben bei Drehung um A

Aus dieser Tatsache folgt, dass es insgesamt also 6 Rhomben zu einem Dreieck ABC gibt. Diese sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

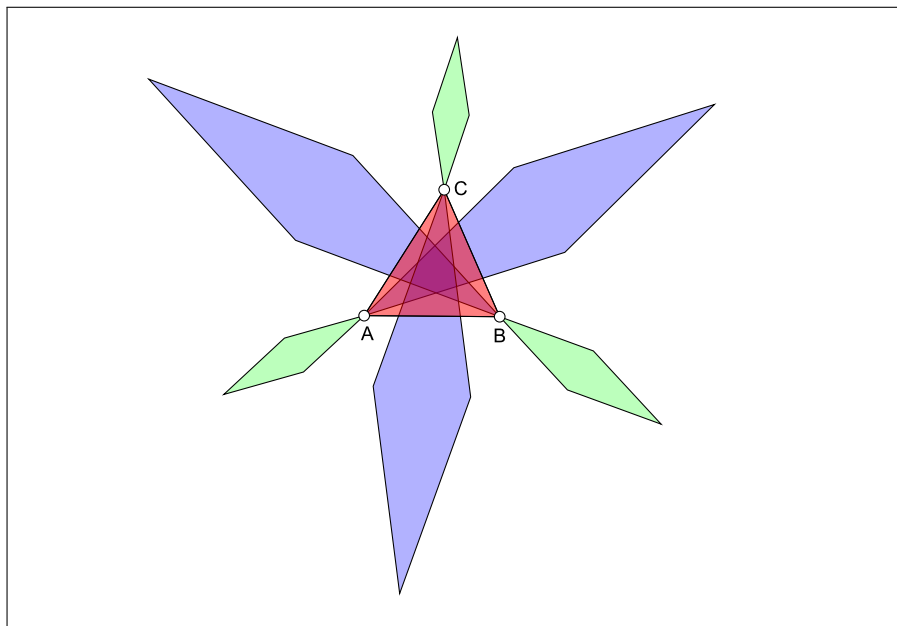


Abbildung 3.4: Alle 6 Rhomben des Dreiecks ABC

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

Nun gilt mit [3] der folgende Satz:

Satz 5. Die Diagonalen $[A_bA_c]$, $[B_aB_c]$ und $[C_aC_b]$ der Rhomben $R_A(2\varphi)$, $R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$ bzw. $\tilde{A}_b\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_a\tilde{B}_c$ und $\tilde{C}_a\tilde{C}_b$ der Rhomben $R_A(-2\varphi)$, $R_B(-2\varphi)$ und $R_C(-2\varphi)$ bilden genau das Kiepert Dreieck $K(\varphi)$ bzw. $K(-\varphi)$ des Dreiecks ABC , wie auch in Kapitel 2.4.2, Definition 1 beschrieben.

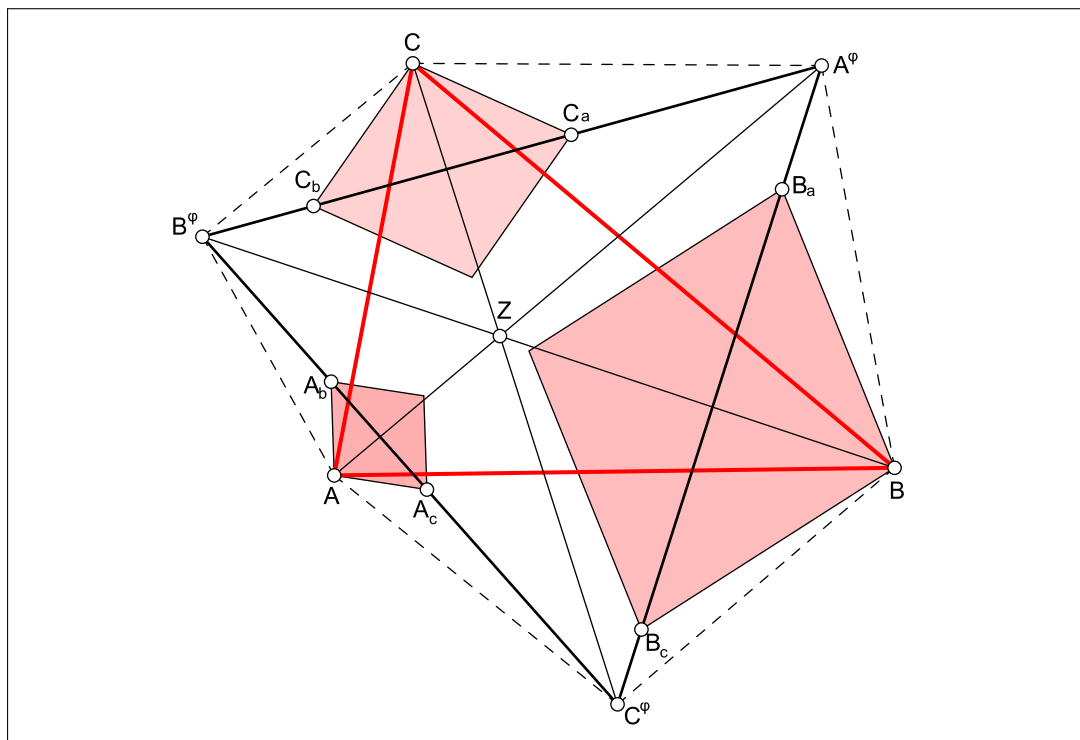


Abbildung 3.5

Beweis: Wir betrachten die beiden Rhomben $R_A(2\varphi)$ und $R_B(2\varphi)$ mit $\sphericalangle AA'B \equiv \varphi \pmod{\pi}$, sowie $\sphericalangle AB'B \equiv \varphi \pmod{\pi}$. Nach dem Peripheriewinkelsatz (siehe [7]) liegen die Punkte A, B, A' und B' auf einem Kreis. (Siehe Abbildung 3.6)

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

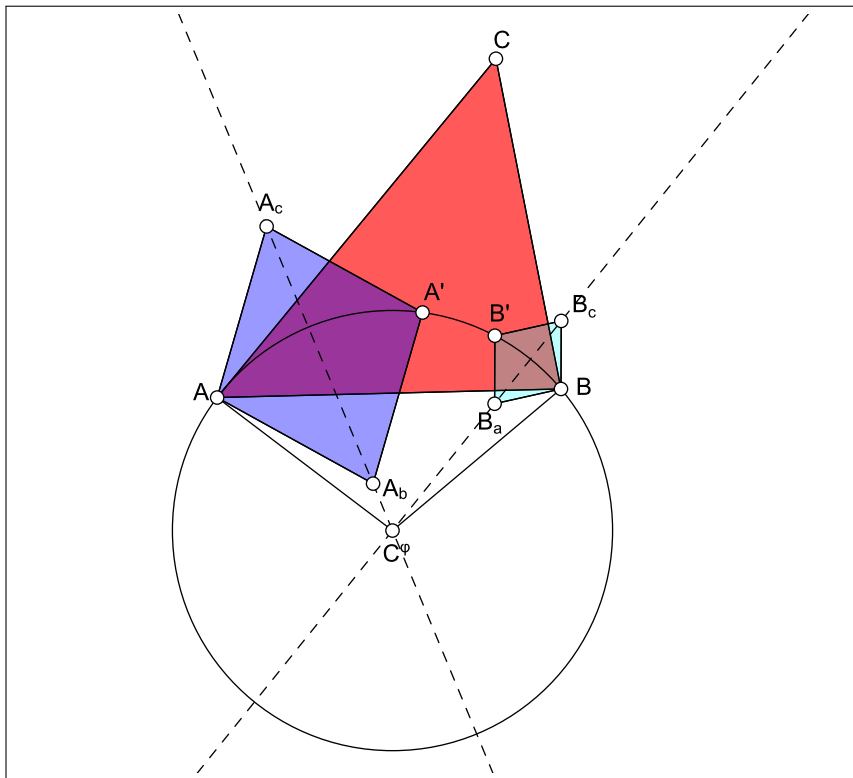


Abbildung 3.6

Der Mittelpunkt dieses Kreises, ist der Scheitel C^φ des gleichschenkligen Dreiecks, welches über der Gerade $[AB]$ mit dem Winkel $\angle AC^\varphi B = 2\varphi$ konstruiert werden kann.

Dies zeigt, laut dem Peripheriewinkelsatz, dass C^φ auf den Streckensymmetralen der Strecken AA' und BB' liegt und auch, dass $C^\varphi = [A_b A_c] \cap [B_a B_c]$.

Analoges gilt, nach zyklischen Vertauschungen, auch für B^φ und C^φ . ■

Satz 6 (Siehe auch [3]). *Seien das Dreieck ABC und der Winkel $\varphi \in [-(\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2})] \setminus \{0\}$ gegeben. Seien wiederum die Punkte A', B' und C' diejenigen Punkte der Rhomben $R_A(2\varphi), R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$, die den Punkten A, B und C gegenüberliegen. Das Dreieck, das diese drei Punkte bilden, ist perspektiv zum Ausgangsdreieck ABC .*

Beweis: Für den Beweis berechnen wir die baryzentrischen Koordinaten der Punkte A', B' und C' . Dann werden ihre Verbindungsgeraden mit den Punkten A, B und C ermittelt und deren Kopunktalität festgestellt.

