

PLASTISCHES VERSAGEN STRUKTURIERTER MATERIALIEN: VERALLGEMEINERTE MODELLBILDUNG, RECHNERISCHE UMSETZUNG & PRAKTISCHE ANWENDUNG AUF HOLZ

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften
verfasste Dissertation.

Eingereicht an der
Fakultät für Bauingenieurwissenschaften der
Technischen Universität Graz
von

Dipl.-Ing Burkhard Krenn

Erstbegutachter und Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Guggenberger
Institut für Baustatik
Technische Universität Graz
A-8010 Graz, Lessingstrasse 25

Zweitbegutachter:

Prof. Dr.-Ing. Andreas Menzel
Institut für Mechanik
Fakultät Maschinenbau
TU Dortmund
D-44227 Dortmund, Leonhard-Euler-Strasse 5

Graz, im Februar 2014

Deutsche Fassung:
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....
(Unterschrift)

Englische Fassung:

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date

.....
(signature)

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Guggenberger für die engagierte und umfassende Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit.

Prof. Dr.-Ing. Andreas Menzel danke ich für die Übernahme der Zweitbegutachtung dieser Dissertation.

Bei Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. DDr.h.c. Josef Eberhardsteiner möchte ich mich für die rasche Übermittlung der Versuchsdaten zu den biaxialen Holzversuchen bedanken.

Weiters danke ich Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterweger und Em.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Richard Greiner, dass ich meine Dissertation am Institut für Stahlbau fertigstellen durfte.

Mein letzter und größter Dank gilt meinen Eltern; ohne Ihre Unterstützung wäre diese Arbeit niemals möglich gewesen.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein verallgemeinerter Modellrahmen entwickelt, um das plastische Versagen mit anschließendem Bruch und den sich dabei ergebenden Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang von strukturierten Materialien zu beschreiben. Festkörper sind von Natur aus strukturiert aufgebaut. Die geometrische Anordnung und Materialkomposition wird als Mikrostruktur bezeichnet.

Eine äquivalente Mikrostruktur erfasst den Aufbau der realen Mikrostruktur durch eine vereinfachte geometrische Anordnung der mikrostrukturellen Komponenten. Als Konsequenz aus einer vereinfacht-festgelegten affinen Kinematik ist die räumliche Anordnung der mikrostrukturellen Komponenten irrelevant; die äquivalente Mikrostruktur reduziert sich auf die Angabe der räumlichen Ausrichtung und den Volumenanteil der mikrostrukturellen Komponenten. Von Einfluss auf das Spannungs-Verzerrungs-Verhalten sind neben diesen geometrischen Eigenschaften die materiellen Eigenschaften der einzelnen mikrostrukturellen Komponenten.

Als Folge ihres materiellen Aufbaus haben die mikrostrukturellen Komponenten eindeutig unterscheidbare plastische Versagensmechanismen mit anschließendem Bruch. Diese werden durch sogenannte Mohr-Typ-Versagensmechanismen beschrieben. Die Anzahl der teilweise auch simultan aktivierbaren Mechanismen ist unlimitiert. Die Formulierung dieses Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodells ist ein Hauptbestandteil dieser Arbeit.

Als weiterer Zusatz lassen sich bei den mikrostrukturellen Komponenten bei der Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs ausgewählte Spannungskomponenten null setzen. Das Materialmodell ist dabei uneingeschränkt dreidimensional. Die Einführung der Spannungsnullbedingungen erweitert das Spektrum der Beschreibung von verschiedensten einfachen äquivalenten Mikrostrukturen.

Die Gleichungen des formulierten Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodells werden mit Standardverfahren der nichtlinearen Programmierung gelöst, die mit Zusatzprozeduren erweitert werden, um globale Konvergenz zu garantieren.

Das vorgestellte verallgemeinerte Modell ist nicht auf ein spezielles Material beschränkt, sondern lässt sich auf verschiedenste strukturierte Materialien wie z.B. faserverstärkte Verbundwerkstoffe, Kristalle, Polykristalle, geschichteten Fels, Holz, etc. anwenden. Anhand elementarer Beispiele werden die Effizienz, Diversität und Wirkungsweise des entwickelten Modellrahmens und die Robustheit der implementierten Algorithmen demonstriert.

Mit dem ausgearbeiteten verallgemeinerten Rahmen zur Modellbildung von strukturierten Materialien wird ein 3D-Materialmodell für Holz formuliert. Hauptbestandteil dieses Modells ist die Unterscheidung von charakteristischen Versagensmechanismen, wie sie sich in Laborversuchen an Holz, aber auch im Alltag, beobachten lassen. Mit diesem Materialmodell wird das Trag- und Versagensverhalten eines biaxial beanspruchten Holzprobekörpers untersucht und das aus dem Rechenmodell prognostizierte Trag- und Versagensverhalten den gemessenen Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Das entwickelte Materialmodell und die durchgeführten Rechnungen eröffnen die Möglichkeit die dokumentierten Versuchsergebnisse im Detail zu untersuchen, zu interpretieren und das Versagensverhalten des Probekörpers - besonders hinsichtlich qualitativer Aspekte - umfassend zu verstehen.

Abstract

In the present work a general framework is developed for characterization of the multitude of potential simultaneous plastic and subsequent fracture failure mechanisms and resulting stress-strain behaviour which may occur in structured solid materials. Solid materials are inherently internally structured, from the point of view of geometrical layout and material composition, i.e. the micro-structure of the material.

One of the cornerstones of the established modeling framework is represented by the so-called "simplified equivalent micro-structure", which relates to the actual physical internal structure of the material. Due to the enforced geometrically affine kinematical behaviour, by simplification, there is no internal micro-kinematics in the material elements taken into account. By consequence, the properties of volume fraction and relative spatial orientation of the triad of material principal axes remain as the only effective micro-structural geometrical properties of each micro-structural component. These geometrical properties are accompanied by sets of micro-structural material properties which are assigned to each micro-structural component.

In general, the experimentally observable internal structure of solid materials is inherently connected with sets of distinct kinematic failure modes attributable to the individual micro-structural components. Another cornerstone of the material modeling framework is therefore represented by systems of independent, so-called Mohr-type, plastic & subsequent fracture failure mechanisms which may occur in arbitrary (or, if necessary, unlimited) number. In this work, the interplay of plastic failure mechanisms, defined by their related failure conditions and failure modes in conjunction with the initial elastic material behaviour is systematically investigated.

Additional zero-stress-component conditions may be effectively imposed upon the micro-structural components, thus enhancing their potential spectra of representation of mechanical behavior, yet leaving their complete three-dimensional material modeling untouched.

The resulting multi-component & multi-mechanism plasticity modeling framework is mathematically formulated and computationally solved using standard techniques of nonlinear programming, which are assisted by robust procedures to assure global convergence.

The developed general framework for solid material modeling does not adhere to specific physical materials but is intended for application to most diverse categories of structured solids of an-organic or organic nature, such as crystals, fiber-reinforced composites, jointed rock mass, wood or other internally structured solid materials. The efficiency and representation quality of the developed model framework and the robustness of the implemented algorithms as well, are demonstrated by sets of characteristic examples.

Finally, the developed model framework serves as starting point for formulating a novel three-dimensional mechanical material model for structural soft wood taking into consideration the characteristic distinct plastic and fracture failure modes and related failure conditions as observed in laboratory testing and everyday experience, as well. Based on this model the mechanical load-deformation behaviour of a spruce wood laboratory configuration under biaxial loading conditions is re-analyzed. The obtained results based on this newly established material model allow for an in-depth interpretation and comprehensive understanding of the observed laboratory test results, in quantitative and in qualitative respect, in particular, which has not been possible before.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Problemdarstellung	1
1.1	Einleitung	2
1.2	Problemdarstellung	3
1.2.1	Material & repräsentatives materielles Element	3
1.2.2	Strukturierte Materialien	3
1.2.3	Mikrostrukturmodell & äquivalente Mikrostruktur	4
1.2.4	Materialverhalten: Elastizität, Plastizität und Bruch	6
1.2.5	Plastischer Mohr-Typ-Versagensmechanismus	7
1.2.6	Bruchbeschreiben mithilfe der Mohr'schen Idee	10
1.2.7	Materialverhalten bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen	10
1.2.8	Rechnerische Umsetzung	12
1.2.9	Zusammenfassung: verallgemeinerte Modellbildung von strukturierten Materialien	12
1.2.10	Praktische Anwendung auf Holz	14
1.2.11	Stand der Forschung	14
2	Ziele und Umfang der Arbeit	15
2.1	Ziele der Arbeit	16
2.1.1	Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell	16
2.1.2	Rechnerische Umsetzung des theoretischen Modells	19
2.1.3	Ausgearbeitete Beispiele	19
2.2	Gliederung, Methodik & Umfang der Arbeit	21
2.2.1	Gliederung der Arbeit	21
2.2.2	Methodik der Arbeit	21
2.2.3	Umfang der Arbeit	22

Teil I

Versagensbedingungen strukturierter Materialien

3	Allgemeines zu Versagensbedingungen	31
3.1	Einleitung und Kapitelaufbau	32
3.1.1	Versagensbedingung	32
3.1.2	Ziele des Kapitels	32
3.1.3	Inhalt von Kapitel 3	33
3.2	Anforderungen an die mathematische Gestalt der Versagensbedingungen	34
3.3	Spannungsraum, elastischer Bereich & elastische Grenzfläche	35
3.3.1	Flächendarstellung der Versagensbedingung	35
3.3.2	Elastische Grenzfläche & elastischer Bereich	35
3.4	Reguläre Kanten und Ecken, Berührungspunkte und Pyramidenpunkte	36
3.4.1	Schnittpunkt	36
3.4.2	Gradienten und lokale Betrachtung des Schnittbereichs	36
3.4.3	Reguläre Ecken, reguläre Kanten und Berührungspunkte	37
3.4.4	„Pyramidenpunkte“	38
3.5	Funktionsinhärente Ecken und Kanten	40
3.5.1	Beseitigung von funktionsinhärenten Ecken und Kanten	40
3.5.2	Beispiel einer Funktion mit funktionsinhärenter Ecke	40
3.6	Symmetrienachweis des erlaubten Bereichs	43

3.6.1	Materialhauptachsensystem & Strukturtenoren	43
3.6.2	Symmetrienachweis	43
3.6.3	Beispiel zum Symmetrienachweis	46
3.7	Zusammenfassung und Ausblick	48
4	Mohr- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen	49
4.1	Einleitung	50
4.1.1	Mohr- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen	50
4.1.2	Stand der Forschung und der Lehre	50
4.1.3	Aufgabenstellung & Zielsetzung	51
4.1.4	Inhalt von Kapitel 4	51
4.2	Mohr-Typ-Versagensbedingungen	52
4.2.1	Mohr'sche Hypothese für isotrope Werkstoffe	52
4.2.2	Verallgemeinerung der Mohr'schen Hypothese	54
4.2.3	Konstruktion der Mohr-Typ-Versagensbedingung	54
4.2.4	Versagensbedingungskatalog	57
4.2.5	Exkurs: Anwendung der Mohr'schen Idee auf unterschiedliche Materialien	60
4.3	Beispiel: Mohr-Typ-Versagensbedingungen bei kristallinen Gleitsystemen	64
4.3.1	Kristalline Gleitsysteme	64
4.3.2	FCC- und BCC-Kristallstruktur	66
4.3.3	Versagensbeginn bei einaxialer Belastung	68
4.4	Mises-Typ-Versagensbedingungen	74
4.4.1	Genealogie der Mises-Typ-Versagensbedingung	74
4.4.2	Mises-Typ-Versagensbedingung: Grundidee	78
4.4.3	Erweiterter Mises-Typ-Versagensbedingungsbegriff	80
4.5	Mohr-Typ- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen - Zusammenfassung & Ausblick	81
4.5.1	Beschreibung von strukturierten Materialien	81
4.5.2	Formale Darstellung & Interaktion der Spannungskomponenten	82
4.5.3	Rechnerische Umsetzung	82
4.5.4	Transversale Isotropie & Isotropie	83
5	Transversal isotrope & isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen	85
5.1	Einleitung und Kapitelaufbau	86
5.1.1	Problemstellung	86
5.1.2	Literatur & Stand der Forschung	87
5.1.3	Aufgabenstellung & Ziele des Abschnitts	87
5.1.4	Inhalt von Kapitel 5	88
5.2	Transversal isotrope Materialstruktur & Versagensebenenorientierungen	90
5.2.1	Orientierungen von Versagensebenen bei transversaler Isotropie	90
5.2.2	Unidirektional faserverstärkter Kunststoffe	90
5.2.3	Laminat mit isotropen Schichteigenschaften	92
5.3	Zwischenfaserversagen bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen	93
5.3.1	Versagensebenenorientierung bei Zwischenfaserversagen	93
5.3.2	Spannungen in der Versagensebenenorientierung	93
5.3.3	Problemformulierung und Aufgabenstellung	99
5.3.4	Lösungsvarianten und Vorgehensweise	100
5.3.5	Druck/Zugversagen quer zur Faserrichtung	103
5.3.6	Schubversagen quer zur Faserrichtung	106
5.3.7	Lineare Normal-Schubspannungsinteraktion quer zur Faserrichtung	109
5.3.8	Parabolische Normal-Schubspannungsinteraktion quer zur Faserrichtung	113
5.3.9	Faserparalleles Schubversagen	120
5.4	Modifikation der Versagensbedingungen	122
5.4.1	Problemanalyse	122
5.4.2	Modifikation der Versagensbedingungen	122

5.4.3	Modifizierung bei nichtlinearer Normal- und Schubspannungsinteraktion	123
5.5	Approximation der symmetrischen Versagensbedingung durch N Funktionen	124
5.5.1	Generelle Vorgehensweise	124
5.5.2	Diskretisierungsbeispiel	124
5.5.3	Diskretisierung bei nichtlinearer Interaktion der Spannungskomponenten	127
5.5.4	Symmetrieeigenschaften von E: exakte Funktion vs. Diskretisierung	127
5.6	Versagen bei geschichtet aufgebauten Materialien	130
5.6.1	Transversale Isotropie der Versagensbedingung in der Schichtebene	130
5.6.2	Versagensbedingungen	131
5.7	Isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen	132
5.7.1	Formulierung isotroper Mohr-Typ-Versagensbedingungen	132
5.7.2	Auflösung mit dem Mohr'schen Kreis	135
5.7.3	Diskretisierung	140
5.7.4	Kontinuierliche Beschreibung von anisotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen	142
5.8	Zusammenfassung	143

Teil II

Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen

6	Multi-Mechanismen-Plastizität	149
6.1	Einleitung, Ziele & Kapitelaufbau	150
6.1.1	Problembeschreibung	150
6.1.2	Literatur & Stand der Forschung	150
6.1.3	Aufgabenstellung und Ziele des Abschnitts	153
6.1.4	Inhalt von Kapitel 6	154
6.2	Grundlagen der klassischen Plastizität	155
6.3	Elastische Grenzfläche, aktive Versagensmechanismen & Konsistenzbedingung	156
6.3.1	Potentiell aktive Versagensmechanismen	156
6.3.2	Aktive Versagensmechanismen und Konsistenzbedingung	156
6.3.3	Illustration im Spannungsraum	157
6.4	Plastischer Versagensmechanismus	160
6.4.1	Versagensmechanismus	160
6.4.2	Plastischer Gesamtverzerrungszuwachs	165
6.5	Be- und Entlastungsbedingungen	166
6.5.1	Situation A: elastischer Belastungsschritt	166
6.5.2	Situation B: elastische Entlastung und neutrale Belastung	166
6.5.3	Situation C: plastischer Belastungsschritt	166
6.5.4	Elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix	169
6.5.5	Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen	169
6.6	Zusammenfassung der Grundgleichungen & Äquivalentes Optimierungsproblem	170
6.6.1	Darstellung der Grundgleichungen durch ein äquivalentes konvexes Optimierungsproblem	171
6.7	Berechnung eines aktiven Sets	178
6.7.1	Aufgabenstellung	178
6.7.2	Lösung mit der Active-Set-Methode	178
6.8	Lösung in Pyramidenpunkten	182
6.8.1	Problemformulierung	182
6.8.2	Definitheit von $A = GTCG$	182
6.8.3	Graphische Darstellung von Pyramidenpunkten	183
6.8.4	Bestmögliche Anpassung von Ax an b - die Moore-Penrose-Pseudoinverse	185
6.9	Offene Punkte	189
6.9.1	Erweiterung 1: Verfestigung	189

6.9.2	Erweiterung 2: nicht-assoziierte Versagensmechanismen	189
6.9.3	Starr-plastische Traglastanalysen	189
7	Multi-Mechanismen-Plastizität mit zusätzlichen Spannungsnullbedingungen	191
7.1	Einleitung und Kapitelaufbau	192
7.1.1	Problemstellung	192
7.1.2	Literatur & Stand der Forschung	193
7.1.3	Aufgabenstellungen & Ziel des Abschnitts	195
7.1.4	Inhalt von Kapitel 7	196
7.2	Allgemeines & Vorgehensweise	197
7.2.1	Verzerrungs-, spannungsgesteuerte oder gemischt-gesteuerte Berechnung	197
7.2.2	„Reduziertes“ Materialmodell	197
7.2.3	Vorgehensweise	198
7.3	Aktive und passive Verzerrungs- und Spannungskomponenten	200
7.3.1	Filtermatrizen P_a und P_b	200
7.3.2	Ausgewählte reduzierte Spannungszustände	201
7.4	Reduktion des linear-elastischen 3D-Materialgesetzes	205
7.4.1	Umsortierung der linear-elastischen Materialmatrix	205
7.4.2	Reduzierte Materialsteifigkeits- und Kopplungsmatrix	206
7.5	Reduktion der elasto-plastischen Materialgleichungen	207
7.5.1	Ausgangssituation und elastisches Materialgesetz	207
7.5.2	Reduktion der Versagensbedingungen	208
7.5.3	Plastischer Versagensmechanismus	209
7.5.4	Plastischer Belastungsschritt	210
7.5.5	Zusammenfassung der Grundgleichungen	211
7.6	Minimalabstandsaufgabe im Spannungssubraum	213
7.7	Beispiel: Reduktion der Prandl-Reuss Gleichungen	215
7.7.1	Allgemein: Reduktion der Mises-Typ-Versagensbedingung	215
7.7.2	Isotrope Mises-Versagensbedingung & isotrope elastische Materialmatrix	215
7.8	Beispiel: Fachwerkstab mit zwei Schubmechanismen	218
7.8.1	Vorgehensweise	218
7.8.2	Systemgeometrie	219
7.8.3	3D-Materialmodell	219
7.8.4	Konsistente Reduktion des elastischen Materialmodells	220
7.8.5	Reduktion der elasto-plastischen Materialgleichungen	220
7.8.6	Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs	223
7.8.7	Mehrdeutigkeit der Lösung	225
7.9	Zusammenfassung und Ausblick	226

Teil III

Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität

8	Lösung der Multi-Mechanismen-Plastizitätsgleichungen	231
8.1	Einleitung	232
8.1.1	Problemstellung	232
8.1.2	Literatur & Stand der Forschung	232
8.1.3	Aufgabenstellungen & Ziel des Abschnitts	234
8.1.4	Inhalt von Kapitel 8	235
8.2	Diskretisierung des Verzerrungsverlaufs	236
8.2.1	Finites Verzerrungsinkrement	236

8.2.2	Aufgabenstellung	236
8.3	Be- und Entlastungsbedingung	237
8.3.1	Situation A: elastisches Deformationsinkrement	237
8.3.2	Situation B: plastisches Deformationsinkrement	237
8.3.3	Weitere Anmerkungen zur Be- und Entlastung	237
8.4	Integration der Grundgleichungen der Plastizität	240
8.4.1	Aufgabenstellung	240
8.4.2	Exakte Integration	240
8.4.3	Numerisch-approximative Integrationsverfahren	243
8.4	Integration der Grundgleichungen der Plastizität	240
8.4.1	Aufgabenstellung	240
8.4.2	Exakte Integration	240
8.4.3	Numerisch-approximative Integrationsverfahren	243
8.5	Formulierung der Aufgabenstellung als äquivalentes Optimierungsproblem	250
8.6	Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix	251
8.6.1	Gleichgewichtsgleichungen des RME	251
8.6.2	Berechnung der algorithmischen Steifigkeitsmatrix	252
8.7	Euler-Rückwärts-Verfahren bei zusätzlichen Spannungsnullbedingungen	255
8.7.1	Ausgangssituation und Aufgabenstellung	255
8.7.2	Konsistente Reduktion der Gleichungen	256
8.7.3	Alternative Berechnungsprozedur	258
8.8	Aufbau und Ablauf der Materialroutine	259
8.8.1	Eingangsgrößen	259
8.8.2	Berechnungsablauf der Materialroutine	259
9	Lösungsmethoden nichtlinearer Optimierungsaufgaben	263
9.1	Einleitung	264
9.1.1	Problembeschreibung	264
9.1.2	Inhalt von Kapitel 9	264
9.2	Aufgabenstellung - konvexe Optimierungsaufgabe	265
9.2.1	Mechanische Eingangsgrößen und geometrische Größen	265
9.2.2	Zielfunktion d	266
9.2.3	Zwangsbedingungen & konvexe Menge E	267
9.2.4	Minimalabstandsberechnung - eine konvexe Optimierungsaufgabe	267
9.3	QP: Quadratische Programmierung	271
9.3.1	Aufgabenformulierung	271
9.3.2	Active-Set-Methode	273
9.3.3	Berechnungsablauf der Active-Set-Methode	278
9.4	SQP: Sequentielle quadratische Programmierung	283
9.4.1	QP-Aufgabenstellung	283
9.4.2	Penalty- bzw. Merit-Funktion	284
9.4.3	Berechnungsablauf	287
9.5	Anwendungen auf Aufgabenstellungen der Plastizitätsgleichungen und offene Punkte	289
9.6	Beispiel: Tragverhalten eines schubbeanspruchten RME	290
9.6.1	Materialbeschreibung	290
9.6.2	Tragspannungsberechnung	290
9.7	Beispiel: Tragspannungsberechnung von Kristallen	297
9.7.1	Elastisches Materialverhalten der Kristalle	297
9.7.2	Plastisches Materialverhalten der Kristalle	299
9.7.3	Plastische Tragspannungen & Spannungs-Verzerrungs-Verhalten	302
9.7.4	Konsistenter Übergang von elasto-plastischer zu starr-plastischer Traglastberechnung	309
9.7.5	Gegenvergleich mit Berechnungen aus der Literatur	314

Teil IV

Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell

10	Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell	323
10.1	Einleitung	324
10.1.1	Ziele des Abschnitts	324
10.1.2	Inhalt von Kapitel 10	325
10.2	Systembeschreibung & Modellannahmen	326
10.2.1	Systembeschreibung & Bezeichnungen	326
10.2.2	Mikroelement mit Spannungsnullbedingung	328
10.2.3	Kinematischer Zusammenhang	328
10.3	Konstitutive Relationen eines Mikroelements	330
10.3.1	Elastisches Materialverhalten	330
10.3.2	Mikroskopische Versagensbedingungen	330
10.3.3	Dissipation	330
10.4	Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen	331
10.4.1	Makroskopische Spannungen	331
10.4.2	Äquivalente konstitutive Relationen des Makroelements	331
10.4.3	Makroskopische Versagensbedingungen & Versagensbeginn des Makroelements	333
10.5	Das Einkornaggregat - eine spezielle Mikrostruktur	336
10.5.1	Systembeschreibung & spezielle Modellannahmen	336
10.5.2	Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen	337
10.5.3	Numerische Integration - Diskretisierung	337
10.6	Berechnung des makroskopischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs	342
11	Beispiele: Mikrostrukturmodell	345
11.1	Einleitung und Kapitelaufbau	346
11.1.1	Inhalt von Kapitel 11	346
11.2	Elastische Materialsteifigkeitsmatrix eines Einkornaggregats	347
11.2.1	Allgemeine Vorgehensweise	347
11.2.2	Beispiel 1	348
11.2.3	Beispiel 2	350
11.3	Aus kreuzweise angeordneten Scheibenelementen aufgebautes Makroelement	351
11.3.1	Systembeschreibung	351
11.3.2	Elastische Element- und Systemsteifigkeit	351
11.4	„Faserbüschel“ Modell	354
11.4.1	Grundmodell I	354
11.4.2	Erweiterung des Grundmodells I: Einbettung der Fasern in ein isotropes Grundmaterial	357
11.4.3	Grundmodell II: Inklusion der Schubsteifigkeit	357
11.4.4	Einbettung der Fasern aus Grundmodell II in eine isotrope Matrix	360
11.5	Schubtragspannung einer einfachen Mikrostruktur	361
11.5.1	Systembeschreibung	361
11.5.2	Spannungs-Verzerrungs-Diagramm bei eingprägter Schubverzerrung	362
11.5.3	Versagensbeginn & graphische Darstellung	365
11.5.4	Berechnung der makroskopischen Schubtragspannungen	365
11.6	Tragspannungsberechnung eines Polykristalls	368
11.6.1	Systembeschreibung	368
11.6.2	Tragspannungen & Spannungs-Verzerrungs-Diagramm	370
11.6.3	Berechnung des Tragspannungszustandes	374
11.6.4	Zusammenfassung	375
11.7	Microplane Modell - Darstellung, kritische Untersuchung und Vergleich	378
11.7.1	Einleitung & Kapitelübersicht	378

11.7.2	Microplane Modell: Modellvorstellung & Begriffsbildung	379
11.7.3	Kinematische Festlegung	381
11.7.4	Materialbeschreibung & Zusatzannahmen	382
11.7.5	Berechnung der makroskopischen Spannungen	383
11.7.6	Microplane Modell M1 mit N-Split	392
11.7.7	Microplane Modell M10 mit N-T-Split	394
11.7.8	Weitere Microplane Modelle	396
11.7.9	Zusammenfassung: Microplane Modell vs. generelles Mikrostrukturmodell	398
11.8	Stabbündelmodell	400
11.8.1	Allgemeiner Systemaufbau	400
11.8.2	Elementares 3-Stabsystem	400
11.8.3	Monoton ansteigende, verzerrungsgesteuerte Belastung	402
11.8.4	Entlastung & Eigenspannungszustand	405
11.8.5	Verzerrungsgesteuerter Belastungszyklus	406
11.8.6	Systemvariante	409
11.8.7	Verallgemeinerung	411
11.9	Einordnung verschiedener mikromechanischer Modelle in das entwickelte Konzept	412

Teil V

Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern

12	Materialmodell für Holz	419
12.1	Einleitung und Kapitelaufbau	420
12.1.1	Problembeschreibung	420
12.1.2	Literatur & Stand der Forschung	421
12.1.3	Aufgabenstellung & Ziele des Kapitels	425
12.1.4	Inhalt von Kapitel 12	426
12.2	Elastisches Materialverhalten von Holz	427
12.2.1	Linear-elastisches Materialverhalten	427
12.2.2	Elastische Materialkennwerte von Kleinholzproben	428
12.3	Versagensmodell für fehlerfreies Holz	430
12.3.1	Versuchsbeobachtungen von Holzversagen	430
12.3.2	Versagensmodell	434
12.4	Einaxialer Zug eines Holzstabes schräg zu den Materialhauptrichtungen	437
12.4.1	Systembeschreibung & Aufgabenstellung	437
12.4.2	Elastisches Verhalten	439
12.4.3	Einaxiale Versagensspannungen	441
12.5	Elastischer Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und Versagen einer Holzscheibe	444
12.5.1	Systembeschreibung & Aufgabenstellung	444
12.5.2	Steifigkeitsmatrizen und begleitende Verzerrungen	446
12.5.3	Versagen bei biaxialer Beanspruchung	451
12.6	Praktische Vorgehensweise bei einer Versagensmodellformulierung von Vollholz	455
12.6.1	Strukturmodell A	455
12.6.2	Strukturmodell B	457
12.6.3	Strukturmodell C	458
12.7	Zusammenfassung & Ausblick	460
13	Versuchsdurchführung & Aufgabenstellung	461
13.1	Einleitung, Aufgabenstellung & Kapitelaufbau	462

13.1.1 Inhalt von Kapitel 13	462
13.2 Versuchsvorrichtung & Probekörpergeometrie	463
13.2.1 Versuchsvorrichtung	463
13.2.2 Probekörper: Geometrie und Herstellung	463
13.3 Versuchsdurchführung	467
13.3.1 Angestrebte Belastungssituation des Probekörpers	467
13.3.2 Verformungskontrollierte Versuchsdurchführung	469
13.4 Gemessene Daten und Aufbereitung der Versuchsergebnisse	471
13.4.1 Gemessene Rohdaten	471
13.4.2 Aufbereitung der Messdaten	471
13.5 Dokumentation und Darstellung der Versuchsergebnisse	473
13.5.1 Darstellung der Bruchpunkte im Hauptspannungsraum	473
13.5.2 Spannungs-Dehnungsdiagramme	473
13.6 Aufgabenstellung & Vorgehensweise	475
14 Untersuchung des elastischen Tragverhaltens des Probekörpers	477
14.1 Einleitung und Kapitelaufbau	478
14.1.1 Inhalt von Kapitel 14	478
14.2 Allgemeine Modellbildung: Bezeichnungen, Vereinfachungen & Aufgabenstellung	479
14.2.1 Randverformungsgrößen	479
14.2.2 Randbelastung	481
14.2.3 Modell der Probekörpergeometrie	481
14.2.4 Linear-elastische Materialkenngrößen	483
14.2.5 Aufgabenstellung	483
14.3 Mittelscheibenelement	484
14.3.1 Kinematik und Elementfreiheitsgrade	484
14.3.2 Steifigkeit & Spannungen	486
14.4 Lasteinleitungselement	488
14.4.1 Modell I des Lasteinleitungsbereichs	488
14.4.2 Elementsteifigkeitsmatrix	490
14.4.3 Modellvariante des Lasteinleitungsbereichs - Modell II	493
14.4.4 Lastfall 1: Spreizung des Lasteinleitungselements	493
14.4.5 Lastfall 2: Normalkraftbeanspruchung der Lasteinleitungselemente	496
14.5 Systemzusammenbau - Konnektivität	497
14.5.1 Anbindung der Lasteinleitungselemente an das Mittelscheibenelement	497
14.5.2 Zusammenhang Randverformungen und Elementfreiheitsgrade	497
14.6 Zusammenwirken von Mittelscheibe und Lasteinleitungselementen	498
14.6.1 Einaxiale Streckung der Mittelscheibe	498
14.6.2 Schnittkräfte & Steifigkeitsbeziehungen	500
14.6.3 Übertragungsmatrizen	501
14.6.4 Auswirkung der Lasteinleitungselemente - Vergleich von Modell I und II	502
14.7 Vergleich mit den Versuchsergebnissen	505
14.7.1 Vorgehensweise	505
14.7.2 Berücksichtigung der Streuung der elastischen Materialkennwerte	505
14.7.3 Vergleich der Versuchsdaten mit den linear-elastischen Rechenergebnissen	506
14.8 Zusammenfassung & Resümee	513
14.8.1 Elastisches Tragverhalten des Probekörpers	513
14.8.2 Entwickelte Rechenmodelle	513
14.8.3 Vergleich der Modellrechnungen mit den Messdaten	514
14.8.4 Kritik & offene Fragen	514
15 Traglastuntersuchung und Versagensverhalten des Probekörpers	517
15.1 Einleitung und Kapitelaufbau	518
15.1.1 Schritt 1: Versagensbeginn des Probekörpers	518

15.1.2	Schritt 2: Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten des Probekörpers	519
15.1.3	Inhalt von Kapitel 15	519
15.2	Versagensbeginn des Probekörpers	520
15.2.1	Versagensbeginn des Mittelscheibenelements	520
15.2.2	Vereinfachte Berechnung des Versagensbeginns der Lasteinleitungselemente	522
15.2.3	Graphische Darstellung des elastischen Limits des Probekörpers	523
15.3	Einschub: Nichtlineares Rechenmodell	536
15.3.1	Systemannahmen und Vereinfachungen	536
15.3.2	Mittelscheibenelement: Innerer Kräftevektor & Steifigkeitsmatrix	537
15.3.3	Lasteinleitungselement: Innerer Kräftevektor & Steifigkeitsmatrix	538
15.3.4	Systemfreiheitsgrade & Systemassemblierung	538
15.3.5	Gleichgewichtsgleichungen	540
15.3.6	Verschiebungsgesteuerter biaxialer Lastfall	540
15.3.7	Systemgleichungen	541
15.3.8	Inklusion des Vorspannzustandes	542
15.4	Versagensszenarien des Probekörpers	544
15.4.1	Einteilung der Versagensszenarien	544
15.4.2	Versagensszenarium (I)	547
15.4.3	Versagensszenarium (III)	551
15.4.4	Versagensszenarium (IVb)	553
15.5	Zusammenfassung, Resümee & offene Punkte	560
15.5.1	Resümee	560
15.5.2	Anmerkungen zur Versuchsdurchführung und der Messdatenauswertung	561
15.5.3	Kritische Anmerkungen zum verwendeten Rechenmodell	562
15.5.4	Offene Fragen	563
16	Zusammenfassung und Ausblick	565
16.1	Zusammenfassung	566
16.1.1	Teil I - Versagensbedingungen strukturierter Materialien	567
16.1.2	Teil II - Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen	568
16.1.3	Teil III - Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität	569
16.1.4	Teil IV - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell	570
16.1.5	Teil V - Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern	571
16.2	Offene Punkte & Ausblick	573
16.2.1	Erweiterung des Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodells	573
16.2.2	Starr-plastische Traglastanalyse	574
16.2.3	Rechenprozeduren	574
16.2.4	Modell zur Beschreibung des Verhaltens eines RME bei Bruch	574

Anhang

A	Tensoralgebra und Tensoranalysis	589
B	Kartesische Tensoren und Matrixschreibweise	597
C	Invarianten, isotrope und anisotrope Tensorfunktionen	615
D	Linear-elastisches Materialverhalten	627
E	Mises-Typ-Versagensbedingungen	627
F	Modifizierte isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen	637
G	Moore-Penrose-Pseudoinverse	651
H	Ebener Stab mit schrägem Materialfaserverlauf	657

I	Eine nützliche Matrixidentität	669
J	Nichtlineare Programmierung - Penalty-Verfahren	675
	LITERATUR	689

Notation

Allgemein

a	Spaltenmatrix
A	Matrix
<i>a</i>	skalare Größe
a	Vektoren (Tensoren 1. Stufe)
A	Tensoren 2. Stufe
\mathbb{A}	Tensoren 4. Stufe
\mathcal{A}	Menge
\mathbb{A}	Koordinatenraum

Koordinatensysteme

globales Koordinatensystem:

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	orthonormierte Basisvektoren
x_1, x_2, x_3	globale Koordinaten

Materialhauptachsensystem:

$\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$	orthonormierte Basisvektoren
$x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}$	Koordinaten im Materialhauptachsensystem

lokale Koordinatensysteme:

$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{t}$	orthonormierte Basisvektoren
x_l, x_m, x_n bzw. x_l, x_n, x_t	lokale Koordinaten

Voigt'sche Matrixschreibweise

Mit der Voigt'schen Schreibweise lassen sich symmetrische Tensoren 2. und 4. Stufe und Operationen zwischen diesen Größen kompakt anschreiben. Die Einträge in den Matrizen transformieren sich entsprechend den tensoriellen Eigenschaften. Die Spaltenmatrizen der Spannungen und Verzerrungen werden teilweise als Spannungs- und Verzerrungsvektor bezeichnet. Der systematische Übergang von Tensoren 2. und 4. Stufe auf die Voigt'sche Matrixdarstellung ist ausführlich in Anhang B dargestellt. Die Darstellung ist immer auf ein spezielles (kartesisches) Koordinatensystem bezogen.

Globales Koordinatensystem:

$\mathbf{s} = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T$	Spannungsvektor
$\mathbf{e} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]^T$	Verzerrungsvektor
C	elastische Materialsteifigkeitsmatrix

$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$	elastische Materialnachgiebigkeitsmatrix
$\mathbf{s}_a = \mathbf{P}_a \mathbf{s}$	aktive Spannungskomponenten
$\mathbf{s}_b = \mathbf{P}_b \mathbf{s} = \mathbf{0}$	Nullspannungskomponenten
$\mathbf{e}_a = \mathbf{P}_a \mathbf{e}$	aktive Verzerrungskomponenten
$\mathbf{e}_b = \mathbf{P}_b \mathbf{e}$	begleitende (passive) Verzerrungskomponenten
\mathbf{C}_a	reduzierte elastische Materialsteifigkeitsmatrix
\mathbf{H}_{ba}	Kopplungsmatrix

Materialhauptachsensystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &= [S_{1'1'}, S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{1'2'}, S_{1'3'}, S_{2'3'}]^T = \mathbf{T} \mathbf{s} \\ \mathbf{e}' &= [E_{1'1'}, E_{2'2'}, E_{3'3'}, \gamma_{1'2'}, \gamma_{1'3'}, \gamma_{2'3'}]^T = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{e} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{T} \mathbf{C} \mathbf{T}^T \end{aligned}$$

Spezielle Matrizen

\mathbf{p}_{ij}	Projektionsmatrix
\mathbf{J}	Einheitsmatrix
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{P}_a	Filtermatrix, aktive Komponenten
\mathbf{P}_b	Filtermatrix, passive Komponenten

Versagensbedingungen, erlaubter Bereich & elastische Grenzfläche

$F_i = F_i(\mathbf{s}) = 0$	Versagensbedingung i von N Versagensbedingungen
$\mathbf{f} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$	Spaltenmatrix mit allen Funktionen F_i
$\mathbf{f}_{\mathcal{M}} = [F_i]_{i \in \mathcal{M}}^T$	Matrixzeilen: Versagensbedingungen der Indexmenge \mathcal{M}

$\mathbf{g}_i = \partial F_i / \partial \mathbf{s}$	Gradient von F_i
$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N]$	Matrix mit allen Gradienten
$\mathbf{G}_{\mathcal{M}} = [\mathbf{g}_i]_{i \in \mathcal{M}}$	Matrixspalten: Gradienten der Indexmenge \mathcal{M}

$F' = F'(\mathbf{s}')$	Versagensbedingung in den \mathbf{s}' -Komponenten
$F'' = F''(S_{nn}, S_{ln}, S_{mn})$ bzw.	
$F'' = F''(S_{nn}, S_m, S_{ln})$	lokale Mohr-Typ-Versagensbedingung in der Versagensebenenorientierung \mathbf{n}

\mathbb{E}	erlaubter Bereich der Spannungen
$\partial \mathbb{E}$	elastische Grenzfläche

\mathcal{A}_0	Indexmenge der potentiell aktiven Versagensmechanismen
\mathcal{A}	Indexmenge der aktiven Versagensmechanismen
\mathcal{W}	Indexmenge „working Set“

Konstitutive Beziehungen, Plastizität

$d\lambda^i$	plastischer Multiplikator des Mechanismus i
$d\boldsymbol{\lambda} = [d\lambda^1, d\lambda^2, \dots, d\lambda^N]^T$	Spaltenmatrix mit allen plastischen Multiplikatoren
$d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{M}} = [d\lambda^i]_{i \in \mathcal{M}}^T$	Matrixzeilen: plast. Multiplikatoren der Indexmenge \mathcal{M}
Ψ_{el}	elastische Verzerrungsenergiedichte
dW_{pl}	plastische Arbeit
dD	Dissipation

Operatoren

$(\bullet)^{-1}$	Inverse
$(\bullet)^+$	Moore-Penrose-Pseudoinverse
$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\bullet) dV$	Mittelungsoperator

Differential, virtuelle Größe, finites Inkrement

$d(\bullet)$	Differential
$\delta(\bullet)$	virtuelle Größe
$\Delta(\bullet)$	(finites) Inkrement

Mengenlehre

$\mathcal{M} = \{a \mid T(a)\}$ Menge \mathcal{M} der Elemente a , die die Bedingung $T(a)$ erfüllen

Indizes

$(\bullet)_{el}$	elastisch
$(\bullet)_{pl}$	plastisch
$(\bullet)_{ep}$	elasto-plastisch
$(\bullet)_a$	aktiv
$(\bullet)_b$	passiv bzw. begleitend
$(\bullet)_{iso}$	isotrop
$(\bullet)_{tra}$	transversal isotrop
$(\bullet)_{ort}$	orthotrop
$(\bullet)_{dev}$	deviatorisch
$(\bullet)_{vol}$	volumetrisch
$(\bullet)_{sym}$	symmetrisch
$(\bullet)_{asy}$	antimetrisch

$(\bullet)_n$	zum Zeitpunkt t_n
$(\bullet)_{n+1}$	zum Zeitpunkt t_{n+1}
$(\bullet)^{(k)}$	beim Berechnungssinkrement k
$(\bullet)^{(k+1)}$	beim Berechnungssinkrement $k+1$
$(\bullet)^{TR}$	Trial
$(\bullet)_{(p,q)}$	p -zeilige, q -spaltige Matrix
$(\bullet)_k$	des Mikroelements k

Kürzel

ALPM	Augmented Lagrange Penalty Methode
PM	Penalty Methode
QP	Quadratische Programmierung
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
RTOL	Berechnungstoleranz
BSZ	Balkenspannungszustand
BiSZ	biaxialer Spannungszustand
ESZ	Ebener Spannungszustand
FSZ	Fachwerkspannungszustand bzw. einaxialer Spannungszustand
BCC	Body Centered Cubic, kubisch raumzentriert (Kristallgitter)
FCC	Face Centered Cubic, kubisch flächenzentriert (Kristallgitter)
HW	Haigh-Westergaard (Koordinaten)
KKT	Karush-Kuhn-Tucker (Bedingungen)
ODF	Orientation Distribution Function
RME	Repräsentatives Materielles Element
ULS	Ultimate Limit State

Spezielle Vektoren und Tensoren

\mathbf{n}		Einheitsnormalenvektor bzw. Versagensebenenorientierung
\mathbf{S}	$= S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = S_{i'j'} \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}$	Spannungstensor
\mathbf{S}_n	$= \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$	Spannungsvektor in der Versagensebenenorientierung \mathbf{n}
\mathbf{E}	$= E_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = E_{i'j'} \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}$	Verzerrungstensor
\mathbf{Q}		orthogonaler Tensor
\mathbf{R}		Rotationstensor
\mathbf{J}		Einheitstensor 2. Stufe
$\mathbf{P}_{i'j'}$	$= \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}$	Strukturtensor
$\mathbb{P}_{dev}, \mathbb{P}_{vol}, \mathbb{P}_{sym}, \mathbb{P}_{asy}$		Projektionstensoren

Mikroskopische & makroskopische Größen

Mikroskopische Größen - Kleinbuchstaben:

$$\mathbf{s} = [s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{13}, s_{23}]^T \quad \text{mikroskopische Spannungen}$$

$$\mathbf{e} = [e_{11}, e_{22}, e_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]^T \quad \text{mikroskopische Verzerrungen}$$

$$\mathbf{s}_{re} \quad \text{Residual- bzw. Eigenspannungen}$$

$$\mathbf{c} \quad \text{elastische Materialsteifigkeitsmatrix}$$

$$f_i = f_i(\mathbf{s}) \quad \text{Versagensbedingung } i \text{ von } n$$

$$\Psi_{el} \quad \text{elastische Verzerrungsenergiedichte des Mikroelements}$$

$$dw_{pl} \quad \text{plastische Arbeit am Mikroelement}$$

$$dD \quad \text{Dissipation des Mikroelements}$$

Makroskopische Größen - Großbuchstaben:

$$\mathbf{S} = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T \quad \text{makroskopische Spannungen}$$

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}]^T \quad \text{makroskopische Verzerrungen}$$

$$\mathbf{C} \quad \text{elastische Materialsteifigkeitsmatrix}$$

$$\Psi \quad \text{elastische Verzerrungsenergiedichte des Makroelements}$$

$$\Psi_{el} \quad \text{Anteil der elastischen Verzerrungsenergiedichte des Makroelements, der bei Entlastung } \mathbf{S} = \mathbf{0} \text{ als Arbeit wiedergewinnbar ist; es gilt } \mathbf{S} = \partial\Psi_{el}/\partial\mathbf{E}$$

$$\Psi_{re} \quad \text{„eingefrorene“ elastische Verzerrungsenergiedichte}$$

$$dW_{pl} \quad \text{plastische Arbeit am Makroelement}$$

$$dD_{makro} \quad \text{Dissipation des Makroelements}$$

1

Einleitung und Problem- darstellung

1.1 Einleitung

Die Untersuchung des Last-Verformungs- und Versagensverhaltens von Strukturen unterschiedlichster Art, Größenordnung und chemischer Zusammensetzung ist Aufgabe der Strukturmechanik. Das Anwendungsgebiet solcher Analysen ist unbegrenzt und beschäftigt sich mit

- biologischen Geweben, wie Muskeln oder Haut,
- Felsformationen und Gebirgsmassen,
- Flugzeugbauteilen aus Faserverbundwerkstoffen,
- Brücken aus Holz, Stahl oder Beton unterschiedlichster Bauform,
- Mauerwerk und Kreuzgewölben von gotischen Kathedralen,
- neuartigen Keramiken und Polymeren, etc.

Um eine systematische Strukturanalyse durchzuführen, muss zuerst das gestellte Problem in ein adäquates mechanisches Modell übergeführt werden. Dieses setzt sich aus zwei Hauptbestandteilen zusammen:

- dem Strukturmodell und
- dem Materialmodell.

Mit dem Strukturmodell werden die geometrische Form und die mögliche bzw. problemrelevante Verformungsgeometrie der untersuchten Struktur beschrieben. Das Materialmodell beschreibt die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung und Versagensverhalten der vorhandenen oder eingesetzten Materialien.

Einige der zum Einsatz kommenden Werk- und Baustoffe haben einen strukturierten Aufbau. Zu diesen Materialien zählen z.B. Kristalle, Holz, geschichteter Fels, Faserverbundwerkstoffe, Muskelgewebe oder spezielle Textilien.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen

- die Entwicklung eines vielseitig einsetzbaren theoretischen Modells zur Beschreibung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs und des plastischen Versagensverhaltens von strukturierten Materialien,
 - dessen rechnerische Umsetzung und
 - die praktische Anwendung auf Holz.
-

1.2 Problemdarstellung

1.2.1 Material & repräsentatives materielles Element

Ein materielles Element eines Festkörpers mit der charakteristischen Abmessung L besitzt die (für die mechanische Betrachtung wesentlichen) Eigenschaften:

- Volumen,
- Masse,
- und einen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang.

Diese drei Eigenschaften lassen sich messen und werden aufgrund des i.A. heterogen aufgebauten materiellen Elements durch gemittelte Größen angegeben.

Die charakteristische Abmessung L wird so gewählt, dass sowohl der materielle Aufbau als auch die im Mittel gemessenen Größen repräsentativ für ein beliebiges materielles Element mit dieser Abmessung sind. In diesem Sinn wird von einem *repräsentativen materiellen Element* (kurz: RME) gesprochen werden. Die charakteristische Abmessung L muss dabei klein genug sein, um das RME in den Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik einem differentiellen Volumenelement dV am Punkt \mathbf{x} zuordnen zu können. Die sich aus den Feldgleichungen ergebenden Gradienten der Spannungs- und Verzerrungsverläufe müssen in der Abmessungslänge L gering sein.

Das grundsätzlich heterogen aufgebaute RME lässt sich in diesem Kontext als ersatzweise-homogen aufgebaut betrachten. Die Spannungen und Verzerrungen des RME im Punkt \mathbf{x} sind konstant.

Die Modellbildung des mechanischen Verhaltens des materiellen Elements ist Inhalt dieser Arbeit.

1.2.2 Strukturierte Materialien

Festkörper sind von Natur aus strukturiert aufgebaut. Durch eine Strukturerkundung lässt sich klären, aus welchen Subbestandteilen das materielle Element aufgebaut ist und wie diese zueinander angeordnet sind. Je nach Zielsetzung und Problemstellung wird der Detailliertheitsgrad dieser Strukturerkundung festgelegt. Die geometrische Anordnung und Materialkomposition wird als *Mikrostruktur* bezeichnet. Diese kann aus einer vollkommen regellosen Anordnung oder aus einem klar geordneten Arrangement von mikrostrukturellen Komponenten bestehen.

Durch Versuche lässt sich das Versagensverhalten zufolge Plastizität mit anschließendem Bruch eines materiellen Elements untersuchen. Bei dieser Erkundung lassen sich ebenso Strukturiertheiten in der mechanischen Materialantwort ausmachen. Oft besteht dabei ein enger Konnex zur Mikrostruktur.

1.2.3 Mikrostrukturmodell & äquivalente Mikrostruktur

Bei Mikrostrukturmodellen handelt es sich um Modelle zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines aus mikrostrukturellen Komponenten aufgebauten materiellen Elements. Die mikrostrukturellen Komponenten werden als *Mikroelemente* bezeichnet; das makroskopisch materielle Element als *Makroelement*.

Die Begriffe „mikroskopisch“ und „makroskopisch“ bezeichnen im hier verwendeten Kontext keine absolute Größenabmessung der jeweils betrachteten und beschriebenen Objekte, sondern dienen dazu, zwischen den Mikroelementen und deren Größen und Eigenschaften („mikroskopisch“) und den äquivalenten Größen des Makroelements („makroskopisch“) zu unterscheiden. Bei der Zuordnung des Makroelements zu einem differentiellen Volumen dV in den Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik bleibt die Relation zwischen den Mikroelementen und dem Makroelement erhalten!

Hauptbestandteile dieser Mikrostrukturmodelle sind:

- die Beschreibung der Mikrostruktur,
- der kinematische Zusammenhang zwischen der Verzerrung des Makroelements und den Verzerrungen der Mikroelemente (mikrostrukturelle Kinematik),
- das Materialverhalten der einzelnen Mikroelemente und
- die Berechnung des äquivalenten makroskopischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs (makroskopisches Materialverhalten).

Die *äquivalente Mikrostruktur* erfasst den Aufbau der realen Mikrostruktur durch eine vereinfachte geometrische Anordnung der Mikroelemente. Bei einem „einfachen“ Mikrostrukturmodell wird eine affine Kinematik festgelegt, d.h. die Mikroelemente sind in einem durch die makroskopischen Verzerrungen vorgegebenen affin verzerrten Gitter eingebettet. Als Konsequenz aus dieser eingprägten Kinematik ist die räumliche Anordnung der Mikroelemente innerhalb des Makroelements irrelevant; die äquivalente Mikrostruktur reduziert sich auf die Beschreibung

- der räumlichen Ausrichtung der einzelnen Mikroelemente und
- den Volumenanteil der einzelnen Mikroelemente am makroskopischen Gesamtvolumen.

Von Einfluss auf das makroskopische Spannungs-Verzerrungs-Verhalten ist zusätzlich das Materialverhalten der einzelnen Mikroelemente.

Die Diversität des Modells steckt also nicht in einer komplexen mikrostrukturellen Kinematik, wie sie z.B. bei den FE²-Modellen umgesetzt wird, sondern im materiellen Verhalten der einzelnen Mikroelemente und deren räumlicher Ausrichtung.

In Bild 1.1 ist zur Illustration ein Makroelement, das sich aus zwei Mikroelementen zusammensetzt, dargestellt. Das Makroelement wird mit \mathbf{E} verzerrt; die Verzerrung der Mikroelemente ist aufgrund der festgelegten vereinfachten Kinematik $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}$.

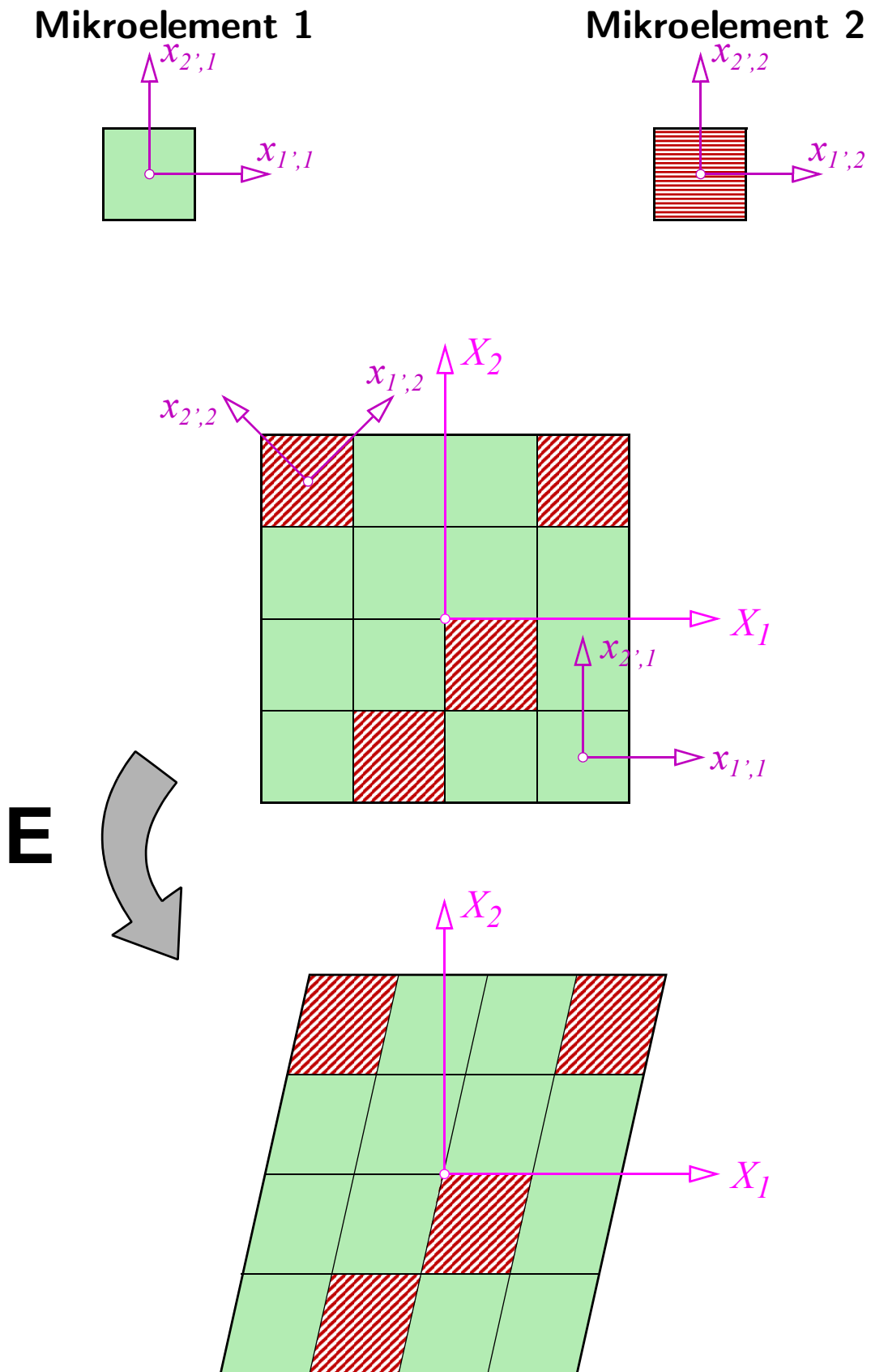


Bild 1.1 Aus zwei Mikroelementen aufgebautes, affin verzerrtes Makroelement (**E** = makroskopische Verzerrung)

1.2.4 Materialverhalten: Elastizität, Plastizität und Bruch

Jedem Mikroelement wird ein Materialverhalten zugewiesen, das aus der Abfolge von elastischem Verhalten, plastischem Versagen und anschließendem Bruch besteht. In dieser Arbeit wird plastisches Verhalten in Kombination mit anschließendem Bruch unter dem Überbegriff *Versagen* zusammengefasst. Versagen tritt also ein, sobald die Grenze des elastischen Materialverhaltens erreicht ist.

1.2.4.1 Elastizität

Im Fall elastischen Materialverhaltens ist die zur Verformung des RME benötigte Arbeit zur Gänze - unabhängig von der vorgegebenen Belastungsgeschichte - wiedergewinnbar. Man hat also perfekte mechanische Energieerhaltung. Die aufgebrauchte Arbeit wird in Form von Verzerrungsenergie im materiellen Element gespeichert.

1.2.4.2 Versagensbedingung

Um das Ende des elastischen Materialverhaltens und den Übergang zu plastischem Materialverhalten anzuzeigen, werden die Funktionen $F(\mathbf{s})$ eingeführt. Ist diese kleiner als null, ist das Material elastisch, sobald ein Beanspruchungszustand erreicht ist, für den $F(\mathbf{s}) = 0$ gilt, ist die Aktivierung des plastischen Versagens möglich. Die Gleichung $F(\mathbf{s}) = 0$ wird als *Versagensbedingung* bezeichnet. Die Versagensbedingung gibt also an, ab wann Versagen eintritt.

1.2.4.3 Plastizität

Bei Plastizität kommt es ab einer bestimmten Belastungsgröße nach Entlastung zu bleibenden Verformungen. Dabei wird von der aufgebrauchten Arbeit ein Teil durch interne Mechanismen in Wärme umgewandelt und damit dissipiert.

Plastisches Materialverhalten zeigt sich vornehmlich bei duktilen (bildsamen) Werkstoffen, wie Stahl oder Ton. Die Verformungen oder die Belastung des Probekörpers kann so erhöht werden, dass nach Entlastung Deformationen im Probekörper zurückbleiben. Man hat den zuvor definierten elastischen Bereich des Materialverhaltens verlassen.

Mit Einschränkungen lässt sich der Begriff „plastisch“ und die zugehörigen Modellgleichungen auch auf andere Werkstoffe, die nicht unbedingt (oder sogar keineswegs) als duktil gelten, übertragen. Wird z.B. Fichtenholz quer zur Faser auf Druck beansprucht, kommt es ab einer bestimmten Belastungshöhe zu einem Versagen der wabenförmigen Zellstruktur; die Zellwände (besonders der größeren Frühholzzellen) verformen sich stark, verbiegen sich und brechen, bis schlussendlich komplette Frühholzzellschichten kollabieren. Wird der Probekörper entlastet, bleiben aufgrund der schichtenweisen Zerstörung der Zellstruktur Verformungen im Probekörper zurück. Zu beachten ist aber, dass eine anschließende Zugbelastung des Probekörpers quer zur Faserrichtung mit geringem Aufwand zum Bruch führt, da die Zellstruktur in einzelnen Schichten bereits durch die Druckbeanspruchung weitestgehend zerstört wurde. Hier besteht ein wesentlicher Unterschied zu plastischen

Werkstoffen, wie z.B. Stahl, das sich auch bei wechselnder Belastung plastisch verformen lässt (obwohl bei zu großen Verzerrungen und mehrfachem Wechsellastizieren kommt es auch bei Stahl zur Versprödung und damit zur Rissbildung). Holz kann bei einmaliger Be- und Entlastung quer zur Faser als sich „plastisch“ verhaltend behandelt oder modelliert werden; aber es ist keineswegs duktil, wie Ton oder Stahl.

Aber auch grundsätzlich spröde Materialien, wie Beton oder Fels, zeigen in triaxialen Beanspruchungssituationen bei allseitigem Seitendruck plastisches bzw. inelastisches Materialverformungsverhalten.

1.2.4.4 Bruch & Bruchversagensbedingung

Bei Bruch kommt es zu einer Zweiteilung des materiellen Elements. Dabei bilden sich zwei neue Oberflächen, die spannungsfrei sind.

Die Bruchversagensbedingung gibt das Ende des plastischen Materialverhaltens an und muss im Gegensatz zu den Versagensbedingungen in Verzerrungen angegeben werden; ; die genaue bzw. eine generelle Gestalt dieser Bedingung wird hier nicht angegeben. Soll kein plastisches Verhalten auftreten, folgt direkt nach dem elastischen Materialverhalten Bruch und die Versagensbedingung F ist zugleich die Bruchversagensbedingung.

1.2.4.5 Elastizität, plastisches Versagen mit anschließendem Bruch

Die drei Materialverhaltensarten treten hintereinander und in der oben aufgelisteten Reihenfolge auf. Für einen unimodalen Mechanismus ist die Abfolge der Verhaltensarten in Bild 1.2 dargestellt. Ein unimodaler Mechanismus ist z.B. eine einaxiale Zugbeanspruchung; von den sechs Spannungskomponenten S_{ij} ist nur eine einzige nicht null. In Bild 1.2 ist diese Spannungskomponente als Funktion der zugehörigen Verzerrungskomponente E_{ij} (oder bei Schub γ_{ij}) aufgetragen. Zu beachten ist, dass die verbleibenden fünf Verzerrungskomponenten i.A. nicht null sind.

