

Markus SCHWINGENSCHLÖGL

Mathematische Modelle des akustischen Verhaltens von Werkstoffen in der Fahrzeugindustrie

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieur

Diplomstudium Technische Mathematik



Graz University of Technology
Technische Universität Graz



Betreuer:

Ao.Univ.-Prof.i.R. Dipl.-Ing. Dr.techn. Otto LABACK

Institut für Mathematische Strukturtheorie

Graz, im Jänner 2012

Danksagung

Diese Diplomarbeit entstand im Rahmen eines Forschungsprojekts, an dem das ACC und Magna Steyr Engineering beteiligt waren. Mein Dank gilt allen Mitarbeitern, die bei der Bearbeitung des Projekts und dadurch bei der Entstehung dieser Arbeit mitgeholfen haben. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Dr. Stephan Brandl, der mein direkter Ansprechpartner am ACC war. Seine Unterstützung war in vielerlei Hinsicht eine große Hilfe. Ebenso möchte ich Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Hans Herwig Priebisch danken, der mir die Mitarbeit an dem Projekt angeboten und mir sein Vertrauen bzgl. der Anfertigung dieser Diplomarbeit entgegengebracht hat.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Otto Laback von der Technischen Universität Graz, der mir nicht nur eine Projektarbeit bei der AVL List GmbH ermöglicht, sondern auch den Kontakt zu Herrn Dr. Priebisch herstellt und meine Diplomarbeit betreut hat. Sein Rat und sein Verständnis haben mir sehr geholfen.

Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Prof. Raymond Panneton, Ph. D., von der Université de Sherbrooke in Quebec (Kanada) bedanken, der mir bei einigen Detailfragen zu seiner Arbeit sehr weitergeholfen, und mir freundlicherweise seine Veröffentlichungen zur Verfügung gestellt hat.

In speziellem Maße danke ich meinen Eltern und meinem Bruder, die mich während meines gesamten Studiums und auch während der Arbeit an diesem Projekt immer unterstützt haben.

Für Adele

Zusammenfassung

Während der letzten beiden Jahrzehnte hat sich die Akustik im KFZ-Innenraum zu einem Wettbewerbskriterium entwickelt. Um Vorhersagen über das Geräuschniveau im Innenraum machen zu können, ist es notwendig, über das akustische Verhalten der im Fahrzeugbau verwendeten Ausstattungsmaterialien (z.B. Teppiche, Sitze, Kunststoffverkleidungen, etc.) Bescheid zu wissen. Diese Eigenschaften lassen sich grundsätzlich auf zwei Arten bestimmen. Entweder versucht man sie zu messen oder sie unter Verwendung physikalischer Materialparameter zu berechnen. Die vorliegende Arbeit geht den zweiten Weg, der mehrere Vorteile verspricht.

Die Simulation der akustischen Materialeigenschaften ist kostengünstiger als umfangreiche Messungen und benötigt auch weniger Zeit. Darüber hinaus ermöglicht es die mathematische Modellierung Vorhersagen für ganze Produktgruppen zu treffen. Dadurch können die Kosten, die während der Entwicklungsphase eines Fahrzeugs entstehen, erheblich gesenkt werden. Zudem können vibroakustische Erwägungen sehr früh im Entwicklungsprozess eines Fahrzeugs berücksichtigt werden.

Untersucht werden Theorien und Rechenmodelle für die charakteristische Impedanz und die Wellenzahl (Ausbreitungskonstante) bzw. für die effektive Dichte und den Kompressionsmodul poröser Medien, da diese Parameter das akustische Verhalten der Werkstoffe charakterisieren. Die Simulation wird für unterschiedliche Schichtdicken von Materialien und mehrschichtige Materialien bei senkrechtem aber auch bei schrägem Schalleinfall durchführbar sein. In weiterer Folge werden Methoden zur Berechnung der zugehörigen energetischen Größen wie Reflexionsgrad, Absorptionsgrad, Transmissionsgrad, Transmission Loss (Schalldämmmaß) angegeben. Die gewonnenen Ergebnisse dienen schließlich als Inputparameter für eine Simulation mittels statistischer Energieanalyse (SEA).

Abstract

Over the last two decades automotive interior acoustics has developed into a decisive competitive edge. It is necessary to understand the acoustic properties of all equipment and material used in vehicle production (e.g. carpets, seats, plastic cladding), to be able to make predictions about the interior noise level. These properties can be calculated using two distinct methods. They either have to be measured or they can be calculated using their physical material parameters. This thesis explores the second method which promises several advantages.

The simulation of acoustic material properties is more cost-effective and takes less time. Furthermore, the mathematical modeling enables engineers to make predictions about whole product groups. Thus, the vehicle development costs can be reduced significantly. In addition, vibro-acoustic considerations can be incorporated in the early stages of the vehicle development process.

Theories and computational models for the characteristic impedance and wave number (propagation constant) as well as for the effective density and the bulk modulus porous media shall be studied, since these parameters characterize the acoustic properties of a material. The simulations will be feasible for materials of different layer thicknesses as well as multilayered materials at perpendicular and oblique sound incidence. Subsequently, methods for the computation of the corresponding energetic parameters (reflection coefficient, absorption coefficient, transmission coefficient, transmission loss) will be given. The generated results will serve as input parameters of a simulation using Statistical Energy Analysis (SEA).

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Motivation	1
0.2	Ziel der Arbeit	1
0.3	Durchführung der Arbeit	2
0.4	Gliederung der Arbeit	3
1	Grundlagen der Akustik	5
1.1	Grundbegriffe zu Schallwellen und Schallfeldern	5
1.1.1	Erzeugung und Wahrnehmung von Schall	5
1.1.2	Schallfeldgrößen	7
1.1.3	Schallpegelmaße	11
1.2	Theorie der Schallwellenausbreitung in Gasen und Fluiden	13
1.2.1	Grundbegriffe der Wellenausbreitung	13
1.2.2	Hydrodynamische und akustische Grundgleichungen	15
1.2.3	Wellengleichung	19
1.2.4	Lösungen der Wellengleichung	20
2	Schallausbreitung im ebenen Wellenfeld in homogenen Gasen und Fluiden	25
2.1	Schallfeldphänomene	25
2.1.1	Reflexion	26
2.1.2	Brechung	26
2.1.3	Beugung an einem Spalt	27
2.1.4	Stehende Wellen	27
2.2	Der senkrechte Schalleinfall	28
2.2.1	Impedanzunterschiede innerhalb eines Mediums	29
2.2.2	Impedanzberechnung beim Medienwechsel	30
2.2.3	Reflexionsgrad	31
2.2.4	Absorptionsgrad	32
2.2.5	Mehrschichtige Medien	34
2.3	Der schräge Schalleinfall	37
2.3.1	Reflexion und Brechung	37
2.3.2	Impedanzberechnung beim Medienwechsel	39
2.3.3	Impedanzberechnung in einem mehrschichtigen Medium	40
2.3.4	Reflexionsgrad und Absorptionsgrad	41

3	Mathematische Modelle poröser Absorber	43
3.1	Charakterisierung poroelastischer Materialien	43
3.1.1	Parameterspezifikation der Fluidkomponente	44
3.1.2	Parameterspezifikation der Festkörperkomponente	46
3.1.3	Spezifikation der Kopplungsparameter	47
3.2	Hierarchische Modellübersicht	52
3.2.1	Modelle für Materialien mit elastischem Skelett	53
3.2.2	Modelle für Materialien mit biegesteifem Skelett	54
3.2.3	Modelle für Materialien mit formlabilem Skelett	55
3.3	Empirische Modelle	57
3.3.1	DELANY und BAZLEY	57
3.3.2	MECHEL	58
3.3.3	MIKI	58
3.3.4	KOMATSU	59
3.3.5	ALLARD und CHAMPOUX	60
3.3.6	Weitere Regressionsmodelle aus der Literatur	61
3.4	Analytische Modelle	61
3.4.1	ZWIKKER und KOSTEN	62
3.4.2	BIOT-Modell für biegesteifes Skelett	62
3.5	Semiphänomenologische Modelle	63
3.5.1	ATTENBOROUGH	64
3.5.2	JOHNSON et al. Modell für die effektive Dichte	64
3.5.3	PRIDE et al. Modell für die effektive Dichte	66
3.5.4	CHAMPOUX-ALLARD Modell für den Kompressionsmodul	66
3.5.5	LAFARGE et al. Modell für den Kompressionsmodul	67
3.5.6	WILSON	68
3.5.7	Zusammenfassung der Modelle	69
3.5.8	Ermittlung der Parameter für das JOHNSON-LAFARGE-Modell	69
3.6	BIOT-Modell für elastischen Rahmen	73
3.6.1	Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen	74
3.6.2	Bestimmung von P, Q und R	77
3.6.3	Wellengleichungen	77
4	Validierung der Modelle	79
4.1	Messverfahren - Impedanzrohr	79
4.1.1	Übertragungsfunktionmethode nach ISO EN 10534-2	79
4.1.2	Berechnung der akustischen Parameter	81
4.2	Messdaten	82
4.3	Validierung der empirischen Modelle	82
4.3.1	Mischfaservlies 20 [mm]	83
4.3.2	EuroFoam 40 [mm]	86

4.3.3	Zusammenfassung	88
4.4	Validierung der semiphänomenologischen Modelle	88
4.4.1	Modelle für die effektive Dichte	89
4.4.2	Modelle für den Kompressionsmodul	89
4.4.3	Validierung der analytisch bestimmten Parameter für das JOHNSON-LAFARGE- Modell	90
5	Einführung in die Statistische Energieanalyse	95
5.1	Entwicklung der SEA	96
5.2	Grundlegende SEA-Theorie	96
5.2.1	Energiebilanz und SEA-Parameter	96
5.2.2	Subsysteme	98
5.2.3	Die Statistik in der SEA	99
5.3	Anwendung der SEA	100
5.3.1	Experimentelle SEA	100
5.3.2	Analytische SEA	100
5.4	Berechnung der energetischen Größen für die SEA	101
5.4.1	Energiebilanz beim Medienwechsel	101
5.4.2	Energetische Größen	103
5.5	Literaturhinweise	106
6	Zusammenfassung und Ausblick	109
	Literaturverzeichnis	113
	Symbolverzeichnis	118
	Stichwortverzeichnis	121

Abbildungsverzeichnis

1.1	Hörfläche	7
1.2	Kurven gleichen Lautstärkepegels	12
1.3	Unterschiedliche Wellenarten	13
1.4	Wellenfront	15
1.5	Elementarvolumen	17
1.6	Darstellung einer Sinusschwingung.	21
2.1	Reflexion - Schema	25
2.2	Brechung - Schema	26
2.3	Beugung an Spalt	27
2.4	Stehende Wellen	28
2.5	Ebene Wellen, die sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten.	29
2.6	Einlaufende, reflektierte und transmittierte Wellen in 2 Medien vor einer Wand.	31
2.7	Beim Medienwechsel werden eine reflektierte und eine absorbierte Welle induziert.	33
2.8	Drei Fluidschichten, mit bekannter Impedanz in x_1	35
2.9	Einlaufende, reflektierte und transmittierte Wellen in 3 Medien.	35
2.10	Medienwechsel bei schrägem Schalleinfall.	39
2.11	Eine Fluidschicht der Dicke d vor einer schallharten Wand.	40
2.12	Medienwechsel bei schrägem Schalleinfall.	40
3.1	Poröses Material mit zylindrischen Poren im Winkel φ zur Oberflächennormalen	49
3.2	Hierarchische Darstellung von Modellen poroelastischer Materialien.	56
3.3	Deformation von (P, Q) zu (P', Q')	75
4.1	Aufbau eines Impedanzrohres	80
4.2	Mischfaservlies 20 [mm] - Impedanz: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell vs. Messung.	83
4.3	Mischfaservlies 20 [mm] - Absorptionsgrad: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell vs. Messung.	84
4.4	Mischfaservlies 20 [mm] - Impedanz: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.	85
4.5	Mischfaservlies 20 [mm] - Absorptionsgrad: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.	85

4.6	EuroFoam 40 [mm] - Impedanz: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.	87
4.7	EuroFoam 40 [mm] - Absorptionsgrad: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.	87
4.8	Tortuosität - Fehler bei indirekter Extraktion.	92
4.9	Viskose charakteristische Länge - Fehler bei indirekter Extraktion.	93
4.10	Strömungswiderstand - Fehler bei indirekter Extraktion.	93
4.11	Thermische charakteristische Länge - Fehler bei indirekter Extraktion.	94
4.12	Thermische Permeabilität - Fehler bei indirekter Extraktion.	94
5.1	Energiefluss in zwei gekoppelten Subsystemen	97
5.2	Energiebilanz beim Medienwechsel - Schema	102
5.3	Einfügung einer porösen Absorberschicht - Schema	103
5.4	Skizze des Aufbaus zur Messung des Transmission Loss	105

Tabellenverzeichnis

1.1	Zusammenhänge zwischen Schwingung und Schalleindruck	6
1.2	Bildungsgesetze für Oktavbänder und Terzbänder	6
1.3	Kenngrößen einer Welle	15
3.1	Koeffizienten und Exponenten für Parameterpaar Z_c und k zur Darstellung (3.70)- (3.71)	61
3.2	Semiphänomenologische Modelle mit ihrer benötigten Parameteranzahl.	69
4.1	Mischfaservlies 20 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorptionsgrades: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell.	84
4.2	Mischfaservlies 20 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorptionsgrades: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell.	86
4.3	Mischfaservlies 20 [mm] - Fehler bei der Simulation des Absorptionsgrades des GA- RAI/POMPOLI-Modells.	86
4.4	EuroFoam 40 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorp- tionsgrades: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell. . .	88

0 Einleitung

0.1 Motivation

Bei der Entwicklung eines Automobils spielt das Fachgebiet der Akustik eine immer größere Rolle. Während der letzten beiden Jahrzehnte hat sich die Akustik im Fahrzeuginnenraum zu einem Wettbewerbskriterium entwickelt. Die Automobilindustrie bemüht sich daher ständig um eine Weiterentwicklung der wissenschaftlichen Modellbildung und der messtechnischen Vorgehensweise. Aufgrund der Auswirkungen auf die Kaufentscheidung von Kunden versucht man die Akustik immer früher im Fahrzeugentwicklungsprozess zu berücksichtigen.

Firmen wie das Grazer Unternehmen ACC - Acoustic Competence Centre liefern einen entscheidenden Beitrag zu diesem Bemühen, in dem sie im Bereich der Modellbildung und Simulation immer neue Wege gehen und innovative Konzepte vorstellen.

Simulationsmethoden und computergestützte Berechnungsverfahren helfen dabei, die akustische Entwicklungsarbeit in frühe Stadien des Gesamtentwicklungsprozesses zu integrieren, da mit ihrer Hilfe Optimierungen an virtuellen Bauteilen vorgenommen werden können. Durch diese effiziente Vorgehensweise kann der Bau von aufwändigen und kostenintensiven Prototypen oftmals entfallen. Darüber hinaus ist es möglich, Studien über die physikalischen Parameter von Bauteilen (z.B. Bodenteppich, Dachhimmel, Sitzbezüge, Kunststoffverkleidungen) durchzuführen, die Aufschluss über das akustische Verhalten der verwendeten Materialien geben.

Trotz der immer größer werdenden Rechenleistung heutiger Computer befinden sich die sehr komplexen Rechenmodelle, vor allem im Bereich der FEM (Finite Element Methode) und BEM (Boundary Element Methode), an der Grenze des numerisch Berechenbaren. Im hochfrequenten Bereich kann die Statistische Energieanalyse (SEA) hier häufig Abhilfe schaffen. In vielen Fällen ist sie sogar die einzige Möglichkeit Probleme der hochfrequenten Schwingungsakustik zu lösen.

0.2 Ziel der Arbeit

Der Hauptzweck dieser Arbeit ist die Erstellung einer mathematischen Algorithmik, die es dem Anwender erlaubt, von physikalischen Materialparametern bis zur Modellierung des Energieaustausches bei der SEA zu gelangen. Dazu werden mathematische Berechnungsmodelle akustischer Eigenschaften von Ausstattungsmaterialien entwickelt. Untersucht werden die Auswirkungen dieser Materialien auf das Schallfeld im KFZ-Innenraum, wobei die Bereiche Absorption, Transmission

(bzw. Transmission Loss, Schalldämmmaß) und Dissipation beleuchtet werden. Die durch die Simulation zugänglich gemachten Energiegrößen werden als Inputparameter für die statistische Energieanalyse (SEA) herangezogen, die dann den vibroakustischen Energiefluss des gesamten Fahrzeugs ermöglicht.

Durch die Erstellung eines solchen mathematischen Gesamtkonzeptes können aufwändige Messverfahren eingespart und vibroakustische Erwägungen sehr früh in den Entwicklungsprozess eines KFZ integriert werden. Praxisorientierte Modellrechnungen dienen als Beispiele für die tatsächliche Anwendung. Ein weiterer Nutzen besteht in der einheitlichen Notation, die in der Literatur nur sehr selten zu finden ist. Von Seiten des Anwenders ist es auch wünschenswert, ein Nachschlagewerk zur Hand zu haben, in dem die Grundlagen der Akustik ausführlich besprochen werden und die Zusammenhänge der einzelnen Größen betrachtet werden. Diesem Wunsch wird ebenfalls entsprochen, da die Arbeit als Leitfaden dient, der alle Arbeitsschritte genau erklärt, die Theorie dahinter bespricht und auch Antworten auf Detailfragen gibt.

Um all das zu ermöglichen, werden zunächst die physikalischen Grundlagen detailliert behandelt. Danach werden im Sinne der numerischen Akustik mathematische Modelle erstellt, die Inputparameter für Simulationen mittels der kommerziellen Software *VA One - SEA Module* (früher *AutoSEA*) liefern. Dieses Vorgehen wird durch die breite Einsetzbarkeit der SEA und ihre Alternativenlosigkeit im hochfrequenten Bereich motiviert.

Die Anwendung der implementierten Algorithmen wird anhand von Beispielen erläutert. Bei der Auswahl der Simulationsverfahren wird auf die messtechnische Zugänglichkeit der benötigten physikalischen Materialparameter geachtet. Um flexible Gestaltungsmöglichkeiten zu gewährleisten, werden Methoden zur analytischen Bestimmung der Materialparameter entwickelt.

Zur Validierung der Modelle werden messtechnische Verfahren, wie Impedanzrohrmessungen, eingesetzt, deren theoretischer Hintergrund erläutert wird. Durch die bezüglich ihrer Abbildung der Realität evaluierten Modelle werden dem Anwender die nötigen Instrumente an die Hand gegeben, um die Inputparameter für die SEA, mittels Simulation, aus physikalischen Materialparametern zu bestimmen und um in weiterer Folge statistische Aussagen über den Energieaustausch der Subsysteme eines Fahrzeugs machen zu können.

Mit Hilfe von MAPLE und MATLAB wird ein Softwarepaket erstellt, das die besprochenen Modelle benutzerfreundlich berechnen kann.

0.3 Durchführung der Arbeit

Die Arbeit wurde im Rahmen einer Beschäftigung am ACC - Acoustic Competence Centre und an der Technischen Universität Graz in der Studienrichtung Technische Mathematik (Studienzweig Informationsverarbeitung) durchgeführt. Am ACC wurde ein umfangreiches Literaturstudium be-

trieben, und die messtechnischen Daten wurden ermittelt. Die mathematischen Modelle wurden an der Technischen Universität Graz unter der Anleitung von Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Otto Laback und am ACC mit der Hilfe einiger Mitarbeiter und vor allem mit der Unterstützung von Herrn Dipl.-Ing. Dr. Stephan Brandl erstellt.

0.4 Gliederung der Arbeit

Folgende Abschnitte sollen den logischen Aufbau der Arbeit gewährleisten und zum einfachen Verständnis beitragen:

- **Grundlagen der Akustik:** In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe zu Schallfeldern besprochen und die Schallfeldgrößen und Pegelmaße eingeführt. Danach wird der für den Umfang der Arbeit notwendige Teil der hydrodynamischen und akustischen Grundgleichungen, sowie deren mathematische Behandlung diskutiert.
- **Theorie der Wellenausbreitung in Gasen und Fluiden:** Die bei der Schallausbreitung auftretenden Phänomene werden mathematisch aufbereitet und sowohl für senkrechten als auch für schrägen Schalleinfall präsentiert. Dabei wird das Konzept der akustischen Impedanz detailliert dargestellt und in weiterer Folge werden die Grundzüge von Reflexion, Absorption und Transmission behandelt.
- **Mathematische Modelle poröser Absorber:** Nach einer grundsätzlichen Charakterisierung poroelastischer Materialien und einer hierarchischen Modellübersicht, werden unterschiedliche Modellansätze aufbereitet, die auf Werkstoffe mit *biegesteifem Rahmenskelett* und Werkstoffe mit *elastischem Rahmenskelett* angewandt werden können. Des Weiteren werden Simulationsmodelle zur Berechnung von akustischen Eigenschaften aus physikalischen Materialparametern erstellt.
- **Validierung der Modelle:** Die besprochenen Modelle werden anhand von Messdaten und theoretischen Überlegungen validiert. Die verwendeten messtechnischen Verfahren werden erläutert.
- **Einführung in die SEA:** Nach einem kurzen Überblick über die Entwicklung und die Anwendung der SEA, wird analysiert, wie aus den aus der Simulation erhaltenen Parametersätzen die energetischen Größen, die für die SEA als Inputparameter benötigt werden, bestimmt werden können.
- **Zusammenfassung und Ausblick:** Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit werden zusammengefasst dargestellt, und weiterführendes Forschungspotential wird skizziert.

1 Grundlagen der Akustik

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die theoretischen Grundlagen der Akustik gegeben. Zunächst werden die wichtigsten Grundbegriffe, Grundgrößen und das Konzept der Pegelmaße vorgestellt. Danach wird die Wellengleichung anhand der zugrundeliegenden Hydrodynamik hergeleitet, wobei ideale Gase bzw. Flüssigkeiten vorausgesetzt werden. Diese Annahme rechtfertigt sich durch die sehr große Genauigkeit der Ergebnisse für Luftschall im Hörfrequenzbereich. Im Hinblick auf die spätere Verwendung in den Absorbertheorien, werden schließlich einfache Lösungen der Wellengleichung besprochen.

Der Rahmen für die Behandlung dieser Lösungen sind homogene, isotrope, unendlich ausgedehnte Medien. Die wichtigsten Erkenntnisse werden aus der Betrachtung linearer Schallfelder gewonnen. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung führt zu stehenden, ebenen Wellen. Zum Schluss werden die für die Akustik besonders interessanten harmonischen (sinusförmigen) Lösungen in unterschiedlichen Darstellungen präsentiert.

Den Abschluss des Kapitels bildet eine kurze Betrachtung der Phänomene, die auftreten, wenn die Schallausbreitung auf inhomogene bzw. begrenzte Medien eingeschränkt wird.

1.1 Grundbegriffe zu Schallwellen und Schallfeldern¹

In diesem Abschnitt werden einige der wesentlichen Größen für Schallwellen und Schallfelder zusammengestellt, die in den folgenden Abschnitten verwendet werden.

Definition 1.1 (Schallwellen). *Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind mechanische Longitudinalwellen. In Festkörpern sind auch Transversalwellen möglich. Ausgehend von der Schallquelle, einem schwingenden Körper, breiten sich Schallwellen in Form von kleinsten Druck- und Dichtestörungen in einem elastischen Medium (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) aus.*

1.1.1 Erzeugung und Wahrnehmung von Schall

Schallquellen

Jeder schwingende Körper, der Schallwellen abstrahlt, wird als Schallquelle bezeichnet. Man kann eine Unterteilung in *mechanische*, *elektrische* und *thermische Schallerzeuger* vornehmen. Mechanische Schallerzeuger (dazu gehören Saiten, Stäbe, Membranen, usw.) sind die bekanntesten.

¹Die Definitionen aus diesem Abschnitt sind nach dem Vorbild des entsprechenden Kapitels in [35] gestaltet.

Frequenzen zwischen 16 [Hz] und 16 [kHz] bezeichnet man als Hörbereich (siehe *Hörfläche*) für das menschliche Ohr, obwohl der obere Grenzwert meist nicht erreicht wird. Frequenzen unterhalb dieser Grenze werden als Infraschall bezeichnet, Frequenzbereiche darüber (bis ca. 10 [GHz]) als Ultraschall .

Im Allgemeinen bestehen folgende Verbindungen zwischen den Schwingungen einer Schallquelle und der Wahrnehmung:

<i>Schwingung</i>		<i>Schalleindruck</i>
Amplitude	\longleftrightarrow	Lautstärke
Frequenz	\longleftrightarrow	Tonhöhe
Schwingungsform	\longleftrightarrow	Klangfarbe

Tabelle 1.1: Zusammenhänge zwischen Schwingung und Schalleindruck

Hörfläche

Eine Übersicht über die vom menschlichen Ohr wahrnehmbaren Intensitäts- und Frequenzbereiche bietet die Hörfläche (Abbildung 1.1). Hörbar ist für ein *normales* menschliches Ohr nur das, was innerhalb dieser Fläche liegt.

Man erkennt in der folgenden Grafik, dass bei gleichem Schalldruck Töne unterschiedlicher Frequenz vom Ohr verschieden laut wahrgenommen werden. Da das Ohr für 1000 [Hz] den größten Intensitätsbereich wahrnehmen kann, werden Lautstärken auf diese Frequenz bezogen.

Terz- und Oktavbänder

Der Frequenzbereich von 16 [Hz] – 16 [kHz] wird logarithmisch in Oktaven und Terzen, d.h. Dritteloktaven, unterteilt. Bei der größeren Oktavunterteilung entspricht jeder Oktavschritt einer Frequenzverdoppelung. Die Terzschrte unterteilen eine Oktave logarithmisch in drei gleiche Teile. Jede Oktave bzw. Terz ist durch die untere und obere Eckfrequenz (f_u, f_o) bestimmt. Die Mittenfrequenz f_m teilt den Oktav- bzw. Terzschrift in zwei logarithmisch gleiche Teile. Die jeweilige Mittenfrequenz benennt die entsprechende Oktave bzw. Terz.

<i>Oktavband</i>	<i>Terzband</i>
$f_o = 2f_u$	$f_o = \sqrt[3]{2}f_u$
$f_m \approx 0,7f_o \approx 1,41f_u$	$f_m = 1,12f_u \approx 0,9f_o$

Tabelle 1.2: Bildungsgesetze für Oktavbänder und Terzbänder

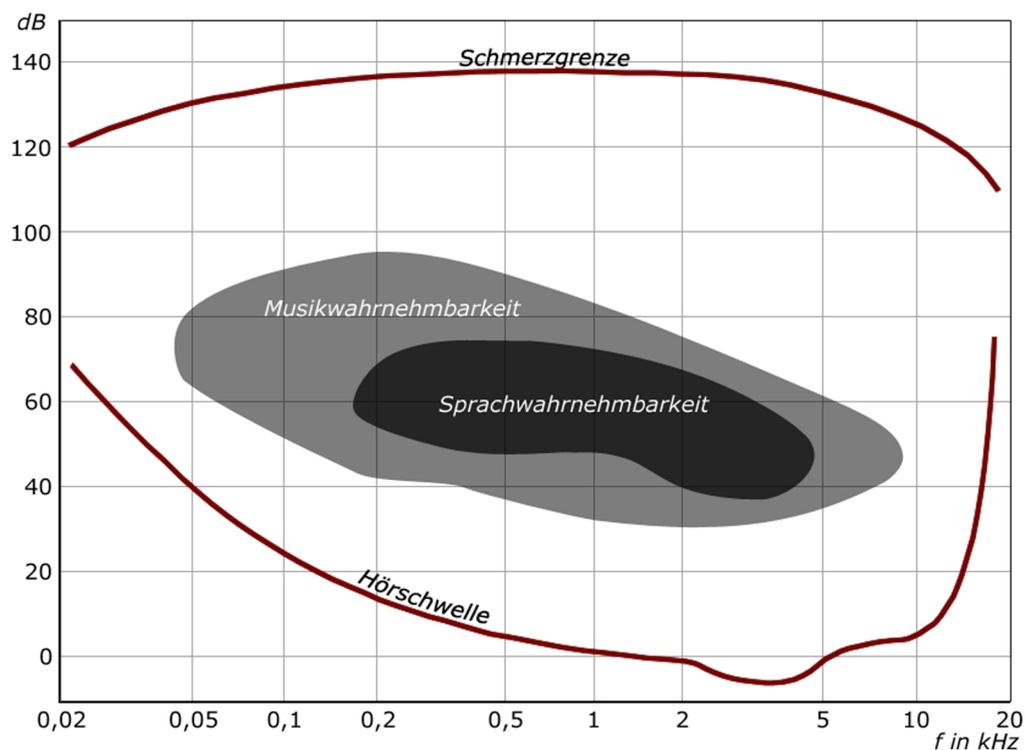


Abbildung 1.1: Hörfläche

1.1.2 Schallfeldgrößen

Die physikalischen Größen des Schallfeldes haben, im Gegensatz zum allgemeinen Wellenfeld, spezielle Bezeichnungen.

Schallgeschwindigkeit

Definition 1.2 (Schallgeschwindigkeit). *Die Schallgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) c gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle in einem Medium wieder. Sie ist unabhängig von der Frequenz und wird (bei genügend kleinen Amplituden) nur von den mechanischen Eigenschaften des Mediums beeinflusst.*

Schallgeschwindigkeit in Festkörpern: Wenn

c	Schallgeschwindigkeit in einem Festkörper
E	Elastizitätsmodul
ρ_0	Dichte des Festkörpers

dann gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (1.1)$$

Bemerkung 1.1. *Wie man sieht, ist die Schallgeschwindigkeit c wegen der Dichte ρ_0 temperaturabhängig.*

Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten: Wenn

c	Schallgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit
K	Kompressionsmodul = $1/\chi$
χ	Kompressibilität
ρ_0	Dichte der Flüssigkeit

dann gilt

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho_0}}. \quad (1.2)$$

Bemerkung 1.2. *Der Kompressionsmodul K ist das Verhältnis der Druckänderung Δp_0 zur dadurch erzielten relativen Volumenänderung $\Delta V/V$:*

$$K = -\frac{\Delta p_0 \cdot V}{\Delta V}. \quad (1.3)$$

Schallgeschwindigkeit in Gasen: Es gilt

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa R T_a} \quad (1.4)$$

mit

c	Schallgeschwindigkeit in einem Gas
κ	= $C_p/C_V \approx 1,4$ in Luft, Adiabatenexponent
ρ_0	Gasdichte
p_0	Gasdruck
R	Gaskonstante
T_a	absolute Temperatur (Kelvin)

Schallgeschwindigkeit in Luft: Wenn

c	Schallgeschwindigkeit in Luft bei Temperatur T_0 (Celsius)
T_a	absolute Temperatur (Kelvin)
T_0	= $T_a - 273,15$ Temperatur der Luft (Celsius)

dann gilt mit hinreichender Genauigkeit

$$c = (331,6 + 0,6T_0) \text{ [m/s]}. \quad (1.5)$$

Schallschnelle

Definition 1.3 (Schallschnelle). *Als Schallschnelle \vec{v} , gemessen in [m/s], bezeichnet man die Wechselgeschwindigkeit der Teilchen des jeweiligen Mediums um ihre Ruhelage, also eine Momentangeschwindigkeit. Sie ist der Geschwindigkeit der Teilchen ohne Schall v_0 überlagert.*

Wenn

\vec{v}	Schallschnelle
$\vec{\bar{v}}$	Gesamtgeschwindigkeit der Teilchen des Mediums
\vec{v}_0	Geschwindigkeit der Teilchen ohne Schall

dann gilt für die Schallschnelle

$$\vec{\bar{v}} = \vec{v}_0 + \vec{v}. \quad (1.6)$$

Schalldruck

Definition 1.4 (Schalldruck). *Der Schalldruck p , gemessen in [N/m²] oder [Pa], bezeichnet die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Er ist dem statischen Druck p_0 des Mediums überlagert.*

Wenn

p	Schalldruck
\bar{p}	Gesamtdruck des Mediums
p_0	Ruhewert des Drucks des Mediums

dann gilt für den Schalldruck

$$\bar{p} = p_0 + p. \quad (1.7)$$

Schallintensität

Definition 1.5 (Schallintensität). *Die Schallintensität \vec{I} , gemessen in [W/m²] = [kg/s³], auch Schallstärke genannt, gibt die Energie pro Zeiteinheit und Flächenelement an.*

Wenn

\vec{I}	Schallintensität
ρ_0	Dichte des Mediums
c	Schallgeschwindigkeit im Medium
\vec{v}	Schallschnelle
p	Schalldruck

dann gilt

$$I = p\vec{v} = \frac{p^2}{\rho_0 c} = \vec{v}^2 \rho_0 c. \quad (1.8)$$

Schalleistung

Definition 1.6 (Schalleistung). Die Schalleistung P , gemessen in [W], bezeichnet die pro Zeiteinheit von einer Schallquelle abgegebenen Schallenergie. Sie ist das Integral der Intensitätsbeiträge der Flächenelemente dA einer um die Schallquelle gelegten Fläche A .

Wenn

P	Schalleistung
\vec{I}	Schallintensität
A	Durchschallte Fläche

dann gilt

$$P = \int_A \vec{I} dA. \quad (1.9)$$

Charakteristische Impedanz

Definition 1.7 (Charakteristische Impedanz). Die charakteristische Impedanz (Schallkennimpedanz, Wellenwiderstand) Z_c , gemessen in $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^3] = [\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{m}]$, ergibt sich aus dem Quotienten aus Schalldruck und Schallschnelle und ist ein Maß für den Widerstand, der der Schallausbreitung entgegengesetzt wird.

$$Z_c = \frac{p}{\vec{v}} = \rho_0 c \quad (1.10)$$

mit

\vec{v}	Schallschnelle
p	Schalldruck
ρ_0	Dichte des Mediums
c	Schallgeschwindigkeit im Medium

Wellenzahl

Definition 1.8 (Wellenzahl). Die Wellenzahl (auch Kreiswellenzahl) k ist der Betrag des Wellenvektors \vec{k} , der die Ausbreitungsrichtung einer Welle angibt, und wird in $[1/\text{m}]$ gemessen.

$$k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (1.11)$$

mit

λ	Wellenlänge
ω	Kreisfrequenz
c	Phasengeschwindigkeit

1.1.3 Schallpegelmaße

Wird das Verhältnis zweier Größen mit gleicher Einheit logarithmisch wiedergegeben, so spricht man von Pegeln. Grundsätzlich ist jeder Pegel L als Logarithmus einer Verhältnisgröße dimensionslos und besitzt keine Einheit. Zur Kennzeichnung verwendet man aber die Bezeichnung *Dezibel* [dB] wie eine Einheit.

Bemerkung 1.3. *Schallpegelangaben sind objektiv, sie lassen die frequenzabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs unberücksichtigt.*

Schalldruckpegel

Definition 1.9 (Schalldruckpegel). *Als Schalldruckpegel L_p bezeichnet man den 20fachen dekadischen Logarithmus vom Verhältnis zweier Schalldrücke.*

Bemerkung 1.4. *Man bestimmt den absoluten Schalldruckpegel mit Hilfe des Bezugsschalldruckes $p_0 = 20 \text{ } [\mu\text{Pa}] = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } [\text{Pa}]$.*

Wenn

L_p	Schalldruckpegel
p	Schalldruck, dessen Pegel bestimmt werden soll
p_0	Bezugsschalldruck

dann gilt

$$L_p = 20 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \text{ [dB]}. \quad (1.12)$$

Schallintensitätspegel

Definition 1.10 (Schallintensitätspegel). *Als Schallintensitätspegel L_I bezeichnet man den 10fachen dekadischen Logarithmus vom Verhältnis zweier Schallintensitäten.*

Bemerkung 1.5. *Man bestimmt den absoluten Schallintensitätspegel mit Hilfe der Bezugsschallintensität $I_0 = 10^{-12} \text{ } [\text{W}/\text{m}^2]$.*

Wenn

L_I	Schallintensitätspegel
I	Schallintensität, deren Pegel bestimmt werden soll
I_0	Bezugsschallintensität

dann gilt

$$L_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ [dB]}. \quad (1.13)$$

Schalleistungspegel

Definition 1.11 (Schalleistungspegel). Als Schalleistungspegel L_W bezeichnet man den 10fachen dekadischen Logarithmus vom Verhältnis zweier Schalleistungen.

Bemerkung 1.6. Man bestimmt den absoluten Schalleistungspegel mit Hilfe der Bezugsschalleistung $W_0 = 10^{-12}$ [W].

Wenn

L_W	Schalleistungspegel
W	Schalleistung, deren Pegel bestimmt werden soll
W_0	Bezugsschalleistung

dann gilt

$$L_W = 10 \log \left(\frac{W}{W_0} \right) \text{ [dB]}. \quad (1.14)$$

Lautstärkepegel

Die Lautstärke ist eine physiologische Größe, mit der der Mensch eine Schallstärke subjektiv wahrnimmt. Sie wird in *Phon* angegeben und ist wie Dezibel keine Einheit, sondern kennzeichnet nur den 20fachen Logarithmus eines Schalldruckverhältnisses.

Wenn

L_N	Lautstärkepegel
p	Schalldruck eines gleich laut empfundenen 1000-Hz-Tones
p_0	Bezugsschalldruck = 20 [μ Pa]

dann gilt

$$L_N = 20 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \text{ [Phon]}. \quad (1.15)$$

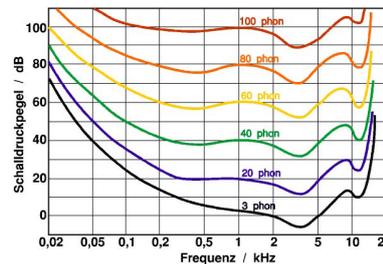


Abbildung 1.2: Kurven gleichen Lautstärkepegels

1.2 Theorie der Schallwellenausbreitung in Gasen und Fluiden

Definition 1.12 (Mechanische Welle). *Einen Schwingungsvorgang in einem ausgedehnten Medium, das aus einer großen Anzahl schwingungsfähiger, miteinander gekoppelter Teilchen besteht, nennt man mechanische Welle. Jedes dieser Teilchen das zum Schwingen angeregt wird, wird zum Zentrum einer sich ausbreitenden Wellenbewegung.*

1.2.1 Grundbegriffe der Wellenausbreitung

Wellenarten

Entsprechend der Ausbreitungsmöglichkeiten (Ausbreitung in Rohr, im Freien etc.) unterscheidet man prinzipiell zwischen linearen Wellen, ebenen Wellen und Raumwellen (z.B. Kugelwellen). Lösung der Wellengleichung und mathematische Behandlung werden für alle drei Wellenfelder in Abschnitt 1.2.4 gegeben.