Der Beweis wird hier nur für die erste Schar von Rhomben gezeigt, also für die Rauten $R_A(2\varphi), R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$. Für die zweite Schar kann analog geschlossen werden.

Zuerst werden wir nun die homogenen baryzentrischen Koordinaten für den Punkt A' berech-

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

nen. Dafür muss man zu Beginn einmal die Koordinaten der um A gedrehten Punkte B und C ermitteln. Betrachte hierzu auch die Abbildung (3.7).

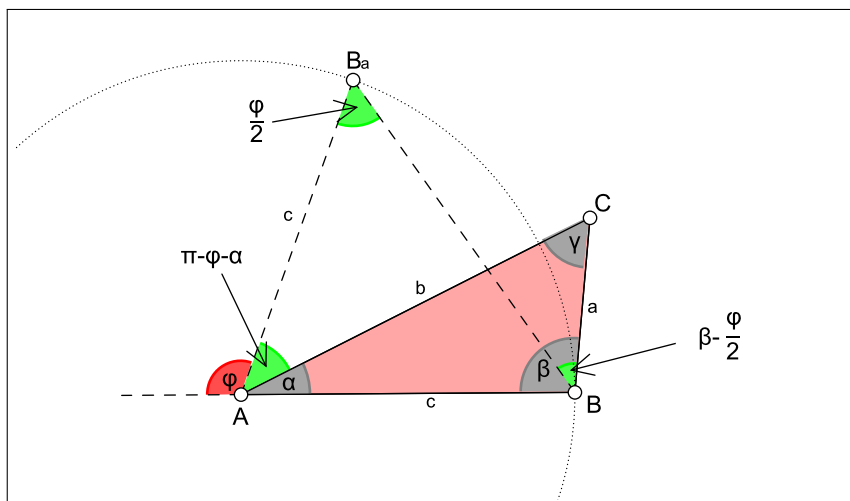


Abbildung 3.7: Der um A gedrehte Punkt B

Die homogenen baryzentrischen Koordinaten des Punktes B_a lassen sich bezüglich ABC folgendermaßen eruiieren:

$$B_a \hat{=} (u : v : w) = (F(\triangle BB_a C) : F(\triangle ACB_a) : F(\triangle ABB_a)).$$

$$\begin{aligned} (\overline{BB_a})^2 &= 2c^2 - 2c^2 \cos(\pi - \varphi) \\ &= 2c^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\ &= 4c^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \\ \Rightarrow \overline{BB_a} &= 2c \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u : F(\triangle BB_a C) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{BB_a} \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \left[2c \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot c \left[2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Analog berechnen wir

$$v : F(\triangle ACB_a) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin(\pi - \varphi - \alpha)$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$= \frac{1}{2} \cdot c[b \cdot \sin(\alpha + \varphi)],$$

$$\begin{aligned} w : F(\triangle ABB_a) &= \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin(\pi - \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot c[c \cdot \sin \varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_a &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot c \left[2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right] : -\frac{1}{2} \cdot c[b \cdot \sin(\alpha + \varphi)] : \frac{1}{2} \cdot c[c \cdot \sin \varphi] \right) \\ &\hat{=} \left(2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) : -b \cdot \sin(\alpha + \varphi) : c \cdot \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

Weiters bestimmt man analog die baryzentrischen Koordinaten des Punktes C_a :

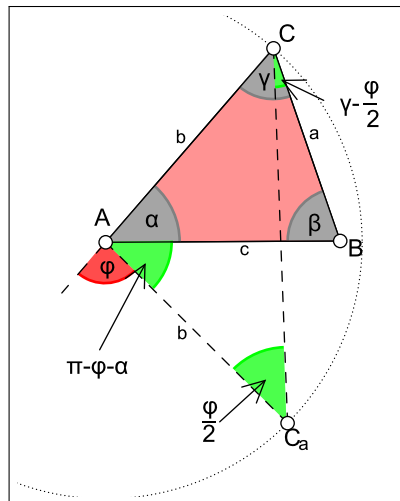


Abbildung 3.8: Der um A gedrehte Punkt C

$$\begin{aligned} C_a &\hat{=} (u : v : w) = (F(\triangle BCC_a) : F(\triangle ACC_a) : F(\triangle ABC_a)) \\ (\overline{CC_a})^2 &= 2b^2 - 2b^2 \cos(\pi - \varphi) \\ &= 2b^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\ &= 4b^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \\ \Rightarrow \overline{CC_a} &= 2b \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u : F(\triangle BCC_a) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{CC_a} \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot a \left[2b \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b \left[2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 v : F(\triangle ACC_a) &= \frac{1}{2} \cdot b^2 \sin(\pi - \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot [b \cdot \sin \varphi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w : F(\triangle ABC_a) &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin(\pi - \varphi - \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot [c \cdot \sin(\alpha + \varphi)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow C_a &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot b \left[2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right] : \frac{1}{2} \cdot b [b \cdot \sin \varphi] : -\frac{1}{2} \cdot b [c \cdot \sin(\alpha + \varphi)] \right) \\
 &\hat{=} \left(2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) : b \cdot \sin \varphi : -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \right)
 \end{aligned}$$

Nun kann man die homogenen Koordinaten der Verbindungsgeraden $[CB_a]$ sowie $[BC_a]$ ermitteln.

$$\begin{aligned}
 [CB_a] &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ c \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ 2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 [BC_a] &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b \cdot \sin \varphi \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ 0 \\ -2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Den Punkt A' erhält man, indem man die Geraden $[CB_a]$ und $[BC_a]$ miteinander schneidet, also $A' = [CB_a] \cap [BC_a]$:

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 A' &= \begin{pmatrix} b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ 2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ 0 \\ -2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -4a^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 2ab \sin(\alpha + \varphi) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 2ac \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} \hat{=} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} -2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \hat{=} \quad (3.1.1) \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sin(\alpha + \varphi)} \\ \frac{b}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right)} \\ \frac{c}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Als nächstes werden wir nun den Punkt B' berechnen. Dazu müssen wir wieder als erstes die homogenen baryzentrischen Koordinaten der nun um B gedrehten Punkte A und C bestimmen, betrachte hierzu Abbildung 3.9

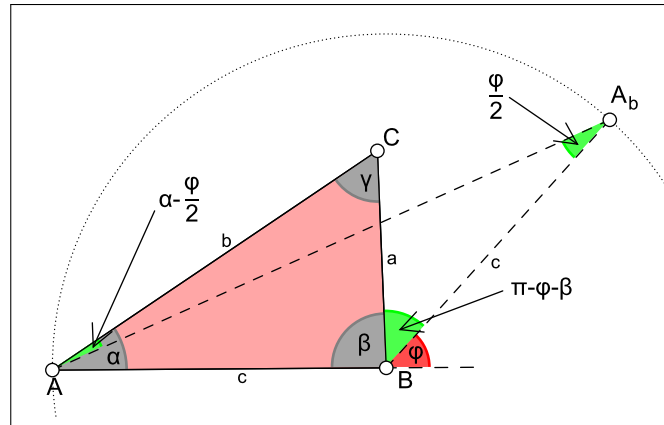


Abbildung 3.9: Der um B gedrehte Punkt A

$$A_b \hat{=} (u : v : w) = (F(\triangle_{BA_bC}) : F(\triangle_{AA_bC}) : F(\triangle_{AA_bB}))$$

Wir berechnen wie vorhin:

$$(\overline{AA_b})^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos(\pi - \varphi)$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 &= 2c^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\
 &= 4c^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \\
 \Rightarrow \overline{AA_b} &= 2c \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u : F(\triangle_{BA_bC}) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \sin(\beta + \varphi - \pi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot c[a \cdot \sin(\beta + \varphi)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v : F(\triangle_{AA_bC}) &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \overline{AA_b} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left[2c \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot c \left[2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w : F(\triangle_{AA_bB}) &= \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin(\pi - \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot c[c \cdot \sin \varphi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A_b &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot c[a \cdot \sin(\beta + \varphi)] : -\frac{1}{2} \cdot c \left[2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right] : \frac{1}{2} \cdot c[c \cdot \sin \varphi]\right) \\
 &\hat{=} \left(a \cdot \sin(\beta + \varphi) : -2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) : c \cdot \sin \varphi\right)
 \end{aligned}$$

Der um B gedrehte Punkt C besitzt das Bild C_b welcher die folgenden baryzentischen Koordinaten besitzt:

$$\begin{aligned}
 C_b &\hat{=} (u : v : w) = (F(\triangle_{BC_bC}) : F(\triangle_{AC_bC}) : F(\triangle_{ABC_b})) \\
 (\overline{CC_b})^2 &= 2a^2 - 2a^2 \cos(\pi - \varphi) \\
 &= 2a^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\
 &= 4a^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \\
 \Rightarrow \overline{CC_b} &= 2a \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