Während elastisches und plastisches Verhalten einen größeren Spannungs-Verzerrungs-Bereich einnehmen, ist Bruch ein punktuell Ereignis. Plastisches Materialverhalten wird von der Versagensbedingung und der Bruchbedingung eingegrenzt. Je nach beobachtetem Materialverhalten lässt sich die Größe der einzelnen Bereiche bzw. der Wechsel von einem Verhaltensmuster auf das nachfolgende adjustieren.

1.2.5 Plastischer Mohr-Typ-Versagensmechanismus

1.2.5.1 Plastischer Versagensmechanismus

Ist die Versagensbedingung $F(\mathbf{s}) = 0$ erfüllt, kann ein zugeordneter *plastischer Versagensmechanismus* aktiviert werden. Dieser beschreibt bei dem Grenzspannungszustand \mathbf{s} das Verformungsmuster des plastischen Versagens, ausgedrückt durch die differentiellen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{pl}$. Bei perfekter Plastizität kann sich dieses Verformungsmuster am aktuellen Grenzspannungszustand ohne weitere Spannungserhöhung ausbilden.

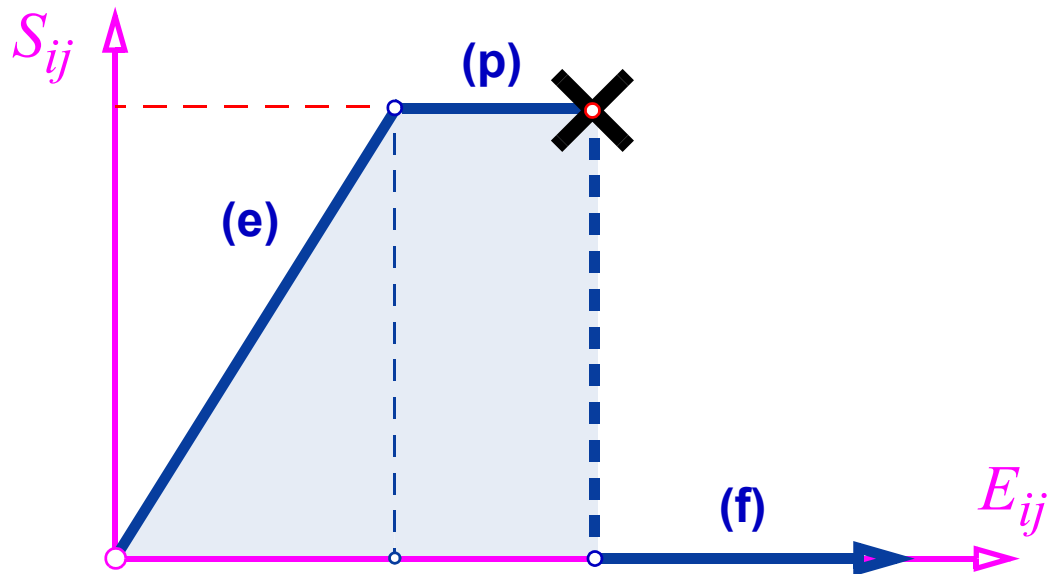


Bild 1.2 Schematische Darstellung der Materialverformungsabfolge eines unimodalen Mechanismus bei monoton anwachsender Verformung; (e)...elastisch, (p)...plastisch, (f)...Bruch

Ein alternativer Begriff zu „plastischer Versagensmechanismus“ ist „plastischer Versagensmodus“ (*plastic failure mode*). Eine Differenzierung zwischen diesen beiden Begriffen wäre zu überlegen, ist aber in dieser Arbeit nicht durchgeführt worden; Versagensmodus wird hier gleichbedeutend mit Versagensmechanismus verwendet.

1.2.5.2 Plastischer Mohr-Typ-Versagensmechanismus

Der Mohr-Typ-Versagensmechanismen beinhalten drei wesentliche Bestandteile:

- eine *Versagensebenenorientierung*, die durch einen Normalenvektor \mathbf{n} angegeben ist
- eine Versagensbedingung $F(\mathbf{s})$, die ausschließlich von den (drei) Spannungskomponenten (eine Normalspannungskomponente und zwei Schubspannungskomponenten) in der Versagensebenenorientierung abhängt.
- einen *assozierten Versagensmechanismus* $d\mathbf{e}_{pl} = \partial F / \partial \mathbf{s}$.

Zu beachten ist, dass plastisches Versagen im RME nicht in einer diskreten Ebene stattfindet. Der Grund liegt in der konstanten Verzerrung $d\mathbf{e}_{pl}$ des RME, womit eine diskontinuierliche Versetzung innerhalb des RME ausgeschlossen ist. Daher wird auch der Begriff der Versagensebenenorientierung eingeführt, weil die Orientierung \mathbf{n} die Normale auf eine Versagensebenenschar, und keine konkrete Ebene innerhalb des RME, angibt. Wird trotzdem von Versagensebene gesprochen, ist damit stets ein „Stapel“ an unendlich vielen Ebenen mit dem Normalenvektor \mathbf{n} gemeint.

Diese Betrachtung ist in Bild 1.3 anhand eines plastischen Mohr-Typ-Schubmechanismus illustriert, der durch die Schubspannungskomponente $S_{1,2}$ in der Versagensebenenorientierung \mathbf{n} bei Erreichen der Limitspannung τ_u aktiviert wird. In der schematischen Darstellung ist eine finite Anzahl von Versagensebenen eingezeichnet. Zwischen allen Ebenen

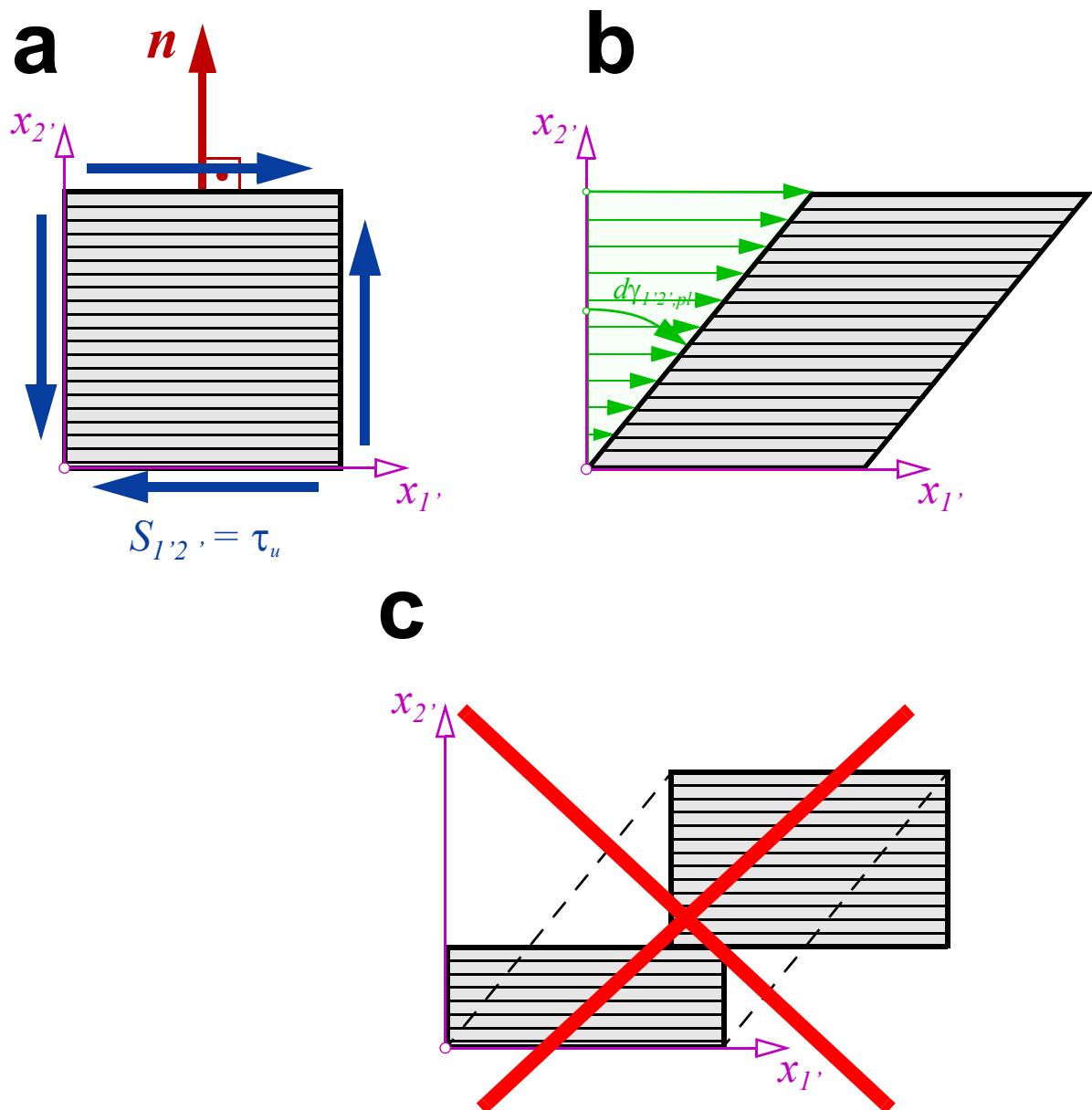


Bild 1.3 Plastischer Mohr-Typ-Schubmechanismus in der Versagensebenenorientierung n ; a) Spannungszustand bei Versagensbeginn; b) plastischer Versagensmechanismus mit konstanter Verzerrung; c) diskontinuierliche Versetzung zwischen zwei Ebenen - aufgrund der konstanten Verzerrung im RME nicht erlaubt

bildet sich dieselbe Relativversetzung aus, die in Summe die plastische Schubverzerrung $d\gamma_{1'2',pl}$ ergibt. Eine diskontinuierliche Versetzung zwischen nur zwei Versagensebenenorientierungen (Bild 1.3 c) ist aufgrund der kontinuierlichen Betrachtung ausgeschlossen.

Der Vorteil dieser Mohr-Typ-Versagensmechanismen ist, dass nicht nur angegeben wird wann (Versagensbedingung) und wie (assoziierter Versagensmechanismus), sondern auch wo (Versagensebenenorientierung) Versagen eintritt. Die Versagensebenenorientierung erlaubt damit die Zuordnung des Versagensmechanismus zu speziellen materiellen Richtungen n , was die Mohr-Typ-Versagensmechanismen zur Beschreibung des Versagens von strukturierten Materialien prädestiniert.

1.2.5.3 Multi-Mechanismen-Plastizität

In strukturierten Materialien lassen sich meist mehrere, klar unterscheidbare und voneinander unabhängige plastische Versagensmechanismen beobachten. Die Anzahl solcher Mechanismen ist i.A. nicht beschränkt. Dabei ist es auch möglich, dass mehrere plastische Versagensmechanismen simultan aktiviert werden können. Das Modell, um ein solches Materialverhalten zu beschreiben werden, wird als *Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell* bezeichnet.

In Bild 1.4 ist z.B. ein RME dargestellt, das zwei Versagensebenenorientierungen \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 hat, die jeweils unter 45° zur x_2 -Achse geneigt sind (zur Illustration sind neben den Orientierungen auch ausgewählte Versagensebenen eingezeichnet). Jeder dieser Ebenenorientierungen ist ein plastischer Schubmechanismus, wie er in Bild 1.3 dargestellt ist, zugeordnet. Das RME wird einaxial in Richtung der x_2 -Achse mit der positiven Normalspannung $S_{2,2}$ beansprucht. Mit der Spannungstransformation lassen sich die Schubspannungskomponenten in den beiden Ebenenorientierungen berechnen. Erreicht die Normalspannung $S_{2,2}$ den Wert $2\tau_u$ wird in beiden Ebenenorientierungen die Schubversagensbedingung erfüllt. Die plastischen Schubversagensmechanismen in den beiden Versagensebenenorientierungen werden bei Aufbringung einer Normalverzerrung $dE_{2,2}$ in x_2 -Richtung aktiviert; die Normalspannung bleibt im Fall perfekter Plastizität gleich. Bilden sich beide Versagensmechanismen vollkommen simultan aus, ergibt sich durch Superposition der beiden Versagensmechanismen die plastische Verzerrung des RME, die in einer axialen Normalverzerrung in x_2 -Richtung mit einer begleitenden negativen Normalverzerrung in x_1 -Richtung („Verjüngung“) besteht.

1.2.6 Bruchbeschreiben mithilfe der Mohr'schen Idee

Die Mohr'sche Idee, d.h. die Zuweisung des Versagensgeschehens einer ausgezeichneten materiellen Orientierung \mathbf{n} , eignet sich auch, um Bruch des RME zu beschreiben. Dabei soll in der Versagensebenenorientierung \mathbf{n} nach anfänglicher Ausbildung eines plastischen Mechanismus Bruch auftreten; die drei Spannungskomponenten in der Orientierung \mathbf{n} fallen dabei schlagartig auf null ab.

Wie im Detail bei Bruch vorzugehen ist und wie solche Situationen berechnet werden können, ist im Ausblick dieser Arbeit (Kap. 16) in Ansätzen skizziert. In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf der Beschreibung der plastischen Versagensmechanismen.

1.2.7 Materialverhalten bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen

Als weiterer Zusatz lassen sich bei einem materiellen Element bei der Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs ausgewählte Spannungskomponenten null setzen. Damit ist z.B. der ebene Spannungszustand oder ein einaxialer Spannungszustand realisierbar. Das Materialverhalten ist dabei uneingeschränkt dreidimensional.

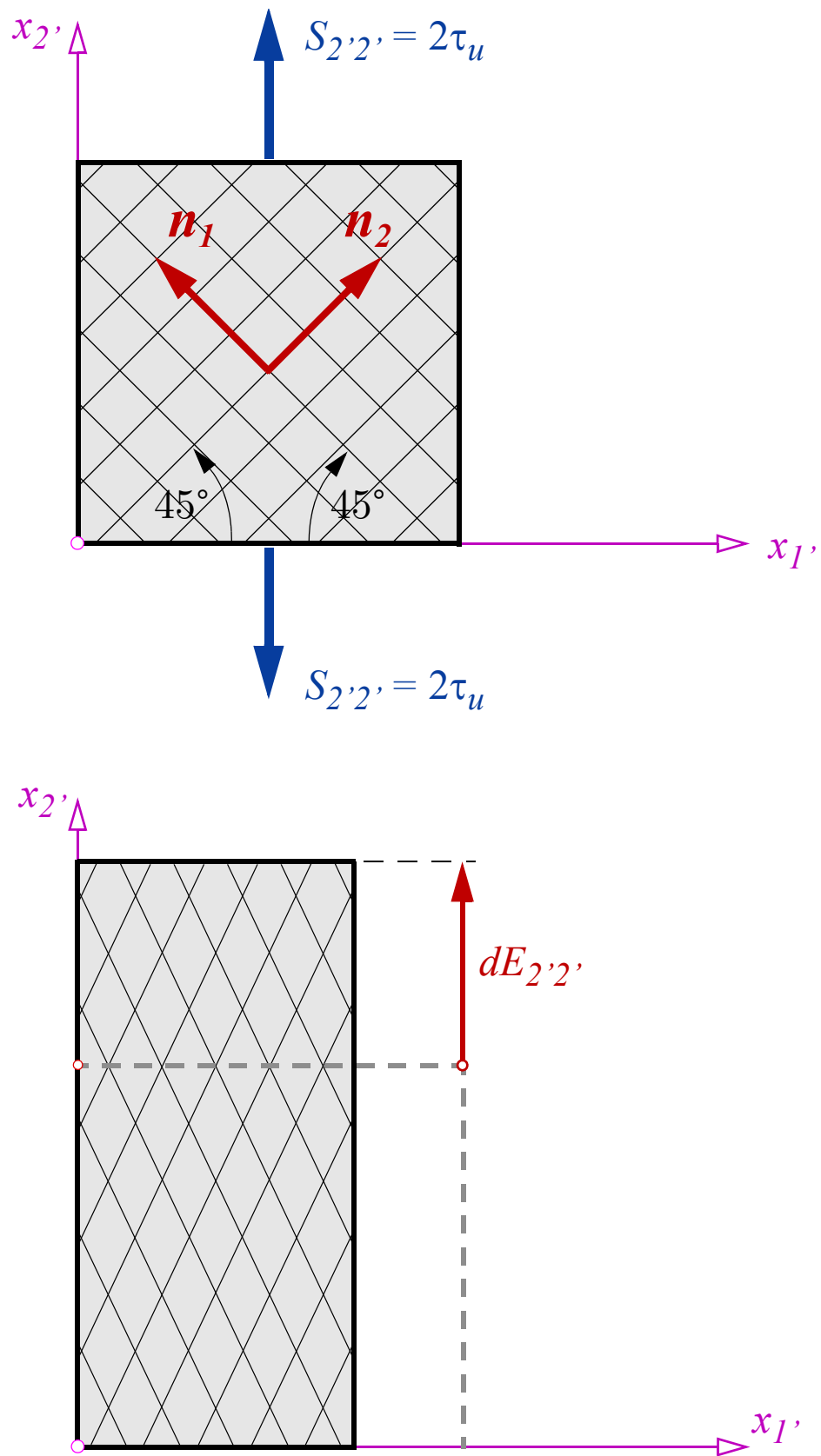


Bild 1.4 Simultane Aktivierung von zwei identen plastischen Schubmechanismen durch eine einaxiale Zugbelastung; Superposition der beiden Mechanismen ergibt eine einaxiale Normalverzerrung mit einhergehender Normalverzerrung in horizontaler Richtung („Verjüngung“)

Bei Einbau von Mikroelementen mit zusätzlichen Nullspannungskomponenten in das Mikrostrukturmodell hat das zur Folge, dass bei diesen Mikroelementen nur ein Teil der mikroskopischen Verzerrungskomponenten den makroskopischen Verzerrungen entsprechen; die zu den Nullspannungskomponenten des Mikroelements arbeitskonjugierten Verzerrungen können sich ungehindert, d.h. unabhängig von der affinen Kinematik, ausbilden. Die dabei entstehenden Inkompatibilitäten in der mikrostrukturellen Kinematik werden bewusst zugelassen.

Gerade die Einführung der Spannungsnullbedingungen auf Mikroelementlevel eröffnet eine Vielzahl an Möglichkeiten - trotz der einfachen Kinematik des Mikrostrukturmodells -, um verschiedenste einfache äquivalente Mikrostrukturen zu beschreiben. Damit lassen sich Querverbindungen zu bereits bestehenden Mikrostrukturmodellen, wie dem Microplane Modell, siehe z.B. Jirásek/Bažant (2002) oder Leukart (2005), dem Multilaminat Modell von Zienkiewicz/Pande (1977) oder dem *truss lattice material model* von Mohr (2004) herstellen.

1.2.8 Rechnerische Umsetzung

Die Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität werden durch ein Euler-Rückwärts-Verfahren für ein vorgegebenes finites Verzerrungsincrement in ein algebraisches Gleichungssystem umgeschrieben. Diese nichtlinearen Gleichungen lassen sich durch eine äquivalente Optimierungsaufgabe anschieben. Die Optimierungsaufgabe lässt sich mit Standardverfahren der nichtlinearen Programmierung, wie sie in dem Buch von Fletcher (1987) oder Luenberger/Ye (2008) angegeben sind, lösen. Diese Lösungsverfahren lassen sich so formulieren bzw. erweitern, dass sie global konvergent sind.

Testbeispiele mit analytisch berechenbaren Lösungen dienen zur Kontrolle der ausgearbeiteten Rechenprozeduren.

1.2.9 Zusammenfassung: verallgemeinerte Modellbildung von strukturierten Materialien

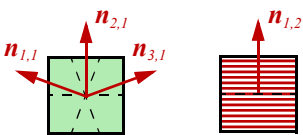
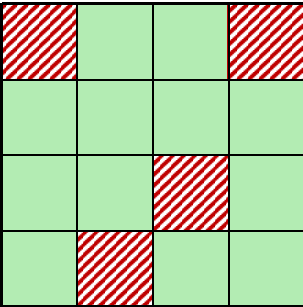
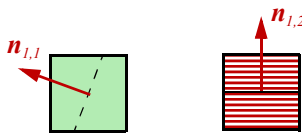
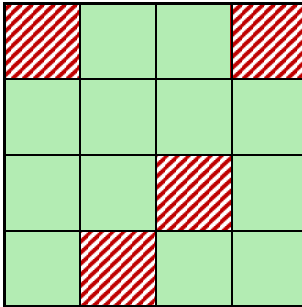
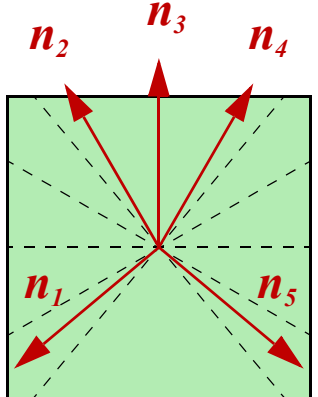
Die Hauptbestandteile des Modells sind:

- das Mikrostrukturmodell mit der affinen Verzerrungsannahme,
- die Beschreibung des Materialverhaltens der Mikroelemente durch ein Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell mit beliebig vielen distinktiven plastischen Versagensmechanismen und
- die Möglichkeit bei jedem Mikroelement zusätzliche Spannungsnullbedingungen einführen zu können.

Mit diesen Bestandteilen lässt sich ein verallgemeinerter Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Plastizität Modellrahmen errichten, der zur Beschreibung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs und des plastischen Versagens von strukturierten Materialien eingesetzt wird.

Durch die affine Kinematik kommt es bei Multi-Komponenten-Modellen zu einer (mechanischen) Parallelschaltung der Mikroelemente und der plastischen Versagensmechanismen; die Multi-Mechanismen-Plastizität der einzelnen Mikroelemente kann als Seriellschaltung der plastischen Versagensmechanismen aufgefasst werden. Das allgemeine Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell besteht somit aus einer seriell-parallel wirkenden Vielzahl von plastischen Versagensmechanismen (Spalte 1, Box 1.1).

Dieses allgemeine Modell enthält auch den Grenzfall mit mehreren Mikroelementen, aber mit jeweils nur einem plastischen Versagensmechanismus (reine Parallelschaltung, Spalte 2, Box 1.1). Oder mit nur einer Komponente - in diesem Fall ist das Mikro- gleich dem Makroelement - mit aber unbeschränkt vielen plastischen Versagensmechanismen (reine Seriellschaltung, Spalte 3, Box 1.1); dieses Modell wurde zuvor - ohne den Zusatz Mono-Komponente - als Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell bezeichnet.

Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell <i>(Seriell-Parallel-Schaltung)</i>	Multi-Komponenten & Mono-Mechanismen-Modell <i>(Parallel-Schaltung)</i>	Mono-Komponente & Multi-Mechanismen-Modell <i>(Seriell-Schaltung)</i>
M ... Anzahl der Mikroelemente N ... Anzahl der Versagensmechanismen je Mikroelement		
M ≥ 2	M ≥ 2	M = 1
N ≥ 2	N = 1	N ≥ 2
<p style="text-align: center;">Mikroelemente:</p>  <p style="text-align: center;">Makroelement:</p> 	<p style="text-align: center;">Mikroelemente:</p>  <p style="text-align: center;">Makroelement:</p> 	<p style="text-align: center;">Mikroelement = Makroelement</p> 

Box 1.1 Verallgemeinerter Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen Modellrahmen

1.2.10 Praktische Anwendung auf Holz

Die Arbeit wird durch ein Anwendungsbeispiel abgeschlossen. Anknüpfungspunkt sind dabei die am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (ehemals: Institut für Festigkeitslehre) der TU Wien von Prof. Eberhardsteiner und Mitarbeitern durchgeführten Forschungsarbeiten und experimentellen Untersuchungen an scheibenförmigen Probekörpern aus Fichtenholz, die in der Scheibenebene schräg zur Faserrichtung bis zum Bruch belastet wurden.

Es wird mit dem ausgearbeiteten verallgemeinerten Rahmen zur Modellbildung von strukturierten Materialien ein Materialmodell für Holz formuliert. Mit diesem wird das Trag- und Versagensverhalten eines biaxial beanspruchten Holzprobekörpers untersucht und das aus dem Rechenmodell prognostizierte Versagens- und Tragverhalten den gemessenen Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Mit dieser Re-Investigation soll das Versagensverhalten des Probekörpers durchleuchtet werden.

1.2.11 Stand der Forschung

Die Übersicht über den Stand der Forschung zu den einzelnen Themen findet sich in den zugehörigen Kapiteln dieser Arbeit.

2

Ziele und Umfang der Arbeit

2.1 Ziele der Arbeit

Ziel und Inhalt dieser Arbeit ist die Entwicklung, Ausarbeitung und rechnerische Umsetzung eines verallgemeinerten Modells, um das Spannungs-Verzerrungs- und Versagensverhalten von strukturierten Materialien durch Kombination von beliebig vielen plastischen Versagensmechanismen zu beschreiben (Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell).

Das Modell ist auf kleine Verzerrungen und Rotationen (linearisierte Verformungsgeometrie) beschränkt.

2.1.1 Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell

Das verallgemeinerte Modell baut auf der Kombination von vier Grundideen (Bild 2.1) auf:

- Einteilung des Materialverhaltens in drei aufeinander folgende Verhaltensarten: Elastizität, Plastizität und Bruch,
- Formulierung und Unterscheidung von beliebig vielen Versagensmodi, die ausgewählten materiellen Orientierungen zugewiesen werden,
- Betrachtung des Materialverhaltens bei zusätzlicher Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen,
- Formulierung eines einfachen Mikrostrukturmodells.

2.1.1.1 Säule 1: Formulierung des 3D-Materialverhaltens

- Das elastische Materialverhalten ist linear.
- Das plastische Materialverhalten ist auf perfekte Plastizität beschränkt. Die Anzahl der plastischen Versagensmechanismen, die auch simultan aktiviert werden können, ist nicht beschränkt (Multi-Mechanismen-Plastizität)
- Bei Bruch sollen in der entsprechenden Versagensebenenorientierung die drei Spannungs-komponenten null gesetzt werden.

2.1.1.2 Säule 2: Unterscheidung, Formulierung und Kombination von beliebig vielen Versagensmodi

Zur Beschreibung eines Versagensmodus ist anzugeben, wann, wo und wie er eintritt. Wann und wo der Versagensmodus auftritt, wird durch die Formulierung einer Versagensbedingung festgelegt, die auf der Mohr'schen Idee aufbaut. Wie der zugehörige Versagensmechanismus aussieht, wird i.A. unabhängig von der formulierten Versagensbedingung angegeben.

Dabei ergeben sich folgende Teilaufgaben:

- Festlegung von potentiellen Versagensebenenorientierungen aufgrund der betrachteten Materialstruktur und des Versagensverhaltens
-

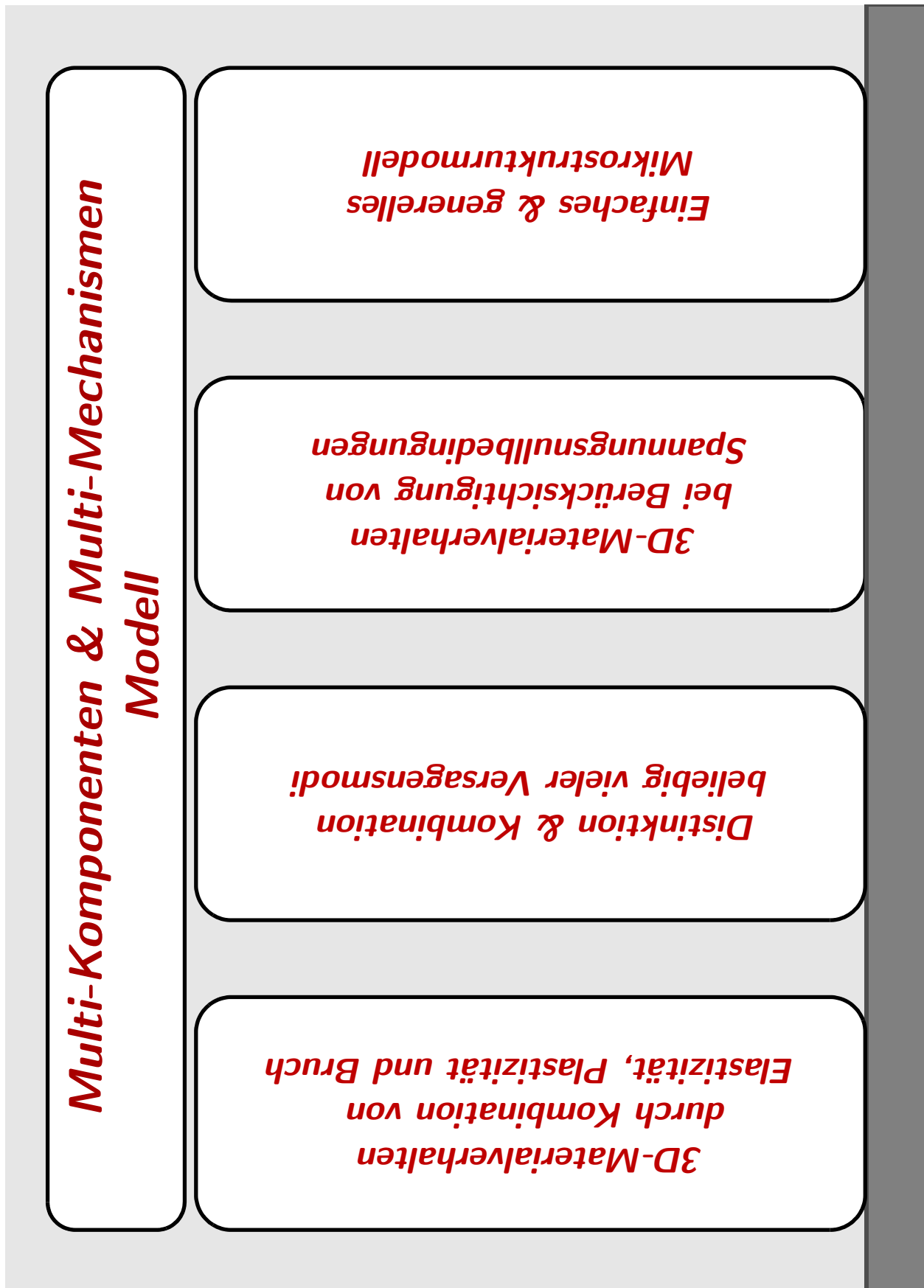


Bild 2.1 Die vier Säulen des Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modells

- Beschreibung des Versagenseintritts in diesen Versagensebenenorientierungen durch eine Versagensbedingung
- Beschreibung von Versagensbedingungen im Fall von symmetrischem Materialaufbau, wie z.B. transversaler Isotropie
- Formulierung von plastischen Versagensmechanismen, die den jeweiligen Versagensbedingungen zugeordnet sind
- Kombination von uneingeschränkt vielen plastischen Versagensmechanismen (Multi-Mechanismen-Plastizität) und Formulierung der zugehörigen Modellgleichungen
- Begrenzung des plastischen Materialverhaltens, sobald Bruch eintritt

Bei der gewählten Vorgehensweise soll der traditionelle Lehrzugang auf den Kopf gestellt werden, indem zunächst das Versagen beliebig strukturierter Materialien betrachtet wird und erst durch Einführung von symmetrisch aufgebauten Materialstrukturen der Übergang zu transversal isotropen und schlussendlich isotropen Materialien hergestellt wird.

2.1.1.3 Säule 3: 3D-Materialverhalten bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen

Folgende Aufgabenstellungen sollen behandelt werden:

- Einführung von beliebigen Spannungsnullbedingungen, z.B. ebener Spannungszustand oder einaxialer Spannungszustand
- Betrachtung des Materialverhaltens bei Berücksichtigung der Spannungsnullbedingungen

2.1.1.4 Säule 4: Formulierung eines einfachen und generellen Mikrostrukturmodells

Die wesentlichen Bestandteile und Modellannahmen sind:

- Festlegung einer affinen Kinematik
- Formulierung des dreidimensionalen Materialverhaltens der konstituierenden Mikroelemente durch Kombination der Materialverhaltensarten (Säule 1), bei Berücksichtigung von beliebig vielen plastischen Versagensmechanismen (Säule 2) und zusätzlich eingeführten Spannungsnullbedingungen (Säule 3)
- Beschreibung von konkreten einfachen Mikrostrukturen durch die Annahme der räumlichen Aufteilung der Mikroelemente und die individuelle Orientierung der Materialhauptachsen der einzelnen Mikroelemente

Durch Zusammenbau dieser jeweils sehr einfachen Modellbestandteile ergibt sich summativ ein komplexer Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des Makroelements. Folgende Aufgaben sollen gelöst werden:

- Formulierung der Grundgleichungen des Mikrostrukturmodells bei Annahme affiner Verzerrungen
 - Darstellung verschiedener Beschreibungsvarianten von geometrischen Anordnungen
-

der Mikroelemente (= äquivalente Mikrostrukturen)

- Berechnung der makroskopischen Größen aus dem kumulativen Verhalten der einzelnen Mikroelemente
- Klärung der Wirkungsweise des Modells

2.1.2 Rechnerische Umsetzung des theoretischen Modells

Aus den Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität ergibt sich durch Integration ein nichtlineares Gleichungssystem. Unter speziellen Voraussetzungen kann die Äquivalenz dieses Gleichungssystems mit den Minimumsbedingungen einer übergeordneten Optimierungsaufgabe gezeigt werden. Diese Optimierungsaufgabe lässt sich mit Standardverfahren der nichtlinearen Programmierung lösen. Da eine konvexe Optimierungsaufgabe eine eindeutige Lösung hat, soll ein Lösungsverfahren ausgearbeitet werden, dass global konvergent ist und unter allen Umständen die gesuchte Lösung findet.

Im Rahmen der Rechenprozedur sollen folgende Punkte umgesetzt werden:

- Approximative Integration der Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität mit einem Euler-Rückwärts-Verfahren
- Berechnung der konsistent linearisierten algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix
- Äquivalenzbeweis zwischen den Plastizitätsgleichungen und den Minimumsbedingungen einer Optimierungsaufgabe
- Lösung der Optimierungsaufgabe (= nichtlineare Programmierungsaufgabe)
- Erweiterung des Lösungsverfahrens um globale Konvergenz zu garantieren

Bei Bruch werden in der entsprechenden Versagensebenenorientierung die drei Spannungskomponenten null. Wie im Fall dieses Kontaktverlusts vorzugehen ist, soll überlegt werden. Außerdem kann es bei Belastungsumkehr zum Schließen der Bruchfuge, also zu abermaligem Kontakt, kommen.

Es sollen folgende Punkte überlegt werden:

- Was passiert im Fall des Bruchs?
- Wie ist bei diesem Kontaktverlust weiter vorzugehen?
- Wie wird bei Lastumkehr mit möglichem Kontakt in der Bruchfläche umgegangen?

2.1.3 Ausgearbeitete Beispiele

2.1.3.1 Demonstrations- und Testbeispiele

Die angeführten Beispiele sollen zur Illustration der theoretisch formulierten Ideen und als Testbeispiele für die entwickelten Rechenprozeduren dienen. Teilweise sind sie als Leitbeispiele konzipiert und werden von Kapitel zu Kapitel erweitert.

2.1.3.2 Praktisches Anwendungsbeispiel

Basierend auf dem vorgestellten generellen Konzept soll ein Materialmodell für fehlerfreies Holz formuliert werden, das in der Traglastuntersuchung von Holztragstrukturen benutzt werden kann.

Das Holzmodell soll auf eine konkrete technische Aufgabenstellung angewandt werden. Anknüpfungspunkt sind dabei die am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (ehemals: Institut für Festigkeitslehre) der TU Wien von Prof. Eberhardsteiner (2002) und Mitarbeitern durchgeführten Forschungsarbeiten und experimentellen Untersuchungen an scheibenförmigen Probekörpern aus Fichtenholz, die in der Scheibenebene schräg zur Faserrichtung bis zum Bruch belastet wurden. In den Messungen wurde das Trag- und Bruchverhalten des Holzprobekörpers bei variierender Faserneigung dokumentiert. Das Last-Verformungs- und das Versagensverhalten des Probekörpers soll mit dem entwickelten Holzmaterialmodell nachgerechnet und den Messergebnissen und den vorhandenen Bruchbildern der Probekörper gegenübergestellt werden.

2.2 Gliederung, Methodik & Umfang der Arbeit

2.2.1 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in fünf Hauptteile und den Anhang:

- **Teil I - Versagensbedingungen strukturierter Materialien**
- **Teil II - Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen**
- **Teil III - Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität**
- **Teil IV - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell**
- **Teil V - Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern**
- **Anhang**

Die Teile I, II und IV beinhalten Beiträge zum mechanisch-theoretischen Konzept. Teil III behandelt die rechnerisch-approximative Umsetzung der Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität. In Teil V wird ein Holzmaterialmodell entwickelt und in einer praktischen Anwendung eingesetzt.

2.2.2 Methodik der Arbeit

Ein Leitgedanke dieser Arbeit ist die Ausarbeitung von einfachen und elementaren Grundmodellen und deren Zusammenführung zu einem vielseitigen und leistungsfähigen Gesamtmodell. Die Einzelbausteine sind zwar einfach und mit Grundkenntnissen der Festkörpermechanik verstehbar, sollen aber ohne Einschränkung theoretisch formuliert und rechnerisch robust umgesetzt werden:

- In Teil I wird nur elementare Festigkeitslehre (Spannungstransformation, Mohr'scher Kreis, Formulierung von Versagensbedingungen) benötigt.
 - Teil II beinhaltet die Gleichungen der klassischen Plastizität mit der Erweiterung auf beliebig viele simultan aktivierbare plastische Versagensmechanismen.
 - In Teil III werden Grundkenntnisse der elementaren nichtlinearen Programmierung benötigt.
 - Teil IV beinhaltet Grundlagen zur sogenannten Mikro- bzw. Verbundkörpermechanik.
 - Es wird versucht, die Aufgabenstellung in Teil V mit einfachen Strukturmodellen und elementaren Traglastüberlegungen zu analysieren.
-

2.2.3 Umfang der Arbeit

Teil I - Versagensbedingungen strukturierter Materialien (Kap. 3-5)

Im ersten Teil der Arbeit wird die Formulierung von Versagensbedingungen für strukturierte Materialien behandelt. Mit den Versagensbedingungen lässt sich angeben, ab welchem Belastungszustand Versagen eintritt.

Kap. 3 - Allgemeines zu Versagensbedingungen

Zuerst werden spezielle Einschränkungen in Bezug auf die mathematische Form der Versagensbedingungen eingeführt und festgelegt. Zusätzlich werden allgemeine Begriffe definiert und die geometrische Darstellung der Versagensbedingungen als Flächen im sechsdimensionalen Spannungsraum vorgestellt. Anhand dieser Darstellung lassen sich allgemeine geometrische Eigenschaften anführen.

Kap. 4 - Mohr- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen

Bei den Versagensbedingungen wird die Unterscheidung zwischen zwei Typen eingeführt: den Mohr- und Mises-Typ-Versagensbedingungen. Kerngedanke des Mohr'schen Versagensbedingungstyps ist, dass Versagen in speziellen Ebenenorientierungen stattfindet. Diese Idee wird in diesem Abschnitt ausgearbeitet und anhand eines einfachen Beispiels illustriert.

Bei den Mises-Typ-Versagensbedingungen wird ein formal-mathematischer Zugang gewählt. Die Versagensbedingung ist dabei eine quadratische Funktion in den Spannungen.

Kap. 5 - Transversal isotrope & isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

Im Fall der Mises-Typ-Versagensbedingungen werden die Symmetrieeigenschaften erreicht, indem die Versagensbedingung durch lineare und quadratische, isotrope und transversal isotrope Invarianten ausgedrückt wird. In diesem Kapitel wird anstatt des formal-funktionalen Aufbaus der symmetrischen Mises-Typ-Versagensbedingungen ein direkter Zugang zu transversal isotropen bzw. isotropen Versagensbedingungen mittels der Mohr'schen Idee umgesetzt.

Teil II - Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen (Kap. 6 und 7)

Teil I hat sich mit der Beschreibung des Versagensbeginns beschäftigt. In Teil II wird beschrieben, wie sich plastisches Versagen ausbildet.

Kap. 6 - Multi-Mechanismen-Plastizität

Die Grundgleichungen der Plastizität werden für beliebig viele und simultan aktivierbare plastische Mechanismen formuliert.

Kap. 7 - Multi-Mechanismen-Plastizität mit zusätzlichen Spannungsnullbedingungen

Um die in Strukturelementen wie Balkenelementen, Fachwerkstäben, Scheiben oder Plattenelementen verwendeten „reduzierten“ Materialmodelle zu erhalten, wird das Materialverhalten bei zusätzlicher Berücksichtigung von ausgewählten Nullspannungskomponenten formuliert.

Teil III - Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität (Kap. 8 und 9)

Die in Teil I ausgearbeiteten Grundgleichungen werden in diesem Teil approximativ-rechnerisch bei Vorgabe eines finiten Verzerrungsinkrements (verformungsgesteuert) gelöst.

Kap. 8 - Lösung der Multi-Mechanismen-Plastizitätsgleichungen

Um bei einem vorgegebenen Verzerrungsverlauf $\mathbf{e}(t)$ die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl}(t)$ und die Spannungen $\mathbf{s}(t)$ zu bestimmen, muss das Differentialgleichungssystem der Multi-Mechanismen-Plastizität integriert werden. Im Allgemeinen handelt es sich dabei um ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Nichtlinearität erlaubt nur in einigen Sonderfällen eine geschlossene analytische Lösung, ansonsten muss eine approximativ-numerische Lösungsmethode gewählt werden. Dabei werden die Integrale mit einem Euler-Rückwärts-Verfahren näherungsweise gelöst und in nichtlineare algebraische Gleichungen umformuliert.

Es kann gezeigt werden, dass die Lösung der algebraischen Gleichungen, die sich aus der approximativen Integration der Differentialgleichungen mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren ergeben, die Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe ist.

Kap. 9 - Lösungsmethoden nichtlinearer Optimierungsaufgaben

Die Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe ist Inhalt dieses Abschnitts. Dabei werden die quadratischen Programmierungsaufgaben mit einer Aktive-Set-Methode gelöst. Für die nichtlineare Optimierungsaufgabe wird eine Sequentielle Quadratische Programmierungsmethode mit globaler Konvergenz ausgearbeitet. Mit den ausgearbeiteten Rechenprozeduren werden die plastischen Traglasten von FCC- und BCC-Kristallen bestimmt. Neben der inkrementellen verformungsgesteuerten Berechnung der Traglasten wird zu Vergleichszwecken eine starr-plastische Traglastberechnung durchgeführt.

Teil IV - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell (Kap. 10 und 11)

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen des Mikrostrukturmodells ausgearbeitet und seine Diversität anhand verschiedener Beispiele demonstriert.

Kap. 10 - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell

Das vorgestellte Mikrostrukturmodell ist dahin gehend als „einfach“ zu bezeichnen, weil es für den kinematischen Zusammenhang annimmt, dass die Mikroelemente in einem durch die makroskopischen Verzerrungen vorgegebenen affin verzerrten Gitter eingebettet sind.

Für die Subelemente des Mikrostrukturmodells können Spannungsnullbedingungen angenommen werden. Dadurch kommt es zu Inkompatibilitäten, die aber bewusst zugelassen werden.

Kap. 11 - Beispiele: Mikrostrukturmodell

Zu dem Mikrostrukturmodell sind einige einfache Beispiele ausgearbeitet. Ein Beispiel berechnet die Traglast eines Polykristalls. In einem anderen Beispiel wird eine Querverbindung zum sogenannten Microplane Modell hergestellt und ein kritischer Vergleich mit dem ausgearbeiteten Mikrostrukturmodell durchgeführt. Es kann gezeigt werden, dass verschiedene einfache Mikrostrukturmodelle aus Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen Modellrahmen direkt ableiten lassen.

Teil V - Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern (Kap. 12-15)

Dieser Teil der Arbeit beinhaltet eine praktische Anwendung des entwickelten verallgemeinerten Modellbildungskonzepts auf eine technische Aufgabenstellung. Es soll ein Materialmodell für Holz entwickelt werden. Mit diesem wird anschließend das Trag- und Versagensverhalten eines biaxial beanspruchten Probekörpers aus Fichtenholz untersucht, wobei Messdaten aus 439 Versuchen für Vergleiche zur Verfügung stehen.

Kap. 12 - Materialmodell für Holz

Das linear-elastische Materialverhalten von Holz wird mit orthotroper Symmetrie angenommen. Kernidee bei der Formulierung des Versagensmodells ist die Unterscheidung von sechs unabhängigen holzcharakteristischen Versagensmodi.

Kap. 13 - Versuchsdurchführung & Aufgabenstellung

In diesem Kapitel wird die Versuchsanordnung, die Durchführung der Versuche, die Probekörperbelastung, die gemessenen und aufbereiteten Daten und die Darstellung der Ergebnisse, so wie sie in der Arbeit von Eberhardsteiner (2002) niedergelegt sind, kurz zusammengefasst dargestellt.

Kap. 14 - Untersuchung des elastischen Tragverhaltens des Probekörpers

Für den Probekörper wird ein einfaches Strukturmodell entwickelt und zunächst nur das elastische Last-Verformungs-Verhalten untersucht, um einen Einblick in den Kraftfluss und die elastische Wirkungsweise des Systems zu erhalten. Die Faserschrägneigung innerhalb der Probe wird dabei variiert. Da das System statisch unbestimmt ist, hängt die Spannungsverteilung im Probekörperinneren von den geometrischen Abmessungsverhältnissen und den Materialsteifigkeitsverhältnissen ab. Die Rechenergebnisse werden mit den Versuchsdaten verglichen.

Kap. 15 - Traglastuntersuchung und Versagensverhalten des Probekörpers

Ausgehend von den zuvor formulierten einfachen Modellen wird eine Traglastuntersuchung

des Probekörpers durchgeführt, wobei die im Materialmodell angenommen Versagensmodi und die zugehörigen Versagensebenenorientierungen durch die Versuche bestätigt werden sollen.

Kap. 16 - Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wird eine rückblickende Zusammenfassung über die durchgeführten Forschungsarbeiten in den fünf Teilen der Arbeit angegeben. Offene Punkte und noch fehlende Teilarbeiten werden aufgelistet und die Arbeit wird mit einem Ausblick abgeschlossen.

Anhang

Der Anhang enthält Ausarbeitungen zu verwendeten mathematischen Werkzeugen und Ergänzungen zu den verwendeten mechanischen Modellen.

Anhang A - Tensoralgebra und Tensoranalysis

Dieses Anhangskapitel enthält einen kurzen Abriss zur Tensoralgebra und -analysis.

Anhang B - Kartesische Tensoren und Matrixschreibweise

Für die rechnerische Umsetzung werden die Tensoren in Koeffizienten, bezogen auf ein ausgesuchtes Koordinatensystem, angeschrieben. Ein systematischer Übergang von Tensor-symbolismus auf die in der rechnerischen Umsetzung verwendeten Matrixschreibweise, besonders die Voigt'sche Schreibweise, wird angegeben.

Anhang C - Invarianten, isotrope und anisotrope Tensorfunktionen

In diesem Anhangskapitel werden Invarianten aufgelistet, die zur Formulierung von isotropen oder anisotropen Tensorfunktionen verwendet werden.

Anhang D - Linear-elastisches Materialverhalten

Dieser Abschnitt enthält einen kurzen Abriss zu elastischem Materialverhalten. Die elastischen Materialsteifigkeitstensoren für isotrope, transversal isotrope und orthotrope elastische Materialsymmetrie unter Beachtung der strikten Konvexität sind angeführt.

Anhang E - Mises-Typ-Versagensbedingungen

In diesem Kapitel sind die Koeffizientenmatrizen der klassischen Mises-Typ-Versagensbedingungen aufgelistet. Zusätzlich sind die Bedingungen angeführt, um Konvexität dieser Funktionen zu garantieren.

Anhang F - Modifizierte isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

Zusätzlich zu den transversal isotropen Versagensbedingungen aus Kapitel 5 sind in diesem Anhang klassische isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen angegeben, die mit der Funktion von Bigoni modifiziert wurden, um stetige Differenzierbarkeit zu gewährleisten.

Anhang G - Moore-Penrose-Pseudoinverse

Die Moore-Penrose-Pseudoinverse ist eine mögliche Methode unbestimmte Gleichungssysteme zu lösen.

Anhang H - Ebener Stab mit schrägem Materialfaserverlauf

In diesem Anhangskapitel werden die Differentialgleichungen, deren Lösung sowie die Steifigkeitsmatrix für den ebenen, anfänglich geraden, schubweichen Stab angegeben. Das Material ist linear-elastisch und orthotrop, wobei die Materialhaupttrichtungen schräg zur Stabachse liegen.

Anhang I - Eine nützliche Matrixidentität

Dieser Anhang enthält einige Darstellungen zu einer Matrixidentität, die im Laufe der Arbeit mehrmals verwendet wird.

Anhang J - Nichtlineare Programmierung - Penalty-Verfahren

Ergänzend zu dem in Kapitel 9 angegebenen SQP-Verfahren sind in diesem Abschnitt alternative Lösungsverfahren (Penalty-Methode und Augmented-Lagrange-Penalty-Methode) zur Berechnung nichtlinearer Optimierungsaufgaben angegeben.

TEIL I

Versagens- bedingungen strukturierter Materialien

Inhalt:

- 3 Allgemeines zu Versagensbedingungen**
 - 4 Mohr- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen**
 - 5 Transversal isotrope & isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen**
-

3

Allgemeines zu Versagens- bedingungen

3.1 Einleitung und Kapitelaufbau

In diesem Kapitel werden allgemeine Festlegungen und mathematische Anforderungen an die verwendeten Versagensbedingungen angeführt.

3.1.1 Versagensbedingung

Die Versagensbedingungen werden mit F bezeichnet und sind skalare Funktionen mit den Spannungen \mathbf{s} als Argument. Die Versagensbedingung $F(\mathbf{s}) = 0$ gibt Spannungszustände an, bei welchen:

- die Grenze des elastischen Materialverhaltens erreicht ist,
- die Aktivierung eines Versagensmechanismus möglich ist und
- es zu einer Änderung des Spannungs-Verzerrungs-Verhaltens des Materials kommen kann.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{s}) < 0 & \quad \dots \text{erlaubter Spannungsbereich, kein Versagen} \\
 F(\mathbf{s}) = 0 & \quad \dots \text{Versagensbeginn} \\
 F(\mathbf{s}) > 0 & \quad \dots \text{nicht erlaubter Spannungsbereich}
 \end{aligned}
 \tag{3-1}$$

Das Versagen von strukturierten Materialien ist durch mehrere unterscheidbare Versagensmechanismen charakterisiert, denen jeweils eine Versagensbedingung F_i zugeordnet ist. Sind am angegebenen Spannungszustand mehrere Versagensbedingungen null, können die zugehörigen Versagensmechanismen simultan aktiviert werden. Welche Form der zugeordnete Versagensmechanismus hat, ist nicht Inhalt von Teil I und wird erst in Teil II behandelt.

3.1.2 Ziele des Kapitels

Zuerst sollen Anforderungen und Einschränkungen an die mathematische Gestalt der Versagensbedingung formuliert werden. Mittels der geometrischen Hilfsvorstellung eines Spannungsraums lassen sich die Versagensbedingungen $F_i = 0$ als Flächen in diesem Raum deuten. Diese Flächen begrenzen zufolge Gleichung (3-1) den elastischen Bereich. Spannungszustände, bei denen mehrere Versagensbedingungen simultan erfüllt sind, entsprechen in der geometrischen Darstellung einem Flächenschnittpunkt. Die geometrische Gestalt dieser Schnittbereiche wird untersucht, um zu definieren, ob es sich um Ecken, Kanten oder Berührungspunkte handelt. Ausgehend von der Art der Flächenverschneidung kann später ein Rückschluss auf das mechanische Verhalten in solchen Spannungspunkten geschlossen werden.

Weiters wird angegeben, wie kontrolliert werden kann, ob der von den Versagensbedingun-

gen begrenzte elastische Bereich eine Symmetrie besitzt.

Die Hauptziele des Kapitels sind:

- Formulierung von allgemeinen Anforderungen und Einschränkungen an die mathematische Gestalt der Versagensbedingungen,
- Einführung der geometrischen Hilfsvorstellung eines Spannungsraums und der Definition des erlaubten Bereichs und der elastischen Grenzfläche,
- Diskussion der geometrischen Eigenschaften des elastischen Bereichs und
- Darstellung des Symmetrienachweises des elastischen Bereichs.

3.1.3 Inhalt von Kapitel 3

3.2 Anforderungen an die mathematische Gestalt der Versagensbedingungen

3.3 Spannungsraum, elastischer Bereich & elastische Grenzfläche

3.4 Reguläre Kanten und Ecken, Berührungspunkte und Pyramidenpunkte

3.5 Funktionsinhärente Ecken und Kanten

3.6 Symmetrienachweis des erlaubten Bereichs

3.7 Zusammenfassung und Ausblick

3.2 Anforderungen an die mathematische Gestalt der Versagensbedingungen

Es werden die Anforderungen (3-2) festgelegt, die ausnahmslos von allen in dieser Arbeit angeführten Versagensbedingungen eingehalten werden müssen. Einige Einschränkungen werden formuliert, um physikalisch unplausible Situationen auszuschließen; andere Anforderungen ermöglichen später den Einsatz von Lösungsverfahren, für deren Anwendung diese Funktionseigenschaften Grundvoraussetzungen sind:

1. Spannungsfreier Ausgangszustand : $F(\mathbf{s} = \mathbf{0}) < 0$

2. Stetige Differenzierbarkeit : $F(\mathbf{s}) \in C_2$ (3-2)

3. Konvexität :
$$\mathbf{s}^T \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \mathbf{s} \geq 0$$

Die zweite Forderung verlangt den kontinuierlichen Funktionsverlauf der ersten und zweiten Ableitung von F nach \mathbf{s} .

Die Forderung der Konvexität schränkt die Beschreibung des physikalischen Sachverhalts kaum ein, begünstigt und vereinfacht aber die rechnerische Lösbarkeit des sich schlussendlich ergebenden nichtlinearen Gleichungssystems und führt in weiterer Folge zu eindeutigen Lösungen. Offen bleibt die Frage, ob nichtkonvexe Versagensbedingungen überhaupt physikalisch möglich sind oder Sinn machen.

3.3 Spannungsraum, elastischer Bereich & elastische Grenzfläche

Man kann sich die sechs Koeffizienten S_{ij} des Spannungsvektors \mathbf{s} als die Koordinaten eines Punktes in einem sechsdimensionalen Raum, dem sogenannten Spannungsraum, vorstellen.

3.3.1 Flächendarstellung der Versagensbedingung

Die Versagensbedingung $F(\mathbf{s}) = 0$ ist - geometrisch interpretiert - eine implizite Flächendarstellung im Spannungsraum. Aufgrund der Festlegungen in Kap. 3.2 ist diese Fläche konvex und in jedem Punkt zweimal stetig differenzierbar. Die konvexe Fläche teilt den Spannungsraum in die zwei Teilräume, $F(\mathbf{s}) < 0$ und $F(\mathbf{s}) > 0$. Mit Gleichung (3-1) gilt, dass der Spannungspunkt entweder im Bereich $F(\mathbf{s}) < 0$ oder auf der Fläche $F(\mathbf{s}) = 0$ liegt.

3.3.2 Elastische Grenzfläche & elastischer Bereich

Jedem der N Versagensmechanismen - mit dem Index i gekennzeichnet - ist eine Versagensbedingung F_i zugeordnet. Jede Versagensbedingung $F_i = 0$ beschreibt eine konvexe Fläche im Spannungsraum. Teilabschnitte dieser Flächen begrenzen den konvexen *erlaubten Bereich* \mathbb{E} . In diesem Bereich müssen die Gleichungen $F_i(\mathbf{s}) \leq 0$ für alle i erfüllt sein. Die Oberfläche $\partial\mathbb{E}$ von \mathbb{E} wird als *elastische Grenzfläche* bezeichnet und ist eine aus mehreren konvexen Teilflächen aufgebaute facettierte konvexe Gesamtfläche. Man hat folgende Definitionen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^6 \mid F_i(\mathbf{s}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} && \dots \text{erlaubter Bereich} \\ \partial\mathbb{E} &= \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{E} \mid F(\mathbf{s}) = 0, \text{ für mind. ein } i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} && \dots \text{elastische Grenzfläche} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Diese Definition und die Bezeichnung sind aus Simo/Hughes (1998) übernommen.

In Bild 3.1 ist zur Illustration der Definitionen eine Situation mit fünf Versagensbedingungen dargestellt.

3.4 Reguläre Kanten und Ecken, Berührungspunkte und Pyramidenpunkte

Die nachfolgende Betrachtung zu Kanten, Ecken und Berührungspunkte der elastischen Grenzfläche wird in einer beliebigen Raumdimension p durchgeführt.

Die elastische Grenzfläche $\partial\mathbb{E}$ ist eine $(p-1)$ -dimensionale Fläche, die aus mehreren Teilflächen $F_i = 0$ gebildet wird, und im Raum \mathbb{R}^p eingebettet ist.

3.4.1 Schnittpunkt

Betrachtet wird ein Punkt \mathbf{s}_n auf $\partial\mathbb{E}$, bei dem q Versagensbedingungen erfüllt werden. Die Indizes der an diesem Schnittpunkt beteiligten Flächen werden in der Menge \mathcal{A}_0 zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkt :} & \quad \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E} \\ \text{am Schnittpunkt beteiligte Flächen :} & \quad \mathcal{A}_0 = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{s}_n) = 0\} \\ \text{Anzahl der Flächen :} & \quad q = \text{nelem}(\mathcal{A}_0) > 1 \end{aligned} \quad (3-4)$$

3.4.2 Gradienten und lokale Betrachtung des Schnittbereichs

Ob der Schnittpunkt \mathbf{s}_n in einer Ecke, auf einer Kante oder in einem Berührungspunkt liegt, lässt sich durch lokale Betrachtung des Schnittbereichs beurteilen. Dazu werden die Tangentialebenen der beteiligten Flächen im Punkt \mathbf{s}_n betrachtet. Die Normalenvektoren auf diese Tangentialebenen sind die Gradienten \mathbf{g}_i , die in der Matrix \mathbf{G} mit dem Index \mathcal{A}_0 zusammengefasst sind. Diese Matrix hat p Zeilen und q Spalten:

$$\begin{aligned} \text{Gradientenvektoren im Schnittpunkt :} & \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{s}_n) = \left. \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}_n} \quad i \in \mathcal{A}_0 \\ \text{Matrix } \mathbf{G}_{\mathcal{A}_0} : & \quad \mathbf{G}_{\mathcal{A}_0} = [\mathbf{g}_i]_{i \in \mathcal{A}_0} \quad \dim(\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0}) = (p, q) \\ \text{Rang von } \mathbf{G}_{\mathcal{A}_0} : & \quad r = \text{rank}(\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0}) \quad 1 \leq r \leq p \end{aligned} \quad (3-5)$$

Der Rang r der Matrix gibt die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren \mathbf{g}_i ($i \in \mathcal{A}_0$) und damit die Anzahl der voneinander unabhängigen Tangentialebenen an. Der Rang r ist größer als eins, aber nie größer als die vorgegebene Raumdimension p .

Aufgrund der zweiten Festlegung (3-2) ist der Gradientenverlauf auf der gesamten Fläche stetig und daher im Schnittpunkt eindeutig berechenbar.