Zusätzlich lassen sich Wellen bezüglich der Art ihrer Ausbreitung unterscheiden:

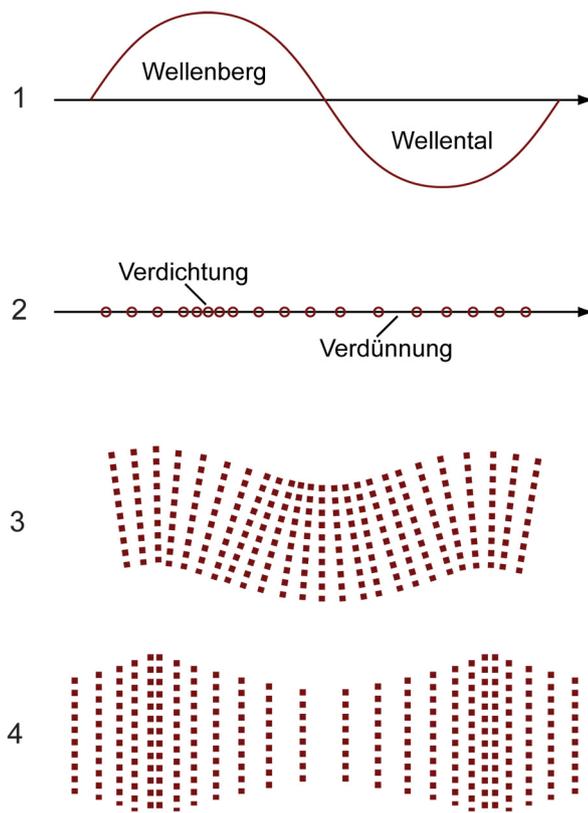


Abbildung 1.3: Unterschiedliche Wellenarten

Longitudinalwellen: Die Bewegung erfolgt bei Longitudinalwellen in Ausbreitungsrichtung, und Verdichtungen und Verdünnungen wechseln sich ab. Sie treten in unendlich ausgedehnten Medien auf (d.h. die Ausdehnung des Mediums ist sehr groß im Vergleich zur Wellenlänge). Longitudinalwellen in begrenzten Medien werden Dehnwellen genannt. Siehe Abbildung 1.3, 2.

Beispiel: Schallwellen in unbegrenzten Gasen oder Flüssigkeiten.

Transversalwellen: Transversalwellen treten in Körpern ebenfalls unendlich ausgedehnt auf, wobei es zu Schubverformung, aber nicht zur Volumenänderung kommt. Die Teilchenbewegung erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. In ihnen wechseln Wellenberge und Wellentäler. Siehe Abbildung 1.3, 1.

Beispiel: Schallwelle in festen, unbegrenzten Körpern.

Torsionswellen: Torsionswellen sind ein Spezialfall von Transversalwellen, wobei die Auslenkung in Form von Drehbewegungen um die Ausbreitungsrichtung auftritt.

Beispiel: Schallwelle in festen, begrenzten Körpern, wie etwa Stäben.

BiegeWellen: BiegeWellen sind vor allem auf plattenförmigen Körpern von Bedeutung. Die Auslenkung erfolgt senkrecht zur Plattenoberfläche mit zusätzlicher Winkelbewegung und produziert am ehesten eine Schallabstrahlung von festen Körpern. Siehe Abbildung 1.3, 4.

Rayleighwellen: Oberflächenwellen, deren Amplitude von der Oberfläche hin zum Inneren des Körpers exponentiell abnehmen.

Huygenssches Prinzip

Jede Art der Wellenausbreitung basiert auf dem HUYGENSSchen Prinzip:

Satz 1.13 (HUYGENSSches Prinzip). *Jeder Punkt eines Mediums, der von einer Wellenbewegung erfasst wird, wird zum Ausgangspunkt einer neuen Welle (Elementarwelle).*

Die vielen entstehenden Elementarwellen überlagern sich, und es ergibt sich schließlich eine gemeinsame Wellenfront.

Kenngrößen einer Welle

Hier werden die wichtigsten Größen einer linearen, harmonischen Welle (Sinuswelle) zusammengefasst.

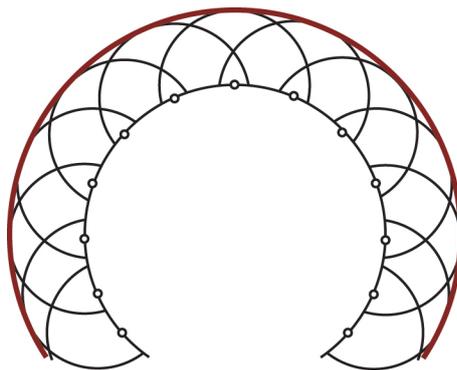


Abbildung 1.4: Wellenfront

Bezeichnung	Symbol	SI-Einheit	Beschreibung
Elongation (Auslenkung)	$y = \hat{y} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$	[m]	Auslenkung eines Teilchens am Ort x zum Zeitpunkt t
Amplitude	\hat{y}	[m]	Amplitude der erregenden Schwingung und der Welle
Wellenlänge	λ	[m]	Abstand zweier Teilchen gleicher Phase
Frequenz	f	[Hz] = [1/s]	Frequenz, mit der jedes Teilchen schwingt
Periode	$1/f$	[s]	Dauer einer Welle
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi f$	[1/s]	Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, deren Projektion die erregende Schwingung ergibt
Phasengeschwindigkeit	$c = \lambda f = \omega/k$	[m/s]	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle
Wellenzahl	$k = \omega/c$	[1/m]	Winkel, den die Sinuswelle pro Strecke durchläuft

Tabelle 1.3: Kenngrößen einer Welle

1.2.2 Hydrodynamische und akustische Grundgleichungen

Bei der Betrachtung von Schallfeldern interessiert man sich im Allgemeinen für große (sogar unendlich große) Massen und Volumina von Gasen und Flüssigkeiten. Der physikalische Zustand solcher Medien lässt sich angemessen durch den Druck \bar{p} , die Dichte $\bar{\rho}$ des Mediums und die Geschwindigkeit \vec{v} der Teilchen des Mediums (respektive der Temperatur) beschreiben.

Die vom Schall induzierten Änderungen dieser Zustandsgrößen sind meistens sehr gering im Vergleich zu den ohne Schall vorhandenen statischen Ruhewerten p_0, ρ_0, \vec{v}_0 . Diese Abweichungen ergeben die bereits in Abschnitt 1.1.2 definierten Größen **Schalldruck** p , **Schalldichte** ρ und **Schallschnelle** \vec{v} . Zusammen mit den Ruhewerten sind sie die **Schallfeldgrößen**, die mit ihren Orts- und Zeitabhängigkeiten das Schallfeld beschreiben:

$$\begin{aligned}\bar{p}(\vec{s}, t) &= p_0 + p(\vec{s}, t) \\ \bar{\rho}(\vec{s}, t) &= \rho_0 + \rho(\vec{s}, t) \\ \vec{v}(\vec{s}, t) &= \vec{v}_0 + \vec{v}(\vec{s}, t) \approx \vec{v}(\vec{s}, t).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Das wesentliche Ergebnis dieses Abschnittes werden die drei Grundgleichungen zur Beschreibung von Schallfeldern in Gasen und Flüssigkeiten sein. Als theoretische Grundlage dazu dienen die beiden EULERSchen Gleichungen für ideale, kompressible Flüssigkeiten aus der Hydrodynamik sowie die adiabatische Zustandsgleichung, die in der Folge eingeführt werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf die Literatur verwiesen, beispielsweise auf [42] und [49].

Bewegungsgleichung

Ausgangspunkt für die erste EULERSche Gleichung ist das 2. NEWTONSche Axiom

$$\vec{F} = m\vec{a}\tag{1.17}$$

mit

\vec{F}	Kraft
m	Masse
\vec{a}	Beschleunigung

Für eine Kraftwirkung in x -Richtung auf ein Elementarvolumen (Abbildung 1.5) gilt offensichtlich

$$F_x = ma_x = \bar{\rho} dx dy dz \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}.\tag{1.18}$$

Da man für die Kraftwirkung auch

$$\vec{F} = \bar{p}\vec{A}\tag{1.19}$$

mit

\vec{F}	Kraft
\bar{p}	Druck
\vec{A}	Fläche, auf die der Druck ausgeübt wird

schreiben kann, gilt für die Kraftdifferenz in x -Richtung

$$F_x = \bar{p}_x A_x = (\bar{p}(x) - \bar{p}(x + dx)) dy dz = \frac{\bar{p}(x) - \bar{p}(x + dx)}{dx} dx dy dz = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dx dz dy.\tag{1.20}$$

Durch Gleichsetzen von (1.18) und (1.20) erhält man

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dx dy dz = \bar{\rho} dx dy dz \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Analoges gilt für die y -Richtung und die z -Richtung. Damit folgt vektoriell geschrieben

$$-\text{grad } \bar{p} = \bar{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (1.22)$$

Das bedeutet also, dass die maximale Druckänderung entgegengesetzt gerichtet zur Beschleunigung ist, und die beiden betragsmäßig proportional sind.

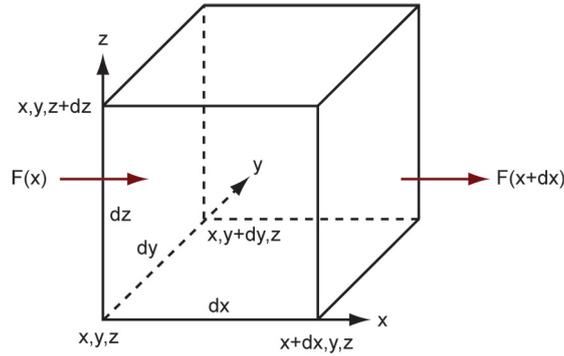


Abbildung 1.5: Elementarvolumen

Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus dem Gesetz der lokalen Massenerhaltung, welches besagt, dass im Volumenelement $dx dy dz$ die Massenzunahme $\partial m / t$ dem Nettofluss durch die Begrenzungsflächen entspricht. Für Bewegungen in x -Richtung (für y und z analog) gilt

$$dm = \text{Zufluss} - \text{Abfluss} \quad (1.23)$$

$$dm_x = \bar{\rho}(x) \bar{v}_x(x) dt dy dz - \bar{\rho}(x+dx) \bar{v}_x(x+dx) dt dy dz = -\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v}_x)}{\partial x} dx dy dz dt. \quad (1.24)$$

Gesamt ergibt sich

$$dm = -\left(\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v}_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt := -\text{div}(\bar{\rho} \vec{v}) dx dy dz dt. \quad (1.25)$$

Die Massenänderung im Elementarvolumen kann auch über die Dichtenänderung (Ort konstant, Zeit variabel) beschrieben werden:

$$dm = [\bar{\rho}(t+dt) - \bar{\rho}(t)] dx dy dz = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (1.26)$$

Setzt man (1.25) und (1.26) gleich, so erhält man

$$-\operatorname{div}(\bar{\rho}\vec{v}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Die Quellendichte des Schallfeldes ist also zur zeitlichen Dichtenänderung proportional.

Für eine vollständige Beschreibung der Dynamik des verlustfrei angenommenen Mediums fehlt noch die thermodynamische Zustandsgleichung des kompressiblen Mediums.

Zustandsgleichung

Im Gegensatz zu Schallfeldern, die sehr raschen Zustandsänderungen unterliegen, vollzieht sich die Wärmeleitung nur langsam. Das bedeutet, dass Schallvorgänge normalerweise ohne isothermen Energieausgleich mit der Umgebung, also adiabatisch erfolgen. Für Gase gilt in diesem Fall die adiabatische Zustandsgleichung

$$\left(\frac{\bar{p}}{p_0}\right) = \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^\kappa \quad (1.28)$$

mit $\kappa = C_p/C_v$, dem Quotienten der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck \bar{p} und konstantem Volumen V .

Die adiabatische Zustandsgleichung ist wie die Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung nichtlinear. Da für die Betrachtung von Schallfeldern jedoch nur kleinste Änderungen der Zustandsgrößen interessant sind, kann die Zustandsgleichung durch eine Taylorentwicklung, die nach dem linearen Glied abbricht, korrekt linearisiert werden. Dazu werden die Schallfeldgrößen nach (1.16) in die Zustandsgleichung eingesetzt:

$$\frac{p_0 + p}{p_0} = \left(\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0}\right)^\kappa = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa \approx \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right). \quad (1.29)$$

Die linearisierte adiabatische Zustandsgleichung lautet also

$$\frac{p}{p_0} = \kappa \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1.30)$$

In Flüssigkeiten erhält man statt (1.30) die Form

$$p = K \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.31)$$

mit dem Kompressionsmodul K .

Akustische Grundgleichungen

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Bewegungsgleichung (1.22) und die Kontinuitätsgleichung (1.27) linearisieren, und man erhält schließlich die drei gesuchten Grundgleichungen zur Beschrei-

bung von Schallfeldern in Gasen und Flüssigkeiten:

$$-\text{grad}(p) = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (1.32)$$

$$-\rho_0 \cdot \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.33)$$

$$p = c^2 \rho. \quad (1.34)$$

Dabei wurde in (1.34) der Faktor c^2 eingeführt, der sich als **Schallgeschwindigkeit**, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallfeldern, erweist. Für c ergibt sich somit

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (1.35)$$

für ideale Gase, und

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (1.36)$$

für Flüssigkeiten (vgl. Abschnitt 1.1.2).

1.2.3 Wellengleichung²

Differenziert man die Kontinuitätsgleichung (1.33) partiell nach t , erhält man

$$-\rho_0 \cdot \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \quad (1.37)$$

Ersetzt man darin ρ mit Hilfe der Zustandsgleichung (1.34), ergibt sich

$$-\rho_0 \cdot \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.38)$$

Schließlich trägt man die Ableitung $\partial \vec{v} / \partial t$ aus (1.32) in (1.38) ein und es gilt

$$\text{div}(\text{grad}(p)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.39)$$

Mit dem LAPLACE-Operator $\Delta = \text{div grad}$ ³ resultiert die Wellengleichung für den Schalldruck, die die Ausbreitung der Welle vollständig beschreibt:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.40)$$

Daraus erkennt man, dass sich der Schalldruck als Welle mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreitet. Analoge Umformungen führen ausgehend von (1.32) - (1.34) zur Wellengleichung für die Dichte ρ :

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \quad (1.41)$$

²Die nächsten beiden Abschnitte folgen dem Aufbau nach den entsprechenden Abschnitten aus [42] und [49].

³LAPLACE-Operator in kartesischen Koordinaten: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Für die Schallschnelle \vec{v} lässt sich ebenfalls eine Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit C angeben. Dazu erhält man für das Geschwindigkeitsfeld wieder aus (1.32) - (1.34)

$$\rho_0 c^2 \cdot \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}. \quad (1.42)$$

Mit dem Zusammenhang

$$\Delta \vec{v} + \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) \quad (1.43)$$

folgt

$$c^2 \Delta \vec{v} + c^2 \cdot \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}. \quad (1.44)$$

Für akustische Anwendungen kann man Wirbelfreiheit des Schnellfeldes annehmen, also $\text{rot } \vec{v} = 0$, und damit erhält man

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}. \quad (1.45)$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des Schnellfeldes existiert für \vec{v} ein Geschwindigkeitspotenzial ϕ mit

$$\vec{v} = -\text{grad}(\phi) \quad (1.46)$$

für das die Wellengleichung ebenfalls gültig ist:

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (1.47)$$

1.2.4 Lösungen der Wellengleichung

Um explizite Lösungen der Wellengleichung zu erhalten, müssen die speziellen Anfangs- und Randbedingungen berücksichtigt werden. Dies ist nur für die einfachsten Problemstellungen zu bewerkstelligen, da meist nicht alle Randbedingungen erfasst werden können und man daher auf Näherungslösungen zurückgreifen muss.

Um grundsätzliche Aussagen einfach darstellen zu können, betrachtet man daher die Schallausbreitung in unbegrenzten homogenen (isotropen) Medien, wodurch die Randbedingungen wegfallen.

Lineares Wellenfeld

Der einfachste Fall ist der eines eindimensionalen Schallfeldes, das nur von einer Raumkoordinate abhängig ist (z.B. ein luftgefülltes Rohr mit starrer, unbeweglicher Wand, in dem das Schallfeld auf eine einzige Ausbreitungsrichtung, nämlich die Rohr-Achse, gezwungen wird).

Die eindimensionale Wellengleichung für den Schalldruck⁴ lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (1.48)$$

⁴Natürlich gelten die folgenden Betrachtungen für beliebige Schallfeldgrößen, also auch für die Schalldichte oder die Schallschnelle.

und hängt nur von der Ortskoordinate x ab. Sie wird durch die D’ALEMBERTSche Lösung

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1.49)$$

erfüllt, wobei f_1 und f_2 frei wählbare, mindestens zweimal differenzierbare reelle Funktionen sind. $f_1(x - ct)$ beschreibt eine sich mit Geschwindigkeit c ausbreitende Änderung des Schalldrucks in positiver (bei $f_2(x + ct)$ in negativer) x -Richtung. Die allgemeine Lösung ist also eine Superposition von zwei gegengleich laufenden Wellen.

Harmonische Wellen

Im Folgenden werden periodische Schwingungsereignisse mit harmonischem Zeitverlauf betrachtet (vgl. Abbildung 1.6), die in der Akustik von besonderem Interesse sind. Damit kann (1.49) geschrieben werden als

$$p(x, t) = \hat{p}_0 (\cos(k(x - ct) + \varphi_0) + \cos(k(x + ct) + \varphi_0)) \quad (1.50)$$

$$= \hat{p}_0 (\cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \cos(\omega t + kx + \varphi_0)) \quad (1.51)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.52)$$

und

\hat{p}_0	Druckamplitude
φ_0	Phasenverschiebung der Welle bei $x = t = 0$
λ	Wellenlänge

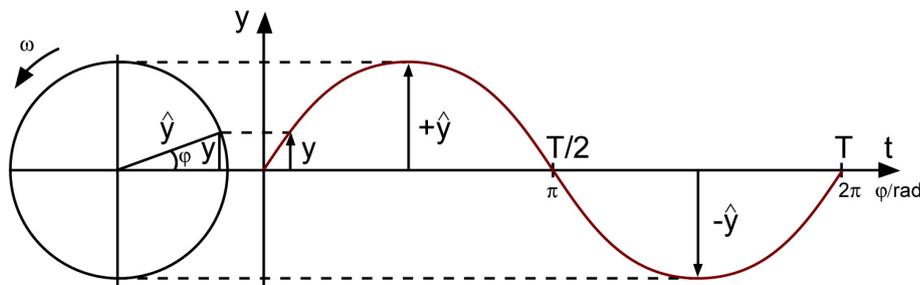


Abbildung 1.6: Darstellung einer Sinusschwingung.

Ebenes Wellenfeld

Es ist ohne Schwierigkeiten möglich, die unbehinderte Schallausbreitung im Raum für den Spezialfall einer ebenen, in x -Richtung laufenden Welle auf das rein lineare Wellenfeld zurückzuführen.

Die Wellengleichungen für Druck p und Schnelle \vec{v} bleiben dieselben und sind invariant gegen die beiden anderen Raumkoordinaten.

Harmonische ebene Wellen

Sind \hat{p}_0 und \hat{v}_0 Druck bzw. Schnelle am Ort $x = 0$ und $t = 0$ dann sind \hat{p}_+ , \hat{p}_- , \hat{v}_+ und \hat{v}_- definiert durch

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_+ + \hat{p}_- \quad \text{und} \quad \hat{v}_0 = \hat{v}_+ + \hat{v}_-. \quad (1.53)$$

Durch diese Notation kann berücksichtigt werden, dass zwei sich entgegengesetzt ausbreitende Wellen nicht unbedingt dieselbe Amplitude haben müssen.

Für den Schalldruck einer in positiver x -Richtung fortschreitenden ebenen Welle gilt

$$p(x, t) = \hat{p}_+ \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (1.54)$$

wobei \hat{p}_+ die Druckamplitude ist. Die zugehörige Schallschnelle $v_x \equiv v(x, t)$ ergibt sich durch Einsetzen des Drucks in (1.33). Nach Differenzieren und Integrieren erhält man mit $c = \omega/k$

$$v(x, t) = \frac{\hat{p}_+}{\rho_0 c} \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (1.55)$$

Auf die gleiche Weise folgt für eine in negativer x -Richtung laufende ebene Welle

$$p(x, t) = \hat{p}_- \cos(\omega t + kx + \varphi_0) \quad (1.56)$$

$$v(x, t) = -\frac{\hat{p}_-}{\rho_0 c} \cos(\omega t + kx + \varphi_0). \quad (1.57)$$

Das negative Vorzeichen in (1.57) kommt dadurch zustande, dass sich die Schnelle als Vektor ins negative verkehrt, während der Druck als Skalar richtungsunabhängig ist.

Der Vergleich der Gleichungen zeigt, dass sich Druck und Schnelle synchron (in Phase) ausbreiten.

Komplexe Darstellung

Neben der reellen Darstellung, wird häufig auch eine Darstellung in komplexer Schreibweise verwendet, die rechnerisch Vorteile bringt. Mit Hilfe der EULERSchen Formel lautet Gleichung (1.54) in komplexer Schreibweise

$$\underline{p}(x, t) = \hat{p}_+ \frac{e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} + e^{-i(\omega t - kx + \varphi_0)}}{2} \quad (1.58)$$

$$= \hat{p}_+ \cdot \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} \right). \quad (1.59)$$

Physikalisch gesehen ist nur der Realteil von Interesse, und daraus folgt

$$\underline{p}(x, t) = \frac{1}{2} \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} e^{i\varphi_0} = \tilde{p} e^{i(\omega t - kx)} \quad (1.60)$$

Dabei wurde die Phasenverschiebung in die komplexe Amplitude $\tilde{p} = \frac{1}{2} \hat{p}_+ e^{i\varphi_0}$ eingebaut.

Helmholtzgleichung

Geht man von Gleichung (1.60) aus und zieht man die Ortsabhängigkeit in die komplexe Amplitude, so erhält man

$$p(x, t) = \tilde{p}e^{i(\omega t - kx)} = \hat{p}(x)e^{i\omega t}. \quad (1.61)$$

Setzt man diesen harmonischen Ansatz in die Wellengleichung (1.63) ein, ergibt sich

$$\Delta \hat{p}(x)e^{i\omega t} = \frac{1}{c^2} \cdot -\omega^2 \hat{p}(x)e^{i\omega t} \quad (1.62)$$

und damit die HELMHOLTZgleichung

$$\Delta \hat{p} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{p} = 0. \quad (1.63)$$

Ersetzt man noch c mit Hilfe von (1.2), so folgt damit jene Form der HELMHOLTZgleichung, die die Grundlage der Simulationsmodelle in Kapitel 3 bildet:

$$\Delta \hat{p} + \omega^2 \frac{\rho}{K} \hat{p} = 0 \quad (1.64)$$

Kugelwellen

Lösungen der mehrdimensionalen Wellengleichung sind meist recht kompliziert. Es lohnt sich jedoch, den für die Akustik ebenfalls wichtigen Spezialfall des Kugelwellenfeldes zu betrachten, bei dem von sphärischer Symmetrie ausgegangen wird. In der Literatur, etwa bei [42] oder [28], kann eine genauere Darstellung der folgenden Zusammenfassung nachgelesen werden.

Kugelwellen breiten sich von ihrer Quelle gleichmäßig in alle Richtungen des Raumes in konzentrischen Wellenfronten aus. Auch hier wird von einem unendlich ausgedehnten, isotropen Medium ausgegangen. Zusätzlich wird eine Quelle nullter Ordnung vorausgesetzt, die Ausdehnung der Kugel ist also klein im Vergleich zu den abgestrahlten Wellenlängen.

Zur Lösung muss die kartesische Wellengleichung in räumlichen Koordinaten (1.63) in Polarkoordinaten mit den Variablen r, φ und ϑ transformiert werden. Der LAPLACE-Operator wird bei Kugelsymmetrie zu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.65)$$

Die Wellengleichung für das Schnellepotenzial ϕ bekommt damit die Form

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}. \quad (1.66)$$

Gleichung (1.66) ist offensichtlich eine eindimensionale Wellengleichung für $r\phi$ und besitzt daher die D'ALEMBERTSche Lösung

$$r\phi = f_1(r - ct) + f_2(r + ct) \quad (1.67)$$

bzw. für ϕ selbst

$$\phi = \frac{1}{r} (f_1(r - ct) + f_2(r + ct)). \quad (1.68)$$

Analog zum ebenen Wellenfeld ist die periodische Lösung

$$\phi = \frac{\hat{\phi}_0}{r} \cos(\omega t \pm kr + \varphi_0), \quad (1.69)$$

und in komplexer Schreibweise ergibt sich

$$\underline{\phi} = \frac{\hat{\phi}_0}{r} e^{i(\omega t \pm kr + \varphi_0)}. \quad (1.70)$$

Aus dem Schnellepotenzial gewinnt man den Schalldruck und die Schallschnelle

$$\underline{p} = \hat{\phi}_0 \frac{i\omega\rho_0}{r} e^{i(\omega t \pm kr + \varphi_0)} \quad (1.71)$$

$$\underline{v} = \hat{\phi}_0 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t \pm kr + \varphi_0)} \quad (1.72)$$

$$(1.73)$$

die in diesem Fall nicht in Phase sind.

2 Schallausbreitung im ebenen Wellenfeld in homogenen Gasen und Fluiden

Im Rahmen der behandelten Absorbertheorien wird stets von ebenen Wellen ausgegangen, weshalb der Schallausbreitung in solchen Wellenfeldern ein ganzes Kapitel gewidmet wird. Natürlich stellt dies nur eine Approximation an die in der Realität vorkommenden Wellenfelder dar, die sich aber durch einige zusätzliche Voraussetzungen und die Tatsache, dass Kugelwellen im Fernfeld zu ebenen Wellen werden, rechtfertigen.

2.1 Schallfeldphänomene¹

Liegt ein begrenztes Medium vor oder befinden sich Hindernisse innerhalb des Mediums, so sind zusätzlich zur bisher besprochenen Wellenausbreitung auch Reflexion, Brechung und Beugung zu berücksichtigen.

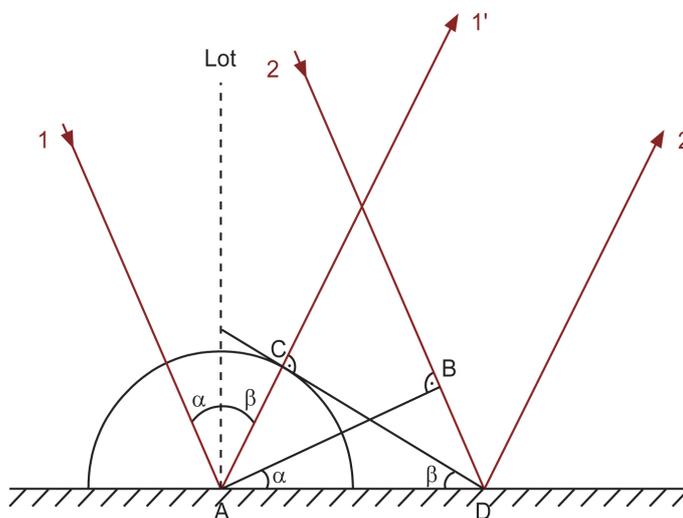


Abbildung 2.1: Reflexion - Schema

¹Die Grafiken in diesem Abschnitt wurden nach den entsprechenden Abbildungen in [35] entworfen.

2.1.1 Reflexion

Tritt eine ebene Welle von einem Medium in ein anderes über, so wird sie völlig oder teilweise reflektiert. Die reflektierten Strahlen $1'$ und $2'$ in Abbildung 2.1 lassen sich nach dem HUYGENSSchen Prinzip (siehe Satz 1.13) konstruieren. Im Punkt A entsteht eine Elementarwelle, deren Radius die Größe $\overline{AC} = \overline{BD}$ erreicht hat, wenn Strahl 2 in D auf die Grenzfläche trifft. Durch die gemeinsame Wellenfront durch D und C ergibt sich die neue Wellenrichtung.

Satz 2.1 (Reflexionsgesetz). *Wenn α der Einfallswinkel (Winkel zwischen dem auftreffenden Strahl und dem auf der Grenzfläche errichteten Lot) ist und β der Reflexionswinkel (Winkel zwischen dem reflektierten Strahl und dem Lot), dann gilt*

$$\alpha = \beta \quad (2.1)$$

Beide Strahlen und das Lot liegen in einer Ebene.

2.1.2 Brechung

Brechung tritt dann auf, wenn eine Welle die Grenze zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten überschreitet. Ausbreitungsgeschwindigkeit und Ausbreitungsrichtung ändern sich, und der Wellenstrahl wird gebrochen. Die gebrochenen Strahlen $1'$ und $2'$ in Abbildung 2.2 können wieder nach dem HUYGENSSchen Prinzip (siehe Satz 1.13) konstruiert werden.

Im Punkt A entsteht eine Elementarwelle, deren Radius die Größe $\overline{AC} = \overline{BD} \frac{c_2}{c_1}$ erreicht hat, wenn Strahl 2 in D auf die Grenzfläche trifft. Durch die gemeinsame Wellenfront durch D und C ergibt sich die neue Wellenrichtung.

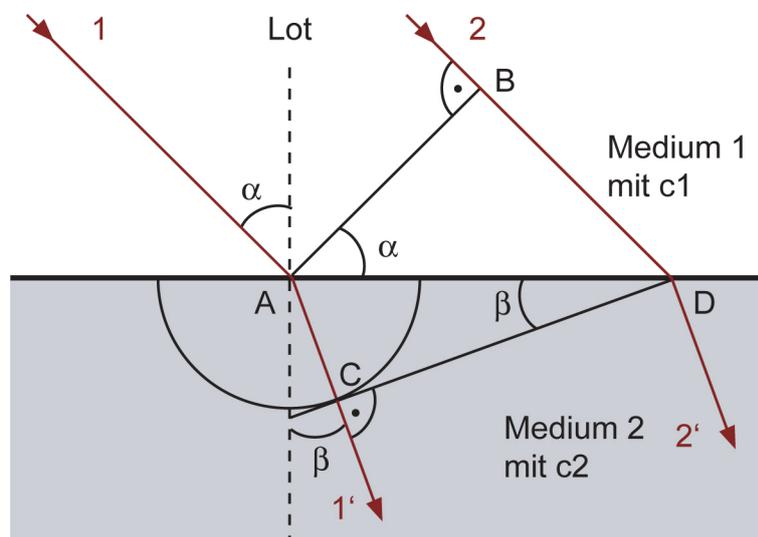


Abbildung 2.2: Brechung - Schema

Satz 2.2 (Brechungsgesetz). *Wenn*

α	<i>Einfallswinkel</i>
β	<i>Brechungswinkel</i>
c_1	<i>Ausbreitungsgeschwindigkeit in Medium 1</i>
c_2	<i>Ausbreitungsgeschwindigkeit in Medium 2</i>

dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}. \quad (2.2)$$

Beide Strahlen und das Lot liegen in einer Ebene.

2.1.3 Beugung an einem Spalt

Immer wenn eine ebene Welle auf eine Wand mit einem schmalen Spalt trifft, breitet sich der durch die Öffnung hindurchgelangene Strahl fächerartig auseinander, was einer Beugung entspricht. Dies kann mit dem Prinzip von HUYGENS (siehe Satz 1.13) erklärt werden. Als Beugungswinkel bezeichnet man den Winkel zwischen der ursprünglichen und den neuen Richtungen. Die Energie des ankommenden Strahls verteilt sich nicht gleichmäßig auf die einzelnen Richtungen und nimmt mit zunehmendem Beugungswinkel ab.

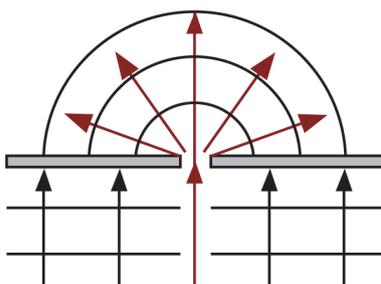


Abbildung 2.3: Beugung an Spalt

2.1.4 Stehende Wellen

Bei Überlagerung zweier sich gegenläufig ausbreitender Wellen (wie im Falle der D'ALEMBERTSchen Lösung der linearen Wellengleichung in Abschnitt 1.2.4) selber Frequenz und Amplitude kommt es zur Ausbildung von stehenden Wellen. Diese breiten sich nicht aus, sondern bilden räumlich konstante Schwingungsmuster: An den sogenannten Bewegungsbäuchen schwingen sie mit der verdoppelten Amplitude und der ursprünglichen Frequenz, an den dazwischenliegenden Bewegungsknoten ist die Amplitude zu allen Zeiten null. Diese Erscheinung ist ein Sonderfall der Interferenz. Sie tritt insbesondere vor einer reflektierenden Wand auf oder auch zwischen zwei passend abgestimmten Wänden, die gemeinsam einen Resonator bilden.

Entsprechend (1.50) lassen sich aufgrund des Superpositionsprinzips der Gesamtdruck und die Gesamtschnelle einer stehenden Welle mit

$$p_G(x, t) = \underbrace{\hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} e^{i\varphi_0}}_{p_+(x, t)} + \underbrace{\hat{p}_- e^{i(\omega t + kx)} e^{i\varphi_0}}_{p_-(x, t)} \quad (2.3)$$

$$v_G(x, t) = \frac{\hat{p}_+}{Z_c} e^{i(\omega t - kx)} e^{i\varphi_0} - \frac{\hat{p}_-}{Z_c} e^{i(\omega t + kx)} e^{i\varphi_0} \quad (2.4)$$

angeben. Dabei steht $p_+(x, t)$ für die Druckgleichung der sich in positiver x -Richtung ausbreitenden Welle und $p_-(x, t)$ für die gegenlaufende Welle. Die Bezeichnungen sind nicht zu verwechseln mit den Druckamplituden \hat{p}_+ und \hat{p}_- .

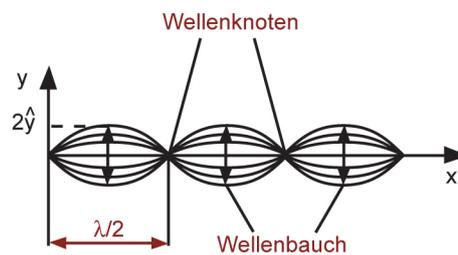


Abbildung 2.4: Stehende Wellen

2.2 Der senkrechte Schalleinfall

Aufgrund ihrer Nützlichkeit bei der Betrachtung von Absorption haben einige Autoren (vgl. etwa [2], [42]) eine umfangreiche Untersuchung zur Impedanz bei senkrechtem und schrägem Schalleinfall, in einem und mehreren Medien angestellt. Die wichtigsten Ergebnisse werden in diesem und dem folgenden Abschnitt zusammengestellt.

Bildet man den Quotienten aus den Gleichungen (1.54) für den Schalldruck, und (1.55) für die Schallschnelle einer sich in positiver x -Richtung ausbreitenden ebenen Welle in einem verlustfreien, unbegrenztem Medium, so ergibt sich die charakteristische Impedanz (Schallkennimpedanz, Wellenwiderstand)² des Mediums, die in diesem Fall reell und konstant ist:

$$Z_c = \frac{p_G(x, t)}{v_G(x, t)} = \frac{\hat{p}_+ \cos(\omega t - kx + \varphi_0)}{\frac{\hat{p}_+}{\rho c} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)} = \rho c = \sqrt{\rho K} \quad (2.5)$$

mit

²vgl. Abschnitt 1.1.2

ρ	Dichte des Mediums
c	Schallgeschwindigkeit im Medium
K	Kompressionsmodul

Die Modelle poröser Absorber in Kapitel 3 berücksichtigen dissipative Verluste, die hier noch nicht auftauchen. In diesem Fall werden die charakteristische Impedanz und auch die Wellenzahl k komplexwertig.

2.2.1 Impedanzunterschiede innerhalb eines Mediums

Angenommen es breiten sich zwei Wellen in entgegengesetzter Richtung parallel zur x -Achse aus (siehe Abbildung 2.5), dann lässt sich, unter Verwendung der Superpositionsgleichungen für Schalldruck und Schallschnelle, die Impedanz $Z(x_1)$ in x_1 darstellen als

$$\begin{aligned}
 Z(x_1) &= \frac{p_G(x_1, t)}{v_G(x_1, t)} \\
 &= Z_c \frac{(\hat{p}_+ e^{-ikx_1} + \hat{p}_- e^{ikx_1}) e^{i\varphi_0 \omega t}}{(\hat{p}_+ e^{-ikx_1} - \hat{p}_- e^{ikx_1}) e^{i\varphi_0 \omega t}} \\
 &= Z_c \frac{\hat{p}_+ e^{-ikx_1} + \hat{p}_- e^{ikx_1}}{\hat{p}_+ e^{-ikx_1} - \hat{p}_- e^{ikx_1}}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ersetzt man die Amplituden in (2.6) mit Hilfe von

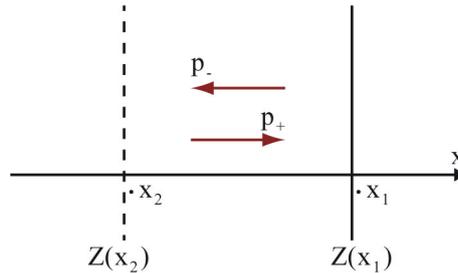


Abbildung 2.5: Ebene Wellen, die sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten.

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_+ + \hat{p}_- \quad \text{und} \quad \hat{v}_0 = \hat{v}_+ + \hat{v}_- = \frac{1}{Z_c}(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) \tag{2.7}$$

aus Abschnitt 1.2.4, so erhält man nach ein wenig algebraischer Umformung

$$Z(x_1) = Z_c \frac{\hat{p}_0 \cos(kx_1) - iZ_c \hat{v}_0 \sin(kx_1)}{Z_c \hat{v}_0 \cos(kx_1) - i\hat{p}_0 \sin(kx_1)}. \tag{2.8}$$

Gleichung (2.6) gilt natürlich auch für $Z(x_2)$, wenn man alle x_1 durch x_2 ersetzt. Weiters gilt

$$\frac{Z(x_1) - Z_c}{Z(x_1) + Z_c} = \frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+} e^{2ikx_1} \tag{2.9}$$

womit man zusammengenommen $Z(x_2)$ nun durch

$$Z(x_2) = Z_c \frac{Z(x_1) + iZ_c \tan(k(x_1 - x_2))}{Z_c + iZ(x_1) \tan(k(x_1 - x_2))} \quad (2.10)$$

beschreiben kann, wenn die Impedanz $Z(x_1)$ in x_1 bekannt ist. Wenn d der Abstand von x_1 zu x_2 ist, gilt daher:

$$\begin{aligned} Z(x_2) &= Z_c \frac{Z(x_1) + iZ_c \tan(kd)}{Z_c + iZ(x_1) \tan(kd)} \\ &= Z_c \frac{-iZ(x_1) \cot(kd) + Z_c}{Z(x_1) - iZ_c \cot(kd)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Damit lässt sich die Impedanz an Grund- und Oberfläche eines Mediums berechnen.