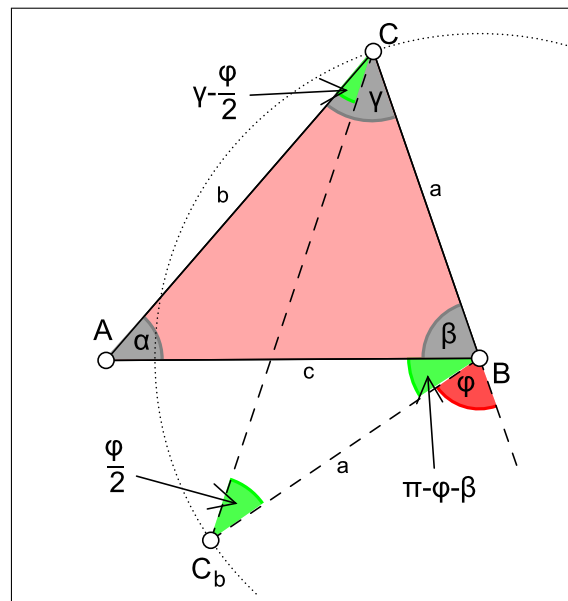


Abbildung 3.10: Der um B gedrehte Punkt C

$$\begin{aligned} \Rightarrow u : F(\triangle BC_bC) &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \sin(\pi - \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a[a \cdot \sin \varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v : F(\triangle ACC_b) &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \overline{CC_b} \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot b \left[2a \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \left[2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w : F(\triangle ABC_b) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta + \varphi - \pi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a[c \cdot \sin(\beta + \varphi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_b &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot a[a \cdot \sin \varphi] : -\frac{1}{2} \cdot a \left[2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \right] : \frac{1}{2} \cdot a[c \cdot \sin(\beta + \varphi)] \right) \\ &\hat{=} \left(a \cdot \sin \varphi : -2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) : c \cdot \sin(\beta + \varphi) \right) \end{aligned}$$

Nun ermittelt man wiederum die homogenen Geradenkoordinaten der Geraden $[AC_b]$ sowie $[CA_b]$.

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 [AC_b] &\hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cdot \sin \varphi \\ -2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c \cdot \sin(\beta + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ -2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \\
 [CA_b] &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ -2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ a \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Den Punkt B' erhält man nun, indem man die Geraden $[AC_b]$ und $[CA_b]$ miteinander schneidet, also $B' = [AC_b] \cap [CA_b]$:

$$\begin{aligned}
 B' &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ -2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ a \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2ab \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ -4b^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 2bc \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi) \end{pmatrix} \hat{=} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} a \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -2b \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \hat{=} \tag{3.1.2} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)} \\ -\frac{2b}{\sin(\beta + \varphi)} \\ \frac{c}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Als letzter Punkt muss nun auch noch C' bestimmt werden. Dieser ist der Schnittpunkt der Geraden $[AB_c]$ und $[A_cB]$, also müssen zuerst die baryzentrischen Koordinaten der Punkte A_c und B_c eruiert werden.

$$A_c \hat{=} (u : v : w) = (F(\triangle_{BCA_c}) : F(\triangle_{AA_cC}) : F(\triangle_{AA_cB}))$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

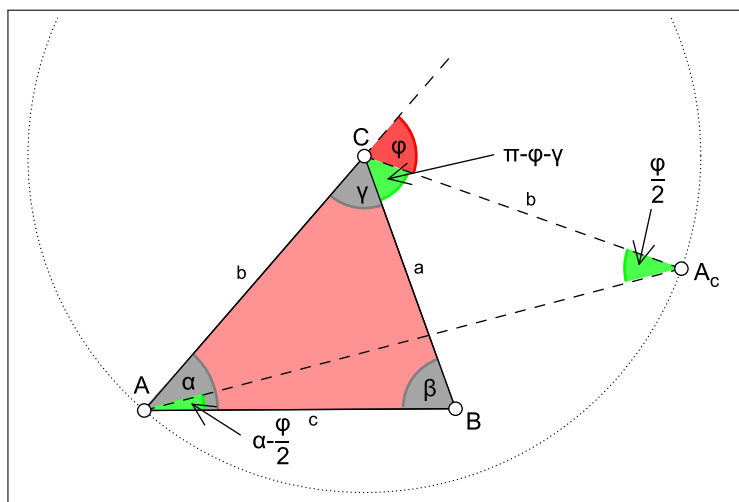


Abbildung 3.11: Der um C gedrehte Punkt A

$$\begin{aligned}
 (\overline{AA_c})^2 &= 2b^2 - 2b^2 \cos(\pi - \varphi) \\
 &= 2b^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\
 &= 4b^2 \sin^2\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \\
 \Rightarrow \overline{AA_c} &= 2b \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u : F(\triangle BCA_c) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin(\gamma + \varphi - \pi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b[a \cdot \sin(\gamma + \varphi)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v : F(\triangle AA_cC) &= \frac{1}{2} \cdot b^2 \sin(\pi - \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b[b \cdot \sin \varphi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w : F(\triangle AA_cB) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot \overline{AA_c} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot c \left[2b \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot b \left[2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_c &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot b[a \cdot \sin(\gamma + \varphi)] : \frac{1}{2} \cdot b[b \cdot \sin \varphi] : -\frac{1}{2} \cdot b \left[2c \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right) \\ &\hat{=} \left(a \cdot \sin(\gamma + \varphi) : b \cdot \sin \varphi : -2c \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$B_c = (u : v : w) \hat{=} (F(\triangle BCB_c) : F(\triangle AB_cC) : F(\triangle ABB_c))$$

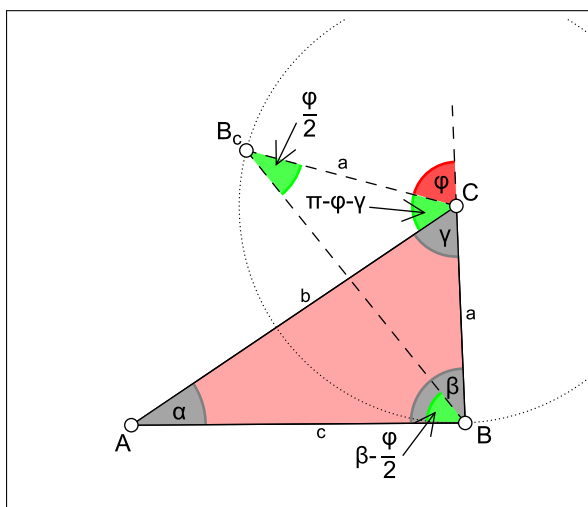


Abbildung 3.12: Der um C gedrehte Punkt B

$$\begin{aligned} (\overline{BB_c})^2 &= 2a^2 - 2a^2 \cos(\pi - \varphi) \\ &= 2a^2(1 - \cos(\pi - \varphi)) \\ &= 4a^2 \sin^2 \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right) \\ \Rightarrow \overline{BB_c} &= 2a \sin \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u : F(\triangle BCB_c) &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \sin(\pi - \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a[a \cdot \sin \varphi] \end{aligned}$$

$$v : F(\triangle AB_cC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin(\gamma + \varphi - \pi)$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$= \frac{1}{2} \cdot a [b \cdot \sin(\gamma + \varphi)]$$

$$\begin{aligned} w : F(\triangle_{ABC_b}) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot \overline{BB_c} \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot c \left[2a \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \left[2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_c &\hat{=} \left(\frac{1}{2} \cdot a [a \cdot \sin \varphi] : \frac{1}{2} \cdot a [b \cdot \sin(\gamma + \varphi)] : -\frac{1}{2} \cdot a \left[2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right) \\ &\hat{=} \left(a \cdot \sin \varphi : b \cdot \sin(\gamma + \varphi) : -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Wiederum berechnet man die homogenen Koordinaten der Verbindungsgeraden $[AB_c]$ sowie $[BA_c]$ und ermittelt die homogenen baryzentrischen Koordinaten des Punktes C' :

$$\begin{aligned} [AB_c] &\hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\varphi) \\ b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \\ -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \end{pmatrix} \\ [BA_c] &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \\ b \cdot \sin(\varphi) \\ -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \\ -a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= [AB_c] \cap [BA_c] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \\ -a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2ac \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\gamma + \varphi) \\ -2bc \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\gamma + \varphi) \\ 4c^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \hat{=} \\ &\hat{=} \begin{pmatrix} a \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -2c \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \hat{=} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\hat{=} \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2})} \\ \frac{b}{\cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2})} \\ -\frac{2c}{\sin(\gamma + \varphi)} \end{pmatrix}$$

Nachdem wir nun A' , B' und C' bestimmt haben, können wir überprüfen, ob die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zueinander perspektiv sind.

Wir berechnen die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden und kontrollieren, ob diese zusammenfallen. Ist dies der Fall so wollen wir den Schnittpunkt mit Z_φ bezeichnen. Betrachte dazu auch Abbildung 3.13.