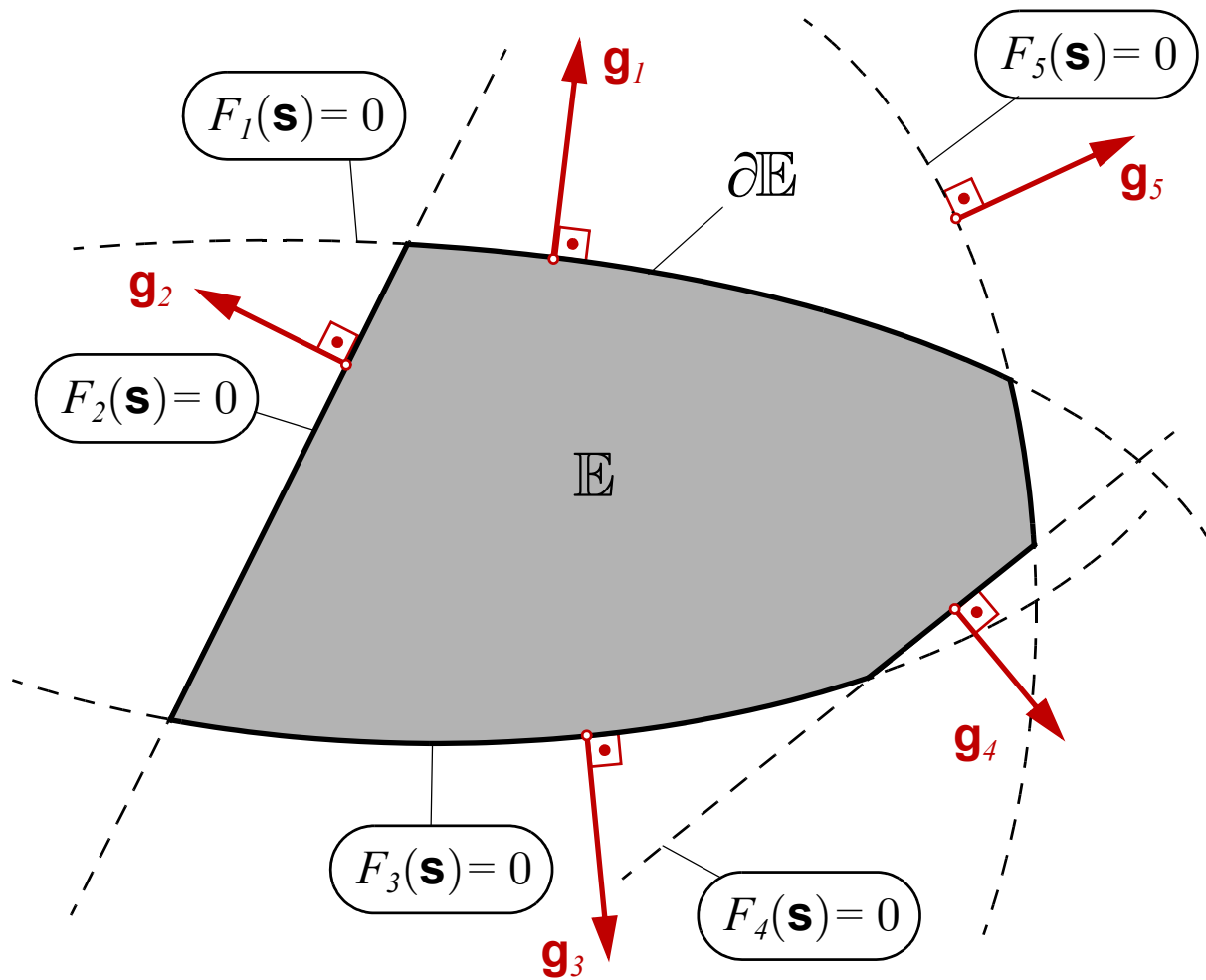


Bild 3.1 Illustration des erlaubten Bereichs \mathbb{E} und der elastischen Grenzfläche bei mehreren (hier $N = 5$) Versagensbedingungen; die Normalenvektoren auf die Teilflächen werden mit \mathbf{g}_i angeschrieben.

3.4.3 Reguläre Ecken, reguläre Kanten und Berührungspunkte

Mit der Raumdimension p , der Anzahl q der sich im Schnittpunkt treffenden Flächen und dem Rang r , lässt sich beurteilen, ob es sich bei dem Schnittpunkt \mathbf{s}_n um eine Ecke, eine Kante oder einen Berührungspunkt handelt.

- In einem Eckpunkt muss die Anzahl q der sich schneidenden Flächen größer als oder gleich der Raumdimension p sein, wobei die Anzahl r der unabhängigen Tangentialflächen gleich der Raumdimension sein muss.
- Liegt der Schnittpunkt \mathbf{s}_n auf einer Kante, ist der Rang r kleiner als p , aber größer als eins. Der Rang r gibt zusätzlich die Raumdimension der Kante an. Die Anzahl q der sich in einem Kantenpunkt schneidenden Flächen ist unlimitiert; ist q größer als r , sind einige Tangentialebenen kongruent.
- Ein Spezialfall tritt auf, wenn alle Tangentialebenen im Punkt \mathbf{s}_n deckungsgleich und damit alle Vektoren \mathbf{g}_i ($i \in \mathcal{A}_0$) kollinear werden. Der Rang r ist dabei eins. Solche Punkte werden Berührungspunkte genannt.

Mit diesen Betrachtungen hat man die Definitionen:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Eckpunkt :} & q \geq p, & r = p \\
 \text{Punkt auf einer (} r \text{-dimensionalen) Kante :} & q > 1, & 1 < r < p \\
 \text{Berührungspunkt :} & q > 1, & r = 1
 \end{array} \tag{3-6}$$

3.4.4 „Pyramidenpunkte“

Schneiden sich q (konvexe) Flächen in einem p dimensionalen Raum in einem Punkt und ist $q > p$, wird dieser Punkt als *Pyramidenpunkt* bezeichnet:

$$\text{Pyramidenpunkt :} \quad r < q \tag{3-7}$$

In einem Pyramidenpunkt sind die Normalenvektoren \mathbf{g}_i der dort zusammentreffenden Flächen immer linear abhängig!

Die Begriffswahl für diese speziellen Schnittpunkte folgt aus der Betrachtung einer vierseitigen Pyramide im dreidimensionalen Raum. Auf der Pyramidenspitze schneiden sich die vier Seitenflächen mit den Normalenvektoren \mathbf{g}_1 bis \mathbf{g}_4 . Diese vier Vektoren sind nicht voneinander unabhängig, es gilt $r = 3 < q = 4$. Diese geometrische Vorstellung ist für diesen Typ von Flächenschnittpunkt namensgebend. Mit den Definitionen aus Gleichung (3-6) sieht man, dass Kanten und Eckpunkte ebenso auch Pyramidenpunkte sein können und ein Berührungspunkt immer ein Pyramidenpunkt ist. In Bild 3.2 sind eine Kante und eine Ecke ($p = 3$) dargestellt, wobei in beiden Fällen der Schnittpunkt \mathbf{s}_n ebenso ein Pyramidenpunkt ist.

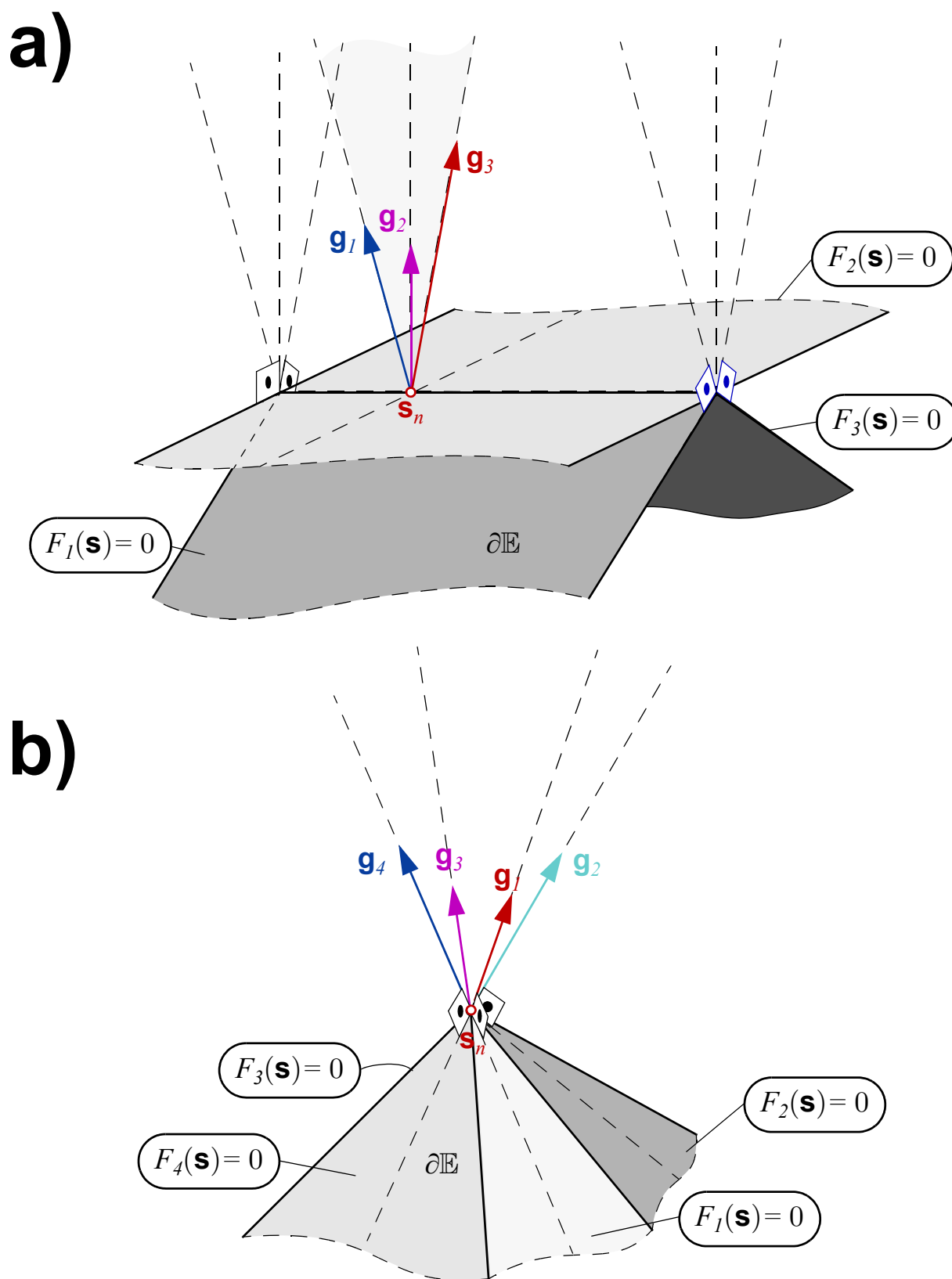


Bild 3.2 Pyramidenpunkt \mathbf{s}_n a) auf einer Kante und b) in einer Ecke in \mathbb{R}^3

3.5 Funktionsinhärente Ecken und Kanten

In einigen Fällen - besonders bei Isotropie oder transversaler Isotropie, wie in Kap. 5 gezeigt wird - kommt es vor, dass sich Versagensbedingungen ergeben, die die Forderungen nach stetiger Differenzierbarkeit (3-2) verletzen und daher an ausgewählten Spannungspunkten auf $F(\mathbf{s}) = 0$ keinen eindeutigen Gradienten bzw. einen unstetigen Gradientenverlauf besitzen. Diese Punkte werden als „funktionsinhärente“ Kanten bzw. Ecken bezeichnet. Ein Beispiel dafür ist der Kegelspitz der isotropen Drucker-Prager-Versagensbedingung, der im Hauptnormalspannungsraum auf dem Schnittpunkt mit der hydrostatischen Achse liegt.

3.5.1 Beseitigung von funktionsinhärenten Ecken und Kanten

Um solche ungewünschten Funktionseigenschaften zu beheben, werden zwei Vorgehensweisen, die Modifikation und die Diskretisierung, angewandt.

Mit dem Begriff „Modifikation“ wird die Konstruktion einer Näherungsfunktion bezeichnet, die sich beliebig genau an die ursprüngliche Funktion anpassen lässt, aber an allen Funktionspunkten einen stetigen Verlauf der ersten und zweiten Ableitung besitzt. Durch solche Näherungsfunktionen werden funktionsinhärente Ecken und Kanten „abgerundet“.

Bei der „Diskretisierung“ wird die Ausgangsfunktion durch eine diskrete Anzahl von Teilfunktionen, die jede für sich die Funktionsanforderungen (3-2) erfüllt, angenähert. Die Kanten und Ecken bleiben dabei erhalten, sind aber reguläre Ecken oder Kanten, die von den Flächen der Diskretisierung gebildet werden.

3.5.2 Beispiel einer Funktion mit funktionsinhärenter Ecke

3.5.2.1 Ebene Konusfunktion

Gegeben ist die Funktion:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{a_1} + \sqrt{\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2} - 1 \quad a_1 \in (0, \pm\infty), a_2 \in (0, +\infty) \quad (3-8)$$

In der impliziten Form $F = 0$ wird eine Kurve in der $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatenebene beschrieben (schwarze Kurve in Bild 3.3). Die beiden Parameter a_1 und a_2 geben den Abstand der Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen an. Der Parameter a_1 kann dabei negativ sein; um den Funktionstyp nicht zu verändern, müssen beide Parameter einen endlichen Wert besitzen und größer als null sein.

Beim Schnitt der Kurve mit der x_1 -Achse ist der Gradientenverlauf \mathbf{g} unstetig und hat den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert:

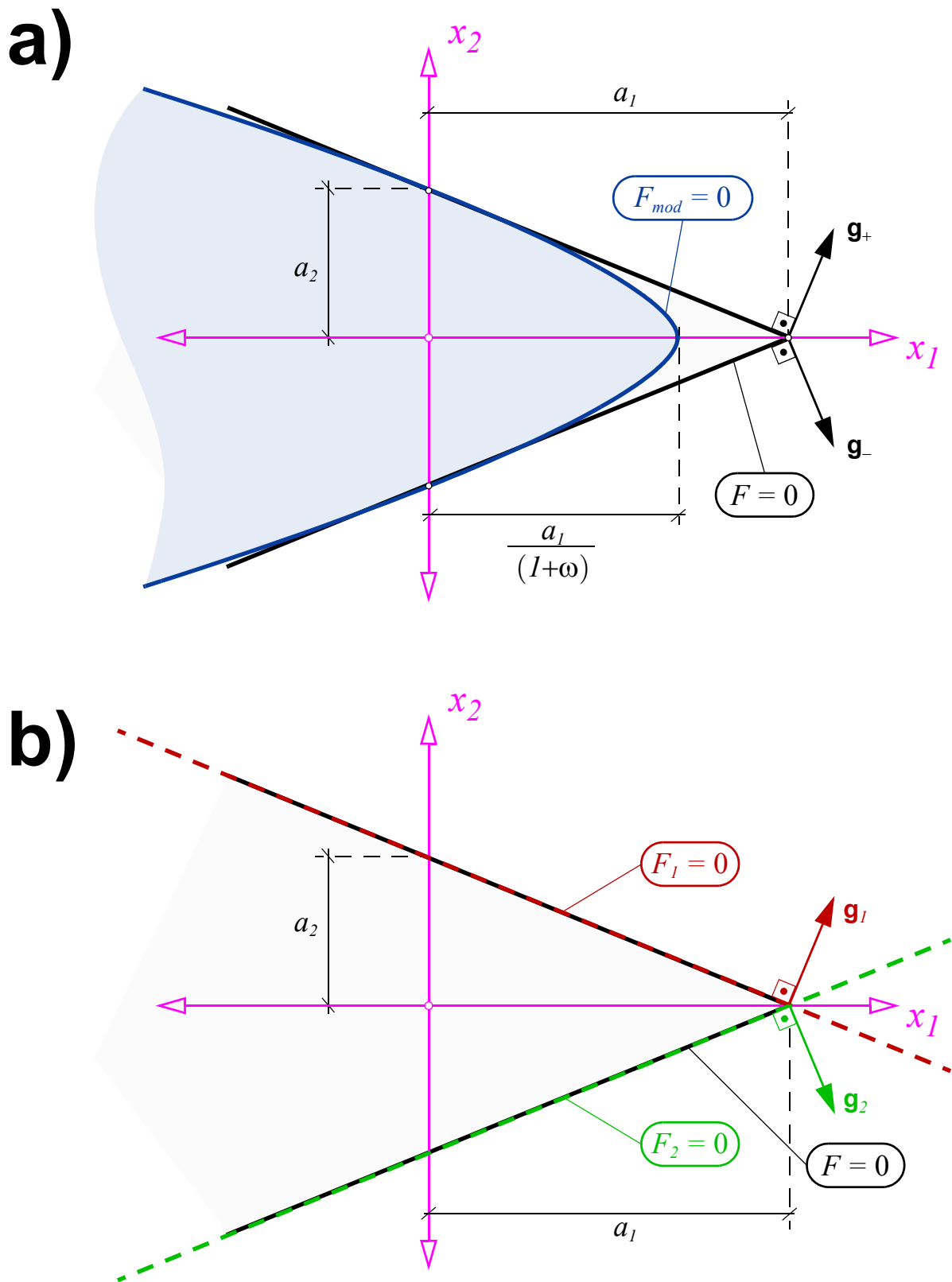


Bild 3.3 Konusfunktion (schwarz) mit funktionsinhärentem „Spitz“ bei $x_1 = a_1$ und $x_2 = 0$; Näherung an die Konusfunktion durch modifizierte Funktion (blau) oder zwei Geraden (rot und grün)

$$\mathbf{g}_+ = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_- = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ -\frac{1}{a_2} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

Die Funktion hat dort eine funktionsinhärente Ecke (Bild 3.3).

3.5.2.2 Variante a: Modifikation

Zur Modifikation der Funktion (3-8) wird ein Parameter ω eingeführt, der zwischen 0 und eins liegen kann. Bei $\omega = 0$ erhält man die ursprüngliche Funktion. Die modifizierte Funktion

$$F_{mod}(\mathbf{x}) = (1 - \omega^2) \frac{x_1}{a_1} + \sqrt{(1 - \omega^2) \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 + \omega^2} - 1 \quad 0 < \omega < 1 \quad (3-10)$$

ist eine Hyperbelfunktion, die im Wertebereich von ω einen stetigen Gradientenverlauf besitzt. Bei einem sehr kleinen Wert von ω nähert sich die Funktion F_{mod} der Ausgangsfunktion F an, wobei die Kurve $F_{mod} = 0$ immer innerhalb des Kegels von $F = 0$ liegt (Bild 3.3 a). Die beiden Kurven berühren sich beim Schnittpunkt mit der x_2 -Achse. Der Schnittpunkt mit der x_1 -Achse liegt bei $a_1/(1+\omega)$. Bei der modifizierten Funktion bereitet dieser Punkt keine Schwierigkeiten, weil der Gradient dort eindeutig berechenbar ist und stetig verläuft.

3.5.2.3 Variante b: Diskretisierung

Die zweite Variante ersetzt bzw. diskretisiert die vorgegebene Funktion (3-8) durch zwei Geradenfunktionen:

$$F_1 = \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - 1 \quad F_2 = \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - 1 \quad (3-11)$$

In Bild 3.3 sind diese beiden Funktionen mit $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ als rote bzw. grüne Gerade eingezeichnet. In diesem einfachen Beispiel sind die Geradenfunktionen keine Näherungen, sondern decken sich mit der Ausgangsfunktion. Bei beiden Funktionen sind die Gradienten \mathbf{g}_i konstant, haben also jeweils einen stetigen Verlauf - auch im Punkt $x_1 = a_1$ und $x_2 = 0$. Damit fällt die entstandene Ecksituation in die Klasse der regulären Eck- und Kantenpunkte, wie sie in Kap. 3.4 definiert wurden. Die funktionsinhärente Ecke wurde durch das Diskretisierungsverfahren beseitigt.

3.6 Symmetrienachweis des erlaubten Bereichs

Der erlaubte Bereich \mathbb{E} , der i.A. von mehreren Versagensbedingungen $F_i = 0$ begrenzt wird, kann bezüglich des gewählten Materialhauptachsensystems mit den drei orthonormierten Vektoren \mathbf{e}_k ($k = 1, 2, 3$) symmetrisch sein. Der Nachweis der Symmetrie ist mit der koordinatenfreien, symbolischen Schreibweise (Anhang A) mit weniger Aufwand und direkter als mit der - auf ein spezielles Koordinatensystem bezogenen - Voigt'schen Matrixdarstellung zu führen. Statt des Spannungsvektors \mathbf{s} wird hier daher der Spannungstensor \mathbf{S} geschrieben.

Um eine eventuell vorhandene Symmetrie nachzuweisen, wird die Materialorientierung durch eine Drehung \mathbf{R} verändert, der aufgebrauchte Spannungszustand \mathbf{S} wird aber beibehalten. Tritt im ungedrehten und im gedrehten Zustand bei demselben Spannungszustand \mathbf{S} dasselbe Versagen mit demselben Versagensmechanismus auf, ist \mathbb{E} bei der ausgeführten Drehung des Körpers symmetrisch. Gibt es mehrere solcher Drehungen, die die Versagensantwort des Körpers unverändert lassen, werden diese in Gruppen, sogenannte Symmetriegruppen, zusammengefasst. Im Fall der Isotropie umfasst die Symmetriegruppe z.B. alle Drehungen, siehe auch Anhang C, Kap. C.4.

3.6.1 Materialhauptachsensystem & Strukturtenoren

Die Versagensbedingungen $F_i = 0$ sind Funktionen des Spannungstensor \mathbf{S} und der Strukturtenoren $\mathbf{P}_{r's'}$. Mit den Strukturtenoren, die sich durch das dyadische Produkt der drei Vektoren \mathbf{e}_k bilden lassen, werden die Spannungskomponenten im Materialhauptachsensystem berechnet:

$$S_{r's'} = \mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{r'} = (\mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}) : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'} + \mathbf{e}_{s'} \otimes \mathbf{e}_{r'}) : \mathbf{S} = \mathbf{P}_{s'r'} : \mathbf{S} \quad r, s \in \{1, 2, 3\} \quad (3-12)$$

Da hier die symbolische Schreibweise benutzt wird, ist eine leichte und nur formale Abänderung zur Definition (3-3) des erlaubten Bereichs notwendig:

$$\mathbb{E} = \{ \mathbf{S} \in \mathbb{S} \mid F_i(\mathbf{S}, \mathbf{P}_{r's'}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \} \quad (3-13)$$

Der Spannungstensor \mathbf{S} ist aus der Menge aller symmetrischen Tensoren zweiter Stufe \mathbb{S} zu nehmen, siehe Simo/Hughes (1998).

3.6.2 Symmetrienachweis

Um das Vorhandensein von Symmetrien von \mathbb{E} abzu prüfen bzw. experimentell nachzuweisen, ist in drei Schritten vorzugehen:

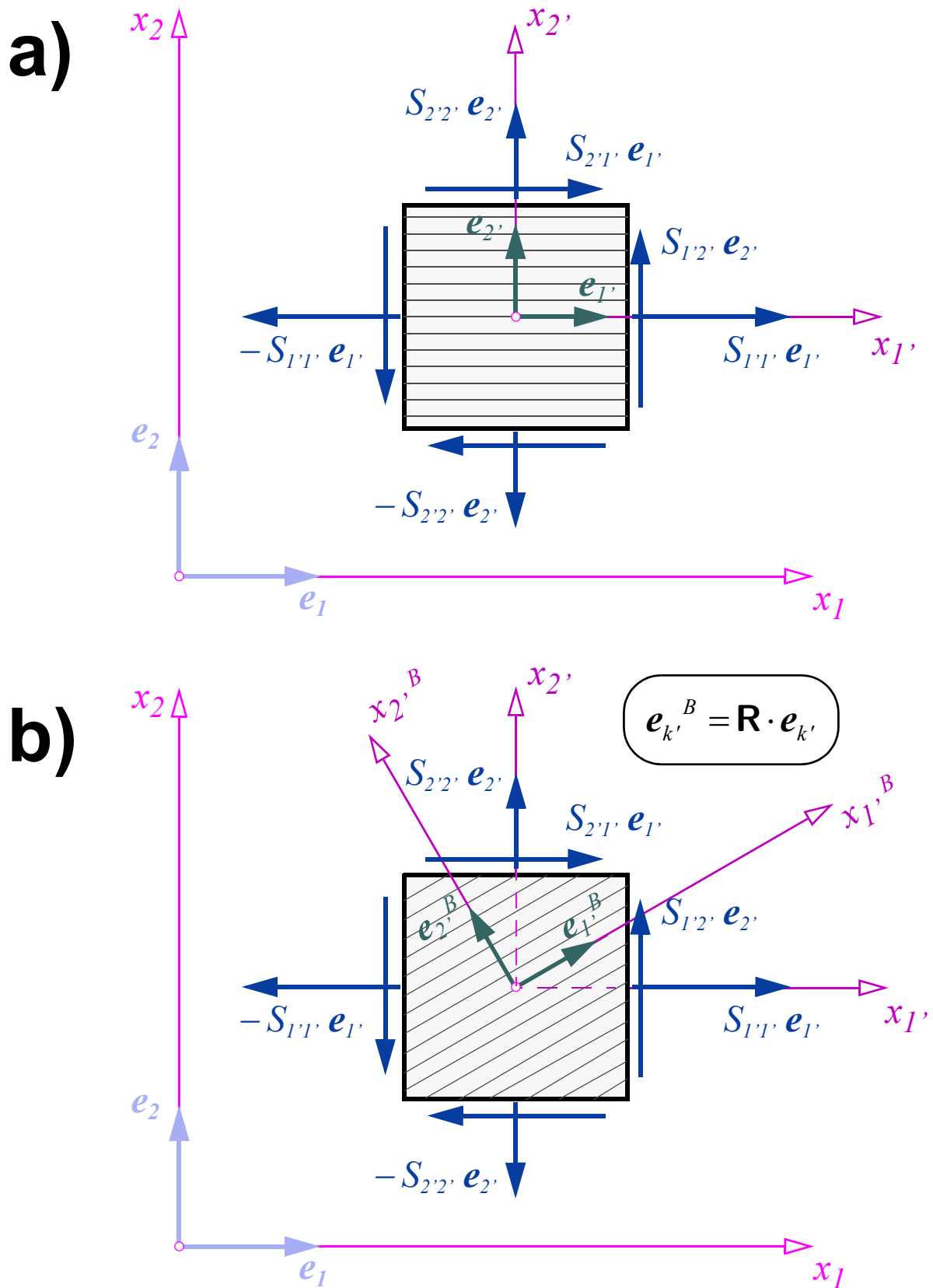


Bild 3.4 Schematische Darstellung der beiden Versuchsanordnungen beim Symmetrienachweis:
 a) Versuchsanordnung A - Referenzversuch; b) Versuchsanordnung B - gedrehte Materialorientierung bei gleichbleibendem Spannungszustand

3.6.2.1 Step 1 - Versuchsanordnung A: Referenzversuch

Ein Probekörper wird mit einer bestimmten Ausrichtung der Materialstruktur relativ zum räumlich fix verankerten $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Laborkoordinatensystem in die Prüfmaschine eingebaut (Bild 3.4). Das Materialhauptachsensystem deckt sich in diesem Fall mit dem Laborkoordinatensystem.

Anschließend wird ein spezieller Beanspruchungszustand $\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_{k'} \otimes \mathbf{e}_k$ auf den Probekörper aufgebracht und solange gesteigert, bis Versagen eintritt. Die Versagensspannung wird gemessen und der zugehörige Versagensmechanismus dokumentiert.

3.6.2.2 Step 2 - Versuchsanordnung B: Änderung der Materialorientierung

Bei der zweiten Anordnung wird der Probekörper verdreht zum Referenzversuch in die Prüfmaschine eingebaut (Bild 3.4 b). Die Drehung erfolgt über einen reellen orthogonalen Tensor \mathbf{R} . Die gedrehten Größen sind mit dem hochgestellten Index B gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k'}^B &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{k'} \\ \mathbf{P}_{r's'}^B &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_{r's'} \cdot \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{r'}^B \otimes \mathbf{e}_{s'}^B + \mathbf{e}_{r'}^B \otimes \mathbf{e}_{s'}^B) \end{aligned} \quad (3-14)$$

Es wird derselbe Beanspruchungszustand $\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_{k'} \otimes \mathbf{e}_k$ wie bei Versuchsanordnung A auf den Probekörper aufgebracht und bis zum Versagen gesteigert. Die zugehörigen Versagensbedingungen und der erlaubte Bereich lauten bei gedrehter Materialorientierung:

$$\begin{aligned} F_i^B &= F_i(\mathbf{S}, \mathbf{P}_{r's'}^B) = F_i(\mathbf{S}, \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_{r's'} \cdot \mathbf{R}^T) \\ \mathbb{E}^B &= \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{S} \mid F_i(\mathbf{S}, \mathbf{P}_{r's'}^B) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \end{aligned} \quad (3-15)$$

3.6.2.3 Step 3 - Symmetrienachweis und Symmetriebedingung

Falls für verschiedene Drehungen \mathbf{R} , die in der Menge S zusammengefasst werden, sich bei beiden Versuchsanordnungen dieselben qualitativen und quantitativen Versagensszenarien ergeben und sich die erlaubten Bereiche \mathbb{E}^B und \mathbb{E} decken, existiert eine Symmetrie (bezüglich der Symmetriegruppe S) von \mathbb{E} . Die Symmetriebedingung lautet:

$$\mathbb{E}^B = \mathbb{E} \quad \forall \mathbf{R} \in S \quad (3-16)$$

Die Menge S an orthogonalen Tensoren gibt den Typ der Symmetrie an. Im Box C.4 sind die im Ingenieurwesen gängigen Symmetriegruppen angegeben.

Vorsicht: Im Allgemeinen gilt - trotz Erfüllung der Symmetriebedingung (3-16) -:

$$F_i^B \neq F_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall \mathbf{R} \in S \quad (3-17)$$

Das heißt, die Symmetrie der einzelnen Versagensbedingungen ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Symmetrie von \mathbb{E} ! Nur im Sonderfall mit einer einzigen Versagensbedingung reduziert sich die Symmetriebedingung (3-16) auf die Gleichung $F_i^B = F_i$.

3.6.3 Beispiel zum Symmetrienachweis

Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass bei vorhandener Symmetrie von \mathbb{E} die einzelnen Versagensbedingungen $F_i^B = F_i$, die den erlaubten Bereich begrenzen, diese Symmetrieeigenschaft nicht unbedingt besitzen. Diese Situation lässt sich an einem einfachen Beispiel illustrieren. Aufgrund der einfachen Gestalt der Gleichungen wird in diesem Beispiel zurück auf die Matrixschreibweise gewechselt. Anstatt Funktionen F_i mit dem Spannungstensor als Argument, werden Funktionen in \mathbf{x} betrachtet.

3.6.3.1 Funktionen F_i und erlaubter Bereich \mathbb{E}

Durch die beiden Funktionen

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{P}_{i'}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{i'} \mathbf{x} - r^2 \quad i = 1, 2 \quad (3-18)$$

$$\mathbf{P}_{1'} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{2'} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

wird die Fläche des Quadrats

$$\mathbb{E} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_i(\mathbf{x}, \mathbf{P}_{i'}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2\} \right\} \quad (3-19)$$

mit den Seitenabmessungen $2r$ begrenzt (Bild 3.5). Das lokale Bezugssystem ist um 45° zu den globalen Koordinatenachsen gedreht.

3.6.3.2 Drehung der Fläche

Mit der Drehung

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

um den Winkel φ ergeben sich die verdrehte Fläche \mathbb{E}^B und die begrenzenden Funktionen F_i^B zu:

$$\begin{aligned} F_i^B &= \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{P}_{i'} \mathbf{R}^T \mathbf{x} - r^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{i'}^B \mathbf{x} - r^2 \\ \mathbb{E}^B &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_i^B \leq 0, \forall i \in \{1, 2\} \right\} \end{aligned} \quad (3-21)$$

3.6.3.3 Symmetriebedingung und Symmetriegruppe S

Nur für die Transformationsmatrizen aus der Gruppe

$$S = \{\pm \mathbf{J}, \mathbf{R}^{\pi/2}\} \quad (3-22)$$

gilt die Symmetriebedingung $\mathbb{E}^B = \mathbb{E}$.

Die Symmetriebedingung gilt selbstverständlich auch für alle Produkte zwischen den Elementen der Symmetriegruppe S . Wie bereits oben angesprochen, gilt aber bei Symmetrie nicht unbedingt $F_i^B = F_i$. Das lässt sich leicht mit der Drehung $\mathbf{R}^{\pi/2}$ zeigen, bei der $\mathbb{E}^B = \mathbb{E}$, aber nicht $F_1^B = F_2$ und $F_2^B = F_1$ gilt.

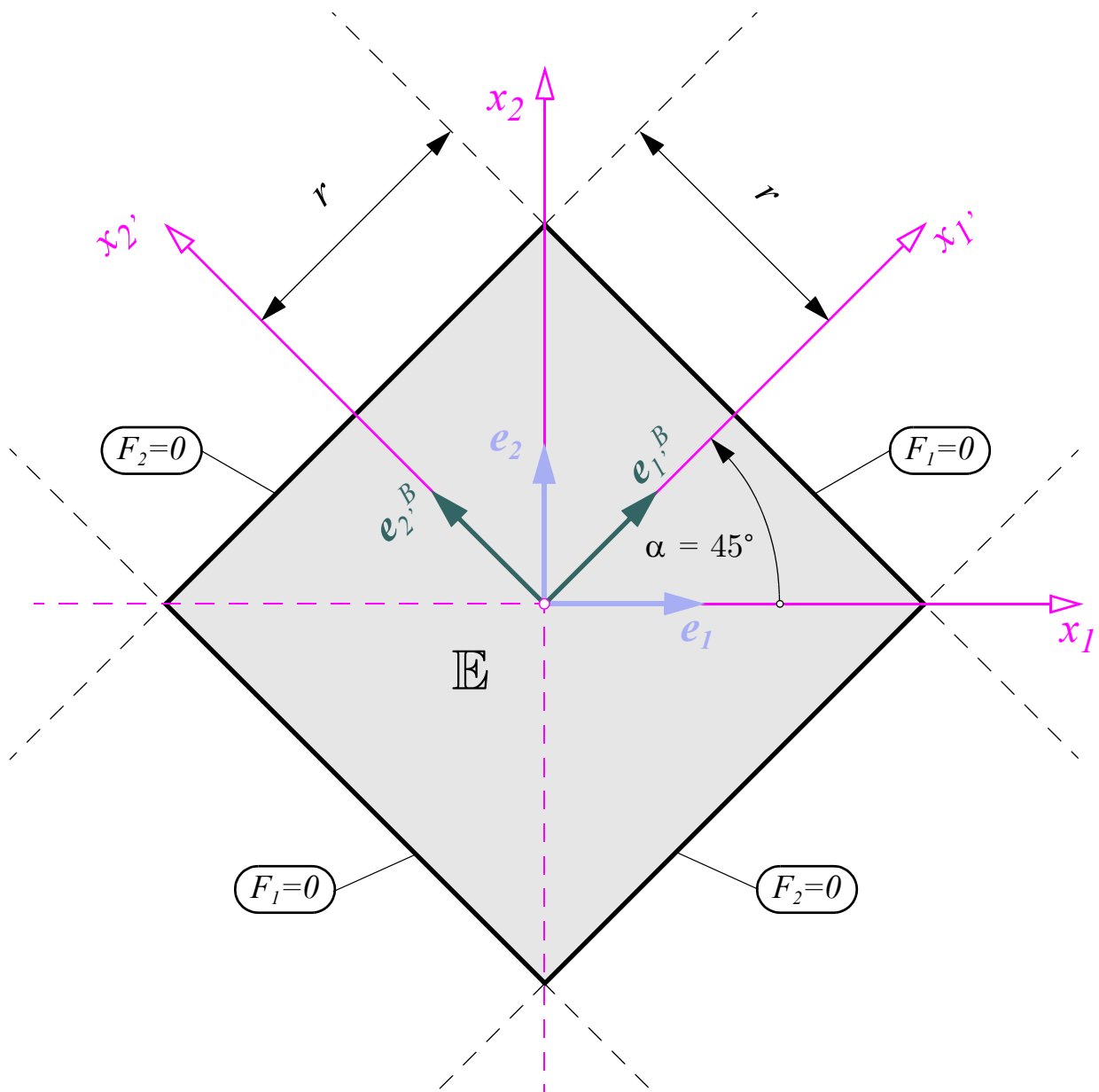


Bild 3.5 Durch die beiden quadratischen Funktionen F_i abgegrenzte Quadratfläche \mathbb{E}

3.7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wurde der formal-mathematische Rahmen zur Beschreibung von Versagensbedingungen $F(\mathbf{s})$ festgelegt. Besonders wichtig sind dabei die Funktionseigenschaften Konvexität und kontinuierliche Differenzierbarkeit, um später diese Funktionen problemfrei in die ausgearbeiteten Rechenprozeduren einzubauen.

Als hilfreich wird sich auch die eingeführte graphische Vorstellung des sechsdimensionalen Spannungsraums erweisen. In diesem begrenzen die Versagensbedingungen den erlaubten Bereich \mathbb{E} . Aufgrund der Konvexität der einzelnen Versagensbedingungen F_i ist auch der erlaubte Bereich konvex. Bei mehreren Versagensbedingungen ist die Oberfläche von \mathbb{E} eine aus gekrümmten oder ebenen Teilflächen bestehende konvexe Fläche. Die Schnittbereiche zwischen diesen Teilflächen werden in Kanten, Ecken und Berührungspunkte eingeteilt. Zusätzlich wurde der Begriff des Pyramidenpunktes eingeführt. Der Nutzen dieser geometrischen Definitionen (und deren Rückinterpretation auf ein mechanisches Verhalten) zeigt sich in Teil II dieser Arbeit.

Bei symmetrischem Materialversagen muss \mathbb{E} die Symmetriebedingung für die entsprechende Symmetriegruppe erfüllen.

Alle Festlegungen und Definitionen in diesem Kapitel wurden allgemein gehalten, ohne dabei auf eine konkrete Versagensbedingung einzugehen. Verschiedene Versagensbedingungen werden in den nächsten Kapiteln vorgestellt und hergeleitet, dabei wird zwischen zwei Typen unterschieden:

- Mohr-Typ-Versagensbedingungen und
 - Mises-Typ-Versagensbedingungen.
-

4

Mohr- vs. Mises- Typ-Versagens- bedingungen

4.1 Einleitung

4.1.1 Mohr- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen

In diesem Kapitel wird versucht, die kaum überschaubare Anzahl an bestehenden Versagensbedingungen in zwei Hauptkategorien einzuteilen, für die die Bezeichnungen Mohr-Typ und Mises-Typ eingeführt werden.

Christian Otto Mohr formulierte erstmals Versagensbedingungen, die auf der Vorstellung einer Versagensebenenorientierung und einem zuordenbaren Versagensmechanismus beruhen. Eine Vielzahl von Versagensbedingungen aus den unterschiedlichsten technischen Fachdisziplinen hat ihren Ursprung in dieser elementaren Idee. Diese werden in der Klasse der Mohr-Typ-Versagensbedingungen zusammengefasst.

Richard v. Mises (1913) gibt, um den Fließbeginn von isotropen metallischen Werkstoffen zu beschreiben, eine quadratische Bedingung in den Spannungen an. Diese Idee wird von ihm 1928 erweitert, wobei die Restriktion der Isotropie fallen gelassen wird. Die Mises-Typ-Versagensbedingungen haben den Charakter von Interpolationsfunktionen, die an vorhandene Versuchsergebnisse angepasst werden, oft auch ohne zwischen klar unterscheidbaren Versagensmechanismen zu differenzieren. Die bei der Konstruktion von Mohr-Typ-Versagensbedingungen direkte Einsicht auf den Versagensmechanismus inklusive der zugehörigen Versagensebenenorientierung geht bei den Mises-Typ-Versagensbedingungen verloren.

Hauptaugenmerk wird im folgenden Abschnitt auf die Mohr-Typ-Versagensbedingungen und deren Anwendung auf die Versagensbeschreibung von strukturierten Materialien gelegt.

4.1.2 Stand der Forschung und der Lehre

Eine ähnliche Einteilung von Versagensbedingungen, aber speziell für Geomaterialien, geben Duveau/Shao/Henry (1998). Sie bezeichnen die Mises-Typ-Versagensbedingungen als *mathematical continuous approach* und die Mohr-Typ-Versagensbedingungen als *discontinuous weakness plane based models*.

In den meisten Lehrbüchern ist die Darstellung von Versagensbedingungen auf den isotropen Materialsymmetriefall beschränkt, z.B. Mang/Hofstetter (2000), Ulm/Coussy (2003). Die nicht mehr überschaubare Vielzahl an isotropen Versagensbedingungen wird nach unterschiedlichsten Aspekten geordnet, z.B. nach der Anzahl der benötigten Materialparameter, nach der Anwendung auf spezielle Materialien (Beton, metallische Werkstoffe, Geomaterialien,...) und so weiter.

Weit geringer an Zahl ist die Literatur bei anisotropen Versagensbedingungen. In Standardlehrbüchern werden in den meisten Fällen nur die Funktionen nach Hill, Hoffman oder Tsai-Wu dargestellt, siehe z.B. Jirásek/Bažant (2002). Die Spezialliteratur zu anisotropen

Versagensbedingungen wiederum wird von einem stark mathematisch-formalistischen Zugang - Stichwort: Invarianten - beherrscht, z.B. Boehler, ed. (1987).

4.1.3 Aufgabenstellung & Zielsetzung

Als Gegenentwurf zur oben beschriebenen Darstellung der Thematik in Standardlehrbüchern ist dieses Kapitel gedacht. Dabei werden alle Versagensbedingungen in zwei Gruppen eingeteilt, für die die Bezeichnungen Mohr-Typ und Mises-Typ eingeführt werden. Diese Unterscheidung beruht auf den jeweils zugrundeliegenden Ideen, um die Versagensbedingung zu formulieren bzw. zu konstruieren und nicht auf formal-mathematischen Funktionseigenschaften, wie z.B. Isotropie und spezielle Arten von Anisotropie. Diese Betrachtung wird mit dem Bestreben durchgeführt, ein einfaches Ordnungsschema für Versagensbedingungen einzuführen und den Versagensbeginn von strukturierten Materialien zu beschreiben. Besonders die Möglichkeiten der Mohr'schen Idee, deren Leistungsfähigkeit und Variantenreichtum sollen aufgezeigt werden.

Alle hergeleiteten Versagensbedingungen werden abschnittsweise in Katalogen zusammengefasst. Diese Kataloge erlauben einen Zusammenbau von beliebig vielen unterschiedlichen Versagensbedingungen, denen später jeweils ein eigener Versagensmechanismus zugeordnet wird. Dabei soll nicht darauf geachtet werden, ob diese unbeschränkte Anzahl an simultan aktivierbaren Versagensmechanismen zu Herausforderungen oder Schwierigkeiten bei der rechnerischen Umsetzung des Modells führt.

Zusätzlich enthält der Abschnitt einen chronologischen Überblick zur Ideengeschichte der beiden Versagensbedingungstypen.

Kurz zusammengefasst lauten die Hauptziele des Kapitels:

- Etablierung der Einteilung in Mohr- und Mises-Typ-Versagensbedingungen,
- Hauptaugenmerk der Darstellung auf Mohr-Typ-Versagensbedingungen,
- Aufbau und Bereitstellung eines generellen Katalogs von Versagensbedingungen, die beliebig kombiniert werden können, um das Versagen von strukturierten Materialien zu beschreiben und
- ein uneingeschränkter und ungehemmter Zugang zur Beschreibung des Versagensbeginns durch beliebig viele Versagensbedingungen.

4.1.4 Inhalt von Kapitel 4

4.2 Mohr-Typ-Versagensbedingungen

4.3 Beispiel: Mohr-Typ-Versagensbedingungen bei kristallinen Gleitsystemen

4.4 Mises-Typ-Versagensbedingungen

4.5 Mohr-Typ- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen - Zusammenfassung & Ausblick

4.2 Mohr-Typ-Versagensbedingungen

In diesem Kapitel wird die Idee von Otto Mohr vorgestellt, nach dem eine der beiden Versagensbedingungstypen benannt ist. Die von ihm ursprünglich formulierte Hypothese bezieht sich auf Werkstoffe mit isotropem Versagensverhalten. Die Grundidee lässt sich aber auch auf strukturierte Materialien übertragen. Kerngedanke ist, dass Versagen in speziellen Ebenenorientierungen stattfindet. Versagen wird erreicht, sobald die drei Spannungskomponenten, die in diesen Ebenenorientierungen wirken, einen Grenzspannungszustand erreichen. Dieser lokale Grenzspannungszustand wird durch die Versagensbedingung F' angegeben.

4.2.1 Mohr'sche Hypothese für isotrope Werkstoffe

In seiner im Jahr 1900 veröffentlichten Abhandlung „*Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?*“ - in einer erweiterten Fassung zu finden in Mohr (1928) - hat Christian Otto Mohr (Bild 4.1) eine „...neue Hypothese über die Elastizitätsgrenze und des Bruches für isotrope Werkstoffe...“ formuliert:

„Die zuletzt besprochene Hypothese (Anmerkung: die Schubspannungshypothese nach Tresca) scheint der Wahrheit insofern näher zukommen, als sie die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen als die maßgebenden Größen in Betracht zieht; denn das Gleiten und Brechen wird doch wohl zunächst abhängig sein von den Spannungen derjenigen Flächen, in welchen diese Bewegungen wirklich stattfinden.[...] Die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials werden bestimmt durch die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen.“

Mohr schränkt seine Betrachtungen auf Werkstoffe mit isotropem Materialverhalten ein und formuliert die Versagensbedingung in der resultierenden Schubspannungskomponente τ und der Normalspannung σ in der Versagensebenenorientierung. Mittels des Mohr'schen Kreises, dessen systematische Darstellung die Abschnitte 1 bis 7 der Abhandlung in Mohr (1928) einnehmen, wird die Versagensbedingung durch die größte und kleinste Hauptnormalspannung ausgedrückt. Die mittlere Hauptnormalspannung scheint nicht auf. Da der Hauptkreis i.A. die τ - σ -Grenzspannungskurve an zwei Punkten berührt, ergeben sich i.A. bei jedem Belastungszustand zwei Versagensebenenorientierungen:

„In jedem Körperpunkte, in welchem die Elastizitätsgrenze oder die Bruchgrenze überschritten wird, bilden sich zwei Gleitflächen; dieselben [...] schließen mit der Richtung einer jeden der Hauptspannungen [...] gleich große Winkel ein.“

Anschließend wird eine vereinfachte lineare Form der τ - σ -Hüllkurve - die heute bekannte Mohr-Coulomb-Versagensbedingung - angegeben und durch die Hauptnormalspannungen ausgedrückt.

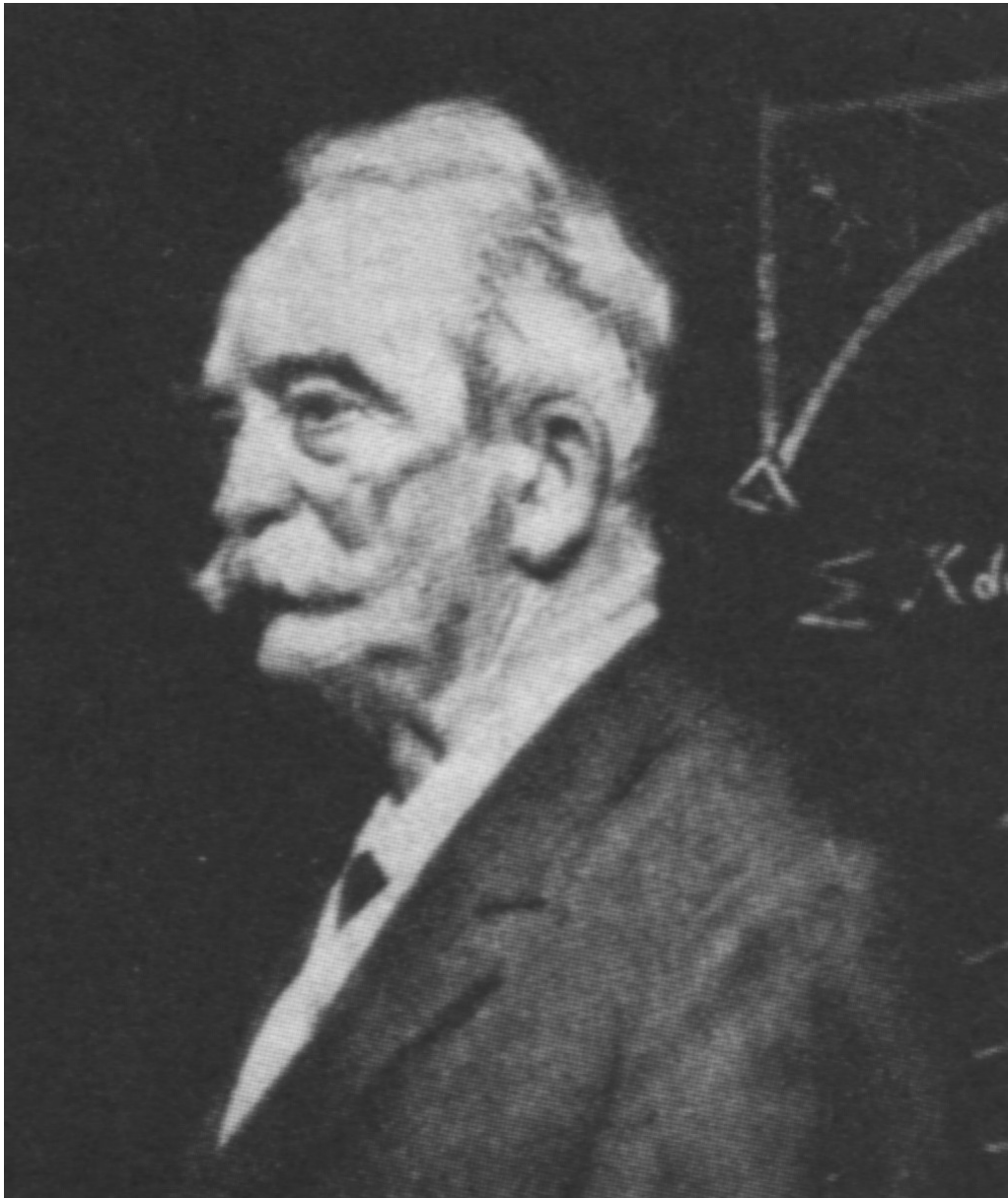


Bild 4.1 Christian Otto Mohr (1835-1918); Professor am Polytechnikum Stuttgart (1867-1873) und am Polytechnikum Dresden (1873-1900)

4.2.2 Verallgemeinerung der Mohr'schen Hypothese

Die von Mohr formulierte Grundidee und Vorgehensweise ist aber nicht nur auf Materialien mit isotropem Versagensverhalten beschränkt. Durch Aufhebung der Isotropieforderung entsteht eine verallgemeinerte Klasse von Versagensbedingungen, die als Mohr-Typ-Versagensbedingungen bezeichnet werden.

Durch Versuche und Beobachtungen lassen sich in strukturierten Materialien ausgewählte Versagensebenenorientierungen (von Mohr als Gleit- bzw. Bruchflächen bezeichnet) identifizieren, in welchen der Versagensvorgang ansetzt und sich ausbildet. Ebendieser Gedanke wurde von Mohr (siehe oben) formuliert und rechtfertigt den hier gewählten Begriff „Mohr-Typ“. Diese Bezeichnung wurde bereits von Jeltsch-Fricker (1996) für die Beschreibung des Versagensbeginns von Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffen eingeführt. Mohr-Typ-Versagensbedingungen werden besonders in der Geomechanik verwendet: Duveau/Shao/Henry (1998) bezeichnen diese als *discontinuous weakness plane based models*; Pietruszczak/Mróz (2001) als *critical plane approach*.

Durch Fallenlassen der Isotropieannahme ergeben sich als Konsequenz die folgenden wesentlichen Abweichungen von der ursprünglichen Mohr'schen Hypothese:

- Die Versagensebenenorientierungen \mathbf{n} sind bereits vorgegeben und müssen nicht - wie im isotropen Fall - durch die Konstruktion des Mohr'schen Kreises bestimmt werden.
- Im isotropen Fall kommt es aufgrund der Materialsymmetrie zur Aktivierung von mindestens zwei Versagensebenenorientierungen (außer im Fall der Rankine-Versagensbedingung), die relativ zur Raumlage der größten und kleinsten Hauptnormalspannungen liegen. In der verallgemeinerten Mohr'schen Idee ist dies nicht der Fall, da die Versagensebenenorientierungen durch die Materialstruktur vorgegeben sind und nicht relativ zu den Hauptnormalspannungsrichtungen.

4.2.3 Konstruktion der Mohr-Typ-Versagensbedingung

Die Vorgehensweise zur Konstruktion der Mohr-Typ-Versagensbedingung baut sich aus den folgenden Teilschritten auf:

- Identifikation einer Ebenenorientierung im RME, in der potentiell Versagen stattfinden kann. Diese Versagensebenenorientierung wird durch den Normalenvektor \mathbf{n} angegeben,
- Berechnung der Spannungskomponenten (eine Normalspannung- und zwei Schubspannungskomponenten) in dieser Orientierung,
- Formulierung der Versagensbedingung(en) F'' in den drei lokalen Spannungskomponenten und
- Transformation der Spannungskomponenten in das Materialhauptachsensystem zur Formulierung der Versagensbedingung F' in den Spannungen \mathbf{s}' .

4.2.3.1 Beschreibung der Versagensebenenorientierung

In der Darstellung des RME (Bild 4.2) wird die Richtung der Versagensebenenorientierung \mathbf{n} aus Anschaulichkeitsgründen zusätzlich durch eine endliche Schar von parallelen Ebenen angedeutet. Um eine eventuell mögliche Strukturiertheit der Versagensebenenoberfläche erfassen zu können, werden die zwei Einheitsvektoren \mathbf{l} und \mathbf{m} eingeführt. In Bild 4.2 ist durch parallele Linien auf der Schnittfläche eine Rillenrichtung angedeutet. Die Rillen verlaufen dabei parallel zur x_m -Achse.

Das orthonormierte Dreibein $\{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ zur Beschreibung der Versagensebenenorientierung liegt relativ zu den Materialhauptachsen $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= c_{l1'} \mathbf{e}_{1'} + c_{l2'} \mathbf{e}_{2'} + c_{l3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{m} &= c_{m1'} \mathbf{e}_{1'} + c_{m2'} \mathbf{e}_{2'} + c_{m3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{n} &= c_{n1'} \mathbf{e}_{1'} + c_{n2'} \mathbf{e}_{2'} + c_{n3'} \mathbf{e}_{3'} \end{aligned} \quad (4-1)$$

4.2.3.2 Spannungskomponenten in der Versagensebenenorientierung

Nach der Hypothese von Mohr bestimmen die Spannungen, die in der Versagensebenenorientierung wirken, den Beginn des Versagensmechanismus. Durch Projektion der Spannungskomponenten des Materialhauptachsensystems \mathbf{s}' auf das Dreibein $\{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ ergeben sich die Normalspannungskomponente und die beiden Schubspannungskomponenten zu:

$$S_{nn} = \mathbf{p}_{nn}^T \mathbf{s}' \quad S_{ln} = \mathbf{p}_{ln}^T \mathbf{s}' \quad S_{mn} = \mathbf{p}_{mn}^T \mathbf{s}' \quad (4-2)$$

Die Projektionsmatrizen aus Gleichung (4-2) entsprechen den Zeilen der Spannungstransformationsmatrix \mathbf{T} in Voigt'scher Schreibweise (Anhang B, Box B.13):

$$\mathbf{p}_{nn} = \begin{bmatrix} c_{n1'} c_{n1'} \\ c_{n2'} c_{n2'} \\ c_{n3'} c_{n3'} \\ 2c_{n2'} c_{n1'} \\ 2c_{n3'} c_{n1'} \\ 2c_{n3'} c_{n2'} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{ln} = \begin{bmatrix} c_{l1'} c_{n1'} \\ c_{l2'} c_{n2'} \\ c_{l3'} c_{n3'} \\ c_{l2'} c_{n1'} + c_{l1'} c_{n2'} \\ c_{l3'} c_{n1'} + c_{l1'} c_{n3'} \\ c_{l3'} c_{n2'} + c_{l2'} c_{n3'} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{mn} = \begin{bmatrix} c_{m1'} c_{n1'} \\ c_{m2'} c_{n2'} \\ c_{m3'} c_{n3'} \\ c_{m2'} c_{n1'} + c_{m1'} c_{n2'} \\ c_{m3'} c_{n1'} + c_{m1'} c_{n3'} \\ c_{m3'} c_{n2'} + c_{m2'} c_{n3'} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

4.2.3.3 Formulierung der Versagensbedingung

Lokale Versagensbedingung

Durch die Funktion F'' wird die Interaktion der drei Spannungskomponenten, S_{nn} , S_{ln} und S_{mn} , bei Versagensbeginn in der betrachteten Orientierung beschrieben. Aufgrund des Bezugs der Spannungskomponenten auf das lokale $\{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ -Koordinatensystem, wird F'' lokale Versagensbedingung genannt. Bei Auftreten von Versagen gilt:

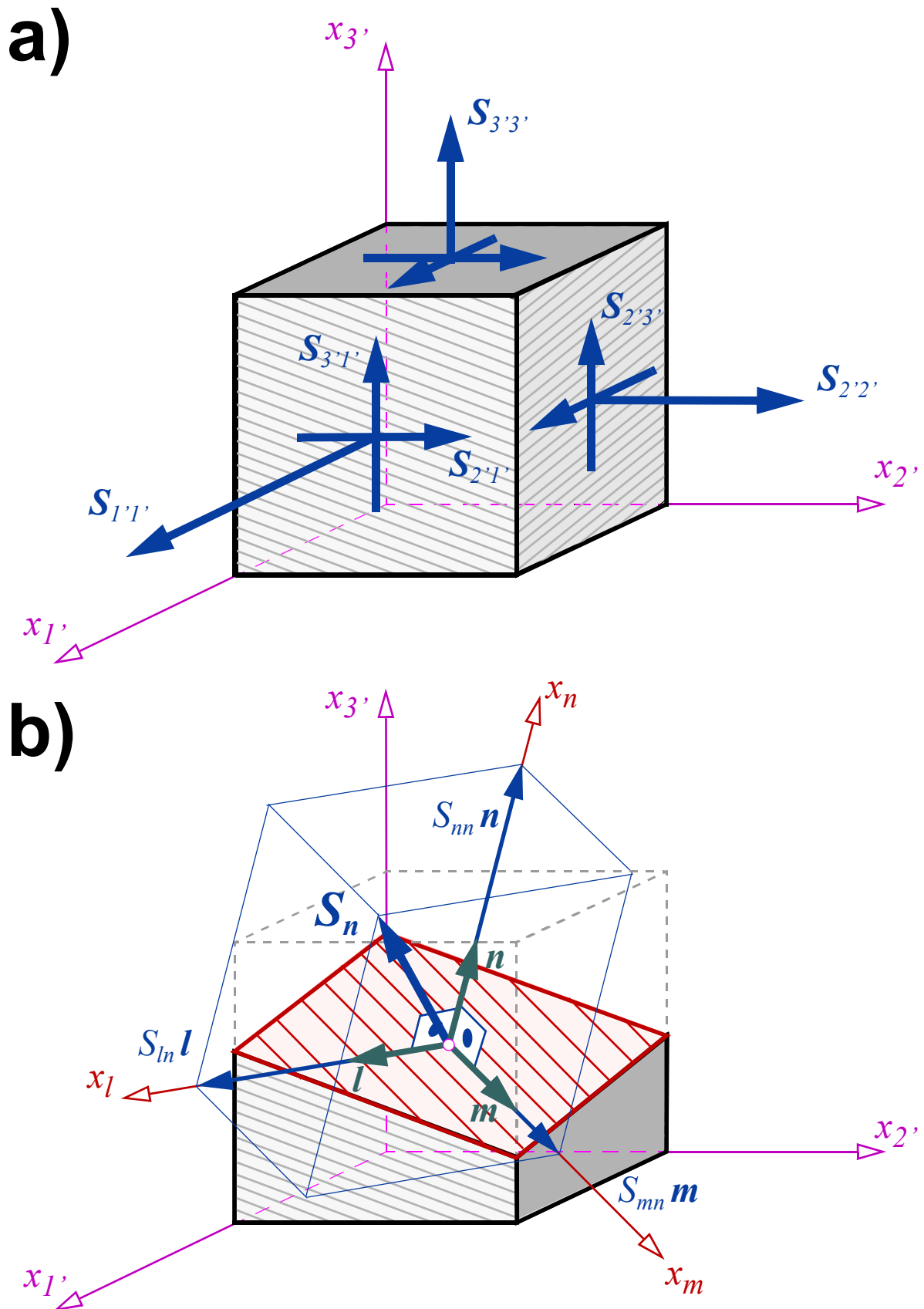


Bild 4.2 a) Spannungskomponenten im Materialhauptachsensystem; b) Spannungsvektor S_n mit den zugehörigen Komponenten in der Versagensebenenorientierung n

$$F''(S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}) = 0 \quad (4-4)$$

Bei diesen Versagensbedingungstypen wird eine Interaktion mit den Normalspannungskomponenten S_{ll} und S_{mm} und der Schubspannungskomponente S_{lm} , die nicht in der Versagensebene wirken, per definitionem ausgeschlossen.