2.2.2 Impedanzberechnung beim Medienwechsel

Zur Berechnung der Impedanzen beim Übergang von einem Medium ins nächste kann ausgenutzt werden, dass Druck und Schnelle an den Grenzflächen stetig sind. Für die Wellen in Abbildung 2.6 gilt somit bei $x = -d$

$$\hat{p}_{1+} + \hat{p}_{1-} = \hat{p}_{2+} + \hat{p}_{2-} \quad \text{bzw.} \quad \hat{v}_{1+} + \hat{v}_{1-} = \hat{v}_{2+} + \hat{v}_{2-}. \quad (2.12)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Impedanz in x_3 in Medium 2 gleich der Impedanz in x_2 in Medium 1 ist, also $Z(x_3) = Z(x_2)$. Somit kann (2.11) für Impedanzberechnungen beim Medienwechsel herangezogen werden.

Besteht die Grenzfläche aus einer Wand mit speziellen Impedanzeigenschaften, lassen sich die Gleichungen noch weiter vereinfachen. Dazu wird zunächst eine Definition benötigt.

Definition 2.3 (Schallharte Wand). *Eine Wand wird schallhart genannt, wenn sie auftreffende Schallwellen vollständig reflektiert und daher kein Schall absorbiert wird. Die Impedanz einer schallharten Wand wird als unendlich angenommen.*

Bemerkung 2.1. *Das Gegenstück zur schallharten Wand ist die schallweiche Wand, der die Impedanz 0 zugeordnet wird.*

Mit Definition 2.3 gilt für x_1 bei $x = 0$ in Abbildung 2.6, $Z(x_1) \rightarrow \infty$. Die Impedanz in x_2 in Medium 1 erhält man unter dieser Voraussetzung aus (2.11)

$$Z(x_2) = -iZ_c \cot(kd). \quad (2.13)$$

Bemerkung 2.2. *Ist die Wand schallweich, wird aus Gleichung (2.13)*

$$Z(x_2) = iZ_c \tan(kd). \quad (2.14)$$

Zwischen den beiden Extremfällen sind die Grenzflächen weder vollständig absorbierend noch vollständig reflektierend. Dann tritt immer eine Mischung aus stehenden und fortschreitenden Wellen auf.

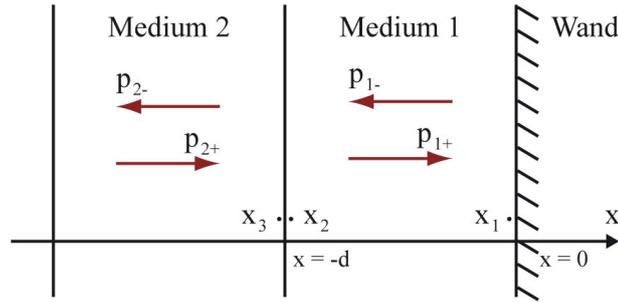


Abbildung 2.6: Einlaufende, reflektierte und transmittierte Wellen in 2 Medien vor einer Wand.

2.2.3 Reflexionsgrad

Definition 2.4 (Reflexionsfaktor). *Der Reflexionsfaktor r ist das Verhältnis der Drücke zwischen reflektierter $p_-(x, t)$ und einfallender $p_+(x, t)$ Welle beim Übergang in ein anderes Ausbreitungsmedium.*

Betrachtet man beispielsweise x_3 in Abbildung 2.6, so ergibt sich für den Reflexionsfaktor

$$\begin{aligned}
 r(x_3) &= \frac{p_-(x_3, t)}{p_+(x_3, t)} \\
 &= \frac{\hat{p}_- e^{i(\omega t + kx_3)} e^{i\varphi_0}}{\hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx_3)} e^{i\varphi_0}} \\
 &= \frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+} e^{2ikx_3}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aufgrund der gleichen Abhängigkeit von der Zeit von Zähler und Nenner, hängt der Reflexionsfaktor nicht von t ab. Mit Gleichung (2.9) kann man den Reflexionsfaktor als

$$r(x_3) = \frac{Z(x_3) - Z_{M2}}{Z(x_3) + Z_{M2}} \tag{2.16}$$

schreiben, wobei Z_{M2} die charakteristische Impedanz in Medium 2 ist.

Bemerkung 2.3. *Gilt für den Reflexionsfaktor $r = 1$, entspricht dies der Reflexion an einer schallharten Wand. Der Druck der reflektierten Welle hat denselben Betrag und die selbe Phase wie der der einlaufenden Welle, d.h. der Druck verdoppelt sich in diesem Fall. Die Schnelle der reflektierten Welle hat ebenfalls den selben Betrag, aber das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Schnelle der einlaufenden Welle. Es entsteht eine stehende Welle.*

Bemerkung 2.4. *Ein Reflexionsfaktor $r = -1$ bedeutet eine Reflexion an einer schallweichen Wand. Der Druck der reflektierten Welle hat den selben Betrag aber das entgegengesetzte Vorzeichen wie der der einlaufenden Welle. Es besteht eine Phasenverschiebung von π . In diesem Fall verdoppelt sich dafür die Schallschnelle und es entsteht auch eine stehende Welle.*

Für die Beziehung zwischen $r(x_2)$ und $r(x_1)$ (Abbildung 2.6) gilt

$$r(x_2) = r(x_1)e^{-2ikd}. \quad (2.17)$$

Der Reflexionsfaktor beschreibt in der komplexen Ebene also einen Kreis, wenn k reellwertig ist. Wenn k komplexwertig ist, beschreibt der Reflexionsfaktor eine Spirale.

Ist die Grenzfläche im allgemeinen Fall eine Ebene zwischen zwei unendlich ausgedehnten homogenen Medien mit den charakteristischen Impedanzen Z_{M1} und Z_{M2} , so lautet der Reflexionsfaktor dort

$$r = \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{Z_{M2} + Z_{M1}}. \quad (2.18)$$

Schließlich gewinnt man aus dem Reflexionsfaktor den Reflexionsgrad:

Definition 2.5 (Reflexionsgrad). *Der Reflexionsgrad ρ ist das Verhältnis von reflektierter Schallintensität I_ρ zu einfallender Schallintensität I_ε und ist somit eine energetische Größe. Es gilt*

$$\rho = \frac{I_\rho}{I_\varepsilon} = \frac{\hat{p}_-^2}{\hat{p}_+^2} = |r|^2. \quad (2.19)$$

2.2.4 Absorptionsgrad

Trifft nun eine Schallwelle, wie in Abbildung 2.7, von Medium 1 aus auf die Grenzfläche zu Medium 2, wobei diese keine schallharte Wand sei, dann induziert sie nicht nur eine reflektierte Welle in Medium 1, sondern auch eine absorbierte Welle in Medium 2.

Wieder gilt wegen der Kontinuitätsbedingung an der Grenzfläche in $x = 0$ und mit den Gleichungen (2.15) und (2.18)

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 = \hat{p}_1 &= \hat{p}_+ + \hat{p}_- \\ &= \hat{p}_+(1 + r) \\ &= \hat{p}_+ \left(1 + \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{Z_{M2} + Z_{M1}} \right) \\ &= \hat{p}_+ \frac{2Z_{M2}}{Z_{M2} + Z_{M1}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Daraus ergibt sich analog zum Reflexionsfaktor der

Definition 2.6 (Absorptionsfaktor). *Der Absorptionsfaktor ist das Verhältnis der Druckamplitude der absorbierten Schallwelle zur Druckamplitude der einfallenden Schallwelle:*

$$a = \frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_+} = \frac{2Z_{M2}}{Z_{M2} + Z_{M1}} \quad (2.21)$$

wobei Z_{M1}, Z_{M2} die charakteristischen Impedanzen in Medium 1 bzw. Medium 2 sind.

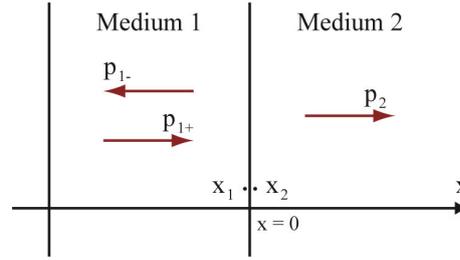


Abbildung 2.7: Beim Medienwechsel werden eine reflektierte und eine absorbierte Welle induziert.

Für die Schnelle v_2 der absorbierten Welle gilt entsprechend in $x = 0$

$$\hat{v}_2 = \frac{\hat{p}_2}{Z_{M2}} = \hat{p}_+ \frac{2}{Z_{M2} + Z_{M1}} \quad (2.22)$$

$$= \hat{v}_+ \frac{2Z_{M1}}{Z_{M2} + Z_{M1}}. \quad (2.23)$$

Die Schallintensität der Welle in Medium 2 ist damit durch

$$\begin{aligned} I_\alpha &= p_2(x, t)v_2(x, t) \\ &= \hat{p}_2\hat{v}_2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) \\ &= \hat{p}_+\hat{v}_+ \frac{4Z_{M1}Z_{M2}}{(Z_{M2} + Z_{M1})^2} \cos^2(\omega t - k_2x + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2.24)$$

gegeben. Daraus folgt mit

$$p_{1,+}(x, t) = \hat{p}_+ \cos(\omega t - k_1x + \varphi_0) \quad (2.25)$$

$$v_{1,+}(x, t) = \hat{v}_+ \cos(\omega t - k_1x + \varphi_0) \quad (2.26)$$

und

$$I_\varepsilon = p_{1,+}(x, t)v_{1,+}(x, t) = \hat{p}_+\hat{v}_+ \cos^2(\omega t - k_1x + \varphi_0) \quad (2.27)$$

unmittelbar der

Definition 2.7 (Transmissionsgrad). *Der Transmissionsgrad τ ist das Verhältnis von transmittierter Schallintensität I_τ zu einfallender Schallintensität I_ε und ist eine energetische Größe.*

$$\tau = \frac{I_\tau}{I_\varepsilon} = \frac{4Z_{M1}Z_{M2}}{(Z_{M2} + Z_{M1})^2} \quad (2.28)$$

Bemerkung 2.5. *Die Transmission bezieht sich hier auf die von Medium 1 in Medium 2 transmittierte Schallwelle, und nicht auf eine aus Mediums 2 in ein Medium 3 übertretende Welle. Dieser Effekt wird in Abschnitt 2.2.5 besprochen.*

Für die Modellrechnungen und akustische Anwendungen besonders wichtig ist der

Definition 2.8 (Absorptionsgrad). *Der Absorptionsgrad α ist das Verhältnis von absorbiertem Schallintensität I_α zu einfallender Schallintensität I_ε . Er ist eine energetische Größe und steht in engem Zusammenhang mit dem Reflexionsgrad*

$$\alpha = \frac{I_\alpha}{I_\varepsilon} = 1 - \rho = 1 - |r|^2. \quad (2.29)$$

Der Absorptionsgrad enthält weniger Information als die Impedanz oder der Reflexionsfaktor. In einigen Anwendungen der Fahrzeugakustik ist diese Vereinfachung jedoch vorteilhaft.

Geht man nochmals von Abbildung 2.6 aus, und sei Medium 1 Luft und Medium 2 eine Absorberschicht mit dissipativen Verlusten (komplexwertige Impedanz), so erhält man das sogenannte *Anpassungsgesetz*:

$$\alpha = 1 - |r|^2 = 1 - \left| \frac{\frac{Z_{M2}}{Z_0} - 1}{\frac{Z_{M2}}{Z_0} + 1} \right|^2 \quad (2.30)$$

$$= 1 - \frac{\operatorname{Re}(Z_{M2})^2 - 2\operatorname{Re}(Z_{M2})Z_0 + Z_0^2 + \operatorname{Im}(Z_{M2})^2}{\operatorname{Re}(Z_{M2})^2 + 2\operatorname{Re}(Z_{M2})Z_0 + Z_0^2 + \operatorname{Im}(Z_{M2})^2} \quad (2.31)$$

$$= \frac{4\operatorname{Re}(Z_{M2})Z_0}{(\operatorname{Re}(Z_{M2}) + Z_0)^2 + \operatorname{Im}(Z_{M2})^2}. \quad (2.32)$$

Daraus kann man leicht erkennen, dass die Imaginärteile der Impedanz, den Absorptionsgrad immer senken. Ist $\operatorname{Im}(Z_{M2}) = 0$, erreicht der Absorptionsgrad immer ein Maximum.

2.2.5 Mehrschichtige Medien

Die eben gezeigten Berechnungen lassen sich ohne Mühe auf eine größere Zahl von hintereinander gelagerten Medien ausdehnen.

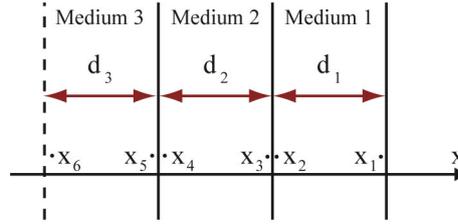
Impedanz

In Abbildung 2.8 ist ein mehrschichtiges Fluid dargestellt. Kennt man die Impedanz $Z(x_1)$, so kann man die Impedanz $Z(x_2)$, innerhalb von Medium 1, durch (2.11) bestimmen. Durch die Kontinuitätsbedingungen für Druck und Schnelle ist die Impedanz in x_3 gleich der Impedanz in x_2 . Die Impedanzen in x_4, x_5 und x_6 lassen sich auf die gleiche Weise sukzessiv bestimmen.

Reflexion, Absorption, Transmission

Für eine bessere Unterscheidung der Begriffe Absorption und Transmission betrachtet man eine in positiver x -Richtung einfallende ebene Welle. Diese trifft am Punkt $x = 0$ auf eine Grenzfläche zwischen Medium 1 und Medium 2 und im Punkt $x = d$ auf eine Grenzfläche zwischen Medium 2 und 3 (siehe Abbildung 2.9).

Für Schalldruck und Schallschnelle innerhalb der einzelnen Medien gelten die folgenden Zusammenhänge:

Abbildung 2.8: Drei Fluidschichten, mit bekannter Impedanz in x_1 .

- **Medium 1:**

$$p(x) = \hat{p}_{1,+}e^{-ik_1x} + \hat{p}_{1,-}e^{ik_1x} \quad (2.33)$$

$$v(x) = \frac{1}{Z_{M1}}(\hat{p}_{1,+}e^{-ik_1x} - \hat{p}_{1,-}e^{ik_1x}). \quad (2.34)$$

- **Medium 2:**

$$p(x) = \hat{p}_{2,+}e^{-ik_2x} + \hat{p}_{2,-}e^{ik_2x} \quad (2.35)$$

$$v(x) = \frac{1}{Z_{M2}}(\hat{p}_{2,+}e^{-ik_2x} - \hat{p}_{2,-}e^{ik_2x}). \quad (2.36)$$

- **Medium 3:** Hier tritt nun nur noch die in positiver x -Richtung laufende Welle mit

$$p(x) = \hat{p}_{3,+}e^{-ik_3x} \quad (2.37)$$

$$v(x) = \frac{1}{Z_{M3}}\hat{p}_{3,+}e^{-ik_3x} \quad (2.38)$$

auf.

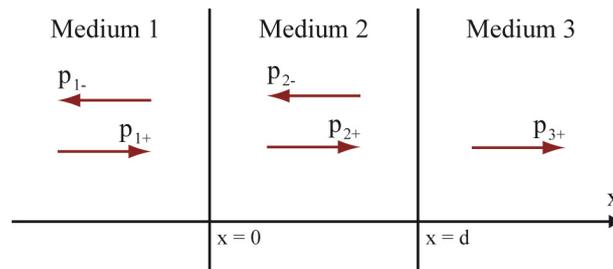


Abbildung 2.9: Einlaufende, reflektierte und transmittierte Wellen in 3 Medien.

Aufgrund der Stetigkeit von Druck und Schnelle in $x = 0$ gilt wieder Gleichung (2.12) und

$$\frac{1}{Z_{M1}}(\hat{p}_{1,+} - \hat{p}_{1,-}) = \frac{1}{Z_{M2}}(\hat{p}_{2,+} - \hat{p}_{2,-}). \quad (2.39)$$

Löst man (2.39) nach $\hat{p}_{1,-}$ erhält man

$$\hat{p}_{1,-} = \hat{p}_{1,+} - \frac{Z_{M1}}{Z_{M2}}(\hat{p}_{2,+} - \hat{p}_{2,-}). \quad (2.40)$$

Setzt man dies in (2.12), also

$$\hat{p}_{1+} + \hat{p}_{1-} = \hat{p}_{2+} + \hat{p}_{2-} \quad (2.41)$$

ergibt sich

$$\hat{p}_{1+} = \frac{Z_{M2} + Z_{M1}}{2Z_{M2}}\hat{p}_{2+} + \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{2Z_{M2}}\hat{p}_{2-}. \quad (2.42)$$

Analog folgt für $\hat{p}_{1,-}$

$$\hat{p}_{1-} = \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{2Z_{M2}}\hat{p}_{2+} + \frac{Z_{M2} + Z_{M1}}{2Z_{M2}}\hat{p}_{2-}. \quad (2.43)$$

Im Punkt $x = d$ gelten die Kontinuitätsbedingungen, weshalb

$$\hat{p}_{2,+}e^{-ik_2d} + \hat{p}_{2,-}e^{ik_2d} = \hat{p}_{3,+}e^{-ik_3d} \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{Z_{M2}}(\hat{p}_{2,+}e^{-ik_2d} - \hat{p}_{2,-}e^{ik_2d}) = \frac{1}{Z_{M3}}\hat{p}_{3,+}e^{-ik_3d} \quad (2.45)$$

gültig ist.

Reflexionsgrad

Eliminiert man $\hat{p}_{3,+}$ durch Gleichsetzen von (2.44) und (2.45), folgt

$$\frac{1}{Z_{M2}}(\hat{p}_{2,+}e^{-ik_2d} - \hat{p}_{2,-}e^{ik_2d}) = \frac{1}{Z_{M3}}(\hat{p}_{2,+}e^{-ik_2d} + \hat{p}_{2,-}e^{ik_2d}). \quad (2.46)$$

Auflösen nach $\hat{p}_{2,+}$ führt auf

$$\hat{p}_{2,+} = \frac{e^{ik_2d}}{e^{-ik_2d}} \frac{Z_{M3} + Z_{M2}}{Z_{M3} - Z_{M2}} \cdot \hat{p}_{2,-} = \frac{\cos(k_2d) + i \cdot \sin(k_2d)}{\cos(k_2d) - i \cdot \sin(k_2d)} \cdot \frac{Z_{M3} + Z_{M2}}{Z_{M3} - Z_{M2}} \cdot \hat{p}_{2,-} \quad (2.47)$$

und Einsetzen in (2.42) zu

$$\hat{p}_{1,+} = \frac{Z_{M2} + Z_{M1}}{2Z_{M2}} \cdot \frac{Z_{M3} + Z_{M2}}{Z_{M3} - Z_{M2}} \cdot \frac{\cos(k_2d) + i \cdot \sin(k_2d)}{\cos(k_2d) - i \cdot \sin(k_2d)} \cdot \hat{p}_{2,-} + \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{2Z_{M2}}\hat{p}_{2,-}. \quad (2.48)$$

Auf gemeinsamen Nenner gebracht und umgruppiert erhält man

$$\hat{p}_{1,+} = \frac{2\hat{p}_{2,-} \cdot ((Z_{M2}Z_{M3} + Z_{M1}Z_{M2}) \cos(k_2d) + i \cdot (Z_{M2}^2 + Z_{M1}Z_{M3}) \sin(k_2d))}{2(Z_{M2}Z_{M3} - Z_{M2}^2)(\cos(k_2d) - i \cdot \sin(k_2d))}. \quad (2.49)$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich auch $\hat{p}_{1,-}$. Insgesamt gilt somit für den Reflexionsfaktor

$$r = \frac{\hat{p}_{1,-}}{\hat{p}_{1,+}} = \frac{Z_{M2}(Z_{M3} - Z_{M1}) \cos(k_2d) + i \cdot (Z_{M2}^2 - Z_{M1}Z_{M3}) \sin(k_2d)}{Z_{M2}(Z_{M3} + Z_{M1}) \cos(k_2d) + i \cdot (Z_{M2}^2 + Z_{M1}Z_{M3}) \sin(k_2d)} \quad (2.50)$$

und daraus erhält man den Reflexionsgrad

$$\rho = |r|^2 \quad (2.51)$$

und den Absorptionsgrad

$$\alpha = 1 - \rho. \quad (2.52)$$

Transmissionsgrad

Um den Transmissionsfaktor zu berechnen, eliminiert man $\hat{p}_{2,-}$ in (2.44) und (2.45) und drückt $\hat{p}_{2,+}$ in (2.42) durch $\hat{p}_{3,+}$ aus. Es folgt

$$t = \frac{2Z_{M1}Z_{M3}e^{-ik_3d}}{Z_{M2}(Z_{M3} + Z_{M1})\cos(k_2d) + i \cdot (Z_{M2}^2 + Z_{M1}Z_{M3})\sin(k_2d)} \quad (2.53)$$

und damit der Transmissionsgrad τ

$$\tau = |t|^2. \quad (2.54)$$

2.3 Der schräge Schalleinfall

Im letzten Unterabschnitt wurden ebene Wellen behandelt, die sich parallel zur x -Achse ausbreiten. Dieses Konzept lässt sich auf beliebige Richtungen erweitern, wenn man die Wellenzahl $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ als Vektor auffasst, wobei die Komponenten des Vektors der Gleichung

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \vec{k}^2 \quad (2.55)$$

genügen. Die Gleichung für den Druck in einer (1.60) entsprechenden Darstellung ist dann

$$p(x, y, z, t) = \hat{p}_+ e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}. \quad (2.56)$$

Ähnlich wie in Abschnitt 1.2.4 errechnet man die zugehörigen Schallschnellekomponenten, diesmal unter Verwendung von (1.32). Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &= i \hat{p}_+ k_x e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Integration nach t führt auf

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z, t) &= \frac{\hat{p}_+}{\rho_0 \omega} k_x e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} \\ &= \frac{\hat{p}_+}{Z_c} \frac{k_x}{k} e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich für v_y und v_z . In den folgenden Unterabschnitten werden immer ebene Wellen behandelt, wobei die Ausbreitung rein in der x - y -Ebene stattfindet.

2.3.1 Reflexion und Brechung

Betrachtet wird eine Schallwelle, die sich wie in Abbildung 2.10 in Medium 1 unter dem Winkel φ_ε ausbreitet und auf die Grenzfläche (y -Achse) zu Medium 2 trifft. Wellenzahl und charakteristische Impedanz der Medien tragen die entsprechenden Subskripte: k_{M1} , k_{M2} und Z_{M1} , Z_{M2} .

Die Komponenten des Wellenzahlvektors der einlaufenden Welle entsprechen dann

$$k_{\varepsilon,x} = k_{M1} \sqrt{1 - \sin^2(\varphi_\varepsilon)} = k_{M1} \cos(\varphi_\varepsilon) \quad k_{\varepsilon,y} = -k_{M1} \sin(\varphi_\varepsilon) \quad k_{\varepsilon,z} = 0. \quad (2.59)$$

Für die einlaufende Welle gilt somit

$$p_\varepsilon(x, y, t) = \hat{p}_\varepsilon e^{i(\omega t - k_{M1}(\cos(\varphi_\varepsilon)x - \sin(\varphi_\varepsilon)y))} \quad (2.60)$$

und für die Schallschnelle folgt

$$v_{x,\varepsilon}(x, y, t) = \frac{\hat{p}_\varepsilon}{Z_{M1}} \cos(\varphi_\varepsilon) e^{i(\omega t - k_{M1}(\cos(\varphi_\varepsilon)x - \sin(\varphi_\varepsilon)y))} \quad (2.61)$$

$$v_{y,\varepsilon}(x, y, t) = -\frac{\hat{p}_\varepsilon}{Z_{M1}} \sin(\varphi_\varepsilon) e^{i(\omega t - k_{M1}(\cos(\varphi_\varepsilon)x - \sin(\varphi_\varepsilon)y))} \quad (2.62)$$

$$v_{z,\varepsilon}(x, y, t) = 0. \quad (2.63)$$

Die Gleichungen für die reflektierte Welle lauten

$$p_\rho(x, y, t) = \hat{p}_\rho e^{i(\omega t - k_{M1}(-\cos(\varphi_\rho)x + \sin(\varphi_\rho)y))} \quad (2.64)$$

$$v_{x,\rho}(x, y, t) = -\frac{\hat{p}_\rho}{Z_{M1}} \cos(\varphi_\rho) e^{i(\omega t - k_{M1}(-\cos(\varphi_\rho)x + \sin(\varphi_\rho)y))} \quad (2.65)$$

$$v_{y,\rho}(x, y, t) = \frac{\hat{p}_\rho}{Z_{M1}} \sin(\varphi_\rho) e^{i(\omega t - k_{M1}(-\cos(\varphi_\rho)x + \sin(\varphi_\rho)y))} \quad (2.66)$$

$$v_{z,\rho}(x, y, t) = 0. \quad (2.67)$$

Für die transmittierte Welle ergeben sich die Gleichungen

$$p_\tau(x, y, t) = \hat{p}_\tau e^{i(\omega t - k_{M2}(-\cos(\varphi_\tau)x + \sin(\varphi_\tau)y))} \quad (2.68)$$

$$v_{x,\tau}(x, y, t) = -\frac{\hat{p}_\tau}{Z_{M2}} \cos(\varphi_\tau) e^{i(\omega t - k_{M2}(-\cos(\varphi_\tau)x + \sin(\varphi_\tau)y))} \quad (2.69)$$

$$v_{y,\tau}(x, y, t) = \frac{\hat{p}_\tau}{Z_{M2}} \sin(\varphi_\tau) e^{i(\omega t - k_{M2}(-\cos(\varphi_\tau)x + \sin(\varphi_\tau)y))} \quad (2.70)$$

$$v_{z,\tau}(x, y, t) = 0. \quad (2.71)$$

Durch die Kontinuitätsbedingung für die Schalldrücke an der Grenzfläche (y -Achse, also bei $x = 0$) gilt

$$\hat{p}_\varepsilon e^{ik_{M1} \sin(\varphi_\varepsilon)y} + \hat{p}_\rho e^{-ik_{M1} \sin(\varphi_\rho)y} = \hat{p}_\tau e^{ik_{M2} \sin(\varphi_\tau)y}. \quad (2.72)$$

Damit dies für alle y gültig ist, muss

$$k_{M1} \sin(\varphi_\varepsilon) = -k_{M1} \sin(\varphi_\rho) = k_{M2} \sin(\varphi_\tau) \quad (2.73)$$

erfüllt sein, woraus man sowohl das SNELLIUSSCHE Brechungsgesetz als auch das REFLEXIONSGESETZ der Akustik erhält (vgl. Abschnitt 2.1):

Satz 2.9 (Reflexionsgesetz). *Der Einfallswinkel einer Welle ist gleich dem Reflexionswinkel, und beide liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene. Es gilt*

$$\varphi_\varepsilon = -\varphi_\rho. \quad (2.74)$$

Satz 2.10 (Brechungsgesetz). *Eine Welle ändert beim Medienwechsel ihre Richtung - wird gebrochen - wenn unterschiedliche Medieneigenschaften (z.B. Dichte) vorherrschen. Wenn c_{M1} und c_{M2} die Schallgeschwindigkeiten in Medium 1 bzw. Medium 2 sind, gilt*

$$\frac{\sin(\varphi_\varepsilon)}{c_{M1}} = \frac{\sin(\varphi_\tau)}{c_{M2}}. \quad (2.75)$$

Ist $c_{M1} > c_{M2}$ erfolgt die Brechung zum Einfallslot hin, andernfalls vom Einfallslot weg.

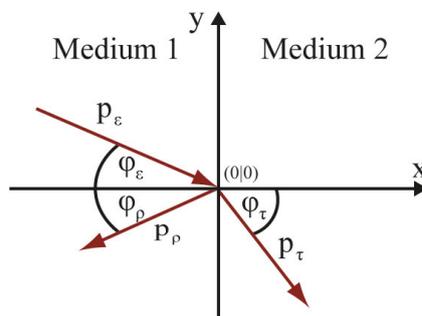


Abbildung 2.10: Medienwechsel bei schrägem Schalleinfall.

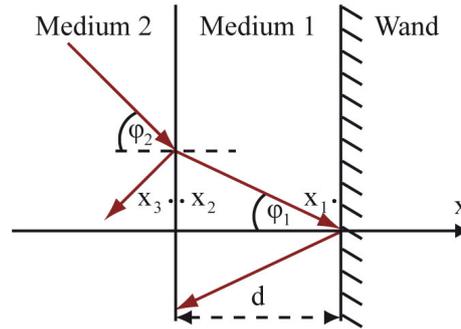
2.3.2 Impedanzberechnung beim Medienwechsel

Geht man wiederum davon aus, dass sich die einfallende Welle auf der x - y -Ebene ausbreitet, so behält Gleichung (2.11) ihre Gültigkeit, und es sind lediglich Z_c durch $Z_c k/k_1$ und k durch k_1 zu ersetzen (Geometrie wie in Abbildung 2.12). Man erhält also

$$Z(x_2) = Z_c \frac{k}{k_1} \frac{Z(x_1) + iZ_c \frac{k}{k_1} \tan(k_1 d)}{Z_c \frac{k}{k_1} + iZ(x_1) \tan(k_1 d)}. \quad (2.76)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 kann man auch hier den wichtigen Spezialfall eines Mediums vor einer schallharten Wand behandeln. Befindet sie sich bei x_1 (siehe Abbildung 2.11), so vereinfacht sich (2.76) wegen $Z_c \rightarrow \infty$ analog zum senkrechten Schalleinfall zu

$$Z(x_2) = -iZ_c \frac{k}{k_1} \cot(kd). \quad (2.77)$$

Abbildung 2.11: Eine Fluidschicht der Dicke d vor einer schallharten Wand.

2.3.3 Impedanzberechnung in einem mehrschichtigen Medium

Der Nomenklatur beim senkrechten Schalleinfall folgend, werden Impedanzen und Wellenzahl der einzelnen Medien wieder mit den Subskripten $M1, M2, \dots$ versehen. Dem Schema aus Abbildung 2.12 folgend, sei der Einfallswinkel in Medium 3 φ_3 , und der Einfallswinkel in Medium 2 φ_2 .

Die y -Komponente des Wellenzahl Vektors ist in allen drei Medien gleich:

$$k_{M1,y} = k_{M2,y} = k_{M3,y} = k_{M3} \sin(\varphi_2). \quad (2.78)$$

Für die x -Komponente des Wellenzahlvektors folgt daraus mit Satz 2.10:

$$k_{M2,x} = k_{M2} \sqrt{1 - \sin^2(\varphi_2)} = \sqrt{k_{M2}^2 - k_{M3}^2 \sin^2(\varphi_3)}. \quad (2.79)$$

Die Impedanz $Z(x_2)$ kann nun durch (2.76) berechnet werden, wobei d durch d_2 zu ersetzen ist. Die Impedanz $Z(x_3)$ in Medium 3 ist gleich $Z(x_2)$ in Medium 2, wie auch beim senkrechten Schalleinfall. Auf die gleiche Weise lassen sich die Impedanzen in x_4 und eventuell weiteren Punkten sukzessiv berechnen. Ist die Schallgeschwindigkeit in Medium 2 sehr viel kleiner als in Medium 3,

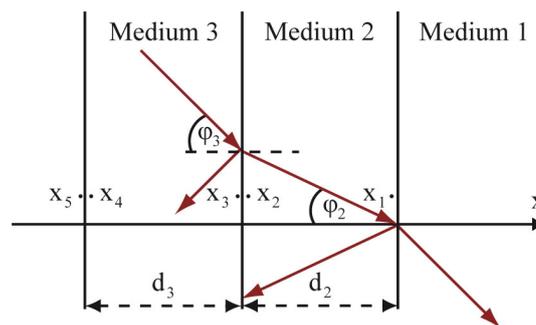


Abbildung 2.12: Medienwechsel bei schrägem Schalleinfall.

$c_{M2} \ll c_{M3}$, dann folgt aus dem Brechungsgesetz, dass $\varphi_2 \rightarrow 0$ und daraus $k_{M2,1} \approx k_{M2}$ für viele

Werte von Winkel φ_3 in der Umgebung des senkrechten Einfalls. Dadurch entspricht die Impedanz $Z(x_2)$ fast ihrem Wert bei $\varphi_3 = 0$ und hängt nur geringfügig vom Einfallswinkel ab. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, nennt man Medium 2 lokal reagierend, d.h. jeder Punkt kann als isoliert betrachtet werden. Diese Approximation erzielt bei einer Vielzahl poröser Absorber, abhängig von der Schallgeschwindigkeit, gute Ergebnisse (vgl. [27]).

Prinzipiell kann (2.76) zur Berechnung der Impedanz an der Oberfläche beliebig vieler Mediensichten herangezogen werden. Eine komfortable Möglichkeit dazu bietet die Transfer-Matrix-Methode, die beispielsweise in [15] vorgestellt wird und hier zusammengefasst angegeben werden soll. Für den allgemeinen Fall seien \bar{p}_i und \bar{v}_i Schalldruck und Schallschnelle an der Oberfläche und p_i und v_i Druck und Schnelle am „Grund“ von Medium i . Entsprechend bezeichnen ρ_i, k_i und d_i die Dichte, Wellenzahl und Schichtdicke des Mediums. Unter diesen Voraussetzungen erhält man:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{i+1,x} \\ \bar{v}_{i+1,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i,x} \\ v_{i,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_{i,x}d_i) & i\frac{\omega\rho_i}{k_{i,x}}\sin(k_{i,x}d_i) \\ i\frac{k_{i,x}}{\omega\rho_i}\sin(k_{i,x}d_i) & \cos(k_{i,x}d_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_{i,x} \\ \bar{v}_{i,x} \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

2.3.4 Reflexionsgrad und Absorptionsgrad

Kehrt man zurück zu Abbildung 2.10, vereinfacht sich Gleichung (2.72) mit dem Brechungsgesetz zur bereits bekannten Kontinuitätsbedingung

$$\hat{p}_\varepsilon + \hat{p}_\rho = \hat{p}_\tau. \quad (2.81)$$

Da auch die Schnellekomponenten in x -Richtung gleich sein müssen, führt das zu:

$$(\hat{p}_\varepsilon - \hat{p}_\rho) \frac{\cos(\varphi_\varepsilon)}{Z_{M1}} = \hat{p}_\tau \frac{\cos(\varphi_\tau)}{Z_{M2}}. \quad (2.82)$$

Daraus errechnet sich der Reflexionsfaktor an einer Grenzfläche, und man erhält

$$r = \frac{\hat{p}_\rho}{\hat{p}_\varepsilon} = \frac{Z_{M2}/\cos(\varphi_\tau) - Z_{M1}/\cos(\varphi_\varepsilon)}{Z_{M2}/\cos(\varphi_\tau) + Z_{M1}/\cos(\varphi_\varepsilon)} \quad (2.83)$$

$$= \frac{Z_{M2} \cos(\varphi_\varepsilon) - Z_{M1} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{M1}}{c_{M2}} \sin(\varphi_\varepsilon)\right)^2}}{Z_{M2} \cos(\varphi_\varepsilon) + Z_{M1} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{M1}}{c_{M2}} \sin(\varphi_\varepsilon)\right)^2}}. \quad (2.84)$$

Für Reflexions- und Absorptionsgrad gilt wieder:

$$\rho = |r|^2 \quad (2.85)$$

und

$$\alpha = 1 - \rho = 1 - |r|^2. \quad (2.86)$$

Absorptionsgrad und Transmissionsgrad bei diffusem Schalleinfall

Der mittlere Absorptionsgrad α_m bei diffusem Schalleinfall kann durch

$$\alpha_m = 2 \int_0^{\pi/2} \alpha(\varphi_\varepsilon) \cos(\varphi_\varepsilon) \sin(\varphi_\varepsilon) d\varphi_\varepsilon \quad (2.87)$$

berechnet werden, wobei über alle Einfallswinkel integriert wird. Analog gilt für den mittleren Transmissionsgrad τ_m bei diffusem Schalleinfall

$$\tau_m = 2 \int_0^{\pi/2} \tau(\varphi_\varepsilon) \cos(\varphi_\varepsilon) \sin(\varphi_\varepsilon) d\varphi_\varepsilon. \quad (2.88)$$

3 Mathematische Modelle poröser Absorber

Poröse Absorber sind wegen ihres breiten Einsatzspektrums, ihrer Kosteneffizienz und der Einfachheit ihrer Installation nach wie vor die meistverbreiteten Absorbertypen. Als klassische Materialien für poröse Lärmschutzelemente dienen Kunststoffschäume, Faserstoffe (Mineralwolle, Filz, Natur- oder Polyesterfasern) und granulatartige Bauteile. Speziell in der Automobilindustrie werden sie häufig eingesetzt, da sie ausgezeichnete Absorption bei mittleren und hohen Frequenzen bieten.

Dieses Kapitel befasst sich deshalb mit Modellen, die die Schallausbreitung in solchen Materialien zum Inhalt haben. Die ersten Modelle poröser Absorber stammen bereits aus dem späten 19. Jahrhundert. Im Laufe des letzten Jahrhunderts gab es viele neue Ansätze und Verbesserungen, und speziell in den letzten 25 Jahren hat die Qualität der Modelle stark zugenommen. Die wichtigsten Vertreter der unterschiedlichen Modellvorstellungen werden besprochen, Stärken und Schwächen werden analysiert. Zusätzlich werden die benötigten Materialparameter definiert, und, wo möglich, aktuelle Messverfahren angegeben.

Der Vollständigkeit wegen sei erwähnt, dass es neben den porösen Absorbern noch eine ganze Reihe weiterer Absorberanordnungen, darunter

- *Platten-Resonatoren*
- *Helmholtz-Resonatoren*
- *aktive Absorber*
- *mikroperforierte Absorber*,

gibt. Eine Einführung in die unterschiedlichen Absorberarten kann in [23] nachgelesen werden.

3.1 Charakterisierung poroelastischer Materialien

Grundsätzlich sind *lokale* und *laterale* Absorber zu unterscheiden. Im Inneren lokaler Absorber erfolgt die Schallausbreitung ausschließlich senkrecht zur Oberfläche. Die Wandimpedanz ist unabhängig vom Einfallswinkel der Schallwelle. Beim lateralen Absorber findet die Schallausbreitung im Inneren hingegen in alle Richtungen, insbesondere auch parallel zur Oberfläche, statt. Poröse Absorber sind dem lateralen Absorbertyp zuzuordnen, können aber häufig durch das einfachere Modell des lokalen Absorbers beschrieben werden.