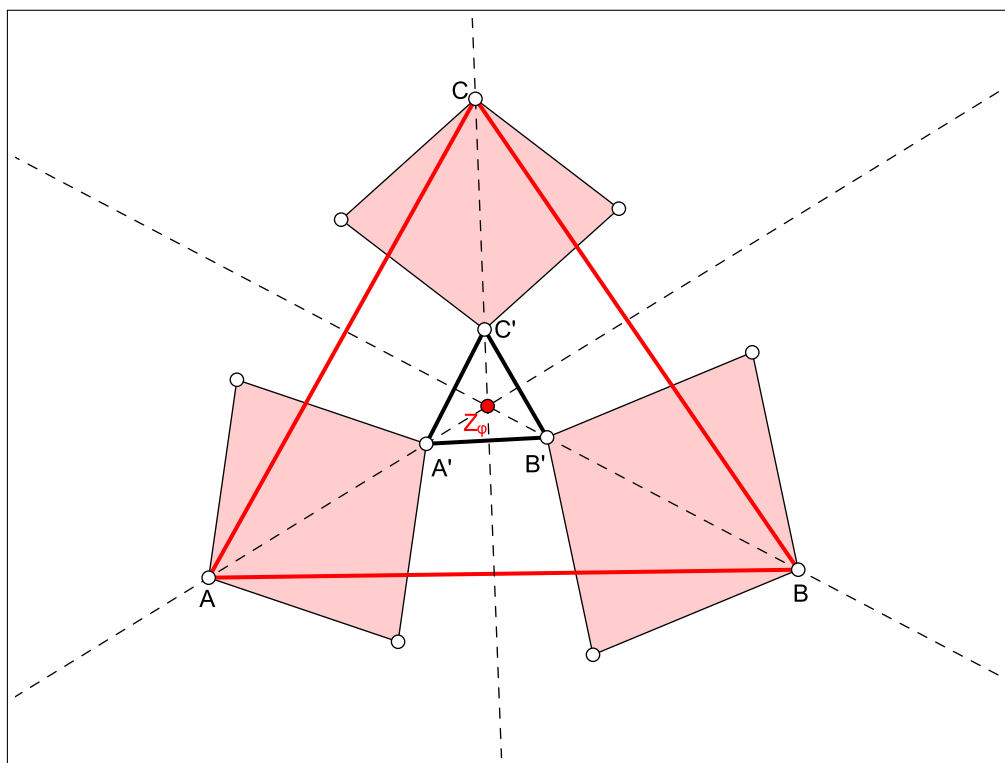


Abbildung 3.13

Zu Beginn werden wir den Schnittpunkt der Geraden $[AA']$ und $[BB']$ bestimmen, welchen wir mit Z_1 bezeichnen werden.

Die homogenen baryzentrischen Koordinaten der Punkte A' , B' und C' findet man in (3.1.1),

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

(3.1.2) und (3.1.3). Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 [AA'] &\hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a \cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ b \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ c \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \\
 [BB'] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ -2b \cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ c \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ 0 \\ -a \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \\
 [CC'] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ b \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ -2c \cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= [AA'] \times [BB'] = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ 0 \\ -a \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a \cdot c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ b \cdot c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ c^2 \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \hat{=} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ b \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \\ c \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ b \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ c \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{b \cdot c} \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \beta \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{a \cdot c} \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \gamma \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{a \cdot b} \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \hat{=} \\
&\hat{=} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \beta \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \gamma \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun folgt die Berechnung des Schnittpunkts der Geraden $[AA']$ $[CC']$, der mit Z_2 bezeichnet wird.

$$\begin{aligned}
[AA'] &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \\
[CC'] &= \begin{pmatrix} -b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \\ a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 &= [AA'] \times [CC'] = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \\ a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma + \varphi) \\ -b^2 \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \\ -b \cdot c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \hat{=} \\
&\hat{=} \begin{pmatrix} a \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \\ b \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ c \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \hat{=}
\end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ b \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ c \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{a \cdot b \cdot c} \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{b \cdot c} \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \beta \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{a \cdot c} \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \gamma \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{a \cdot b} \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \hat{=} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \beta \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \gamma \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass unabhängig von φ $Z_1 = Z_2$ gilt.

Damit folgt die Behauptung, dass die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektiv zueinander mit Zentrum $Z_\varphi = Z_1 = Z_2$ sind.

■

Satz 7. Das Zentrum Z_φ aus dem vorigen Satz liegt auf der Kiepert- Hyperbel. (Siehe auch Abbildung 3.14).

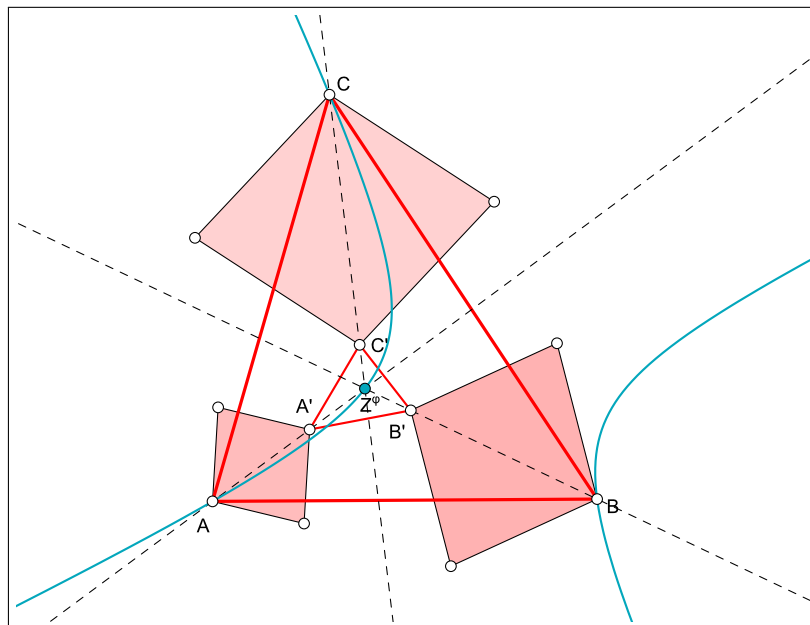


Abbildung 3.14: Perspektiv Dreiecke mit Kiepert- Hyperbel

Beweis: Die Gleichung der Kiepert- Hyperbel lautet, wie auch schon in Kapitel 2.4.2, Korollar

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

1 erwähnt:

$$\frac{a \cdot \sin(\beta - \gamma)}{u} + \frac{b \cdot \sin(\gamma - \alpha)}{v} + \frac{c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot v \cdot w \cdot \sin(\beta - \gamma) + b \cdot u \cdot w \cdot \sin(\gamma - \alpha) + c \cdot u \cdot v \cdot \sin(\alpha - \beta) = 0$$

Die Behauptung ist nun leicht nachzuweisen, indem man die homogenen baryzentrischen Koordinaten $(u : v : w)$ des Zentrums Z_φ in die Gleichung der Kiepert-Hyperbel einsetzt. Zu zeigen ist:

$$a \cdot \sin \beta \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\beta - \gamma) +$$

$$+ b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma - \alpha) +$$

$$+ c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\alpha - \beta) = 0$$

$$\forall \varphi \in \left[-\left(\frac{\varphi}{2}\right), \left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \setminus \{0\}$$

Wir formen um zu

$$\left[\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot \left[a \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\beta - \gamma) + \right.$$

$$\left. + b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma - \alpha) + c \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\alpha - \beta) \right] = 0$$

sowie zu

$$\left[\frac{\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \right] \cdot \left[\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\beta - \gamma) + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\alpha - \beta) \right] = 0.$$

Da nach dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ gilt, ist folgender Ausdruck äquivalent zum obigen:

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \right] \\
 & \cdot \left[\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\beta - \gamma) + \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin(\alpha - \beta) \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \\
 & \left[\frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \right] \\
 & \left[\left(\sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \cdot (\sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \gamma) + \right. \\
 & + \left(\sin \beta \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos \beta \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha) + \\
 & \left. + \left(\sin \gamma \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos \gamma \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \\
 & \left[\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\gamma - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \right] \\
 & \left[\sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma + \right. \\
 & - \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma + \\
 & + \sin \beta \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \\
 & - \cos \beta \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \\
 & + \sin \gamma \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \gamma \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + \\
 & \left. - \cos \gamma \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \\
 & 0 = 0
 \end{aligned}$$

Das ist eine wahre Aussage, also stimmt die Behauptung, dass das Zentrum Z_φ auf der Kiepert-Hyperbel liegt.

■

3.2 Die Perspektivitätsachse der Dreiecke ABC und $A'B'C'$

Nun kann man natürlich auch die Koordinaten der Perspektivitätsachse der als perspektiv erkannten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bestimmen. Dafür verbinden wir die Punkte A und B und schneiden sie mit der Verbindungsgeraden $[A'B']$. Analog gehen wir für B und C vor. Dann

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

erhält man die Perspektivitätsachse p als Verbindungsgerade dieser Schnittpunkte. (Siehe auch Abbildung 3.15)