Versagensbedingung im Materialhauptachsensystem

Mit den Projektionsmatrizen aus Gleichung (4-3) lässt sich die Versagensbedingung in den Spannungskomponenten \mathbf{s}' anschreiben:

$$F''(\mathbf{p}_{nn}^T \mathbf{s}', \mathbf{p}_{ln}^T \mathbf{s}', \mathbf{p}_{mn}^T \mathbf{s}') = F'(\mathbf{s}') \quad (4-5)$$

Die Versagensbedingung F' „erbt“ die funktionalen Eigenschaften, wie Konvexität und stetige Differenzierbarkeit, der lokalen Versagensbedingung F'' .

4.2.4 Versagensbedingungskatalog

In diesem Abschnitt sind fünf lokale Versagensbedingungstypen angeführt, die die geforderten funktionalen Eigenschaften aus Kap. 3.2 erfüllen. Die Konvexität im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum wird durch die lineare Transformation aus Gleichung (4-5) in den sechsdimensionalen \mathbf{s}' -Spannungsraum nicht zerstört. Eine strikt konvexe Funktion F'' in den lokalen Spannungskomponenten kann aber zu einer konvexen Funktion F' im \mathbf{s}' -Spannungsraum werden.

4.2.4.1 Elementare Mohr-Typ-Versagensbedingungen

Die nachfolgend angegebenen Funktionen sind linear bzw. quadratisch in den Spannungskomponenten S_{nn} , S_{ln} und S_{mn} und ergeben in der impliziten Flächendarstellungsform $F'' = 0$ im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Raum Ebenen bzw. Flächen 2. Ordnung. Durch die angegebenen quadratischen Funktionstypen ist eine praktikable Anpassung an die Versuchsdaten möglich. Als Typenbezeichnung für die einzelnen Versagensbedingungen wird der zum quadratischen Ausdruck zugehörige 3D-Flächentyp gewählt.

Höhergradige Polynome werden nicht verwendet, da mit der Polynomordnung die Anzahl der benötigten Kurven- bzw. Anpassungsparameter ansteigt und es kaum möglich ist die Anforderungen an die Versagensbedingung aus Kap. 3.2, z.B. Konvexität, abzukontrollieren bzw. zu gewährleisten. Außerdem ist ein qualitativer oder quantitativer Mehrwert durch eine vermeintlich bessere polynomiale Anpassung mit höhergradigen Polynomen an stark streuende Versuchsergebnisse nicht zu erwarten. Ersatzweise lassen sich z.B. mehrere quadratische oder lineare Funktionen kombinieren, um eine bessere Anpassung an die Messdaten zu erreichen.

Bezeichnung	Formelaufbau	Parameter
Typ 1 Ebene	$F'' = \frac{S_{nn}}{f_{nn}} + \frac{S_{ln}}{f_{ln}} + \frac{S_{mn}}{f_{mn}} - 1 \quad (4-6)$	3
Typ 2, gespiegelte Ebene	$F'' = \left(\frac{S_{nn}}{f_{nn}} + \frac{S_{ln}}{f_{ln}} + \frac{S_{mn}}{f_{mn}} \right)^2 - 1 \quad (4-7)$	3
Typ 3, Paraboloid	$F'' = \frac{S_{in}}{f_{in}} + \left(\frac{S_{jn}}{f_{jn}} \right)^2 + \left(\frac{S_{kn}}{f_{kn}} \right)^2 - 1 \quad \{i, j, k\} = \begin{cases} l, m, n \\ m, n, l \\ n, l, m \end{cases} \quad (4-8)$	3+1=4
Typ 4, Ellipsoid	$F'' = \left(\frac{S_{nn}}{f_{nn}} \right)^2 + \left(\frac{S_{ln}}{f_{ln}} \right)^2 + \left(\frac{S_{mn}}{f_{mn}} \right)^2 - 1 \quad (4-9)$	3
Typ 5, Hyperboloid	$F'' = (1 - \omega^2) \frac{S_{in}}{f_{in}} + \sqrt{(1 - \omega^2) \left[\left(\frac{S_{jn}}{f_{jn}} \right)^2 + \left(\frac{S_{kn}}{f_{kn}} \right)^2 \right]} + \omega^2 - 1 \quad (4-10)$	3+2=5

Box 4.1 Mohr-Typ-Versagensbedingungskatalog

Typ 1: Ebene

Die Lage der Ebene im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum wird durch die Parameter/Festigkeiten festgelegt. Wird ein Festigkeitswert plus/minus unendlich, liegt die Ebene parallel zu der Koordinatenachse, bei der die Festigkeit unendlich groß ist. Sind zwei Festigkeiten unendlich groß, steht die Ebene im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum normal auf die Achse mit dem einzig verbleibenden endlichen Festigkeitswert.

Typ 2: Gespiegelte Ebene

Wird die Versagensbedingung aus Gleichung (4-7) erfüllt, beschreibt diese zwei parallele Ebenen, die sich bei plus/minus f_{nn} , f_{ln} und f_{mn} mit den Koordinatenachsen des $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraums schneiden.

Typ 3: Paraboloid

Die lokalen Versagensbedingung $F'' = 0$ aus (4-8) beschreibt ein Paraboloid mit der S_{in} -Achse als Paraboloidachse. Der Querschnitt parallel zur $\{S_{jn}, S_{kn}\}$ -Ebene ergibt eine Ellipse. Neben den Festigkeitswerten ist die Spannungsachse i , um die das Paraboloid gebildet wird, als zusätzliche Eingangsgröße anzugeben. Die angeschriebenen Indizes i, j und k können - je nach gewählter Paraboloidachse - die in (4-8) angeführte Indexreihenfolge annehmen. Die Fläche ist zu der $\{S_{in}, S_{jn}\}$ - und der $\{S_{in}, S_{kn}\}$ - Ebene symmetrisch. Das impliziert,

dass das mechanische Verhalten bei $\{S_{in}, S_{jn}\}$ - bzw. $\{S_{in}, S_{kn}\}$ -Beanspruchungskombinationen symmetrisch ist und der Versagenseintritt unabhängig vom Vorzeichen der Spannungskomponenten S_{jn} bzw. S_{kn} ist. Wird f_{in} unendlich, degeneriert das elliptische Paraboloid zu einem elliptischen Zylinder mit i als Zylinderachse. Wird f_{jn} oder f_{kn} unendlich, beschreibt $F'' = 0$ eine parabolische Zylinderfläche mit der Zylinderachse mit dem Index j bzw. k .

Typ 4: Ellipsoid

Das Ellipsoid (4-9) ist zu allen Koordinatenebenen im $\{S_{mn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum symmetrisch. Das mechanische Verhalten bei zweiachsigen $\{S_{in}, S_{jn}\}$ -Beanspruchungskombinationen ist demzufolge ebenso symmetrisch und der Versagenseintritt in der Versagensebenenorientierung ist unabhängig vom Vorzeichen der jeweiligen Spannungskomponente. Wird ein Festigkeitswert unendlich, degeneriert das Ellipsoid zu einem elliptischen Zylinder.

Typ 5: Hyperboloid

Die Koordinatenachse mit dem Index i ist in (4-10) die Achse des Hyperboloids. Im Fall des Hyperboloids wird ein zusätzlicher Parameter $0 < \omega < 1$ eingeführt (siehe Kap. 3.5.2). Dieser Parameter steuert die Krümmung an der Hyperbelspitze. Die Symmetrieeigenschaften sind gleich denen des Paraboloids. Zur Beschreibung der Hyperboloidfläche sind fünf Parameter notwendig: die drei Festigkeiten, der Index i der Hyperbelachse und der Parameter ω . Wird f_{jn} oder f_{kn} unendlich, ergibt sich für $F'' = 0$ eine hyperbolische Zylinderfläche. Die Hyperboloidfunktion ist als einzige der angeführten Funktionen explizit nicht in der quadratischen Form (4-11) angegeben. In quadratischer Form angeschrieben, ist die Hyperboloidfunktion zweischalig und nicht mehr konvex.

4.2.4.2 Allgemeine quadratische Funktionsdarstellung

Die Funktionstypen aus Box 4.1 lassen sich in allgemeiner quadratischer Funktionsdarstellung anschreiben:

Typ 1 - 4:

$$F''(\mathbf{s}_n) = \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{A}_n \mathbf{s}_n - 1 \quad (4-11)$$

Typ 5:

$$F''(\mathbf{s}_n) = (1 - \omega^2) \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n + \sqrt{(1 - \omega^2) \mathbf{s}_n^T \mathbf{A}_n \mathbf{s}_n + \omega^2} - 1$$

mit den Matrizen:

$$\mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} S_{mn} \\ S_{ln} \\ S_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

4.2.4.3 Festigkeitsparameter

Von den in den allgemeinen Gleichungen (4-11) und (4-12) angeführten sechs Parametern werden pro Funktionstyp nur drei benötigt. Die drei Parameter a_i entsprechen den Kehrwerten von Festigkeiten; die Parameter a_{ii} der Matrix \mathbf{A}_n den Festigkeitskehrwerten zum Quadrat. Die Festigkeiten bezeichnen im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum jeweils den Abstand zwischen dem Nullpunkt des Koordinatensystems und dem Schnittpunkt der Fläche $F'' = 0$ mit den drei Koordinatenachsen. Ausnahme ist Typ 5; der Schnittpunkt mit der S_{in} -Achse liegt bei $f_{in}/(1+\omega)$ (siehe Bild 3.3).

Aufgrund der ersten Forderung in Gleichung (3-2) darf keine der drei Festigkeiten null werden. Diese dürfen aber negative Werte annehmen oder unendlich sein. Damit ist für alle Funktionstypen der Wertebereich $f_{nn}, f_{ln}, f_{mn} \in (0, \pm\infty]$ festgelegt. Durch die Annahme von Festigkeitswerten, die gegen unendlich gehen, lassen sich die ersten vier Typen ineinander überführen.

Da die Matrix \mathbf{A}_n des quadratischen Terms in Gleichung (4-12) nur in der Hauptdiagonale besetzt ist, fallen die Hauptachsen des Ellipsoids und Paraboloids mit den $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Koordinatenachsen zusammen. Die Hauptachsenlage der Fläche zweiter Ordnung (4-11) stellt eine gewisse Einschränkung - nicht nur formal-mathematisch, sondern auch mechanisch - dar, die durch Translation und Drehung der Fläche, also einer beliebigen Positionierung im $\{S_{nn}, S_{ln}, S_{mn}\}$ -Spannungsraum, aufgehoben werden könnte. Dazu wären weitere Parameter zur Beschreibung der Fläche notwendig; aus diesem Grund wird auf diese Erweiterung hier verzichtet.

4.2.4.4 Darstellung der Versagensbedingungen im Materialhauptachsensystem

Mit den Transformationsbeziehungen (4-2) wird die lokale Versagensbedingung in den sechs Spannungen \mathbf{s}' des Materialhauptachsensystems ausgedrückt. Die Versagensebenenorientierung wird durch das $\{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ -Dreibein relativ zu den Materialhauptachsen durch die neun Koeffizienten in Gleichung (4-1) beschrieben. Alternativ dazu kann die Orientierung auch durch drei Drehwinkel α , β , und ϕ angegeben werden. Die Versagensbedingung F' hängt zusätzlich zu den Parametern der lokalen Versagensbedingung F'' aus Box 4.1 auch von den Parametern, die die Lage der Versagensebenenorientierung beschreiben, ab.

4.2.5 Exkurs: Anwendung der Mohr'schen Idee auf unterschiedliche Materialien

Dieser Abschnitt soll einen Überblick darüber geben, in welchen unterschiedlichsten Forschungsbereichen zur Materialmechanik in den letzten 150 Jahren die Mohr-Typ-Versagensbedingungen zur Anwendung gekommen sind. Die Einteilung erfolgt nach isotropen Materialien mit spezieller Materialstruktur, wobei die erwähnten Arbeiten chronologisch geordnet sind. Obwohl teilweise keine direkter Bezug zu der Arbeit von Mohr angeführt wird, haben alle die von Mohr allgemein formulierte Idee gemein.

4.2.5.1 Mohr-Typ Versagensbedingungen für isotrope Materialien

Metallische Werkstoffe

Metalle sind polykristalline Aggregate und verhalten sich bei gleichförmiger Orientierung der Kristalle im Aggregat isotrop. Anhand von Versuchen an Blei und den dabei getätigten Beobachtungen formuliert Henri Tresca (1864) die nach ihm benannte Schubspannungshypothese. Guest (1899) bestätigt mit umfangreichen und wohl dokumentierten Versuchen die Hypothese von Tresca als geeignete Fließbedingung bei duktil metallischen Werkstoffen. Paul (1961) wendet zwei isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen für die Beschreibung des Bruchverhaltens von Grauguss an.

Beton & Fels

Leon (1934) greift bei seinen Untersuchungen zum Bruchverhalten von Beton auf die Arbeit von Mohr zurück und erweitert sie dahingehend, dass statt der von Mohr verwendeten linearen Hüllkurve im lokalen σ - τ -Spannungsraum eine quadratische Parabel verwendet wird. Cowan (1952) unterscheidet für bewehrten Beton zwei Versagensmodi: Schubbruch bei Druckbeanspruchung und Trennbruch bei Zugbeanspruchung. Er benutzt zur Beschreibung zwei Versagensbedingungen im σ - τ -Spannungsraum, eine lineare Normal- und Schubspannungsinteraktionslinie (Mohr-Coulomb) und eine Normalspannungszugbedingung nach Rankine (*tension cut-off*). Hoek/Brown (1980) modifizieren die Versagensbedingung nach Leon, um eine Versagensbedingung für isotropen Fels zu erhalten.

4.2.5.2 Mohr-Typ-Versagensbedingungen für strukturierte Materialien

Monokristalle

Zu Beginn der 1920er Jahre begann - besonders durch Forscher in England und Deutschland - die Untersuchung plastischer Deformationsvorgänge von Einzelkristallen. Durch Dehnungsversuche an Zinkkristallen konnten Mark/Polanyi/Schmid (1923) die These formulieren und experimentell nachweisen, dass der plastische Dehnungsvorgang durch Schubgleiten in einer der kristallinen Hauptrichtungen stattfindet. Die zugehörige Fließbedingung ist als Schmid'sches Gesetz bekannt. Im Unterschied zu Schubspannungshypothese von Tresca bei der jede Fläche und in dieser Fläche wiederum jede Richtung aufgrund der Isotropieannahme gleichwertig sind und einen Gleitmechanismus ausbilden können, sind im Fall von Kristallen die Gleitmechanismen und Gleitrichtungen durch die Kristallstruktur vorgegeben. Zeitgleich konnte G.I. Taylor diese Schubspannungshypothese durch Versuche und Beobachtungen an Aluminiumkristallen bestätigen. Eine Sammlung seiner Beiträge zur Festkörpermechanik hat Batchelor ed. (1958) editiert. Richard von Mises (1928) vergleicht die Schubspannungshypothese von Schmid, die sich aus den Schubversagensbedingungen in den kristallographischen Ebenen ergibt (siehe Kap. 4.3), mit der von ihm entwickelten quadratischen Versagensbedingung.

Holz

In Kapitel 10 des Berichts „Report on Materials of Construction used in Aircraft and Aircraft Engines“ von Prof. Jenkins (1920) - wobei die Untersuchungen von Major A. Robertson durchgeführt wurden - wird das Festigkeitsverhalten von Holz und Holzbauteilen im Flugzeugbau untersucht. Besonders interessant ist dabei die Untersuchung zur Festigkeit bei einaxialer Zug- bzw. Druckbeanspruchung schräg zum Holzfaserverlauf (Unterkapitel 4). Dabei werden drei Versagensmodi unterschieden: Zug/Druck in Faserlängsrichtung, Zug/Druck quer zur Faserrichtung und faserparalleles Schubversagen. Je nach Neigung der Holzfaser zur Beanspruchungsachse ist einer dieser drei Versagensmodi maßgebend. In vorläufiger Unkenntnis des oben genannten Berichts hat Stüssi (1946) eine Untersuchung basierend auf derselben Mohr'schen Idee veröffentlicht. Grosse/Rautenstrauch/Schlegel (2005) formulieren ein komplettes dreidimensionales Materialmodell für Holz, wobei zwischen den Versagensmechanismen:

- faserparalleles Zugversagen (Faserruptur),
- faserparalleles Druckversagen (Faserstauchung),
- Druckversagen quer zur Faserrichtung (radiale und tangentielle Kompression) und
- Rissbildung quer zur Faser in der LT- bzw. der LR-Ebene zufolge Querzug und Schubbeanspruchung

unterschieden wird.

Boden- und Felsmechanik

In der Bodenmechanik kommt die Mohr'sche Idee bei anisotropen Böden zum Einsatz. 1944 entwickeln Casagrande und Carrillo die Idee eine räumliche Variation der Festigkeitseigenschaften, als Funktion der Gleitflächenorientierungen $n(\alpha, \beta)$, einzuführen. Jaeger (1960) nimmt ein Grundmaterial an, das der isotropen Mohr-Coulomb-Versagensbedingung unterliegt. Zusätzlich führt er aber eine einzelne Versagensebenenorientierung ein, in der die verwendete lineare Mohr-Coulomb-Versagensbedingung geringere Festigkeiten (*plane of weakness*) hat. Baker/Krizek (1970) verändern kontinuierlich die Parameter einer einfachen linearen Mohr-Coulomb-Versagensbedingung abhängig von einem Drehwinkel um eine fixe materielle Achse. Calladine (1971) entwickelt eine Mohr-Typ-Versagensbedingung für Tonböden. Dabei gibt er eine diskrete Anzahl N möglicher Gleitflächenorientierungen an, wobei jeder eine lokale Versagensbedingung in der Normalspannung und der resultierenden Schubspannung zugeordnet ist. Zienkiewicz/Pande (1977) entwickeln das sogenannte „Multilaminat Modell“ für Fels; das Felsmaterial ist - wie bei Calladine (1971) - mit N beliebig vielen Kluftebenen oder potentiellen Versagensebenen durchzogen, wobei das Versagen in mehreren Ebenen zeitgleich stattfinden kann. Das Versagenskriterium setzt sich aus einem linearen Coulomb-Mohr-Reibungsgesetz und einer Zugversagensbedingung zusammen. Amadei (1988) nimmt, für das als isotrop angenommene Felsgrundmaterial, die empirisch festgelegte Versagensbedingung von Hoek/Brown (1980) und fügt diskrete Kluftsysteme mit eigenen Mohr-Coulomb-Versagensbedingungen dazu. Eine ähn-

liche Einteilung und Überblick von Versagensbedingungen, wie in dieser Arbeit, aber speziell für Geomaterialien, geben Duveau/Shao/Henry (1998). Sie bezeichnen die Mohr-Typ-Versagensbedingungen als *discontinuous weakness plane based models*. Als *critical plane approach* bezeichnen Pietruszczak/Mróz (2001) die Mohr-Typ-Versagensbedingung. In ihrem Aufsatz formulieren sie in jeder räumlichen Ebenenorientierung \mathbf{n} eine lokale Versagensbedingung, die ihre Festigkeitsparameter abhängig von \mathbf{n} ändert. Dabei sollen kontinuierlich räumliche Variationen in den Festigkeiten von Geomaterialien beschrieben werden.

Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffe

Hashin (1980) formuliert Versagensbedingungen für Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffe. Er unterscheidet in seiner Arbeit zwischen Faserversagen (dabei wird zwischen Druck und Zugversagen unterschieden) und Matrixversagen. Damit hat man die Ebenen normal zur Faserorientierung als potentielle Faserversagensebenen und alle Ebenen parallel zur Faserichtung als potentielle Versagensflächen für Matrixversagen. Puck (1996) greift die von Hashin (1980) formulierte Grundidee auf und setzt sie konsequent um. Eine kompakte Darstellung der Puck'schen Versagensbedingung ist in dem Aufsatz von Puck/Schürmann (1998) zu finden.

4.3 Beispiel: Mohr-Typ-Versagensbedingungen bei kristallinen Gleitsystemen

Kristalle besitzen einen klar strukturierten Aufbau. Abhängig von dieser Materialstruktur, dem Kristallgitter, ergibt sich das elastische und das plastische Materialverhalten. Das plastische Deformationsverhalten von Monokristallen wird durch Schubmechanismen dominiert. In ausgezeichneten materiellen Ebenen, den Gleitebenen, findet in bestimmten Richtungen ein plastischer Schubmechanismus statt. Der Beginn dieses Versagensmechanismus lässt sich durch eine Mohr-Typ-Schubversagensbedingung beschreiben; diese ist in der Kristallplastizität unter dem Namen Schmid'sches Gesetz, siehe Mark/Polanyi/Schmid (1923), bekannt.

Abhängig von der jeweiligen kristallinen Struktur hat ein Kristall N Gleitsysteme und ebenso viele Versagensbedingungen. Bei speziellen Spannungszuständen werden einige dieser Versagensbedingungen simultan erfüllt. Das hat wiederum zur Folge, dass die zugehörigen Versagensmechanismen simultan aktiviert werden können.

Es werden flächenzentrierte (**FCC** - **F**ace **C**entered **C**ubic) und raumzentrierte kubische Kristallsysteme (**BCC** - **B**ody **C**entered **C**ubic) betrachtet. Eine Darstellung der Kristallsysteme findet sich in Standardlehrbüchern zur Werkstoffmechanik, z.B. Rösler/Harders/Bäker (2007). Bei der Darstellung der Gleitsysteme wurde auf die Miller'sche Kurzschreibweise verzichtet.

Nach der Beschreibung der Versagensbedingungen wird die FCC- bzw. BCC-Kristallstruktur schräg zu den Materialhaupttrichtungen einaxial bis zum Versagensbeginn belastet.

4.3.1 Kristalline Gleitsysteme

Kristalline Gleitsysteme bestehen aus einer Gleitebenenorientierung, gegeben durch den Normalenvektor \mathbf{n}_s , und einer Gleitrichtung, die hier mit dem Vektor \mathbf{m}_r gekennzeichnet ist. Beide Vektoren haben die Länge eins und stehen normal zueinander. In Bild 4.3 ist exemplarisch die Lage eines einzelnen Gleitsystems im RME dargestellt. Die Koeffizienten der Vektoren \mathbf{m}_r und \mathbf{n}_s werden bezüglich des Materialhauptachsensystems, mit n_{si} und m_{ri} , angegeben.

4.3.1.1 Schubspannung in der Gleitebene s in Richtung r

Mit der Projektionsmatrix \mathbf{p}_{rs} lässt sich die Schubspannungskomponente in der Schnittebene mit dem Normalenvektor \mathbf{n}_s in Richtung des Vektors \mathbf{m}_r bestimmen. Der Aufbau der Projektionsmatrix wird aus Gleichung (4-3) übernommen, wobei die Koeffizienten $c_{r'i}$ und $c_{s'i}$ durch $m_{r'i}$ und $n_{s'i}$ ersetzt werden:

$$S_{rs} = \mathbf{p}_{rs}^T \mathbf{s}' \quad \mathbf{p}_{rs} = \begin{bmatrix} m_{r1}' n_{s1}' \\ m_{r2}' n_{s2}' \\ m_{r3}' n_{s3}' \\ m_{r2}' n_{s1}' + m_{r1}' n_{s2}' \\ m_{r3}' n_{s1}' + m_{r1}' n_{s3}' \\ m_{r3}' n_{s2}' + m_{r2}' n_{s3}' \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

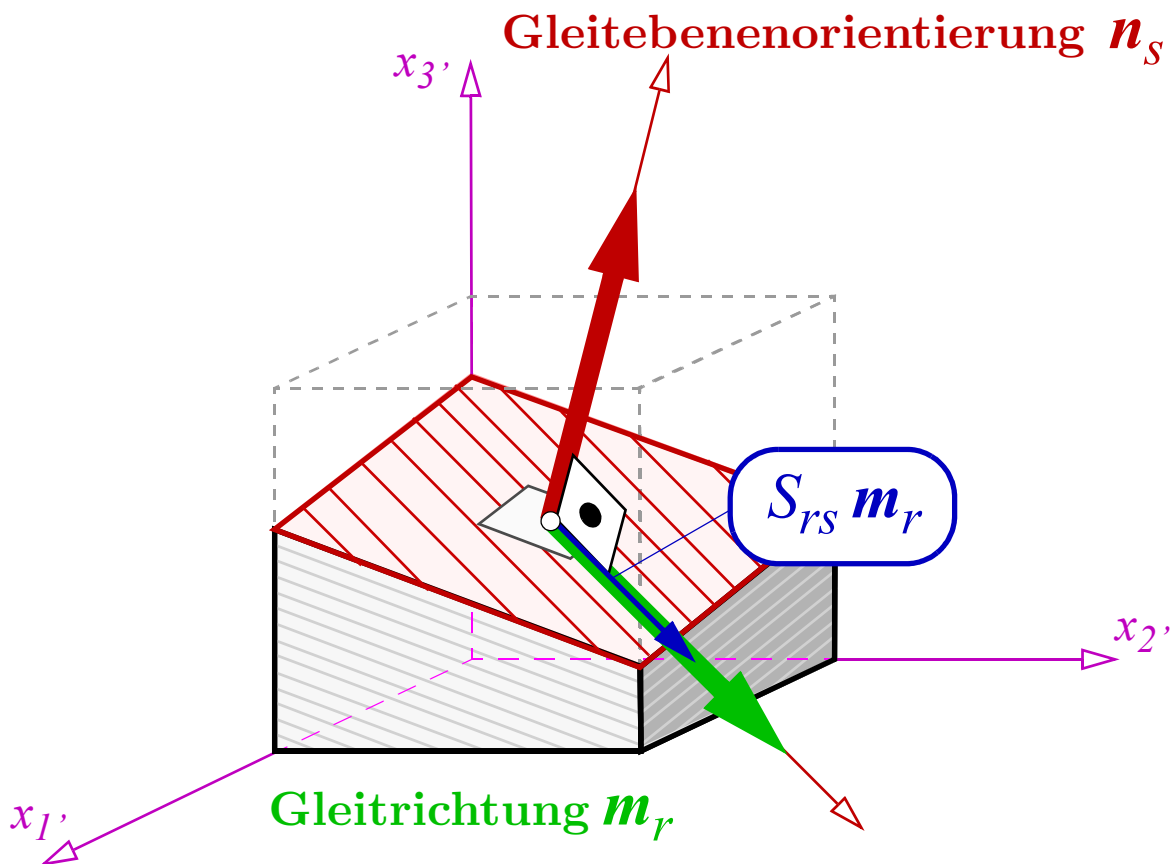


Bild 4.3 Gleitsystem gegeben durch die Ebenenorientierung \mathbf{n}_s und eine Schubgleitrichtung \mathbf{m}_r .

4.3.1.2 Schubversagensbedingung

Das mit dem Index i gekennzeichnete Gleitsystem wird aktiviert, sobald der Betrag der zugehörigen Schubspannung S_{rs} die kritische Schubspannung τ_Y erreicht. Die zugehörige Versagensbedingung ist:

$$F_i'(\mathbf{s}') = \left(\frac{S_{rs}}{\tau_Y} \right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{\tau_Y} \right)^2 \mathbf{s}'^T (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i) \mathbf{s}' - 1 = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4-14)$$

Zur kompakteren Schreibweise wird die zum Gleitsystem i zugehörige Projektionsmatrix

\mathbf{p}_{rs} mit \mathbf{p}_i geschrieben. Zu jedem der N Gleitsysteme ist eine Versagensbedingung F_i'' zugeordnet. Die kritische Schubspannung soll bei allen Gleitsystemen gleich groß sein. Ein wesentliches Merkmal der Versagensbedingung (4-14) ist, dass ein hydrostischer Spannungszustand niemals zum plastischen Versagen bzw. Gleiten führt. Alternativ zu den N quadratischen Versagensbedingungen kann der Versagensbeginn auch durch $2N$ lineare Versagensbedingungen

$$\begin{aligned} F_i'(\mathbf{s}') &= +\left(\frac{S_{rs}}{\tau_Y}\right) - 1 = +\left(\frac{1}{\tau_Y}\right) \mathbf{p}_i^T \mathbf{s}' - 1 \\ F_{i+N}'(\mathbf{s}') &= -\left(\frac{S_{rs}}{\tau_Y}\right) - 1 = -\left(\frac{1}{\tau_Y}\right) \mathbf{p}_i^T \mathbf{s}' - 1 \end{aligned} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4-15)$$

beschrieben werden. Im sechsdimensionalen \mathbf{s}' -Spannungsraum beschreiben die Gleichungen (4-15) eine eben-facettierte konvexe Fläche.

4.3.1.3 Eigenschaften der Schubversagensbedingungen

Die Projektionsmatrizen \mathbf{p}_i aus (4-13) haben folgende allgemeine Eigenschaft:

$$(\mathbf{p}_i)^T \mathbf{p}_{vol} = 0 \quad (\mathbf{p}_{vol})^T = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4-16)$$

Bei Kristallen, die nur Versagensbedingungen der Form (4-14) bzw. (4-15) beinhalten, wird bei einem hydrostatischen Spannungszustand $\mathbf{s}_{vol} = 3p \mathbf{p}_{vol}$ (p ist der Druck) niemals der Versagensbeginn erreicht. Geometrisch interpretiert: Die Versagensbedingungen (4-15) beschreiben Ebenen im 6-D-Spannungsraum, die alle parallel zur hydrostatischen Achse, deren Richtung durch \mathbf{p}_{vol} angegeben ist, liegen.

4.3.2 FCC- und BCC-Kristallstruktur

4.3.2.1 Gleitsysteme & Versagensbedingungen

Ein flächenzentrierter kubischer Kristall hat $N = 12$ Gleitsysteme. Diese setzen sich aus vier Gleitebenen und sechs unterschiedlichen Gleitrichtungen zusammen. Jeder Gleitebene sind drei möglichen Gleitrichtungen zugeordnet. Der körperzentrierte kubische Kristall hat $N = 48$ Gleitsysteme.

Mit Gleichung (4-13) werden für die Versagensbedingungen (4-14) benötigten Projektionsmatrizen (Box 4.2 und Box 4.3) bestimmt.

Projektionsmatrizen \mathbf{p}_i		
$\sqrt{6}\mathbf{p}_1^T = [-1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_5^T = [0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_9^T = [-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_2^T = [0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_6^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_{10}^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_3^T = [-1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_7^T = [0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_{11}^T = [0 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_4^T = [-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_8^T = [-1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$	$\sqrt{6}\mathbf{p}_{12}^T = [-1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1]$

Box 4.2 FCC - Projektionsmatrizen \mathbf{p}_i je Gleitsystem i

Projektionsmatrizen \mathbf{p}_i		
$\sqrt{6}\mathbf{p}_1^T = [-1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{17}^T = [1 \ -2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{33}^T = [2 \ 1 \ -3 \ 3 \ 1 \ 2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_2^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{18}^T = [-1 \ 2 \ -1 \ 1 \ 2 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{34}^T = [-2 \ -1 \ 3 \ 3 \ 1 \ -2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_3^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{19}^T = [1 \ -2 \ 1 \ -1 \ 2 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{35}^T = [-2 \ -1 \ 3 \ 3 \ -1 \ 2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_4^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{20}^T = [-1 \ 2 \ -1 \ -1 \ 2 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{36}^T = [2 \ 1 \ -3 \ 3 \ -1 \ -2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_5^T = [1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{21}^T = [-2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{37}^T = [2 \ -3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_6^T = [-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{22}^T = [-2 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 2]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{38}^T = [-2 \ 3 \ -1 \ 1 \ 3 \ -2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_7^T = [1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{23}^T = [2 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 2]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{39}^T = [2 \ -3 \ 1 \ -1 \ 3 \ -2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_8^T = [1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1]$	$\sqrt{18}\mathbf{p}_{24}^T = [2 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 2]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{40}^T = [-2 \ 3 \ -1 \ -1 \ 3 \ 2]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_9^T = [0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{25}^T = [1 \ 2 \ -3 \ 3 \ 2 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{41}^T = [-3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_{10} = [0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{26}^T = [-1 \ -2 \ 3 \ 3 \ 2 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{42}^T = [-3 \ 1 \ 2 \ -2 \ -1 \ 3]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_{11}^T = [0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{27}^T = [-1 \ -2 \ 3 \ 3 \ -2 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{43}^T = [3 \ -1 \ -2 \ 2 \ -1 \ 3]$
$\sqrt{6}\mathbf{p}_{12}^T = [0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 0]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{28}^T = [1 \ 2 \ -3 \ 3 \ -2 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{44}^T = [3 \ -1 \ -2 \ -2 \ 1 \ 3]$
$\sqrt{18}\mathbf{p}_{13}^T = [1 \ 1 \ -2 \ 2 \ 1 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{29}^T = [1 \ -3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{45}^T = [-3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3]$
$\sqrt{18}\mathbf{p}_{14}^T = [-1 \ -1 \ 2 \ 2 \ 1 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{30}^T = [-1 \ 3 \ -2 \ 2 \ 3 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{46}^T = [-3 \ 2 \ 1 \ -1 \ -2 \ 3]$
$\sqrt{18}\mathbf{p}_{15}^T = [-1 \ -1 \ 2 \ 2 \ -1 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{31}^T = [1 \ -3 \ 2 \ -2 \ 3 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{47}^T = [3 \ -2 \ -1 \ 1 \ -2 \ 3]$
$\sqrt{18}\mathbf{p}_{16}^T = [1 \ 1 \ -2 \ 2 \ -1 \ -1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{32}^T = [-1 \ 3 \ -2 \ -2 \ 3 \ 1]$	$\sqrt{42}\mathbf{p}_{48}^T = [3 \ -2 \ -1 \ -1 \ 2 \ 3]$

Box 4.3 BCC - Projektionsmatrizen \mathbf{p}_i je Gleitsystem i

4.3.2.2 Darstellung der Versagensbedingungen

Da eine Darstellung der Versagensbedingungen nur in einem dreidimensionalen \mathbf{s}' -Spannungsraum möglich ist, sind in Bild 4.4 und Bild 4.5 einmal die Schubspannungskomponenten $S_{1'2'}$, $S_{1'3'}$ und $S_{2'3'}$ und einmal die Normalspannungskomponenten $S_{1'1'}$, $S_{2'2'}$ und $S_{3'3'}$ null gesetzt. Die hydrostatische Achse (= die Raumdiagonale im Normalspannungsraum) schneidet niemals die elastische Grenzfläche, da ein hydrostatischer Spannungszustand nie die Versagensbedingungen (4-14) zu null erfüllt. Die elastische Grenzfläche des FCC-Kristalls im Schubspannungsraum (Bild 4.4 b) ist ein Rhombendodekaeder, hat also 12 rhombenförmige Seitenflächen, die zu jeweils einer der zwölf Versagensbedingungen gehören.

4.3.3 Versagensbeginn bei einaxialer Belastung

Der monokristalline Versuchskörper wird einaxial gezogen (Bild 4.6). Die Materialhauptrichtungen des Einzelkristalls werden durch Drehung um die x_3 -Achse verändert. Die Materialhauptrichtungen $\mathbf{e}_{1'}$ und $\mathbf{e}_{2'}$ des Kristalls liegen dabei zu den Kantenrichtungen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 des Versuchskörpers um den Winkel α verdreht. Gesucht wird die einaxiale Spannung S_{11} , bei der Versagensbeginn eintritt, als Funktion der Orientierung α .

4.3.3.1 Spannungen im materiellen Koordinatensystem

Die Spannung S_{11} ergibt durch Transformation die Normalspannungen $S_{1'1'}$, $S_{2'2'}$ und die Schubspannungskomponente $S_{1'2'}$ im Materialhauptachsensystem:

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} S_{1'1'} \\ S_{2'2'} \\ S_{3'3'} \\ S_{1'2'} \\ S_{1'3'} \\ S_{2'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 \\ s^2 \\ 0 \\ -sc \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S_{11} = \mathbf{p}_\alpha S_{11} \quad s = \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha \quad (4-17)$$

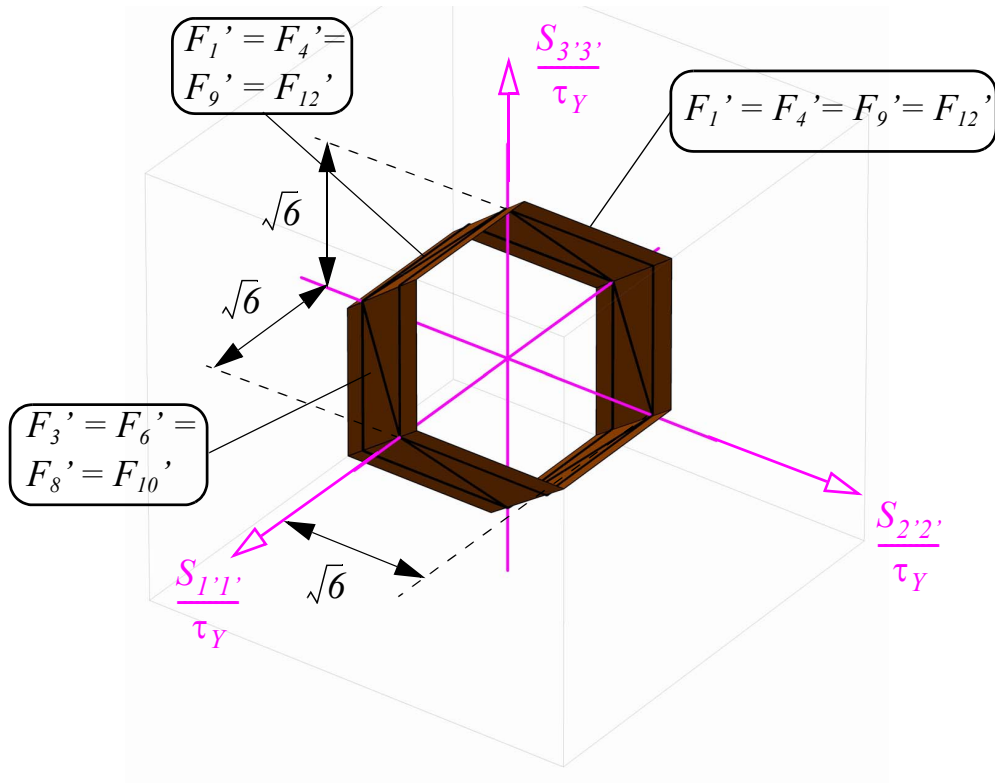
4.3.3.2 Grenzspannung des Kristalls bei einaxialer Beanspruchung

Wird der Spannungszustand \mathbf{s}' in die Versagensbedingungen F_i' des Kristalls eingesetzt, ergibt sich jeweils eine Grenzspannung:

$$\frac{S_{11,i}}{\tau_Y} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_\alpha\|} \quad (4-18)$$

Der niedrigste Spannungswert gibt bei Vorgabe einer beliebigen Orientierung α (von 0° bis 180°) die aktuelle Grenzspannung und die Indizes i der zugehörigen Gleitsysteme mit der jeweiligen Gleitebenenorientierung und Gleitrichtung an.

a)



b)

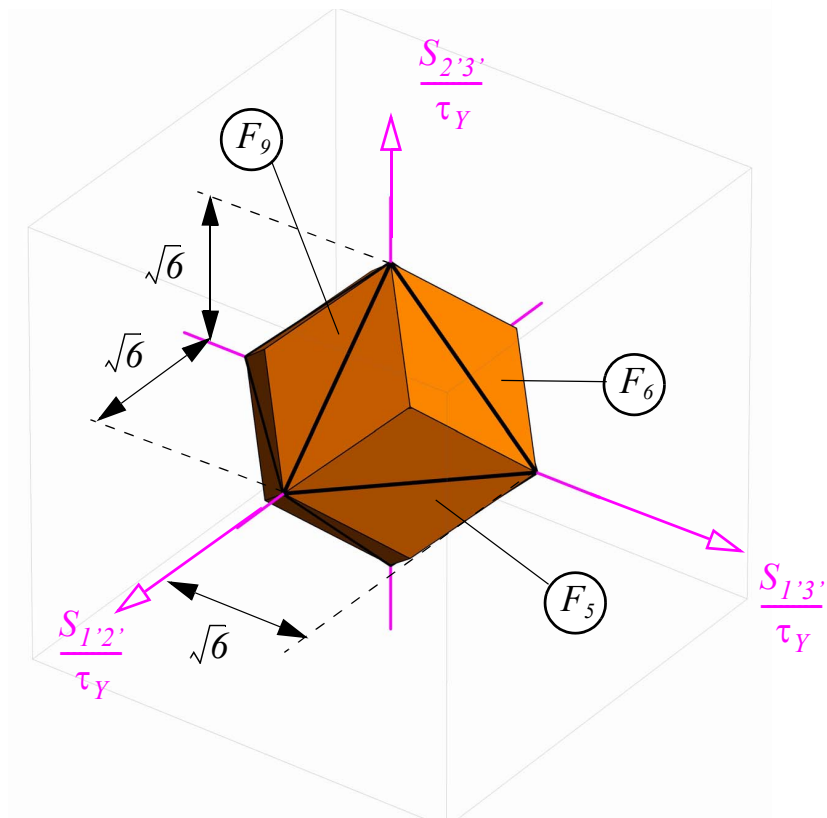
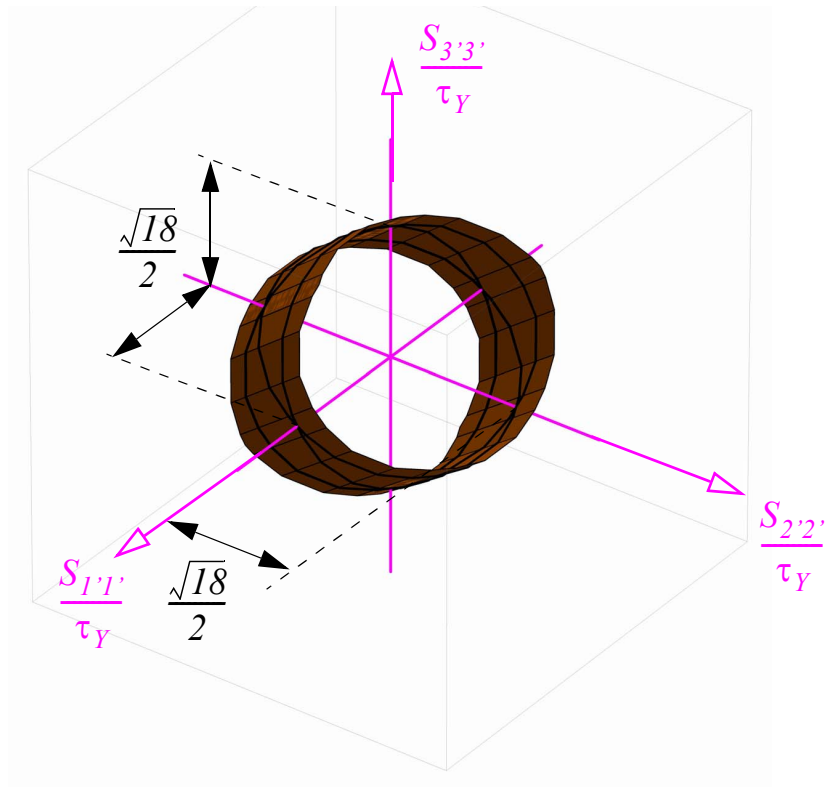


Bild 4.4 Darstellung der Versagensbedingungen des FCC-Kristalls im (a) Normalspannungs-
subraum mit $S_{1'2'} = S_{1'3'} = S_{2'3'} = 0$ und im (b) Schubspannungssubraum ($S_{1'1'} = S_{2'2'} = S_{3'3'} = 0$)

a)



b)

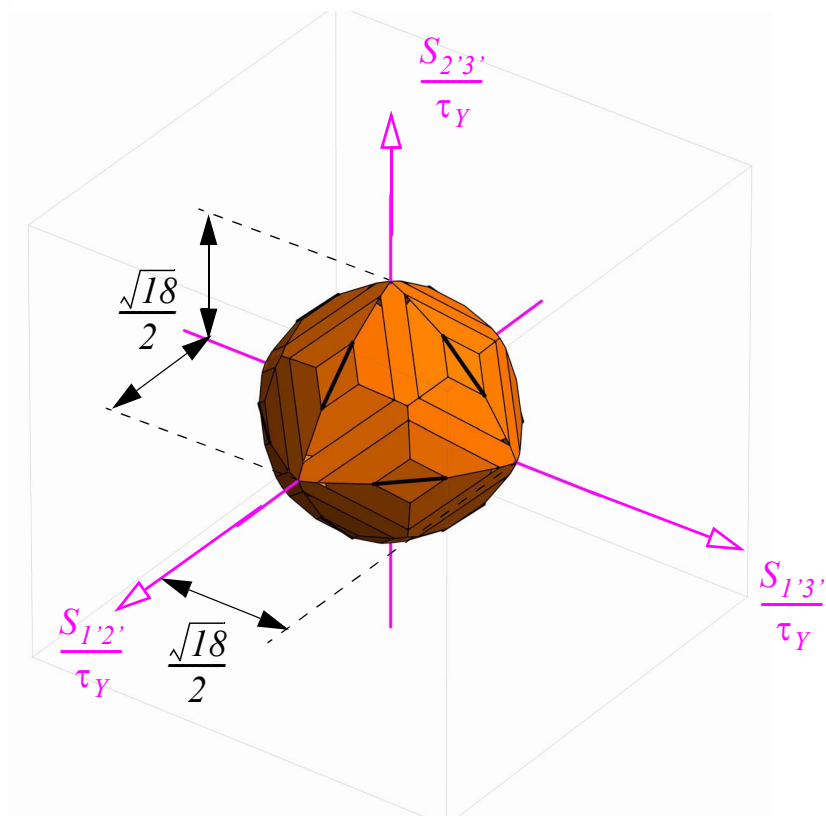


Bild 4.5 Darstellung der Versagensbedingungen des BCC-Kristalls im (a) Normalspannungs-
subraum mit $S_{1'2'} = S_{1'3'} = S_{2'3'} = 0$ und im (b) Schubspannungsraum ($S_{1'1'} = S_{2'2'} =$
 $S_{3'3'} = 0$)

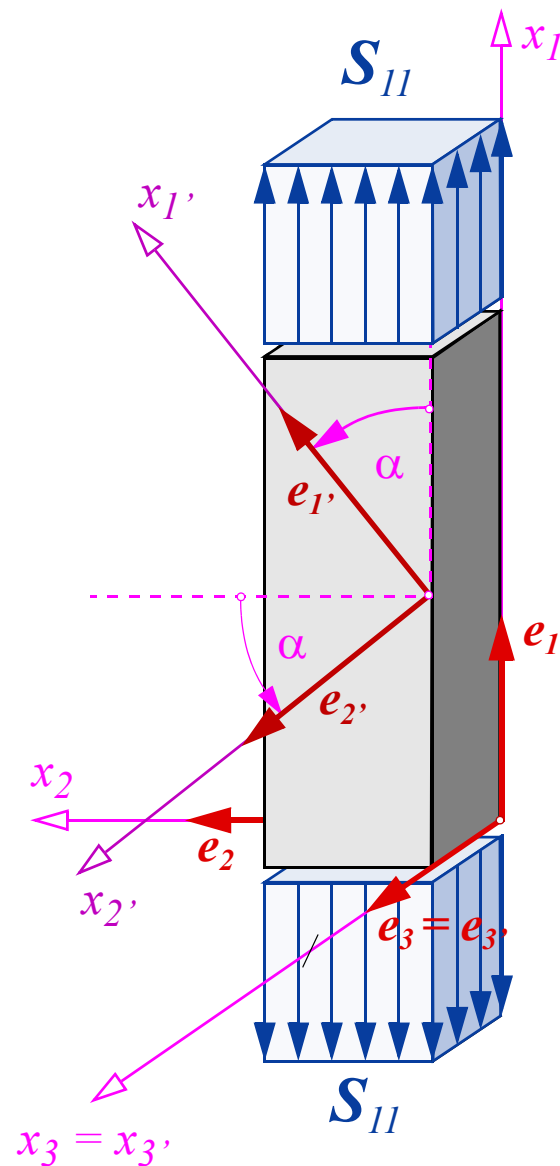


Bild 4.6 Einaxiale Versuchssituation mit schräg zur Beanspruchungsrichtung orientiertem Kristall: die Materialhauptrichtung x_3' deckt sich mit der Koordinatenachse x_3 des Versuchskörpers; die Materialhauptachsen x_1' und x_2' sind um den Winkel α zu den Achsen x_1 und x_2 verdreht

4.3.3.3 Einaxiale Grenzspannung: FCC- vs. BCC-Kristall

Im Vergleich (Bild 4.6) zur Kurve des FCC-Kristalls (rot) fällt auf, dass die Grenzspannungen des BCC-Kristalls (blau) geringere Werte aufweisen, da die Anzahl an Gleitsystemen größer ist. Denkt man sich die Anzahl der Gleitsysteme immer weiter erhöht, bis jede Raumorientierung eine potentielle Gleitebennormale ist und in jeder Richtung dieser Ebenen ein Schubmechanismus auftreten kann, erhält man die isotrope Versagensbedingung nach Tresca. Aufgrund der Isotropie ist die axiale Grenzspannung unabhängig von der Materialorientierung und hat immer den Betrag zwei (schwarz strichlierte Kurve in Bild 4.6), da die maximale Schubspannung den Wert $S_{11}/2$ besitzt.

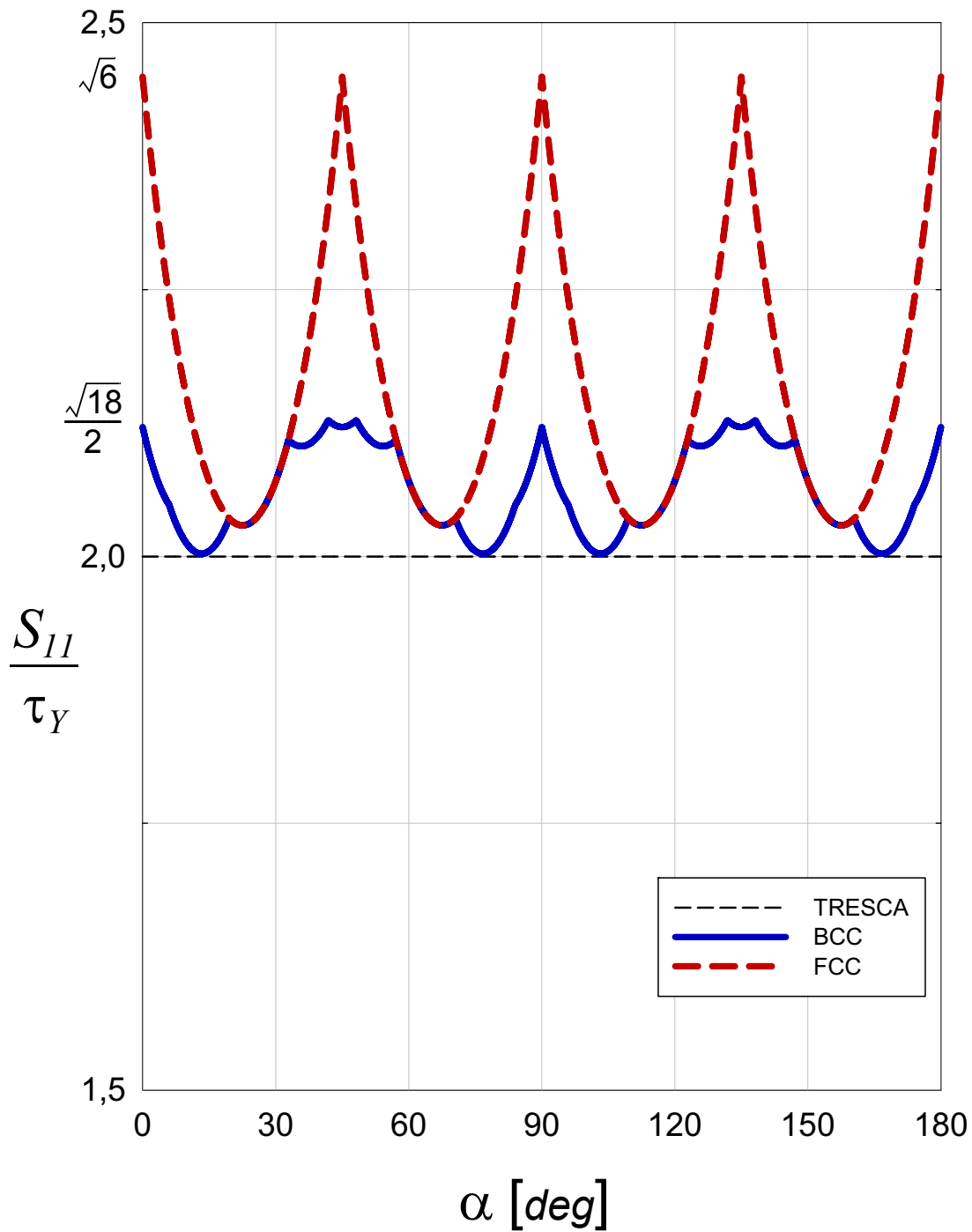


Bild 4.7 BCC- vs. FCC-Kristall: einaxiale Grenzspannungskurve bei Änderung der Kristallorientierung um den Winkel α

4.3.3.4 Geometrische Analyse der Schnittbereiche zweier Tragspannungspunkte

Es soll die Gestalt der Schnittbereiche der elastischen Grenzfläche des FCC-Kristalls bei zwei ausgesuchten Spannungs- bzw. Schnittpunkten, die sich aus den einaxialen Tragspannungen (4-18) und den Neigungen $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$ aus Gleichung (4-17) ergeben, analysiert werden. Zur Unterscheidung werden die jeweiligen Größen links oben indiziert. Die Spannungen der Schnittpunkte im Materialhauptachsensystem, die am Schnittpunkt beteiligten Flächen (bzw. Gleitsysteme) und deren Anzahl q , siehe Gleichung (3-6), sowie der Rang r von $\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0}$ (3-5) sind:

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}\mathbf{s}_n' &= \tau_Y \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^{(2)}\mathbf{s}_n' &= \tau_Y \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^{(1)}\mathcal{A}_0 &= \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\} & {}^{(2)}\mathcal{A}_0 &= \{4, 5, 7, 9\} \\
 {}^{(1)}q &= 9 & {}^{(2)}q &= 4 \\
 {}^{(1)}r &= 5 & {}^{(2)}r &= 4
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

Mit den Kriterien aus Gleichung (3-6) und (3-7) lassen sich die Schnittbereiche der beiden Spannungspunkte im sechsdimensionalen Spannungsraum ($p = 6$) beurteilen:

- Punkt (1) ist eine 5-dimensionale Kante und ein Pyramidenpunkt,
- Punkt (2) ist eine 4-dimensionale Kante.

Auf der gesamten elastischen Grenzfläche existiert kein Schnittpunkt mit einer Ecke ($r = p$), da die elastische Grenzfläche in Richtung der hydrostatischen Achse nicht geschlossen ist; das Schnittgebilde mit der höchsten Dimension im sechsdimensionalen Spannungsraum ist eine fünfdimensionale Kante.

4.4 Mises-Typ-Versagensbedingungen

Es konnte gezeigt werden, dass eine große Menge an Versagensbedingungen auf der von Mohr formulierten Idee aufbaut. Und doch gibt es eine ebenso beträchtliche Zahl an Versagensbedingungen, die nicht die Mohr'sche Idee aufgreifen, sondern von einer andersgearteten Idee ausgehen. Diese Versagensbedingungen, die nicht dem Mohr-Typ zuordenbar sind, lassen sich unter der Bezeichnung Mises-Typ-Versagensbedingungen zusammenfassen. Für die Mises-Typ-Versagensbedingungen wird ein formal-mathematischer Zugang gewählt.

4.4.1 Genealogie der Mises-Typ-Versagensbedingung

4.4.1.1 Isotrope Mises-Versagensbedingung

Die erste Untersuchung von Richard von Mises (1913) beschränkt sich auf isotrop aufgebaute Festkörper (Metalle), die bei Aufbringung eines hydrostatischen Spannungszustandes die Fließgrenze nicht erreichen. Ausgangspunkt seiner Untersuchung ist die Tresca-Versagensbedingung. Diese ergibt, im Hauptspannungsraum dargestellt, einen sechseckigen Zylinder. Die Zylinderachse ist die Achse der hydrostatischen Spannungszustände. Von Mises argumentiert, dass es nicht erwiesen ist, dass alle Fließspannungen exakt auf den Seitenflächen des Sechsecks liegen, und nimmt diese Unschärfe zum Anlass den sechseckigen Zylinder mit einem kreisförmigen Zylinder zu umschreiben, da dieser einen quadratischen und somit mathematisch einfacheren Formelbau besitzt:

„Noch in einer anderen Richtung wollen wir aber den Mohr'schen Ansatz (Anm.: die Tresca-Versagensbedingung) modifizieren. Von dem Sechseck sind durch die bisherigen Versuch lediglich die Eckpunkte festgestellt, [...] Die geradlinige Verbindung entspringt der Annahme, daß es auf die mittlere Hauptspannung [...] gar nicht ankommt. Diese Annahme scheint nicht sehr plausibel, daß man nicht versuchen dürfte, das Sechseck durch eineinfacheres Gebilde, nämlich durch den umgeschriebenen Kreis, zu ersetzen.“

Die Mises-Versagensbedingung für isotrope Festkörper ist eine quadratische Gleichung in den Spannungen \mathbf{s} . Die Matrix $\mathbf{A}_{iso,dev}$ ist - im Fall der Isotropie und der reinen Abhängigkeit von deviatorischen Spannungszuständen - nur von einem einzigen Materialparameter a abhängig:

$$F(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso,dev} \mathbf{s} - 1 = \mathbf{s}^T (a \mathbf{P}_{J_2}) \mathbf{s} - 1 \quad (4-20)$$

Die Matrix \mathbf{P}_{J_2} ist in Gleichung (F-7) angegeben. Im isotropen Fall gibt es keine ausgezeichneten Materialhauptachsen und die Spannungen \mathbf{s} und damit die Versagensbedingung werden bezüglich eines beliebig wählbaren globalen Koordinatensystems angegeben.



Bild 4.8 Richard Edler von Mises (1883-1953); Professor an der U Straßburg (1909-1918), Berufung an die TH Dresden, Professor an der Universität Berlin (1919-1933), Universität Istanbul (1933-1938) und an der Harvard Universität (1939-1953)

4.4.1.2 „Gestaltänderungsenergie“ - Hypothese

Huber (1904) hat bereits einige Jahre vor v.Mises eine Bruchbedingung angegeben, deren Aufbau im hydrostatischen Druckbereich ident zu der isotropen Mises-Versagensbedingung (4-20) ist. Huber formuliert in seinem Aufsatz die Hypothese, dass ab einem bestimmten Gestaltänderungsenergiebetrag die Bruchfestigkeit erreicht ist. Hencky (1924) macht den Begriff der „Gestaltänderungsenergiehypothese“ im deutschen Sprachraum bekannt und erwähnt die mathematisch-formale Gleichheit mit der isotropen Mises-Versagensbedingung.

Der Zugang und die Begründung für die isotrope Versagensbedingung sind bei v.Mises anders angelegt als bei Huber, da kein physikalisch motiviertes bzw. energetisches Argument für Mises notwendig ist, um eine in den Spannungen quadratische Grenzbedingung im Spannungsraum zu postulieren. In einer Fußnote zu dem Aufsatz von Schleicher (1926) und in Mises (1928) lehnt er aus Sicht seines allgemeiner gehaltenen formalen Zugangs explizit die Verwendung des Begriffs „Energiekriterium“ ab und zeigt, dass nur im isotropen-deviatorischen Fall (4-20) aufgrund einer einzigen Materialkonstante einen Querbezug zwischen elastischer Gestaltänderungsenergie und der Versagensbedingung besteht. Sobald z.B. die quadratische isotrope Versagensbedingung nach Schleicher (4-33) verwendet wird, sind zwei Materialparameter notwendig. Es besteht keine Ursache, dass die beiden elastischen Materialparameter im selben Verhältnis zueinander sind, wie die beiden Festigkeitsparameter.