Die hauptsächliche Wirkung beider Absorbertypen besteht darin, dass Schall in die Poren eindringt und dort während der Ausbreitung viskose Dämpfung an den Hohlraumoberflächen und thermische Verluste erfährt. Für eine hohe Absorptionswirkung ist es nötig, dass die Absorber eine offenporige Struktur besitzen, bei der die Dimension der Öffnungen im Bereich einiger zehntel Millimeter liegt. Geschlossenzellige Schäume etwa können zwar ebenfalls noch absorbierende Wirkung erzielen, verhalten sich im Allgemeinen jedoch nicht wie poröse Absorber. Von der Struktur her unterscheidet man Faserabsorber, offenzellige Schäume und haufwerksporige Absorber, wie Sand-schüttungen und porösen Beton.

Diese Arbeit beschäftigt sich vor allem mit Modellen für das Absorptionsverhalten von Materialien, die im Fahrzeuginnenraum zum Einsatz kommen, weshalb besonderes Augenmerk auf Faserabsorber und Schäume gelegt wird.

Jedes proelastische Material besteht aus primär zwei Komponenten: Einem Festkörperteil, der als elastisches Skelett oder Rahmenwerk bezeichnet wird und einem Fluidteil innerhalb des Festkörpers, meistens Luft. Um eine möglichst umfassende Charakterisierung solcher Materialien vornehmen zu können, ist es nötig, deren Eigenschaften anhand geeigneter Parameter zu spezifizieren. Dabei werden Parameter für die Festkörperkomponente, die Fluidkomponente und Kopplungsparameter der beiden Komponenten unterschieden, die nun der Literatur entsprechend definiert werden.

3.1.1 Parameterspezifikation der Fluidkomponente

Raumgewicht

Das Raumgewicht (auch Rohdichte) ρ_0 ist die Dichte eines porösen Festkörpers, also

$$\rho_0 = \frac{m}{V_t} \quad (3.1)$$

wobei in V_t das Porenvolumen mitberücksichtigt wird.

Einheit: $[\rho_0] = [\text{kg}/\text{m}^3]$.

In [44] sind einige Beispiele für typische Raumgewichte angegeben:

Beispiel:

- Mineralfaser-Absorber: $15 [\text{kg}/\text{m}^3] \leq \rho_0 \leq 200 [\text{kg}/\text{m}^3]$
- Schaumstoffe: $5 [\text{kg}/\text{m}^3] \leq \rho_a \leq 50 [\text{kg}/\text{m}^3]$

Adiabatexponent

Der Adiabatexponent (auch Isentropenexponent) κ ist definiert als das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck C_p und konstantem Volumen C_V

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}. \quad (3.2)$$

Im Fall von Luft gilt $\kappa \approx 1,4$. Der Adiabatexponent ist dimensionslos. Die spezifische Wärmekapazität gibt an, welche Wärmemenge einem Stoff pro Kilogramm zugeführt werden muss, um seine Temperatur um ein Kelvin zu erhöhen.

Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen wurde bereits in Abschnitt 1.1.2 definiert. Wiederholt wird hier der wichtige Zusammenhang für die Schallgeschwindigkeit in Fluiden

$$c = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

mit

K	Kompressionsmodul
ρ	Gasdichte

Für die Schallgeschwindigkeit in Luft bei 0°C gilt: $331,6 \text{ [m/s]}$.

Einheit: $[c] = [\text{m/s}]$.

Dynamische Viskosität

Die dynamische Viskosität η ist das Maß für die *Zähigkeit* eines Fluids. In Luft bei 0°C gilt: $\eta \approx 17,2$.

Einheit: $[\eta] = [\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2] = [\text{Pa}\cdot\text{s}]$.

Prandtl-Zahl

Die PRANDTL-Zahl P_r ist definiert als Verhältnis zwischen kinematischer Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit a , und lässt sich für Fluide in das Verhältnis der dynamischen Viskosität zur Wärmeleitfähigkeit γ umrechnen:

$$P_r = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta C_p}{\lambda} \quad (3.4)$$

mit

C_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
-------	---

Die PRANDTL-Zahl ist dimensionslos und stellt eine Verknüpfung des Geschwindigkeitsfeldes mit dem Temperaturfeld eines Fluides dar. In Luft bei 0°C gilt: $P_r \approx 0,7179$.

3.1.2 Parameterspezifikation der Festkörperkomponente

In [39] wird, der BIOT-Theorie¹ folgend, darauf hingewiesen, dass das Rahmenwerk eines isotropen poroelastischen Materials durch die drei folgenden Parameter bestimmt ist. Die messtechnische Bestimmung der Parameter ist nicht einfach. Möglichkeiten dazu werden in [39] angegeben.

Schubmodul

Der Schubmodul G gibt Auskunft über die lineare elastische Verformung eines Materials infolge einer Scherkraft oder Schubspannung. Er beschreibt das Verhältnis zwischen der Schubspannung τ und dem Tangens des Schubwinkels φ :

$$G = \tau \tan(\varphi). \quad (3.5)$$

Einheit: $[G] = [\text{N}/\text{m}^2]$ (Pascal), also eine Spannungseinheit.

Elastizitätsmodul

Der Elastizitätsmodul (auch YOUNG'scher Modul) E ist ein Maß für die Steifigkeit eines elastischen Materials. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung σ und Verzerrung ε des Körpers.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Einheit: $[E] = [\text{N}/\text{m}^2]$ (Pascal), also eine Spannungseinheit.

Poissonzahl

Die POISSONZahl (auch Querkontraktionszahl) ν ist definiert als negatives Verhältnis aus relativer Dickenänderung zur relativen Längenänderung eines Materials bei Einwirkung einer äußeren Kraft oder Spannung.

$$\nu = -\frac{\Delta t/t}{\Delta l/l} \quad (3.7)$$

mit

t	ursprüngliche Materialdicke
l	ursprüngliche Materiallänge

Die POISSONZahl ist dimensionslos.

¹siehe Abschnitt 3.6

Zusammenhänge der Parameter

Es gilt für ein linear-elastisches, isotropes Material folgender Zusammenhang zwischen dem Schubmodul G , dem Elastizitätsmodul E , der POISSONZahl ν und dem Kompressionsmodul K :

$$E = 2G(1 + \nu) = 3K(1 - 2\nu). \quad (3.8)$$

3.1.3 Spezifikation der Kopplungsparameter

Porosität

Materialien wie Faserstoffe und offenporige Kunststoffschäume besitzen ein elastisches Rahmenwerk, das von Luft umgeben ist. Die Volumenporosität ϕ ist das Verhältnis des Fluidvolumens V_f (Volumen der sich in den Poren befindenden Luft) zum Gesamtvolumen V_t , also

$$\phi = \frac{V_f}{V_t}. \quad (3.9)$$

Wenn V_s das Rahmenvolumen (Volumen des reinen Materials und der darin *eingeschlossenen* Luft) bezeichnet, dann gilt offensichtlich folgende Beziehung

$$V_t = V_f + V_s. \quad (3.10)$$

Das bedeutet, dass in V_f nur das Luftvolumen berücksichtigt wird, das nicht im Material eingeschlossen ist. Eine geschlossene Luftblase in einem Schaumstoff wird beispielsweise zur Materialstruktur gezählt und das enthaltene Luftvolumen dadurch zu V_s .

Die Porosität ist ein dimensionsloser Parameter und liegt immer zwischen 0 und 1. Für die meisten Faser- und Schaumstoffe mit offenen Poren gilt: $0,95 < \phi < 0,995$ (wichtig für gute Absorption).

Methoden zur Messung der Porosität werden in [61] und [14] angegeben. Die sehr populäre Methode aus [14] benutzt das BOYLE-MARIOTTE-Gesetz für ideale Gase.

Strömungswiderstand

Poröse Materialien setzen einer durch sie hindurchfließenden Luftströmung einen Widerstand r_S entgegen. Dadurch entsteht ein Druckunterschied zwischen Vorder- und Rückseite des betrachteten Materials. Der physikalische Grund dafür ist die Reibung der Luftteilchen am Materialskelett, die durch die Viskosität der Luft in den dünnen Kanälen entsteht. Der spezifische Strömungswiderstand (auch Strömungsresistanz) r_S wird definiert als das Verhältnis dieses Druckabfalls Δp und der Geschwindigkeit v des durch die Material-Querschnittsfläche A hindurchtretenden gleichmäßigen Volumenstroms Q ($[\text{m}^3/\text{s}]$).

Für Fluide gilt allgemein

$$Q = AU \quad (3.11)$$

und damit folgt für den spezifischen Strömungswiderstand

$$r_S = \frac{\Delta p}{Q/A} = \frac{\Delta p}{v}. \quad (3.12)$$

Klarerweise nimmt der Strömungswiderstand bei steigender Materialdicke d immer weiter zu. Es ist daher sinnvoll, eine von den Abmessungen unabhängige Konstante einzuführen, den längenbezogenen Strömungswiderstand Ξ :

$$\Xi = \frac{r_S}{d} = \frac{\Delta p}{vd}. \quad (3.13)$$

Einheit: $[\Xi] = [\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4] = 10^{-3} [\text{Rayl}/\text{cm}]$.

Für Materialien, wie Faserstoffe oder offene poröse Schäume, ist der zu erwartende Bereich des Strömungswiderstandes etwa $10^3 [\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4] < \Xi < 10^5 [\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4]$.

Aufgrund der Anisotropie von Faserstoffen (hervorgehoben in [2]), deren Fasern sich gewöhnlich in Ebenen parallel zur Oberfläche befinden, sind der Strömungswiderstand in Normalenrichtung Ξ_N und der Strömungswiderstand in planarer Richtung Ξ_P unterschiedlich. Es gilt $\Xi_N > \Xi_P$.

Der Strömungswiderstand kann nach den Standards DIN EN 29053² und ASTM C522³ gemessen werden.

Tortuosität

Struktur und Form der Poren in einem Material beeinflussen die Schallausbreitung und damit das Absorptionsverhalten. Die Tortuosität (lat. tortuosus „gewunden“) α_∞ ist ein Maß für die Gewundenheit der Poren eines porösen Materials und berücksichtigt die ungleichmäßige Verteilung der Poren pro Flächeneinheit. JOHNSON et al. beschreiben sie in [31] folgendermaßen: „*We shall consider the value of α_∞ to be a measure of the disorder in the system*“.

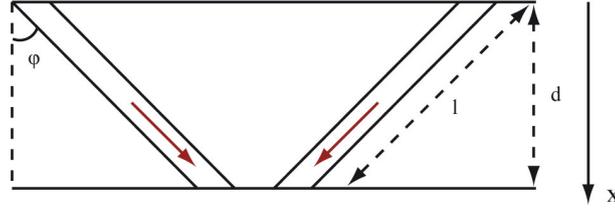
Die Tortuosität wird in der Literatur auch Strukturfaktor genannt und sowohl mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet als auch verschieden definiert. Es ist deshalb sinnvoll, sie zunächst anhand eines Beispiels mit einfacher Porengeometrie einzuführen (eine genauere Darstellung findet sich in [2]).

Man betrachtet ein Material mit zylindrischen Poren, die sich im Winkel φ mit der Oberflächennormalen befinden (siehe Abbildung 3.1). Ist nun n die Porenanzahl pro Flächeneinheit und ist r der Porenradius, dann ergibt sich für die Porosität

$$\phi = \frac{n\pi r^2}{\cos(\varphi)}. \quad (3.14)$$

²siehe [19]

³siehe [4]

Abbildung 3.1: Poröses Material mit zylindrischen Poren im Winkel φ zur Oberflächennormalen

Das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE beschreibt den Volumenstrom Q einer laminaren Strömung eines homogenen viskosen Fluids durch ein Rohr (Kapillare) mit dem Radius r und der Länge l :

$$Q = \frac{\Delta p \pi r^4}{l \cdot 8\eta} \quad (3.15)$$

mit

Δp	Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende des Rohrs
η	dynamische Viskosität des Fluids

Wirkt dieser Volumenstrom auf eine Materialoberfläche mit zylindrischen Poren, dann sei der Strom pro Oberflächeneinheit Q' . Damit gilt in jeder zylindrischen Pore

$$Q' = \frac{\Delta p n \pi r^4}{l \cdot 8\eta}. \quad (3.16)$$

Mit Gleichung (3.13) und $l = d / \cos(\varphi)$ erhält man für den Strömungswiderstand

$$\Xi = \frac{8\eta}{n\pi r^4 \cos(\varphi)}. \quad (3.17)$$

Setzt man (3.14) hier ein, folgt

$$\Xi = \frac{8\eta}{\phi r^2 \cos^2(\varphi)}. \quad (3.18)$$

ZWIKKER und KOSTEN haben in [61] bei der Flussanalyse in zylindrischen Rohren mit Radius r einen Parameter s eingeführt, der die Viskositätsänderungen beschreibt:

$$s = \left(\frac{\rho_0 \omega r^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

mit

ρ_0	Fluiddichte
ω	Kreisfrequenz

Löst man (3.18) nach r^2/η auf und setzt in (3.19) ein, ergibt sich

$$s = \left(\frac{8\rho_0\omega}{\Xi\phi \cos^2(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8\rho_0\omega\alpha_\infty}{\Xi\phi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Der neu eingeführte Parameter

$$\alpha_\infty = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \quad (3.21)$$

ist die Tortuosität.

Im Sinne der BIOT-Theorie ist die Tortuosität ein Parameter der Trägheitskopplung. Aus der Gleichheit der kinetischen Energien auf mikroskopischer bzw. makroskopischer Ebene erhält man

$$\frac{1}{2}\rho_0\langle\vec{v}_m^2\rangle_V = \frac{1}{2}\rho_0\alpha_\infty\vec{v}^2 \quad (3.22)$$

wobei \vec{v}_m die mikroskopische Geschwindigkeit des Fluids ist und man die makroskopische Geschwindigkeit \vec{v} gewinnt, indem man \vec{v}_m über ein repräsentatives Elementarvolumen V mittelt ($\langle \rangle_V$). Für die Tortuosität gilt somit

$$\alpha_\infty = \frac{\langle\vec{v}_m^2\rangle_V}{v^2}. \quad (3.23)$$

JOHNSON et al. haben darauf hingewiesen, dass diese Definition nicht nur für zylindrische Poren gültig ist, sondern für alle Arten von Porengeometrien.

Allard (in [2]) und JOHNSON et al. (in [31]) definieren auch den Begriff der dynamischen Tortuosität $\alpha(\omega)$, und zwar als Quotient aus effektiver Dichte (siehe Abschnitt 3.2) und standardgemäß definierter Fluidichte

$$\alpha(\omega) = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.24)$$

Die dynamische Tortuosität entspricht α_∞ für $\omega \rightarrow \infty$, was bei hohen Frequenzen der Fall ist.

Die Tortuosität ist ein dimensionsloser Parameter. Eine analytische Bestimmung ist selbst für einfache Geometrien äußerst aufwändig und meist unmöglich, weshalb auf Messmethoden zurückgegriffen werden muss. Möglichkeiten dafür sind beispielsweise in [37] und [2] zu finden.

Viskose charakteristische Länge

Die Reibungseffekte zwischen dem schwingenden Fluid und den Porenkanalwänden sind sowohl bei niedrigen als auch bei hohen Frequenzen exakt bestimmt. Dazwischen kann man sie nach [31] über eine einfache analytische Funktion approximieren. Der Übergang von tiefen zu hohen Frequenzen wird dabei durch den Porenradius bestimmt. Für zylindrische Porenkanäle, wie im Beispiel aus dem letzten Unterabschnitt, wäre dies einfach der unveränderliche Porenradius. Die meisten Materialien haben jedoch Porenkanäle mit variablem Radius, wodurch schmale und weitere Abschnitte zum durchschnittlichen Porenkanalradius beitragen. Diese schmalen Verbindungsstellen zwischen den eigentlichen Poren tragen wesentlich zu den Viskositätseffekten bei. Die viskose charakteristische Länge, die grob gesagt ein Maß für die schmalen Verbindungsstellen ist, beschreibt die Viskositätseffekte, die aufgrund der komplexeren Mikrogeometrie der Porenkanäle vorherrschen.

Oberhalb einer Grenzfrequenz sind Reibungskräfte nur mehr an der Porenkanaloberfläche zu beachten, die proportional zum Geschwindigkeitsgradienten der Luftströmung sind. Für einen konstanten Fluss eines reibungsfreien Fluids im porösen Rahmenwerk sei v_s die mikroskopische Geschwindigkeit des Fluids entlang der Porenoberfläche und v_i die mikroskopische Geschwindigkeit innerhalb der Poren. Dann ist die viskose charakteristische Viskosität gegeben durch

$$\Lambda = 2 \frac{\int_V v_i^2 dV}{\int_A v_s^2 dA} \quad (3.25)$$

wobei im Zähler über das Porenvolumen integriert wird und im Nenner über die Porenoberfläche. Gleichzeitig wird durch das Quadrieren der Geschwindigkeit eine Gewichtung vorgenommen, durch die schmale Kanalabschnitte einen größeren Einfluss als breitere erhalten.

Für das Verhältnis zum Strömungswiderstand Ξ gilt

$$\Lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{8\eta\alpha_\infty}{\Xi\phi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Die Konstante c ist dabei nahe bei 1 und hängt von der Porengeometrie ab. c hat nach [15] die Werte 1, 1,07 bzw. 1,14 für Poren mit kreisförmigem, quadratischem bzw. dreieckigem Querschnitt.

Bei Faserstoffen, bei denen die Fasern, wie bereits erwähnt, meist parallel zur Oberfläche liegen, lässt sich eine andere Formel für die viskose charakteristische Länge angeben. Die Fasern werden als unendlich lange Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt mit Radius r modelliert. Wenn l die Gesamtlänge an Fasern pro Einheitsvolumen ist, dann gilt

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi lr}. \quad (3.27)$$

Eine messtechnische Erfassung der viskosen charakteristischen Länge mittels Ultraschall liefert [40].

Einheit: $[\Lambda] = [\text{m}]$.

Thermische charakteristische Länge

Ähnlich wie bei den Reibungseffekten sind auch die thermischen Effekte sowohl bei niedrigen (isothermen) als auch bei hohen (adiabatischen) Frequenzen exakt bekannt. Dazwischen werden sie ebenfalls durch eine analytische Funktion approximiert. Der Übergang von niedrigen zu hohen Frequenzen hängt dabei vom durchschnittlichen Abstand ab, den die Wärme zu den Porenwänden zurücklegen muss, und dieser lässt sich wie folgt angeben:

$$\Lambda' = 2 \frac{\int_V dV}{\int_A dA} = \frac{V}{A}. \quad (3.28)$$

Die thermische charakteristische Länge ist also das Verhältnis von Porenoberfläche zu Porenvolumen und somit ein Maß für die Porengröße. Hierbei wird allerdings keine Gewichtung durch die

quadrierten Geschwindigkeiten vorgenommen, weshalb stets $\Lambda' \geq \Lambda$ gilt.

Zieht man als Beispiel wieder ein Material mit zylindrischen Porenkanälen heran, dann sind beide charakteristische Längen gleich dem Porenradius r , also

$$\Lambda' = \Lambda = r. \quad (3.29)$$

Bei Faserstoffen kann gezeigt werden, dass $\Lambda' = 2\Lambda$ ist.

Eine Messmethode für die thermische charakteristische Länge mittels Ultraschall findet sich in [41].

Einheit: $[\Lambda'] = [\text{m}]$.

3.2 Hierarchische Modellübersicht

Im Laufe der Jahre wurde eine Vielzahl an Modellen zur Charakterisierung poröser Materialien entwickelt. Alle diese Modelle zielen darauf ab, eines von zwei äquivalenten, komplexwertigen Parameterpaaren zu bestimmen, die das akustische Verhalten eines Materials vollständig bestimmen. Diese Parameterpaare sind

- Charakteristische Impedanz $Z_c(\omega)$ und Wellenzahl $k(\omega)$ (bzw. die Ausbreitungskonstante $\Gamma = ik$)
- Effektive Dichte $\rho(\omega)$ und Kompressionsmodul $K(\omega)$

Zur Klärung der physikalischen Bedeutung der Parameter sei für das erste Paar auf die Unterabschnitte 1.1.1 und 1.1.2 verwiesen. Das zweite Paar wird nun etwas näher erklärt.

Definition 3.1 (Kompressionsmodul). *Der Kompressionsmodul K ist das Verhältnis der Druckänderung Δp eines Mediums zur dadurch erzielten relativen Volumenänderung $\Delta V/V$:*

$$K = -\frac{\Delta p V}{\Delta V}. \quad (3.30)$$

Einheit: $[K] = [\text{N/m}^2]$ (*Pascal*)

Der Ausdruck *effektive Dichte* wird im Vergleich zur standardgemäß definierten Dichte (Quotient aus Masse und Volumen des Mediums) verwendet, um darauf hinzuweisen, dass die Größe von der Frequenz der sich ausbreitenden Schallwelle (dies gilt auch für den Kompressionsmodul) und der Porengeometrie des Mediums abhängig, und somit variabel, ist.

Die Äquivalenz der Parameterpaare wird durch folgende Beziehung verdeutlicht, die sich direkt aus den entsprechenden Definitionen (siehe Abschnitt 1.1.2) ergibt:

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho(\omega)K(\omega)} \quad (3.31)$$

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho(\omega)}{K(\omega)}}. \quad (3.32)$$

Die einzelnen Modelle, die in diesem Abschnitt besprochen werden, benutzen die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Materialparameter zur Bestimmung jeweils eines der Parameterpaare. Welche und wie viele Materialparameter zum Einsatz kommen, ist abhängig davon, auf welchen theoretischen Voraussetzungen und Grundlagen die einzelnen Modelle beruhen.

Das wichtigste Unterscheidungskriterium ist dabei, von welcher Art Rahmenwerk des porösen Materials ausgegangen wird. Prinzipiell können poröse Materialien in drei Kategorien unterteilt werden, die von der Beschaffenheit des Skeletts abhängen:

- Materialien mit elastischem Skelett (elastic frame)
- Materialien mit formlabilem Skelett (limp frame)
- Materialien mit biegesteifem Skelett (rigid frame)

Im Folgenden wird die mathematische Beschreibung der drei Skelettvarianten kurz skizziert.

3.2.1 Modelle für Materialien mit elastischem Skelett

Ist der Rahmen eines Materials elastisch, so kann er durch eine auftreffende Schallwelle angeregt werden, und neben der Schallausbreitung im Fluid in den Poren kommt es auch zu einer Wellenausbreitung im Skelett und entsprechenden Wechselwirkungen.

Eine Möglichkeit, die gleichzeitige Bewegung der Luft in den Poren und des Rahmens zu berücksichtigen, bietet die BIOT-Theorie, die Biot 1956 für die Schallausbreitung in poroelastischen Medien aufgestellt hat. Ein Überblick über die wichtigsten Grundlagen wird am Ende dieses Kapitels gegeben (siehe Abschnitt 3.6).

Gemäß dieser Theorie breiten sich drei verschiedene Wellen in dem jeweiligen Medium aus: eine elastische Longitudinalwelle, eine elastische Scherwelle und eine akustische Longitudinalwelle. Das dynamische Verhalten dieser Wellen wird nach [50] durch die beiden folgenden, gekoppelten Gleichungen beschrieben:

$$\operatorname{div}(\sigma_{ij}) + \omega^2 \rho_s u = - \left(\frac{\phi \rho_0}{\rho_f} + \frac{K_b}{K_s} - 1 \right) \cdot \operatorname{grad}(p) \quad (3.33)$$

$$\frac{\phi}{\omega^2 \rho_f} \Delta p + \frac{\phi}{K_f} p = \left(\frac{\phi \rho_0}{\rho_f} + \frac{K_b}{K_s} - 1 \right) \cdot \operatorname{div}(u) \quad (3.34)$$

mit ρ_s der effektiven Dichte der Festkörperkomponente

$$\rho_s = \rho_1 + \phi \rho_0 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_f} \right) \quad (3.35)$$

und

ρ_1	Rohdichte des Mediums (im Vakuum)
σ_{ij}	Spannungstensor
u	Verschiebungsvektor
ϕ	Porosität
ρ_0	Fluiddichte
ρ_f	effektive Dichte der Fluidkomponente
K_b	Kompressionsmodul der Festkörperkomponente (im Vakuum)
K_s	Kompressionsmodul des elastischen Materials, aus dem das Skelett besteht
p	Druck in den Poren
K_f	Kompressionsmodul der Fluidkomponente

3.2.2 Modelle für Materialien mit biegesteifem Skelett

Ist der Rahmen eines porösen Materials biegesteif findet keine Bewegung im Skelett statt. Davon kann meist dann ausgegangen werden, wenn das Skelett eine sehr große Dichte aufweist oder das Material an einer starren Wandfläche montiert ist. Das bedeutet, dass die Schallenergie hauptsächlich auf die Fluidkomponente des Materials übertragen wird und eine eventuelle Bewegung des Rahmenwerks nur durch Kopplungseffekte zwischen Festkörper- und Fluidkomponente entstehen könnte. Diese Kopplungseffekte können oberhalb einer Grenzfrequenz f_d ebenfalls vernachlässigt werden. ZWIKKER und KOSTEN haben in [61] zur Berechnung der *Entkopplungsfrequenz* die Formel

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\phi^2 \Xi}{(1 - \phi) \rho_s} \quad (3.36)$$

vorgeschlagen, wobei ρ_s die Dichte des Skelettmaterials ist. Für Frequenzen oberhalb von f_d kommt es zu keiner Anregung des Skeletts.

Die dissipativen Teile der Absorption entstehen dann durch Reibungsverluste und Trägheitseffekte im Inneren des Materials und den Wärmeaustausch zwischen dem Skelett und dem Fluid im Poreninneren. Viskositätseffekte und Wärmeaustausch können separat behandelt werden. Die Reibungseffekte fließen über die komplexwertige effektive Dichte ρ_f des Fluids ein, während thermische Effekte durch den komplexwertigen Kompressionsmodul K_f des Fluids beschrieben werden. Die Frequenzabhängigkeit beider Variablen trägt der Tatsache Rechnung, dass der Fluidstrom in engen Kanälen von isotherm bei niedrigen Frequenzen zu adiabatisch bei hohen Frequenzen wechselt.

Da die Schallausbreitung nur im Fluid stattfindet, können die Kopplungsfaktoren vernachlässigt werden, und das Skelett erfährt weder Verschiebung (d.h. $u = 0$) noch Deformation. Es breitet sich also nur die akustische Longitudinalwelle im Medium aus, und Gleichung (3.34) vereinfacht sich zu jener Form der HELMHOLTZgleichung (1.64), die in Abschnitt 1.2.3 aus der Wellengleichung abgeleitet worden ist:

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\rho_{EQ}}{K_{EQ}} p = 0 \quad (3.37)$$

mit

$$\rho_{EQ} = \frac{\rho_f}{\phi} \quad (3.38)$$

$$K_{EQ} = \frac{K_f}{\phi}. \quad (3.39)$$

Dabei ist ρ_{EQ} die effektive Dichte und K_{EQ} der Kompressionsmodul des sogenannten äquivalentes Fluids, durch das das poröse Medium per Modellhypothese auf makroskopischer Ebene ersetzt werden kann.

Für die charakteristische Impedanz des porösen Materials Z_c folgt daher offensichtlich

$$Z_c = \phi Z_{c,EQ} \quad (3.40)$$

wobei $Z_{c,EQ} = \sqrt{\rho_{EQ} \cdot K_{EQ}}$ die charakteristische Impedanz des äquivalenten Fluids ist. Da in den nächsten Unterabschnitten ausschließlich von der effektiven Dichte und dem Kompressionsmodul der Fluidkomponente des porösen Materials die Rede ist, wird kein Subskript f mehr angeführt.

Der erste, der sich mit der Schallausbreitung in biegesteifen porösen Materialien beschäftigt hat, war Lord RAYLEIGH, der nur von isothermen Effekten ausging. ZWIKKER und KOSTEN haben in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts in [61] einen weiteren entscheidenden Beitrag geliefert, in dem sie gezeigt haben, dass sowohl isotherme als auch adiabatische Effekte berücksichtigt werden müssen, und dass der Übergang frequenzabhängig ist. Seit damals sind viele weitere Modelle entstanden. Sie können in empirische, analytische und phänomenologische Modelle (siehe Abbildung 3.2) unterteilt werden.

Diese Arbeit ist auf poröse Materialien mit biegesteifem Skelett fokussiert, weshalb entsprechende Modelle in der Folge ausführlich diskutiert werden.

3.2.3 Modelle für Materialien mit formlabilem Skelett

Auch in diesem Fall existiert nur die akustische Longitudinalwelle, weil das Skelett einer äußeren Anregung keinen Widerstand entgegengesetzt. Es gilt wieder Gleichung (3.37), wobei jedoch die effektive Dichte des äquivalenten Fluids nun durch

$$\rho'_{EQ} = \frac{\rho_{EQ} \rho_s}{\rho_s + \left(\frac{\phi \rho_0}{\rho_f} + \frac{K_b}{K_s} - 1 \right)^2 \rho_{EQ}} \quad (3.41)$$

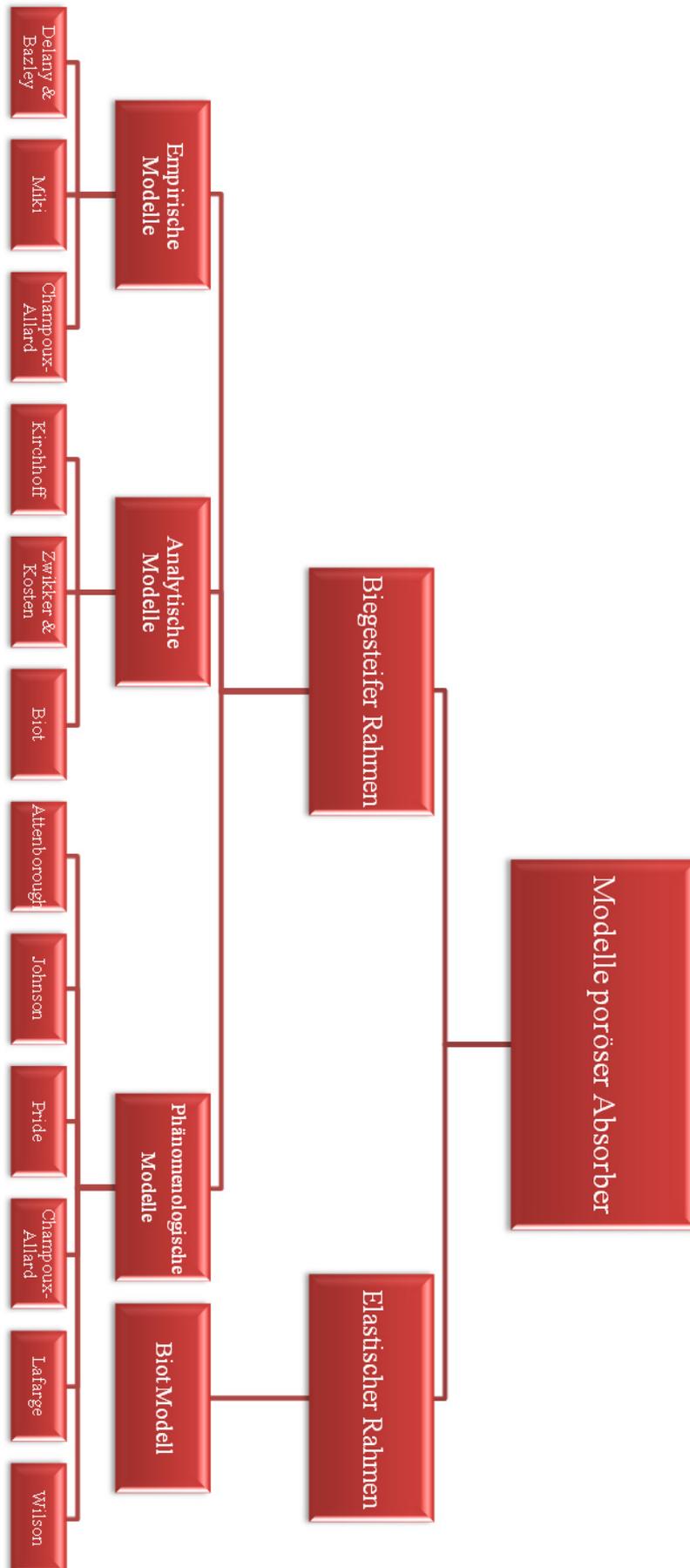


Abbildung 3.2: Hierarchische Darstellung von Modellen proelastischer Materialien.

gegeben ist, wodurch die Trägheitseffekte der Festkörperkomponente mit einfließen.

Formlabile Materialien mit hoher Dichte können ebenfalls durch Modelle für Materialien mit biegesteifem Skelett korrekt beschrieben werden. Betrachtet man Frequenzen oberhalb der Entkoppelungsfrequenz, kann auch diese Forderung gelockert werden.

3.3 Empirische Modelle

3.3.1 Delany und Bazley

Das wahrscheinlich bekannteste empirische Modell wurde von DELANY und BAZLEY entwickelt. Betrachtet wurde eine große Zahl von Faserstoffen (mit gleichverteilten Fasern) mit Porosität nahe bei 1 und verschiedenen Strömungswiderständen Ξ . Mittels Impedanzrohrmessungen bestimmten sie die Ausbreitungskonstante $\Gamma = ik$ und charakteristische Impedanz Z_c für ein großes Frequenzspektrum. Das Resultat dieser Messungen war, dass das gesuchte Parameterpaar hauptsächlich von der Frequenz f und dem Strömungswiderstand Ξ des Materials abhängen. Ihre Ergebnisse veröffentlichten sie in [18].

Die Formeln zur Berechnung von Γ und Z_c lauten:

$$Z_c = \rho_0 c_0 \left(1 + 9,08 \cdot \left(10^3 \frac{f}{\Xi} \right)^{-0,75} - i \cdot 11,9 \cdot \left(10^3 \frac{f}{\Xi} \right)^{-0,73} \right) \quad (3.42)$$

$$\Gamma = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + 10,8 \cdot \left(10^3 \frac{f}{\Xi} \right)^{-0,70} - i \cdot 10,3 \cdot \left(10^3 \frac{f}{\Xi} \right)^{-0,59} \right) \quad (3.43)$$

mit

ρ_0	Luftdichte
c_0	Schallgeschwindigkeit in Luft
Ξ	Strömungswiderstand
f	Schallfrequenz
ω	$= 2\pi f$, Kreisfrequenz

Als Grenzen für den Einsatzbereich der Formeln geben DELANY und BAZLEY $10 \leq f/\Xi \leq 1000$ (Anmerkung: Die Autoren machten Maßangaben in [cm] und nicht in [m]).

ALLARD und CHAMPOUX haben 1992 in [3] daraus Formeln für die Wellenzahl k und charakteristische Impedanz Z_c errechnet. In dieser Darstellungsform werden die Formeln von DELANY

und BAZLEY auch heute noch häufig benutzt:

$$Z_c = \rho_0 c_0 (1 + 0,0571 \cdot X^{-0,754} - i \cdot 0,087 \cdot X^{-0,732}) \quad (3.44)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} (1 + 0,0978 \cdot X^{-0,700} - i \cdot 0,189 \cdot X^{-0,595}) \quad (3.45)$$

$$X = \frac{\rho_0 f}{\Xi} \quad 0,01 < X < 1,0. \quad (3.46)$$

3.3.2 Mechel

Die mittlerweile klassische Darstellung (3.44)-(3.46) von Wellenzahl und charakteristischer Impedanz wird in der Literatur auch für abweichende Parametersätze verwendet.

MECHEL hat bereits 1976 in [43] darauf hingewiesen, dass sich für tiefe Frequenzen und/oder große Strömungswiderstände mit den verwendeten Zahlenwerten ein negativer Realteil der Impedanz ergibt, was physikalisch ausgeschlossen ist.

Es ist aber möglich die empirischen Kennwertdarstellungen von DELANY/BAZLEY zu tiefen Frequenzen hin mit einer Näherung aus dem RAYLEIGH-Modell so fortzusetzen, dass ein möglichst stetiger Übergang erfolgt und dieser Fehler vermieden wird.

Zunächst werden die Konstanten in (3.44)-(3.46), wie MECHEL folgend in [57] vorgeschlagen wird, leicht verändert zu

$$Z_c = \rho_0 c_0 (1 + 0,0489 \cdot X^{-0,754} - i \cdot 0,087 \cdot X^{-0,731}) \quad (3.47)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} (1 + 0,0978 \cdot X^{-0,693} - i \cdot 0,189 \cdot X^{-0,618}) \quad (3.48)$$

$$X = \frac{\rho_0 f}{\Xi} \quad \frac{1}{60} < X < 1,0. \quad (3.49)$$

Für $X \leq 1/60$ werden neue Formeln eingeführt:

$$Z_c = \rho_0 c_0 \frac{0,159 \cdot X^{-1} - 1,403 \cdot i}{\sqrt{-1,466 + i \cdot 0,212 \cdot X^{-1}}} \quad (3.50)$$

$$k = \frac{-i\omega}{c_0} \sqrt{-1,466 + i \cdot 0,212 \cdot X^{-1}} \quad (3.51)$$

$$X = \frac{\rho_0 f}{\Xi} \quad X \leq \frac{1}{60}. \quad (3.52)$$

3.3.3 Miki

Eine weitere Modifikationsvariante für das DELANY/BAZLEY-Modell, mit dem Ziel negative Werte für den Realteil der Impedanz bei niedrigen Frequenzen zu vermeiden, stammt von Yasushi MIKI (1990). Er führte die Problematik der möglichen negativen Impedanzen beim DELANY/BAZLEY-Modell darauf zurück, dass die Koeffizienten ohne Randbedingungen berechnet wurden, wodurch

die KRAMERS-KRÖNIG-Beziehungen verletzt werden. Um das zu vermeiden, folgt MIKI dem Ansatz von DELANY und BAZLEY⁴

$$Z_c = \rho_0 c_0 (1 + a_1 X^{-\alpha_1} - i a_2 X^{-\alpha_2}) \quad (3.53)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} (1 + b_1 X^{-\beta_1} - i b_2 X^{-\beta_2}) \quad (3.54)$$

gibt aber für die Koeffizienten folgende Randbedingungen an:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad a_2 = -a_1 \cot\left(\frac{(\alpha_1 + 1)\pi}{2}\right), \quad -1 < \alpha_1 < 0 \quad (3.55)$$

$$\beta_1 = \beta_2, \quad b_2 = -b_1 \tan\left(\frac{\beta_1 \pi}{2}\right). \quad (3.56)$$

Daraus folgt für Z_c und k

$$Z_c = \rho_0 c_0 \left(1 + 0,0699 \cdot \left(\frac{f}{\Xi}\right)^{-0,632} - i \cdot 0,107 \cdot \left(\frac{f}{\Xi}\right)^{-0,632} \right) \quad (3.57)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + 0,109 \cdot \left(\frac{f}{\Xi}\right)^{-0,618} - i \cdot 0,160 \cdot \left(\frac{f}{\Xi}\right)^{-0,618} \right) \quad (3.58)$$

und umgerechnet auf die Darstellungsform (3.44)-(3.46):

$$Z_c = \rho_0 c_0 (1 + 0,0785 \cdot X^{-0,632} - i \cdot 0,120 \cdot X^{-0,632}) \quad (3.59)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} (1 + 0,122 \cdot X^{-0,618} - i \cdot 0,180 \cdot X^{-0,618}). \quad (3.60)$$

Ähnlich wie bei MECHEL treten bei diesem Modell bei Werten von $X < 0,01$ keine Probleme auf, bezüglich der Güte in diesem Bereich macht MIKI jedoch keine Angaben.