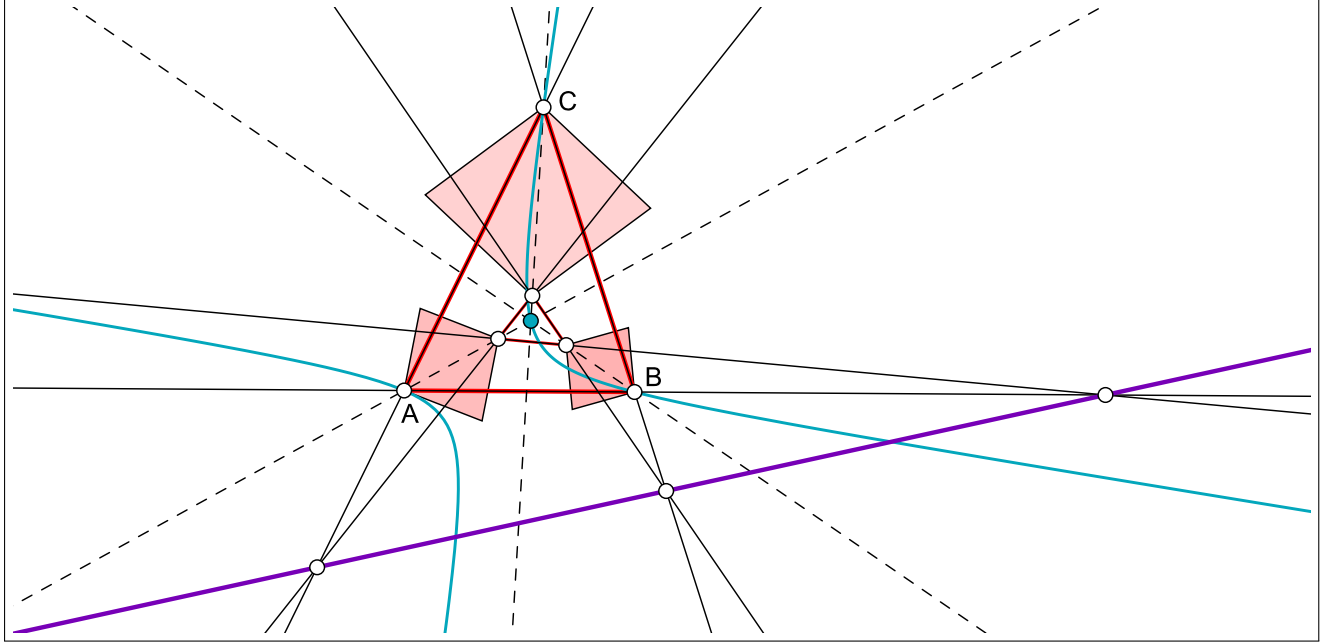


Abbildung 3.15: Perspektivitätsachse

$$\begin{aligned}
 [A'B'] &= \begin{pmatrix} 2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi) - 2bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \\ -2ac \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi) + ac \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ -4ab \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) + ab \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin^2\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \sin(\beta + \varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [-bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot [\sin(\beta + \varphi) + 2 \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)] \\ [-ac \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi)] \cdot [2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) + \sin(\alpha + \varphi)] \\ [-ab \cdot \sin^2\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot [4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta + \varphi)] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot \overbrace{\left[\sin(\beta + \varphi) + 2 \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]}^* \\ [ac \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin(\beta + \varphi)] \cdot \overbrace{\left[2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) + \sin(\alpha + \varphi) \right]}^* \\ [ab \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)] \cdot \underbrace{\left[4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta + \varphi) \right]}_{***} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 * &= \sin(\beta + \varphi) + 2 \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= \sin \beta \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \sin \varphi + 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \beta \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos \beta \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \beta \cdot \left[\cos \varphi + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \cos \beta \cdot \left[\sin \varphi - 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \beta \cdot \left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \\
 &\quad + \cos \beta \cdot \left[2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \beta \cdot \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \beta \cdot \left[1 + 2 \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \right] = \\
 &= \sin \beta \cdot [1 + 2 \cos \varphi]
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 ** &= \sin(\alpha + \varphi) + 2 \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi + 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \alpha \cdot \left[\cos \varphi + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \cos \alpha \cdot \left[\sin \varphi - 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \alpha \cdot \left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \\
 &\quad + \cos \alpha \cdot \left[2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \alpha \cdot \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\
 &= \sin \alpha \cdot \left[1 + 2 \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \right] = \\
 &= \sin \alpha \cdot [1 + 2 \cos \varphi]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 *** &= 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\beta + \varphi) = \\
 &= 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \beta \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos \beta \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \cdot \left[\sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \\
 &\quad - [\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi] \cdot [\sin \beta \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \sin \varphi] = \\
 &= 4 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin \beta \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \right.
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
& -\cos \beta \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \Big] + \\
& - \left[\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos^2 \varphi + \sin \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi + \right. \\
& \left. + \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \right] = \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \left[4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos^2 \varphi \right] + \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \left[-4 \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right] + \\
& + \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \left[-4 \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right] + \\
& + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \left[4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \varphi \right] = \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \left[4 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] + \\
& + [\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha] \cdot \left[-4 \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right] + \\
& + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \left[4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \varphi \right] = \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \left[3 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[-4 \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right] + \\
& + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \left[4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] = \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \left[3 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[-2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right] = \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \left[3 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[-2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot [1 + 2 \cos \varphi] = \\
& \quad \quad \quad \square \\
& = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \overbrace{\left[3 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right]}^{\square} - \\
& + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \varphi \cdot [1 + 2 \cos \varphi].
\end{aligned}$$

Zusätzlich ist

$$\begin{aligned}
\square & = 3 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) = \\
& = 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \\
& = 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left[\cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] - \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) =
\end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 = \\
 &= 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \\
 &= 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 = \\
 &= -\left(-4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1\right) = \\
 &= -\left(1 - 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\left(1 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right) = \\
 &= -\left(-1 - 2\left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right) = \\
 &= -(-1 - 2 \cos \varphi) = \\
 &= 1 + 2 \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

Woraus sich schließlich

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow [A'B'] &= \begin{pmatrix} bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \beta \cdot (1 + 2 \cos \varphi) \\ ac \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \alpha \cdot (1 + 2 \cos \varphi) \\ ab \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot [\sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \varphi] \cdot (1 + 2 \cos(\varphi)) \end{pmatrix} \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \beta \\ ac \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \alpha \\ ab \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot [\sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \varphi] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ergibt.

Nun kann man die homogenen baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunktes S_1 der Geraden $[AB]$ und $[A'B']$ ermitteln:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \beta \\ ac \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \alpha \\ ab \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot [\sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \varphi] \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -ac \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \alpha \\ bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\hat{=} \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnungen der weiteren Schnittpunkte $S_2 = [AC] \cap [A'C']$ und $S_3 = [BC] \cap [B'C']$ erfolgen analog. Man kann ihre homogenen baryzentrischen Koordinaten aber auch dadurch angeben, indem man mehrere zyklische Vertauschungen anwendet. Nämlich $((a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a) \Rightarrow ((\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\beta, \gamma, \alpha) \rightarrow (\gamma, \alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)) \Rightarrow ((u : v : w) \rightarrow (w : u : v) \rightarrow (v : w : u) \rightarrow (u : v : w)))$.

Daraus folgt:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \\ c \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}$$

sowie

$$S_3 = \begin{pmatrix} a \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \\ 0 \\ -c \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Die homogenen Geradenkoordinaten von $p := [S_1, S_2]$ errechnen wir zu:

$$\begin{aligned} p &= \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \\ b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -b \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \\ c \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \gamma \\ ac \cdot \sin^2(\beta + \varphi) \cdot \sin^2(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma \\ ab \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \end{pmatrix} \hat{=} \\ &\hat{=} \begin{pmatrix} bc \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ ac \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma \\ ab \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Satz 1 liegt auch S_3 auf der Geraden p .

3.3 Die Hüllkurve der Perspektivitätsachse

Da wir nun die homogenen Geradenkoordinaten des Perspektivitätsachse p ermittelt haben, können wir auch die Hüllkurve dieser Achsen bei variablen $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ berechnen.

Wir definieren:

$$l := bc \cdot \sin \beta \sin \gamma$$

$$m := ac \cdot \sin \alpha \sin \gamma$$

$$n := ab \cdot \sin \alpha \sin \beta$$

Daraus ergibt sich dann

$$p = \begin{pmatrix} l \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \frac{\varphi}{2}) \\ m \cdot \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ n \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin(\gamma - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

Mit den Additionstheoremen für Winkelfunktionen errechnet man:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin\left(\alpha - \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) &= (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) \cdot \left(\sin \alpha \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos \alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \\ &= \left[\sin \alpha \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) + 2 \cos \alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\sin \alpha \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos \alpha \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \\ &= \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \alpha \left(1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) + 2 \cos \alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\sin \alpha - \cos \alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\beta + \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) &= (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) \cdot \left(\sin \beta \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos \beta \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \\ &= \left[\sin \beta \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) + 2 \cos \beta \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\sin \beta \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos \beta \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \\ &= \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[\sin \beta \left(1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) + 2 \cos \beta \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\sin \beta - \cos \beta \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

und

$$\sin(\gamma + \varphi) \cdot \sin\left(\gamma - \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = (\sin \gamma \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi) \cdot \left(\sin \gamma \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos \gamma \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) =$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sin \gamma \left(\cos^2 \left(\left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right) + 2 \cos \gamma \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sin \gamma \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \cos \gamma \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] = \\
 &= \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left[\sin \gamma \left(1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) + 2 \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sin \gamma - \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 p &= \left(\begin{array}{l} l \cdot \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot [\sin \alpha (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \alpha \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \alpha - \cos \alpha \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \\ m \cdot \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot [\sin \beta (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \beta \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \beta - \cos \beta \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \\ n \cdot \cos^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot [\sin \gamma (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \gamma - \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \end{array} \right) \hat{=} \\
 &\hat{=} \left(\begin{array}{l} l \cdot [\sin \alpha (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \alpha \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \alpha - \cos \alpha \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \\ m \cdot [\sin \beta (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \beta \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \beta - \cos \beta \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \\ n \cdot [\sin \gamma (1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)) + 2 \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \cdot [\sin \gamma - \cos \gamma \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)] \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Nun setzt man $\tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) := u$ und erhält:

$$p(u) = \left(\begin{array}{l} l \cdot [\sin \alpha \cdot (1 - u^2) + 2u \cdot \cos \alpha] \cdot [\sin \alpha - u \cos \alpha] \\ m \cdot [\sin \beta \cdot (1 - u^2) + 2u \cdot \cos \beta] \cdot [\sin \beta - u \cos \beta] \\ n \cdot [\sin \gamma \cdot (1 - u^2) + 2u \cdot \cos \gamma] \cdot [\sin \gamma - u \cos \gamma] \end{array} \right)$$

Dies ist eine rationale, kubische Parametrisierung der Geradenmenge p . $p(u)$ ist daher im Allgemeinen eine rationale Kurve 3. Klasse.