Da bei vielen Materialien plastische Deformationen auch bei allseitiger Kompression auftreten, haben v.Mises 1925 und Schleicher (1926) nahezu zeitgleich die isotrope Mises-Bedingung (Box 4.4) erweitert. Die komplette isotrope Mises-Typ-Versagensbedingung inklusive linearer Terme gibt Burzynski (1929) an.

4.4.1.3 Formulierung der allgemeinen Mises-Typ-Versagensbedingung

In mehrerlei Hinsicht für die Entwicklung der Plastizitätstheorie maßgebend war der zweite Aufsatz von v.Mises (1928). Ein Teil widmet sich der Formulierung von Versagensbedingungen, wobei die 1913 formulierte These auf nicht-isotrope Körper - im Konkreten auf Kristalle - ausgedehnt wird. Beibehalten werden aber die zwei Annahmen, dass der Körper unter hydrostatischen Beanspruchungen nicht zu fließen beginnt und dass die Versagensbedingung eine quadratische Funktion in den Spannungen ist:

*„Wir fragen zunächst nach einer **quadratischen** Funktion der Spannungskomponenten, die den aufgestellten Forderungen (Anm.: kein Einfluss von hydrostatischen Spannungszuständen) genügt, da aus theoretischen und experimentellen Gründen zu vermuten ist, daß den Ausdrücken zweiten Grades hier eine besondere Rolle zufällt“*

In der hier verwendeten Notation ergibt sich aus der oben formulierten Idee eine quadratische Funktion

$$F' = (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{dev} \mathbf{s}' - 1 \quad (4-21)$$

in den materiellen Spannungskomponenten \mathbf{s}' . Im Fall allgemeiner Anisotropie und unter Exklusion von hydrostatischen Spannungseinflüssen ist die Matrix \mathbf{A}'_{dev} von 15 Konstanten abhängig. Im weiteren Verlauf des Aufsatzes von 1928 wird diese allgemeine Ausgangsfunktion auf spezielle Materialsymmetrien, wie sie sich bei Kristallen finden, reduziert. Durch die aus den Symmetrien sich ergebenden Zwänge vermindert sich auch die zur Beschreibung der quadratischen Versagensbedingung notwendige Konstantenzahl.

Zusammenfassend lässt sich zu den Arbeiten von v.Mises sagen, dass er einen formal-mathematischen Weg einschlägt, ohne Betrachtungen zu mechanische Versagensmechanismen und deren Orientierungen anzustellen. Mises wählt aus Gründen der praktischen Anwendbarkeit eine mathematisch einfach aufgebaute Funktion (eine quadratische Form), die von einigen Parametern abhängt, und passt diese an die Versuchsergebnisse an.

4.4.1.4 Erweiterung des Mises-Versagensbedingungstyps

Aufbauend auf den Arbeiten von v.Mises hat Hill (1948) eine orthotrope Versagensbedingung für (in der Originalarbeit als *anisotropic* bezeichnete) Metalle formuliert. Diese Richtungsabhängigkeit in den Materialeigenschaften wird durch Walzvorgänge verursacht. Er geht dabei, ebenso wie Mises, von einer quadratischen Funktion in den Spannungen aus und nimmt an, dass hydrostatische Spannungszustände bei Metallen keinen Fließeintritt verursachen. Lineare Terme in den Spannungen werden in der Versagensbedingung nicht berücksichtigt, da sich bei Zug- und Druck der gleiche Fließeintritt zeigt. Zur Beschreibung des quadratischen Terms in der Versagensbedingung mit der Matrix $\mathbf{A}'_{ort,dev}$ sind sechs Konstanten notwendig:

$$F' = (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{ort,dev} \mathbf{s}' - 1 \quad (4-22)$$

In seinem Aufsatz reduziert Hill die quadratische Funktion (4-22) auf den Fall transversaler Isotropie und auf Isotropie (4-20).

Um eine Unterscheidung zwischen Versagensbeginn bei Zug- und Druckbeanspruchung von orthotropen Materialien zu erfassen, hat Hoffmann (1967) die Hill'sche Bedingung um lineare Terme in den Spannungen erweitert:

$$F' = (\mathbf{a}'_{ort})^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{ort,dev} \mathbf{s}' - 1 \quad (4-23)$$

Eine Generalisierung der vorangegangenen Ideen wurde von Tsai/Wu (1971) vorgeschlagen, mit dem Ziel eine einfache Versagensbedingung für die praktische Verwendung im Entwurfsprozess von Verbundwerkstoffen zur Hand zu haben. Sowohl v.Mises als auch Tsai und Wu war bewusst, dass diese Vereinfachung und Vereinheitlichung des Versagensge-

schehens durch eine einzige Funktion auf Kosten der Unterscheidung von unterschiedlichen Versagensmechanismen geht.

Die von Tsai/Wu (1971) angegebene Funktion (4-26) hat im allgemeinen Fall 27 Parameter, die sich bei Berücksichtigung von Materialsymmetrien reduzieren lassen. Laut Tsai und Wu sollen die Parameter so aufeinander abgestimmt sein, dass (4-26) eine Ellipsoidfläche im 6-dimensionalen Spannungsraum ergibt.

4.4.2 Mises-Typ-Versagensbedingung: Grundidee

Die von v.Mises (1928) zuerst vorgeschlagene und von Tsai/Wu (1971) in die generelle Form gebrachte Idee, aus Versuchen gewonnene Spannungspunkte eines Materials, die zum Versagen (bzw. Fließen) führen, durch eine quadratische Funktion anzunähern, wird in dieser Arbeit als Mises-Typ-Versagensbedingung bezeichnet. In der englischsprachigen Fachliteratur wird dafür der Term Hill-Typ verwendet.

Der wesentliche Unterschied zu den zuvor erwähnten Mohr-Typ-Versagensbedingungen ist, dass die Mises-Typ-Versagensbedingungen keine Information zu einer Versagensebenenorientierung liefern.

4.4.2.1 Mises-Typ-Versagensbedingung - quadratische Basisgleichung

Die Basisgleichung, aus der sich alle Mises-Typ-Versagensbedingungen ableiten lassen, besteht aus einem linearen und einem quadratischen Term in den Spannungen \mathbf{s}' des Materialhauptsystems:

$$F' = (\mathbf{a}')^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}' \mathbf{s}' - 1$$

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{1'1'} & A_{1'2'} & A_{1'3'} & A_{1'4'} & A_{1'5'} & A_{1'6'} \\ & A_{2'2'} & A_{2'3'} & A_{2'4'} & A_{2'5'} & A_{2'6'} \\ & & A_{3'3'} & A_{3'4'} & A_{3'5'} & A_{3'6'} \\ & & & A_{4'4'} & A_{4'5'} & A_{4'6'} \\ & & & & A_{5'5'} & A_{5'6'} \\ & & & & & A_{6'6'} \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Der sechszeilige Vektor \mathbf{a}' und die symmetrische Matrix \mathbf{A}' haben aufgrund der Symmetrie der Spannungen \mathbf{s}' sechs $A_{i'}$ und 21 $A_{i'j'}$ unabhängige Koeffizienten, die zur Anpassung an die vorgegebenen Versuchsergebnisse herangezogen werden können. Um die Konvexität der Funktion F' (4-24) zu gewährleisten, muss \mathbf{A}' positiv-semidefinit sein:

$$(\mathbf{s}')^T \mathbf{A}' \mathbf{s}' \geq 0 \quad (4-25)$$

Um für die Versagensbedingung die notwendigen Parameter zu bestimmen, sind ebenso

viele unabhängige Belastungsanordnungen und zugehörige Versuche notwendig, wie Parameter in der Versagensbedingung enthalten sind. Der allgemeine Fall der Mises-Typ-Versagensbedingung ohne jegliche Materialsymmetrie und 27 Materialkoeffizienten wird nicht weiter behandelt. Der in Box 4.4 dargestellte Katalog von Versagensbedingungen geht im allgemeinsten Fall von einer orthotropen Materialsymmetrie aus. Damit hat man maximal zwölf - drei $A_{i'}$ und neun $A_{i'j'}$ - Materialparameter.

4.4.2.2 Katalog an Mises-Typ-Versagensbedingungen

In gängigen Mises-Typ-Versagensbedingungen (Box 4.4) werden nach den Materialsymmetrien, Orthotropie, transversale Isotropie und Isotropie unterschieden. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist, ob im quadratischen Term deviatorische Spannungszustände berücksichtigt werden.

In der rechten Spalte von Box 4.4 ist die Anzahl der benötigten Parameter, die in den Matrizen \mathbf{a}' des linearen Terms und \mathbf{A}' des quadratischen Terms enthalten sind, angegeben.

Bezeichnung	Formelaufbau	Parameter
Orthotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
Tsai-Wu (1971):	$F_{TW,ort} = (\mathbf{a}'_{ort})^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{ort} \mathbf{s}' - 1$ (4-26)	3+9=12
Hoffmann (1967):	$F_{Hm,ort} = (\mathbf{a}'_{ort})^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{ort,dev} \mathbf{s}' - 1$ (4-27)	3+6=9
Hill (1948):	$F_{Hi,ort} = (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{ort,dev} \mathbf{s}' - 1$ (4-28)	6
Transversal isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
Tsai-Wu (1971):	$F_{TW,tra} = (\mathbf{a}'_{tra})^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{tra} \mathbf{s}' - 1$ (4-29)	2+5=7
Hoffmann (1967):	$F_{Hm,tra} = (\mathbf{a}'_{tra})^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{tra,dev} \mathbf{s}' - 1$ (4-30)	2+3=5
Hill (1948):	$F_{Hi,tra} = (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}'_{tra,dev} \mathbf{s}' - 1$ (4-31)	3
Isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
v. Burzynski (1929):	$F_{Bu} = (\mathbf{a}_{iso})^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso} \mathbf{s} - 1$ (4-32)	3
Schleicher (1926):	$F_{Sc} = \mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso} \mathbf{s} - 1$ (4-33)	2
v. Mises (1913):	$F_{Mi} = \mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso,dev} \mathbf{s} - 1$ (4-34)	1
Drucker-Prager (1952):	$F_{DP} = (\mathbf{a}_{iso})^T \mathbf{s} + \sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso,dev} \mathbf{s}} - 1$ (4-35)	2

Box 4.4 Mises-Typ-Versagensbedingungen

Der Aufbau der angeführten Koeffizientenmatrizen ist in Anhang E angeführt; ebenso die Wertebereiche der einzelnen Koeffizienten der \mathbf{A}' -Matrizen um die positive Definitheit und damit die Konvexität zu garantieren.

4.4.3 Erweiterter Mises-Typ-Versagensbedingungsbegriff

Einige Autoren haben die Mises-Idee noch erweitert und Polynomterme dritter und höherer Ordnung in den Spannungskomponenten in die Versagensbedingung inkludiert. Auf diese Erweiterung wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Eine vermeintlich bessere Anpassung an die Versuchsdaten durch beliebig hohe Polynomfunktionen ist bei der Streuung und oft mangelnden Schärfe der Versuchsergebnisse wenig sinnvoll. Durch das Anwachsen der benötigten Koeffizienten mit der Polynomordnung erhöht sich die Unpraktikabilität dieser Erweiterung, ohne eine einhergehende gleichwertige Verbesserung zu bewirken. Weiters wird die Einhaltung der anfänglich geforderten Funktionsbedingungen aus Kap. 3.2 weiter erschwert, wenn nicht sogar unmöglich.

Gemeinsam ist den in Box 4.4 angeführten Versagensbedingungen, dass sie sich durch Invarianten, die linear bzw. quadratisch in den Spannungskomponenten \mathbf{s} sind, ausdrücken lassen; kubische Invariantenausdrücke sind damit ausgeschlossen. Einen Überblick über Invarianten ist in Anhang C gegeben.

Es lassen sich Funktionen in diesen Invarianten formulieren, die nicht unbedingt Polynome in den Spannungskomponenten sind. Isotrope Versagensbedingungen dieser Art finden sich z.B. bei Jirásek/Bažant (2002), Bigoni/Piccolroaz (2004) oder Yu (2002). Im Fall von transversaler Isotropie oder Orthotropie sind solche Funktionen z.B. in Spencer (1984) oder Boehler, ed. (1987) angegeben.

Obwohl diese Funktionen im Allgemeinen keine quadratischen Polynome sind, ist diese Vorgehensweise aus mehreren Gründen eindeutig der Herangehensweise von v.Mises zuordenbar. Die Formulierung geht von einer formalen mathematischen Funktionengestalt aus - hier der Formulierung in den Invarianten - und nicht wie im Mohr'schen Funktionstyp von einem Versagensmechanismus und einer Versagensebenenorientierung. Die verbleibende Information sind die Spannungszustände, in denen Versagen registriert wurde. Bei isotropen Materialien lassen sich diese Versuchswerte im Hauptnormalspannungsraum eintragen. Durch Interpolationsfunktionen der Gestalt $F(I_1, J_2, J_3)$ bzw. $F(\xi, \rho, t)$, die Funktionen in den isotropen Invarianten sind, wird eine bestmögliche Anpassung an die vorhandenen Versuchsdaten konstruiert. Das entspricht der Interpolationsidee von v.Mises und rechtfertigt die Zuordnung dieser Versagensbedingungen zur Klasse der Mises-Typ-Versagensbedingungen.

4.5 Mohr-Typ- vs. Mises-Typ-Versagensbedingungen - Zusammenfassung & Ausblick

4.5.1 Beschreibung von strukturierten Materialien

4.5.1.1 Mohr-Typ

Der Vorteil der Mohr'schen Idee ist, dass jeder Versagensbedingung eine eindeutige Versagensebenenorientierung zugeordnet ist. **Die Mohr-Typ-Versagensbedingungen geben nicht nur an, wann Versagen eintritt, sondern - aufgrund der zugeordneten Versagensebenenorientierungen - auch wo.** Damit sind diese prädestiniert, das Versagensverhalten von strukturierten Materialien mit ausgezeichneten Versagensebenenorientierungen zu beschreiben.

Hinsichtlich der Anzahl der Versagensebenenorientierungen und den zugehörigen Versagensbedingungen ist man nicht beschränkt; das Gegenteil ist der Fall: Die Mohr-Typ-Versagensbedingungen, wobei diese jeweils sehr einfach aufgebaut sind (siehe Box 4.1), entfalten ihre Leistungsfähigkeit erst durch die uneingeschränkte Kombination miteinander. Die Anzahl der potentiellen Versagensebenen geht bei isotrop oder transversal isotrop aufgebauten Materialien sogar gegen unendlich; mehr dazu im nächsten Kapitel.

4.5.1.2 Mises-Typ

Eine spezielle Versagensebenenorientierung und ein Versagensmechanismus sind den Mises-Typ-Versagensbedingungen nicht zuordenbar.

Zur Beschreibung von strukturierten Materialien ist man im Fall der Mises-Typ-Funktionen an die anfängliche Postulierung einer vorhandenen Materialsymmetrie, z.B. Orthotropie, gebunden, um aus dem Katalog (Box 4.4) diejenige Funktion mit der strukturadäquaten Symmetrie auszuwählen (= Festlegung der Materialsymmetrie a priori).

Bei der Beschreibung des Versagens von strukturierten Materialien mit Mohr-Typ-Versagensbedingungen muss man sich nicht anfänglich durch eine eventuell vorhandene Materialsymmetriegruppe einschränken lassen. Man formuliert die Versagensbedingungen in den ausgesuchten Versagensebenenorientierungen und kann bei Bedarf im Nachhinein kontrollieren, ob eine Symmetrie in der Formulierung der Versagensbedingungen auftritt (= Kontrolle der Materialsymmetrie a posteriori).

Ist die Symmetrie aus dem beobachteten Materialverhalten festgelegt, werden im nächsten Schritt die Parameter der quadratischen Mises-Typ-Versagensbedingung an die vorhandenen Versuchsdaten bestmöglich angepasst. Dabei ist man durch die quadratische Form der Mises-Typ-Versagensbedingungen eingeschränkt und es kann bereichsweise zu starken Abweichungen zwischen den Versuchsdatenpunkten und der festgelegten Versagensbedingung

kommen. Dieses allgemein aus der Interpolation bekannte Problem kann auf zwei Arten behoben oder verringert werden: Entweder wird die Polynomordnung der Versagensbedingung erhöht oder man nähert die Versuchsdatenpunkte bereichsweise durch mehrere quadratische Mises-Typ-Versagensbedingungen an (stückweise Interpolation).

Werden die Datenpunkte zusätzlich verschiedenen Versagensszenarien zugeordnet, lassen sich diese bereichsweise durch eine eigene Mises-Typ-Interpolationsfunktion erfassen. Hashin (1980) hat diese Vorgehensweise bei faserverstärkten Kunststoffen vorgeschlagen. Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2003) wenden diese Idee auf Holz an.

4.5.2 Formale Darstellung & Interaktion der Spannungskomponenten

Bei der Mohr-Typ-Versagensbedingung können per definitionem nur die Spannungskomponenten S_{mm} , S_{ln} und S_{mn} in der Versagensebenenorientierung interagieren. Zusammenhänge mit den Spannungskomponenten S_{ll} , S_{mm} und S_{lm} sind nicht darstellbar, selbst wenn solche durch Versuche nachgewiesen werden.

Bei den Mises-Typ-Versagensbedingungen treten in der mathematisch-formalen Beschreibung Interaktionen zwischen mehreren Spannungskomponenten auf. Dadurch kommt es bei möglichen überzähligen Interaktionsbeziehungen zu Einflüssen von Festigkeitswerten auf physikalisch nicht zugehörige Versagensmechanismen. Ein Beispiel dazu führt Hashin (1980) an: Die Tsai-Wu-Versagensbedingung bei zweiachsialer Zugbeanspruchung hängt, obwohl keine Druckspannungen auftreten, auch von den Druckfestigkeitswerten ab.

Diese formalen Interaktionen der Mises-Typ-Versagensbedingung führen auch zu Ungeheimheiten, wenn zusätzliche Verfestigungsmechanismen eingeführt werden und sich die Gestalt der Versagensbedingung durch die eingeführten Verfestigungsparameter ändern. Dabei kann es zu ungewünschten und widersinnigen Wechselwirkungen kommen. Außerdem kann durch die Veränderung der Versagensbedingung die Konvexität zerstört werden, da z.B. die Festigkeitswerte den festgelegten Wertebereich verlassen.

4.5.3 Rechnerische Umsetzung

Die Mohr-Typ- und die Mises-Typ-Versagensbedingungen aus Box 4.1 und Box 4.4 sind linear oder quadratisch in den Spannungen und konvex, was die rechnerische Umsetzung im Rahmen des Plastizitätsmodells erleichtert. Die Herausforderung verlagert sich auf die Handhabung von beliebig vielen Versagensbedingungen, die eventuell auch simultan aktiviert werden.

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich auch durch die modifizierten Funktionen (z.B. die Typ 5 Mohrfunktion), da die Näherungsfunktionen im Bereich der funktionsinhärenten Kanten bzw. Ecken der Ausgangsfunktion zwar eine eindeutige Ableitung besitzen, aber in diesen Bereichen starke Krümmungen aufweisen. Diese Krümmungen führen bei der Verwendung von herkömmlichen Newton-Verfahren, wie z.B. dem Return-Mapping-Algorithmus von Simo/Hughes (1998), zu Konvergenzproblemen.

Die Rechenprozedur soll beliebig vieler Versagensbedingungen mit eventuell starken lokalen Krümmungen robust handhaben.

4.5.4 Transversale Isotropie & Isotropie

Bei den Mises-Typ-Versagensbedingungen ist die Berücksichtigung von speziellen Symmetrien sehr einfach möglich. Wie - basierend auf der Mohr'schen Idee - transversale Isotropie und Isotropie bei Materialversagen umgesetzt werden, ist im nächsten Kapitel dargestellt.

Bei transversal isotropen oder isotropen Versagensbedingungen verschwimmt in der mathematischen Funktionsdarstellung der Unterschied zwischen den beiden Versagensbedingungstypen, da sich alle Funktionen, aufgrund der vorhandenen Symmetrie, in entsprechenden Invarianten dieser Symmetrieklasse ausdrücken lassen müssen. Die Zuordnung zu einem der Funktionstypen erfolgt in diesem Fall nach der Konstruktion der Versagensbedingung:

- War der Ausgangspunkt die Mohr-Idee?
 - Hat sich aufgrund der speziellen Anordnungssituation eine transversal isotrope oder isotrope Versagensbedingung ergeben (Mohr-Typ)?
 - Oder wurde eine Funktion in den entsprechenden Invarianten an die vorhandenen Versuchsergebnisse angepasst (Mises-Typ)?
-

5

**Transversal iso-
trope & isotrope
Mohr-Typ-
Versagens-
bedingungen**

5.1 Einleitung und Kapitelaufbau

5.1.1 Problemstellung

Bei transversaler Isotropie wird symmetrisches Versagensverhalten bezüglich einer ausgesuchten Raumachse, der transversalen Isotropieachse, gefordert. Im Fall der Mises-Typ-Versagensbedingungen kann diese Symmetrieeigenschaft erreicht werden, indem die Versagensbedingung durch lineare und quadratische, isotrope und transversal isotrope Invarianten ausgedrückt wird (siehe Anhang C).

In diesem Kapitel wird - anstatt des formal-mathematischen Aufbaus der Mises-Typ-Versagensbedingungen durch Invarianten - ein direkter Zugang zu transversal isotropen Versagensbedingungen mittels der Mohr'schen Idee umgesetzt. Dabei werden lokale Mohr-Typ-Versagensbedingungen F'' aus Box 4.1 in speziellen Versagensebenenorientierungen, die symmetrisch zur transversalen Isotropieachse angeordnet sein müssen, formuliert. Demzufolge müssen unendlich viele (!) Ebenenorientierungen mit denselben lokalen Versagensbedingungen betrachtet werden. Diese Bottom-Up-Herangehensweise unterscheidet sich von der formal-mathematischen bzw. Top-Down-Inkorporation von Isotropie oder transversaler Isotropie bei den Mises-Typ-Bedingungen.

Dabei ergeben sich mehrere Fragen:

- In welcher der unendlich vielen Versagensebenenorientierungen tritt bei einem vorgegebenen Spannungszustand zuerst Versagen auf?
- Ist es möglich, dass mehrere bzw. alle Versagensbedingungen in den Versagensebenenorientierungen zeitgleich erfüllt werden?
- Ist eine einzige geschlossene Darstellung der transversal isotrope Versagensbedingung F' in den Spannungskomponenten des Materialhauptachsensystems formulierbar?
- Wenn das möglich ist, erfüllt die erhaltene Funktion die geforderten Funktionseigenschaften wie Konvexität und stetige Differenzierbarkeit?
- Wenn die Herleitung einer geschlossenen Funktion nicht möglich ist, gibt es Verfahren, die es erlauben, die Mohr'sche Philosophie mittels Näherung umzusetzen?

Diese Fragen sollen in diesem Kapitel beantwortet werden.

Hauptaugenmerk wird auf die transversale Isotropie gelegt; isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen, wie die Tresca-, Rankine- oder Mohr-Coulomb-Versagensbedingung, finden sich in den meisten Standardlehrbüchern, z.B. bei Mang/Hofstetter (2000). Außerdem lassen sich alle für den transversal isotropen Fall dargestellten Vorgehensweisen ohne Einschränkungen auf den isotropen Fall übertragen.

5.1.2 Literatur & Stand der Forschung

Wie bei der Konstruktion von Mohr-Typ-Versagensbedingungen bei isotropen Materialien vorzugehen ist, hat bereits Mohr (1928) gezeigt. Er verwendet dabei die von ihm zu diesem Zweck entwickelte Konstruktion des Mohr'schen Kreises, um die lokal formulierte Versagensbedingung in Hauptnormalspannungen auszudrücken. Hashin (1980) wendet die Mohr'sche Idee zur Beschreibung von Versagensbedingungen für transversal isotrope unidirektional faserverstärkte Verbundwerkstoffe an. Er skizziert ein direktes Lösungsverfahren zur Bestimmung der maßgebenden Versagensorientierung(en). Da ihm die dafür nötige Lösung nichtlinearer Gleichungen als zu aufwendig scheint, wird diese Vorgehensweise nicht weiter verfolgt. Puck (1996) greift die von Hashin (1980) formulierte Grundidee auf und setzt sie für Faserverbundwerkstoffe um.

Die numerische Berechnung der Gleichungen haben - in einer etwas abgeänderten Form und im Problemkontext von anisotrop strukturierten Materialien, wie z.B. granulare Bodenmaterialien (*cohesive-frictional materials*) - auch Pietruszczak/Mróz (2001) umgesetzt. In ihrem Aufsatz formulieren sie in jeder räumlichen Ebenenorientierung \mathbf{n} eine lokale Versagensbedingung, deren Festigkeitsparameter sich abhängig von \mathbf{n} ändern. Damit lassen sich kontinuierliche räumliche Variationen in den Festigkeiten erfassen. Um die kritische Orientierung \mathbf{n}_c zu berechnen, in der Versagen zuerst auftritt, ist ein zu Gleichung (5-15) analog gestaltetes Problem zu lösen. Statt einer einzigen Winkelvariation müssen dabei aber alle Raumorientierungen des Einheitsvektors \mathbf{n} betrachtet werden. Diese werden durch die drei Komponenten von \mathbf{n} und Zwangsgleichungen, um den Betrag von \mathbf{n} eins zu halten, angegeben. In einem weiteren Aufsatz vergleichen Pietruszczak/Pande (2001) das direkte numerische Lösungsverfahren aus Pietruszczak/Mróz (2001) mit einer Diskretisierungsmethode, wobei anstatt der unendlichen Vielfalt an räumlich möglichen Orientierungen eine diskrete Anzahl von räumlich fix orientierten und vorgegebenen Versagensebenenorientierungen (*sampling planes*) auf Initialversagen abkontrolliert wird.

5.1.3 Aufgabenstellung & Ziele des Abschnitts

Transversal isotrop strukturierte Materialien, wie z.B. unidirektional faserverstärkte Kunststoffe, besitzen eine ausgezeichnete Materialhaupttrichtung, die sogenannte transversale Isotropieachse. Aufgrund des gleichförmigen materiellen Aufbaus um diese Achse weisen z.B. alle Ebenenorientierungen parallel zu dieser Achse (die Normalenvektoren \mathbf{n} sind normal zur Isotropieachse) dasselbe Versagensverhalten auf. Um dieses zu beschreiben, werden in diesen unendlich vielen Ebenenorientierungen gleiche lokale Versagensbedingungen F'' formuliert.

Aus dieser unendlichen Anzahl an Versagensbedingungen sind bei einer vorgegebenen Belastung diejenigen Versagensbedingungen und die zugehörigen Orientierungen zu bestimmen, bei welchen zuerst die Versagensbedingung erfüllt ist. In diesem Schritt ist eine Querverbindung zu dem Beispiel in Kap. 4.3 herstellbar; im Fall der Kristalle war dieser

Berechnungsschritt einfach, da nur eine endliche Anzahl an Versagensebenenorientierungen und zugehörigen Versagensbedingungen abkontrolliert werden musste.

Zur Bestimmung der maßgebenden Versagensebenenorientierung(en) werden in diesem Kapitel drei mögliche Lösungsverfahren vorgestellt. Ist die Versagensebenenorientierung analytisch berechenbar und kann diese als explizite Funktion dargestellt werden, lässt sich durch Rückeinsetzen eine geschlossene transversal isotrope Versagensbedingung F' in den Spannungskomponenten des Materialhauptachsensystems formulieren. Falls dies möglich ist, wird kontrolliert, ob die Funktion F' in jedem Punkt zweimal stetig differenzierbar ist bzw. „funktionsinhärente“ Ecken und Kanten (Kap. 3.5) besitzt. Ist das der Fall, werden die beiden Verfahren (Modifikation oder Diskretisierung) aus Kap. 3.5 angewandt, um diese ungewünschten Funktionseigenschaften zu beseitigen.

Durch die Diskretisierung wird die unendliche Zahl an potentiellen Versagensebenenorientierungen durch eine diskrete Anzahl von Orientierungen angenähert. Der Vorteil ist, dass sich die Suche nach der maßgebenden Orientierung vereinfacht (es entspricht dem Vorgehen aus dem Kristallbeispiel in Kap. 4.3). Der Nachteil ist, dass die Symmetriebedingung nur angenähert wird und nie mathematisch exakt erfüllt ist (quasi transversal isotrop).

Als Vehikel zur Darstellung der generellen Vorgehensweise werden zwei konkrete Materialien mit transversal isotropem strukturellem Aufbau, ein unidirektional faserverstärkter Kunststoff und ein Laminat mit isotropen Schichteigenschaften, betrachtet.

Die Hauptziele des Abschnitts sind:

- Konstruktion von transversal isotropen Versagenssituationen basierend auf der Mohr'schen Idee aus Kap. 4.2,
- Darstellung von unterschiedlichen Verfahren zur Berechnung der maßgebenden Versagensebenenorientierung(en),
- Berechnung von exakten transversal isotropen Versagensbedingungen in den Spannungskomponenten der Materialhaupttrichtungen und, wenn notwendig, Beseitigung von funktionsinhärenten Ecken oder Kanten mittels Approximationsverfahren und
- Übertragung dieser Methoden auf den Fall der Isotropie.

Der Inhalt des Kapitels ist elementare Festigkeitslehre und soll eine Mischung zwischen theoretischen Inhalten und einfachen Anwendungsbeispielen sein. Trotzdem ergeben sich überraschende Erkenntnisse und vertiefte Problemeinsichten. Selbst im Rahmen dieser grundlegenden Untersuchungen finden sich fehlerhafte Bearbeitungen in der Literatur (siehe Kap. 5.3.8 und Kap. 5.7.2).

5.1.4 Inhalt von Kapitel 5

5.2 Transversal isotrope Materialstruktur & Versagensebenenorientierungen

5.3 Zwischenfaserversagen bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen

5.4 Modifikation der Versagensbedingungen

5.5 Approximation der symmetrischen Versagensbedingung durch N Funktionen

5.6 Versagen bei geschichtet aufgebauten Materialien

5.7 Isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

5.8 Zusammenfassung

5.2 Transversal isotrope Materialstruktur & Versagensebenenorientierungen

Transversal isotropes Material zeichnet sich durch eine spezielle Materialachse, gekennzeichnet durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_1 , aus. Um diese Materialhaupttrichtung ist das Material gleichförmig strukturiert; jede Drehung des Probekörpers um diese Achse bei gleichbleibendem Spannungszustand hat dasselbe Versagen und dieselbe Höhe der Versagensspannung zur Folge. Aufgrund der Festlegung von transversaler Isotropie ist die Wahl der beiden verbleibenden $\{x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen frei wählbar.

5.2.1 Orientierungen von Versagensebenen bei transversaler Isotropie

Bei Materialien mit transversal isotropem Versagensverhalten werden in diesem Kapitel zwei Typen von Versagensebenenorientierungen unterschieden:

- Typ A: Ebenen, die parallel zur transversalen Isotropieachse liegen ($\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1$, Bild 5.1 a)
- Typ B: Ebene, die normal zur transversalen Isotropieachse liegt ($\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_1$, Bild 5.1 b)

In diesen lokalen Orientierungen werden die Mohr-Typ-Versagensbedingungen formuliert.

Bei Typ A steht \mathbf{n} normal auf die transversale Isotropieachse. Die Lage dieses Vektors wird relativ zur x_2 -Achse über den Winkel ϕ angegeben. Aufgrund der transversalen Isotropie sind alle Ebenen des Definitionsbereiches $\phi \in [0, 2\pi)$ potentielle Versagensebenen, in denen identes Versagensverhalten angenommen wird. Diese unendlich vielen Ebenen bilden ein „Ebenenbüschel“. In Typ B ist nur eine einzige Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ zu betrachten, wobei die lokale Versagensbedingung transversal isotrop sein muss.

Zwei transversal isotrop aufgebaute Materialien dienen als Vehikel, um exemplarisch transversal isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen auf direkt anschauliche Weise zu konstruieren. Andere Versagensebenenorientierungen, die ebenso angeordnet sind, dass sie die transversale isotrope Symmetrieforderung erfüllen, sind denkbar, werden hier aber nicht betrachtet oder behandelt.

5.2.2 Unidirektional faserverstärkter Kunststoffe

Ein Beispiel für transversal isotropen Materialaufbau bzw. transversal isotropem Versagensverhalten sind einaxial faserverstärkte Kunststoffe. In Bild 5.2 a) ist das RME dieses Materials dargestellt. Die Faserverstärkung ist schematisch eingezeichnet. Das orthonormale $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsensystem wird so ausgerichtet, dass die Richtung der x_1 -Achse bzw. der Einheitsvektor \mathbf{e}_1 mit der Faserrichtung übereinstimmt. Bei Faserverbundwerkstoffen werden nach Hashin (1980) bzw. Puck (1996) zwei primäre Versagensmodi unterschieden:

- Zwischenfaserversagen und

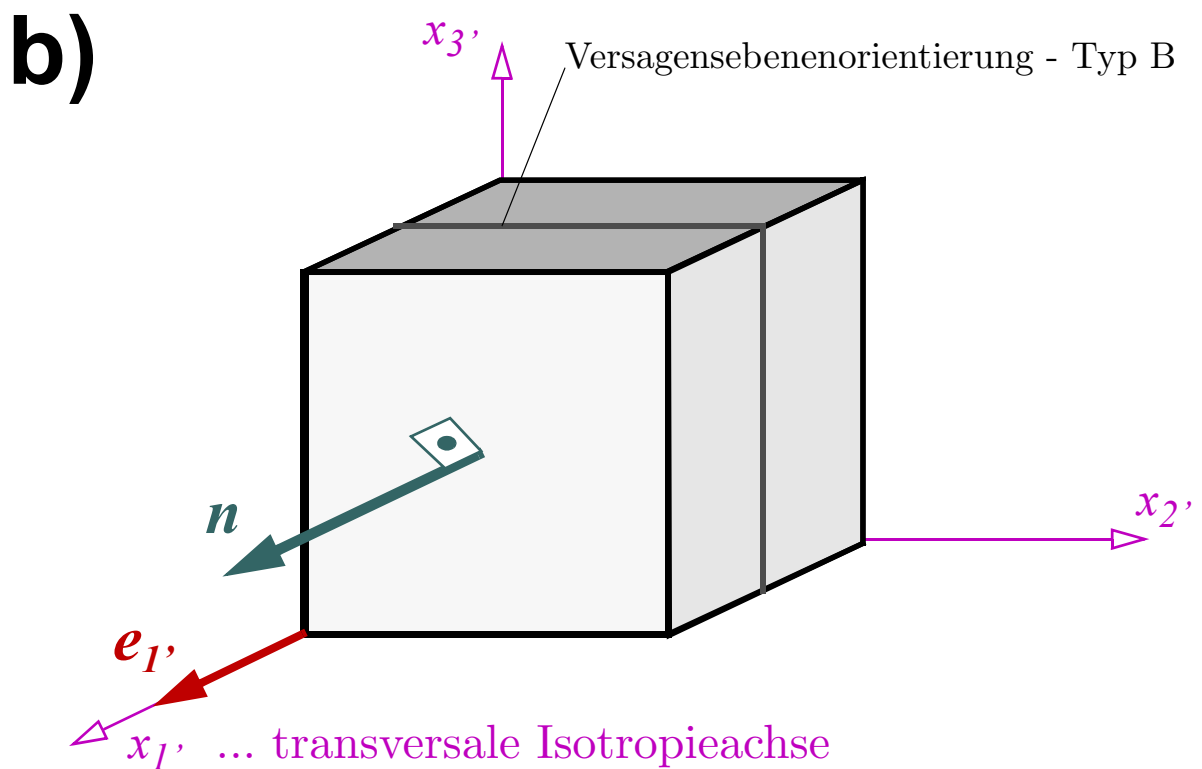
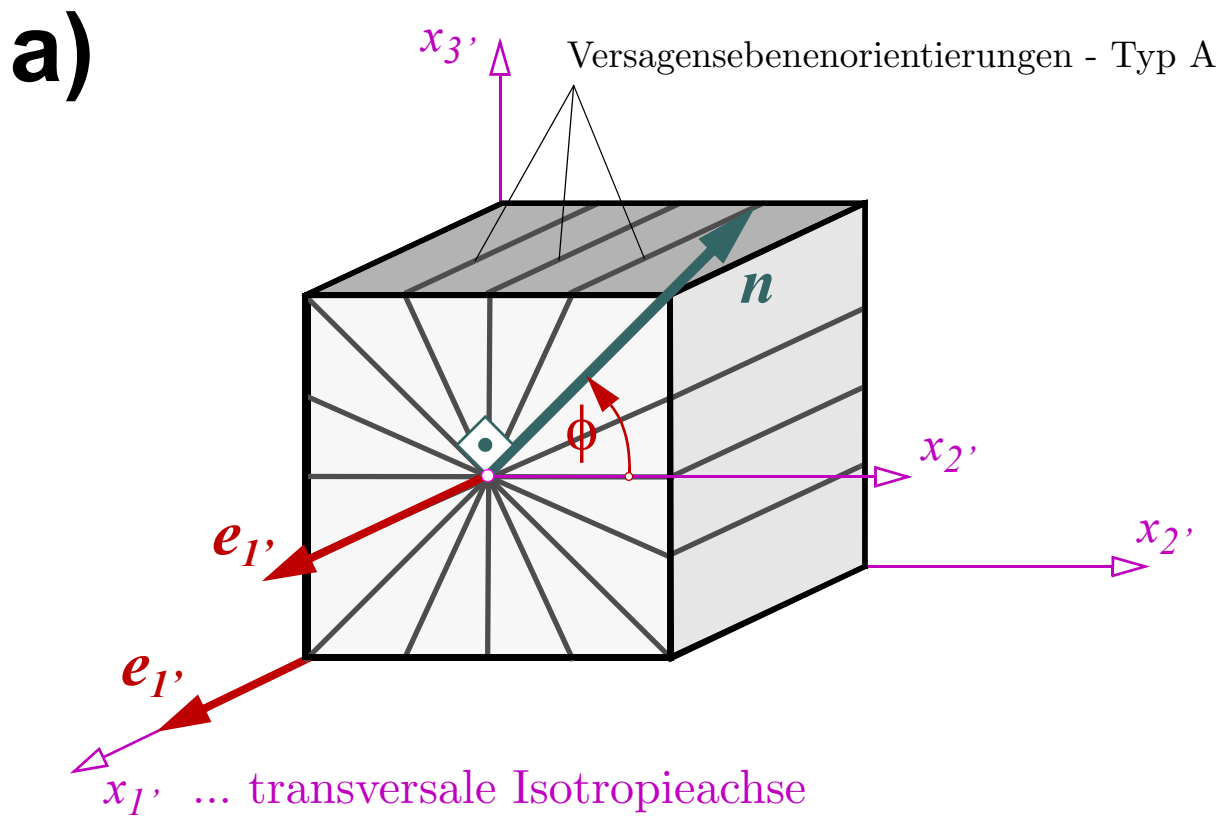


Bild 5.1 Zwei Typen von Versagensebenenorientierungen bei transversal isotrop strukturierten Materialien: a) Typ A: Schnittebenenbüschel mit dem Normalenvektor \mathbf{n} , b) Typ B: Schnittebenenorientierung mit dem Normalenvektor \mathbf{n} parallel zur transversalen Isotropieachse

- Faserversagen.

Bei Zwischenfaserversagen tritt Versagen in Ebenenorientierungen des Typs A auf. Geht man davon aus, dass die Festigkeit der Fasern größer ist als die Festigkeit der umhüllenden Matrix, wird das Zwischenfaserversagen auch als Matrixversagen bezeichnet. Die Behandlung und Darstellung dieses Versagensmodus und die zugehörigen speziellen Versagensbedingungen werden in Kap. 5.3 bis Kap. 5.5 beschrieben.

Bei Faserversagen steht die Versagensebene normal zur Faserrichtung (Typ B). Dieser Versagensmodus wird in Kap. 5.6 dargestellt.

5.2.3 Laminat mit isotropen Schichteigenschaften

Als weiteres transversal isotrop strukturiertes Material wird ein Laminat (Bild 5.19) betrachtet. Der Einheitsvektor \mathbf{e}_l ist der Normalenvektor auf die Schichtebenen. Um die Forderung der transversalen Isotropie zu erfüllen, muss das Schubversagen in der Schichtorientierung - unabhängig ob Interaktion mit der in derselben Ebene wirkenden Normalspannung besteht - in allen Richtungen normal zur transversalen Isotropieachse \mathbf{e}_l gleich sein.

5.3 Zwischenfaserversagen bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen

5.3.1 Versagensebenenorientierung bei Zwischenfaserversagen

Das Zwischenfaserversagen tritt in Ebenenorientierungen mit dem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} , der normal auf die Faserrichtung (Bild 5.2) steht, auf. Das orthonormale lokale Dreibein mit den Einheitsvektoren \mathbf{l} , \mathbf{n} und \mathbf{t} liegt so, dass der Vektor \mathbf{l} kollinear zur Materialhaupt- richtung bzw. der Faserrichtung \mathbf{e}_1 ist. Die Bezeichnung l steht auch für „längs der Faser- richtung“. Die $\{x_n, x_l\}$ -Achsen stehen normal auf bzw. quer zur Faserrichtung. Die Lage dieser beiden Achsen wird durch den Winkel ϕ angegeben, der relativ von der x_2 -Achse aus - entsprechend dem Materialhauptachsensystem - rechtsdrehend gemessen wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 &= c_{n1'} = 0 & \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1 &= c_{t1'} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 &= c_{n2'} = c & \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2 &= c_{t2'} = -s \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 &= c_{n3'} = s & \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 &= c_{t3'} = c \end{aligned} \quad \text{mit } c = \cos \phi, s = \sin \phi \quad (5-1)$$

Aufgrund der transversalen Isotropie sind alle Orientierungen des Definitionsbereichs $\phi \in [0, 2\pi)$ potentielle Versagensebenenorientierungen. Im Unterschied zu dem Beispiel aus dem vorigen Kapitel hat man nicht eine endliche Anzahl anfänglich vorgegebener Versagensebe- nenorientierungen, sondern zufolge der Isotropieannahme unendlich vieler solcher Orien- tierungen.

5.3.2 Spannungen in der Versagensebenenorientierung

In der Ebenenorientierung aus Bild 5.2 wirken die Normalspannungskomponente S_{nn} , die Schubspannungskomponente S_{tn} quer zur Faserrichtung und die Schubspannungskompo- nente S_{ln} in Faserrichtung (Bild 5.3).

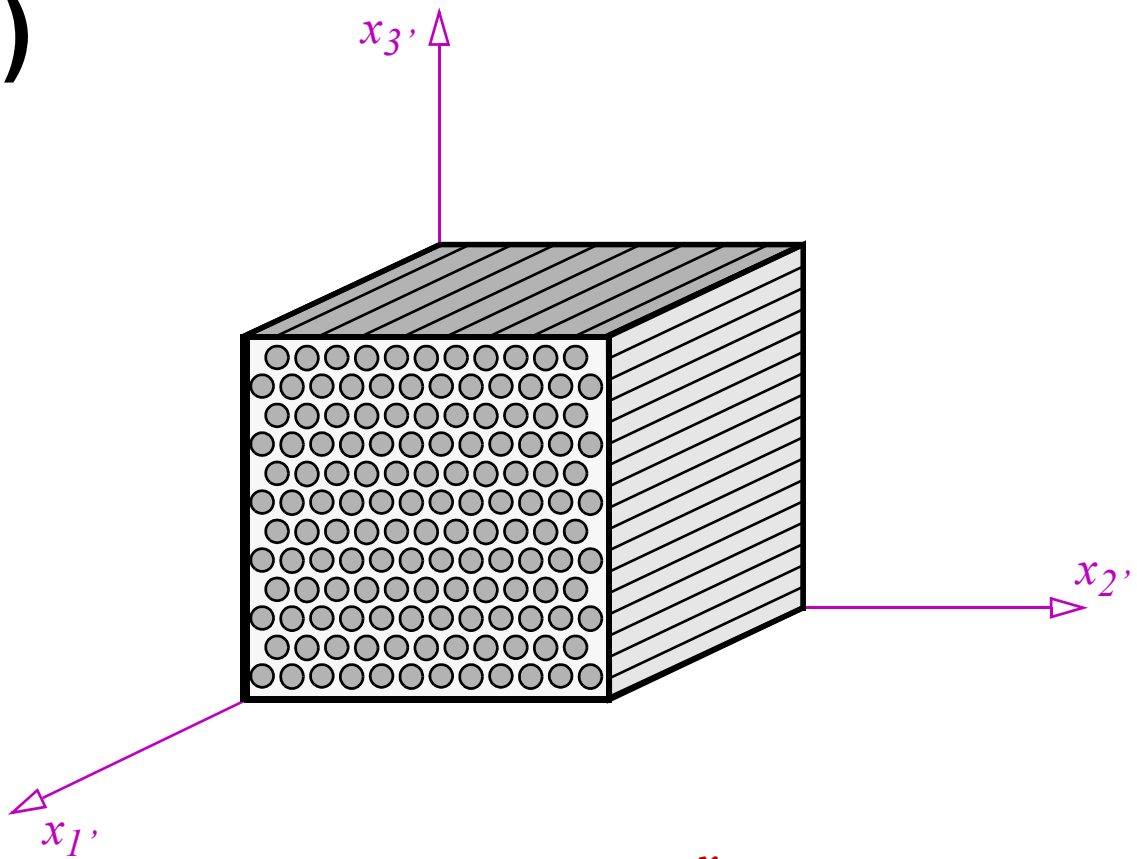
5.3.2.1 Transformation der Spannungen

Mit den trigonometrischen Größen aus (5-1) erhält man den linearen Transformationszu- sammenhang zwischen den Spannungskomponenten \mathbf{s}' im Materialhauptachsensystem (Bild 5.3 a) und den drei lokalen Spannungskomponenten:

$$\begin{bmatrix} S_{nn} \\ S_{tn} \\ S_{ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c^2 & s^2 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & -sc & sc & 0 & 0 & c^2 - s^2 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix} \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{nn}^T \\ \mathbf{p}_{tn}^T \\ \mathbf{p}_{ln}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}' \quad (5-2)$$

Die Schubspannungskomponente S_{ln} ändert sich zwar abhängig von der Versagensebenen- orientierung ϕ , ist aber bei der Transformation nur eine Funktion der beiden Schubspan-

a)



b)

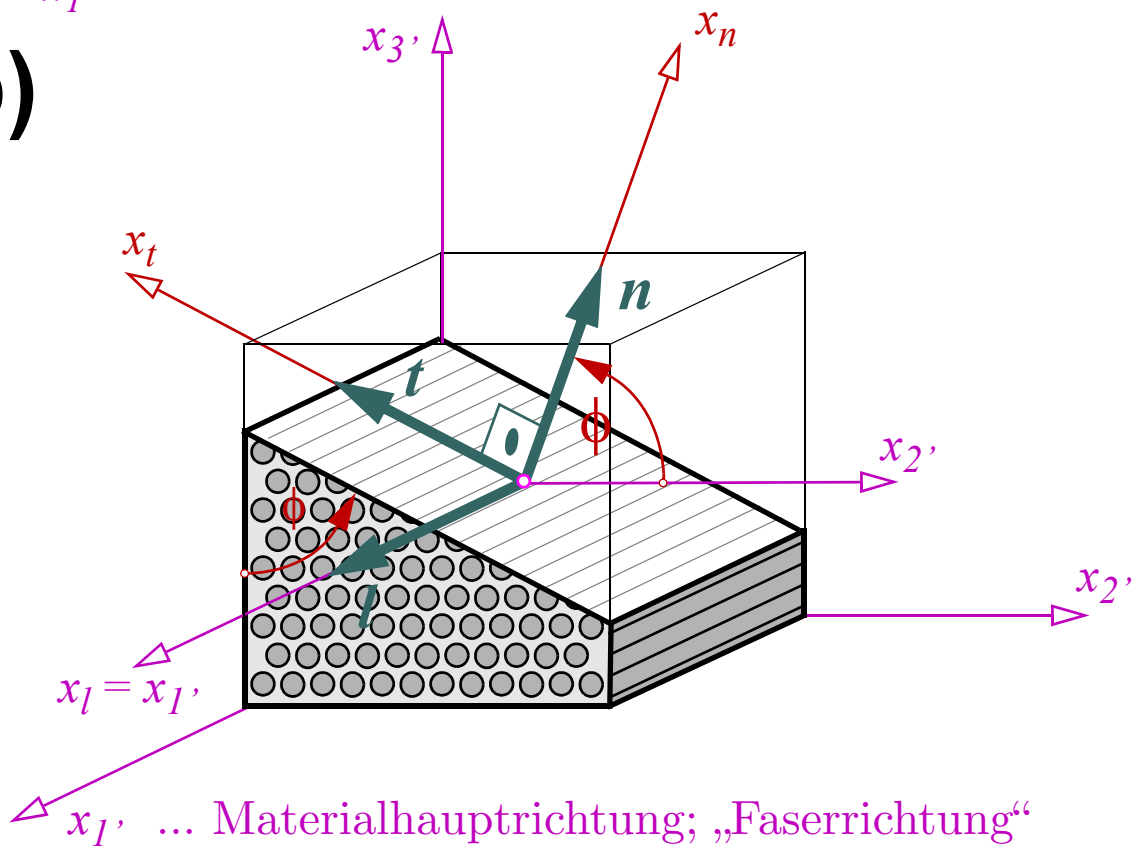


Bild 5.2 Bei Matrixversagen tritt Versagen in Ebenenorientierungen mit dem Normaleneinheitsvektor n auf; aufgrund der transversalen Isotropie sind alle Ebenen mit der Orientierung $\phi \in [0, 2\pi)$ gleichwertig

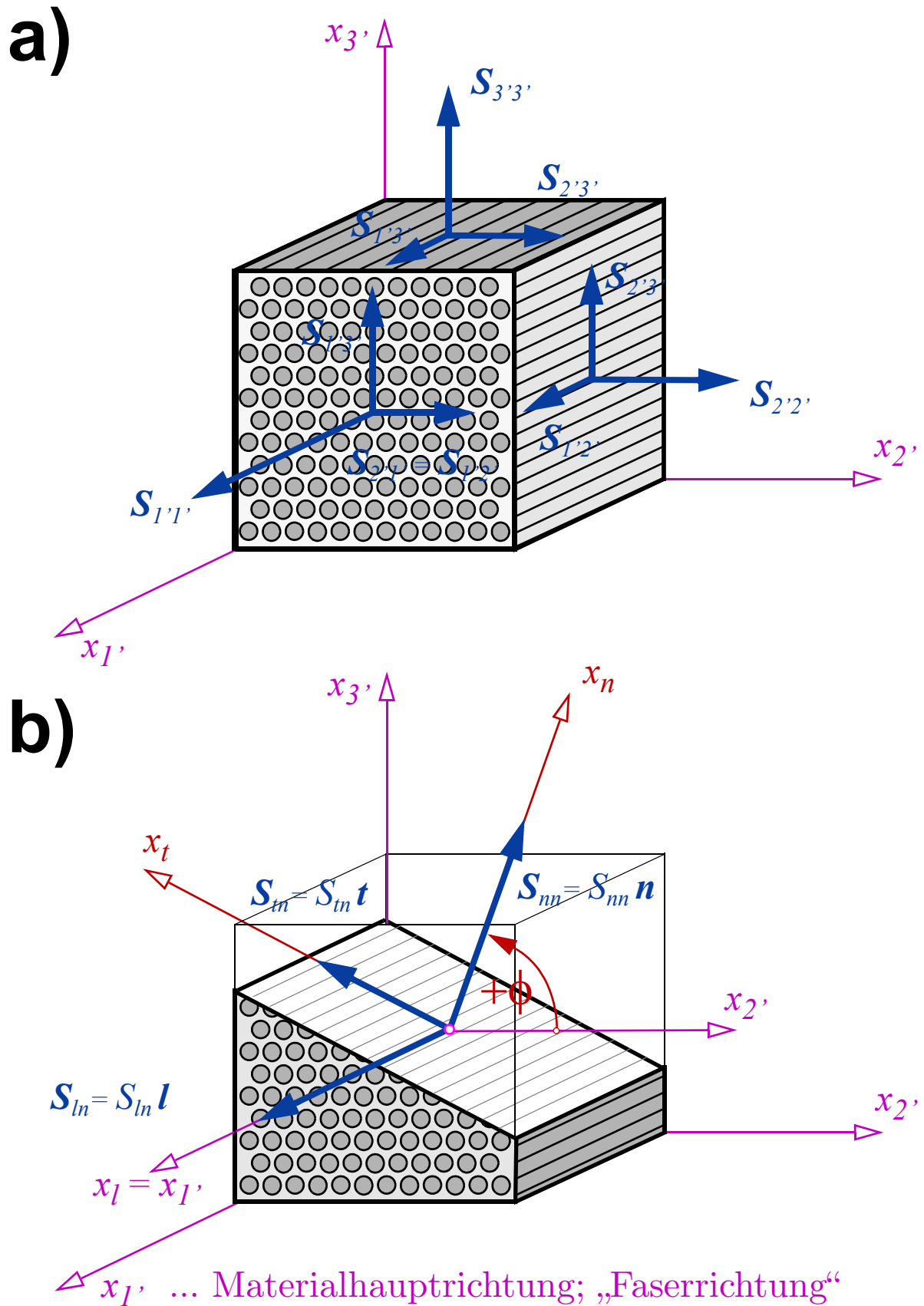


Bild 5.3 a) Spannungen \mathbf{s}' im $\{x_1', x_2', x_3'\}$ -Materialhauptachsensystem; b) Spannungskomponenten S_{nn} , S_{ln} und S_{ln} in der Schnittebene bei Matrix- bzw. Zwischenfaserversagen

nungen $S_{1'2'}$ und $S_{1'3'}$. Die Spannungskomponenten S_{nn} und S_{in} hängen im Gegensatz dazu nur von den Spannungen $S_{2'2'}$, $S_{3'3'}$ und $S_{2'3'}$ ab. Ein zweiter Unterschied bei den Spannungskomponenten quer zur Faser und der Schubspannung S_{in} längs der Faserrichtung ist, dass in (5-2) bei S_{in} die trigonometrischen Terme linear auftreten, bei S_{nn} und S_{nn} quadratisch. Werden trigonometrische Additionstheoreme auf die Transformationsbeziehungen (5-2) angewandt, lassen sich bei den beiden letztgenannten Spannungskomponenten die trigonometrischen Produktterme ersetzen:

$$\begin{aligned} S_{nn} &= \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) + \left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right) \cos(2\phi) + S_{2'3'} \sin(2\phi) \\ S_{in} &= - \left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right) \sin(2\phi) + S_{2'3'} \cos(2\phi) \end{aligned} \quad (5-3)$$

Der Vorteil dieses Ausdruckes ist, dass keine Produkte von trigonometrischen Funktionen enthalten sind.

5.3.2.2 Mohr'scher Kreis für die Spannungskomponenten quer zur Faserrichtung

Werden die beiden Spannungskomponenten S_{nn} und S_{in} abhängig von der Orientierung ϕ der Schnittebene aufgetragen, ergibt sich der sogenannte Mohr'sche Kreis (Bild 5.4) mit dem Radius R und dem Mittelpunkt M :

$$R = \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right)^2 + S_{2'3'}^2} \quad M = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) \quad (5-4)$$

Aus Bild 5.4 kann unmittelbar die maximale/minimale Normalspannung $S_{nn,min}$ bzw. $S_{nn,max}$ (Punkte **a**) und die maximale Schubspannungskomponente $S_{in,max}$ (Punkt **b**), sowie die zugehörigen Schnittebenenwinkel abgelesen werden. Diese Information lässt sich später bei der Konstruktion der Versagensbedingungen im Materialhauptachsensystem nutzen.

Achtung: Die Spannungskomponenten $S_{nn,min}$ bzw. $S_{nn,max}$ sind i.A. keine Hauptnormalspannungen, da die Schubspannungskomponente S_{in} in der Schnittebene mit $S_{nn,min}$ bzw. $S_{nn,max}$ i.A. nicht null ist.

5.3.2.3 Maximale Normalspannungen quer zur Faserrichtung

Im Fall der maximalen Normalspannung $S_{nn,max}$ (5-5) ist die zugehörige Schubkomponente S_{in} null. Hervorzuheben ist aber, dass die Schnittfläche aufgrund der Schubspannungskomponente S_{in} i.A. nicht (!) schubspannungsfrei ist.

Maximale/Minimale Normalspannungskomponente S_{nn}

$$S_{nn,max} = S_{nn}(\phi = \phi_a) = M + R = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right)^2 + S_{2'3'}^2} \quad (5-5)$$

$$S_{nn,min} = S_{nn}\left(\phi = \phi_a \pm \frac{\pi}{2}\right) = M - R = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right)^2 + S_{2'3'}^2} \quad (5-6)$$

Schubspannungskomponenten S_{tn}, S_{ln}

$$\begin{aligned} S_{tn}(\phi = \phi_a) &= 0 \\ S_{ln}(\phi = \phi_a) &= S_{1'2'} \cos \phi_a + S_{1'3'} \sin \phi_a \end{aligned} \quad (5-7)$$

Schnittflächenwinkel ϕ_a

$$\tan(2\phi_a) = \frac{2S_{2'3'}}{S_{2'2'} - S_{3'3'}} \quad (5-8)$$

Box 5.1 Maximale und minimale Normalspannungskomponente quer zur Faserrichtung

5.3.2.4 Maximale Schubspannungskomponente quer zur Faserrichtung

Der Maximalwert der Schubspannungskomponente S_{tn} wird erreicht, wenn die Orientierung der Schnittebene zur Richtung der maximalen Normalspannung $S_{nn,max}$ um 45° versetzt wird.

Maximale Schubspannungskomponente S_{tn}

$$S_{tn,max} = S_{tn}(\phi = -\phi_b) = -S_{tn}\left(\phi = -\phi_b \pm \frac{\pi}{2}\right) = R = \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right)^2 + S_{2'3'}^2} \quad (5-9)$$

Normal- und Schubspannungskomponenten S_{nn}, S_{ln}

$$\begin{aligned} S_{nn}(\phi = -\phi_b) &= M = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) \\ S_{ln}(\phi = -\phi_b) &= S_{1'2'} \cos \phi_b - S_{1'3'} \sin \phi_b \end{aligned} \quad (5-10)$$

Schnittflächenwinkel ϕ_b

$$\tan(2\phi_b) = -\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2S_{2'3'}} \right) \quad \phi_b = \phi_a \pm \frac{\pi}{4} \quad (5-11)$$

Box 5.2 Maximale Schubspannungskomponente quer zur Faserrichtung

5.3.2.5 Invariante Größen bei transversaler Isotropie

Der Mittelpunkt M und der Radius R (5-4) des Mohr'schen Kreises sind transversal isotrope Invarianten. Alle Funktionen, die sich aus diesen beiden Größen aufbauen, sind damit ebenso transversal isotrop. Dazu gehören die maximale Normalspannung $S_{nn,max}$ (5-5), die minimale Normalspannung $S_{nn,min}$ (5-6) und die maximale Schubspannung $S_{tn,max}$ quer zur Faserrichtung und in weiterer Folge alle Versagensbedingungen, die in diesen Größen formuliert sind.

5.3.3 Problemformulierung und Aufgabenstellung

5.3.3.1 Generelle Anforderungen an die lokale Versagensbedingung

Ausgangspunkt ist die Formulierung einer Versagensbedingung F'' in den drei lokalen Spannungskomponenten S_{nn} , S_{tn} und S_{in} . Die dafür verwendeten Funktionstypen unterliegen den anfänglich festgelegten Funktionseigenschaften (Kap. 3.2). Um die transversale Isotropie zu erfüllen, müssen die lokale Versagensbedingung $F''(S_{nn}, S_{tn}, S_{in})$ so formuliert sein, dass das Vorzeichen der Schubspannungskomponenten S_{tn} und S_{in} in der Schnittebene keinen Einfluss auf das Versagen hat, d.h., diese werden mit Betragzeichen in die Versagensbedingung inkludiert oder - was z.B. in Gleichung (4-15) gemacht wurde - durch zwei Versagensbedingungen mit alternierenden Vorzeichen angeschrieben.