3.3.4 Komatsu

KOMATSU hat das Thema in [33] nochmals aufgegriffen und darauf hingewiesen, dass sowohl das DELANY/BAZLEY- als auch das MIKI-Modell, vor allem für Werte ab $X < 0,05$, Ergebnisse für die charakteristische Impedanz und die Wellenzahl liefern, die weit von den gemessenen Daten abweichen.

Aufgrund seiner Messung an unterschiedlichen Faserstoffen und einigen theoretischen Überlegungen schlägt er ein etwas anderes empirisches Modell vor, das bei Faserstoffen nochmals bessere Übereinstimmung mit den Messwerten liefert:

$$Z_c = \rho_0 c_0 \left[1 + 0,00027 \cdot \left(2 - \log\left(\frac{f}{\Xi}\right)\right)^{6,2} - i \cdot 0,0047 \cdot \left(2 - \log\left(\frac{f}{\Xi}\right)\right)^{4,1} \right] \quad (3.61)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left[1 + 0,0004 \cdot \left(2 - \log\left(\frac{f}{\Xi}\right)\right)^{6,2} - i \cdot 0,0069 \cdot \left(2 - \log\left(\frac{f}{\Xi}\right)\right)^{4,1} \right]. \quad (3.62)$$

⁴In [47] werden die Regressionsformeln wieder für die normalisierte Impedanz und die Ausbreitungskonstante $\Gamma = ik$ angegeben.

KOMATSU weist darauf hin, dass durch die Form $a(2 - \log(f/\Xi))^\alpha$ in obigen Formeln gute Simulationsergebnisse erreicht werden, die folgende Interpretation zulassen: Während α die Steigung der Kurve bestimmt, beeinflusst a die vertikale Position der Kurve. Bildet man die Quotienten aus den Koeffizienten für die reellen bzw. die imaginären Anteile von k und Z_c , also $0,0004/0,00027$ und $0,0069/0,0047$, so ergibt sich jeweils etwa $1,47$. Dieses Verhältnis scheint sehr eng mit der Porosität ϕ und der Tortuosität α_∞ verknüpft zu sein.

Darüber hinaus gibt KOMATSU an, dass sein Modell speziell für Werte von $f/\Xi < 0,01$ bzw. $f/\Xi > 0,1$ besonders effektiv ist.

3.3.5 Allard und Champoux

Ein weiteres empirisches Modell, welches bei niedrigen Frequenzen bessere Ergebnisse als das DELANY/BAZLEY- und das MECHEL-Modell liefert, wurde von ALLARD und CHAMPOUX 1992 in [3] vorgestellt. Es berücksichtigt den Wärmeaustausch zwischen Fluid und Skelett. Ähnlich wie die anderen empirischen Modelle basiert es auf dem Strömungswiderstand als einzigem variablen Parameter. Definiert ist das Modell jedoch über die effektive Dichte und den Kompressionsmodul, wie es auch bei den phänomenologischen Modellen üblich ist. Die Gleichungen dazu lauten:

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left(1 - i \left(\frac{\Xi}{\rho_0 \omega} \right) G_1 \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right) \right) \quad (3.63)$$

$$K(\omega) = \kappa p_0 \left(\kappa - \frac{\kappa - 1}{1 - \left(\frac{i}{4P_r} \right) \left(\frac{\Xi}{\rho_0 \omega} \right) G_2 \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right)} \right)^{-1} \quad (3.64)$$

wobei die Funktionen G_1 und G_2 durch

$$G_1 \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right) = \sqrt{1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right)} \quad (3.65)$$

$$G_2 \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right) = G_1 \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right) \left(\frac{2P_r}{\pi} \left(\frac{\rho_0 \omega}{\Xi} \right) \right) \quad (3.66)$$

gegeben sind. Dabei ist p_0 der Ausgleichsdruck des Fluids im Ruhezustand, κ der Adiabatenexponent und P_r die PRANDTL-Zahl.

Ist das verwendete Fluid Luft, und ersetzt man die Konstanten durch die entsprechenden Zahlenwerte

$$\rho_0 = 1,2 \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad P_r = 0,702, \quad \kappa = 1,4 \quad p_0 = 101320 \text{ [N/m}^2\text{]}, \quad (3.67)$$

so erhält man mit dem aus dem DELANY/BAZLEY-Modell bekannten Parameter X nach [3] und [24]

$$\rho(\omega) = 1,2 + (-0,0364 \cdot X^{-2} - i \cdot 0,1144 \cdot X^{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

$$K(\omega) = 101320 \cdot \frac{i \cdot 29,64 + (2,82 \cdot X^{-2} + i \cdot 24,9 \cdot X^{-1})^{\frac{1}{2}}}{i \cdot 21,17 + (2,82 \cdot X^{-2} + i \cdot 24,9 \cdot X^{-1})^{\frac{1}{2}}} \quad (3.69)$$

3.3.6 Weitere Regressionsmodelle aus der Literatur

In der Literatur werden einige weitere Parametersätze für die Darstellungen nach DELANY/BAZLEY angegeben. Die nun tabellarisch dargestellten wurden ausgewählt, um auch einige speziell für Schäume erstellte Varianten anzugeben. Die Koeffizienten und Exponenten zu der Darstellung

$$Z_c = \rho_0 c_0 (1 + a_1 X^{-\alpha_1} - i a_2 X^{-\alpha_2}) \quad (3.70)$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} (1 + b_1 X^{-\beta_1} - i b_2 X^{-\beta_2}) \quad (3.71)$$

sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Die Messungen von DUNN/DAVERN⁵ in Zeile 1 wurden an 4 Schäu-

<i>Nr.</i>	<i>Material</i>	a_1	α_1	a_2	α_2	b_1	β_1	b_2	β_2
1	PU-Schaum	0,114	0,369	0,0985	0,758	0,136	0,491	0,168	0,715
2	PU-Schaum	0,209	0,548	0,105	0,607	0,188	0,554	0,163	0,592
3	Polyesterfasern	0,078	0,623	0,074	0,660	0,121	0,530	0,159	0,571

Tabelle 3.1: Koeffizienten und Exponenten für Parameterpaar Z_c und k zur Darstellung (3.70)-(3.71)

men vorgenommen mit Raumgewicht 32 - 38 [kg/m³] und $\Xi = 0,38 - 3,2$ [kPa s/m²]. Die Messungen von WU⁶ in der zweiten Zeile basieren auf Messungen an 15 Schäumen mit Strömungswiderständen zwischen 2,9 und 24,3 [kPa s/m²]. Die Ergebnisse aus Zeile 3 gehen auf Messungen an 38 Polyesterfaserproben zurück, die von GARAI & POMPOLI⁷ durchgeführt wurden.

3.4 Analytische Modelle

Aufgrund der komplexen Porengeometrie von poroelastischen Materialien ist eine direkte Berechnung der viskosen und thermischen Wechselwirkungen zwischen Fluid und Skelett praktisch unmöglich. Daher versucht man durch Annahme vereinfachter Geometrien Rückschlüsse auf diese Wechselwirkungen ziehen zu können.

Der erste, der sich mit der Schallausbreitung in zylindrischen Poren beschäftigt hat, war KIRCHHOFF (1868). Die KIRCHHOFF-Theorie liefert eine allgemeine Beschreibung der Reibungseffekte und der thermischen Wechselwirkungen. ALLARD weist in [2] jedoch darauf hin, dass dieses Modell unnötig kompliziert für die meisten Anwendungen ist, und die fundamentalen akustischen Gleichungen sehr schwer zu lösen sind, wenn man keinen kreisrunden Porenquerschnitt voraussetzen kann.

ZWIKKER und KOSTEN haben 1949 in [61] ein einfacheres Modell vorgestellt, in dem Viskositätseffekte und Wärmeaustausch separat für Poren mit kreisrundem Querschnitt behandelt werden. Laut

⁵vgl. [21]

⁶vgl. [44] (Seite 566)

⁷vgl. [25]

ALLARD, der die Ergebnisse anderer Autoren anführt, ist das Modell für Porenradien zwischen 0,001 cm und mehreren Zentimetern gültig.

3.4.1 Zwikker und Kosten

Im Folgenden werden die Viskositätseffekte nach dem Modell von ZWIKKER und KOSTEN behandelt, und die thermischen Effekte nach einem Modell von STINSON (1991). Die Darstellung ist [2] entnommen. Dort finden sich neben einer detaillierten Betrachtung der hier präsentierten Ergebnisse auch Formelsätze für zylindrische Poren mit dreieckigem, quadratischem und sechseckigem Querschnitt.

Die Reibungseffekte werden durch die effektive Dichte des Fluids abgebildet. In zylindrischen Poren mit kreisrundem Querschnitt gilt

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_0}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-i}} \frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}} \quad (3.72)$$

mit

$$s = \left(\frac{\omega \rho_0 r^2}{\eta} \right)^{1/2} \quad (3.73)$$

und

r	Porenradius
J_n	BESSELFunktion der Ordnung n
η	dynamische Viskosität des Fluids

STINSON assoziiert die thermischen mit den viskosen Effekten und berechnet so den Kompressionsmodul K , der den Wärmeaustausch zwischen Fluid und Skelett beschreibt. Für K erhält man

$$K = \frac{\kappa p_0}{\kappa + (\kappa - 1) \frac{2}{\sqrt{P_r} s \sqrt{-i}} \frac{J_1(\sqrt{P_r} s \sqrt{-i})}{J_0(\sqrt{P_r} s \sqrt{-i})}} \quad (3.74)$$

mit

κ	Adiabatexponent
P_r	PRANDTL-Zahl

3.4.2 Biot-Modell für biegesteifes Skelett

Das BIOT Modell für ein biegesteifes Skelett, in dem die Poren identische, parallele Zylinder sind, die sich senkrecht zur Oberfläche befinden, gilt für sämtliche Querschnittsgeometrien. Es liefert

nach [2] für die effektive Dichte ρ und den Kompressionsmodul K

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left(1 + \frac{\Xi\phi}{i\rho_0\omega} G_c(s) \right) \quad (3.75)$$

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1)F(P_r\omega)} \quad (3.76)$$

$$F(P_r\omega) = \left(1 + \frac{\Xi\phi}{iP_r\rho_0\omega} G_c(\sqrt{P_r}s) \right)^{-1} \quad (3.77)$$

$$G_c(s) = -\frac{s\sqrt{-i}}{4} \frac{\frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-i}} \frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}} \quad (3.78)$$

$$s = c \left(\frac{8\rho_0\omega}{\Xi\phi} \right)^{1/2}. \quad (3.79)$$

Dabei ist ϕ die Porosität, und c ein anpassbarer Parameter, der von der Form des Querschnitts abhängt.

Befinden sich die Poren in einem Winkel φ zur Oberflächennormalen des Materials ist in den Gleichungen (3.75), (3.77) und (3.79) zusätzlich noch die Tortuosität α_∞ zu berücksichtigen, und es gilt dann

$$\rho(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left(1 + \frac{\Xi\phi}{i\alpha_\infty \rho_0 \omega} G_c(s) \right) \quad (3.80)$$

$$F(P_r\omega) = \left(1 + \frac{\Xi\phi}{iP_r\alpha_\infty \rho_0 \omega} G_c(\sqrt{P_r}s) \right)^{-1} \quad (3.81)$$

$$s = c \left(\frac{8\alpha_\infty \rho_0 \omega}{\Xi\phi} \right)^{1/2}. \quad (3.82)$$

3.5 Semiphänomenologische Modelle

Die Modelle, die im vorigen Unterabschnitt besprochen wurden, sind von der Querschnittsgeometrie abhängig. Zusätzlich gelten sie nur für zylindrische Porenkanäle. Bei realen Materialien ist die Form der Porenkanäle aber sehr viel komplexer, und exakte Modelle können kaum aufgestellt werden.

Um komplexere Mikrostrukturen modellieren zu können, wurden in den letzten 20 Jahren viele semiphänomenologische Modelle entwickelt, die auf makroskopischer Ebene vernünftige Approximationen liefern. Alle besprochenen Modelle, mit Ausnahme des Modells von WILSON in Abschnitt 3.5.6, wurden konzipiert, um möglichst exakte Aussagen in den Grenzbereich niedriger und hoher Frequenzen, also für $\omega \rightarrow 0$ bzw. $\omega \rightarrow \infty$, zu machen. Der Frequenzbereich dazwischen wird über jeweils unterschiedliche Funktionen approximativ beschrieben.

3.5.1 Attenborough

ATTENBOROUGH gibt in [6] Formeln für die effektive Dichte ρ und den Kompressionsmodul K an, die man schreiben kann als:

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-i}} \frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}} \quad (3.83)$$

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1) \frac{2}{P_r s \sqrt{-i}} \frac{J_1(P_r s \sqrt{-i})}{J_0(P_r s \sqrt{-i})}} \quad (3.84)$$

$$s = b \left(\frac{8\alpha_\infty \rho_0 \omega}{\Xi \phi} \right)^{1/2}. \quad (3.85)$$

Die Gleichungen (3.83) - (3.85) stimmen mit jenen von ZWIKKER und KOSTEN aus Abschnitt 3.4.1 überein, gelten also für zylindrische Kanäle mit kreisrundem Querschnitt mit dem Radius

$$r = s \left(\frac{\eta}{\rho_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.86)$$

Parameter b in Gleichung (3.85) ist anpassbarer, muss aber nahe bei 1 liegen muss, damit das Modell den richtigen Wert für den Strömungswiderstand Ξ vorhersagt. ALLARD weist in [1] darauf hin, dass, wenn die zylindrischen Kanäle einen Winkel φ mit der Ausbreitungsrichtung einschließen, die Gleichung (3.21) gültig ist, also $\alpha_{infty} = 1/\cos(\varphi)$. Ist $\Lambda \approx \Lambda'$, kann das Modell auch bei hohen Frequenzen verwendet werden.

3.5.2 Johnson et al. Modell für die effektive Dichte

Die effektive Dichte ρ in diesem Modell ist nach [31] gegeben durch

$$\rho(\omega) = \alpha(\omega) \rho_0 \quad (3.87)$$

wobei $\alpha(\omega)$ die von JOHNSON et al. definierte dynamische Tortuosität aus Unterabschnitt 3.1.3 ist. Um diese angeben zu können, wird das Konzept der *dynamischen Permeabilität* $q(\omega)$ eingeführt.

Dynamische viskose Permeabilität

JOHNSON et al. definieren die dynamische Permeabilität $q(\omega)$ durch

$$q(\omega) = \frac{\phi \eta}{i \omega \rho(\omega)}. \quad (3.88)$$

Daraus ergibt sich die *statische viskose Permeabilität* q_0 (nach DARCY)

$$q_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} q(\omega) = \frac{\eta}{\Xi}, \quad (3.89)$$

die ein intrinsischer Parameter ist, und nur von der Mikrogeometrie des Skeletts abhängt.

Dynamische Tortuosität

Mit Hilfe der statischen Permeabilität geben JOHNSON et al. die dynamische Tortuosität folgendermaßen an:

$$\alpha(\omega) = \frac{\phi\eta}{iq_0\rho_0\omega} \left(1 + i \cdot \frac{4\alpha_\infty^2\rho_0q_0^2\omega}{\phi^2\Lambda^2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha_\infty. \quad (3.90)$$

Der Zusammenhang zwischen dynamischer Tortuosität und dynamischer Permeabilität ist gegeben durch

$$q(\omega) = \frac{\phi\eta}{i\rho_0\omega\alpha(\omega)}. \quad (3.91)$$

Modell für die effektive Dichte

Für die effektive Dichte ρ ergibt sich mit (3.89) und (3.90)

$$\rho(\omega) = \rho_0\alpha_\infty \left(1 - i \frac{\Xi\phi}{\alpha_\infty\rho_0\omega} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{8\alpha_\infty^2\rho_0\eta\omega}{\Xi^2\phi^2\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.92)$$

mit

α_∞	Tortuosität
Ξ	Strömungswiderstand
ϕ	Porosität
ρ_0	Dichte
ω	Kreisfrequenz
η	dynamische Viskosität
Λ	viskose charakteristische Länge

Übersichtlicher lässt sich (3.92) auch als

$$\rho(\omega) = \rho_0\alpha_\infty \left(1 - i \cdot \frac{\omega_{vc}}{\omega} \cdot G_J \left(M \frac{\omega}{\omega_{vc}} \right) \right) \quad (3.93)$$

$$G_J = \sqrt{1 + i \cdot \frac{M}{2} \frac{\omega}{\omega_{vc}}} \quad (3.94)$$

$$M = \frac{8\alpha_\infty\eta}{\Xi\phi\Lambda^2} \quad (3.95)$$

$$\omega_{vc} = \frac{\Xi\phi}{\alpha_\infty\rho_0} \quad (3.96)$$

schreiben. Auf diese Weise gewinnt man Formeln für den sogenannten *Porenformfaktor* M und die *viskose charakteristische Frequenz* ω_{vc} , die den Übergang von der Dominanz viskoser Kräfte zur Dominanz der Trägheitskräfte während des Flusses kennzeichnet.

Das JOHNSON et al. Modell liefert, abgesehen vom Realteil der effektiven Dichte ρ für $\omega \rightarrow 0$, Ergebnisse, die mit den theoretischen Grenzwerten für niedrige und hohe Frequenzen sehr gut übereinstimmen. Der Wurzelterm in (3.92) dient der Anpassung im mittleren Frequenzbereich.

3.5.3 Pride et al. Modell für die effektive Dichte

Das Modell von PRIDE et al. aus [53] stellt eine Modifizierung des JOHNSON et al. Modells dar, um den fehlerhaften Realteil des Grenzwertes von ρ bei niedrigen Frequenzen zu bereinigen. Dies erfolgt über einen zusätzlich eingeführten Parameter p in der Formel zur Berechnung der dynamischen Tortuosität $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\Xi\phi}{i\rho_0\omega} \left(1 - p + p \left(1 + i \cdot \frac{4\alpha_\infty^2 \rho_0 \eta \omega}{p^2 \Xi^2 \phi^2 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \alpha_\infty. \quad (3.97)$$

Der korrekte Grenzwert für niedrige Frequenzen α_0 für den Realteil der effektiven Dichte wird für

$$b = \frac{2\alpha_\infty^2 \eta}{\Xi\phi\Lambda^2(\alpha_0 - \alpha_\infty)} \quad (3.98)$$

erreicht. Dieser Wert wurde 2006 von LAFARGE berechnet und ist in [37] (engl. Übersetzung des ursprünglich 2006 erschienenen Werkes) zu finden. Für kreisrunde Poren wird der Grenzwert bei $b = 3/4$ erreicht. Setzt man in (3.97) $b = 1$, erhält man (3.90), die dynamische Tortuosität im Modell von JOHNSON et al. Für die effektive Dichte ρ gilt dann

$$\rho(\omega) = \rho_0 \alpha_\infty \left(1 - i \frac{\Xi\phi}{\alpha_\infty \rho_0 \omega} \left(1 - p + p \left(1 + \frac{i 8\alpha_\infty^2 \rho_0 \eta \omega}{2 b^2 \Xi^2 \phi^2 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (3.99)$$

3.5.4 Champoux-Allard Modell für den Kompressionsmodul

Ähnlich wie die von JOHNSON et al. eingeführte dynamische Tortuosität $\alpha(\omega)$ zur Berechnung der effektiven Dichte ρ genutzt wird, kann eine vergleichbare Funktion $\alpha'(\omega)$ zur Beschreibung der thermischen Effekte herangezogen werden.

CHAMPOUX und ALLARD haben 1991 in [13] ein Modell für den Kompressionsmodul eines porösen Materials mit zylindrischen Poren mit kreisrundem Querschnitt präsentiert. Für den Radius r wird darin $r = \Lambda'$ angenommen, und $\alpha'(\omega)$ mit

$$\alpha'(\omega) = 1 - i \cdot \frac{8\eta}{\Lambda'^2 P_r \rho_0 \omega} \left(1 + i \cdot \frac{\Lambda'^2 P_r \rho_0 \omega}{16\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.100)$$

angegeben. Daraus folgt für den Kompressionsmodul

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1)\alpha'(\omega)^{-1}} \quad (3.101)$$

$$= \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1) \left(1 - i \cdot \frac{8\eta}{\Lambda'^2 P_r \rho_0 \omega} \left(1 + i \cdot \frac{\Lambda'^2 P_r \rho_0 \omega}{16\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}} \quad (3.102)$$

mit

κ	Adiabatexponent
p_0	Fluiddruck im Ruhezustand
η	dynamische Viskosität
Λ'	thermische charakteristische Länge
P_r	PRANDTL-Zahl
ρ_0	Dichte
ω	Kreisfrequenz

3.5.5 Lafarge et al. Modell für den Kompressionsmodul

Aufgrund der Annahmen über die Porenstruktur im CHAMPOUX/ALLARD-Modell kann es, abhängig vom untersuchten Material, zu teilweise großen Abweichungen zwischen den vorhergesagten und den gemessenen Werten des Kompressionsmoduls kommen. Um dies zu vermeiden, haben LAFARGE et al. 1997 in [38] ein anderes Modell für den Kompressionsmodul vorgeschlagen. Dabei wird wieder vom Zusammenhang

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1)\alpha'(\omega)^{-1}} \quad (3.103)$$

ausgegangen, und in Analogie zur dynamischen Tortuosität $\alpha(\omega)$, eine Funktion $\alpha'(\omega)$ benutzt. Um sie zu bestimmen, definieren LAFARGE et al., in Anlehnung an q_0 , die *thermische Permeabilität* q'_0 .

Dynamische thermische Permeabilität

LAFARGE gibt die dynamische thermische Permeabilität $q'(\omega)$, 1993 in seiner Dissertation (siehe [36]) durch

$$q'(\omega) = \frac{\phi\gamma\langle\nu\rangle}{i\omega p} \quad (3.104)$$

mit

γ	Wärmeleitfähigkeit des Fluids
$\langle\nu\rangle$	mittlere Temperatur im Fluid
p	Fluiddruck

an. Daraus erhält man die statische thermische Permeabilität q'_0 durch Grenzübergang:

$$q'_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} q'(\omega). \quad (3.105)$$

Dynamische thermische Tortuosität

Für $\alpha'(\omega)$ geben LAFARGE et al. die Formel

$$\alpha'(\omega) = 1 - i \cdot \frac{\phi\eta}{q'_0 P_r \rho_0 \omega} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{8q_0'^2 P_r \rho_0 \omega}{\phi^2 \Lambda'^2 \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.106)$$

an. Im CHAMPOUX/ALLARD-Modell wird

$$q'_0 = \frac{\phi r^2}{8} = \frac{\phi \Lambda'^2}{8} \quad (3.107)$$

als Permeabilität eines porösen Mediums mit zylindrischen Poren mit kreisrundem Querschnitt mit Radius $r = \Lambda'$ benutzt.

Der Zusammenhang von $\alpha'(\omega)$ und $q'(\omega)$ kann durch

$$q'(\omega) = \frac{\phi \eta}{i P_r \rho_0 \omega \alpha'(\omega)} \quad (3.108)$$

beschrieben werden.

In [37] wird noch ein zusätzlicher Parameter p' analog zu (3.97) eingeführt, und so gelangt man zur vollständigen Beschreibung

$$\alpha'(\omega) = 1 - i \cdot \frac{\phi \eta}{q'_0 P_r \rho_0 \omega} \left(1 - p' + p \left(1 + \frac{i 8 q_0'^2 P_r \rho_0 \omega}{\phi^2 \Lambda'^2 \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.109)$$

Für das vereinfachte LAFARGE et al. Modell (ohne Parameter p') lässt sich, analog zum JOHNSON et al. Modell, eine Schreibweise für den Kompressionsmodul K angeben, die den *thermischen Porenformfaktor* M' und die *thermische charakteristische Frequenz* ω_{tc} berücksichtigt:

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1) \left(1 - i \cdot \frac{\omega_{tc}}{\omega} \cdot G_L \left(M' \frac{\omega}{\omega_{tc}} \right) \right)^{-1}} \quad (3.110)$$

$$G_L = \left(1 + i \cdot \frac{M'}{2} \frac{\omega}{\omega_{tc}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.111)$$

$$M' = \frac{8 q_0'}{\phi \Lambda'^2} \quad (3.112)$$

$$\omega_{tc} = \frac{\phi \eta}{q_0' P_r \rho_0}. \quad (3.113)$$

Die thermische charakteristische Frequenz kennzeichnet den Übergang von isothermen hin zu adiabatischem Fluss.

3.5.6 Wilson

WILSON hat in [59] einen anderen Zugang gewählt und darauf hingewiesen, dass die thermischen und viskosen Effekte, die in porösen Materialien auftreten, charakteristisch für einen Relaxationsprozess sind, wobei zwei unterschiedliche Relaxationszeiten zur Anwendung kommen. Durch die Schallausbreitung kommt es einerseits zu ungleichen Temperaturverteilungen innerhalb des Fluids

in den Poren. Mit der Zeit findet ein Temperatenausgleich in Richtung Temperatur des Skeletts statt. Diese charakteristische Zeit wird mit τ_{ent} bezeichnet. Andererseits treten aufgrund der Schallwelle Druckgradienten auf, die zu Veränderungen der Flussgeschwindigkeit führen. Die charakteristische Zeit die benötigt wird, um zum stationären Fluss zurückzukehren, wird als τ_{vor} bezeichnet.

Im Gegensatz zu den Modellen von CHAMPOUX/ALLARD und LAFARGE soll die Formel für den Kompressionsmodul K , die WILSON angibt, nicht exakt für niedrige und hohe Frequenzen sein, sondern im mittleren Frequenzbereich zutreffende Aussagen liefern.

Die folgenden Formeln für die effektive Dichte ρ und den Kompressionsmodul K werden von WILSON angegeben:

$$\rho(\omega) = \phi \rho_{\infty} \frac{(1 + i\omega\tau_{vor})^{\frac{1}{2}}}{(1 + i\omega\tau_{vor})^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (3.114)$$

$$K(\omega) = \phi K_{\infty} \frac{(1 + i\omega\tau_{ent})^{\frac{1}{2}}}{(1 + i\omega\tau_{ent})^{\frac{1}{2}} + \kappa - 1}. \quad (3.115)$$

In (3.114) ist ρ_{∞} der Grenzwert von ρ für hohe Frequenzen. Dementsprechend ist K_{∞} der Grenzwert von K in (3.115).

3.5.7 Zusammenfassung der Modelle

Während die Modelle von ATTENBOROUGH und WILSON sowohl viskose als auch thermische Effekte berücksichtigen, können die übrigen in den letzten Unterabschnitten behandelten Modelle kombiniert werden, um Aussagen über die effektive Dichte ρ und den Kompressionsmodul K zu erhalten. Bei der Kombination ist darauf zu achten, dass sich je nach den gewählten Varianten eine unterschiedliche Anzahl an zu bestimmenden Parametern ergibt. Die einzelnen Gesamtmodelle sind in Tabelle 3.2 aufsteigend nach Parameteranzahl angeführt.

Modell	Parameteranzahl	Parameter
ATTENBOROUGH	4	$\Xi, \phi, \alpha_{\infty}, b$
WILSON	4	$\rho_{\infty}\tau_{vor}, K_{\infty}, \tau_{ent}$
JOHNSON-CHAMPOUX-ALLARD	5	$\Xi, \phi, \alpha_{\infty}, \Lambda, \Lambda'$
JOHNSON-LAFARGE	6	$\Xi, \phi, \alpha_{\infty}, \Lambda, \Lambda', k'_0$
PRIDE-LAFARGE	8	$\Xi, \phi, \alpha_{\infty}, \Lambda, \Lambda', k'_0, p, p'$

Tabelle 3.2: Semiphänomenologische Modelle mit ihrer benötigten Parameteranzahl.

3.5.8 Ermittlung der Parameter für das Johnson-Lafarge-Modell

Einige der Parameter, die in den unterschiedlichen Modellen verwendet werden, können durch im Allgemeinen leicht verfügbare Messmethoden (wie z.B. Impedanzrohrmessungen), die in den meis-

ten Akustiklabors durchführbar sind bestimmt werden. Andere Parameter sind, nicht so einfach zugänglich, werden aber für die Simulation dennoch benötigt. Es ist daher wünschenswert, diese, soweit als möglich, durch mathematische Methoden zu bestimmen. Das ist das Ziel der nächsten beiden Unterabschnitte, wobei Methoden verwendet werden, die in [51], [52], und [30] vorgeschlagen wurden.

Darüber hinaus wäre es auch möglich die gesuchten Parameter anhand von Messergebnissen durch Optimierung zu bestimmen. Diese *inverse* Parameterbestimmung, die sich eines Evolutionsalgorithmus bedient, wird in [5] beschrieben und liefert sehr gute Ergebnisse. Eine genaue Behandlung ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.

Analytische Bestimmung der Parameter für die viskose Dissipation

Im Modell von JOHNSON et al. (siehe Abschnitt 3.5.2) werden, abgesehen von der Porosität ϕ , die drei Parameter Strömungswiderstand Ξ , Tortuosität α_∞ und viskose charakteristische Länge Λ benutzt. Im Folgenden wird nun davon ausgegangen, dass effektive Dichte, Porosität und Strömungswiderstand bekannt sind, und Tortuosität und viskose charakteristische Länge analytisch aus dem Modell bestimmt werden sollen.

Ausgehend von (3.93) wird mit Hilfe von (3.38) die effektive Dichte des äquivalenten Fluids betrachtet:

$$\rho_{EQ}(\omega) = \frac{\rho(\omega)}{\phi} = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\phi} \left(1 - i \cdot \frac{\omega_{vc}}{\omega} \cdot G_J \left(M \frac{\omega}{\omega_{vc}} \right) \right), \quad (3.116)$$

wobei für G_J Gleichung (3.94), also

$$G_J = \sqrt{1 + i \cdot \frac{M}{2} \frac{\omega}{\omega_{vc}}} \quad (3.117)$$

gilt. Dieser komplexwertige Ausdruck lässt sich in Realteil und Imaginärteil zerlegen:

$$G_J = \operatorname{Re}(\omega) + i \cdot \operatorname{Im}(\omega). \quad (3.118)$$

Quadriert man G_J so führt das auf das Gleichungssystem

$$(\operatorname{Re}(\omega))^2 - (\operatorname{Im}(\omega))^2 = 1 \quad (3.119)$$

$$2 \cdot \operatorname{Re}(\omega) \cdot \operatorname{Im}(\omega) = \frac{M}{2} \frac{\omega}{\omega_{vc}}. \quad (3.120)$$

Löst man (3.120) nach $\operatorname{Im}(\omega)$ auf und setzt in (3.119) erhält man

$$(\operatorname{Re}(\omega))^4 - (\operatorname{Re}(\omega))^2 - \frac{M}{4} \frac{\omega}{\omega_{vc}} = 0. \quad (3.121)$$

Durch Substitution $u = (\text{Re}(\omega))^2$ und Auflösen der resultierenden quadratischen Gleichung ergeben sich die passenden Lösungen

$$G_R = \text{Re}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{M\omega}{2\omega_{vc}}\right)^2}} > 0 \quad (3.122)$$

$$G_I = \text{Im}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{M\omega}{2\omega_{vc}}\right)^2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{\omega_{vc}} \omega > 0. \quad (3.123)$$

Insgesamt erhält man somit für die äquivalente effektive Dichte

$$\rho_{EQ}(\omega) = \left(\frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\phi} + \frac{\Xi}{\omega} G_I \right) - i \cdot \frac{\Xi}{\omega} G_R. \quad (3.124)$$

Bezeichnet man den Realteil von ρ_{EQ} mit X und den Imaginärteil mit Y so ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$X = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\phi} + \frac{\Xi}{\omega} G_I \quad (3.125)$$

$$Y = -\frac{\Xi}{\omega} G_R \quad (3.126)$$

nach Auflösung nach α_∞ bzw. Λ

$$\alpha_\infty = \frac{\phi}{\rho_0} \left(X - \sqrt{Y^2 - \left(\frac{\Xi}{\omega}\right)^2} \right) \quad (3.127)$$

$$\Lambda = \alpha_\infty \sqrt{\frac{2\rho_0 \eta}{\phi \omega Y (\alpha_\infty \rho_0 - \phi X)}}. \quad (3.128)$$

Das bedeutet also, dass man diese analytischen Lösungen benutzen kann, um aus Strömungswiderstand, Porosität und effektiver Dichte die Tortuosität und die viskose charakteristische Länge zu berechnen. Zu beachten ist, dass die beiden Parameter nicht frequenzabhängig sind, sofern sich das Material dem Modell entsprechend verhält, auch wenn die Lösungsgleichungen das andeuten. Darüber hinaus entsprechen die so bestimmten Parameter nicht unbedingt den intrinsischen, geometrischen Parametern, außer für $\omega \rightarrow \infty$, da das JOHNSON et al. Modell dort exakt ist.

Parameterermittlung für die viskose Dissipation durch Abschätzung

In [51] wurde eine Methode vorgeschlagen, die es ermöglicht, nicht nur die Tortuosität und die viskose charakteristische Länge, sondern auch den Strömungswiderstand ohne Messungen zu bestimmen, und zwar nur anhand von effektiver Dichte und Porosität.

Man definiert die Variable θ durch

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\phi}{\rho_0}(\operatorname{Re}(\rho_{EQ}) + \operatorname{Im}(\rho_{EQ})) \\ &= \frac{\phi}{\rho_0}(X + Y) \\ &= \alpha_\infty + \frac{\Xi\phi}{\rho_0\omega}(G_I - G_R).\end{aligned}\tag{3.129}$$

Bei ausreichend hohen Frequenzen strebt dieser Ausdruck gegen die Tortuosität α_∞ , da für $\omega/\omega_{vc} \gg 1$ die Funktion G_R den asymptotischen Wert

$$G_R = \sqrt{\frac{M\omega}{2\omega_{vc}}}\tag{3.130}$$

annimmt. Für Materialien mit kleinem statischen Strömungswiderstand⁸, ist (3.129) ein guter Näherungswert für die Tortuosität und kann aus Messungen im mittleren Frequenzbereich gewonnen werden, in dem die Homogenitätskriterien für das Material (die das Modell voraussetzt) erfüllt werden.

Ist die Tortuosität bestimmt, lässt sich der Strömungswiderstand durch Umformung von (3.127) ermitteln:

$$\Xi = \sqrt{Y^2 - \left(X - \frac{\alpha_\infty\rho_0}{\phi}\right)^2}.\tag{3.131}$$

Im Falle hoher Strömungswiderstände, kann eine gute Näherung bei niedrigen Frequenzen aus der effektiven Dichte berechnet werden:

$$\Xi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}(\omega\rho_{EQ}).\tag{3.132}$$

Analytische Bestimmung der Parameter für die thermische Dissipation

Im Modell von LAFARGE et al. (siehe Abschnitt 3.5.5) werden, abgesehen von der Porosität, die beiden Parameter statische thermische Permeabilität q'_0 und thermische charakteristische Länge Λ' benutzt. Sind Kompressionsmodul des äquivalenten Fluids K_{EQ} und die Porosität ϕ bekannt, können die beiden anderen Parameter analytisch aus dem Modell bestimmt werden.

Wie schon beim JOHNSON et al. Modell wird der Kompressionsmodul für das äquivalente Fluid über (3.38) berücksichtigt, und dann wird die Formel für den Kompressionsmodul (3.110) in Realteil und Imaginärteil aufgespalten. Dazu schreibt man (3.110) zunächst als

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - \frac{(\kappa-1)}{A}}\tag{3.133}$$

⁸Bei hohen Strömungswiderständen kann eine Extrapolation von θ für $\omega \rightarrow \infty$ durchgeführt werden, wie sie in [51] beschrieben wird.

mit

$$A = 1 - i \cdot \frac{\omega_{tc}}{\omega} \cdot G_L \left(M' \frac{\omega}{\omega_{tc}} \right). \quad (3.134)$$

Die Funktion G_L , die durch (3.111) gegeben ist, zerlegt man nun analog zu G_J in $\text{Re}'(\omega)$ und $\text{Im}'(\omega)$. Anschließend benutzt man

$$A = X + i \cdot Y \quad (3.135)$$

mit

$$X = 1 + \frac{\omega_{tc}}{\omega} \cdot \text{Im}'(\omega) \quad (3.136)$$

$$Y = -\frac{\omega_{tc}}{\omega} \cdot \text{Re}'(\omega). \quad (3.137)$$

Die Aufteilung von (3.133) in Realteil und Imaginärteil führt schlussendlich nach Auflösung nach Λ' bzw. q'_0 zu

$$\Lambda' = 2\sqrt{\frac{\eta}{P_r \rho_0 \omega}} \left(-\text{Im} \left(\left(\frac{1 - \frac{\phi K_{EQ}}{\kappa P_0}}{1 - \frac{\phi K_{EQ}}{P_0}} \right)^2 \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.138)$$

$$q'_0 = \frac{\phi \eta}{P_r \rho_0 \omega} \left(-\text{Re} \left(\left(\frac{1 - \frac{\phi K_{EQ}}{\kappa P_0}}{1 - \frac{\phi K_{EQ}}{P_0}} \right)^2 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.139)$$

Da Λ' nur im hochfrequenten Bereich für K eine Rolle spielt, und q'_0 im niederfrequenten, werden die Parameter den aufgespaltenen Termen entsprechend zugeordnet. Wieder ist zu beachten, dass es sich dabei nicht um exakte Lösungen, sondern gute Schätzungen für die Parameter handelt, weil das Modell selbst nicht exakt ist.