$p(u)$ kann man auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 p(u) &= \overbrace{\begin{pmatrix} l \sin^2 \alpha \\ m \sin^2 \beta \\ n \sin^2 \gamma \end{pmatrix}}{:=k_0} + u \overbrace{\begin{pmatrix} l \cdot \sin \alpha \cos \alpha \\ m \cdot \sin \beta \cos \beta \\ n \cdot \sin \gamma \cos \gamma \end{pmatrix}}{:=k_1} + u^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -l(1 + \cos^2 \alpha) \\ -m(1 + \cos^2 \beta) \\ -n(1 + \cos^2 \gamma) \end{pmatrix}}{:=k_2} + u^3 \overbrace{\begin{pmatrix} l \cdot \sin \alpha \cos \alpha \\ m \cdot \sin \beta \cos \beta \\ n \cdot \sin \gamma \cos \gamma \end{pmatrix}}{:=k_3} \hat{=} \\
 &\hat{=} k_0 + u \cdot k_1 + u^2 \cdot k_2 + u^3 \cdot k_3
 \end{aligned}$$

Zur Hüllkurve kommt man nun, indem man $p(u)$ mit der durch $\dot{p}(u) := \frac{dp}{du}|_u$ erhaltenen „Nachbarsgeraden“ schneidet:

$$\begin{aligned}
 h(u) := p(u) \times \dot{p}(u) &= [k_0 + u \cdot k_1 + u^2 \cdot k_2 + u^3 \cdot k_3] \times [k_1 + 2u \cdot k_2 + 3u^2 \cdot k_3] = \\
 &= k_0 \times k_1 + u(k_1 \times k_1 + 2k_0 \times k_2) + u^2(k_2 \times k_1 + 2k_1 \times k_2 + 3k_0 \times k_3) +
 \end{aligned}$$

3 Einem Dreieck umschriebene Rhomben

$$\begin{aligned}
 &+ u^3(3k_1 \times k_3 + 2k_2 \times k_2 + k_3 \times k_1) + u^4(3k_2 \times k_3 + 2k_3 \times k_2) + u^5(k_3 \times k_3) = \\
 = &k_0 \times k_1 + u(2k_0 \times k_2) + u^2(k_2 \times k_1 + 2k_1 \times k_2 + 3k_0 \times k_3) + \\
 &+ u^3(3k_1 \times k_3 + k_3 \times k_1) + u^4(k_2 \times k_3)
 \end{aligned}$$

Diese Hüllkurve $h(u)$ ist daher im Allgemeinen eine rationale Kurve 4. Ordnung.

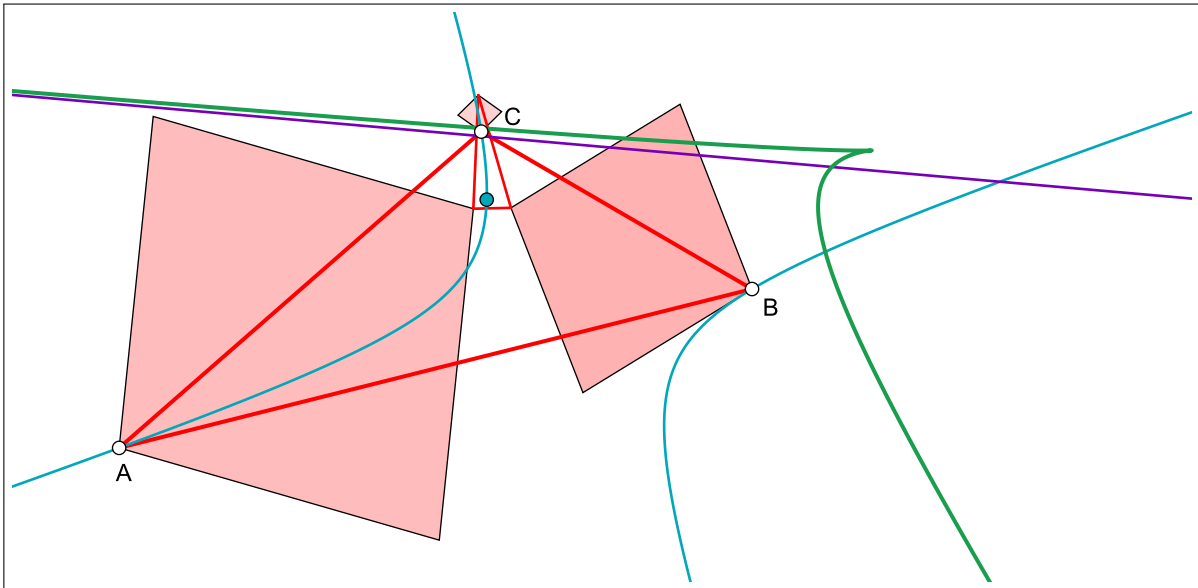


Abbildung 3.16: Hüllkurve (grün)

4 Die sphärische Darstellung des Problems

In der letzten Zeit wurden immer wieder überraschende Resultate zu Kiepert- Konstruktionen für sphärische Dreiecke veröffentlicht (siehe [4] und [9]). Deshalb stellt sich die Frage, ob die schon in Kapitel 3 angeführten Resultate auch für das sphärische Gegenstück gelten. Um diese Sachverhalte zuerst einmal rein zeichnerisch zu überprüfen, wurde die für die Ebene angegebene Konstruktion auf die Sphäre umgelegt.

Seien $1, 2, 3, 4$ vier nicht paarweise, bezüglich der Kugelmitte symmetrische Kugelpunkte. Die verbindenden Großkreisbögen bilden die Kanten eines sphärischen Vierecks.

Definition 3. *Man nennt ein sphärisches Viereck mit gleichlangen Seiten sphärischen Rhombus, wenn es bei den Spiegelungen an den Großkreisen durch die Punkte 1 und 3 beziehungsweise 2 und 4 in sich übergeht und die jeweils gegenüberliegenden Winkel in diesem Viereck sind gleich groß.*

In einem sphärischer Rhombus stehen im Allgemeinen die Diagonalen orthogonal zueinander.

Gegeben sind also drei beliebige Punkte A, B und C auf einer Kugel welche ein sphärisches Dreieck bilden (siehe Abbildung 4.1) und der Winkel 2φ , um den dann in späterer Folge gedreht wird.

Gesucht sind sphärische Rhomben $R_A(2\varphi)$ mit Ecke in A , $R_B(2\varphi)$ mit Ecke in B und $R_C(2\varphi)$ mit Ecke in C deren A (B bzw. C) gegenüberliegende Seiten die Dreiecksecken B und C (C und A bzw. A und B) enthalten.