5.3.3.2 Problemformulierung

Mit den linearen Transformationsgleichungen (5-2) ergibt sich die Versagensbedingung F' als Funktion aller Spannungskomponenten \mathbf{s}' (außer $S_{1'1'}$) und dem Winkel ϕ der Schnittebenenorientierung:

$$F''(S_{nn}, S_{tn}, S_{in}) \quad \rightarrow \quad F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}, S_{1'2'}, S_{1'3'}, \phi) = F'(\mathbf{s}', \phi) \quad (5-12)$$

Aufgrund der transversalen Isotropie sind alle Orientierungen ϕ im Definitionsbereich $[0, \pi)$ potentielle Versagensebenenorientierungen.

5.3.3.3 Aufgabenstellung

Aus dieser unendlichen Menge ist diejenige Orientierung bzw. sind diejenigen Orientierungen $\phi = \phi_f$ zu finden, die unter einem vorgegebenen Spannungszustand \mathbf{s}' zuerst die Versagensbedingung $F' = 0$ erfüllen.

Ist diese Aufgabe lösbar und lassen sich die gesuchten Winkel ϕ_f in expliziter Form anschreiben, kann durch Rückeinsetzen von ϕ_f in die Versagensbedingung F' in (5-12) eine geschlossene implizite Darstellung der Versagensbedingung in den Spannungskomponenten der Materialhaupttrichtung unter Einarbeitung der transversalen Isotropie erreicht werden.

5.3.4 Lösungsvarianten und Vorgehensweise

Um die oben formulierte Aufgabe zu lösen, werden drei Verfahren vorgestellt:

- ein sogenanntes direktes Vorgehen,
- eine graphische Lösung mithilfe des Mohr'schen Kreises und
- eine Diskretisierung des Winkels ϕ .

Die ersten beiden Verfahren führen nur in einfachen Sonderfällen zum Ziel, lösen die Aufgabe aber exakt. Die Diskretisierungsvariante erfüllt die Symmetrieforderung nur näherungsweise, ist aber uneingeschränkt einsetzbar. Die Grundzüge der Vorgehensweise bei den einzelnen Verfahren sollen kurz erläutert werden.

5.3.4.1 Direktes Vorgehen - analytisch exakte Auflösung

Um die Orientierung ϕ_f (oder mehrere solcher Orientierungen), in der Versagen eintritt, aus dem Bereich $[0, \pi)$ zu bestimmen, ist eine weitere Gleichung notwendig. Bei ϕ_f hat die Funktion $F'(\mathbf{s}', \phi)$ aus (5-12) ein Minimum:

$$\frac{\partial F'(\mathbf{s}', \phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (5-13)$$

Aufgrund der Konvexität der lokalen Versagensbedingung ist ein lokales Maximum ausgeschlossen. In nur sehr wenigen Sonderfällen lässt sich Gleichung (5-13) als explizite Funktion $\phi = f(\mathbf{s}')$ auflösen. Die Auflösbarkeit hängt von der funktionalen Form der lokalen Versagensbedingung F'' ab; diese bestimmt in welchen Produkten die trigonometrischen Funktionen $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ bzw. $\sin(2\phi)$ und $\cos(2\phi)$, die aus den Transformationsgleichungen (5-2) bzw. (5-3) kommen, in $F'(\mathbf{s}', \phi)$ auftreten. Abhängig von dieser funktionalen Gestalt ergibt sich Gleichung (5-13) und es entscheidet sich, ob eine exakte Auflösung dieser Gleichung nach ϕ möglich ist oder nicht, siehe Hashin (1980).

Ist die Funktion $\phi(\mathbf{s}')$ berechenbar, wird diese in die Versagensbedingung $F'(\mathbf{s}', \phi)$ rückeingesetzt, wodurch der Winkel ϕ in diesem Ausdruck eliminiert wird und sich eine exakte und geschlossene Darstellung der Versagensbedingung $F'(\mathbf{s}')$ - ausgehend von der lokalen Versagensbedingung F'' unter Einarbeitung der transversalen Isotropie - ergibt.

Die Auflösung ist z.B. bei lokalen Versagensbedingungen der Form $F''(S_{nn}, S_{nn})$, wenn die einzelnen Terme linear auftreten, immer möglich.

5.3.4.2 Direktes Vorgehen - numerische Berechnung

Ist die explizite Auflösung der Gleichung (5-13) nach ϕ nicht möglich, kann die Aufgabe numerisch-approximativ gelöst werden. Dazu wird ein konstanter Referenzspannungszustand $\bar{\mathbf{s}}'$ vorgegeben, dessen Größe mit einem Lastfaktor Λ gesteuert wird. Der Lastfaktor wird so lange erhöht, bis die Versagensbedingung aus (5-12) zu null wird:

$$F'(\mathbf{s}', \phi) = F(\Lambda \bar{\mathbf{s}}', \phi) = F'(\Lambda, \phi) = 0 \quad (5-14)$$

Diese Funktion ist als Kurve in der (Λ, ϕ) -Ebene vorstellbar. Auf der Abszisse wird der Winkel ϕ - dem Definitionsbereich nach - von 0 bis π aufgetragen. Auf der Ordinate wird der Lastfaktor, der positiv sein muss, eingezeichnet. Aufgrund der transversalen Isotropie hat die in (5-14) in impliziter Form angegebene Kurve die Periode 0 bis π . Diese Kurve gibt für jede Versagensbedingung F' aus $\phi \in [0, \pi)$ den Limitlastfaktor an, der zur Erreichung des Versagenszustandes notwendig ist. Von den Orientierungen ϕ sind jene gesucht, die den Lastfaktor Λ minimieren. Um dieses globale Minimum bzw. die globalen Minima zu bestimmen, wird Gleichung (5-13) benötigt. Mit (5-14) und (5-13) hat man zwei Gleichungen

$$\mathbf{g}(\lambda, \phi) = \begin{bmatrix} F'(\lambda, \phi) \\ \frac{\partial F'(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5-15)$$

um die Unbekannten Λ und ϕ zu bestimmen und erhält nach Auflösung bei Vorgabe des Referenzspannungszustandes den Limitlastfaktor und die zugehörige Versagensebenenorientierung.

Auf den ersten Blick scheint das sehr einfach zu sein, jedoch steckt hinter dieser Aufgabe ein nichtlineares Gleichungssystem, wobei über die Gestalt der Lösung(en) wenig bekannt ist, d.h., gibt es überhaupt eine Lösung, ist die Lösung eindeutig oder existieren mehrere gültige Lösungen? Aus der Problemformulierung sind auch lokale Maxima mögliche Lösungen des Gleichungssystems. Die einzig gesuchten Lösungen sind aber nur die globalen Minima. Weiters sind aus der Lösungsmenge alle Lösungen mit negativem Λ auszusortieren. Von den verbleibenden Ergebnissen sind diejenigen mit dem kleinsten positiven Λ die gesuchten Lösungen.

Da man bei der numerischen Berechnung keine explizite Funktion $\phi = f(\mathbf{s}')$ erhält und damit keine geschlossene Funktionsdarstellung $F''(\mathbf{s}')$ möglich ist, wird diese numerische Lösungsprozedur nicht weiter verfolgt.

5.3.4.3 Graphische Lösung mit dem Mohr'schen Kreis

In wenigen Sonderfällen ist das graphische Lösungsverfahren mithilfe des Mohr'schen Kreises anwendbar. Die lokale Versagensbedingung F'' darf nur eine lineare Funktion der Spannungskomponenten S_{nn} und S_{mm} sein; bei der nichtlinearen Interaktion dieser Spannungskomponenten ist eine Auflösung nur bei parabolisch verlaufender Interaktion angeführt (Leon'sche Versagensbedingung). In allen auflösbaren Fällen ergibt sich eine Formulierung der Versagensbedingung F' in der maximalen und der minimalen Normalspannung $S_{nn,max}$ und $S_{nn,min}$, wodurch die transversale Isotropiebedingung der Funktion F'

erfüllt ist. Aus dem Mohr'schen Kreis lassen sich die Orientierungen ϕ_f der aktiven Versagensebenenorientierungen ablesen. Obwohl nur in wenigen Fällen anwendbar, gibt die graphische Lösung der Aufgabe eine unmittelbare Einsicht in die Versagensgröße und das zugehörige Versagensverhalten. Dieses Lösungsverfahren wird auch bei den klassischen, isotropen Mohr-Typ-Bedingungen (Tresca, Rankine, Mohr-Coulomb und Leon) angewandt.

5.3.4.4 Diskretisierung durch N - gleichmäßig verteilte Orientierungen

Mit der Diskretisierung des kontinuierlichen Winkelverlaufs $\phi \in [0, \pi)$ durch N Winkel ϕ_i , erübrigt sich die oben gestellte Aufgabe, da die gesuchte transversal isotrope Versagensbedingung durch N Versagensbedingungen $F'_i(\mathbf{S}', \phi_i)$ angenähert wird. Damit ist dieses Vorgehen das diskrete Pendant zur kontinuierlichen Problemstellung des direkten Verfahrens. Kritisch anzumerken ist, dass durch die Diskretisierung die transversale Isotropie im streng mathematischen Sinn verloren geht bzw. nur approximiert wird. Dem kann entgegnet werden, dass durch eine beliebig hohe Anzahl N eine Annäherung an den Grenzfall möglich ist. Für die Diskretisierung sprechen die einfache rechnerische Behandlung und die uneingeschränkte Anwendbarkeit. Das Diskretisierungsverfahren ist auch heranziehbar, um lösungsnahen Startwerte für die Problemunbekannten Λ und ϕ des nichtlinearen Gleichungssystems (5-15) zu finden.

Details zum konkreten Vorgehen und exemplarische Anwendungsbeispiele finden sich in Kap. 5.5.

5.3.4.5 Vorgehensweise

In den anschließenden Kapiteln werden die ersten beiden (exakten) Lösungsverfahren umgesetzt. Dabei werden die folgenden lokalen Versagensbedingungen untersucht:

- Druck- und Zugversagen quer zur Faserrichtung (Kap. 5.3.5):
- Schubversagen quer zur Faserrichtung (Kap. 5.3.6)
- Lineare Normal- und Schubspannungsinteraktion bei Versagen quer zur Faserrichtung (Kap. 5.3.7)
- Parabolische Normal- und Schubspannungsinteraktion bei Versagen quer zur Faserrichtung (Kap. 5.3.8)
- Faserparalleles Schubversagen (Kap. 5.3.9):
- Nichtlineare Normal- und Schubspannungsinteraktion

Bei den ersten drei Fällen sind die lokalen Versagensbedingungen F'' linear in S_{mm} und S_{mm} . Bei diesen lassen sich das direkte Verfahren und der Mohr'sche Kreis zur Lösung der anfänglich gestellten Aufgabe anwenden. Die parabolische Interaktionsgleichung der Spannungskomponenten (Kap. 5.3.8) quer zur Faser ist noch mit dem Mohr'schen Kreis lösbar, führt aber zu zwei, nur bereichsweise gültigen Funktionen. Das direkte Verfahren führt bei Schubversagen parallel zur Faserrichtung zur exakten Lösung. Keines der beiden exakten

Verfahren zur geschlossenen Versagensbedingungsdarstellung führt bei allgemeinen nicht-linearen Interaktionsgleichungen zum Ziel. Hier muss das Diskretisierungsverfahren angewandt werden.

5.3.5 Druck/Zugversagen quer zur Faserrichtung

Versagen in der Matrix quer zur Faserrichtung tritt nur bei Zug- oder Drucknormalspannungsbeanspruchung auf. Die zugehörige lokale Versagensbedingung lautet:

$$F''(S_{nn}) = \frac{S_{nn}}{f_{nn,t}} - 1 \qquad F''(S_{nn}) = -\frac{S_{nn}}{f_{nn,c}} - 1 \qquad f_{nn,t}, f_{nn,c} \in (0, +\infty) \quad (5-16)$$

5.3.5.1 Direktes Lösungsverfahren

Mit der Transformationsgleichung für S_{nn} (5-3) ergibt sich die lokale Versagensbedingung zu einer linearen Gleichung in den trigonometrischen Funktionen $\sin(2\phi)$ und $\cos(2\phi)$:

$$F' = \frac{1}{f_{nn,t}} \left[\left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2} \right) + \left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2} \right) \cos(2\phi) + S_{2'3'} \sin(2\phi) \right] - 1 \quad (5-17)$$

Mit der Bedingung (5-13) lässt sich der Versagenswinkel $\phi_f = \phi_a$ (5-8) bestimmen. Durch Rückeinsetzen und Elimination dieses Winkels in (5-17) ergibt sich die Zugversagensbedingung in den drei Spannungskomponenten des Materialhauptachsensystems:

$$F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}) = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right) + \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_{nn,t}} \right)^2} - 1 \quad (5-18)$$

Tritt die Situation auf, dass die Schubspannung $S_{2'3'}$ null ist und die beiden Normalspannungen quer zur Faserrichtung gleich groß werden, d.h. $S_{nn} = S_{3'3'} = S_{2'2'}$, kann kein Winkel ϕ_f bestimmt werden, da Gleichung (5-13) zu einem unbestimmten Ausdruck wird. Aus Gleichung (5-17) ergibt sich, dass alle Winkel ϕ im Definitionsbereich Lösungen sind und damit alle Versagensebenenorientierungen gleichzeitig das elastische Limit erreichen.

5.3.5.2 Graphische Lösung mit dem Mohr'schen Kreis

In Bild 5.5 sind die beiden Versagensbedingungen $F'' = 0$ (5-16) graphisch als vertikale Geraden in der $\{S_{nn}, S_m\}$ -Spannungsebene dargestellt. In derselben Koordinatenebene ist der Mohr'sche Kreis aus Bild 5.4 eingetragen. Sobald dieser Kreis eine der beiden Grenzgeraden berührt, tritt Versagen ein. Zugversagen tritt in der Orientierung ein, in der die maximale Zugnormalspannung $S_{nn,max}$ quer zur Faserrichtung wirkt; Druckversagen bei $S_{nn,min}$.

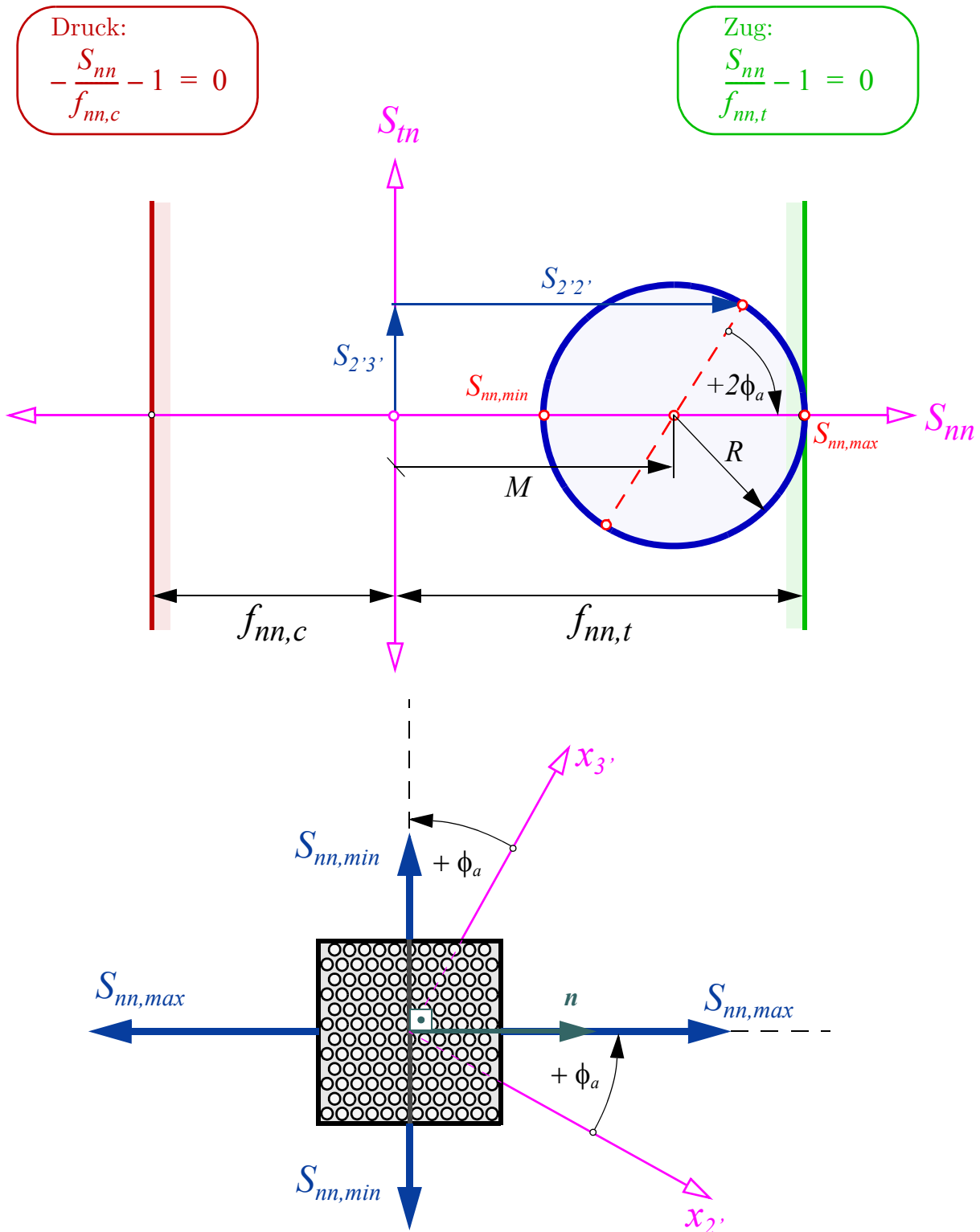


Bild 5.5 Zug/Druckversagen quer zur Faserrichtung; dargestellt in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ - Ebene. Der Mohr'sche Kreis repräsentiert den aufgebrachtten Spannungszustand. Die Orientierung der Versagensebene relativ zu den beiden Materialhauptachsen $\{x_2', x_3'\}$, in der die maximale Normalspannung quer zur Faserrichtung wirkt, wird durch den Winkel ϕ_a angegeben.

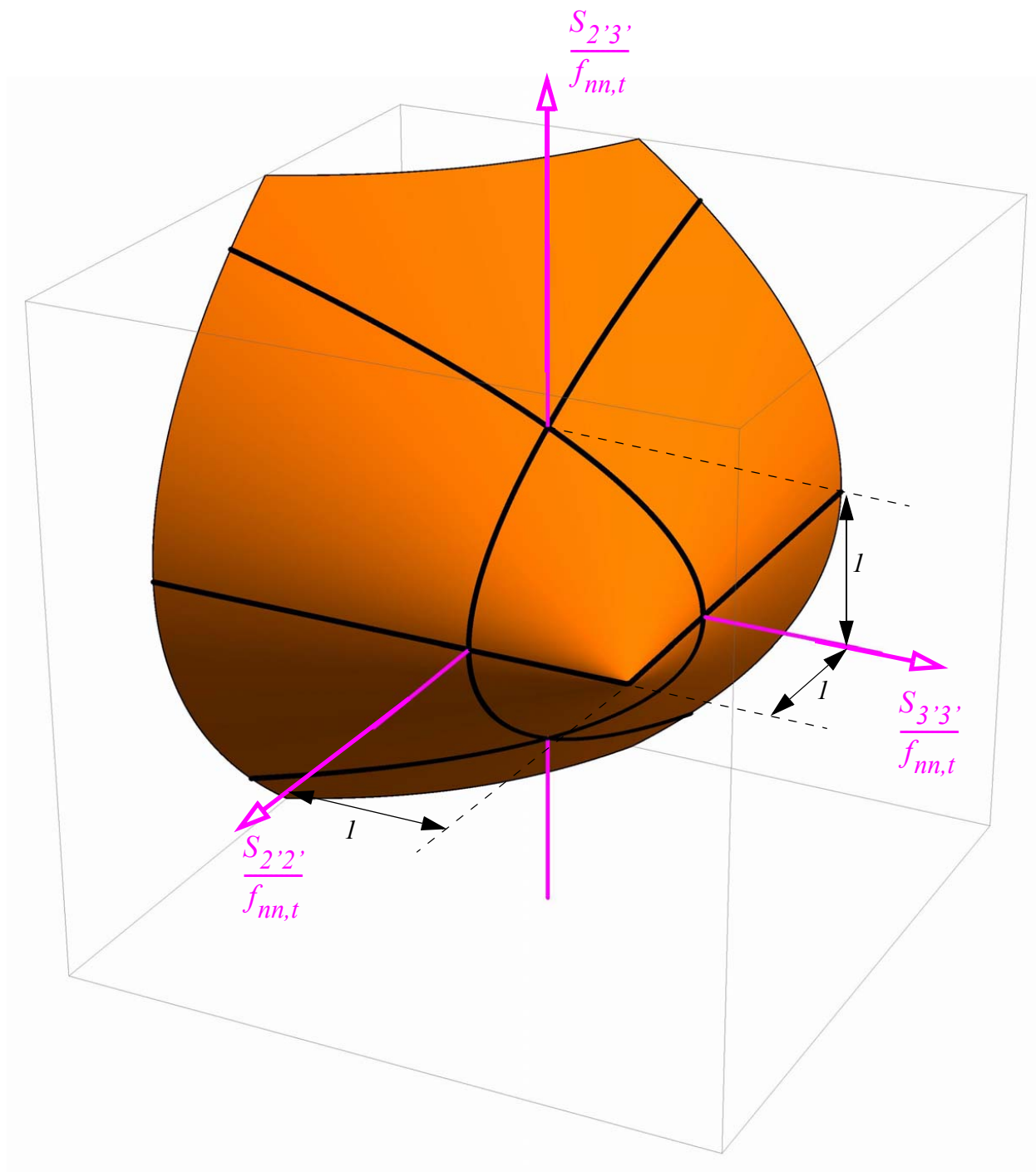


Bild 5.6 Darstellung der transversal isotropen Zugversagensbedingung (5-20) quer zur Faser im $\{S_{2'2'}, S_{2'3'}, S_{3'3'}\}$ -Spannungsraum

$$F'(S_{m,max}) = \frac{S_{nn,max}}{f_{nn,t}} - 1 \qquad F'(S_{m,min}) = -\frac{S_{m,min}}{f_{nn,c}} - 1 \quad (5-19)$$

Diese Funktionen erfüllen, da sie in $S_{m,min}$ und $S_{m,max}$ formuliert sind, die transversale Isotropie. Die Lage der Ebenenorientierung, in der Versagen stattfindet, ist durch den Winkel ϕ_a relativ zu den $\{x_2, x_3\}$ -Materialhaupttrichtungen angegeben; der Mohr'sche Kreis in Bild 5.5 berührt die Gerade der Zugversagensbedingung nur an diesem Punkt. Durch Einsetzen der Gleichungen aus Box 5.1 ergeben sich die Versagensbedingungen:

$$F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}) = \pm \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_{nn,t(c)}} \right) + \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_{nn,t(c)}} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_{nn,t(c)}} \right)^2} - 1 \quad (5-20)$$

Die Orientierung ϕ_a der Versagensebene ist mit Gleichung (5-8) berechenbar, sobald die Kombination der Spannungen $S_{2'2'}$, $S_{2'3'}$ und $S_{3'3'}$, die die Versagensbedingung (5-20) erfüllt, bekannt ist. In Bild 5.6 ist die Zugversagensbedingung $F' = 0$ als Fläche im $\{S_{2'2'}, S_{2'3'}, S_{3'3'}\}$ -Spannungsraum dargestellt. Es handelt sich dabei um eine einschalige Kegelfläche.

5.3.5.3 Symmetrischer Spannungszustand quer zur Faserrichtung

In der bereits angesprochenen Sondersituation, wenn die Schubspannung $S_{2'3'}$ null ist und die beiden Normalspannungen quer zur Faserrichtung gleich groß sind ($S_{m} = S_{3'3'} = S_{3'3'}$), degeneriert in Bild 5.5 der Mohr'sche Kreis zu einem Punkt. In Bild 5.6 befindet man sich bei dieser Spannungsconstellation im Versagenszustand an der Spitze der Kegelfläche. In diesem Limitspannungspunkt tritt in allen (!) Versagensebenenorientierungen zeitgleich Versagen ein. Funktion (5-20) ist zwar konvex, hat aber bei diesem Versagensspannungszustand eine funktionsinhärente Ecke.

5.3.5.4 Vergleich direktes Verfahren und graphische Lösungsmethode

Mit dem Mohr'schen Kreis ist die Aufgabe schneller zu lösen und man kann sofort eine Aussage über die Anzahl und Ausrichtung der Versagensorientierungen treffen. Außerdem hat man sofort einen Einblick in kritische Sondersituationen, die eventuell auftreten können. Aus diesen Gründen wird in den nachfolgenden Beispielen zur Lösung der jeweiligen Aufgabe die graphische Methode bevorzugt.

5.3.6 Schubversagen quer zur Faserrichtung

Die lokale Versagensbedingung bei „Schubversagen quer zur Faserrichtung“ lautet:

$$F''(S_m) = \left(\frac{S_m}{f_m} \right)^2 - 1 \qquad f_m \in (0, +\infty) \quad (5-21)$$

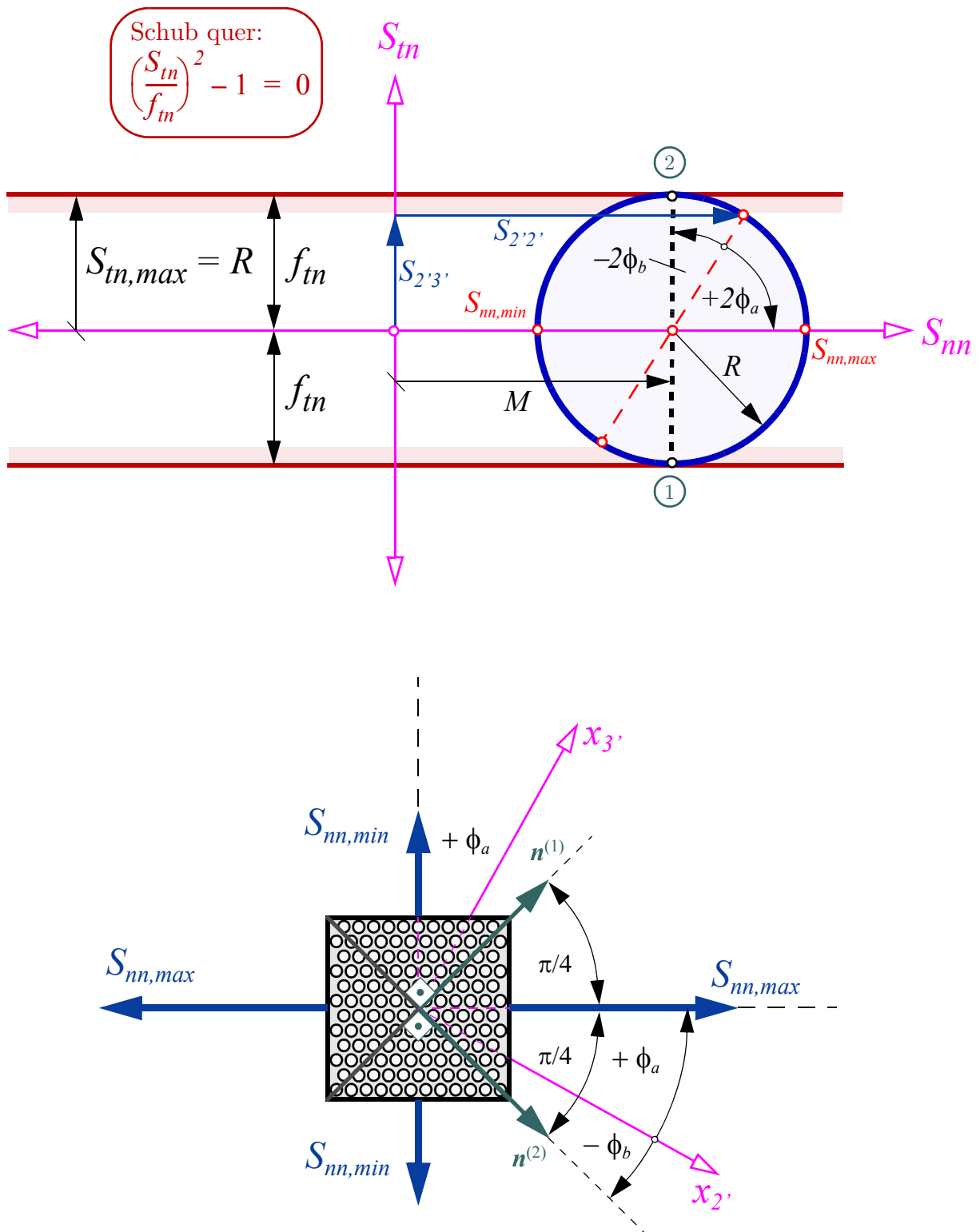


Bild 5.7 Darstellung der Schubspannungsversagensbedingung quer zur Faserrichtung in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ - Ebene. Der Mohr'sche Kreis repräsentiert den aufgebracht Spannungszustand.

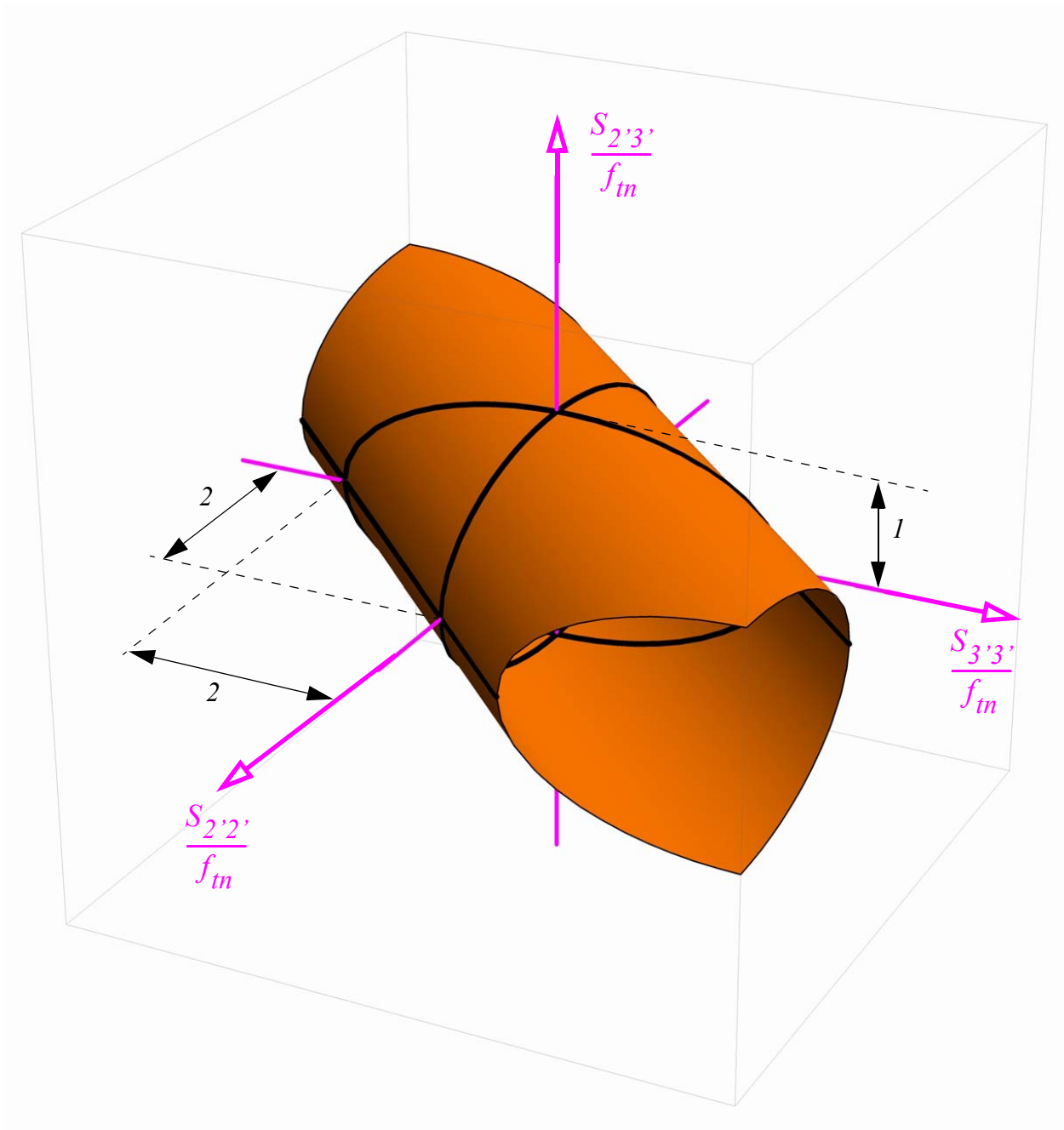


Bild 5.8 Darstellung der Schubspannungsversagensbedingung F' (5-22) quer zur Faserrichtung im normierten $\{S_{2'2'}, S_{2'3'}, S_{3'3'}\}$ -Spannungsraum

Der Mohr'sche Kreis (Bild 5.7) berührt die zwei Geraden der Versagensbedingung immer an zwei Punkten. Damit gibt es im Intervall $[0, \pi)$ zwei Winkel ϕ_f in denen die Schubspannungskomponente quer zur Faserrichtung maximal wird und somit simultan Schubversagen stattfindet. Die beiden Ebenen stehen unter einem rechten Winkel zueinander, wobei ϕ_f dem Winkel ϕ_b aus Gleichung (5-11) entspricht. Relativ zu den Richtungen der maximalen und minimalen Normalspannungen, $S_{nn,max}$ und $S_{nn,min}$, liegen die Versagensebenen unter 45° . Der Betrag der maximalen Schubspannung in (5-21) ist aus der maximalen und minimalen Normalspannung quer zur Faserrichtung berechenbar. Mit den Gleichungen aus Box 5.1 ergibt sich eine in den Spannungskomponenten $S_{2'2'}$, $S_{3'3'}$ und $S_{2'3'}$ quadratische Funktion, die in Bild 5.8 in diesem dreidimensionalen Spannungsraum dargestellt ist. Diese Funktion ist im Unterschied zu (5-20) konvex und überall stetig differenzierbar:

$$F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}) = \left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_m} \right)^2 - 1 \quad (5-22)$$

Die Orientierung ϕ_b der Versagensebenen lässt sich aus Gleichung (5-11) berechnen.

Etwas wird bei der Funktion (5-22) und der Darstellung in Bild 5.8 beobachtet: Bei der Versagensbedingung aus Kap. 5.3.5 ist jedem Punkt in der Versagensbedingung eine einzige Versagensebenenorientierung zugeordnet, mit Ausnahme der Punkte, in denen simultan mehrere Versagensmechanismen aktiviert werden. Bei der Versagensbedingung (5-22) sind jedem Punkt der Versagensbedingung zwei(!) Versagensebenenorientierungen zuordenbar, d.h., der zu (5-22) assoziierte Versagensmechanismus setzt sich immer aus zwei simultan aktiven Schubgleitmechanismen zusammen.

5.3.7 Lineare Normal-Schubspannungsinteraktion quer zur Faserrichtung

5.3.7.1 Lokale Versagensbedingung

Die lokale Versagensbedingung mit linearer Interaktion zwischen Normal- und Schubspannungskomponenten quer zur Faserrichtung ist:

$$F''(S_{nn}, S_{tn}) = \frac{S_{nn}}{f_{nn}} \pm \frac{S_{tn}}{f_m} - 1 \quad (5-23)$$

Das wechselnde Vorzeichen vor S_{tn} gibt an, dass für das Versagen nur der Betrag der Schubspannungskomponente maßgeblich ist. In Bild 5.9 ist die Versagensbedingung $F'' = 0$ durch zwei Geraden eingezeichnet. Versagen tritt wiederum ein, sobald der Mohr'sche Kreis die Versagensbedingungen berührt. Damit lässt sich ein Zusammenhang zwischen den lokalen Spannungs- und den Spannungskomponenten in den Materialhaupttrichtungen herstellen.

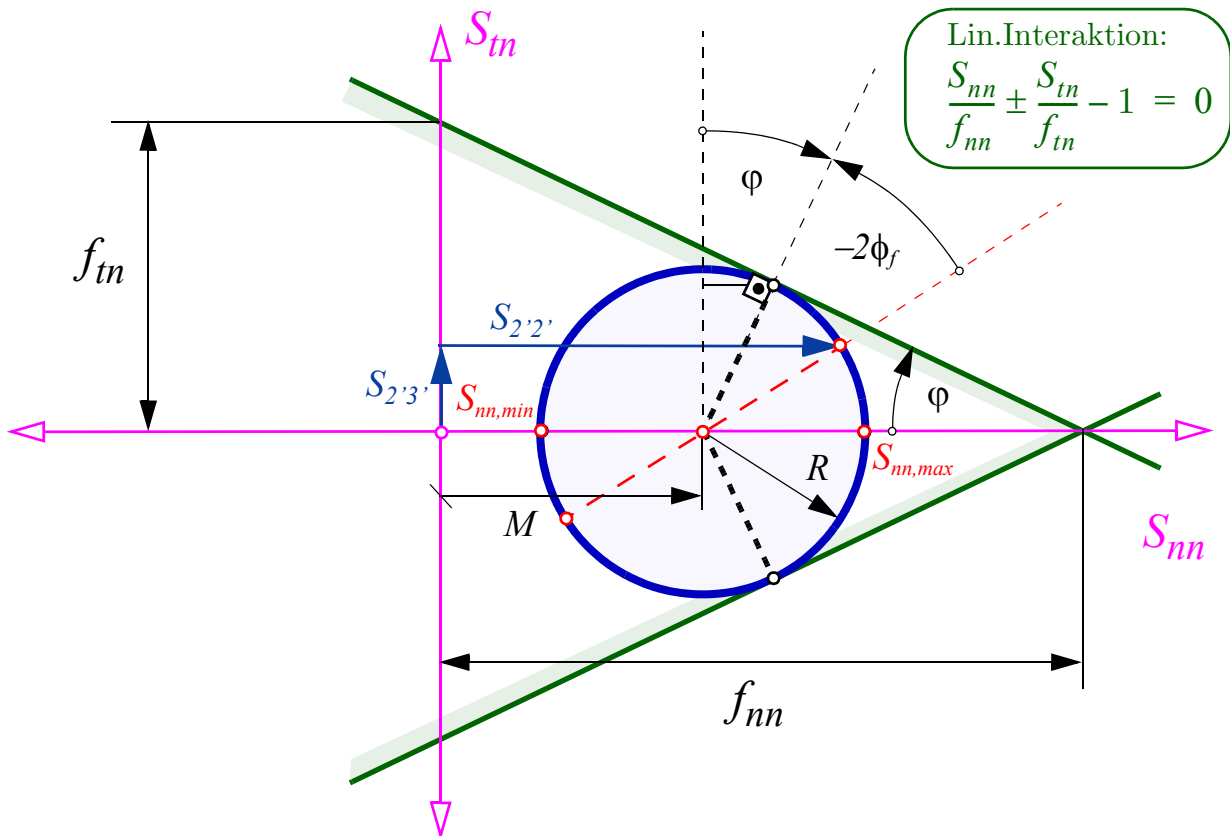


Bild 5.9 Lineare Interaktion bei Versagen zwischen der Schub- und Normalspannungskomponente quer zur Faserrichtung; Darstellung der Versagensbedingung in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ -Ebene

5.3.7.2 Versagensbedingung in den Spannungskomponenten der Materialhauptrichtungen

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen S_{nn} und S_{tn} im Versagenszustand und der maximalen und minimalen Normalspannungskomponente ergibt sich mittels geometrischer Überlegungen aus Bild 5.9 zu:

$$\left. \begin{aligned} S_{nn} &= M + R \sin \varphi = \frac{S_{nn,max} + S_{nn,min}}{2} + \frac{S_{nn,max} - S_{nn,min}}{2} \sin \varphi \\ S_{tn} &= \pm R \cos \varphi = \pm \frac{S_{nn,max} - S_{nn,min}}{2} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \text{Mohr'scher Kreis} \quad (5-24)$$

Aus der lokalen Versagensbedingung F'' ist der Winkel φ - die Neigung der Geraden der Versagensbedingung in Bild 5.9 - berechenbar.

$$\left(\frac{\partial F''}{\partial S_{nn}} \right) / \left(\frac{\partial F''}{\partial S_{tn}} \right) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{f_{tn}}{f_{nn}} \quad (5-25)$$

Einsetzen der Beziehungen (5-24) in die lokale Versagensbedingung (5-23) ergibt:

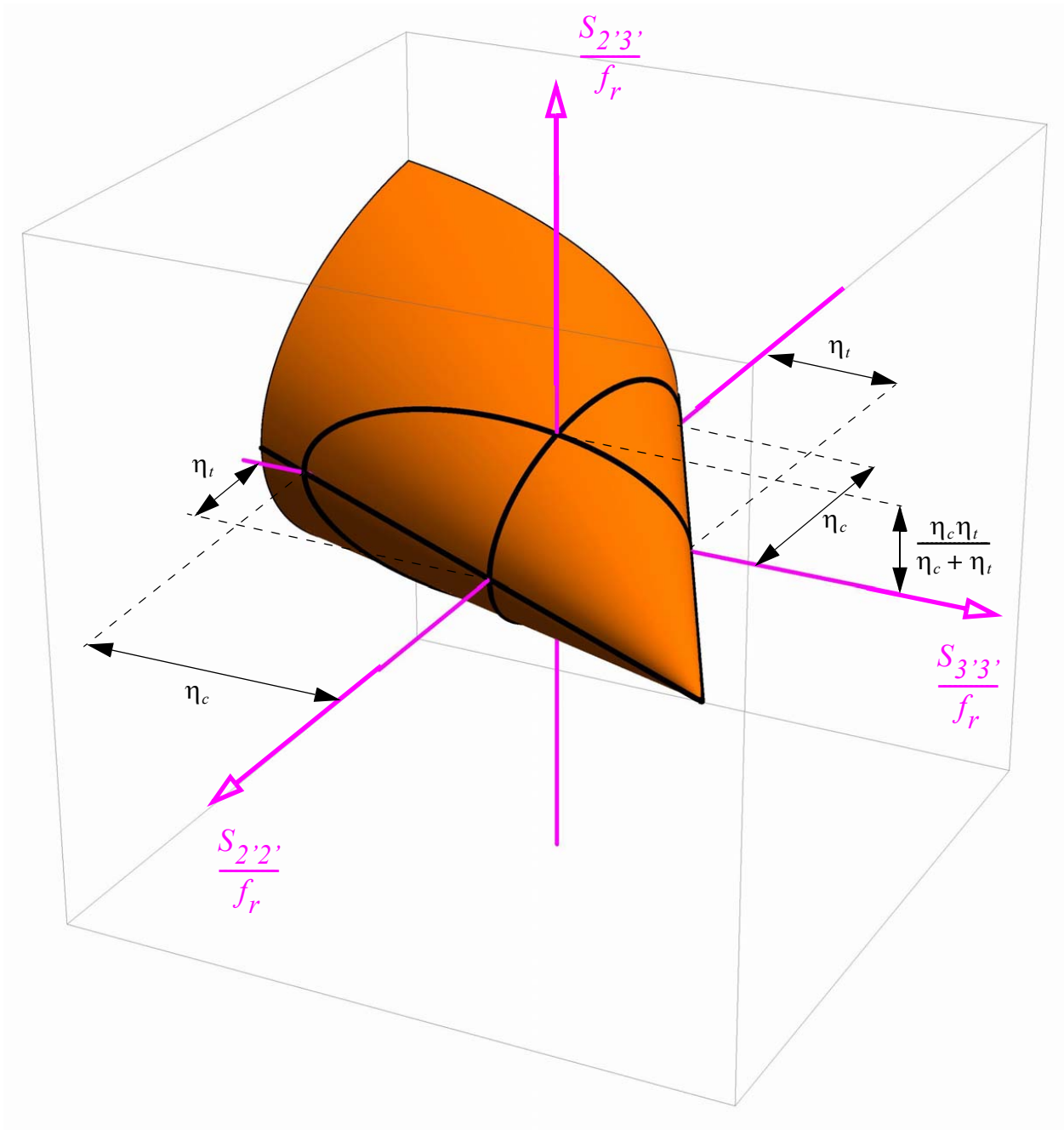


Bild 5.10 Darstellung der Versagensbedingung $F' = 0$ im normierten $\{S_{2'2'}, S_{2'3'}, S_{3'3'}\}$ -Spannungsraum bei linearer Interaktion zwischen der Schubspannungs- und der Normalspannungskomponente quer zur Faserrichtung

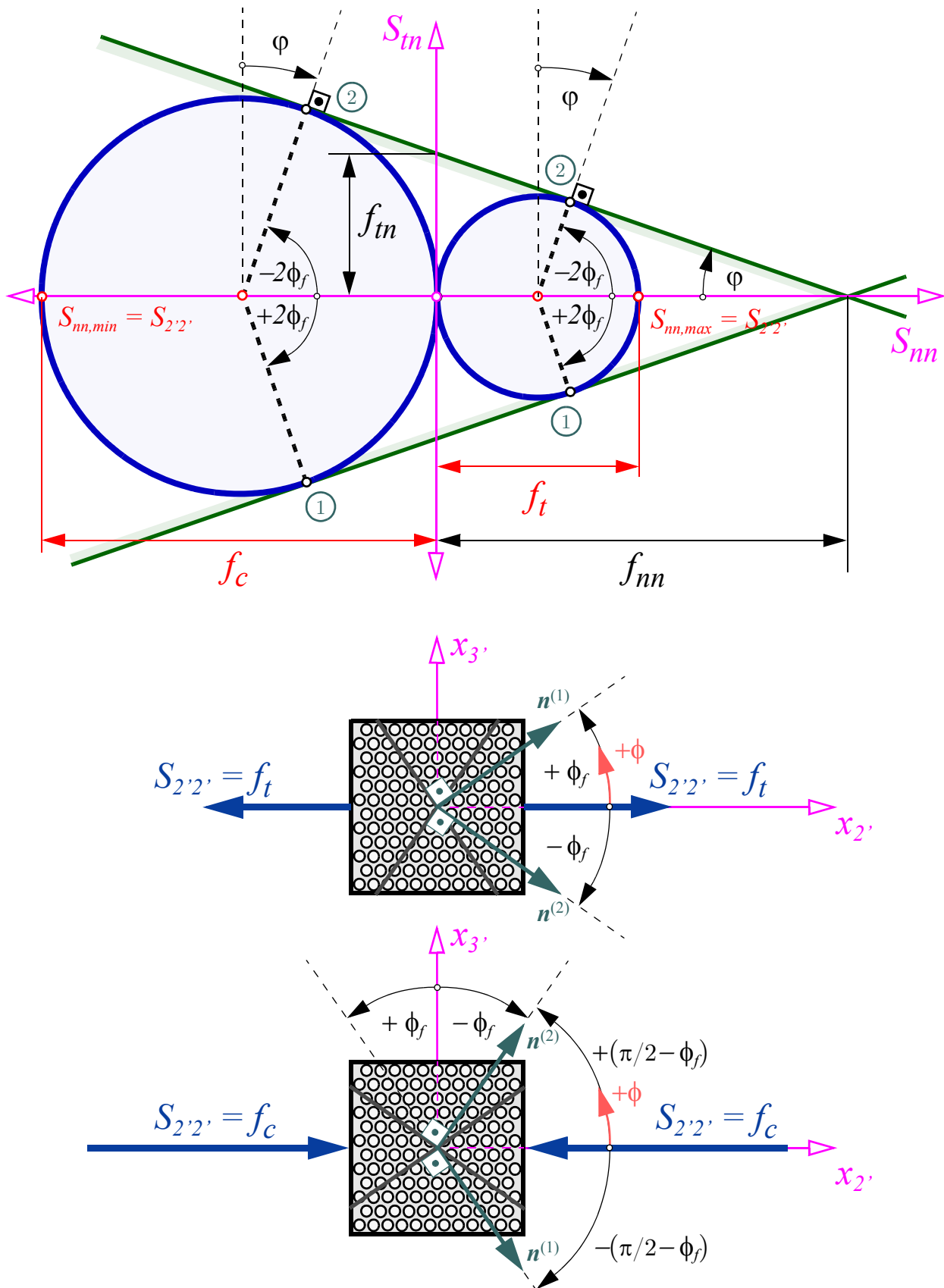


Bild 5.11 Darstellung des Versagens bei linearer Interaktion von Schub- und Normalspannungsbeanspruchung bei einaxialer Zug- bzw. Druckbeanspruchung in x_2 -Koordinatenrichtung

$$F''(S_{nn,max}, S_{nn,min}) = \frac{S_{nn,max}}{2} \left(\frac{\sin \varphi + 1}{f_{tn} \cos \varphi} \right) - \frac{S_{nn,min}}{2} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{f_{tn} \cos \varphi} \right) - 1 = \frac{S_{nn,max}}{f_t} - \frac{S_{nn,min}}{f_c} - 1 \quad (5-26)$$

Mit (5-5) und (5-6) erhält man den Zusammenhang mit den Spannungskomponenten $S_{2'2'}$, $S_{3'3'}$ und $S_{2'3'}$. Durch Ersetzen der beiden Festigkeiten f_{tn} und f_{nn} durch die Limitspannungen f_t und f_c bei einaxialem Zug- bzw. Druckversuch und der Einführung der Referenzspannung $f_c = f_r \eta_c$ und $f_t = f_r \eta_t$ ergibt sich die Versagensbedingung:

$$F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}) = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_r} \right) \left(\frac{\eta_c - \eta_t}{\eta_c \eta_t} \right) + \left(\frac{\eta_c + \eta_t}{\eta_c \eta_t} \right) \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_r} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_r} \right)^2} - 1 \quad (5-27)$$

In Bild 5.10 sieht man, dass auch bei dieser Versagensbedingung - bei gleicher Normalspannungsbeanspruchung, $S_{nn} = S_{2'2'} = S_{3'3'}$, und keiner Schubspannung $S_{2'3'}$ quer zur Faser - die Fläche der Versagensbedingung einen „Spitz“ besitzt. Wie bereits bei dem Normalspannungskriterium diskutiert, tritt bei diesem symmetrischen Limitspannungspunkt in allen transversal isotropen Ebenen zeitgleich Versagen ein.

5.3.7.3 Einaxiale Zug- und Druckbelastung quer zur Faserrichtung

In Bild 5.11 sind die beiden Mohr'schen Kreise für die einaxiale Zug- bzw. Druckbeanspruchung in Richtung der x_2 -Koordinatenachse bei Versagen in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ -Ebene eingetragen. Aus dem Bild mit dem Mohr'schen Kreis lassen sich die Orientierungen der Normalenvektoren \mathbf{n} auf die beiden simultan aktivierten Versagensebenenorientierungen ablesen. Die Orientierungen dieser beiden Ebenen sind bei Zug- und Druckbeanspruchung unterschiedlich.

5.3.8 Parabolische Normal-Schubspannungsinteraktion quer zur Faserrichtung

Der Versagensbeginn quer zur Faserrichtung bei Normalkraft und Schubbeanspruchung wird durch die parabolische Interaktionsgleichung

$$F''(S_{nn}, S_{tn}) = \frac{S_{nn}}{f_{nn}} + \left(\frac{S_{tn}}{f_{tn}} \right)^2 - 1 \quad (5-28)$$

beschrieben. Die Umformulierung dieser Gleichungen unter Berücksichtigung der transversalen Isotropie in eine Funktion F' erfolgt wiederum basierend auf geometrischen Betrachtungen und dem Mohr'schen Kreis. Im Fall einer nichtlinearen lokalen Versagensbedingung mit einer vertikalen Tangente im Schnittpunkt mit der S_{nn} -Achse, sind dabei immer zwei Szenarien zu unterscheiden:

5.3.8.1 Szenario 1: Mohr'scher Kreis berührt Versagensbedingung in zwei Punkten

Das erste Szenario ist in Bild 5.12 dargestellt. Da der Mohr'sche Kreis die Versagensbedingung $F'' = 0$ in zwei Punkten berührt, wird in zwei zugehörigen Ebenenorientierungen die Spannungscombination S_{nn} und S_{tn} erreicht, die zu Versagen führt. Diese Spannungs-komponenten lassen sich in Abhängigkeit von den aufgebrachtten Spannungen durch die beiden Gleichungen (5-24) und den Winkel φ beschreiben. Der Winkel φ bezeichnet die Neigung der Tangente am aktuellen (S_{nn}, S_{tn}) -Limitspannungspunkt (Bild 5.12):

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \left(\frac{\partial F''}{\partial S_{tn}} \right) / \left(\frac{\partial F''}{\partial S_{nn}} \right) = \frac{b}{a} = \frac{f_{tn}^2}{2f_{nn} S_{nn}} \quad (5-29)$$

Die Größen a und b sind die Abstände der Schnittpunkte dieser Tangente zum Koordinatennullpunkt (Bild 5.12). Ist F'' eine nichtlineare Funktion in S_{tn} und S_{nn} , sind die Ableitungen von F'' nach S_{tn} und S_{nn} in (5-29) ebenso Funktionen in S_{nn} und S_{tn} . Die Eliminierung des Winkels φ mit Gleichung (5-29) aus den Gleichungen (5-24) bzw. der lokalen parabolischen Versagensbedingung (5-28) und die damit sich ergebende explizite Darstellung als Funktionen von $S_{nn,min}$ und $S_{nn,max}$ ist für die oben angeführte parabolische Funktion (5-28) möglich:

$$F''(S_{nn,max}, S_{nn,min}) = \frac{S_{nn,max} + S_{nn,min}}{2f_{nn}} + \frac{(S_{nn,max} - S_{nn,min})^2}{4f_{tn}^2} - \frac{4f_{nn}^2 - f_{tn}^2}{4f_{nn}^2} \quad (5-30)$$

5.3.8.2 Szenario 2: Mohr'scher Kreis berührt Versagensbedingung im Scheitelpunkt

Die nichtlineare Versagensbedingung $F''(S_{nn}, S_{tn}) = 0$ besitzt in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ -Ebene am Scheitelpunkt einen Krümmungskreis mit dem zugehörigen Krümmungsradius R_f . In Bild 5.13 ist der Krümmungskreis am Scheitelpunkt auf der positiven S_{nn} -Achse eingezeichnet. Diese Situation wird analysiert. Sollte der Scheitelpunkt im negativen Normalspannungsbereich liegen, ist analog vorzugehen.

Liegt der Mohr'sche Kreis mit der maximalen und minimalen Normalspannung quer zur Faserrichtung, $S_{nn,max}$ und $S_{nn,min}$, innerhalb des Krümmungskreises (Bild 5.13), kann er die Funktion $F''(S_{nn}, S_{tn}) = 0$ nur mehr im Scheitelpunkt berühren. Dies ist der Fall, wenn $S_{nn,min}$ die Bedingung

$$S_{nn,min} \geq f_{nn,t} - 2R_f \quad (5-31)$$

erfüllt. Die maximale Normalspannung $S_{nn,max}$ quer zur Faserrichtung führt - ungeachtet von der Größe $S_{nn,min}$ - zu Versagen. Die zugehörige Versagensebene liegt normal zur Richtung der maximalen Hauptnormalspannung $S_{nn,max}$ (Bild 5.13). Die Normalspannung $S_{nn,max}$ erreicht bei Versagen den Betrag $f_{nn,t}$. In Situationen, in denen der Mohr'sche Kreis inner-

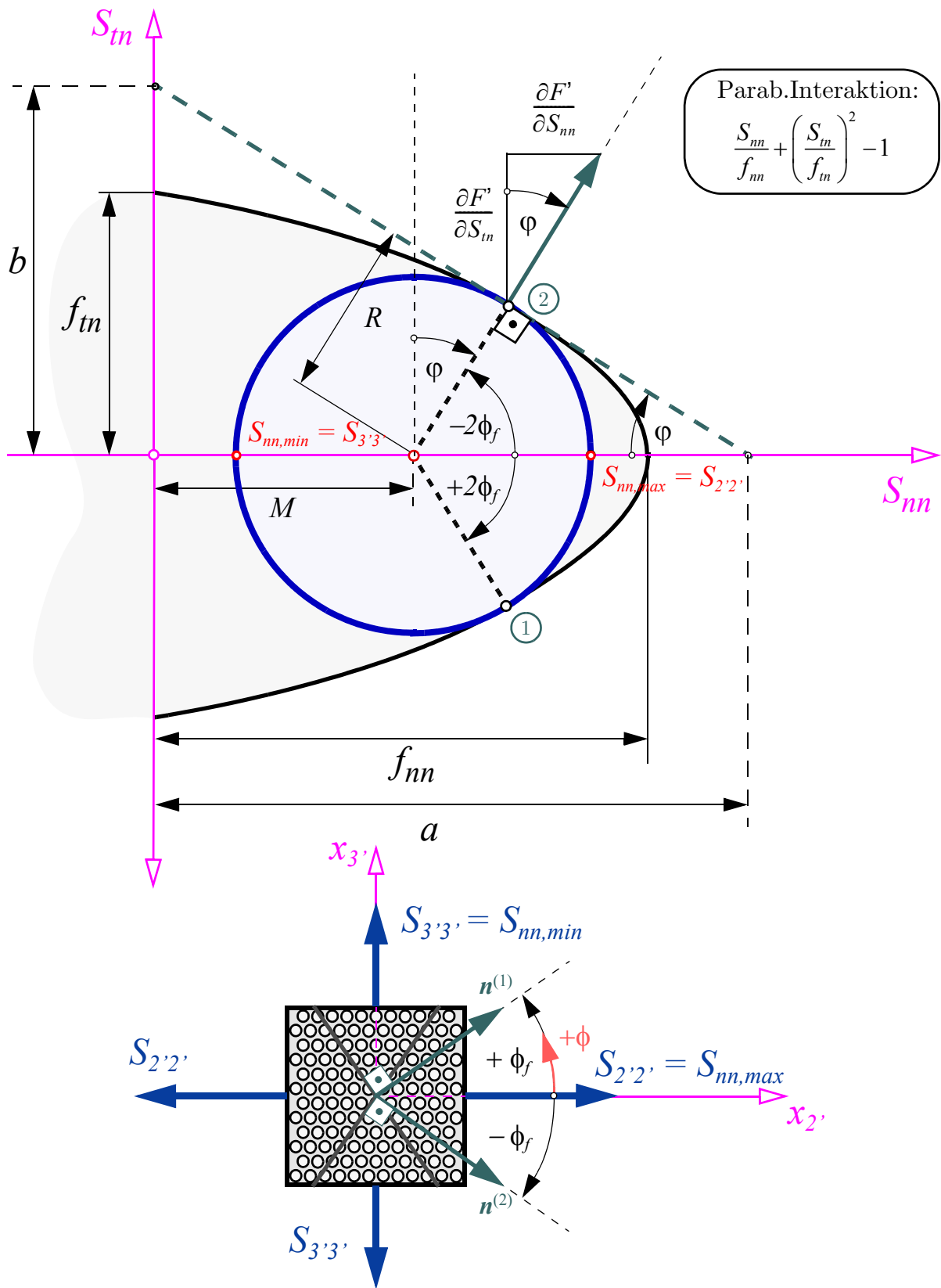


Bild 5.12 Szenario 1: der Mohr'scher Kreis berührt die parabolische/nichtlineare Versagensbedingung in zwei Punkten; die biaxiale Beanspruchung durch die Normalspannungen $S_{2'2'}$ und $S_{3'3'}$ quer zur Faserrichtung und die Ausrichtung der zwei zugehörigen Versagensebenenorientierungen $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$

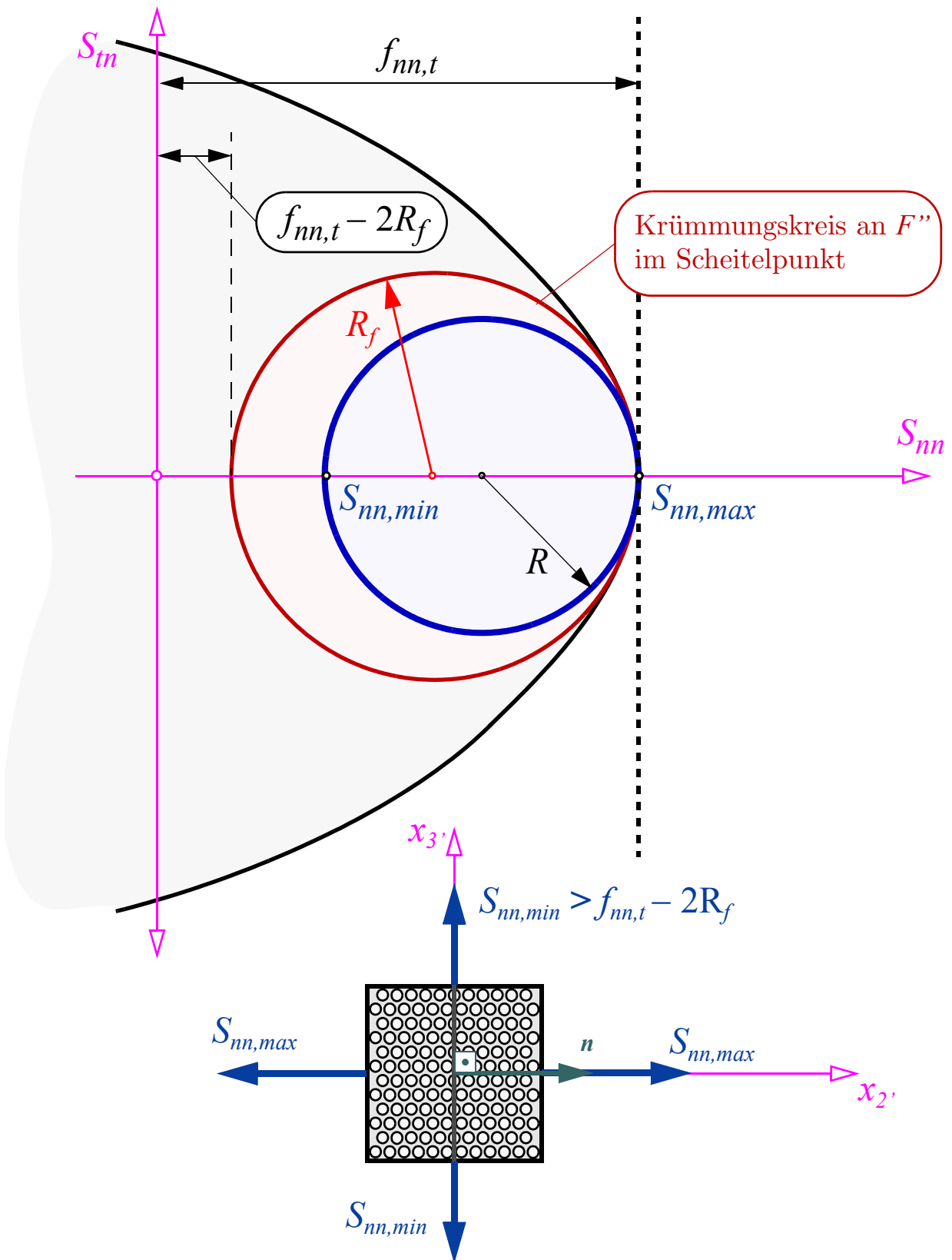


Bild 5.13 Szenario 2: der Mohr'sche Kreis liegt innerhalb des Krümmungskreises von $F''(S_{nn}, S_{tn})$ im Scheitelpunkt und berührt nur im Scheitelpunkt die Versagensbedingung; die zugehörige Versagensebene liegt normal zur Richtung der maximalen Hauptnormalspannung $S_{nn,max}$

halb des Krümmungskreises von F'' liegt, ergibt sich die Versagensbedingung unabhängig von der konkreten Gestalt von F'' zu:

$$F'(S_{nn,max}, S_{nn,min}) = \frac{S_{nn,max}}{f_{nn,t}} - 1 = 0 \quad S_{nn,min} \geq f_{nn,t} - 2R_f \quad (5-32)$$

Bei allen nichtlinear formulierten lokalen und konvexen Versagensbedingungen mit einer vertikalen Tangente im Schnittpunkt mit der S_{nn} -Achse tritt neben dem Versagensmechanismus aus Szenario 1 (Kap. 5.3.8.1 und Bild 5.12), Zugversagen als möglicher zweiter Versagensmodus auf. Im Fall der Parabel (5-28) ist der Krümmungsradius im Scheitelpunkt:

$$R_f = \frac{f_{tn}^2}{2f_{nn,t}} \quad (5-33)$$

5.3.8.3 Versagensbedingung in den Spannungskomponenten der Materialhaupt-richtungen

Für die lokale parabolische Interaktionsgleichung bei transversaler Isotropie ergeben sich mit den Gleichungen (5-5) und (5-6) folgende Versagensbedingungen:

$$S_{nn,min} < \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}} : \quad F_1' = \frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} + \left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_{tn}} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_{tn}} \right)^2 - \frac{4f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{4f_{nn,t}^2} \quad (5-34)$$

$$S_{nn,min} \geq \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}} : \quad F_2' = \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right) + \sqrt{\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_{nn,t}} \right)^2} - 1$$

Bei $S_{nn,min} = f_{nn,t} - 2R_f$ gehen die beiden Versagensbedingung ineinander über und haben an der Übergangsstelle denselben Gradienten. In Bild 5.14 sind die beiden Versagensbedingungen bei einem Festigkeitsverhältnis f_{tn} zu $f_{nn,t}$ von 1.5 zu 1.0 im $\{S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}\}$ -Spannungsraum dargestellt. Die Funktion $F_1' = 0$ ist orange, die Funktion $F_2' = 0$ violett eingezeichnet. Beide Funktionen sind nur in ihrem für das Versagen maßgebenden Bereich eingezeichnet.