Eine ähnliche Parameterextraktion kann auch für das WILSON-Modell vorgenommen werden. Bei der analytischen Bestimmung der Lösungen für die Parameter für die thermische Dissipation tritt allerdings eine Gleichung vierter Ordnung auf, die numerisch zu lösen ist. Dann ist es nötig sich für eine der vier Lösungen zu entscheiden, wobei diejenige genommen werden sollte, die über das gesamte Frequenzspektrum am konstantesten bleibt. Dadurch geht der rein analytische Ansatz der Lösung verloren. Eine genaue Darstellung findet sich in [52].

3.6 Biot-Modell für elastischen Rahmen

In diesem Abschnitt soll ein Überblick über die klassische BIOT-Theorie gegeben werden. Da sich diese Arbeit vorwiegend der Behandlung poröser Materialien mit biegesteifem Rahmen widmet, sei für eine genaue Behandlung auf die Literatur⁹ verwiesen.

⁹Neben den Artikeln von BIOT selbst, bieten beispielsweise [2], [44] und [46] weiteren Aufschluss.

BIOT begann 1941¹⁰ mit der theoretischen Beschreibung poröser Materialien, die mit einem viskosen Fluid gesättigt sind. Später erweiterte er die Theorie auf anisotrope Materialien¹¹ und auch auf viskoelastische poröse Materialien¹². Der Einfluss der Dynamik wurde von BIOT schließlich 1956 in zwei Artikeln behandelt, wobei der erste (siehe [10]) auf den niederfrequenten Bereich und der zweite (siehe [11]) auf den höherfrequenten Bereich eingeht. Eines der herausragendsten Ergebnisse dieser Arbeiten ist, dass sich in einem poroelastischen Material in einem 3D-Kontinuum 3 verschiedene Wellen ausbreiten: Zwei Kompressionswellen (Longitudinalwellen) und eine Scherwelle (Transversalwellenart).

Die BIOT-Theorie betrachtet vollständig fluidgesättigte poroelastische Materialien¹³ und berücksichtigt durch die drei Wellen die Auswirkungen eines elastischen Rahmenskeletts auf die Schallausbreitung in solchen Medien. Von Bedeutung sind dabei Wechselwirkungen zwischen Skelett und sättigendem Fluid, die bei biegesteifen Rahmen nicht auftreten bzw. vernachlässigt werden können. Einerseits führt eine Erhöhung des Drucks in den Poren zu einer Ausdehnung der Festkörperkomponente, während umgekehrt eine Kompression des Skeletts zu einer Erhöhung des Porendrucks führt (vorausgesetzt die Fluidkomponente kann nicht entweichen). Andererseits führen Verschiebungen zwischen Skelett und Fluid zu Energieverlusten, die bei der Behandlung dissipativer Effekte nicht außer Acht gelassen werden dürfen.

3.6.1 Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen¹⁴

Ausgegangen wird makroskopisch betrachtet von einem homogenen, isotropen Material ((gleichmäßig verteilte Poren; Materialeigenschaften in alle Richtungen gleich), das mit einem kompressiblen, viskosen Fluid gesättigt ist, und in dem es zu kleinen, reversiblen Verformungen kommt. Hat ein beliebiger Punkt P im Material vor einer Verformung die Koordinaten $P = (x_1, x_2, x_3)$, so besitzt er nach der Verformung die Koordinaten $P' = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$ (siehe Abbildung 3.3). Die Werte u_1, u_2, u_3 bilden die Komponenten des sogenannten Verschiebungsvektors $u = (u_1, u_2, u_3)$ des Punktes P .

Ein benachbarter Punkt Q hat vor einer Verformung entsprechend die Koordinaten $Q = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ und nach der Verformung die Koordinaten $Q' = (x_1 + \Delta x_1 + u'_1, x_2 + \Delta x_2 + u'_2, x_3 + \Delta x_3 + u'_3)$, mit dem Verschiebungsvektor $u' = (u'_1, u'_2, u'_3)$. Für u' gilt

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}}_{\Delta u} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

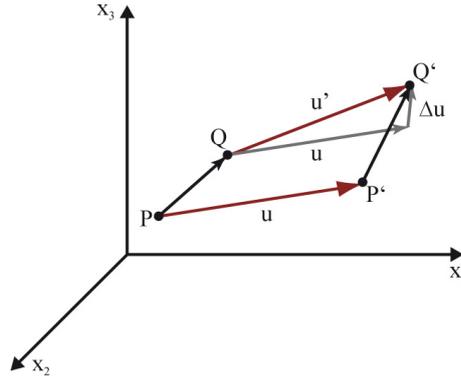
¹⁰zu finden in [7]

¹¹zu finden in [8]

¹²zu finden in [9]

¹³In [3] ist auch Modell für teilweise Fluidsättigung bzw. ein gemischtes Modell zu finden.

¹⁴Die Grundlagen der Elastizitätstheorie aus diesem Unterabschnitt folgen der Darstellung in den entsprechenden Kapiteln in [26] und [2].

Abbildung 3.3: Deformation von (P, Q) zu (P', Q') .

Die Deformationsmatrix in (3.140) setzt sich zusammen aus dem symmetrischen Verzerrungstensor

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

für Stauchung/Dehnung und Scherung und dem antisymmetrischen Rotationstensor

$$\begin{pmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ \vartheta_{21} & 0 & \vartheta_{23} \\ \vartheta_{31} & \vartheta_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

mit den Elementen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \vartheta_{12} = -\vartheta_{21} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.143)$$

$$\vartheta_{13} = -\vartheta_{31} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \quad \vartheta_{23} = -\vartheta_{32} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right). \quad (3.144)$$

Spannung und Verzerrung in einem isotropen, elastischen Körper sind proportional. Wenn man mit $\theta = \operatorname{div}(u) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ die Volumenänderung (Dilatation) aufgrund der Verzerrung bezeichnet, ist die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung gemäß der linearen Elastizitätstheorie durch das HOOKEsche Gesetz

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.145)$$

gegeben, wobei σ_{ij} die Elemente des Spannungstensors und ε_{ij} die Elemente des oben angeführten Verzerrungstensors sind. Weiters sind λ und μ die LAMÉ-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (3.146)$$

mit

E	Elastizitätsmodul
ν	POISSONZahl
G	Schermodul
Größen siehe Abschnitt 3.1.2	

In der BIOT-Theorie wird (3.145) in zwei Gleichungen für die Spannungen im Skelett σ^s und die Spannungen im Fluid σ^f unterteilt:

$$\sigma_{ij}^s = ((P - 2N)\theta^s + Q\theta^f)\delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s \quad (3.147)$$

$$\sigma_{ij}^f = \phi p = Q\theta^s + R\theta^f \quad (3.148)$$

wobei ϕ die Porosität und p der Druck sind, und θ^s bzw. θ^f für die Dilatation des Skeletts bzw. des Fluids stehen. δ_{ij} ist das KRONECKER Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} . \quad (3.149)$$

N, P, Q und R sind skalare Elastizitätskoeffizienten die BIOT definiert hat. Ist $Q = 0$, dann wird (3.147) zur Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in elastischen Feststoffen und (3.148) zur Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in elastischen Fluiden. Der Term $Q\theta^f$ gibt den Zusammenhang zwischen der Fluid dilatation und der daraus resultierenden Spannung im Skelett wieder, während $Q\theta^s$ den Zusammenhang zwischen der Skelettdilatation und der daraus resultierenden Druckänderung im Fluid beschreibt. Somit ist Q ein Koeffizient für die Kopplung von Festkörper- und Fluidkomponente.

Um die vier Parameter N, P, Q, R zu bestimmen, gibt BIOT drei „Gedanken Experimente“ an (nachzulesen etwa in [2]). Von diesen drei Experimenten lässt sich ein Gleichungssystem mit den drei unbekanntem P, Q und R ableiten:

$$\phi = \frac{Q}{K_s} + \frac{Q}{K_f} \quad (3.150)$$

$$1 - \phi = \frac{P - \frac{4}{3}N}{K_s} + \frac{Q}{K_f} \quad (3.151)$$

$$1 = \frac{P - \frac{4}{3}N - \frac{Q^2}{R}}{K_b} . \quad (3.152)$$

In diesem Gleichungssystem ist K_b der Kompressionsmodul des porösen Materials, K_s der Kompressionsmodul des Skeletts und K_f der Kompressionsmodul des Fluids. Damit kann man P, Q und

R wie folgt darstellen:

$$P = \frac{(1 - \phi) \left(1 - \phi \frac{K_b}{K_s}\right) K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1 - \phi \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3} N \quad (3.153)$$

$$Q = \frac{\left(1 - \phi \frac{K_b}{K_s}\right) \phi K_s}{1 - \phi \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} \quad (3.154)$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}. \quad (3.155)$$

3.6.2 Bestimmung von P, Q und R

Ist das Skelett nicht komprimierbar, so ist K_s unendlich. Das führt zu den Gleichungen

$$P = \frac{4}{3} N + K_b + \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_f \quad (3.156)$$

$$Q = (1 - \phi) K_f \quad (3.157)$$

$$R = \phi K_f \quad (3.158)$$

die für die meisten schallabsorbierenden Materialien verwendet werden können. Zu bestimmen sind nun noch K_b und K_f . Für poroelastische Materialien kann man K_b durch

$$K_b = \frac{2N(\nu + 1)}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.159)$$

auswerten, wobei ν die POISSONZahl (siehe Abschnitt 3.1.2) ist. Um aus der BIOT-Theorie ein gültiges Modell für biegesteifen Rahmen zu erhalten, kann man nun für K_f eine der frequenzabhängigen Varianten aus Abschnitt 3.5 verwenden.

3.6.3 Wellengleichungen

Die Bewegungsgleichung für einen elastischen Körper ist

$$\rho \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta^s}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i^s \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.160)$$

Unter Berücksichtigung eines von BIOT eingeführten Trägheitskopplungsparameters

$$\rho_a = \phi \rho_0 (\alpha_\infty - 1), \quad (3.161)$$

wobei ρ_0 die Dichte des Fluids ist, kann man daraus mit Hilfe von (3.145) die Bewegungsgleichungen für die Festkörper- bzw. die Fluidkomponente des elastischen Körpers aufstellen:

$$(\rho_1 + \rho_a) \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} - \rho_a \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = (P - N) \frac{\partial \theta^s}{\partial x_i} + N \Delta u_i^s + Q \frac{\partial \theta^f}{\partial x_i} - \Xi \phi^2 G(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (u_i^s u_i^f) \quad (3.162)$$

$$(\phi \rho_0 + \rho_a) \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} - \rho_a \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = R \frac{\partial \theta^f}{\partial x_i} + Q \frac{\partial \theta^s}{\partial x_i} + \Xi \phi^2 G(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (u_i^s u_i^f) \quad (3.163)$$

für $i = 1, 2, 3$, mit der Dichte des Skeletts ρ_1 und der Funktion $G(\omega)$, die beispielsweise durch (3.94) (aus dem JOHNSON et al. Modell) bzw. (3.111) (aus dem vereinfachten LAFARGE et al. Modell) gegeben ist. In vektorieller Schreibweise und unter Einbeziehung eines harmonischen Zeitverlaufs ergibt sich daraus

$$-\omega^2(\tilde{\rho}_{11}u^s + \tilde{\rho}_{12}u^f) = (P - N) \cdot \text{grad}(\text{div}(u^s)) + N \cdot \Delta^2 u^s + Q \cdot \text{grad}(\text{div}(u^f)) \quad (3.164)$$

$$-\omega^2(\tilde{\rho}_{22}u^f + \tilde{\rho}_{12}u^s) = R \cdot \text{grad}(\text{div}(u^f)) + Q \cdot \text{grad}(\text{div}(u^s)) \quad (3.165)$$

mit

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_1 + \rho_a - i \cdot \Xi \phi^2 \frac{G(\omega)}{\omega} \quad (3.166)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = -\rho_a + i \cdot \Xi \phi^2 \frac{G(\omega)}{\omega} \quad (3.167)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \phi \rho_0 + \rho_a - i \cdot \Xi \phi^2 \frac{G(\omega)}{\omega}. \quad (3.168)$$

4 Validierung der Modelle

4.1 Messverfahren - Impedanzrohr

Der Fall der eindimensionalen Wellenausbreitung mit senkrechter Reflexion lässt sich besonders gut in einem Rohr erzeugen, das an einem Ende durch eine Materialprobe senkrecht abgeschlossen ist und am anderen Ende durch eine über den gesamten Querschnitt möglichst klein schwingende Kolbenmembran angeregt wird. Der Querschnitt der Materialproben soll dem Rohrrinnendurchmesser entsprechen, und es ist darauf zu achten, dass die Oberfläche der Proben möglichst glatt ist. Darüber hinaus muss der Rohrquerschnitt gegenüber der Wellenlänge klein sein, damit sich keine Quermoden ausbilden können, da sonst keine ebene Wellenausbreitung mehr gegeben wäre. Die Rohrwände sollten entsprechend glatt, starr und schwer sein, damit die Rohrwand nicht durch Schallschwingungen angeregt wird und es zu Resonanzen kommt. Die Querschnittsform ist zwar prinzipiell frei wählbar, kreisrunde bzw. rechteckige Querschnitte haben sich aber in der Praxis durchgesetzt. Als Wandmaterial kommen entweder Metall oder Beton zur Anwendung.

Die zur Validierung der Modelle herangezogenen Messungen wurden mit einem solchen *Impedanzrohr* mit Hilfe der Übertragungsfunktionmethode nach ISO EN 10534-2¹ durchgeführt, die nun näher erläutert wird.² Abbildung 4.1 zeigt den klassischen Aufbau eines Impedanzrohres.

4.1.1 Übertragungsfunktionmethode nach ISO EN 10534-2

Bei der Übertragungsfunktionmethode werden die Materialproben, wie oben beschrieben, in das Rohr eingebracht und mit breitbandigem, weißen Rauschen beschallt. Die Kolbenscheibe lässt sich stets so verschieben, dass die Materialprobe immer am Bezugspunkt $x = 0$ anfängt, während der Lautsprecher bei $x = L$ liegt. Die Signalerfassung erfolgt über zwei, an der Rohrrinnenwand montierte, Mikrofone, die sich an den Fixpositionen x_1 bzw. x_2 befinden, und die dort jeweils auftretenden Schalldrücke p_1 und p_2 messen. Aus den Drücken wird eine komplexwertige Übertragungsfunktion H_{12} berechnet. Mit Hilfe von H_{12} lassen sich dann Reflexionsfaktor r , Absorptionsgrad α und akustische Impedanz Z bestimmen.

Das vom Lautsprecher erzeugte Rauschsignal wird an der Oberfläche der Materialprobe teilweise reflektiert. Auf diese Weise entsteht durch Überlagerung von einfallender Welle p_- und reflektierter

¹siehe [20]

²Eine genauere Darstellung der prinzipiellen Funktionsweise und der Durchführung der Messungen am ACC findet sich in [54].

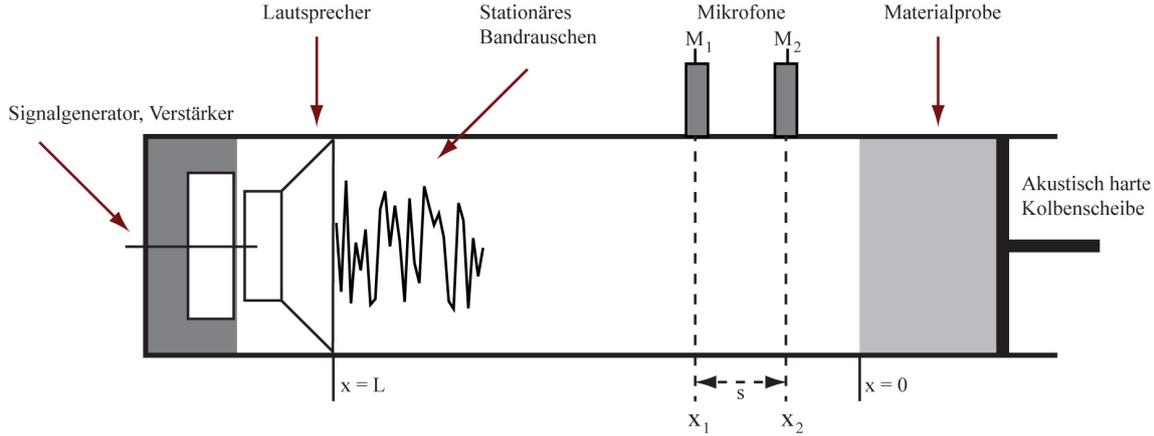


Abbildung 4.1: Aufbau eines Impedanzrohres

Welle p_+ ein Wellenfeld, das sich in komplexer Darstellung als

$$p_G(x, t) = p_- + p_+ = \hat{p}_- e^{i(\omega t + kx)} + \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.1)$$

schreiben lässt. Für den gesamten Schalldruck ergeben sich an den Mikrofonpositionen x_1 bzw. x_2 damit

$$p_1 = p(x_1, t) = \left(\hat{p}_- e^{ikx_1} + \hat{p}_+ e^{-ikx_1} \right) e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

$$p_2 = p(x_2, t) = \left(\hat{p}_- e^{ikx_2} + \hat{p}_+ e^{-ikx_2} \right) e^{i\omega t}. \quad (4.3)$$

Das Frequenzspektrum des Schalldrucks erhält man mittels schneller FOURIER-Transformation (FFT):

$$p_1(x, \omega) = \text{FFT}(p(x_1, t)) \quad p_2(x, \omega) = \text{FFT}(p(x_2, t)). \quad (4.4)$$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion H_{12}

$$H_{12} = \frac{p_2(x, \omega)}{p_1(x, \omega)} = \frac{\hat{p}_- e^{ikx_2} + \hat{p}_+ e^{-ikx_2}}{\hat{p}_- e^{ikx_1} + \hat{p}_+ e^{-ikx_1}}. \quad (4.5)$$

Da nur der Gesamtschalldruck messbar ist, wird zur Berechnung der Amplituden von einlaufender bzw. reflektierter Welle das Gleichungssystem (4.2)-(4.3) für einen bestimmten Zeitpunkt t entsprechend aufgelöst. Aus (4.2) folgt dann für \hat{p}_+

$$\hat{p}_+ = p_1 e^{ikx_1} - \hat{p}_- e^{2ikx_1} \quad (4.6)$$

und eingesetzt in (4.3)

$$p_2 = \hat{p}_- e^{ikx_2} + \left(p_1 e^{ikx_1} - \hat{p}_- e^{2ikx_1} \right) e^{-ikx_2}. \quad (4.7)$$

Nach Umformung ergibt sich

$$\hat{p}_- \left(e^{ik(x_2-x_1)} - e^{-ik(x_2-x_1)} \right) e^{ikx_1} = p_2 - p_1 e^{-ik(x_2-x_1)} \quad (4.8)$$

und somit schließlich

$$\hat{p}_- = \frac{p_2 e^{-ikx_1} - p_1 e^{-ikx_2}}{e^{ik(x_2-x_1)} - e^{-ik(x_2-x_1)}}. \quad (4.9)$$

Verwendet man nun den Mikrofonabstand $s = x_2 - x_1$ und den Zusammenhang

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad (4.10)$$

erhält man für (4.9)

$$\hat{p}_- = \frac{p_2 e^{-ikx_1} - p_1 e^{-ikx_2}}{(e^{iks} - e^{-iks})} \quad (4.11)$$

$$= \frac{p_2 e^{-ikx_1} - p_1 e^{-ikx_2}}{i \cdot 2 \sin(ks)} \quad (4.12)$$

$$= p_1 \frac{H_{12} e^{-ikx_1} - e^{-ikx_2}}{i \cdot 2 \sin(ks)}. \quad (4.13)$$

Analog ergibt sich für \hat{p}_-

$$\hat{p}_+ = p_1 \frac{e^{ikx_2} - H_{12} e^{ikx_1}}{i \cdot 2 \sin(ks)}. \quad (4.14)$$

4.1.2 Berechnung der akustischen Parameter

Reflexionsfaktor

Für den Reflexionsfaktor r gilt an der Stelle $x = 0$ nach (2.15)

$$r(0) = \frac{p_+(0)}{p_-(0)} = \frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-} \quad (4.15)$$

$$= \frac{\frac{p_1}{i \cdot 2 \sin(ks)} (e^{ikx_2} - H_{12} e^{ikx_1})}{\frac{p_1}{i \cdot 2 \sin(ks)} (H_{12} e^{-ikx_1} - e^{-ikx_2})} \quad (4.16)$$

$$= \frac{e^{ik(x_2-x_1)} - H_{12}}{H_{12} - e^{-ik(x_2-x_1)}} e^{i2kx_1} \quad (4.17)$$

$$= \frac{e^{iks} - H_{12}}{H_{12} - e^{-iks}} e^{i2kx_1}. \quad (4.18)$$

Absorptionsgrad

Der Absorptionsgrad errechnet sich durch (2.29), also

$$1 - |r|^2. \quad (4.19)$$

Impedanz

Nach (2.6) gilt für die Schallfeldimpedanz $Z(x)$ an einer beliebigen Stelle x des Schallfeldes

$$Z(x) = \frac{p(x)}{v(x)} \quad (4.20)$$

und daher

$$Z(0) = \frac{p(0)}{v(0)} = Z_c \frac{\hat{p}_- + \hat{p}_+}{\hat{p}_- - \hat{p}_+} \quad (4.21)$$

$$= \frac{H_{12}e^{-ikx_1} - e^{-ikx_2} + e^{ikx_2} - H_{12}e^{ikx_1}}{H_{12}e^{-ikx_1} - e^{-ikx_2} - e^{ikx_2} + H_{12}e^{ikx_1}} \quad (4.22)$$

$$= Z_c \cdot i \cdot \frac{\sin(kx_2) - H_{12} \sin(kx_1)}{H_{12} \cos(kx_1) - \cos(kx_2)}, \quad (4.23)$$

wobei Z_c hier die charakteristische Impedanz der Luft, also Z_0 ist.

4.2 Messdaten

Gemessen wurden die Impedanzverläufe über der Frequenz von Schäumen und Vliesmatten im Impedanzrohr nach *ISO EN 10534-2*³. Die Messungen wurden am Technikum Joanneum von Herrn PROSSEGER Alexander im Zuge seiner Diplomarbeit⁴ am ACC durchgeführt.

Zum Einsatz kamen das Impedanzrohr 4206 der Firma Brüel & Kjaer, mit einer Länge von 700 [mm] und einem Durchmesser von 100 [mm] und zwei 1/4-Zoll Kondensatormikrofone vom Typ 4187, ebenfalls von Brüel & Kjaer. Gemessen wurde bei einer Temperatur von 26° [C], im Frequenzbereich 1 – 1600 [Hz]. Weitere Einzelheiten sind [54] zu entnehmen.

Folgende Materialproben wurden untersucht:

- EuroFoam 20 [mm], 40 [mm], 80 [mm] von Greiner Schaumstofftechnik GmbH
- Melaminschaum 50 [mm] von PANA Schaumstoff GmbH
- Mischfaservlies 20 [mm]
- Polyestervlies 20 [mm]

4.3 Validierung der empirischen Modelle

In diesem Abschnitt werden einige der in Abschnitt 3.3 vorgestellten Modelle anhand von Messdaten validiert, und die Ergebnisse miteinander verglichen. Zusätzlich wird auf modellspezifische Besonderheiten eingegangen.

³siehe Abschnitt 4.1

⁴vgl. [54]

4.3.1 Mischfaservlies 20 [mm]

Materialdaten

- Materialart: Faservlies
- Materialdicke: 0,02 [m]
- Strömungswiderstand: 14.700 [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4$]

Vergleich Delany/Bazley-Modell und Miki-Modell

In Abbildung 4.2 sind die Impedanzen nach dem DELANY/BAZLEY- und dem MIKI-Modell dargestellt. Wie bereits in Abschnitt 3.3.3 diskutiert, erkennt man beim DELANY/BAZLEY-Modell deutlich die negativen Werte für den Realteil der Impedanz. Dieses Problem wird durch die Randbedingungen an die Koeffizienten des MIKI-Modells erwartungsgemäß behoben.

Ähnliches sieht man auch in Abbildung 4.3. Das DELANY/BAZLEY-Modell sagt einen negativen Absorptionsgrad vorher, was physikalisch gesehen bedeutet, dass die Absorberschicht selbst zum Strahler wird. Das MIKI-Modell vermeidet diesen Fehler ebenfalls, und liefert auch gesamt eine bessere Übereinstimmung mit den Messdaten (siehe Tabelle 4.1).

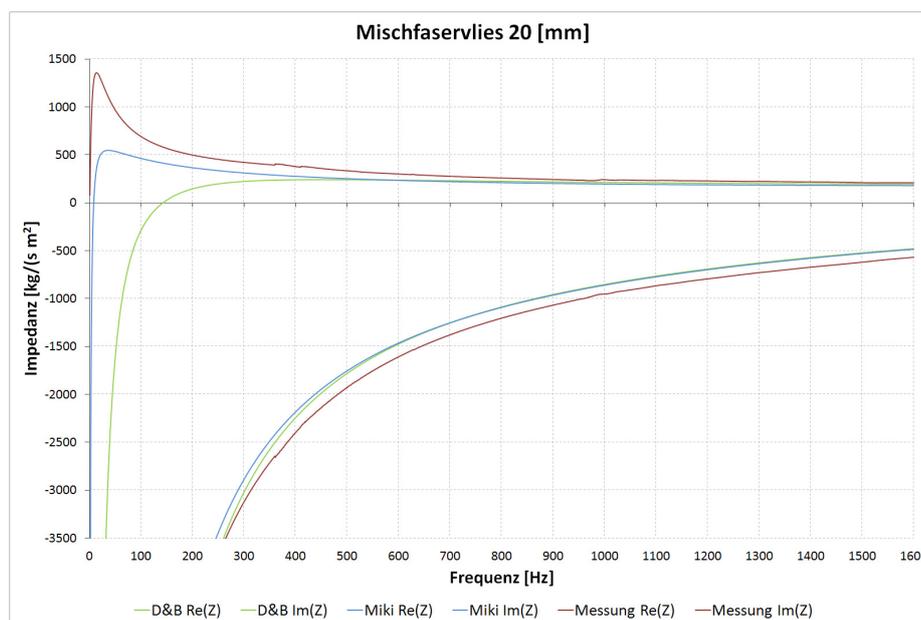


Abbildung 4.2: Mischfaservlies 20 [mm] - Impedanz: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell vs. Messung.

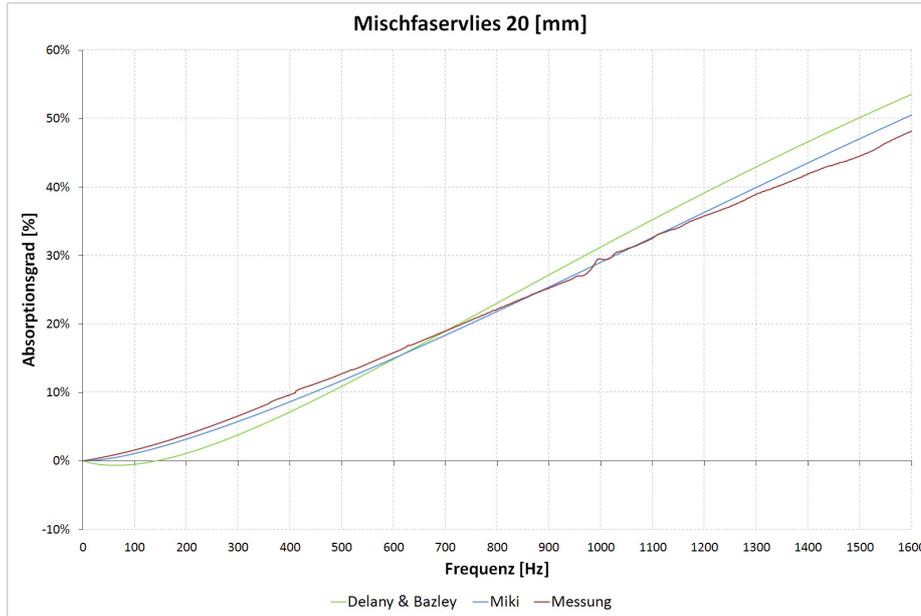


Abbildung 4.3: Mischfaservlies 20 [mm] - Absorptionsgrad: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell vs. Messung.

Absorptionsgrad		
Fehlerart	DELANY/BAZLEY-Modell	MIKI-Modell
Maximaler Fehler	5,662% bei 1514 [Hz]	2,622% bei 1526 [Hz]
Durchschnittlicher Fehler	2,591%	0,847%

Tabelle 4.1: Mischfaservlies 20 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorptionsgrades: DELANY/BAZLEY-Modell vs. MIKI-Modell.

Vergleich Komatsu-Modell und Allard/Champoux-Modell

Beide Modelle liefern sehr ähnliche Ergebnisse für das getestete Material, und beide stimmen besser mit den Messwerten überein als das DELANY/BAZLEY-Modell. Bei beiden Modellen werden negative Werte für den Realteil der Impedanz vermieden.

Das KOMATSU-Modell bietet beim maximalen Abstand von den Messdaten für den Absorptionsgrad Vorteile gegenüber dem ALLARD/CHAMPOUX-Modell, aber auch gegenüber dem Modell von MIKI, das für den Durchschnittsfehler für diese Materialprobe die besten Werte erreicht. Erwähnenswert ist der Umstand, dass das Modell von KOMATSU den Absorptionsgrad über das gesamte Frequenzspektrum nicht überschätzt, während dies beim Modell von ALLARD/CHAMPOUX bei niedrigen Frequenzen schon zutrifft (siehe Abbildung 4.2).

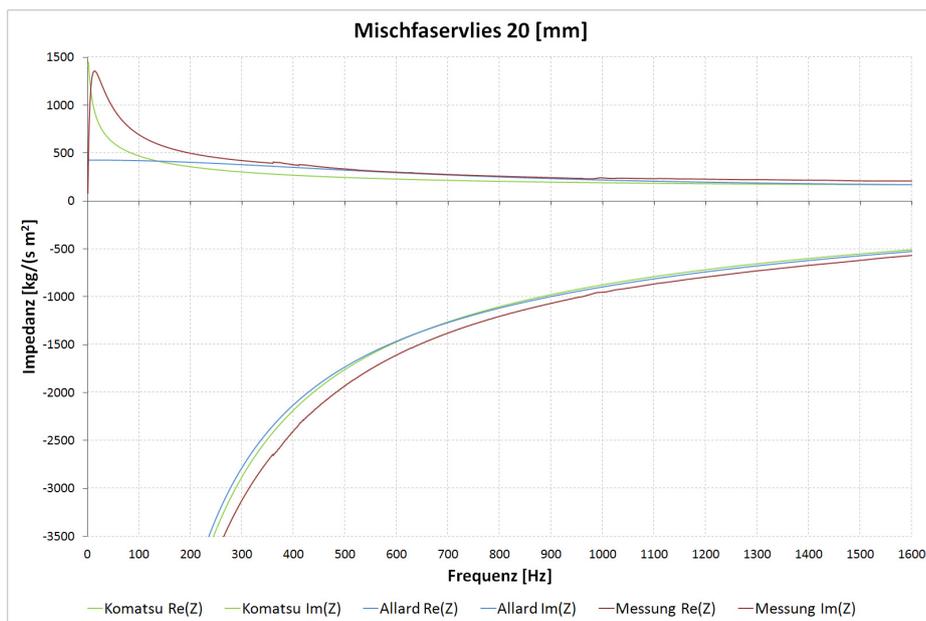


Abbildung 4.4: Mischfaservlies 20 [mm] - Impedanz: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.

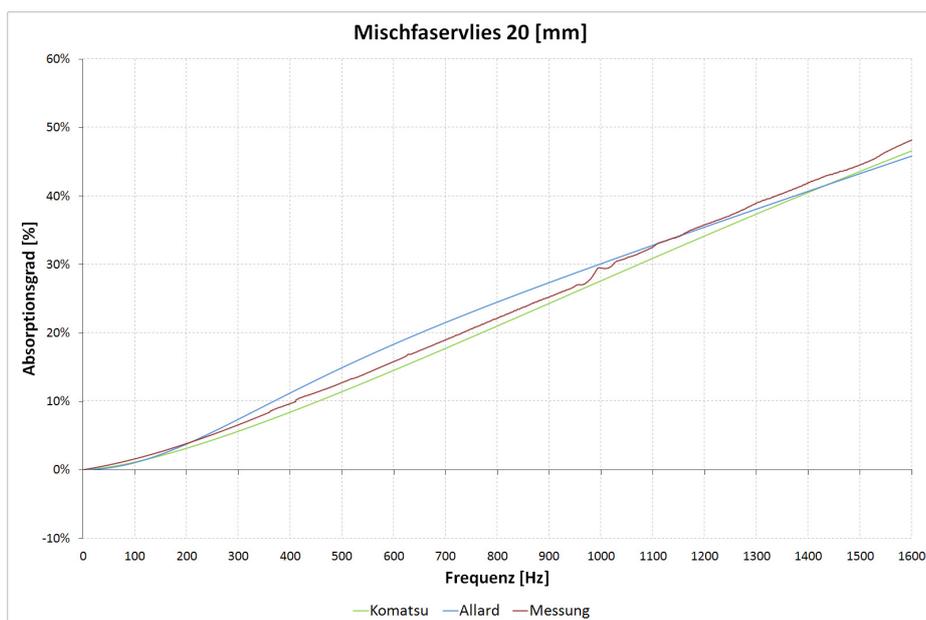


Abbildung 4.5: Mischfaservlies 20 [mm] - Absorptionsgrad: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.

Absorptionsgrad		
<i>Fehlerart</i>	<i>KOMATSU-Modell</i>	<i>ALLARD/CHAMPOUX-Modell</i>
Maximaler Fehler	2,110% bei 995 [Hz]	2,585% bei 643 [Hz]
Durchschnittlicher Fehler	1,196%	1,297%

Tabelle 4.2: Mischfaservlies 20 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorptionsgrades: KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell.

Ergebnisse weiterer Modelle

Ein ebenfalls sehr gutes Ergebnis kann mit dem Modell von GARAI/POMPOLI erzielt werden, wie man Tabelle 4.3 entnehmen kann. Das Modell von WU überschätzt den Absorptionsgrad im Schnitt um etwa 3%, am Ende des Frequenzspektrums wird der Fehler jedoch über 5,5% groß, was darauf zurückzuführen sein dürfte, dass das Modell durch Regression von Messungen an Schaumstoffen entstanden ist.

Absorptionsgrad	
<i>Fehlerart</i>	<i>GARAI/POMPOLI-Modell</i>
Maximaler Fehler	2,511% bei 538 [Hz]
Durchschnittlicher Fehler	1,706%

Tabelle 4.3: Mischfaservlies 20 [mm] - Fehler bei der Simulation des Absorptionsgrades des GARAI/POMPOLI-Modells.

4.3.2 EuroFoam 40 [mm]

Materialdaten

- Materialart: Offenporiger Schaumstoff
- Materialdicke: 40 [mm]
- Strömungswiderstand: 4.500 [N·s/m⁴]

Vergleich Miki-Modell, Komatsu-Modell und Allard/Champoux-Modell

Die besten Ergebnisse für den Absorptionsgrad erhält man mit dem Modell von KOMATSU (siehe Tabelle 4.4), das im Durchschnitt etwa 1,6% von den Messwerten abweicht. Das Modell von ALLARD/CHAMPOUX-Modell, das aus den Messungen an Faserabsorbentien entstanden ist, liefert recht gute Durchschnittsergebnisse.

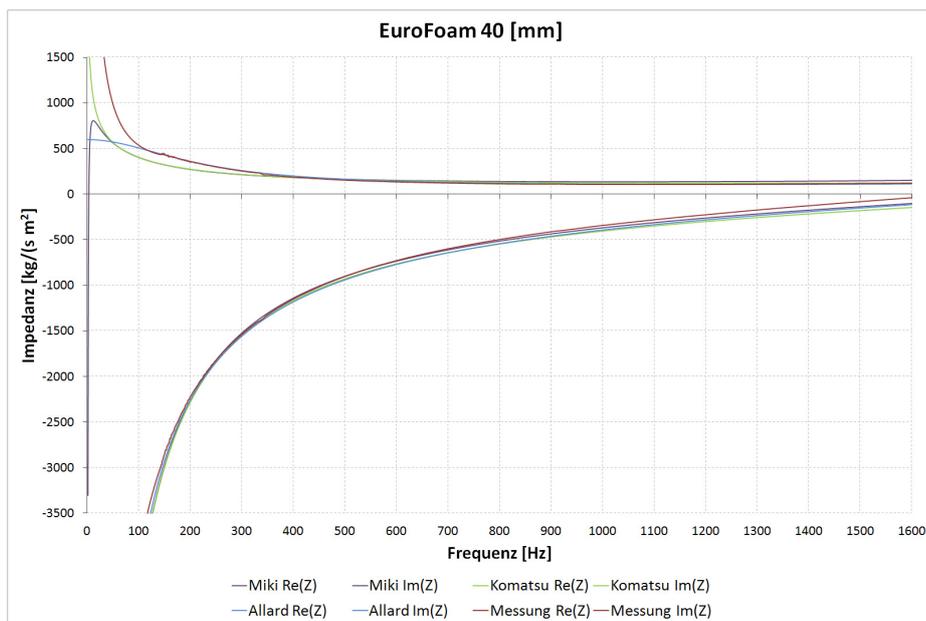


Abbildung 4.6: EuroFoam 40 [mm] - Impedanz: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALL-ARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.

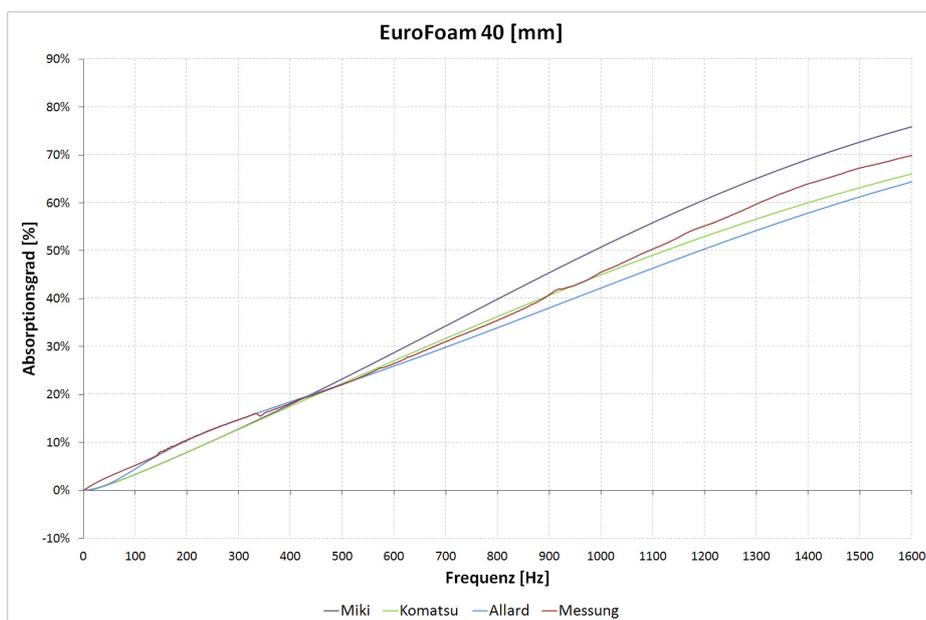


Abbildung 4.7: EuroFoam 40 [mm] - Absorptionsgrad: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALL-ARD/CHAMPOUX-Modell vs. Messung.