4 Die sphärische Darstellung des Problems

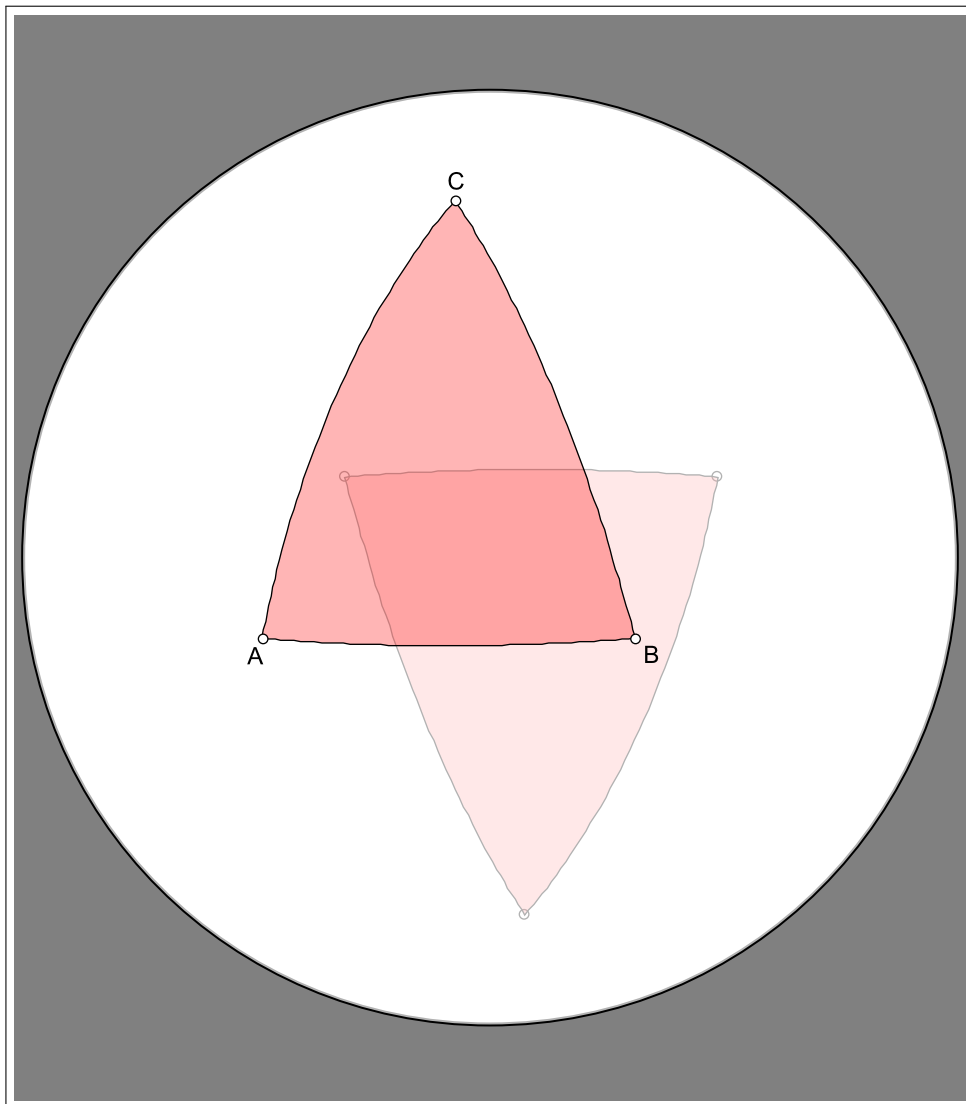


Abbildung 4.1: Sphärisches Dreieck

Für die erste Raute wurde wieder ein Punkt (hier A) als fix ausgezeichnet und B bzw. C wurden um den Winkel $\pi - 2\varphi$ bzw. $2\varphi - \pi$ gedreht.

Die neu gewonnen Punkte wurden, wie im ebenen Fall, nun wieder mit den Ausgangspunkten (hier B und C) mit Hilfe von Großkreisen verbunden. Anschließend werden diese Großkreise miteinander geschnitten, wodurch der erste Eckpunkt A' der Raute entsteht. Daraufhin werden die beiden Großkreise an der Symmetrieebene der Verbindungsstrecke AA' gespiegelt, wodurch die restlichen beiden Eckpunkte der Raute entstehen. Betrachte dazu auch Abbildung 4.2.

4 Die sphärische Darstellung des Problems

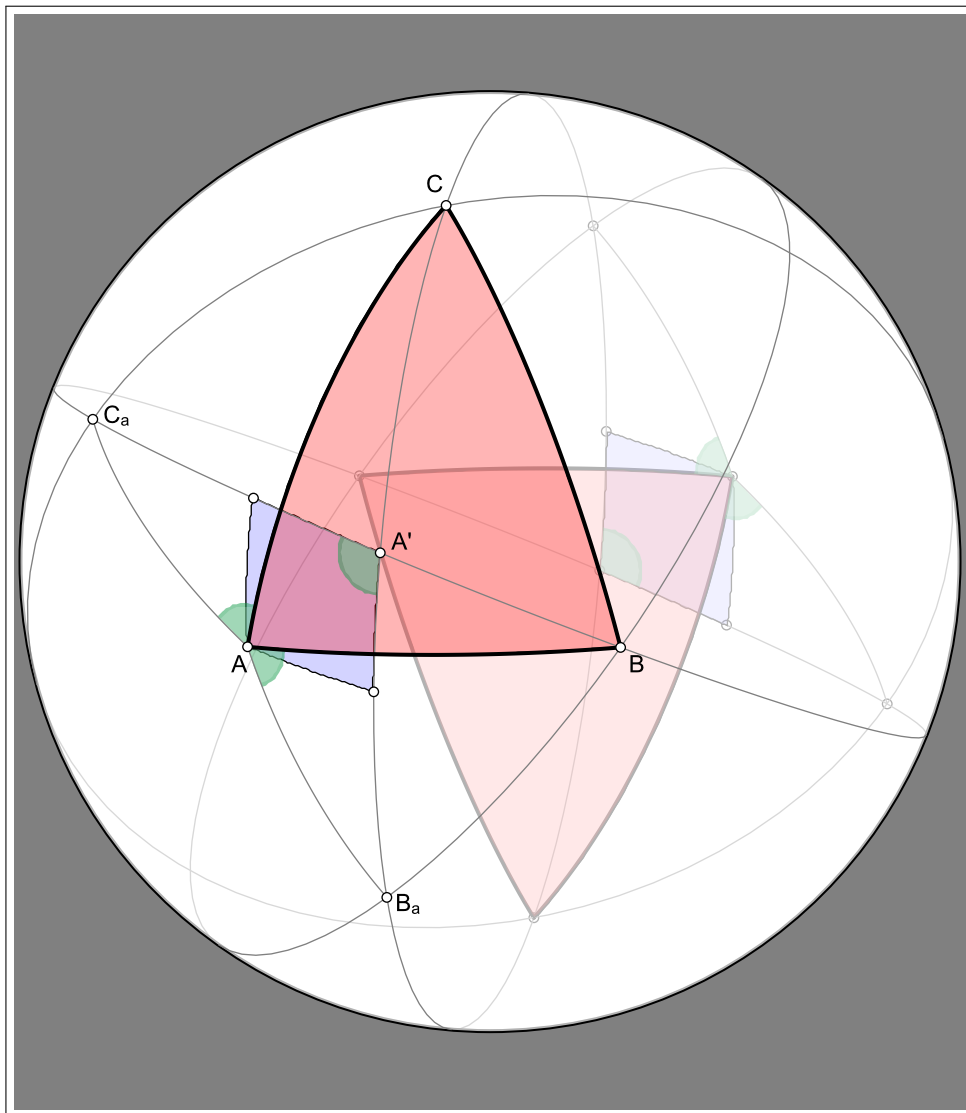


Abbildung 4.2: Der Rhombus $R_A(2\varphi)$

Nun kann man die restlichen beiden Rauten $R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$ analog erzeugen - siehe Abbildung 4.3.

4 Die sphärische Darstellung des Problems

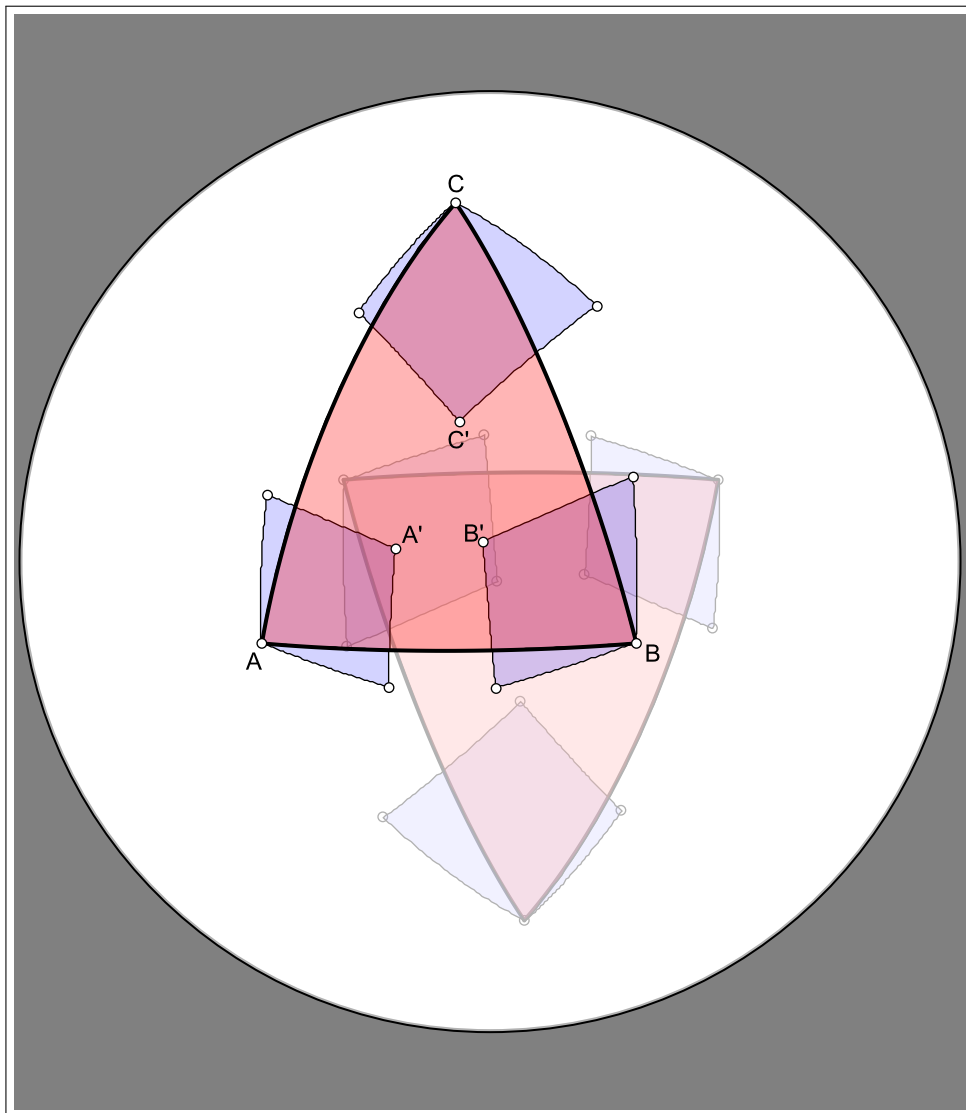


Abbildung 4.3: Die Rhomben $R_A(2\varphi)$, $R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$

Weiters kann man jetzt wieder die Eigenschaften dieser Rauten, die in der Ebene schon angegeben wurden, überprüfen. So zum Beispiel als erstes ob die Diagonalen der Rauten, welche nicht durch die Eckpunkte ABC des Dreiecks gehen ein Kiepert Dreieck $K(\varphi)$ bilden. Abbildung 4.4 zeigt dies so ermittelte Dreieck.