5.3.8.4 Einaxialer Zug- bzw. Druckversuch

Bei einaxialen Druckversuchen tritt immer Versagensszenario 1 auf. Die Limitspannung f_c ergibt sich zu:

$$f_c = \frac{2f_{nn,t}f_{tn} + f_{tn}^2}{f_{nn,t}} \quad (5-35)$$

Beim Zugversuch kann entweder das Versagensszenario 1 oder 2 - je nach Verhältnis der

$$f_{m,t} = \eta_{m,t} f_r, \quad f_m = \eta_m f_r$$

$$\text{hier: } \eta_{m,t} = 1, \quad \eta_m = 1.5$$

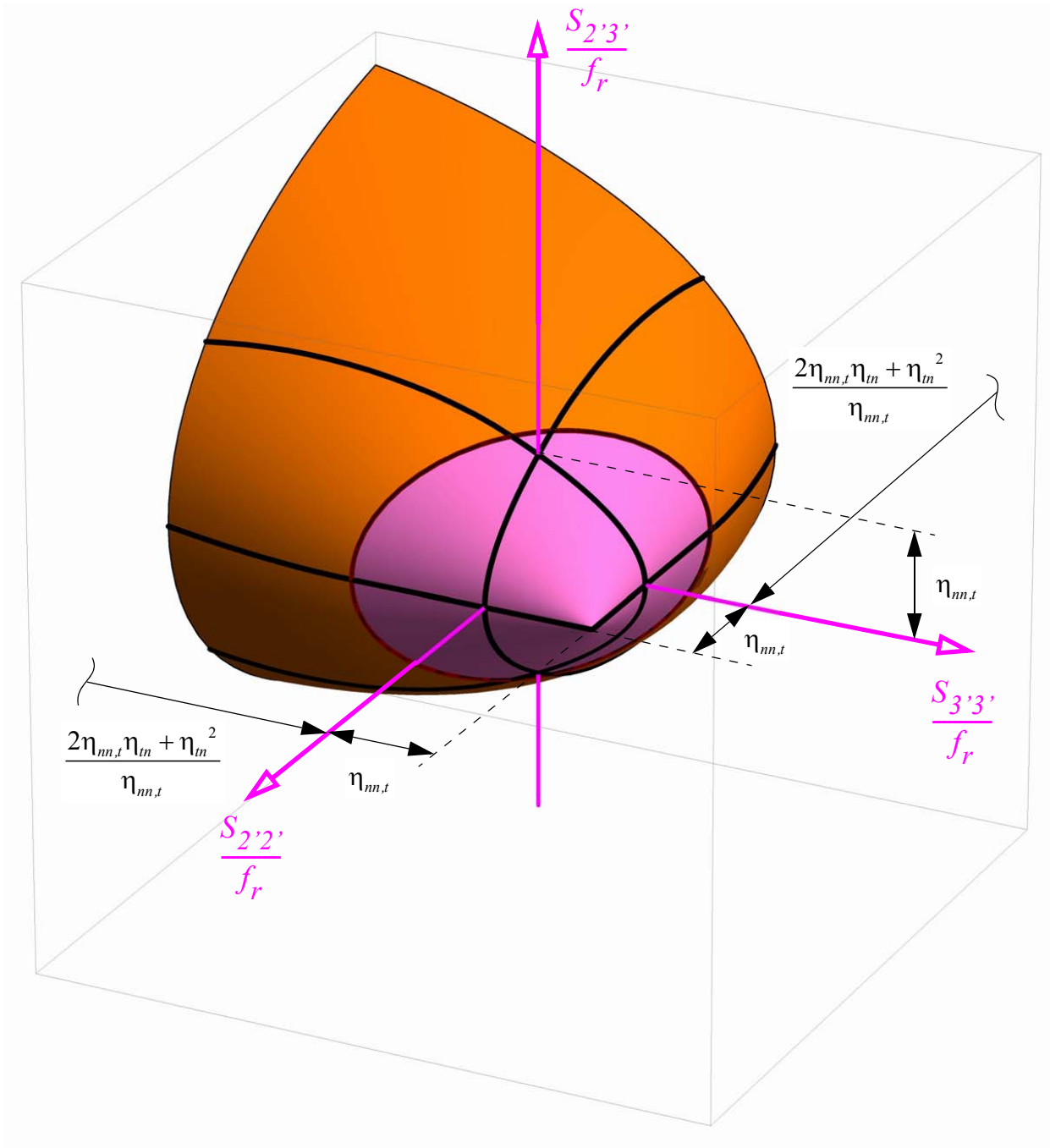


Bild 5.14 Darstellung der Versagensbedingungen $F_1' = 0$ (orange) und $F_2' = 0$ (violett) im normierten $\{S_{2'2'}, S_{2'3'}, S_{3'3'}\}$ -Spannungsraum bei parabolischer Interaktion zwischen der Schubspannungs- und der Normalspannungskomponente quer zur Faserrichtung. Die Festigkeiten f_m zu $f_{m,t}$ haben in der Darstellung das Verhältnis 1.5/1

Festigkeiten $f_{nn,t}$ und f_m auftreten. Die quer zur Faserrichtung aufgebrachte Zugspannung ist $S_{nn,max}$; $S_{nn,min}$ ist bei dem einaxialen Zugversuch null. Tritt Szenario 2 auf, entspricht die einaxiale Zugspannung f_t der Festigkeit $f_{nn,t}$ und Lastangriffsrichtung ist normal auf die Versagensebene. Da $S_{nn,min}$ null ist, muss zufolge des Unterscheidungskriteriums (5-34) f_m größer oder gleich der Festigkeit $f_{nn,t}$ sein. Ist die Festigkeit f_m kleiner als $f_{nn,t}$, tritt bei einaxialem Zug Szenario 1 auf und es bilden sich simultan zwei Versagensebenen (Bild 5.12) aus. Die Limitzugspannung f_t ergibt sich für diese beiden unterscheidbaren Fälle zu:

$$\begin{aligned} f_m < f_{nn,t} \quad \dots \text{Szenario 1} \quad f_t &= \frac{2f_{nn,t}f_m - f_m^2}{f_{nn,t}} \\ f_m \geq f_{nn,t} \quad \dots \text{Szenario 2} \quad f_t &= f_{nn,t} \end{aligned} \quad (5-36)$$

In den obigen Betrachtungen ist davon ausgegangen worden, dass die Festigkeiten $f_{nn,t}$ und f_m bekannt sind und sich daraus die Limitspannungen bei einaxialen Versuchen rückrechnen lassen. Die Fragestellung soll nun umgedreht werden: Es wurden ein Zug- und ein Druckversuch durchgeführt und die beiden Limitspannungen f_t und f_c gemessen. Zusätzlich wurde beim Zugversuch eine der beiden möglichen Versagensmodi beobachtet. Abhängig von dieser Beobachtung und den Größen f_t und f_c lassen sich - unter Annahme einer parabolischen Interaktion - die beiden Festigkeiten rückrechnen:

$$\begin{aligned} \text{Zug - Versagensszenario 1:} \quad f_{nn,t} &= \frac{(f_c + f_t)^2}{8(f_c - f_t)} & f_m &= \frac{f_c + f_t}{4} \\ \text{Zug - Versagensszenario 2:} \quad f_{nn,t} &= f_t & f_m &= -f_t + \sqrt{f_t(f_c + f_t)} \end{aligned} \quad (5-37)$$

5.3.8.5 Parabolische Interaktion und Mohr'sche Idee nach Leon

Die oben ausgeführten Betrachtungen wurden für isotropes Material (Beton) von Leon (1934) und Leon (1935) publiziert. Dabei werden die beiden Versagensszenarien für den isotropen Fall ausgearbeitet und man erhält vollkommen ident aufgebaute Formeln, wie in Gleichungen (5-30) und (5-32), mit dem Unterschied, dass im isotropen Fall die maximale und minimale Hauptnormalspannung - statt der maximalen und minimalen Normalspannung quer zur Faser im transversal isotropen Fall - stehen.

Jirásek/Bažant (2002) übersehen diese Fallunterscheidung und geben auf S. 365 ihres Buches für das Leon Kriterium nur Gleichung (5-30) an. Die Darstellung (S.363 in Jirásek/Bažant (2002)) bei ebenem Spannungszustand ergibt, betrachtet man ausschließlich (5-30) für $f_m \geq f_{nn,t}$, eine nichtkonvexe Kurve. Jirásek/Bažant (2002) folgern daraus, dass ab diesem Parameterverhältnis der elastische Bereich nicht mehr konvex ist, was falsch ist. Im Abschnitt über isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen wird noch einmal auf die Leon'sche Versagensbedingung, die in den Standardlehrbüchern wenig bis gar nicht zu finden ist, eingegangen.

5.3.9 Faserparalleles Schubversagen

Bei diesem Versagensszenario wird angenommen, dass die Matrix zwischen den Fasern bei faserparalleler Schubspannungsbeanspruchung S_{ln} (Bild 5.3) versagt:

$$F''(S_{ln}) = \left(\frac{S_{ln}}{f_{ln}} \right)^2 - 1 \quad (5-38)$$

Bei der Belastung durch die beiden Schubspannungskomponenten $S_{1'2'}$ und $S_{1'3'}$ ergibt sich die Frage, in welcher Schnittebenenorientierung ϕ die Schubspannungskomponente S_{ln} den größten Wert annimmt. In dieser Orientierung tritt Schubversagen auf. Zur Lösung wird hier das direkte Verfahren aus Kap. 5.3.4.1 verwendet.

Mit der Spannungstransformation (5-2) lässt sich die Versagensbedingung (5-38) als Funktion der Spannungen $S_{1'2'}$ und $S_{1'3'}$ und des Winkels ϕ angeben. Das Maximum dieser Funktion in ϕ gibt den Winkel ϕ_f an, bei dem S_{ln} maximal wird. In Bild 5.15 ist eine graphische Herleitung der maximalen Schubspannungskomponente dargestellt; aufgrund der einfachen Transformationsgleichung (5-2) lässt sich der Winkel ϕ_f mit

$$\tan \phi_f = \frac{S_{1'3'}}{S_{1'2'}} \quad (5-39)$$

berechnen. Die zugehörige maximale Schubspannungskomponente lässt sich einfach mit dem Satz von Pythagoras bestimmen.

$$S_{ln,max}^2 = S_{1'2'}^2 + S_{1'3'}^2 \quad (5-40)$$

Mit (5-40) und (5-38) ergibt sich die quadratische Versagensbedingung in den beiden Spannungskomponenten des Materialhauptachsensystems:

$$F'(S_{1'2'}, S_{1'3'}) = \left(\frac{S_{1'2'}}{f_{1'n}} \right)^2 + \left(\frac{S_{1'3'}}{f_{1'n}} \right)^2 - 1 \quad (5-41)$$

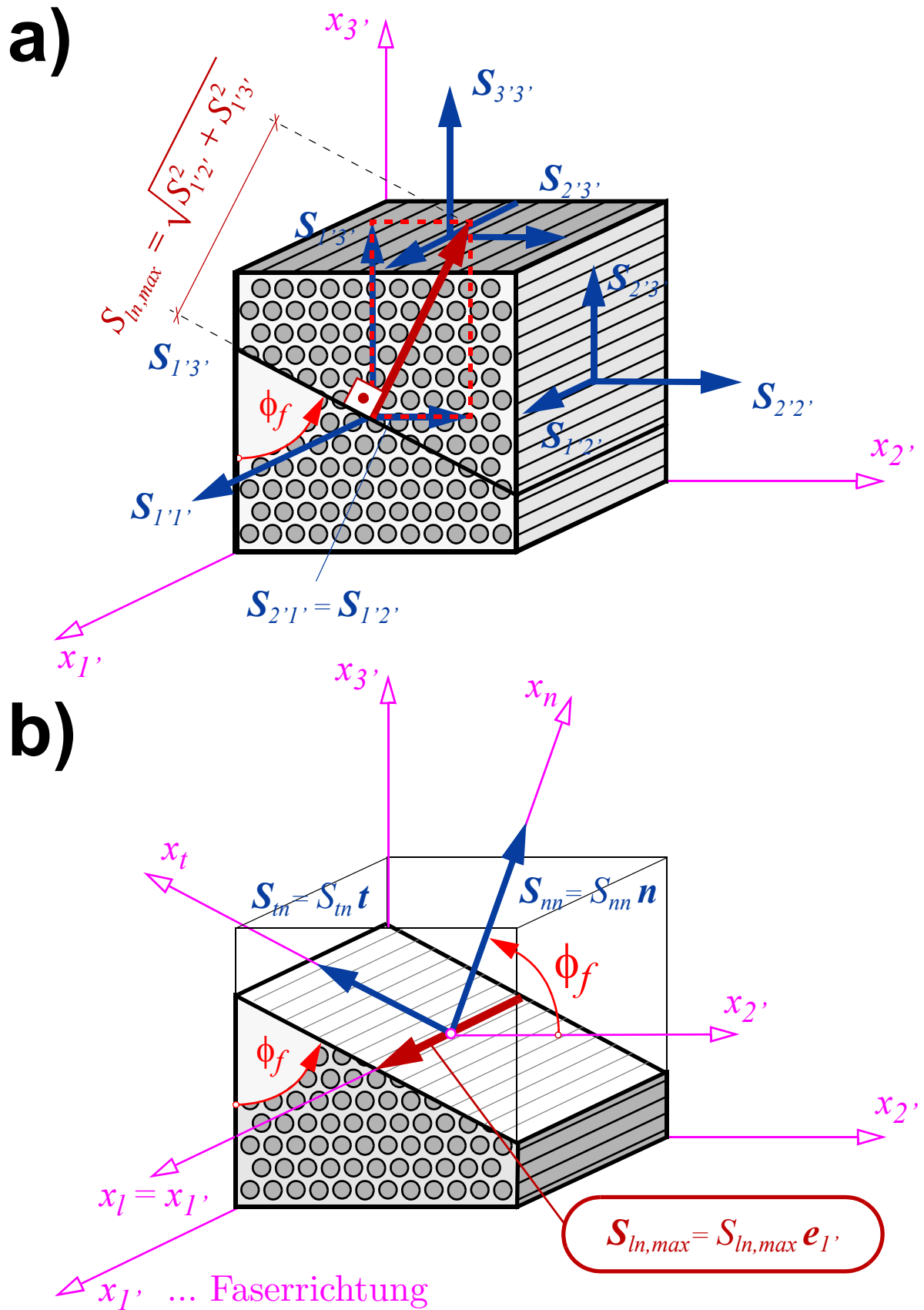


Bild 5.15 Matrixversagen bei Schubbeanspruchung parallel zur Faserausrichtung

5.4 Modifikation der Versagensbedingungen

Von den fünf hergeleiteten Versagensbedingungen erfüllen nur die Versagensbedingungen zu „Schubversagen quer zur Faserrichtung“ (Kap. 5.3.6) und „Faserparalleles Schubversagen“ (Kap. 5.3.9) die in Kap. 3.2 formulierten Forderungen des kontinuierlichen Verlaufs der ersten und zweiten Ableitung der Versagensbedingung nach den Spannungen.

5.4.1 Problemanalyse

Die verbleibenden drei Versagensbedingungen sind zwar konvex, weisen aber im speziellen Limitbeanspruchungszustand mit $S_{nn} = S_{2'2'} = S_{3'3'}$ und $S_{2'3'} = 0$, einen Punkt in der Versagensbedingung auf, in der kein Gradient von F' nach den Spannungskomponenten $S_{2'2'}$, $S_{3'3'}$ und $S_{2'3'}$ berechnet werden kann. Die Forderung zwei aus Gleichung (3-2) wird in dieser funktionsinhärenten Ecke (Definition nach Kap. 3.5) nicht erfüllt.

Bei einer nichtlinearen Interaktion zwischen der Normalspannung S_{nn} und der Schubspannung S_m - wie der oben dargestellten parabolischen Interaktionsgleichung (Kap. 5.3.8) - kommt eine weitere Unannehmlichkeit hinzu: die transversal isotrope Versagensbedingung ist - im Gegensatz zu den linearen Interaktionsgleichungen - nicht durch eine einzige geschlossene Funktion $F'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'})$ darstellbar. Im speziellen Fall der parabolischen Interaktionsgleichung (Kap. 5.3.8) ergeben sich zwei bereichsweise gültige Funktionen; bei einer elliptischen Interaktionsgleichung würden sich bei entsprechenden Festigkeitsverhältnissen sogar drei bereichsweise gültige Versagensbedingungen ergeben. Eine dieser beiden Versagensbedingungen ist dem Modus Zug- bzw. Druckversagen zugeordnet und hat die bereits diskutierte Eigenschaft, dass bei allseitig gleichen Normalspannungen und keinen Schubspannungen quer zur Faserrichtung keine Gradientenberechnung möglich ist.

5.4.2 Modifikation der Versagensbedingungen

Die in den $\{S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}\}$ -Spannungen ausgedrückte Versagensbedingung(en) wird durch eine einzige geschlossene konvexe Funktion, die überall stetig differenzierbar ist und die transversal isotrope Symmetriebedingung erfüllt, bestmöglich approximiert (siehe Kap. 3.5). Diese Modifikation wird bei den beiden Versagensbedingung „Zug/Druckversagen quer zur Faserrichtung“ Gleichung (5-20) in Kap. 5.3.5 und „Lineare Normal-Schubspannungsinteraktion quer zur Faserrichtung“ Gleichung (5-27) in Kap. 5.3.5 umgesetzt. Beide Funktionen werden durch eine Hyperbelfunktion angenähert, die überall einen eindeutigen Gradienten besitzt. Der Faktor hat den Wertebereich $0 < \omega < 1$. Die beiden modifizierten Funktionen werden in den transversal isotropen Funktionen M und R (5-4) formuliert und erfüllen damit automatisch die geforderte Symmetriebedingung:

Zugversagen quer zur Faserrichtung :

$$F' = (1 - \omega^2) \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right) + \sqrt{(1 - \omega^2) \left[\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_{nn,t}} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_{nn,t}} \right)^2 \right]} + \omega^2 - 1$$

Lineare Normal - Schubspannungsinteraktion bei Versagen quer zur Faserrichtung :

$$F' = (1 - \omega^2) \left(\frac{S_{2'2'} + S_{3'3'}}{2f_r} \right) \left(\frac{\eta_c - \eta_t}{\eta_c \eta_t} \right) + \left(\frac{\eta_c + \eta_t}{\eta_c \eta_t} \right) \sqrt{(1 - \omega^2) \left[\left(\frac{S_{2'2'} - S_{3'3'}}{2f_r} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'3'}}{f_r} \right)^2 \right]} + \omega^2 - 1 \quad (5-42)$$

5.4.3 Modifizierung bei nichtlinearer Normal- und Schubspannungsinteraktion

Offen bleibt die Frage, wie bei nichtlinearer Normal-Schubspannungsinteraktion vorzugehen ist. Ebenso, wie in den beiden oben angeführten Beispielen, besitzen diese Funktionen einen Punkt (parabolische lokale Versagensbedingung) oder zwei Punkte (elliptische lokale Versagensbedingung), in denen der Gradient nicht bestimmt werden kann. Eine geschlossene Funktionsdarstellung, die sich bestmöglich an die im $\{S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}\}$ -Spannungsraum dargestellte Fläche (Bild 5.14), die sich wiederum aus zwei Teilflächen (einer einschaligen Kegel- und einer Paraboloidfläche) zusammensetzt, anschmiegt, stetig differenzierbar und konvex ist, wurde in dieser Arbeit nicht ausgearbeitet. Um diese Situationen trotzdem in den Griff zu bekommen, wird das Diskretisierungsverfahren verwendet.

5.5 Approximation der symmetrischen Versagensbedingung durch N Funktionen

5.5.1 Generelle Vorgehensweise

Die kontinuierliche Abfolge möglicher Versagensebenenorientierungen - gekennzeichnet durch den Winkel ϕ (Bild 5.2) im Definitionsbereich $[0, \pi)$ - wird durch N gleichmäßig verteilte diskrete Winkelerorientierungen ϕ_i ersetzt. Der Winkel ϕ_i gibt die Lage der $x_{n,i}$ -Achse bzw. die Orientierung des Normalenvektors \mathbf{n}_i auf die Schnittebene i relativ zur x_2 -Achse an (Bild 5.16). Die Gleichverteilung ist durch eine konstante Winkeldifferenz $\Delta\phi$ zwischen zwei Orientierungen realisierbar:

$$N = \frac{180^\circ}{\Delta\phi}, \quad \Delta\phi \text{ [deg]} \quad (5-43)$$

$$\phi_i = (i-1)\Delta\phi, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

In jeder dieser Versagensebenenorientierungen wirken die Normalspannung S_{mn} und die Schubspannungskomponente S_m und S_n . Mit den Transformationsbeziehungen (5-2) ergibt sich der Zusammenhang dieser Spannungskomponenten mit \mathbf{s}' :

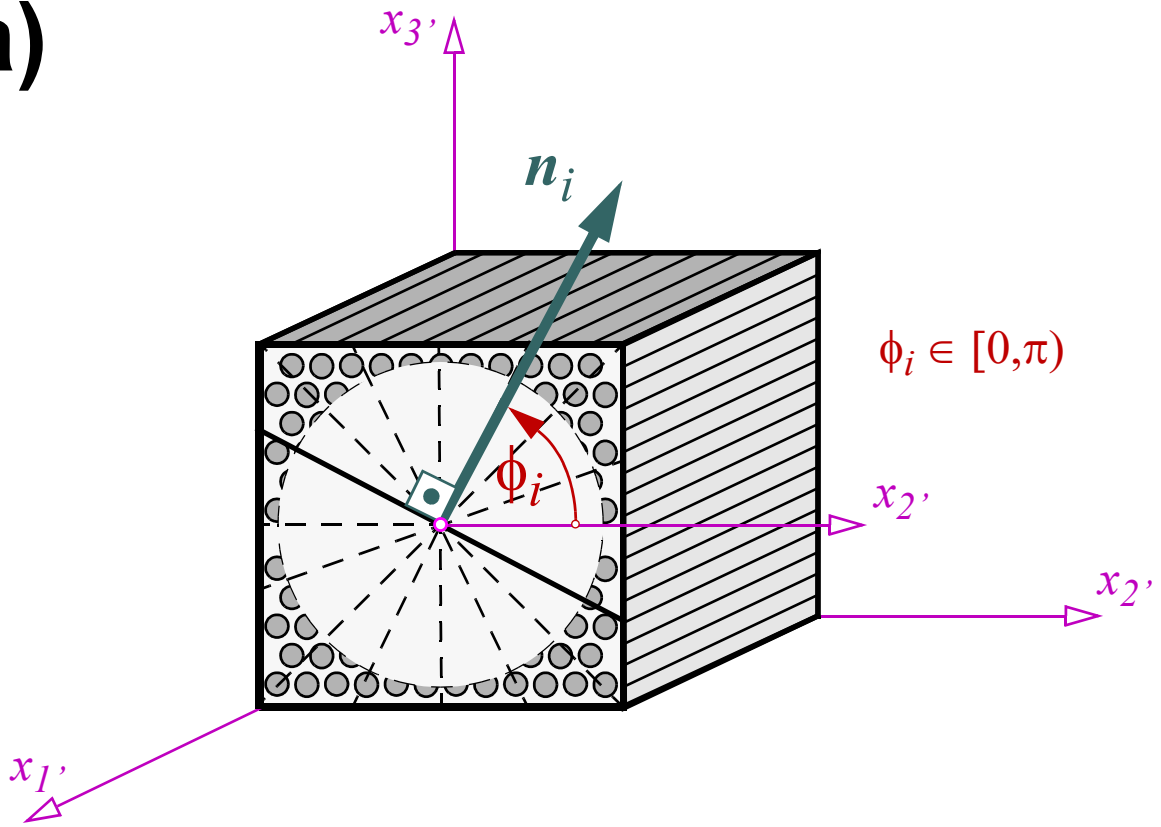
$$\mathbf{s}_n(\phi_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{mn}(\phi_i)^T \\ \mathbf{p}_m(\phi_i)^T \\ \mathbf{p}_n(\phi_i)^T \end{bmatrix} \mathbf{s}' \quad (5-44)$$

Mit (5-44) wird die lokale Versagensbedingung in N Funktionen $F'_i(\mathbf{s}', \phi_i)$ transformiert. Die lokale Versagensbedingung F'' ist konvex und an jedem Punkt zweimal stetig differenzierbar. Diese Eigenschaften werden auf die N Funktionen F'_i übertragen. Der von den Teilfunktionen eingegrenzte Bereich im Spannungsraum ist damit ebenso konvex. Die zuvor aufgetretenen, unerwünschten Funktionseigenschaften treten nicht auf.

5.5.2 Diskretisierungsbeispiel

Für die Diskretisierung des Winkelverlaufs wird eine Winkeldifferenz $\Delta\phi$ von 10° gewählt. Mit dieser Gleichverteilung ergeben sich $N = 18$ Versagensebenenorientierungen von $\phi_1 = 0^\circ$ bis $\phi_{18} = 170^\circ$. In jeder dieser Orientierung soll die Versagensbedingung (5-28) gelten. Mit den Vektoren (5-44) wird die in den lokal wirkenden Spannungskomponenten formulierte Versagensbedingung als Funktion F'_i in den Spannungen \mathbf{s}' und des Winkels ϕ_i angeschrieben. Diese Funktionen behalten ihren ursprünglichen mathematischen Charakter und ergeben eine Paraboloidfläche im $\{S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}\}$ - Spannungsraum. Die zweiteilige Versagensfläche aus Bild 5.14 wird mit der festgelegten Diskretisierung durch $N = 18$ pa-

a)



b)

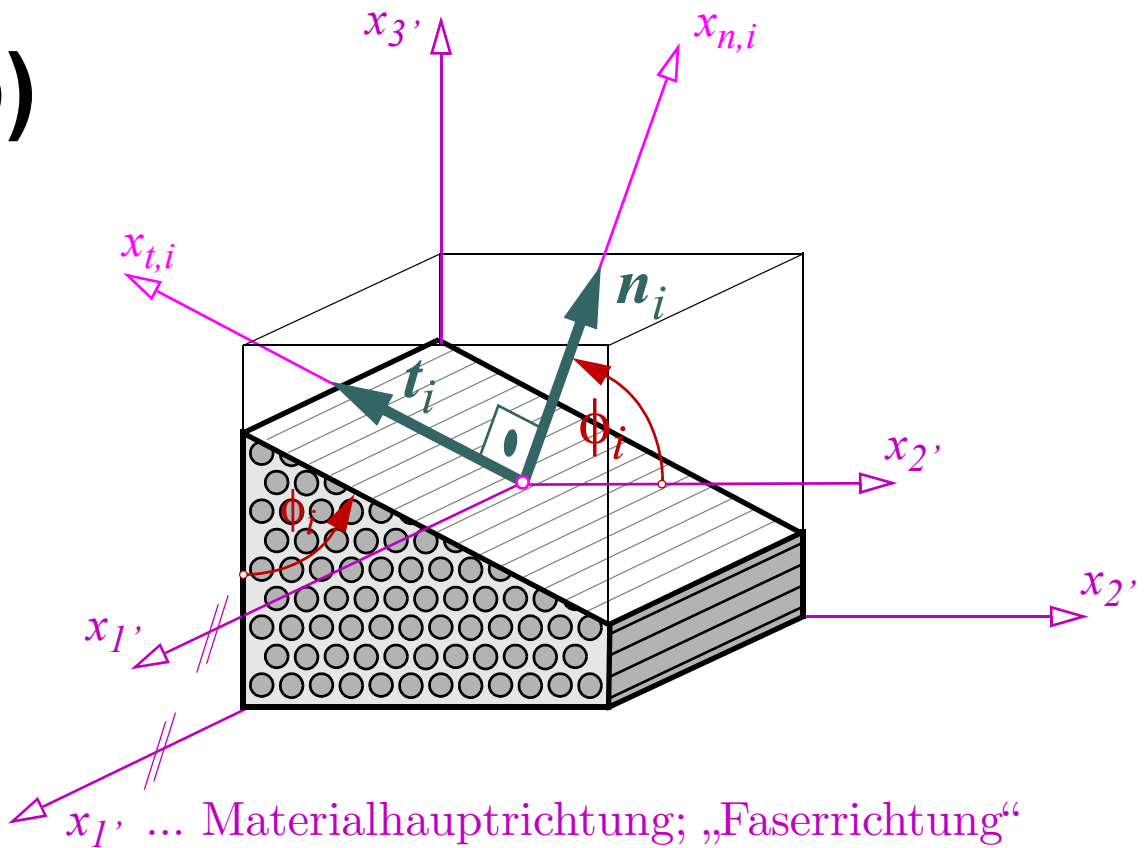


Bild 5.16 Darstellung der Versagensebene mit dem Index $i \in \{1, 2, \dots, N\}$; die Position des Normalenvektors n_i wird mit dem Winkel ϕ_i , der von der x_2 -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn positiv gemessen wird, angegeben

$$f_{m,t} = \eta_{m,t} f_r, \quad f_m = \eta_m f_r$$

hier : $\eta_{m,t} = 1, \quad \eta_m = 1.5$

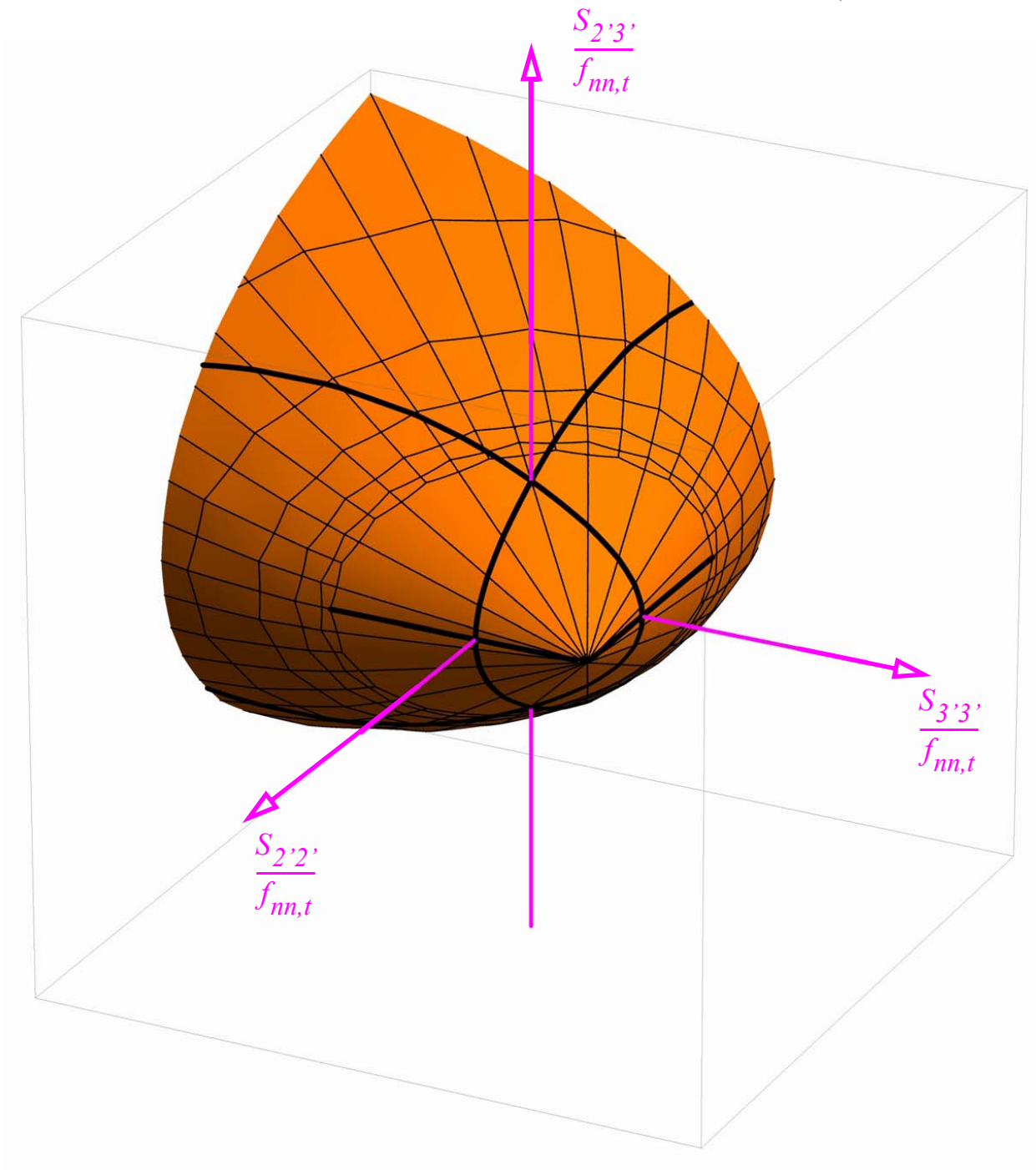


Bild 5.17 Darstellung der durch $N = 18$ parabolische Teilflächen diskretisierte Versagensbedingung $F' = 0$ aus Bild 5.14; die Teilflächen ergeben sich aus den quadratischen Versagensbedingungen $F_i'(S_{2'2'}, S_{3'3'}, S_{2'3'}, \phi_i)$ mit $\phi_i \in \{0^\circ, 10^\circ, \dots, 170^\circ\}$. Die Festigkeiten f_m zu $f_{m,t}$ haben in der Darstellung das Verhältnis 1.5/1

rabolischen Teilflächen (Bild 5.17) angenähert. Im Spannungszustand $S_{nn} = S_{2'2'} = S_{3'3'} = f_{nn,t}$ und $S_{2'3'} = 0$ schneiden sich alle Versagensbedingungen in einem Punkt. In diesem Belastungszustand sind alle $N = 18$ Versagensbedingungen simultan aktivierbar. Im Unterschied zur Versagensbedingung in Bild 5.14 ist dieser Punkt eine reguläre Ecke (bzw. Kante) und damit später in der Rechnung handhabbar, da alle Teilflächen in diesem Pyramidenpunkt einen eindeutig berechenbaren Gradienten $\partial F'_i / \partial \mathbf{s}'$ besitzen.

5.5.3 Diskretisierung bei nichtlinearer Interaktion der Spannungskomponenten

Im letzten hier vorgestellten Versagensbedingungstyp bei Zwischenfaserversagen interagieren alle drei Spannungskomponenten der Schnittebenen zwischen den Fasern. Die lokale Versagensbedingung F'' ist eine i.A. nichtlineare Funktion in den Spannungen S_{nn} , S_{mm} und S_{mn} . In diesen Fällen ist die Diskretisierung die einzig mögliche Variante näherungsweise ein transversal isotropes Versagensgeschehen zu erfassen.

5.5.4 Symmetrieeigenschaften von \mathbb{E} : exakte Funktion vs. Diskretisierung

Bei transversaler Isotropie muss der erlaubte Bereich \mathbb{E} die zugehörige Symmetrieanforderung (siehe Kap. 3.6) erfüllen. Dieser Bereich wird bei Diskretisierung durch die Teilfunktionen F_i , die den Bereich

$$\mathbb{E}^N = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^6 \mid F_i(\mathbf{s}, \phi_i) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \quad (5-45)$$

abgrenzen, nur angenähert. Der Bereich \mathbb{E}^N erfüllt mathematisch die transversal isotrope Symmetriebedingung nicht. Durch Erhöhung der Anzahl N - einer feineren Diskretisierung - ist aber eine beliebig genaue Näherung möglich. Die transversale Isotropie wird erst im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ erreicht.

5.5.4.1 Illustration der Symmetrieeigenschaften: exakte vs. diskretisierte Funktion

Die Symmetrieeigenschaft soll anhand eines einfachen geometrischen Beispiels (Bild 5.18) in \mathbb{R}^2 illustriert werden. Gegeben ist eine Kreisfunktion $F = 0$, die das kreisförmige Gebiet

$$\mathbb{E} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - r \leq 0 \right\} \quad (5-46)$$

mit dem Radius r begrenzt. Die in impliziter Form angegebene Kreisfunktion wird durch N tangential berührende Geraden

$$F_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{n}_i - r = 0 \quad \mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad \alpha_i = \frac{2\pi i}{N}, i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5-47)$$

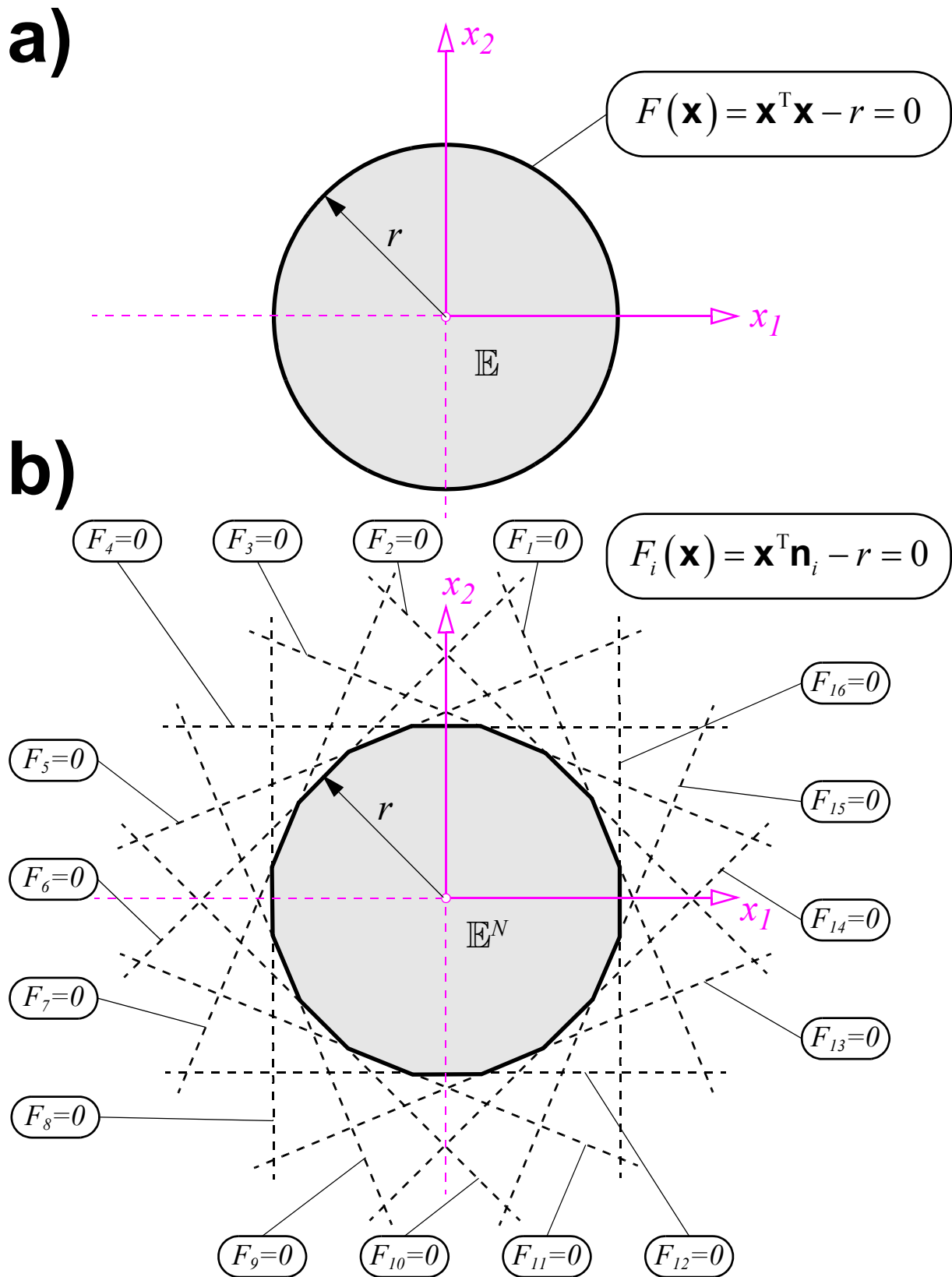


Bild 5.18 a) die von F eingefasste Kreisfläche ist punktsymmetrisch, d.h. jede Gerade durch den Kreismittelpunkt ist eine Symmetrieachse; b) der aus 16 Teilstücken bestehende Polygonzug grenzt eine Fläche ein, welche die Kreisfläche annähert; es gibt nur 8 Symmetrieachsen

angenähert. In Bild 5.18 b) wurde $N = 16$ gewählt. Der von diesen Geraden eingeschlossene Bereich ist:

$$\mathbb{E}^N = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, 16\} \right\} \quad (5-48)$$

Die Kreisfläche \mathbb{E} besitzt folgende Symmetrie: Jede Gerade durch den Kreismittelpunkt ist eine Symmetrieachse. Wird die ebene Rotationsmatrix \mathbf{R} als Funktion des Drehwinkels φ eingeführt und auf \mathbf{x} angewandt, verändern sich die Funktion F und auch das Gebiet \mathbb{E} nicht. Die Symmetriegruppe S ergibt sich zu:

$$S = \left\{ \pm \mathbf{J}, \pm \mathbf{R}^\varphi, (0 < \varphi < 2\pi) \right\} \quad \mathbf{R}^\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

Für das Gebiet \mathbb{E}^N ist S aus (5-49) keine Symmetriegruppe. Nur eine Untergruppe S^N an Spiegelungen und ebenen Drehungen, bei denen der Drehwinkel φ gleich α_i aus (5-47) ist, lassen bei Anwendung auf $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^N$ ungeändert.

$$S^N = \left\{ \pm \mathbf{J}, \pm \mathbf{R}^{\varphi_i}, \varphi_i = \alpha_i \right\} \quad (5-50)$$

Damit ist an diesem einfachen Beispiel exemplarisch dargestellt, was mit „die Symmetriebedingung ist im mathematisch strengen Sinn nicht erfüllt“ gemeint ist. Im Grenzfall

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S^N = S \quad (5-51)$$

decken sich die Symmetriegruppen, q.e.d.

5.6 Versagen bei geschichtet aufgebauten Materialien

In diesem Abschnitt werden transversal isotrope Versagensbedingungen von geschichtet aufgebauten Materialien (Bild 5.19) formuliert. Die Orientierung der Schichtung ist durch den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} angegeben (Bild 5.19). In diesen Schichtebenen findet per definitionem Versagen statt.

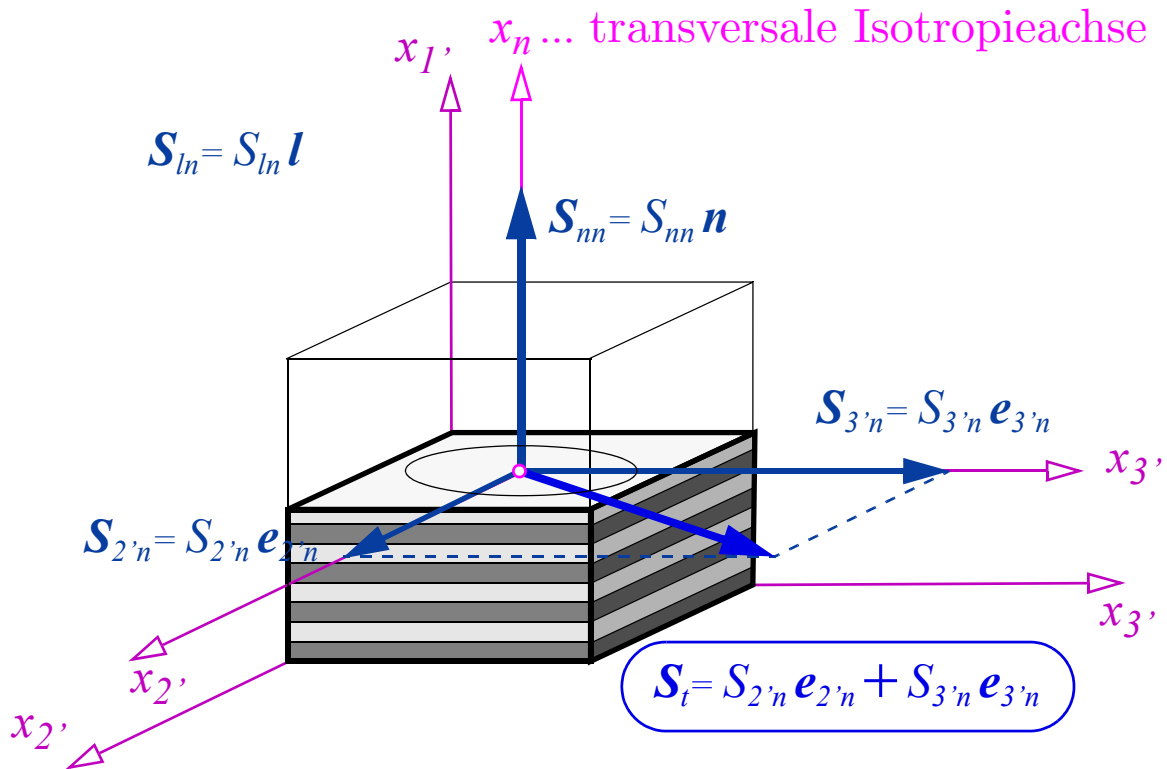


Bild 5.19 Geschichtet aufgebautes Material: die transversale Isotropieachse ist die x_1 -Achse

5.6.1 Transversale Isotropie der Versagensbedingung in der Schichtebene

Per anfänglicher Festlegung ist die x_1 -Achse die transversale Isotropieachse. Um dieser Festlegung gerecht zu werden, muss die Schichtung so beschaffen sein, dass bei Drehung, Spiegelung bzw. Drehspiegelung des Materialkörpers um die Isotropieachse bei gleichbleibender Beanspruchung idente Limitspannungen auftreten. Die Schichtoberfläche darf also keine richtungsabhängige Oberflächenstruktur wie z.B. eine geschuppte oder gerillte Oberfläche aufweisen. Nachweisen lässt sich das anhand eines Schubversuchs: unabhängig von der Richtung der schichtparallelen Schubspannungsbeanspruchung muss immer beim selben Spannungslimit Versagen eintreten. Aus dieser Beobachtung lässt sich die Bedingung ableiten, dass Schichtversagen von transversal isotropen Laminaten unter Schub (mit oder ohne Normalspannungsinteraktion) immer durch den maximalen Schubspannungsbetrag

$$S_t^2 = \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_t = S_{2'n}^2 + S_{3'n}^2 = S_{2'1'}^2 + S_{3'1'}^2 \quad (5-52)$$

bestimmt wird (Bild 5.19). Diese Größe ist bereits in Gleichung (5-40) aufgetaucht, wobei aber Zwischenfaserversagen bei faserparalleler Schubbeanspruchung betrachtet wurde. Ohne Normalspannungsinteraktion ergeben sich in diesen beiden Versagensfällen dieselben Versagensbedingungen. Der wesentliche Unterschied liegt aber in der unterschiedlichen Strukturiertheit des Materials und in der verschiedenen Lage der Versagensebenen.

Zusätzlich zu den Ausdrücken in Gleichung (5-4) ist S_t (5-52) eine weiter quadratische transversal isotrope Spannungsinvariante, die in die Formulierung der Versagensbedingungen einfließt.

5.6.2 Versagensbedingungen

Die Funktionen F' zur Beschreibung des Schichtversagens werden in den Spannungskomponenten S_{mm} und S_t bzw. $S_{1'1'}$, $S_{2'1'}$ und $S_{3'1'}$ formuliert. Die benötigten Festigkeiten sind die Zug- bzw. Druckfestigkeit $f_{m,t}$ und $f_{m,c}$ und die Schubfestigkeit f_m . Die Schichtversagensbedingungen des Laminates werden nach auftretender Interaktion der Normal- und Schubspannungskomponenten unterschieden:

- Zug/Druckversagen

$$F' = \pm \frac{S_{mm}}{f_{m,t(c)}} - 1 = \pm \frac{S_{1'1'}}{f_{m,t(c)}} - 1$$

- Schubversagen

$$F' = \left(\frac{S_t}{f_m} \right)^2 - 1 = \left(\frac{S_{2'1'}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{3'1'}}{f_m} \right)^2 - 1$$

- Modifizierte lineare Normal- und Schubspannungsinteraktion

$$F' = \pm (1 - \omega^2) \frac{S_{1'1'}}{f_{m,t(c)}} + \sqrt{(1 - \omega^2) \left[\left(\frac{S_{2'1'}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{3'1'}}{f_m} \right)^2 \right]} + \omega^2 - 1 \quad (5-53)$$

- Quadratisch - parabolische Interaktion

$$F' = \pm \frac{S_{mm}}{f_{m,t(c)}} + \left(\frac{S_t}{f_m} \right)^2 - 1 = \pm \frac{S_{1'1'}}{f_{m,t(c)}} + \left(\frac{S_{2'1'}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{3'1'}}{f_m} \right)^2 - 1$$

- Quadratisch - elliptische Interaktion

$$F' = \left(\frac{S_{mm}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_t}{f_m} \right)^2 - 1 = \left(\frac{S_{1'1'}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{2'1'}}{f_m} \right)^2 + \left(\frac{S_{3'1'}}{f_m} \right)^2 - 1$$

5.7 Isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Möglichkeiten gezeigt, wie die Mohr'sche Idee bei vorhandener Materialsymmetrie umsetzbar ist. Zuzufolge der Symmetrie können sich funktionsinhärente Ecken in den symmetrischen Versagensbedingungen ausbilden. Durch Modifikation (Kap. 5.4) oder durch Diskretisierung (Kap. 5.5) lassen sich diese ungewünschten Funktionseigenschaften beseitigen. Das exakte Lösungsverfahren mithilfe des Mohr'schen Kreises, die Modifizierung von nicht stetig differenzierbaren Funktionen und das Diskretisierungsverfahren lassen sich bei der Umsetzung der Mohr'schen Idee bei Materialien mit Isotropie uneingeschränkt übertragen. Im Fall der Isotropie sind alle Raumorientierungen potentielle Versagensebenenorientierungen. Die lokalen Versagensbedingungen sind in jeder Orientierung ident und bezüglich der Schubspannungskomponenten in der Versagensebenenorientierung richtungsunabhängig (siehe Kap. 5.6.1).

5.7.1 Formulierung isotroper Mohr-Typ-Versagensbedingungen

5.7.1.1 Vorgehensweise

Bei Materialien mit isotropem Versagensverhalten gibt es per definitionem keine ausgezeichneten Materialrichtungen. Als Bezugssystem ist ein beliebiges Koordinatensystem wählbar; hier wird das globale orthonormierte Dreibein $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ verwendet. Im isotropen Fall sind alle Raumorientierungen \mathbf{n} potentielle Versagensebenenorientierungen (Bild 5.20). Man hat die herausfordernde Situation unendlich viele, simultan aktivierbare, vollkommen gleichgeartete Versagensmechanismen betrachten zu müssen.

Zuerst werden die Normalspannungskomponente S_{nn} und der Betrag der resultierenden Schubspannung S_t in der Versagensfläche mit der Orientierung \mathbf{n} berechnet. In diesen beiden Spannungskomponenten ist die lokale Versagensbedingung F'' formuliert. Da alle Orientierungen potentiell mögliche Versagensebenenorientierungen sind, müssen

- die Größe der Spannung \mathbf{s} bei der es zu Versagen kommt und
- die aktive(n) Versagensebenenorientierung(en) ausfindig gemacht werden.

Zur Lösung der Aufgabe wird in diesem Abschnitt der Mohr'sche Kreis, der aus eben diesem Grund von Mohr (1928) entwickelt wurde, verwendet. Damit lässt sich die lokal formulierte Versagensbedingung durch die betragsmäßig größte und kleinste Hauptnormalspannung ausdrücken. Aus dem Mohr'schen Kreis lässt sich außerdem die Orientierung der aktiven Versagensfläche(n) relativ zum orthonormalen Hauptnormalspannungssystem ablesen.

5.7.1.2 Versagensorientierungen und lokale Spannungskomponenten

Jede Lage des Einheitsvektors \mathbf{n} lässt sich durch die beiden Winkelparameter α und β angeben:

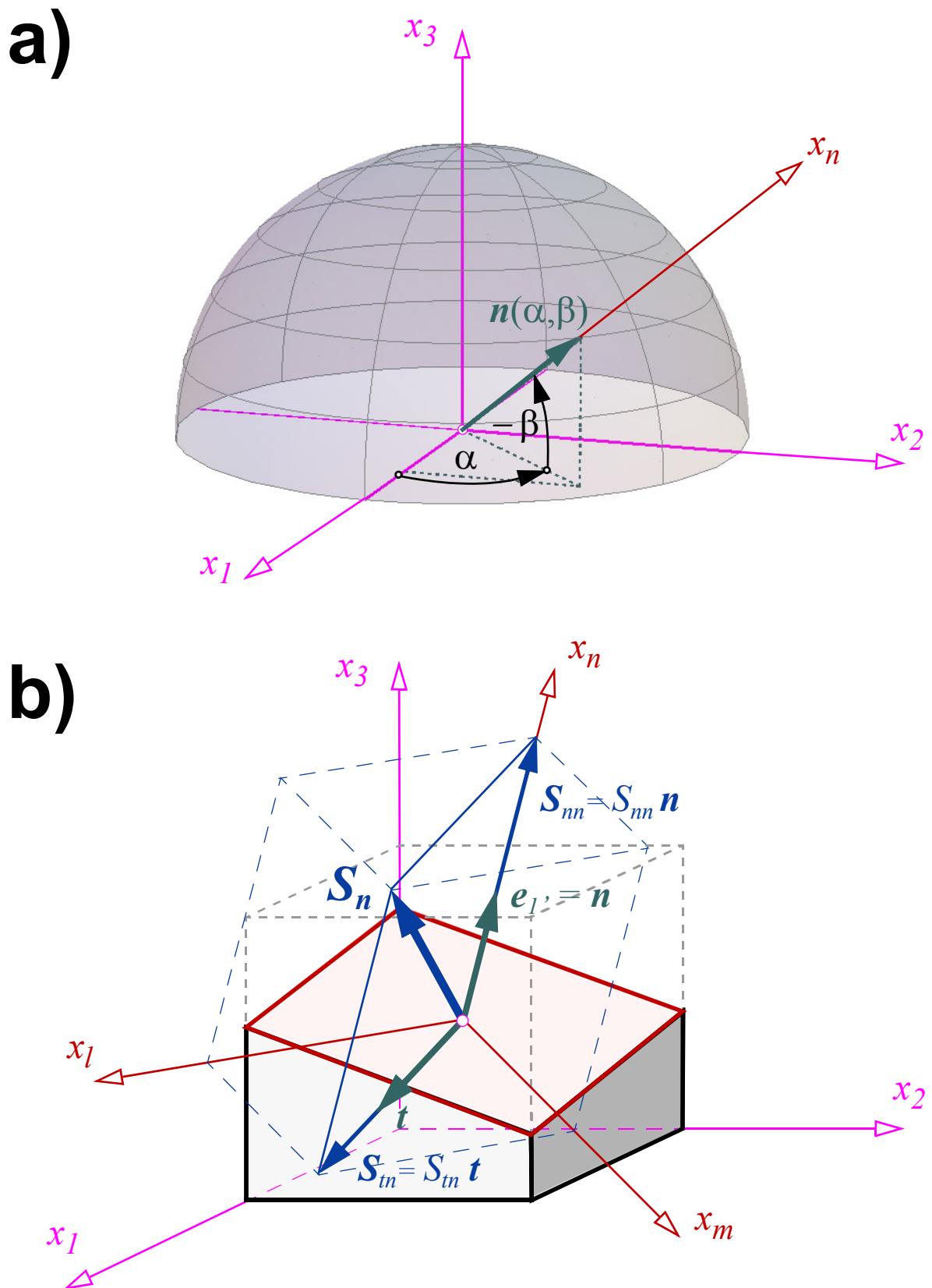


Bild 5.20 a) Mögliche Orientierungen des Normaleneinheitsvektors \mathbf{n} ; b) Normalspannungsvektor \mathbf{S}_{nn} und resultierender Schubspannungsvektor \mathbf{S}_t in einer beliebigen Schnittflächenorientierung mit dem Normalenvektor \mathbf{n}

$$\mathbf{n}(\alpha, \beta) = c_{n1} \mathbf{e}_1 + c_{n2} \mathbf{e}_2 + c_{n3} \mathbf{e}_3 = (c_1 c_2) \mathbf{e}_1 + (s_1 c_2) \mathbf{e}_2 + (-s_2) \mathbf{e}_3 \quad \begin{array}{l} c_1 = \cos \alpha \quad s_1 = \sin \alpha \\ c_2 = \cos \beta \quad s_2 = \sin \beta \end{array} \quad (5-54)$$

Aus Symmetriegründen müssen für die beiden Winkel nur der Wertebereich

- $\beta = 0$: $\alpha \in [0, \pi)$
 - $\beta \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$: $\alpha \in [0, 2\pi)$
 - $\beta = -\frac{\pi}{2}$: $\alpha = 0$
- (5-55)

betrachtet werden. Die Endpunkte aller Einheitsvektoren \mathbf{n} im Wertebereich (5-55) beschreiben eine Halbkugeloberfläche (Bild 5.20). Die Vektoren \mathbf{l} und \mathbf{m} in der Versagensebene sind bei Isotropie beliebig wählbar.