Gegen Ende des Frequenzspektrums weicht es aber erheblich (fast 6%) von den Messdaten ab. Bei niedrigen Frequenzen (vor allem zwischen 100 und 600 [Hz]; siehe Abbildung 4.7) ist es dafür das genaueste Modell.

Absorptionsgrad			
<i>Fehlerart</i>	<i>MIKI-M.</i>	<i>KOMATSU-M.</i>	<i>ALLARD/CHAMPOUX-M.</i>
Max. Fehler	6,294% bei 1600 [Hz]	3,802% bei 1494 [Hz]	5,897% bei 1395 [Hz]
Durchsch. Fehler	3,811%	1,603%	2,399%

Tabelle 4.4: EuroFoam 40 [mm] - Gegenüberstellung des Fehlers bei der Simulation des Absorptionsgrades: MIKI-Modell vs. KOMATSU-Modell vs. ALLARD/CHAMPOUX-Modell.

Beim Vergleich der Testergebnisse für diesen Schaumstoff wurde das Modell von DELANY/BAZLEY nicht mit einbezogen, da es keine genügend genauen Näherungswerte liefert, und der Absorptionsgrad fast über das gesamte Frequenzspektrum deutlich überschätzt ($\geq 6\%$).

Ergebnisse weiterer Modelle

Das Modell von GARAI/POMPOLI weicht bei niedrigen Frequenzen stärker von den Messdaten ab als bei höheren Frequenzen. Während es etwa bei 832 [Hz] seinen maximalen Fehler von 4,895% erreicht, nähern sich die Simulationsergebnisse bei den höheren Frequenzen deutlich den Messwerten an und weichen nur mehr etwas weniger als 1,5% davon ab. Im Mittel ergibt sich ein Fehler von 2,688%.

4.3.3 Zusammenfassung

Validierungen der empirischen Modelle wurden anhand von Faserstoffen und Schäumen durchgeführt. Die Ergebnisse fielen ähnlich aus, wie in der Literatur beschrieben. Berücksichtigt man, dass diese Modelle nur von einem Parameter, (dem Strömungswiderstand Ξ , abhängen, so liefern sie Simulationsergebnisse, die für unterschiedliche Materialien ausreichend genau zur Berechnung der Oberflächenimpedanz (Wandimpedanz) und des Absorptionsgrades sind. Die Qualität der Ergebnisse hängt dabei deutlich vom verwendeten Modell ab. Es empfiehlt sich für eine bestimmte Materialprobe ein Modell zu verwenden, das aus Regression von Messungen der gleichen Stoffgruppe entstanden ist.

4.4 Validierung der semiphänomenologischen Modelle

Die Validierung der Modelle aus Abschnitt 3.5 gestaltet sich etwas schwieriger, da zur Bestimmung der benötigten Materialparameter teilweise aufwändige Messverfahren und Geräte zum Einsatz kommen (siehe Abschnitt 3.1), die nicht in jedem Akustiklabor zur Verfügung stehen. Am ACC war es ebenfalls nicht möglich, Parameter wie die Tortuosität oder die charakteristischen Längen,

messtechnisch zu bestimmen.

Dennoch lassen sich aus den theoretischen Grundlagen der einzelnen Modelle und Validierungen aus der Literatur wichtige Schlüsse ziehen.

4.4.1 Modelle für die effektive Dichte

Bereits bei der Besprechung des JOHNSON et al. Modells wurde darauf hingewiesen, dass es die effektive Dichte für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \rho(\omega)$ exakt vorhersagt, es jedoch leichte Schwächen bei der Vorhersage des Realteils $\text{Re}(\rho)$ für $\omega \rightarrow 0$ aufweist.

Durch die Einführung des zusätzlichen Parameters b im PRIDE-Modell, das auf dem JOHNSON et al. Modell basiert, kann diese Schwäche ausgeglichen werden.

Das JOHNSON et al. Modell ist nach wie vor das wohl gebräuchlichste Modell⁵ und liefert gute Simulationsergebnisse. Noch bessere Resultate lassen sich aufgrund der Modifikationen im Allgemeinen jedoch mit dem PRIDE-Modell erzielen.⁶

Bei Standardbedingungen für Temperatur und Druck liefert auch das WILSON-Modell gute Simulationsergebnisse, die mit denen des JOHNSON et al. Modells vergleichbar sind.⁷

4.4.2 Modelle für den Kompressionsmodul

Das Modell von CHAMPOUX/ALLARD macht, wie in Abschnitt 3.5.4 erwähnt, Annahmen über die Porenstruktur (zylindrische Poren mit kreisrundem Querschnitt). Aufgrund dieser Annahmen, die zu einer a priori Festlegung der thermischen Permeabilität q'_0 führen, kann es, abhängig vom untersuchten Material, zu teilweise großen Abweichungen zwischen den vorhergesagten und den gemessenen Werten des Kompressionsmodul kommen,⁸.

Das Modell von LAFARGE et al. eignet sich hervorragend zur Simulation des Kompressionsmoduls von Materialien mit beliebiger Porenstruktur und erzielt Ergebnisse, die sehr genau mit den Messwerten übereinstimmen.⁹

Das WILSON-Modell liefert ebenfalls gute Näherungen für den Kompressionsmodul. Gegenüber dem CHAMPOUX/ALLARD-Modell ist auf jeden Fall zu bevorzugen, erreicht jedoch nicht die Qualität des LAFARGE et al. Modells.

⁵ vgl. z.B. [15] und [51]

⁶ vgl. [2]

⁷ vgl. [2] und [51]

⁸ vgl. [2]

⁹ vgl. [52]

Wegen der Praktikabilität des JOHNSON-LAFARGE-Modells, und weil es theoretisch die besten Simulationsergebnisse verspricht, wird in der Folge eine Validierung der analytisch aus dem Modell bestimmten Parameter durchgeführt.

4.4.3 Validierung der analytisch bestimmten Parameter für das Johnson-Lafarge-Modell

Aufgrund der Problematik, dass nicht alle der benötigten Parameter einfach zu messen sind, wurden in Abschnitt 3.5.8 analytische Methoden zur Bestimmung des Strömungswiderstandes, der Tortuosität und der charakteristischen Längen vorgestellt.

Um die Genauigkeit der analytischen Lösungen der Parameter bzw. der Modelle im gesamten zu bestimmen, kann eine Validierung anhand von Impedanzmessungen von unterschiedlichen Materialien vorgenommen werden. Dazu sind allerdings Messdaten erforderlich, die nach anderen als der in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Methode bestimmt werden. Solche Daten standen leider nicht zur Verfügung.

Generell wäre es notwendig, neben der charakteristischen Impedanz Z_c auch die Wellenzahl k messtechnisch zu bestimmen, damit die effektive Dichte ρ und der Kompressionsmodul K einer Materialprobe berechnet werden können. Die zusätzliche Bestimmung der Wellenzahl kann beispielsweise über die Hohlraum-Methode (siehe [58]), oder eine Drei- bzw. Vier-Mikrofon-Methode durchgeführt werden (vgl. [55]).

Obwohl keine solchen Messergebnisse zum Zeitpunkt der Niederschrift dieser Arbeit vorlagen, ist es möglich die Genauigkeit der analytischen Lösungen zu ermitteln. Dazu kann man sich, wie in [51] und [52] beschrieben, mit einem „virtuellen“ Material behelfen.

Im Folgenden wird eine Validierung des JOHNSON-LAFARGE-Modells vorgenommen, da dieses das beste Verhältnis von Parameterzugänglichkeit und Simulationsgenauigkeit besitzt. Dieselbe Methodik ließe sich problemlos auch auf die Parameter im WILSON-Modell anwenden.¹⁰

Als virtuelles Material verwendet man eine gedachte Probe, für deren Porengeometrie exakte Modelllösungen vorliegen, wie sie in Abschnitt 3.4 besprochen wurden. Für eine poröse Schicht mit schräg zur Oberfläche liegenden, parallelen, zylindrischen Poren mit kreisförmigen Querschnitt mit Radius r gelten beispielsweise die Gleichungen (3.76), (3.78) und (3.80)-(3.82):

¹⁰Eine entsprechende Validierung ist in [51] und [52] zu finden.

$$\rho_{EQ}(\omega) = \frac{\alpha_\infty \rho_0}{\phi} \left(1 + \frac{\Xi \phi}{i \alpha_\infty \rho_0 \omega} G_c(s) \right) \quad (4.24)$$

$$K(\omega) = \frac{\kappa p_0}{\kappa - (\kappa - 1) F(P_r \omega)} \quad (4.25)$$

$$F(P_r \omega) = \left(1 + \frac{\Xi \phi}{i P_r \alpha_\infty \rho_0 \omega} G_c(\sqrt{P_r} s) \right)^{-1} \quad (4.26)$$

$$G_c(s) = -\frac{s\sqrt{-i}}{4} \frac{\frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-i}} \frac{J_1(s\sqrt{-i})}{J_0(s\sqrt{-i})}} \quad (4.27)$$

$$s = c \left(\frac{8 \alpha_\infty \rho_0 \omega}{\Xi \phi} \right)^{1/2}. \quad (4.28)$$

Ist n die Porenanzahl pro Flächeneinheit, dann gelten für die Porosität, den Strömungswiderstand, und die Tortuosität die Gleichungen (3.14), (3.18) bzw. (3.21), also

$$\phi = \frac{n \pi r^2}{\cos(\varphi)} \quad (4.29)$$

$$\Xi = \frac{8 \eta}{\phi r^2 \cos^2(\varphi)} \quad (4.30)$$

$$\alpha_\infty = \frac{1}{\cos^2(\varphi)}, \quad (4.31)$$

wobei φ der Winkel zwischen den Poren und der Oberflächennormale der Probe ist. Für die viskose und thermische charakteristische Länge gilt (3.29),

$$\Lambda = \Lambda' = r \quad (4.32)$$

und für die thermische Permeabilität kann wieder Gleichung (3.107) benutzt werden:

$$q'_0 = \frac{\phi r^2}{8}. \quad (4.33)$$

Parameter für die viskose Dissipation

Nun kann man die effektive Dichte aus Gleichung (4.24) benutzen, um die analytischen Lösungen für die Tortuosität (3.127), die viskose charakteristische Länge (3.128) und für den Strömungswiderstand (3.131) zu berechnen. Die relativen Fehler

$$\delta_u = \frac{\hat{u} - u}{u} \quad (4.34)$$

mit

u	theoretischer Parameterwert
\hat{u}	Parameterwert durch analytische Bestimmung

der analytisch bestimmten Parameter werden nun untersucht.

Der Fehler für die Tortuosität α_∞ ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Es ergibt sich ein maximaler Fehler von 2,5%, der im mittleren Frequenzbereich auftritt. Das stimmt mit den theoretischen Grundlagen des JOHNSON et al. Modells überein, da in diesem Bereich der größte Unterschied zwischen der exakten Dissipationsfunktion G_c und der approximativen G_J aus dem Modell zu finden ist.

Zu den hohen Frequenzen hin nimmt der Fehler sukzessive ab und wird schließlich 0, was sich mit der Tatsache deckt, dass der Grenzwert der effektiven Dichte bei niedrigen Frequenzen des JOHNSON et al. Modells exakt ist.

Für die viskose charakteristische Länge Λ können keine ähnlich guten Ergebnisse erzielt werden (siehe Abbildung 4.9). Hier liegt der Fehler bei niedrigen Frequenzen bei über 13% und wird hin zum mittleren Frequenzspektrum fast 20% groß, bevor er hin zu hohen Frequenzen kontinuierlich abnimmt. Dieser Fehler ist dennoch akzeptabel, da eine genauere Bestimmung der viskosen charakteristischen Länge auch mit anderen Methoden nur schwer zu erreichen ist.

Wie man in Abbildung 4.10 sehen kann, ist der Fehler für den Strömungswiderstand bei niedrigen Frequenzen sehr gering ($< 1\%$) und nimmt dann stark mit der Frequenz zu.

Insgesamt sollten die Werte der analytischen Lösungen also bei niedrigen Frequenzen für den Strömungswiderstand und bei hohen Frequenzen für die Tortuosität und die viskose charakteristische Länge bestimmt werden. Im Falle der Tortuosität gilt dies, weil hier bei anderen einfachen Porengeometrien bei niedrigen Frequenzen ein Fehler von etwa 1,5% auftreten kann.

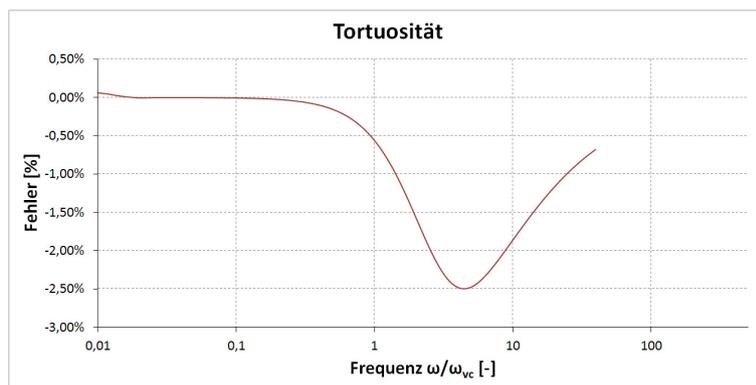


Abbildung 4.8: Tortuosität - Fehler bei indirekter Extraktion.

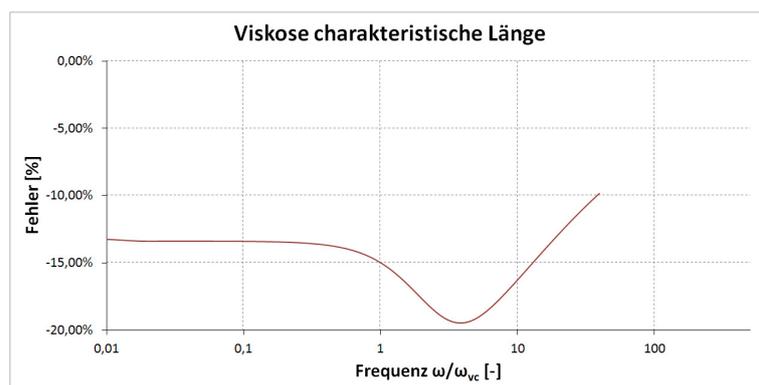


Abbildung 4.9: Viskose charakteristische Länge - Fehler bei indirekter Extraktion.

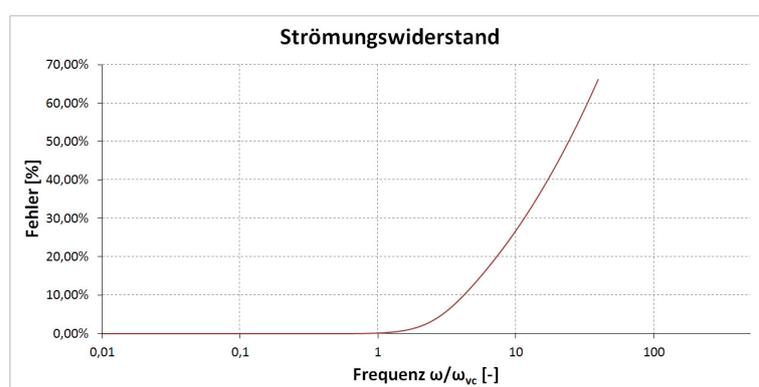


Abbildung 4.10: Strömungswiderstand - Fehler bei indirekter Extraktion.

Parameter für die thermische Dissipation

Zur Berechnung der analytischen Lösungen für die thermische charakteristische Länge und die thermische Permeabilität benutzt man Gleichung (4.25).

Die Evaluierung zeigt, dass die analytische Lösung die thermische charakteristische Länge stets unterschätzt und bei niedrigen Frequenzen zu hohen Fehlern führt. Das Fehlermaximum von knapp 15%¹¹ wird im mittleren Frequenzbereich erreicht. Den theoretischen Modellgrundlagen entsprechend, tritt in diesem Bereich der größte Unterschied zwischen der exakten Dissipationsfunktion G_c und der approximativen Funktion G_L auf. Danach nimmt der Fehler kontinuierlich ab und geht dann für hohe Frequenzen gegen 0. Das passt gut zu der Tatsache, dass Λ' die thermische Dissipation bei hohen Frequenzen charakterisiert.

¹¹ Auch dieser Fehler ist ähnlich wie bei der viskosen charakteristischen Länge Λ aufgrund der schwierigen messtechnischen Bestimmung durchaus akzeptabel.

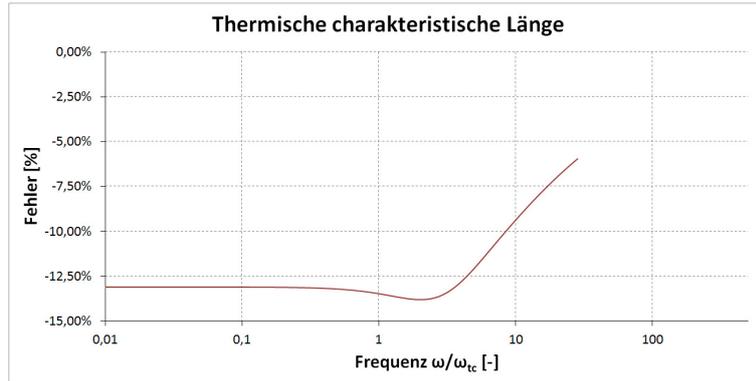


Abbildung 4.11: Thermische charakteristische Länge - Fehler bei indirekter Extraktion.

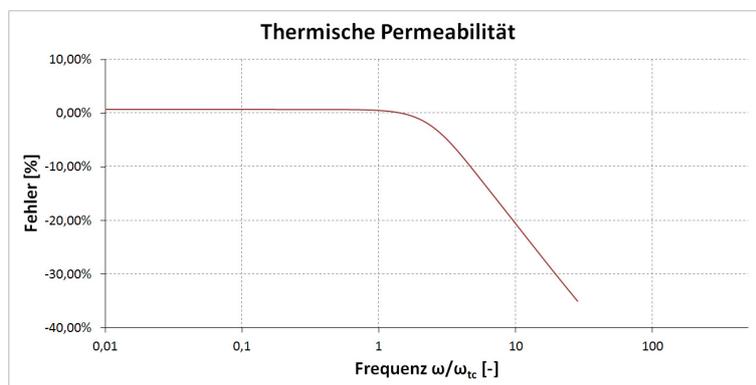


Abbildung 4.12: Thermische Permeabilität - Fehler bei indirekter Extraktion.

Umgekehrt charakterisiert q'_0 die thermische Dissipation bei niedrigen Frequenzen, weshalb es nicht verwunderlich ist, dass der Fehler für q'_0 für niedrige Frequenzen gegen 0 geht und für hohe Frequenzen stark zunimmt.

Zur Bestimmung der Werte der analytischen Lösungen sollte für die thermische charakteristische Länge das hohe Frequenzspektrum betrachtet werden, und für die thermische Permeabilität das niedrige.

5 Einführung in die Statistische Energieanalyse

Wenn das akustische Verhalten komplexer Systeme (Fahrzeug, Gebäude usw.) untersucht wird, führen deterministische Methoden meist nicht zum Ziel, da nicht mehr alle physikalischen Eigenschaften des Systems erfasst werden können. Für die Modellierung komplexer Geometrien werden seit einigen Jahrzehnten daher in so einem Fall numerische Verfahren, wie die *Finite Elemente Methode (FEM)* und die *Randelementmethode (BEM)*, angewandt. Bei beiden Methoden wird ein System in viele Volumen- bzw. Oberflächenelemente unterteilt, die in ihrer Gesamtheit das zu untersuchende System repräsentieren. Jedem Element werden Materialeigenschaften zugewiesen, und entsprechende Randbedingungen aufgestellt. Die Möglichkeiten der Vorhersage sind vielfältig.

Um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten, ist eine Vielzahl an Elementen nötig, und man stößt mit zunehmender Komplexität eines Systems schnell an die Grenzen des Modellierbaren und Berechenbaren. Da bis zu sechs Elemente pro Wellenlänge zum Einsatz kommen, ist eine Untersuchung akustischer Eigenschaften mit diesen Methoden nur im niederfrequenten Bereich möglich. In der Automobilindustrie hat man sich in der Vergangenheit beim Einsatz der FEM auf einen Frequenzbereich bis etwa 200 [Hz] beschränkt. Für einige Anwendungen ist das durchaus ausreichend, die Schallausbreitung im höheren Frequenzbereich konnte so aber nicht untersucht werden. Sie wurde erst am Prototyp eines Fahrzeuges messtechnisch erfasst. Änderungen sind in dieser Phase der Entwicklung nicht nur schwieriger, sondern auch kostenintensiver. Es war daher wünschenswert ein Instrument zur Hand zu haben, mit dem man bereits in einer frühen Phase Vorhersagen über die Schallausbreitung treffen kann. Die SEA stellt so ein Instrument dar, das auch für komplexe Systeme anwendbar ist.

5.1 Entwicklung der SEA¹

Die Entwicklung der statistischen Energieanalyse geht bereits zurück bis in die frühen 60er Jahre, und fand in Zusammenarbeit mit der Raumfahrtindustrie statt, wo sie eingesetzt wurde, um Schwingungen von Raketen vorherzusagen. Später, in den 70er und 80er Jahren wurde sie zur Analyse von Körperschall in Gebäuden und auch Schiffen eingesetzt. Mittlerweile wird die Zahl der Anwendungsgebiete immer größer und umfassen den Einsatz bei Hubschraubern, Flugzeugen und Automobilen.

Der Name *Statistische Energieanalyse* wurde zu Beginn der 60er Jahre geprägt und zeigt an, dass es um ein *statistisches* Berechnungsverfahren geht, bei dem mit Erwartungswerten der gespeicherten *Energien* gerechnet wird, und die ausgetauschten Leistungen zwischen gekoppelten Systemen *analysiert* werden.

Die Basis für die SEA bilden einerseits der statistische Ansatz, der aus der Raumakustik bekannt ist und die thermodynamische Erkenntnis, dass Energie immer von wärmeren Systemen zu kühleren fließt. Andererseits kommt aber auch das Superpositionsprinzip von Moden und Wellen zum Einsatz.

Während der letzten Jahre haben Automobilhersteller und andere die SEA immer öfter eingesetzt. Mit den immer komplexer werdenden untersuchten Strukturen hat auch die Anzahl der zu betrachtenden Kopplungen und Substrukturen zugenommen.

5.2 Grundlegende SEA-Theorie

Grundlegend bei der Anwendung der SEA ist die Annahme, dass sich Schwingungsenergie genauso wie Wärmeenergie verhält, also von wärmeren zu kälteren Orten, mit einer Rate, die proportional zur Temperaturdifferenz ist, diffundiert (thermische Konduktivität). Hinzu kommt der Ansatz, eine komplexe Struktur in gekoppelte Subsysteme zu zerlegen. Die Intensität der Kopplung zwischen den einzelnen Subsystemen wird durch den *Kopplungsverlustfaktor (CLF)* angegeben, während Konvektion durch den *Dämpfungsverlustfaktor (DLF)* dargestellt wird.

5.2.1 Energiebilanz und SEA-Parameter

Als einfachsten Fall kann man ein einzelnes, entkoppeltes Subsystem i der Gesamtstruktur betrachten. Jede Anregung, die auf das System wirkt, kann durch den resultierenden Leistungsinput $P_{i,\varepsilon}$ charakterisiert werden. Wird Energie zugeführt, so speichert das Subsystem die Schwingungsenergie E_i . In der Praxis kommt es, beispielsweise durch Dissipation, auch zu Energieverlusten $P_{i,\delta}$. Die Energieverluste stehen über einen Dämpfungsverlustfaktor η_i in Beziehung zur gespeicherten

¹Dieser Abschnitt ist eine Zusammenfassung des entsprechenden Abschnitts in [34].

Energie und es gilt

$$P_{i,\delta} = \omega \eta_i E_i. \quad (5.1)$$

Darauf aufbauend kann man nun zwei gekoppelte Subsysteme (siehe Abbildung 5.1) betrachten. Beide werden angeregt durch eine externe Quelle mit der Leistung $P_{i,\varepsilon}$ bzw. $P_{j,\varepsilon}$ und besitzen die Energien E_i bzw. E_j . Aus beiden Subsystemen geht durch Dissipation die Leistung $P_{i,\delta}$ bzw. $P_{j,\delta}$ verloren. Außerdem gibt es in diesem Fall einen Leistungstransfer P_{ij} von Subsystem i in Subsystem j und einen umgekehrten Leistungsfluss P_{ji} . Von Subsystem i aus gesehen ist der Leistungsfluss P_{ij} ein Energieverlust und P_{ji} ein Energiezugewinn. Um diese Leistungsflüsse zu charakterisieren, wird in der SEA der Kopplungsverlustfaktor η_{ij} verwendet. Ähnlich wie für den Dämpfungsverlustfaktor ergibt sich

$$P_{ij} = \omega \eta_{ij} E_i. \quad (5.2)$$

Insgesamt gelten somit die folgenden Energieflussbilanzen:

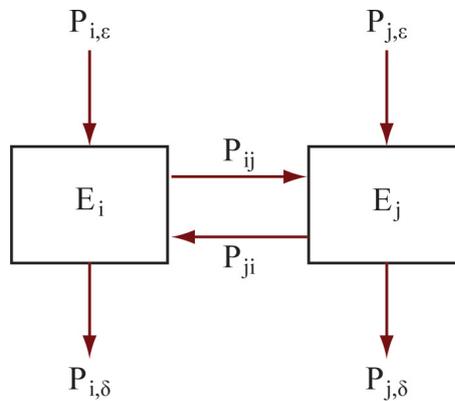


Abbildung 5.1: Energiefluss in zwei gekoppelten Subsystemen

$$P_{i,\varepsilon} = P_{i,\delta} + P_{ij} - P_{ji} \quad (5.3)$$

$$P_{j,\varepsilon} = P_{j,\delta} + P_{ji} - P_{ij}. \quad (5.4)$$

Ein Spezialfall des soeben Behandelten, sind zwei Subsysteme, von denen nur eines von einer externen Quelle angeregt wird. Das andere gerät durch die Kopplung an das erste Subsystem in Schwingung. Dann ergibt sich für das Verhältnis der beiden Energien:

$$\frac{E_j}{E_i} = \frac{\eta_{ij}}{\eta_j + \eta_{ji}}. \quad (5.5)$$

Setzt man die gewonnenen Gleichungen für Kopplungsverlustfaktor und Dämpfungsverlustfaktor in die Bilanzgleichungen ein und erweitert man die Beschreibung auf n Subsysteme, erhält man ein

lineares Gleichungssystem:

$$\omega \begin{pmatrix} \eta_{11} & -\eta_{12} & \cdots & -\eta_{1n} \\ -\eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & -\eta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\eta_{n1} & \cdots & \cdots & \eta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,\varepsilon} \\ \cdots \\ \cdots \\ P_{n,\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Die Diagonalelemente η_{ii} der Verlustmatrix (η_{ij}) nennt man Gesamtverlustfaktoren des Subsystems i , da für sie gilt:

$$\eta_{ii} = \eta_i + \sum_{j \neq i} \eta_{ij}. \quad (5.7)$$

Sind zwei multimodale Schwingsysteme, mit den Modenzahlen N_i und N_j , gekoppelt wird Schwingungsenergie von Mode zu Mode übertragen. Der Energiefluss ist proportional zur Differenz der modalen Energien

$$P_{i \leftrightarrow j} \sim \omega N_i N_j \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right). \quad (5.8)$$

Die zwischen den beiden Systemen ausgetauschte Energie kann mit (5.2) auch in Abhängigkeit der Kopplungsverlustfaktoren, also durch

$$P_{i \leftrightarrow j} = \omega(\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) = P_{ij} - P_{ji} \quad (5.9)$$

beschrieben werden. Die Kopplungsverlustfaktoren beschreiben also, welcher Anteil der Energie pro Oszillation an ein anderes Subsystem abgegeben wird.

Fügt man in das System (5.6) nun die Modenzahlen N_j ein, ist die Verlustmatrix nicht nur quadratisch, sondern wird auch symmetrisch und ist meistens gut konditioniert:

$$\omega \begin{pmatrix} \eta_{11} N_1 & -\eta_{12} N_1 & \cdots & -\eta_{1n} N_1 \\ -\eta_{21} N_2 & \eta_{22} N_2 & \cdots & -\eta_{2n} N_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\eta_{n1} N_n & \cdots & \cdots & \eta_{nn} N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1}{N_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{E_n}{N_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,\varepsilon} \\ \cdots \\ \cdots \\ P_{n,\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Da im Normalfall nicht jedes Subsystem mit jedem anderen Subsystem gekoppelt ist, enthält die Verlustmatrix oft Nullelemente. Erfolgt die Anregung nur an einem oder an wenigen Subsystemen, gilt dies auch für den Leistungsvektor.

5.2.2 Subsysteme

Als nächstes ist die Definition eines Subsystems zu klären. Ein Subsystem kann als Bauteil oder physisches Element der Gesamtstruktur, die analysiert werden soll, gesehen werden. Um eine Modellierung als eigenes Subsystem rechtfertigen zu können, muss der Bauteil die Möglichkeit haben relativ unabhängig von anderen Elementen zu schwingen (völlige Unabhängigkeit ist, solange eine Kopplung besteht, natürlich ausgeschlossen).

Darüber hinaus sollte die gespeicherte Schwingungsenergie eines Subsystems bei plötzlich ausbleibender Anregung abnehmen und nicht sofort auf null abfallen.

Existieren mehrere Wellenarten innerhalb des Bauteils, so wird jedes Wellenfeld als eigenes Subsystem behandelt.

Nachfolgend werden einige Beispiele für Bestandteile einer komplexen Struktur, die sich als Subsystem eignen, zusammen mit den nötigen Inputdaten angegeben:

- **Akustische Kavität (ein Raum)**

- Longitudinalwellen
- Modellierung durch nur ein Subsystem, das durch Volumen, Fluidparameter und Absorption charakterisiert wird.

- **Platte**

- Biegewellen, Longitudinalwellen, Scherwellen
- Modellierung durch drei Subsysteme, die durch Fläche, Dicke, Materialparameter und Dämpfung charakterisiert werden.

- **Balken**

- vier Wellenarten
- Modellierung daher durch vier Subsysteme die durch Länge, Form der Querschnittsfläche, Materialparameter und Dämpfung charakterisiert werden.

5.2.3 Die Statistik in der SEA

In den bisher vorgestellten Gleichungen tauchen noch keine expliziten statistischen Zusammenhänge auf. Für diese einfache theoretische Herangehensweise beschränken sich die statistischen Operationen auf eine Mittelung in dreifacher Hinsicht. Erstens werden die Berechnungen immer für ein Frequenzband durchgeführt (Terzband, Oktavband, etc.; siehe Abschnitt 1.1.1), was einer Frequenzmittelung entspricht. Zweitens wird nur eine Variable pro Subsystem zur Charakterisierung der Energie verwendet. Sie entspricht dem lokalen Durchschnitt des Subsystems. Drittens ist durch die Verwendung von nur wenigen Parametern klar, dass es nicht möglich ist das Schwingungsverhalten detailliert darzustellen. Zum Beispiel werden im Allgemeinen nur Fläche, Dicke und einige Materialparameter zur Beschreibung einer Platte benutzt. Die Form der Platte wird in der SEA nicht explizit berücksichtigt.

Es sei erwähnt, dass außer der Schätzung von Mittelwerten und Erwartungswerten aus den Durchschnitten auch eine Schätzung der Varianz möglich ist. Die Varianz ist aber normalerweise nur für mittlere bzw. hohe Frequenzen verwertbar. Das ist der Grund, warum die SEA oft auch als Hochfrequenz-Methode bezeichnet wird.

5.3 Anwendung der SEA

Die SEA kann für eine Vielzahl von Problemstellungen eingesetzt werden. In vielen Fällen ist sie sogar die einzige Möglichkeit Probleme der hochfrequenten Schwingungsakustik zu lösen.

SEA Anwendungen werden in zwei Gruppen unterteilt

- Experimentelle Untersuchung von Modellen
- Analytische SEA für Vorhersage-Rechnungen

5.3.1 Experimentelle SEA

Experimentelle Untersuchungen erfolgen meist über die sogenannte *Power Injection Method (PIM)*. Die PIM ermöglicht die Bestimmung von SEA-Parametern, ohne Entkoppelung der Subsysteme. Grundlage ist, wie bei der analytischen SEA, die Leistungsbilanz der einzelnen Subsysteme. Zur Bestimmung der Inputparameter wird das Gleichungssystem (5.10) jedoch nach der Verlustmatrix (η_{ij}) aufgelöst, die die Dämpfungs- und Kopplungsverlustfaktoren beinhaltet:

$$(\eta_{ij}) = \frac{1}{\omega} \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{E}^{-1}. \quad (5.11)$$

Das bedeutet, dass bei der Messung die Energien jedes Subsystems und auch die jeweils eingeleitete Leistung bestimmt werden müssen. Die Messung der Energie ist direkt meist nicht möglich, es wird daher die mittlere Beschleunigung einer Struktur bzw. der mittlere Schalldruckpegel eines Luftraums (Kavität) erfasst.

5.3.2 Analytische SEA

Bei der analytischen SEA werden die SEA-Parameter auf theoretischer Grundlage evaluiert, wodurch sie sich für einen Einsatz in der frühen Entwicklungsphase von Automobilen eignet. An dieser Stelle kommen die in Kapitel 3 und die im nächsten Abschnitt beschriebenen Verfahren zum Einsatz, mit denen die Dämpfungsverlustfaktoren berechnet werden, bzw. auf die physikalischen Materialeigenschaften zurückgeführt werden können.

Kennt man die SEA-Parameter und die Eingangsleistung, kann der Energiepegel jedes Subsystems berechnet werden. Als Ergebnis erhält man die gesamte Schwingungsenergie in einem Frequenzband, woraus die interessierenden dynamischen Größen berechnet werden können. Dazu löst man das Gleichungssystem (5.10) nach der Energie auf:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\omega} (\eta_{ij})^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon. \quad (5.12)$$

Mit dieser Einführung in die SEA lässt sich nun deutlich das Hauptinteresse dieser Arbeit erkennen:

- Die Modellierung des akustischen Verhaltens von porösen Materialien aufgrund der physikalischen Materialparameter, um eine Modellierung von Subsystemen zu ermöglichen.

- Die Berechnung der Dämpfungsverlustfaktoren aus den Materialparametern zur Bestimmung der Energiepegel in der untersuchten Gesamtstruktur.

Im nächsten Abschnitt wird daher die Berechnung der energetischen Größen für die SEA gezeigt.

5.4 Berechnung der energetischen Größen für die SEA

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen der Schallausbreitung von ebenen Wellen in Gasen und Fluiden erarbeitet, und die wesentlichen energetischen Größen (Reflexionsgrad, Absorptionsgrad, Transmissionsgrad) eingeführt.

In Kapitel 3 wurden Modelle poröser Absorber ausführlich diskutiert. Diese Absorber sind im Sinne der Automobilindustrie entweder bewusst eingesetzte Bauteile, die Schall schlucken sollen, oder KFZ-Innenraum-Materialien wie Dachhimmel, Teppich, Kunststoffschäume und dergleichen. Wie gezeigt wurde, haben alle diese porösen Absorber die Eigenschaft einen großen Teil der in sie eingeleiteten Schallenergie in Wärme umzuwandeln, so dass nur mehr ein geringer Anteil aus dem Absorber transmittiert werden kann.

In der Folge wird die genaue Energiebilanz bei diesem Vorgang inklusive der zugehörigen energetischen Größen dargestellt.

5.4.1 Energiebilanz beim Medienwechsel

Aus den Betrachtungen in Kapitel 2 geht vor allem hervor, dass die auftreffende Schallenergie beim Medienwechsel an der Grenzfläche zum Teil reflektiert und zum Teil absorbiert wird. Ist die Grenzfläche selbst ausgedehnt, besteht also beispielsweise aus einem KFZ-Bauteil oder einer Wand, wird ein Teil der absorbierten Schallenergie in Wärme umgewandelt (im Falle hochporöser Absorber sogar der größte Teil). Dieser Vorgang wird Dissipation genannt. Das bedeutet, dass sich die absorbierte Schallenergie aufteilt in dissipierte Anteile und transmittierte Anteile, also jenen Teil, der in das dahinterliegende Medium übertragen wird.

Die gesamte auf ein Medium auftreffende Schallenergie wird daher in reflektierte und absorbierte Anteile aufgeteilt. Die Absorption wiederum, die auch Dämpfung genannt wird, ist die Summe aus Dissipation und Transmission. Es gilt die folgende Energiebilanzgleichung, die auch in Abbildung 5.2 angedeutet wird:

$$I_{\varepsilon} = I_{\rho} + I_{\alpha} = I_{\rho} + (I_{\delta} + I_{\tau}) \quad (5.13)$$

mit

I_ε	auftreffende Schallintensität
I_ρ	reflektierte Schallintensität
I_α	absorbierte Schallintensität
I_δ	dissipierte Schallintensität
I_τ	transmittierte Schallintensität

Mit dieser Vorbemerkung, lässt sich die letzte fehlende, zentrale Energiegröße definieren:

Definition 5.1 (Dissipationsgrad). *Der Dissipationsgrad ist das Verhältnis von dissipierter zu einfallender Schallintensität*

$$\delta = I_\delta / I_\varepsilon \quad (5.14)$$

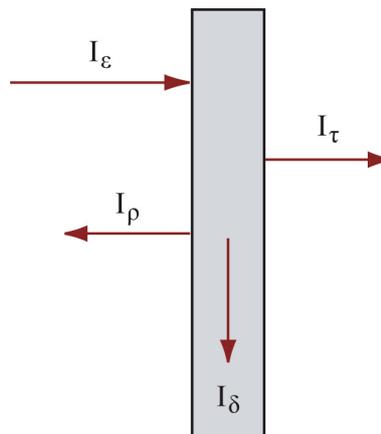


Abbildung 5.2: Energiebilanz beim Medienwechsel - Schema

Damit sind die Verhältnisse der einzelnen Schallintensitäten bekannt. Zusammenfassend werden sie durch die folgenden Grade angegeben:

- Reflexionsgrad: $\rho = I_\rho / I_\varepsilon$
- Absorptionsgrad: $\alpha = I_\alpha / I_\varepsilon$
- Transmissionsgrad: $\tau = I_\tau / I_\varepsilon$
- Dissipationsgrad: $\delta = I_\delta / I_\varepsilon$

Dividiert man Gleichung 5.13 durch die einfallende Schallintensität, so erhält man

$$1 = \frac{I_\rho}{I_\varepsilon} + \left(\frac{I_\tau}{I_\varepsilon} + \frac{I_\delta}{I_\varepsilon} \right) = \frac{I_\rho}{I_\varepsilon} + \frac{I_\alpha}{I_\varepsilon} \quad (5.15)$$

und damit weiter

$$1 = \rho + (\tau + \delta) = \rho + \alpha. \quad (5.16)$$

5.4.2 Energetische Größen

In diesem Abschnitt werden die energetischen Größen nochmals zusammengefasst und anhand der Einfügung eines porösen Absorbers besprochen. Das klassische Schema wird in Abbildung 5.3 gezeigt.