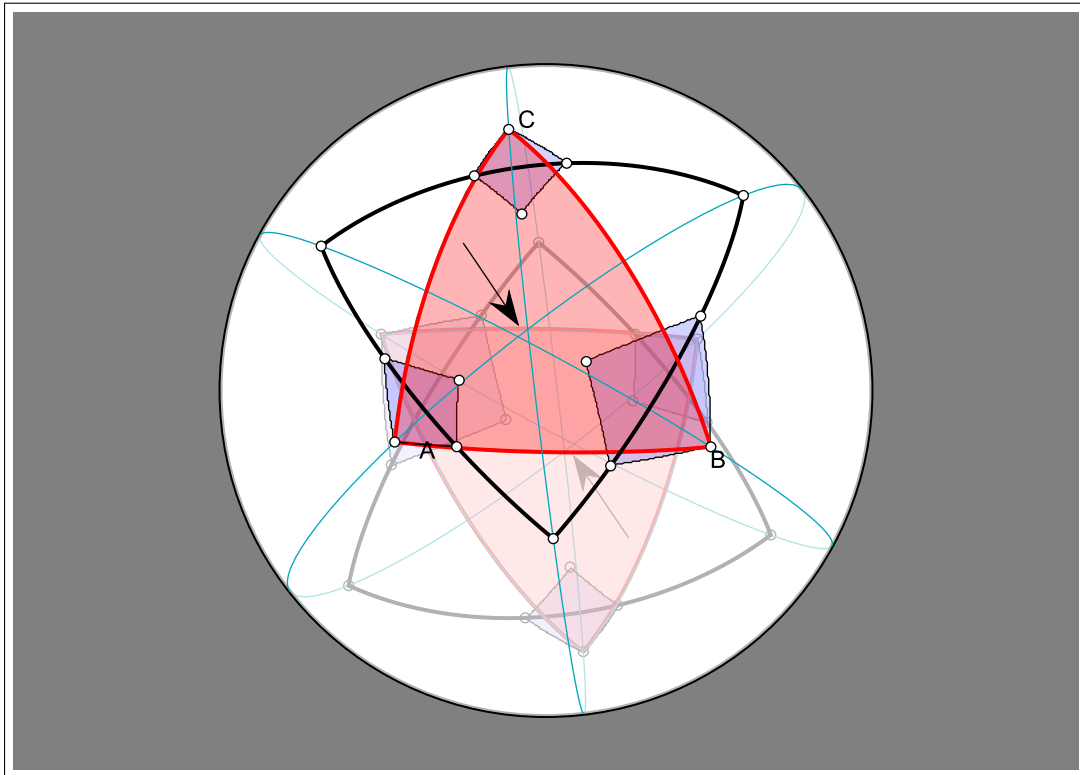


Abbildung 4.4

Es liegt ersichtlich nicht perspektiv zum Dreieck ABC (siehe Pfeil). Dabei heißen zwei Dreiecke perspektiv bezüglich eines Zentrums, wenn die Ebenen der drei Großkreisverbindungen entsprechender Punkte koaxial liegen. Diese Großkreise müssten sich daher auf der Kugel in zwei bezüglich der Kugelmittle gegenüberliegenden Punkte schneiden. Da sphärische *Kiepert-Dreiecke* bezüglich des Ausgangsdreiecks perspektiv liegen, gilt somit folgender Satz.

Satz 8. *Die die Dreiecksecken A , B und C nicht enthaltenden Diagonalen der oben konstruierten sphärischen Rhomben $R_A(2\varphi)$, $R_B(2\varphi)$ und $R_C(2\varphi)$ fallen im sphärischen Fall im Allgemeinen nicht mehr mit den Seiten eines sphärischen Kiepert-Dreiecks zu ABC zusammen. Das von den Rhombendiagonalen gebildete sphärische Dreieck liegt im Allgemeinen nicht perspektiv zum sphärischen Dreieck ABC .*

Bemerkung 8.1. Der in der Ebene, mit Hilfe des Peripheriewinkelsatz geführte Nachweis dieses Sachverhalts gelingt auf der Kugel deshalb nicht mehr, weil der Peripheriewinkelsatz sphärisch im Allgemeinen nicht gilt.

Zusätzlich kann man noch die Aussagen bezüglich der Perspektivität der Dreiecke ABC und

4 Die sphärische Darstellung des Problems

$A'B'C'$ überprüfen. Auch hier sieht man anhand eines Beispiels, dass auch diese Eigenschaft auf der Sphäre im Allgemeinen nicht gegeben ist - siehe Abbildung 4.5.

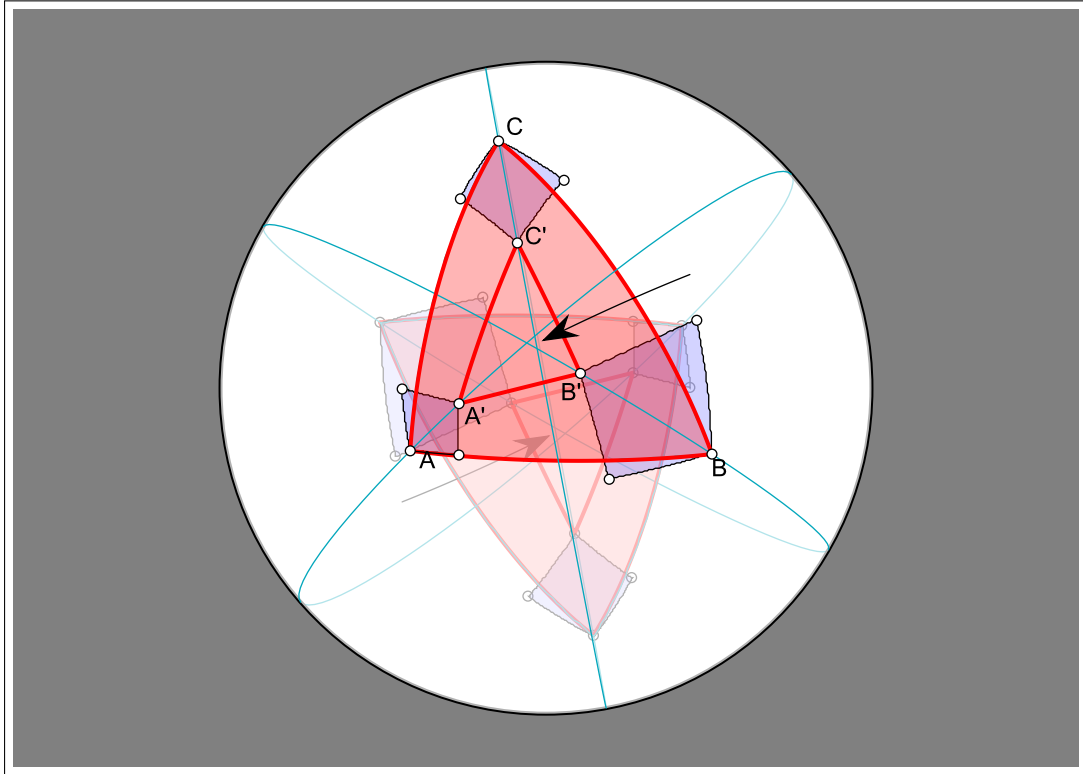


Abbildung 4.5

Auch hier folgt folgender Satz als Resultat.

Satz 9. *Im Allgemeinen liegen die Ecken ABC des sphärischen Dreiecks und die Ecken $A'B'C'$ der eben konstruierten sphärischen Rhomben nicht perspektiv bezüglich eines Zentrums und daher auch nicht perspektiv bezüglich einer Achse.*

Literaturverzeichnis

- [1] Hoschek J., Lasser D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teuber, 278-280, (1992), 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage
- [2] van Lamoen F., Yiu P.: *The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas*. Forum Geom. **10**, 125-132 (2001).
- [3] van Lamoen F.: *Circumrhombi*. Forum Geom. **3**, 215-223 (2003).
- [4] Kourzilova T.: *Durch Spiegelungen erzeugte Analogien zu einem Resultat von L. Kiepert*. Diplomarbeit, 9-14, (2013)
- [5] Eddy R.H., Fritsch R.: *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle*. Mathematics Magazine **Vol 67**, 188-204 (1994).
- [6] Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Kiepert- Hyperbel
- [7] Koecher M., Krieg A.: *Ebene Geometrie 3*, Springer Berlin, 160-162 (2007)
- [8] van Lamoen F.: *Triangle Centers Associated with Rhombi*. Elemente der Mathematik. **55**, 102-109 (2000).
- [9] Mick S., Lang J.: *Kiepert Conics in Regular CK- Geometries*. Journal for Geometry and Graphics **Vol 17**, No.2, 155-161 (2013)