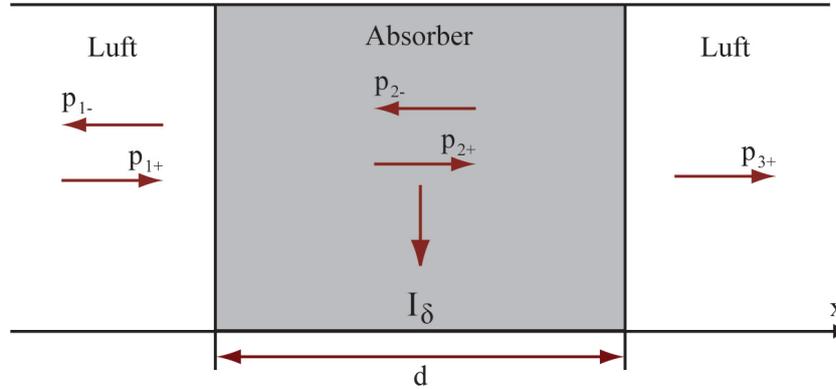


Abbildung 5.3: Einfügung einer porösen Absorberschicht - Schema

Alle energetischen Größen lassen sich dabei auf die charakteristische Impedanz Z_c und die Wellenzahl k eines Absorbers zurückführen. Das sind aber genau jene Parameter, die mit Hilfe der Modelle aus Kapitel 3 bestimmt werden können. Berechnen die Modelle die effektive Dichte ρ bzw. den Kompressionsmodul K , so gelten zur Umrechnung (3.31) und (3.32), also

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho(\omega)K(\omega)} \quad (5.17)$$

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho(\omega)}{K(\omega)}}. \quad (5.18)$$

Reflexionsgrad

Der Reflexionsgrad wurde in Kapitel 2 ausführlich besprochen. Für ihn gilt

$$\rho = \frac{I_\rho}{I_\varepsilon} = |r|^2 \quad (5.19)$$

wobei r der Reflexionsfaktor ist. Dieser ist beim Übergang von einem Medium 1 in ein Medium 2 gegeben durch Gleichung (2.18)

$$r = \frac{Z_{M2} - Z_{M1}}{Z_{M2} + Z_{M1}}, \quad (5.20)$$

wobei Z_{M2} bzw. Z_{M1} die charakteristischen Impedanzen der Medien sind. Im Falle mehrschichtiger Medien gilt Gleichung (2.50)

$$r = \frac{\hat{p}_{1,-}}{\hat{p}_{1,+}} = \frac{Z_{M2}(Z_{M3} - Z_{M1}) \cos(k_2 d) + i \cdot (Z_{M2}^2 - Z_{M1} Z_{M3}) \sin(k_2 d)}{Z_{M2}(Z_{M3} + Z_{M1}) \cos(k_2 d) + i \cdot (Z_{M2}^2 + Z_{M1} Z_{M3}) \sin(k_2 d)}. \quad (5.21)$$

Sind, wie in Abbildung 5.3, Medium 1 und 3 gleich, so vereinfacht sich dies an der Stelle $x = 0$ zu

$$r = \frac{(Z_c^2 - Z_0^2) \tan(kd)}{2Z_c Z_0 + i \cdot (Z_c^2 + Z_0^2) \tan(kd)}, \quad (5.22)$$

wobei Z_c und k die charakteristische Impedanz und Wellenzahl des Absorbers, und Z_0 und k_0 die Schallkennimpedanz und Wellenzahl der Luft sind. Diese Formel entspricht (5.20), wobei man Z_{M2} durch die von Medium 1 aus sichtbare wirksame Impedanz Z_W ersetzt.

Absorptionsgrad

Für den Absorptionsgrad des Absorbers gilt nach wie vor Gleichung (2.29)

$$\alpha = \frac{I_\alpha}{I_\varepsilon} = \frac{I_\varepsilon - I_\rho}{I_\varepsilon} = 1 - \rho = 1 - |r|^2 \quad (5.23)$$

bzw. das Anpassungsgesetz (2.31)

$$\alpha = \frac{4\operatorname{Re}(Z_c)Z_0}{(\operatorname{Re}(Z_c) + Z_0)^2 + \operatorname{Im}(Z_c)^2} \quad (5.24)$$

mit Z_0 der Schallkennimpedanz der Luft.

Transmissionsgrad

Der Transmissionsgrad des Absorbers ist im Falle eines mehrschichtigen Mediums gegeben durch Gleichung

$$\tau = |t|^2 \quad (5.25)$$

mit dem Transmissionsfaktor t aus Gleichung (2.53)

$$t = \frac{2Z_{M1}Z_{M3}e^{-ik_3d}}{Z_{M2}(Z_{M3} + Z_{M1})\cos(k_2d) + i \cdot (Z_{M2}^2 + Z_{M1}Z_{M3})\sin(k_2d)}. \quad (5.26)$$

Für den Absorber aus Abbildung 5.3 folgt die Vereinfachung

$$t = \frac{2jZ_cZ_0}{Z_0^2 - 2jZ_cZ_0 \cot(kd) + Z_c^2} \cdot \frac{e^{ik_0d}}{\sin(kd)}. \quad (5.27)$$

Dabei sind Z_0 und k_0 die Schallkennimpedanz und Wellenzahl der Luft.

Dissipationsgrad

Da alle anderen Größen bereits bestimmt sind, lässt sich der Dissipationsgrad leicht aus Absorptionsgrad und Transmissionsgrad bestimmen:

$$\delta = \frac{I_\varepsilon - I_\rho - I_\tau}{I_\varepsilon} = \alpha - \tau = 1 - \rho - \tau. \quad (5.28)$$

Transmission Loss

Eng mit dem Transmissionsgrad verbunden ist der Transmission Loss TL (bzw. Insertion Loss IL oder auch Schalldämmmaß R), der angibt, wie viel der Schallintensität durch einen Absorber verloren geht. Er ist eine Pegelgröße und berechnet sich durch

$$TL = R = -10 \log(\tau) \text{ [dB]} \quad (5.29)$$

bzw.

$$TL = R = -20 \log(|t|) \text{ [dB]}. \quad (5.30)$$

Eine weiterführende theoretische Abhandlung zum Transmission Loss kann zum Beispiel in [48] gefunden werden. Hier wird nun noch eine Einführung in das klassische Messverfahren für den Transmission Loss gegeben.

Messverfahren zur Berechnung des Transmission Loss

In Abbildung 5.4 ist der Aufbau zur Messung der Schalldämmung einer Wand skizziert. Ausgegangen

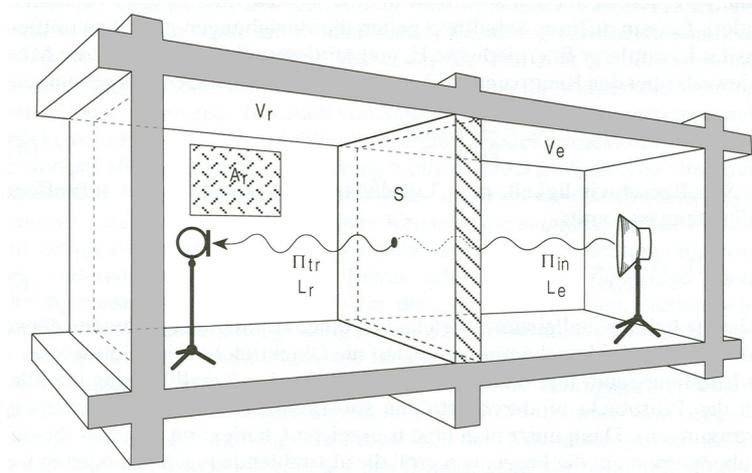


Abbildung 5.4: Skizze des Aufbaus zur Messung des Transmission Loss; aus [45] S. 189

wird dabei von einer Konfiguration aus zwei Räumen, zwischen denen sich das zu charakterisierende Bauteil, beispielsweise eine Wand, befindet. Die Trennwand mit der Fläche S befindet sich zwischen einem Senderraum mit Volumen V_e , in dem sich eine leistungsstarke Schallquelle befindet, und einem Empfangsraum mit Volumen V_r .

Es wird vorausgesetzt, dass die Beschallung über ein diffuses Schallfeld erfolgt. Das bedeutet, dass sich das zu prüfende Bauteil außerhalb des *Hallradius*

$$r_H \approx 0,057 \cdot \sqrt{\frac{V_e}{T_e}} \quad (5.31)$$

(wobei T_ε die Nachhallzeit des Senderraumes ist) befinden muss, die Räume also ausreichend groß sind. Die Nachhallzeit lässt sich über die Formel von SABINE

$$T_\varepsilon = 0,163 \frac{V_\varepsilon}{A_\varepsilon} \quad (5.32)$$

bestimmen, wobei A_ε die äquivalente Absorptionsfläche des Senderraumes ist. Die äquivalente Absorptionsfläche ist eine gedachte Fläche, die alle auf sie einfallende Schalleistung absorbiert, und das Absorptionsvermögen der umgebenden Oberflächen des Raumes beschreibt. Für sie gilt nach [22] offensichtlich

$$A_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i, \quad (5.33)$$

wobei die A_i die Oberflächen des Raums und die α_i die zugehörigen Absorptionsgrade sind.

Im Empfangsraum sollte sich ein Mikrofon, ebenfalls außerhalb des Hallradius der Quelle, befinden. Zusätzlich wird festgelegt, dass eine Schallübertragung ausschließlich durch das Prüfobjekt erfolgen soll. Dazu benutzt man die Überlegung, dass sich der räumlich gemittelte Schalldruck p_r im Diffusfeld des Empfangsraumes genau so einstellt, dass die übertragene Schalleistung P_r und die im Raum absorbierte Schalleistung P_α in Balance sind. Dadurch wird die Größe der abstrahlenden Fläche unerheblich. Für den Empfangsraum wird die äquivalente Absorptionsfläche A_r bestimmt.

Unter diesen Voraussetzungen folgt für den Transmissionsgrad schließlich

$$\tau = \left| \frac{p_r}{p_\alpha} \right|^2 \frac{A_r}{S}. \quad (5.34)$$

Eine genaue Beschreibung des Messablaufes kann in [45] gefunden werden.

5.5 Literaturhinweise

Da dieses Kapitel nur eine kurze Einführung in die Idee und Theorie der SEA geben soll, seien hier noch einige Literaturhinweise gegeben, die weiteren Einblick in die Materie geben und auch zeigen, wie man die SEA für die Simulation von Autos einsetzen kann.

- KORTE S.: *Untersuchung der hochfrequenten akustischen Transmission einer Kfz-Bodengruppe mittels Statistischer Energieanalyse*; Dissertation; Technischen Universität Berlin; 2005.
- SARRADJ E.: *Hochfrequenter Körperschall in Strukturen*; Dissertation; Universität Dresden; 1998.
- SARRADJ E.: *Energy-based vibroacoustics: SEA and beyond*; Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH; Dresden; 2004.
- HAUER I., JALICS K., PRIEBSCHE H. H. UND BARTOSCH T.: *Prediction of Vehicle Interior Noise in High Frequency Range using SEA Analysis Hybrid Method*; Akustikkompetenzzentrum Graz, Magna Steyr Engineering; Graz.

- BRANDL S., HAUER I., PRIEBSCHE H. H., BARTOSCH T. UND VOLKWEIN S: *Analysis And Assessment Of The Sensitivity Of Trim Parameters On Sea Simulation For Interior Noise Reduction*; Akustikkompetenzzentrum Graz, Magna Steyr Engineering, Karl-Franzens-Universität Graz; Graz; 2006.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein neues mathematisches Gesamtkonzept entwickelt, das, ausgehend von physikalischen Eigenschaften eines im KFZ-Innenraum verwendeten Materials, eine Bestimmung der akustischen Eigenschaften erlaubt und bis zur Modellierung des Energieaustausches mittels statistischer Energieanalyse führt. Algorithmen, die die akustischen Materialeigenschaften aufgrund physikalischer Parameter simulieren, wurden diskutiert. Darüber hinaus wurden Methoden zur mathematischen Extraktion messtechnisch schwer zugänglicher Materialparameter vorgestellt. Auf diese Weise können vibroakustische Erwägungen, durch einen effizienten Workflow, sehr früh in den Entwicklungsprozess eines KFZ integriert werden.

Dazu wurden zunächst im ersten Teil der Arbeit die Grundlagen der verschiedenen Teilgebiete der Akustik und deren gemeinsames physikalisches Fundament betrachtet. Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen und den Schallfeldphänomenen, sowie deren Anwendung und Bedeutung in der Praxis wurden besprochen. Danach wurde die Wellenausbreitung in Fluiden und Gasen besprochen, da in den Simulationsmethoden, auf die das Hauptaugenmerk gelegt wurde, poröse Medien als äquivalente Fluide betrachtet werden können.

Im darauffolgenden Kapitel wurden die physikalischen Materialparameter, die sich auf das akustische Verhalten poröser Medien auswirken, beschrieben. Es wurde gezeigt, dass man poröse Materialien in zwei Hauptgruppen aufteilen kann. Solche mit *biegesteifem Rahmenskelett* und solche mit *elastischem Rahmenskelett*. Eine genauere hierarchische Unterscheidung der zugehörigen Simulationsmodelle, vor allem jener, die von einem biegesteifen Skelett ausgehen, wurde präsentiert. Ein detaillierter Einblick in

- empirische Modelle
- analytische Modelle, und
- semiphänomenologische Modelle

wurde gegeben, wobei darauf hingewiesen wurde, dass das akustische Verhalten eines porösen Mediums vollständig durch das Parameterpaar charakteristische Impedanz Z_c und Wellenzahl k beschrieben werden kann. Dementsprechend sagen alle Modelle entweder diese beiden Parameter oder die dazu äquivalenten Parameter effektive Dichte ρ und Kompressionsmodul K vorher. Eine Vielzahl der praktisch sinnvollen mathematischen Modelle poröser Absorber wurde genau behandelt und die Stärken und Schwächen wurden einander gegenübergestellt.

Im Rahmen der Modellanalyse konnte gezeigt werden, dass die klassischen empirischen Modelle nur einen Inputparameter benötigen, um die akustische Impedanz eines porösen Materials zu berechnen: Den Strömungswiderstand. Wegen ihrer Einfachheit werden solche Modelle nach wie vor gerne in der Industrie eingesetzt. Dabei erfreut sich das wohl bekannteste Modell von DELANY und BAZLEY besonderer Beliebtheit. Es wurde in dieser Arbeit jedoch deutlich gemacht, dass dieses Modell Schwächen aufweist, die zu physikalisch unmöglichem Verhalten führen können. Deshalb wurden davon abgeleitete, genauere Modelle vorgestellt.

Die Diskussion rein analytischer Modelle sollte die Zusammenhänge zwischen der Materialbeschaffenheit und den daraus resultierenden akustischen Eigenschaften aufzeigen. Es wurde herausgearbeitet, dass *exakte* Modelle für einfache Porengeometrien existieren, die jedoch in der Realität nicht vorkommen.

Die Gruppe der semiphänomenologischen Modelle wurde am ausführlichsten besprochen. Unterschieden wurden Modelle für die effektive Dichte und Modelle für den Kompressionsmodul. Danach wurde dargestellt, dass sich die Modelle kombinieren lassen, um ein vollständiges Parameterpaar zu erhalten. Simulationsmethoden, die vier bis acht Materialparameter als Input benötigen, wurden behandelt. Im Anschluss daran wurden mathematische Methoden aufgezeigt, die eine analytische Bestimmung dieser Materialparameter ermöglichen und so teilweise sehr komplizierte Messmethoden ersparen können.

Ein Abschnitt über die BIOT-Theorie vervollständigte das Bild, da hiermit auch ein Modell poröser Materialien mit elastischem Rahmen angegeben wurde.

Nach der Analyse von Simulationsmethoden für poröse Absorber wurden sowohl die empirischen als auch die semiphänomenologischen Modelle validiert. Bei den empirischen konnte auf Messdaten aus dem ACC zurückgegriffen werden. Es wurde festgestellt, dass die Güte der Ergebnisse eindeutig davon abhing, ob das verwendete Modell für die Materialart der Probe erstellt worden ist. Insgesamt konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation beobachtet werden, vor allem vor dem Hintergrund dessen, dass nur ein Inputparameter für die Modellrechnungen benötigt wurde.

Für eine messtechnische Validierung der semiphänomenologischen Modelle standen leider keine derartigen Messergebnisse zur Verfügung. Stattdessen wurde hier entsprechend auf die Literatur verwiesen. Zusätzlich wurden die Modelle und die analytischen Lösungen zur Bestimmung der Materialparameter anhand einer *virtuellen* Materialprobe validiert, das bedeutet mit Hilfe eines gedachten Materials mit einer Porengeometrie, für die eines der exakten, analytischen Modelle benutzt werden konnte.

Die besprochenen Simulationsmodelle sollen zur Berechnung der für die SEA benötigten energetischen Größen dienen. Daher wurde ein abschließendes Kapitel über elementare Zusammenhänge

der SEA verfasst, in dem auch die Energiebilanz beim Medienwechsel von Schallwellen besprochen wurde. Es wurde die Abhängigkeit der energetischen Größen von charakteristischer Impedanz und Wellenzahl erarbeitet und gezeigt, wie diese bestimmt werden können. Folgende Größen lassen sich aus den Simulationsergebnissen errechnen:

- Reflexionsgrad
- Absorptionsgrad
- Transmissionsgrad
- Transmission Loss (Schalldämmmaß)

Abschließend wurde auf spezielle Literatur verwiesen, die den konkreten Einsatz in der Fahrzeugindustrie beschreibt.

Diese Arbeit dient als Basis für weitere Untersuchungen, die verfeinerte Modelle, die auf der behandelten Theorie aufsetzen, zur Folge haben werden. Außerdem wurde gezeigt, welche Möglichkeiten bestehen, die vorgestellten Modelle auf mehrschichtige Verbindungen von Materialien anzuwenden. Ergänzend wird es hier notwendig sein, ähnliche Theorien für nichtporöse Materialien zu betrachten. Darüber hinaus bedarf es einer eingehenden Modellbetrachtung anderer Absorberarten, wie beispielsweise HELMHOLTZ-Resonatoren.

Literaturverzeichnis

- [1] ALLARD, J. F. und ATALLA, N.: *Propagation Of Sound In Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*. 1. Auflage. Elsevier Applied Science, London and New York, 1993.
- [2] ALLARD, J. F. und ATALLA, N.: *Propagation Of Sound In Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*. 2. Auflage. John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2009.
- [3] ALLARD, J. F. und CHAMPOUX, Y.: *New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials*. Journal of the Acoustical Society of America, 91: 3346–3353, 1992.
- [4] ASTM INTERNATIONAL - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS: *ASTM C522 - 03(2009)e1 Standard Test Method for Airflow Resistance of Acoustical Materials*, 2009.
- [5] ATALLA, Y. und PANNETON, R.: *Inverse acoustical characterization of open cell porous media using impedance tube measurements*. Canadian Acoustics Journal, 33: 11–24, 2005.
- [6] ATTENBOROUGH, K.: *On the acoustic slow wave in air-filled granular media*. Journal of the Acoustical Society of America, 81: 93–102, 1987.
- [7] BIOT, M.: *General theory of three-dimensional consolidation*. Journal of Applied Physics, 12: 155–164, 1941.
- [8] BIOT, M.: *Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid*. Journal of Applied Physics, 26: 182–185, 1955.
- [9] BIOT, M.: *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid*. Journal of Applied Physics, 27: 459–467, 1956.
- [10] BIOT, M.: *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range*. Journal of the Acoustical Society of America, 28: 168–178, 1956.
- [11] BIOT, M.: *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range*. Journal of the Acoustical Society of America, 28: 179–191, 1956.
- [12] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. und MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 2. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt, 1995.
- [13] CHAMPOUX, Y. und ALLARD, J. F.: *Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media*. Journal of Applied Physics, 70: 1975–1979, 1991.

- [14] CHAMPOUX, Y., STINSON, M. R. und DAIGLE, G. A.: *Air-based system for the measurement of porosity*. Journal of the Acoustical Society of America, 89: 910–916, 1991.
- [15] COX, T. J. und D'ANTONIO, P.: *Acoustic Absorbers and Diffusers - Theory, design and application*. 2. Auflage. Taylor & Francis, Oxfordshire, 2009.
- [16] CREMER, L. und HUBERT, M.: *Vorlesungen über Technische Akustik*. 3. Auflage. Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [17] CREMER, L. und MÜLLER, H. A.: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*, Band 1. 2. Auflage. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1978.
- [18] DELANY, M. E. und BAZLEY, E. N.: *Acoustical Properties of Fibrous Absorbents Materials*. Applied Acoustics, 3: 105–116, 1970.
- [19] DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMIERUNG E.V.: *DIN EN 29053, Akustik - Materialien für akustische Anwendungen, Bestimmung des Strömungswiderstandes (ISO 9053:1991)*, 1993.
- [20] DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMIERUNG E.V.: *DIN EN ISO 10534-2, Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 2: Verfahren mit Übertragungsfunktion (ISO 10534-2:1998)*, 2001.
- [21] DUNN, I. und DAVERN, W.: *Calculation of acoustic impedance of multi-layer absorbers*. Journal of Applied Acoustics, 19: 321–334, 1986.
- [22] EVEREST, F. A. und POHLMANN, K. C.: *Master Handbook of Acoustics*. 5. Auflage. The McGraw-Hill Companies, Inc, New York, 2009.
- [23] FUCHS, H. V.: *Schallabsorber und Schalldämpfer*. 2. Auflage. Springer Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [24] FURSTOSS, M., THENAIL, D. und GALLAND, M. A.: *Surface impedance control for sound absorption: direct and hybrid passive / active strategies*. Journal of Sound and Vibration, 203: 219–236, 1997.
- [25] GARAI, M. und POMPOLI, F.: *A simple empirical model of polyester fibre materials for acoustical applications*. Journal of Applied Acoustics, 66: 1383–1398, 2005.
- [26] GROSS, D., HAUGER, W., SCHRÖDER, J. und WALL, W. A.: *Technische Mechanik - Elastostatik*, Band 2. 10. Auflage. Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [27] HECKL, M. und MÜLLER, H. A.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. 1. Auflage. Springer Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 1975.
- [28] HENN, H., SIAMBARI, G. R. und FALLEN, M.: *Ingenieurakustik - Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele*. 4. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.

- [29] HÜBELT, J., BOEHM, M. und HOFFMANN, R.: *Using An Extended Impedance Measurement Method For The Estimation Of Porosity And Flowresistance Of Porous Materials*. In: *Twelfth International Congress on Sound and Vibration*, Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH, Dresden, 2005.
- [30] JAOUEN, L. und OLYN, X.: *Indirect acoustical characterization of a foam with two scales of porosity*. In: *Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials (SAPEM)*, Lyon, 2005.
- [31] JOHNSON, D. L., KOPLIK, J. und DASHEN, R.: *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*. *Journal of Fluid Mechanics*, 176: 379–402, 1987.
- [32] JONES, P. W.: *Prediction of the acoustic performance of small poroelastic foam filled mufflers: a case study*. *Acoustics Australia*, 38: 69–75, 2010.
- [33] KOMATSU, T.: *Improvement of Delany-Bazley and Miki models for fibrous sound-absorbing materials*. *Acoust. Sci & Tech.*, 29: 121–129, 2008.
- [34] KORTE, S.: *Untersuchung der hochfrequenten akustischen Transmission einer Kfz-Bodengruppe mittels Statistischer Energieanalyse*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Berlin, 2005.
- [35] KUCHLING, H.: *Taschenbuch der Physik*. 18. Auflage. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München/Wien, 2004.
- [36] LAFARGE, D.: *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique: Définition de paramètres géométriques, analogie électromagnétique, temps de relaxation..* Doktorarbeit, Université du Maine, Le Mans, 1993.
- [37] LAFARGE, D.: *The Equivalent Fluid Model*. In: BRUNEAU, M. und POTEL, C. (Hrsg.): *Materials and Acoustics Handbook*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, London and Hoboken, 1. Auflage, 2009.
- [38] LAFARGE, D., LEMARINIER, P., ALLARD, J. F. und TARNOW, V.: *Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102: 1995–2006, 1997.
- [39] LANGLOIS, C., PANNETON, R. und ATALLA, N.: *Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110: 3032–3040, 2001.
- [40] LECLAIRE, P., KELDERS, L., LAURIKS, W., GLORIEUX, C. und THOEN, J.: *Determination of the viscous characteristic length in air-filled porous materials by ultrasonic attenuation measurements*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99: 1944–1948, 1996.
- [41] LECLAIRE, P., KELDERS, L., LAURIKS, W., MELON, M., BROWN, N. und CASTAGNÉDE, B.: *Determination of the viscous and the thermal characteristic length of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air*. *Journal of Applied Physics*, 80: 2009–2012, 1996.

- [42] LERCH, R., SESSLER, G. M. und WOLF, D.: *Technische Akustik - Grundlagen und Anwendungen*. 1. Auflage. Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [43] MECHEL, F. P.: *Ausweitung der Absorberformel von Delany und Bazley zu tiefen Frequenzen*. *Acoustica*, 35: 210–213, 1976.
- [44] MECHEL, F. P.: *Schallabsorber*, Band 2. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1995.
- [45] MECHEL, F. P.: *Schallabsorber*, Band 3. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1998.
- [46] MECHEL, F. P.: *Formulas of Acoustics*. 2. Auflage. Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [47] MIKI, Y.: *Acoustical properties of porous materials - Modifications of Delany-Bazley models*. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, 11: 19–24, 1990.
- [48] MORELLO, L., ROSSINI, L. R., PIA, G. und TONOLI, A.: *The Automotive Body - System Design*, Band 2. 1. Auflage. Springer Science + Business Media, Heidelberg, London, New York, 2011.
- [49] MÖSER, M.: *Technische Akustik*. 8. Auflage. Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [50] PANNETON, R.: *Comments on the limp frame equivalent fluid model for porous media*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122: EL217 – EL219, 2007.
- [51] PANNETON, R. und OLNLY, X.: *Acoustical determination of the parameters governing viscous dissipation in porous media*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119: 2027–2040, 2006.
- [52] PANNETON, R. und OLNLY, X.: *Acoustical determination of the parameters governing thermal dissipation in porous media*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123: 814–824, 2007.
- [53] PRIDE, S. R., MORGAN, F. D. und GANGI, A. F.: *Drag forces of porous media acoustics*. *Physical Review*, 47: 4964–4975, 1993.
- [54] PROSSEGGER, A.: *Analyse der akustischen Eigenschaften von Ausstattungsmaterialien für den Kraftfahrzeug-Innenraum*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, Graz, 2000.
- [55] SALISSOU, Y. und PANNETON, R.: *Wideband characterization of the complex wave number and characteristic impedance of sound absorbers*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128: 2868–2876, 2010.
- [56] SARRADJ, E.: *Energy-based vibroacoustics: SEA and beyond*. Technischer Bericht 1, Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH, Dresden, 2004.

- [57] SCHLADITZ, K., PETERS, S., REINEL-BITZER, D., WIEGMANN, A. und OHSER, J.: *Design of acoustic trim based on geometric modeling and flow simulation for non-woven*. Technischer Bericht 72, Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM, Kaiserslautern, 2005.
- [58] UTSUNO, H., TANAKA, T. und FUJIKAWA, T.: *Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials*,. Journal of the Acoustical Society of America, 83: 637–643, 1989.
- [59] WILSON, D. K.: *Relaxation-matched modeling of propagation through porous media, including fractal pore structure*. Journal of the Acoustical Society of America, 94: 1136–1145, 1993.
- [60] ZELLER, P. (Hrsg.): *Handbuch Fahrzeugakustik - Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch*. 1. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [61] ZWIKKER, C. und KOSTEN, C. W.: *Sound Absorbing Materials*. 1. Auflage. Elsevier, New York, 1949.

Symbolverzeichnis

$\hat{}$	Bezeichnet die Amplitude einer Welle [m]
\square	Bezeichnet eine komplexe Größe
\square_+	Deutet Ausbreitung in positive Koordinatenrichtung an
\square_-	Deutet Ausbreitung in negative Koordinatenrichtung an
\square_δ	Kennzeichnet dissipierte Anteile einer zu einer Welle gehörenden Größe
\square_ε	Kennzeichnet einfallende Anteile einer zu einer Welle gehörenden Größe
\square_ρ	Kennzeichnet reflektierte Anteile einer zu einer Welle gehörenden Größe
\square_τ	Kennzeichnet transmittierte Anteile einer zu einer Welle gehörenden Größe
$\text{Im}()$	Imaginärteil einer Zahl
$\text{Re}()$	Realteil einer Zahl
A	Fläche [m ²]
C_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck [J/kg·K]
C_V	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen [J/kg·K]
E	Elastizitätsmodul [N/m ²]
E	Energie [J]
F	Kraft [kg·m/s ²]
G	Schubmodul [N/m ²] (Pascal)
H_\square	Übertragungsfunktion
I	Schallintensität [W/m ²]
J_n	BESSELFunktion der Ordnung n
K	Kompressionsmodul [N/m ²] (Pascal)
K_{EQ}	Kompressionsmodul des äquivalenten Fluids [N/m ²] (Pascal)
L_\square	Pegelmaße
M	Viskoser Porenformfaktor [–]
M'	Thermischer Porenformfaktor [–]
N_i	Modenzahl des Mediums i
P	Schallleistung [W]
P_r	PRANDTL-Zahl [–]
R	Gaskonstante [J/mol·K]
	Schalldämmmaß [dB]
T	Temperatur [C] bzw. [K]
TL	Transmission Loss [dB]
V	Volumen [kg ³]

Z	Akustische Impedanz, Oberflächenimpedanz [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^3$]
Z_c	Charakteristische Impedanz eines Mediums [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^3$]
$Z_{M\Box}$	Charakteristische Impedanz des Mediums \Box [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^3$]
$\text{div}()$	Divergenz
$\text{grad}()$	Gradient
$\text{rot}()$	Rotation
$-$	Gesamtdruck, Gesamtgeschwindigkeit, Gesamtdichte
\Box_0	Ruhewert des Drucks, der Geschwindigkeit, der Dichte
\vec{a}	Beschleunigung [m/s^2]
\vec{v}	Schallschnelle [m/s]
a	Absorptionsfaktor $[-]$
c	Schallgeschwindigkeit [m/s] Phasengeschwindigkeit einer Welle [m/s]
f	Frequenz [Hz]
k	Wellenzahl eines Mediums [$1/\text{m}$]
m	Masse [kg]
p	Druck eines Mediums [N/m^2] (Pascal) Schalldruck
q	Viskose Permeabilität $[-]$
q'	Thermische Permeabilität $[-]$
r	Reflexionsfaktor $[-]$
r_H	Hallradius [m]
t	Zeit [s] Transmissionsfaktor $[-]$
Δ	LAPLACE-Operator
Γ'	Ausbreitungskonstante $[-]$
Λ	Viskose charakteristische Länge [m]
Λ'	Thermische charakteristische Länge [m]
Ξ	Längenbezogener Strömungswiderstand [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4$]
α	Absorptionsgrad $[-]$
α_∞	Tortuosität $[-]$
χ	Kompressibilität [m^2/N]
δ	Dissipationsgrad $[-]$
ε_{ij}	Elemente des Dehnungstensors
η	Dynamische Viskosität [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$]
η_i	Dämpfungsverlustfaktor von Medium i
η_{ij}	Kopplungsverlustfaktor zwischen den Medien i und j
ϕ	Porosität $[-]$
φ_0	Phasenwinkel

κ	Adiabatexponent [-]
λ	Wellenlänge [m]
ω	Kreisfrequenz [Hz]
ω_{tc}	Thermische charakteristische Frequenz [Hz]
ω_{vc}	Viskose charakteristische Frequenz [Hz]
ρ	Dichte eines Mediums in [kg/m ³] Reflexionsgrad
ρ_{EQ}	effektive Dichte des äquivalenten Fluids [kg/m ³]
σ_{ij}	Elemente des Spannungstensors
τ	Transmissionsgrad [-]
γ	Wärmeleitfähigkeit [W/m·K]

Index

- Absorptionsfaktor, 32
- Absorptionsfläche
 - äquivalente, 106
- Absorptionsgrad, 32, 34, 36, 41, 81, 104
- Adiabatexponent, 45
- Akustische Grundgleichungen, 18
- Akustische Impedanz, 28
- Amplitude, 15
- Analytische Modelle, 61
- ATTENBOROUGH-Modell, 64
- Ausbreitungskonstante, 57

- BAZLEY, 57
- Beugung, 27
- Bewegungsgleichung, 16
- BIOT-Modell, 73
 - biegesteifes Skelett, 62
- Brechung, 26, 37
- Brechungsgesetz, 27, 39

- CHAMPOUX-ALLARD-Modell, 66
 - empirisches, 60
- Charakteristische Impedanz, 10, 28
- Charakteristische Länge
 - thermische, 51
 - viskose, 50

- Dämpfungsverlustfaktor, 96
- DELANY-BAZLEY-Modell, 57
- Dezibel, 11
- Dissipation, 101
- Dissipationsgrad, 102, 104

- Effektive Dichte, 65, 66

- Validierung, 89
- Elastizitätsmodul, 46
- Elongation, 15
- Empirische Modelle, 57
- Energiebilanz, 101
- Energiegrößen, 101
- EuroFoam, 86

- Faserstoffe, 57, 59
- Fluidkomponente, 44
- Frequenz, 15
 - thermische charakteristische, 68
 - viskose charakteristische, 65

- Hallradius, 105
- HELMHOLTZgleichung, 23, 55
- HOOKESches Gesetz, 75
- Hörbereich, 6
- Hörfläche, 6
- HUYGENSSches Prinzip, 14
- Hydrodynamik, 15

- Impedanz, 30, 34, 39, 81
 - akustische, 28
 - charakteristische, 28
 - mehrschichtiger Medien, 34, 40
- Impedanzrohr, 79, 82
- Infraschall, 6

- JOHNSON-LAFARGE-Modell, 69
 - Validierung, 90
- JOHNSON-Modell, 64

- KOMATSU-Modell, 59

- Kompressionsmodul, 52, 66, 68
 - Validierung, 89
- Kontinuitätsgleichung, 17
- Kopplungsparameter, 47
- Kopplungsverlustfaktor, 96, 97
- Kreisfrequenz, 15

- LAFARGE-Modell, 67
- Lautstärkepegel, 12

- MECHEL-Modell, 58
- Messdaten, 82
- MIKI-Modell, 58
- Mischfaservlies, 83
- Modellübersicht, 52

- Oktavband, 6

- Periode, 15
- Permeabilität
 - thermische, 67
 - viskose, 64
- Phasengeschwindigkeit, 15
- POISSONZahl, 46
- Polyesterfasern, 61
- Porenformfaktor, 25
 - thermisch, 68
- Poroelastizität, 43
- Poröse Absorber, 43
- Porosität, 47
- PRANDTL-Zahl, 45
- PRIDE-Modell, 66

- Raumgewicht, 44
- Reflexion, 26, 37
- Reflexionsfaktor, 31, 36, 81
- Reflexionsgesetz, 26, 39
- Reflexionsgrad, 31, 32, 36, 41, 103
- Regressionsmodelle, 61
- Relaxationszeit, 68
- Rotationstensor, 75

- Schalldämmmaß, 105
- Schalldichte, 16
- Schalldruck, 9, 16
- Schalldruckpegel, 11
- Schallerzeugung, 5
- Schallfeldgrößen, 7, 16
- Schallfeldphänomene, 25
- Schallgeschwindigkeit, 7, 45
 - in Festkörpern, 7
 - in Flüssigkeiten, 8
 - in Gasen, 8
 - in Luft, 8
- Schallharte Wand, 30
- Schallintensität, 9
- Schallintensitätspegel, 11
- Schallkennimpedanz, 10
- Schalleistung, 10
- Schalleistungspegel, 12
- Schallpegelmaße, 11
- Schallquelle, 5
- Schallschnelle, 9, 16
- Schallwelle, 5
- Schaum, 61
- Schaumstoffe, 61
- Schubmodul, 46
- SEA, 95
 - analytische, 100
 - experimentelle, 100
- Semiphänomenologische Modelle, 63
- Simulationsergebnisse
 - empirische, 82
 - semiphänomenologische, 88
- Spannungs-Verzerrungs-Beziehung, 74
- Statistische Energieanalyse, 95
- Strömungsresistenz, 47
- Strömungswiderstand, 47
- Subsystem, 98

- Terzband, 6
- Thermische charakteristische Länge, 51
- Tortuosität, 48
 - dynamische, 65, 67

- Transmission, 101
- Transmission Loss, 105
- Transmissionsfaktor, 37
- Transmissionsgrad, 33, 37, 104
- Übertragungsfunktionmethode, 79
- Ultraschall, 6

- Validierung, 79
- Verschiebungsvektor, 74
- Verzerrungstensor, 75
- Viskose charakteristische Länge, 50
- Viskosität
 - dynamische, 45
- Viskositätseffekte, 62

- Welle
 - Amplitude, 15
 - Arten von, 13
 - Biege-, 14
 - ebene, 21
 - Elongation, 15
 - Frequenz, 15
 - harmonische, 21
 - Kenngößen, 14
 - Kreisfrequenz, 15
 - Kugel-, 23
 - longitudinale, 14
 - Periode, 15
 - Phasengeschwindigkeit, 15
 - Torsions-, 14
 - transeversale, 14
 - Wellenzahl, 15
- Wellen
 - Beugung, 27
 - Brechung, 26
 - Reflexion, 26
 - stehende, 27
- Wellenarten, 13
- Wellenausbreitung, 13
- Wellengleichung, 19
 - Lösung, 20
- Wellenlänge, 15
- Wellenzahl, 10, 15
- WILSON-Modell, 68
- Zustandsgleichung (ideales Gas), 18
- ZWIKKER-KOSTEN-Modell, 62

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)