Der in einer Orientierung \mathbf{n} wirkende Spannungsvektor \mathbf{S}_n ist additiv in einen Normalspannungsanteil und einen resultierenden Schubspannungsanteil zerlegbar (Bild 5.20 b). Mit der Projektionsmatrix \mathbf{p}_{nn} und der Matrix \mathbf{P}_n lassen sich die Beträge der Spannungskomponenten berechnen:

$$\begin{aligned} S_{nn} &= (\mathbf{p}_{nn})^T \mathbf{s} \\ S_{ln} &= \sqrt{\mathbf{s}^T (\mathbf{P}_n - \mathbf{p}_{nn} \otimes \mathbf{p}_{nn}) \mathbf{s}} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} c_{n1}^2 & 0 & 0 & c_{n1}c_{n2} & c_{n1}c_{n3} & 0 \\ 0 & c_{n2}^2 & 0 & c_{n1}c_{n2} & 0 & c_{n2}c_{n3} \\ 0 & 0 & c_{n3}^2 & 0 & c_{n1}c_{n3} & c_{n2}c_{n3} \\ c_{n1}c_{n2} & c_{n1}c_{n2} & 0 & c_{n1}^2 + c_{n2}^2 & c_{n2}c_{n3} & c_{n1}c_{n3} \\ c_{n1}c_{n3} & 0 & c_{n1}c_{n3} & c_{n2}c_{n3} & c_{n1}^2 + c_{n3}^2 & c_{n1}c_{n2} \\ 0 & c_{n2}c_{n3} & c_{n2}c_{n3} & c_{n1}c_{n3} & c_{n1}c_{n2} & c_{n2}^2 + c_{n3}^2 \end{bmatrix}$ (5-56)

5.7.1.3 Anforderung an die lokale Versagensbedingung $F''(S_{nn}, S_m)$

Bei der Formulierung der lokalen Versagensbedingung F'' ist eine Unterscheidung in zwei unterschiedliche Schubrichtungen und Schubspannungskomponenten S_{ln} und S_{mn} nicht mehr notwendig. Die maßgebende Schubbeanspruchung ist der Betrag S_m der resultierenden Schubspannungskomponente. Das von der Versagensbedingung bzw. den Versagensbedingungen begrenzte Gebiet in der $\{S_{nn}, S_m\}$ -Koordinatenebene muss symmetrisch bezüglich der S_{nn} -Achse sein. Es gibt zwei Varianten diese Symmetrieforderung zu erfüllen:

- In der Versagensbedingung wird die Schubspannung S_m immer in Betragstrichen eingefasst; damit ist F'' automatisch symmetrisch zur S_{nn} -Achse.
- Es werden zwei Versagensbedingungen, F_1'' und F_2'' , angegeben, die die jeweilige Spie-

gelung der anderen um die S_{nn} -Achse sind; der Funktionsaufbau ist ident, nur die Schubterme S_m haben wechselnde Vorzeichen, $F_1''(S_{nn}, S_m) = F_2''(S_{nn}, -S_m)$

Aufgrund dieser Symmetrie brauchen nur mehr der erste und der zweite Quadrant in der $\{S_{nn}, S_m\}$ -Koordinatenebene gezeichnet werden.

5.7.1.4 Berechnung der isotropen Versagensbedingung $F(\mathbf{s})$

Jeder Spannungszustand \mathbf{s} lässt sich durch drei Hauptnormalspannungen S_1 , S_2 und S_3 und die zugehörigen Hauptnormalspannungsrichtungen angeben. Beim isotropen Körper beeinflusst die Richtung der Hauptnormalspannungen den Versagenseintritt nicht, sondern nur die Größe der drei Hauptnormalspannungen. Alle isotrope Versagensbedingungen sind deshalb immer als Funktionen in den Hauptnormalspannungen S_1 , S_2 und S_3 , in den Invarianten I_1 , J_2 und J_3 oder in den Haigh-Westergaard-Koordinaten ξ , ρ und θ darstellbar, siehe Kap. F.2. Alle diese Größen sind (isotrope) Invarianten und lassen sich ineinander überführen:

$$F(\mathbf{s}) = F(S_1, S_2, S_3) = F(I_1, J_2, J_3) = F(\xi, \rho, \theta) \quad (5-57)$$

5.7.2 Auflösung mit dem Mohr'schen Kreis

Statt die Versagensbedingungen auf allen Raumorientierungen \mathbf{n} abzukontrollieren, hat Mohr (1928) die Aufgabe bei linearer S_{nn} - S_m -Interaktion mithilfe des von ihm entwickelten Mohr'schen Kreises gelöst. Für eine nichtlineare, parabolische Interaktionsbeziehung hat Leon (1934, 1935) die Aufgabe gleichfalls mit dem Mohr'schen Kreis gelöst und detailliert analysiert. Nur dieser in der Literatur wenig (oder fehlerhaft) beschriebene Fall soll hier dargestellt werden.

5.7.2.1 Bestimmung der Versagensorientierung und des zugehörigen Limitbeanspruchungszustandes

Sobald der Mohr'sche Kreis mit dem größten Radius die Kurve der Versagensbedingung $F''(S_{nn}, S_m) = 0$ berührt, tritt Versagen ein (Bild 5.21 a). Das Vorgehen deckt sich mit der Darstellung in Kap. 5.3. Anstatt der maximalen und minimalen Normalspannungskomponente quer zur Faserrichtung, $S_{nn,min}$ und $S_{nn,max}$, sind hier die maximale und minimale Hauptnormalspannungskomponente S_{min} und S_{max} , einzusetzen. Ist die explizite Funktionsdarstellung in der Form $S_m(S_{min}, S_{max})$ und $S_{nn}(S_{min}, S_{max})$ bei einer vorgegebenen Funktion F'' berechenbar, erhält man durch Rückeinsetzen die Versagensbedingung $F(S_{min}, S_{max})$. Als Zusatzinformation gewinnt man außerdem die Orientierung(en) ϕ_f der Versagensfläche(n). Der Winkel wird dabei in der Ebene, die von den Achsen der minimalen und maximalen Hauptnormalspannung aufgespannt ist, ab der Achse der maximalen Hauptnormalspannung gezählt (Bild 5.21 b). Bei nichtlinearen lokalen Versagensbedingungen ist zu beachten, dass unter speziellen Bedingungen hinsichtlich Festigkeitsparametern und Beanspruchungsgrößen eine zweite Versagenssituation (siehe Szenario 2 - Kap. 5.3.8 und

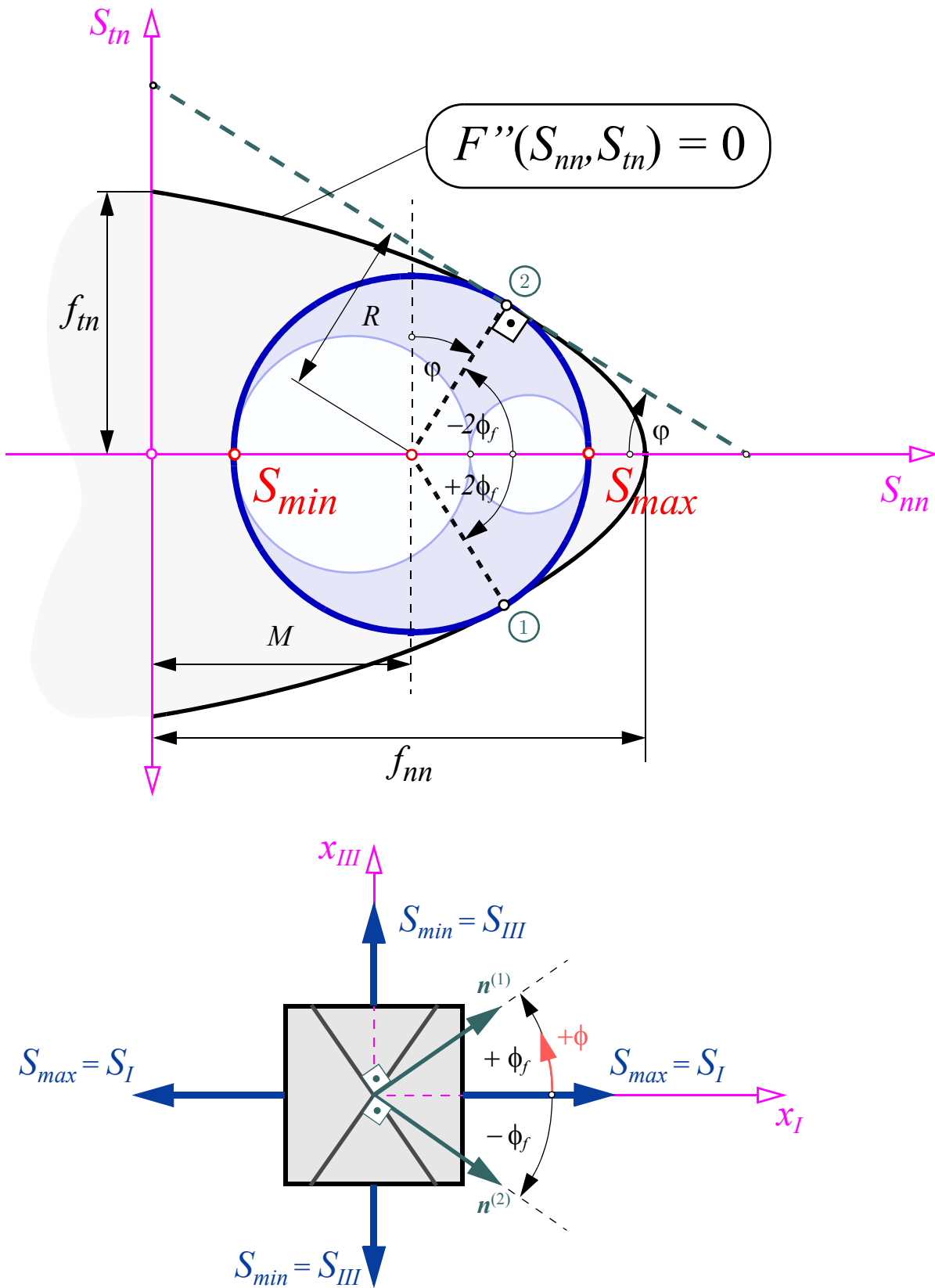


Bild 5.21 a) der Mohr'scher Kreis berührt die Versagensbedingung; b) Beanspruchung durch max/min Hauptnormalspannungen und die Ausrichtung der zwei zugehörigen Versagensorientierungen relativ zu den Hauptnormalspannungsrichtungen

Bild 5.13) auftreten kann. Die nichtlineare und konvexe Kurve $F''(S_{nn}, S_{tn}) = 0$ in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ -Ebene besitzen am Scheitelpunkt bzw. an den Scheitelpunkten einen Krümmungskreis mit dem zugehörigen Krümmungsradius R_f . In Bild 5.13 a) ist diese Situation für den Scheitelpunkt auf der positiven S_{nn} -Achse eingezeichnet. Liegt der Mohr'sche Kreis mit dem größten Radius innerhalb des Krümmungskreises, kann er die Funktion $F''(S_{nn}, S_{tn}) = 0$ nur mehr im Scheitelpunkt berühren. Dies ist der Fall, wenn S_{min} die Bedingung

$$S_{min} \geq f_{nn,t} - 2R_f \quad (5-58)$$

erfüllt. Die maximale Hauptnormalspannung führt - ungeachtet von der Größe S_{min} - zu Versagen. Die zugehörige Versagensebene liegt normal zur Richtung der maximalen Hauptnormalspannung S_{max} (Bild 5.13 b) und ϕ_f ist null. Die Hauptnormalspannung erreicht bei Versagen den Betrag $f_{nn,t}$. In Situationen, in denen der Mohr'sche Kreis innerhalb des Krümmungskreises von F'' , liegt, ergibt sich die Versagensbedingung unabhängig von der konkreten Gestalt von F'' stets zu:

$$F(S_{max}, S_{min}) = \frac{S_{max}}{f_{nn,t}} - 1 = 0 \quad \text{wenn} \quad S_{min} \geq f_{nn,t} - 2R_f \quad (5-59)$$

Das Bezugssystem für die Versagensebenenorientierungen im isotropen Fall sind die Richtungen der drei Hauptnormalspannungen. Somit findet das materielle Versagensgeschehen im isotropen Mohr-Typ-Fall nicht mehr relativ zu einem materiellen Strukturaufbau, sondern relativ zur aufgebrachten Spannung \mathbf{s} statt.

5.7.2.2 Versagensbedingung $F(\mathbf{s})$

Die Hauptnormalspannungen

$$\begin{aligned} S_{max} &= S_I = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \\ S_{II} &= \frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \theta &= \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3} J_3}{2J_2^{3/2}} \right) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ S_{min} &= S_{III} = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (5-60)$$

sind Funktionen der Invarianten I_1 , J_2 und J_3 (siehe Anhang C oder Kap. F.2.2) und die Invarianten wiederum sind Funktionen der sechs Spannungskomponenten \mathbf{s} . Damit sind alle Versagensbedingungen der Form $F(S_{min}, S_{max})$ als Funktionen der globalen Spannungskomponenten \mathbf{s} ausdrückbar.

5.7.2.3 Beispiel Leon'sche Versagensbedingung

Ausgangspunkt für diese Versagensbedingung ist die quadratische Interaktion zwischen

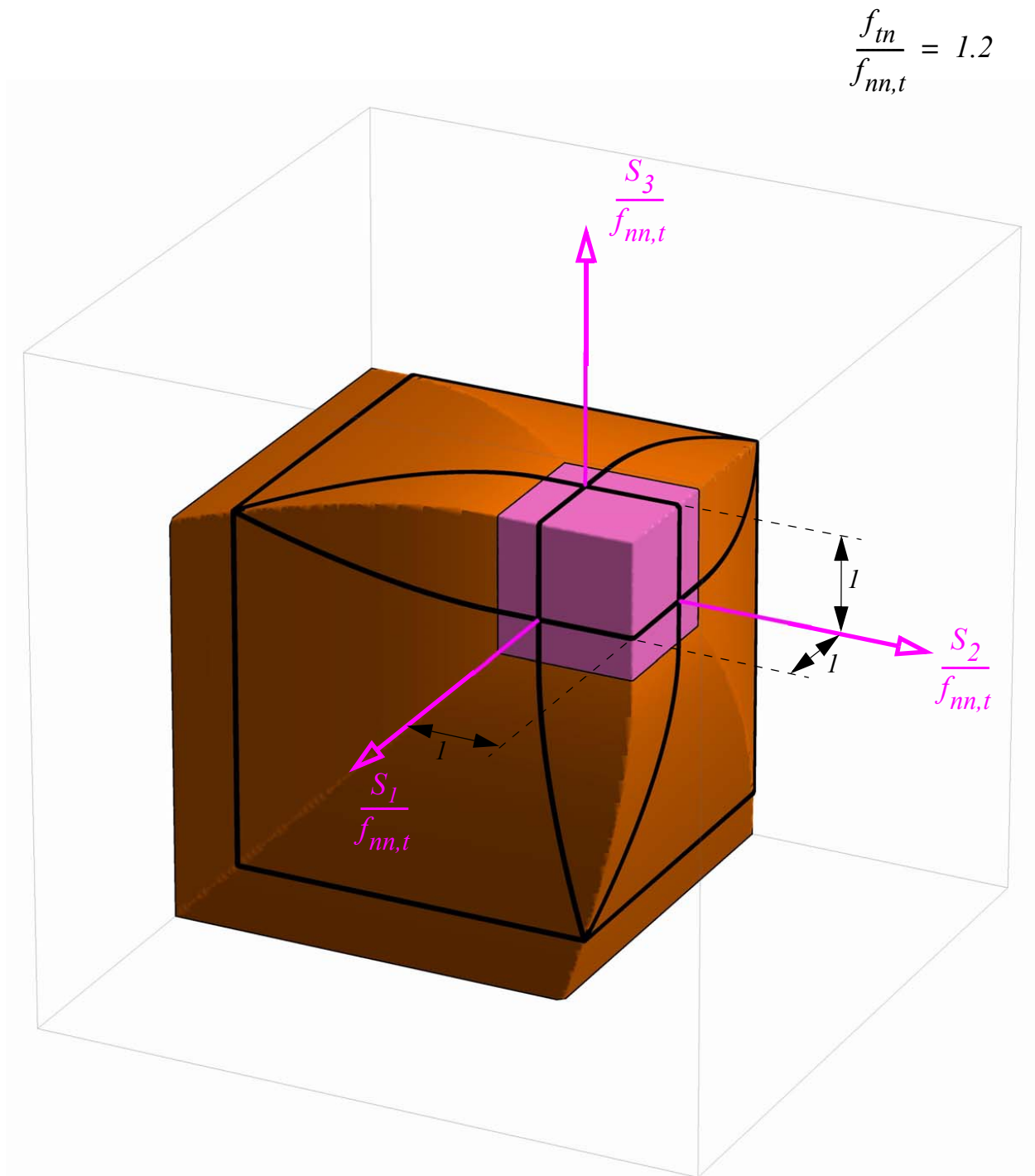


Bild 5.22 Versagensbedingung nach Leon im normierten Hauptnormalspannungsraum bei einem Festigkeitsverhältnis $f_{tn}/f_{nn,t} = 1.2$. Es ist zwischen zwei Funktionen mit unterschiedlichem Gültigkeitsbereich zu unterscheiden: die violette Fläche entspricht einer Rankine-Zugversagensbedingung, die orange Fläche der quadratischen Versagensbedingung $F_I = 0$

Schub- und Normalspannungskomponente in der Versagensebenenorientierung:

$$F'' = \frac{S_{nn}}{f_{nn,t}} + \left(\frac{S_{tn}}{f_{tn}} \right)^2 - 1 \quad (5-61)$$

Mit der analogen Vorgehensweise zu Kap. 5.3.8 ergeben sich die beiden Versagensbedingungen:

$$\begin{aligned} S_{min} < \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}}: & \quad F_1 = \frac{S_{max} + S_{min}}{2f_{nn,t}} + \frac{(S_{max} - S_{min})^2}{4f_{tn}^2} - \frac{4f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{4f_{nn,t}^2} \\ S_{min} \geq \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}}: & \quad F_2 = \frac{S_{max}}{f_{nn,t}} - 1 \end{aligned} \quad (5-62)$$

Diese sind für das Festigkeitsverhältnis $f_{tn}/f_{nn,t} = 1.2$ in Bild 5.6 im normierten Hauptnormalspannungsraum dargestellt. Zu beachten ist, dass bei der Leon-Versagensbedingung zwischen zwei Funktionen mit unterschiedlichem Gültigkeitsbereich zu unterscheiden ist. Die Flächendarstellung der ersten Funktion $F_1 = 0$ (orange Fläche in Bild 5.6) ist im ungültigen Funktionsbereich - dem Gültigkeitsbereich von $F_2 = 0$ (violette Fläche in Bild 5.6) - nicht mehr konvex, was Jirásek/Bažant (2002) zu der fehlerhaften Aussage verführt, dass bei der Leon-Versagensbedingung die elastische Grenzfläche generell nicht konvex ist (siehe auch Diskussion und Darstellung in Kap. 5.3.8). Die Fläche $F_2 = 0$ (violette Fläche in Bild 5.6) im Hauptnormalspannungsraum entspricht einer Rankine-Zugversagensbedingung.

Aus der Darstellung der Leon-Versagensbedingung sieht man, dass die Fläche, die der Rankine-Versagensbedingung entspricht, im hydrostatischen Zugspannungszustand einen „Spitz“ besitzt. Weiters hat diese Fläche bei Spannungszuständen, die die Versagensbedingung erfüllen und zwei gleich große Normalspannungen besitzen, funktionsinhärente Kanten. Dieselben Situationen treten bei allen anderen klassischen isotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen auf. Die Tresca-Funktion hat keinen Spitz, da sie die hydrostatische Achse nie schneidet.

Im Allgemeinen sind zu jedem Spannungszustand \mathbf{s} , der die Versagensbedingung erfüllt, zwei bzw. eine ausgezeichnete Versagensorientierung relativ zu den Achsen der Hauptnormalspannungen zuordenbar. In den funktionsinhärenten Kanten herrschen Sonderbelastungssituationen, in denen unendlich viele Versagensebenenorientierungen simultan aktiv werden.

5.7.2.4 Sonderbelastungssituationen

Es treten drei Sonderbelastungssituationen auf in denen zwei oder alle drei Hauptnormalspannungen gleich sind:

- $S_{max} = S_I > S_{II} = S_{III} = S_{min}; \theta = 0,$

- $S_{max} = S_I = S_{II} > S_{III} = S_{min}; \theta = \pi/3,$
- $S_{max} = S_I = S_{II} = S_{III} = S_{min} = I_1/3.$

Situation 1 und 2: zwei gleich große Hauptnormalspannungen

In den ersten beiden Fällen wird bei der Umparametrisierung von den Hauptnormalspannungen zu den Invarianten die Versagensbedingung (5-63) unabhängig von J_3 .

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0: \quad S_{max} = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \quad S_{min} = \frac{I_1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \\ \theta = \frac{\pi}{3}: \quad S_{max} = \frac{I_1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \quad S_{min} = \frac{I_1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \end{array} \right\} F(I_1, J_2) = F(\mathbf{s}) = 0 \quad (5-63)$$

Im ersten Fall ist nur die Lage der x_I -Achse eindeutig, die beiden verbleibenden Hauptachsen liegen rechtsdrehend, aber nicht eindeutig in der Ebene normal zur x_I -Achse. Im zweiten Fall ist die Lage der x_{III} -Achse eindeutig bestimmbar und die Lage der verbleibenden zwei Achsen ist uneindeutig. Diese Vieldeutigkeit in der Lage von zwei Hauptnormalspannungsachsen überträgt sich auf die Orientierungen der Versagensebenen. Die unendliche Zahl an Normalenvektoren \mathbf{n} auf die aktiven Versagensebenen umfährt einen Doppelkegel um die Achse der Hauptnormalspannung, die eindeutig im Raum liegt.

Situation 3: hydrostatischer Spannungszustand

Bei hydrostatischer Beanspruchung ist $F(\mathbf{s})$ nur mehr eine Funktion der ersten Invarianten:

$$S_{max} = S_I = S_{II} = S_{III} = S_{min}: \quad F(I_1) = F(\mathbf{s}) = 0 \quad (5-64)$$

Unter einem hydrostatischen Spannungszustand gibt es keine eindeutigen Hauptnormalspannungsachsenorientierungen, da alle orthonormierten Dreibeine vollkommen gleichwertig sind. Damit sind auch alle Versagensebenen gleichzeitig aktiv.

Das Vorhandensein von funktionsinhärenten Ecken und Kanten bei diesen Spannungszuständen führt bei der rechnerischen Umsetzung der Plastizitätsgleichung zu Schwierigkeiten. Durch Modifizierung - einer „Glättung“ bzw. „Abrundung“ - der jeweiligen Funktionen werden diese ungewünschte Funktionseigenschaften behoben (Anhang F); oder das isotrope Versagensgeschehen wird durch Diskretisierung genähert beschrieben.

5.7.3 Diskretisierung

5.7.3.1 Ausgangssituation

Anstatt unendlich vieler Versagensebenenorientierungen wird nur eine diskrete Anzahl N von Orientierungen \mathbf{n}_i betrachtet. Im Fall transversaler Isotropie wurde diese Methode bereits erklärt (Kap. 5.5); hier soll dieses Vorgehen auf den isotropen Fall erweitert werden.

5.7.3.2 Vorgehensweise

N vordefinierte Schnittebenorientierungen

Die N Vektoren \mathbf{n}_i sollten dabei möglichst gleichförmig und äquidistant im Raum verteilt sein. Die Lage der diskreten Einheitsvektoren \mathbf{n}_i wird durch N Winkelpaare α_i und β_i (5-54) angegeben, die im definierten Wertebereich (5-55) liegen müssen. Eine alternative Beschreibung des Einheitsvektors ist durch Angabe der Komponenten c_{n1} , c_{n2} und c_{n3} möglich, wobei - da \mathbf{n}_i ein Einheitsvektor ist - die Summe der Quadrate der drei Komponenten eins ergeben muss.

Berechnung der lokalen Spannungskomponenten

Mit den zwei Matrizen \mathbf{p}_{mn} und \mathbf{P}_n (5-56), die beide Funktionen der Winkel α_i und β_i sind, lassen sich die Normalspannung S_{mn} und der Betrag der Schubspannungsergebnisse S_m bei Vorgabe der Spannungen \mathbf{s} in jeder der N Versagensebenenorientierung mit dem Index i berechnen.

Formulierung von N Versagensbedingungen F_i

In jeder der N Versagensebenenorientierungen gilt per definitionem bei Isotropie dieselbe lokale Versagensbedingung F' . Durch Einsetzen des Zusammenhangs zwischen den Spannungskomponenten \mathbf{s} und den lokalen Spannungskomponenten (5-56) in die lokale Versagensbedingung ergibt sich für jede Versagensebenenorientierung i eine Versagensbedingung:

$$F' = F'(S_{mn}, S_m) \quad \rightarrow \quad F_i = F_i(\mathbf{s}, \alpha_i, \beta_i) \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5-65)$$

5.7.3.3 Schlussbemerkungen zum Diskretisierungsverfahren

Anzumerken ist, dass durch die Diskretisierung die Isotropie des erlaubten Bereichs verloren geht bzw. nur approximiert wird (siehe auch Kap. 5.5.4). Dem kann entgegnet werden, dass durch eine beliebig hohe Anzahl N eine Annäherung an den Grenzfall möglich ist. Für die Diskretisierung spricht die einfache und robust umsetzbare rechnerische Behandlung. Außerdem legt diese Vorgehensweise die Tatsache offen, dass die Isotropie im Mohr-Typ-Fall zu Situationen mit mehrfachen simultan aktivierbaren Versagensmechanismen gehört und dort den Grenzfall mit unendlich vielen gleichberechtigten Versagensmechanismen darstellt.

Ein Vorteil gegenüber den modifizierten Versagensbedingungen (Anhang F) ist, dass jedem Punkt auf der elastischen Grenzfläche die zugehörigen Versagensbedingungen und damit die Orientierung(en) der Versagensebene(n) zuordenbar sind. Will man den einzelnen Versagensmechanismen jeweils ein individuelles Verfestigungsverhalten zuweisen, ist das diskrete Vorgehen dazu optimal geeignet.

Die diskrete Beschreibung der klassischen Mohr-Typ-Versagensbedingungen wird z.B. mit

dem Multilaminat Modell, Zienkiewicz/Pande (1977) und Pietruszczak/Pande (2001), umgesetzt, wobei durch die Diskretisierung auch die individuelle Verfestigung (oder Entfestigung) in den einzelnen Versagensebenenorientierungen ermöglicht wird. Die diskreten Orientierungen \mathbf{n}_i der Versagensebenen werden durch die Integrationspunkte von Kugelinintegralen vorgegeben; daher werden im Multilaminat Modell die Versagensebenenorientierungen auch als *sampling planes* bezeichnet.

5.7.4 Kontinuierliche Beschreibung von anisotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen

Dabei wird die Mohr'sche Idee beibehalten und angenommen, dass alle Raumorientierungen \mathbf{n} , beschrieben durch die Gleichung (5-54) mit dem Definitionsbereich (5-55) der Winkel α und β , jeweils eine potentielle Versagensebene kennzeichnen. In diesen Orientierungen werden die Spannungen S_{nn} und S_m berechnet. Mit diesen beiden Größen wird die lokale Versagensbedingung beschrieben. Um eine materielle Strukturiertheit in das Modell zu inkorporieren, werden z.B. die Festigkeitsparameter f_{nn} und f_m nicht konstant gewählt, sondern sind Funktionen der Raumorientierung \mathbf{n} .

Ein solches Modell formulieren z.B. Pietruszczak/Mróz (2001) zur Beschreibung von anisotropen Fels- und Geomaterialien. Die beiden Festigkeitswerte der lokalen Versagensbedingung werden dabei mit einem Faktor c multipliziert, der eine Funktion der räumlichen Orientierung \mathbf{n} ist:

$$F'' = F''(S_{nn}, S_m, f_{nn}c(\mathbf{n}), f_m c(\mathbf{n})) \quad (5-66)$$

Ist c eins, erhält man den isotropen Fall. Zur Bestimmung der aktiven Versagensorientierung kann nicht mehr der Mohr'sche Kreis verwendet werden. Pietruszczak/Mróz (2001) verwenden zur Bestimmung des Limitbeanspruchungszustandes und der zugehörigen Versagensebenenorientierung nichtlineare Gleichungen, die der in Kap. 5.3.4.2 skizzierten Vorgehensweise entsprechen. In Vorausblick auf die Plastizitätsrechnung ist diese Problemformulierung nicht praktikabel; es empfiehlt sich die kontinuierliche Modellformulierung durch die diskretisierte Vorgehensweise zu ersetzen und an N vorgegebenen Raumorientierungen \mathbf{n}_i die lokale Versagensbedingung (5-66) mit den Gleichungen (5-65) in N Versagensbedingungen F_i überzuführen. Dieses Vorgehen wählen Pietruszczak/Pande (2001) für das von Pietruszczak/Mróz (2001) formulierte Bodenmodell.

5.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie die Mohr'sche Idee bei Vorhandensein von Materialsymmetrien umzusetzen ist. Die Hauptschwierigkeit ist aus einer unendlichen Vielzahl von möglichen Versagensebenenorientierungen die aktiven Orientierungen ausfindig zu machen.

In einigen wenigen und einfachen Fällen ist eine graphische Lösung mit dem Mohr'schen Kreis möglich. Einige der exakt bestimmten Versagensbedingungen müssen noch nachbehandelt bzw. modifiziert werden, um die in Kap. 3.2 geforderten Funktionseigenschaften zu erfüllen. Ist die exakte Lösung nicht möglich, kann immer das Diskretisierungsverfahren angewandt werden. Diese Vorgehensweise ist generell und uneingeschränkt einsetzbar.

Die Herausforderung verlagert sich beim Diskretisierungsverfahren auf die Handhabung von beliebig vielen Versagensbedingungen in der Rechnungsprozedur des plastischen mechanischen Modells. Dabei werden neue Fragen aufgeworfen:

- Wie geht man bei der Rechnung mit beliebig vielen Versagensbedingungen und zugehörigen Versagensmechanismen um?
- Was passiert an sogenannten Pyramidenpunkten (Definition siehe Kap. 3.4.4), die bei einer großen Anzahl von Versagensbedingungen i.A. entstehen?

Diese Fragen werden im nächsten Teil der Arbeit beantwortet.

TEIL II

Multi-
Mechanismen-
Plastizität
ohne/mit
Spannungs-
nullbedingungen

Inhalt:

6 Multi-Mechanismen-Plastizität

7 Multi-Mechanismen-Plastizität mit zusätzlichen Spannungsnullbedingungen

6

Multi- Mechanismen- Plastizität

6.1 Einleitung, Ziele & Kapitelaufbau

6.1.1 Problembeschreibung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Funktionen angegeben, um den Versagensbeginn von strukturierten Materialien zu beschreiben. Offen blieb dabei die Frage, wie der zu den jeweiligen Versagensbedingungen zugeordnete Versagensmechanismus aussieht.

In diesem Kapitel wird plastisches Materialverhalten betrachtet. Jede Versagensbedingung gibt die Aktivierung eines zugehörigen plastischen Versagensmechanismus an. Da eine uneingeschränkte Anzahl an Versagensbedingungen formuliert werden kann, treten Belastungssituationen, in denen mehrere Versagensbedingungen gleichzeitig erfüllt werden, auf. In der geometrischen Definition aus Kap. 3 liegen solche Spannungspunkte auf Ecken, Kanten oder Berührungspunkten der elastischen Grenzfläche.

Wie die plastischen Versagensmechanismen aussehen, ob ein plastischer Deformationsvorgang eintritt und wie sich dieser ausbildet, soll in diesem Kapitel beschrieben werden. Dabei wird verzerrungsgesteuert vorgegangen, d.h., sobald die aktuellen Spannungen mindestens eine Versagensbedingung erfüllen, wird zur Weiterbelastung ein differentieller Verzerrungszuwachs $d\epsilon$ vorgegeben. Anhand dieser Verformungsvorgabe kann beurteilt werden, ob im dadurch initiierten Lastschritt plastische Verzerrungszuwächse auftreten, welche plastischen Versagensmechanismen daran beteiligt sind und wie die Spannungszuwächse aussehen.

Eine Sondersituation tritt auf, wenn der Spannungspunkt in einem Pyramidenpunkt (siehe Definition Kap. 3.4.4) liegt. Dort ist keine eindeutige Bestimmung der beteiligten plastischen Versagensmechanismen möglich. Wie für diese Situation trotzdem eine eindeutige Lösung festgelegt werden kann, wird in diesem Kapitel beschrieben.

Kapitelinhalt ist die Formulierung und Darstellung der Materialmodellgleichungen bei beliebig vielen und simultan aktivierbaren plastischen Versagensmechanismen. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich diese Gleichungen als Optimierungsaufgabe anschreiben, was Rückschlüsse auf das Lösungsverhalten erlaubt und die Lösung erheblich vereinfacht.

6.1.2 Literatur & Stand der Forschung

6.1.2.1 Allgemein

Eine erste Komplettdarstellung der Modellgleichungen der Plastizität findet sich in dem Buch von Hill (1950). Eine sehr kompakte und anschauliche Einführung zu diesem Thema findet sich in dem von Amero verfassten Kapitels in Stein/de Borst/Hughes, eds. (2004). Als Einführung zur klassischen (Metall-)Plastizität ist das Buch von Calladine (2000) zu empfehlen. Sehr gut strukturiert ist das Lehrbuch von Salençon (2002). Ein Kompendium

der Plastizitätstheorie ist das Buch von Lubliner (2008).

6.1.2.2 Multi-Mechanismen-Plastizität

Die Darstellung der Modellgleichungen in den oben genannten Lehrbüchern geht großteils von einer einzigen Versagensbedingung und dem zugehörigen Versagensmechanismus aus. Modelle mit mehreren Versagensbedingungen, die gleichzeitig/simultan aktiv sein können, werden - wenn überhaupt - nur kurz erwähnt. Für diese Modelle hat sich die Kurzbezeichnung Mehrflächenplastizität verbreitet. Dieser Terminus wird in dieser Arbeit nicht verwendet und der Begriff Multi-Mechanismen-Plastizität bevorzugt.

Diese hat ihre Anfänge in der Beschreibung der plastischen Deformation von Einzelkristallen. Das Vorhandensein von mehreren Schubmechanismen (*multi-slip*) und deren mögliche zeitgleiche Aktivierung wurden bei der plastischen Deformation von Kristallen beobachtet und 1938 von Taylor, Aufsatz 27, 28 und 41 in Batchelor ed. (1958), durch ein mechanisches Modell beschrieben. Koiter (1953) formulierte das Modell und die Grundgleichungen mit mehreren simultan aktivierbaren plastischen Versagensmechanismen in Anlehnung an den Formalismus des Buches von Hill (1950) als Erster in der heute bekannten Form. Mandel (1965) greift die Idee von Koiter auf und arbeitet die Grundgleichungen für plastische kristalline Schubgleitmechanismen (*glissement pur*) aus.

Bei den bisher erwähnten Arbeiten haben die Versagensbedingungen alle die Form der Schmid'schen Schubbedingung. Für die ersten Formulierungen mit anderen Versagensbedingungen, siehe z.B. Maier (1968), Maier (1970). Calladine (1971) verwendet die Multi-Mechanismen-Plastizität zur Beschreibung des plastischen Verformungsverhaltens von Böden. Zienkiewicz/Pande (1977) wenden die Idee von mehrfach simultan aktivierbaren Versagensmechanismen auf das von ihnen entwickelte *Multilaminat Modell* an.

In Simo/Kennedy/Govindjee (1988) und Simo/Hughes (1998) sind die Grundgleichungen in allgemeiner Form mit dem Fokus auf eine rechnerische Umsetzung dargestellt. Dabei werden aber zusätzliche Einschränkungen hinsichtlich der Anzahl der Versagensmechanismen eingeführt, um uneindeutige Situationen, sprich Pyramidenpunkte, auszuschließen. Einen zusammenfassenden Überblick über die Modellgleichungen einschließlich einer Erweiterung auf nicht-assozierte Fließregeln haben Ottosen/Ristinmaa (1996) veröffentlicht.

6.1.2.3 Uneindeutige Aufteilung der plastischen Verzerrungsanteile - Pyramidenpunkte

In sogenannten Pyramidenpunkten (siehe Kap. 3.4.4) ist bei Vorgabe eines differentiellen Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}$ keine eindeutige Aufteilung des plastischen Verzerrungsanteils auf die beteiligten Mechanismen bestimmbar und es ergeben sich bei der Berechnung von $d\mathbf{s}$ Matrizen, die sich nicht regulär invertieren lassen.

Mit solchen Situationen wurde bereits 1938 Taylor, Aufsatz 27, 28 und 41 in Batchelor ed. (1958), bei der Untersuchung von Multi-Slip-Situationen bei der plastischen Deformation von Kristallen konfrontiert. Bei der durchgeführten starr-plastischen Betrachtung ist zwar

das eingeprägte plastische (deviatorische) Verzerrungsdifferential eindeutig angegeben, aber an manchen Spannungspunkten können mehr als fünf plastische Mechanismen aktiviert werden (fünf Mechanismen ergeben sich daher, da bei Kristallen das höchstdimensionale Schnittgebilde von Schubversagensbedingungen eine 5-dimensionale Kante ist, siehe Kap. 4.3). Die Kernfrage ist, welche der möglichen Einzelmechanismen aktiv sind und mit welchem Anteil diese am plastischen Deformationsvorgang beteiligt sind. Taylor löst solche Situationen auf, indem er aus der Vielzahl der Möglichkeiten fünf Mechanismen auswählt, deren Anteile am plastischen Gesamtdeformationsvorgang eindeutig bestimmbar sind. Bemerkenswert ist, dass er dabei eine Lineare Programmierungsaufgabe formuliert und löst, wobei diese Art von Optimierungsaufgabe 1938 gar nicht bekannt und mathematisch formuliert war.

Lösungsvorschläge zur Auffindung der aktiven Schubmechanismen im Rahmen der rechnerisch-approximativen Lösung der (raten-unabhängigen) Plastizitätsgleichungen von Einzelkristallen geben z.B. Borja/Wren (1993), Anande/Kothari (1996) und Schröder/Miehe (1997). In allen diesen Arbeiten wird die im Lösungskontext - aufgrund der uneindeutigen Aufteilung der plastischen Verzerrungszuwächse - auftretende singuläre Matrix durch eine Pseudoinverse/generelle Inverse berechnet. Einen Überblick und Vergleich verschiedener Lösungsmethoden der auftretenden singulären Matrizen geben Miehe/Schröder (2001). Schmidt-Baldassari (2003) formuliert die raten-unabhängigen Gleichungen der Kristallplastizität als Optimierungsaufgabe und wendet entsprechende Lösungsmethoden an.

Die Pyramidenpunkte treten aber nicht nur beim plastischen Verhalten von Einzelkristallen, sondern sind allgemein bei der Formulierung von Plastizitätsgleichungen mit mehreren simultan aktivierbaren Versagensmechanismen regulärer Bestandteil der Aufgabenstellung, siehe z.B. die Sonderbelastungssituationen bei den diskretisierten transversal isotropen oder isotropen Versagensbedingungen aus Kap. 5.3 und Kap. 5.7.2.4. In der Kurzdarstellung der Grundgleichungen in Kapitel 5 von Simo/Hughes (1998) werden durch die Einschränkungen in der Fußnote auf S. 200 solche Situationen explizit ausgeschlossen.

6.1.2.4 Grundgleichungen der Plastizitätstheorie und äquivalente Optimierungsaufgabe

Die Grundgleichungen der Plastizität lassen sich bei

- assoziiertem plastischen Versagensmechanismus,
- konvexen Versagensbedingungen und
- strikter Konvexität der elastischen Materialmatrix

durch eine äquivalente konvexe Optimierungsaufgabe formulieren.

Bereits 1938 setzt Taylor, Aufsatz 27, 28 und 41 in Batchelor ed. (1958), diese Äquivalenz bei der Berechnung der plastischen Schubgleitmechanismen von FCC-Kristallen ein, formuliert die Idee physikalisch-intuitiv basierend auf dem von ihm postulierten *Minimum*

Shear Principles. Bishop/Hill (1951) geben die Gleichungen des Prinzips der maximalen Dissipation für Kristalle in etwas abgewandelter Form an und zeigen die Übereinstimmung des von Taylor formulierten *Minimum Shear Principle* mit dem *Prinzip der maximalen plastischen Dissipation* (*Maximum Work Principle*).

Zeitgleich (ab ca. 1945) entwickelte sich der mathematische Bereich der Optimierung. 1947 veröffentlichte George Dantzig das Simplex-Verfahren zur Lösung von linearen Programmierungsaufgaben. Plastizitätsaufgaben mit linearen Versagensbedingungen wurden z.B. von Maier (1968), Maier (1970) als quadratische Programmierungsaufgaben angeschrieben und gelöst. Diese mathematische Äquivalenz und die dazu nötigen Bedingungen der Modellformulierung sind für den Fall mit nichtlinearen Versagensbedingungen in einem Aufsatz von Halphen/Nguyen (1975) dargestellt worden. In Crisfield (1991) und Simo/Hughes (1998) ist diese Querverbindung für die rechnerische Lösung der Plastizitätsgleichungen angeführt. Eine in diesem Sinne konsequente Umsetzung der mechanischen Aufgabenstellung als Optimierungsaufgabe in der Lösung der Plastizitätsgleichungen findet sich bei Schmidt-Baldassari (2003), wobei verschiedene Lösungsmethoden verglichen werden.

6.1.3 Aufgabenstellung und Ziele des Abschnitts

Die Grundgleichungen der Plastizität sollen für uneingeschränkt viele, simultan aktivierbare plastische Versagensmechanismen formuliert werden. Jeder Versagensmechanismus wird durch eine zugehörige Versagensbedingung angegeben. Die wesentliche Fragestellung, die bei mehreren potentiell aktiven Versagensmechanismen zu klären ist, lautet: Welche Mechanismen sind schlussendlich wirklich aktiv und in welchem Maß beteiligen sie sich am differentiellen plastischen Verzerrungszuwachs?

Bei der Berechnung von differentiellen Deformationsschritten kann es zu Situationen kommen, in denen keine eindeutige Aufteilung des plastischen Versagensmechanismus in die Einzelmechanismen möglich ist (Pyramidenpunkte). Wie diese Situationen trotzdem zu lösen sind, wird in diesem Kapitel gezeigt.

Mit den mathematischen Festlegungen für die Versagensbedingungen aus Kap. 3.2, einer positiv definiten Materialsteifigkeitsmatrix und einem assoziierten Versagensmechanismus ist eine Optimierungsaufgabe angebbbar, deren Minimumsbedingungen den Gleichungen der Plastizität entsprechen. Aus dieser mathematischen Äquivalenz lassen sich Folgerungen zur Lösungsgestalt der Gleichungen ziehen. Außerdem ist die Minimierungsaufgabe Ausgangspunkt für die systematische Bestimmung der aktiven Mechanismen und später die Basis für robuste und global konvergente approximative Lösungsverfahren.

Es lassen sich zusammengefasst folgende Ziele formulieren:

- Darstellung der Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität,
 - Formulierung der Grundgleichungen in Form eines äquivalenten Optimierungsproblems, Nachweis der Äquivalenz und notwendige Voraussetzungen,
 - Bestimmung der aktiven plastischen Versagensmechanismen,
-

- Betrachtung von plastischen Belastungen in Pyramidenpunkten und deren Lösung.

6.1.4 Inhalt von Kapitel 6

6.2 Grundlagen der klassischen Plastizität

6.3 Elastische Grenzfläche, aktive Versagensmechanismen & Konsistenzbedingung

6.4 Plastischer Versagensmechanismus

6.5 Be- und Entlastungsbedingungen

6.6 Zusammenfassung der Grundgleichungen & Äquivalentes Optimierungsproblem

6.7 Berechnung eines aktiven Sets

6.8 Lösung in Pyramidenpunkten

6.9 Offene Punkte

6.2 Grundlagen der klassischen Plastizität

Die Modellgleichungen bestehen aus den folgenden Bestandteilen:

- **Aufteilung der Gesamtverzerrungen:** Bei der Annahme kleiner Verzerrungen teilen sich die Gesamtverzerrungen \mathbf{e} additiv in einen elastischen und einen plastischen Verzerrungsanteil auf:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{el} + \mathbf{e}_{pl} \quad (6-1)$$

- **Elastische Verzerrungsenergiedichtefunktion:** Das linear-elastische Materialverhalten wird durch eine Verzerrungsenergiedichtefunktion ψ_{el} beschrieben. Diese ist strikt konvex und eine quadratische Funktion in den Verzerrungen. Die Koeffizienten der elastischen Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} (Anhang D) sind konstant.

$$\psi_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{el}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_{el} = \frac{1}{2} (\mathbf{e} - \mathbf{e}_{pl})^T \mathbf{C} (\mathbf{e} - \mathbf{e}_{pl}) \quad (6-2)$$

- **Versagensbedingungen:** Die Versagensbedingungen $F_i(\mathbf{s})$ sind konvex und stetig differenzierbar. Das Material weist im Allgemeinen mehrere unterscheidbare charakteristische Versagensmechanismen auf, die auch gleichzeitig aktiv sein können.
- **Plastischer Versagensmechanismus:** Der plastische Versagensmechanismus (= der differentielle Zuwachs der plastischen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{pl}$) ist eine Funktion des aktuellen Verformungs- und Spannungszustandes. Zur Beschreibung werden assoziierte Versagensmechanismen verwendet:

$$d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} \quad (6-3)$$

- **Verzerrungsgesteuerter Belastung:** Zur Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs werden die Verzerrungen als steuernde Größen vorgegeben.
- **Raten-Unabhängigkeit:** Das Modell wird so aufgebaut, dass die Elastizitätsgrenze und die Ausbildung der plastischen Verformungen von keinen zeitveränderlichen Größen (z.B. der Belastungsgeschwindigkeit) - kurz als Raten bezeichnet - abhängt.
- **Perfekte Plastizität:** In diesem Kapitel wird die zusätzliche Vereinfachung der sogenannten „perfekten“ Plastizität eingeführt. Verfestigungs- und Entfestigungsmechanismen sind mit dieser Festlegung aus der Betrachtung ausgeschlossen.

Basierend auf diesen Einschränkungen lässt sich anschließend das äquivalente Optimierungsproblem anschreiben.

6.3 Elastische Grenzfläche, aktive Versagensmechanismen & Konsistenzbedingung

6.3.1 Potentiell aktive Versagensmechanismen

Die Definitionen für den erlaubten Bereich und die elastische Grenzfläche bei Vorgabe mehrerer Versagensbedingungen sind in Kap. 3.3 angegeben.

Betrachtet wird ein Spannungszustand \mathbf{s}_n , der auf der elastischen Grenzfläche $\partial\mathbb{E}$ liegt. Die Indizes i der an diesem Spannungspunkt \mathbf{s}_n beteiligten Versagensbedingungen - für diese gilt $F_i(\mathbf{s}_n) = 0$ - wird in der Menge \mathcal{A}_0 zusammengefasst:

Menge der potentiell aktiven Versagensmechanismen :

$$\mathcal{A}_0 = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{s}_n) = 0\} \quad (6-4)$$

Anzahl der p. a. Versagensmechanismen :

$$q = \text{nelem}(\mathcal{A}_0) \geq 1$$

Aus der Menge \mathcal{A}_0 ist wiederum nur eine Untermenge wirklich aktiv. Liegt der Spannungspunkt im Schnittbereich mehrerer Versagensbedingungen ($q > 1$), können (müssen aber nicht!) die zugehörigen Versagensmechanismen gleichzeitig/simultan aktiviert werden.

Über die geometrische Gestalt des Schnittbereiches wurden bereits Definitionen in Kap. 3.4 und Kap. 3.5 formuliert. Alle Normalvektoren \mathbf{g}_i auf die Versagensbedingungen im Schnittpunkt lassen sich in der Matrix \mathbf{G} mit dem tief gestellten Index \mathcal{A}_0 zusammenfassen. Vorläufig soll einschränkend angenommen werden, dass der Rang r gleich der Anzahl q ist. In Kap. 6.8 werden Situationen (Pyramidenpunkte) betrachtet, die dieser Einschränkung nicht mehr unterliegen und $r < q$ gilt.

6.3.2 Aktive Versagensmechanismen und Konsistenzbedingung

6.3.2.1 Allgemeine Definition

Als aktive Versagensmechanismen werden diejenigen Mechanismen bezeichnet, die beim Spannungspunkt \mathbf{s}_{n+1} die Versagensbedingung F_i zu null erfüllen. Die Indizes i dieser Versagensbedingungen werden in der Menge

$$\mathcal{A} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{s}_{n+1}) = 0\} \quad (6-5)$$

zusammengefasst. \mathcal{A} wird auch kurz als *aktives Set* bezeichnet.

6.3.2.2 Differentieller Spannungszuwachs

In der differentiellen Problemformulierung ergibt sich der Spannungspunkt $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}$

durch einen differentiellen Spannungszuwachs. Die Spannungen \mathbf{s}_n liegen auf der elastischen Grenzfläche $\partial\mathbb{E}$ und definieren mit ihrer Lage die Menge \mathcal{A}_0 (6-4). Die Spannungen \mathbf{s}_{n+1} müssen im erlaubten Bereich \mathbb{E} liegen. Mit der Reihenentwicklung der einzelnen Versagensbedingungen F_i nach den Spannungen \mathbf{s} an der Stelle \mathbf{s}_n ergibt sich:

$$F_i(\mathbf{s}_{n+1}) = F_i(\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) = F_i(\mathbf{s}_n) + \left(\left. \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}_n} \right)^T d\mathbf{s} = F_i(\mathbf{s}_n) + \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} = \underbrace{F_i(\mathbf{s}_n)}_{=0} + dF_i \quad i \in \mathcal{A}_0 \quad (6-6)$$

Der erste Term der Reihenentwicklung ist null, da die Spannungen \mathbf{s}_n auf der elastischen Grenzfläche liegen und nur die Versagensbedingungen aus der Indexmenge \mathcal{A}_0 betrachtet werden. Der differentielle Zuwachs dF_i kann nicht größer als null sein, da der Spannungspunkt \mathbf{s}_{n+1} außerhalb von \mathbb{E} liegen würde. dF_i kann aber kleiner als null werden; diese Versagensbedingungen sind zwar in der Menge der potentiell aktiven Versagensmechanismen, sind aber schlussendlich nicht aktiv am plastischen Verzerrungszuwachs beteiligt. Bei den aktiven Versagensbedingungen gilt demzufolge $dF_i = 0$.

Bei einem differentiellen Spannungszuwachs ergibt sich die Definition der aktiven Versagensmechanismen aus (6-5) mit (6-6) zu:

$$\mathcal{A} = \{i \in \mathcal{A}_0 \mid dF_i = \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} = 0\} \quad (6-7)$$

\mathcal{A} ist eine Untermenge von \mathcal{A}_0 , sobald ein oder mehrere dF_i kleiner als null werden. „Aktiv“ heißt im differentiellen Betrachtungsfall aber noch nicht, dass alle aktiven Versagensmechanismen wirklich plastische Verzerrungsbeiträge $d\mathbf{e}_{pl,i}$ liefern; $d\lambda^i$ kann in einigen speziellen Sonderfällen (neutrale Belastungssituation) auch null sein.

6.3.2.3 Konsistenzbedingung

Die Konsistenzbedingung für alle aktiven Versagensmechanismen ist

$$(\mathbf{G}_{\mathcal{A}})^T d\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (6-8)$$

Die Matrixdefinition für $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}$ entspricht der aus Gleichung (3-5) nur mit allen \mathbf{g}_i der Indexmenge \mathcal{A} statt \mathcal{A}_0 .

6.3.3 Illustration im Spannungsraum

In Bild 6.1 sind drei unterschiedliche Situationen dargestellt. Man hat dreimal dieselbe Ausgangssituation: Der Spannungspunkt \mathbf{s}_n liegt auf dem Schnittbereich der beiden Versagensbedingungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$. Es gilt $\mathcal{A}_0 = \{1,2\}$. In diesem Punkt werden die Gradienten \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 auf die beiden Versagensbedingungen bestimmt. Diese beiden Vektoren sind auch die Normalvektoren der Tangentialebenen der Versagensbedingungen im Punkt

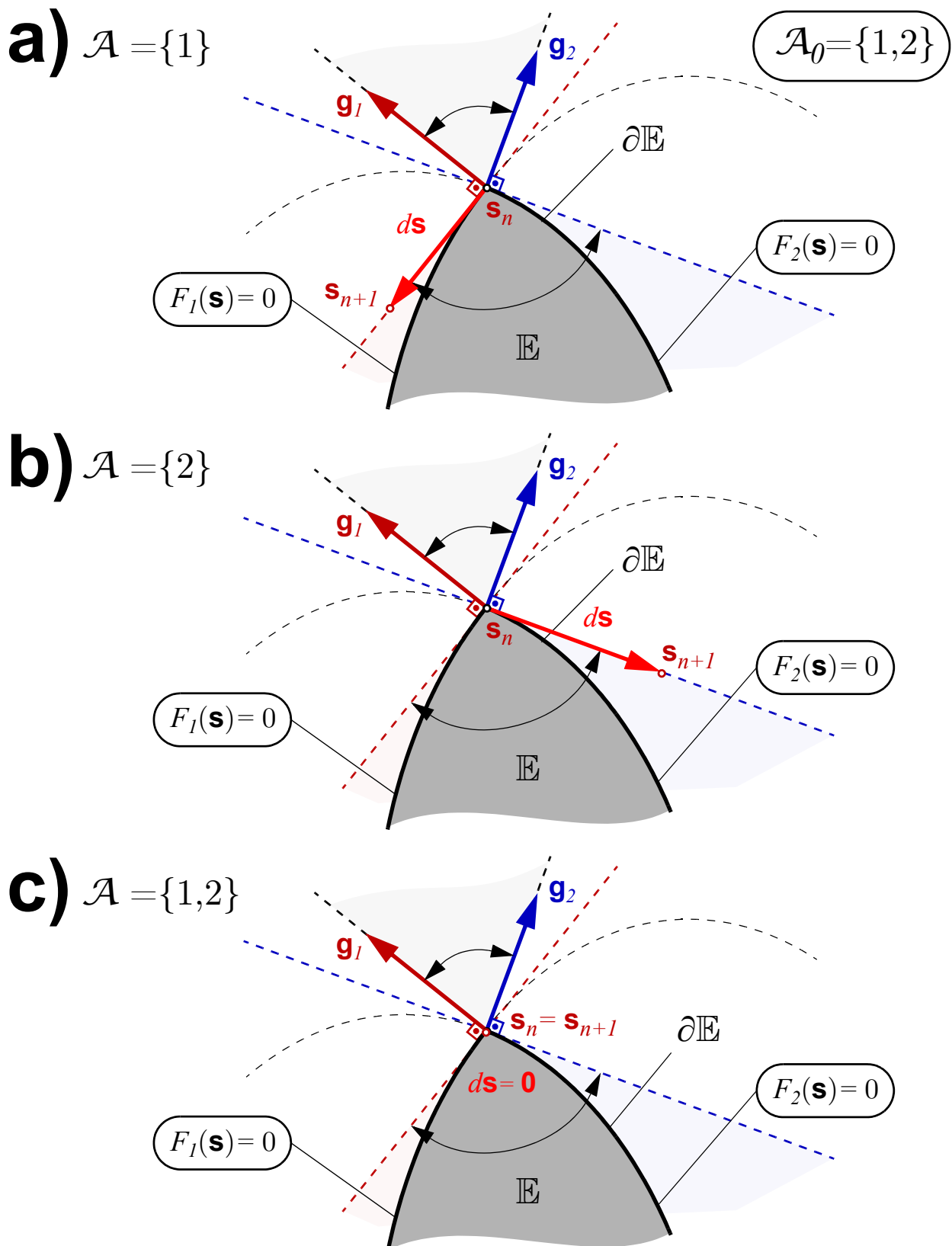


Bild 6.1 Illustration der aktiven Versagensmechanismen: der Spannungspunkt \mathbf{s}_n liegt im Schnittbereich der zwei Versagensbedingungen; die Menge der potentiell aktiven Mechanismen ist daher $\mathcal{A}_0 = \{1, 2\}$. Der differentiell benachbarte Spannungspunkt $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}$ liegt entweder in der Tangentialebene der Fläche 1, $\mathcal{A} = \{1\}$, der Fläche 2, $\mathcal{A} = \{2\}$, oder im Schnittbereich dieser beiden Flächen, $\mathcal{A} = \{1, 2\}$

\mathbf{s}_n .

Tritt ein plastischer Deformationsschritt auf, sind drei unterschiedliche Situationen möglich:

- a) nur Versagensbedingung 1 ist aktiv: es gilt $\mathcal{A} = \{1\}$; $d\mathbf{s}$ liegt in der Tangentialebene an die Funktion F_1 im Punkt \mathbf{s}_n .
 - b) nur Versagensbedingung 2 ist aktiv: es gilt $\mathcal{A} = \{2\}$; $d\mathbf{s}$ liegt in der Tangentialebene an die Funktion F_2 im Punkt \mathbf{s}_n .
 - c) Versagensbedingung 1 und 2 sind simultan aktiv und $\mathcal{A} = \{1,2\}$. Bei dieser vereinfachten schematischen Darstellung in der Ebene ist $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n$; $d\mathbf{s}$ liegt im Schnittbereich der Tangentialebenen von F_1 und F_2 im Punkt \mathbf{s}_n .
-

6.4 Plastischer Versagensmechanismus

Jeder der N Versagensbedingungen F_i ist ein eigener plastischer Versagensmechanismus $d\mathbf{e}_{pl,i}$ zugeordnet. Dieser gibt den differentiellen Zuwachs an plastischen Verzerrungen am aktuellen Grenzspannungszustand $\mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E}$ an. Bei simultaner Aktivierung mehrerer Versagensmechanismen, werden die zugehörigen plastischen Verzerrungszuwächse $d\mathbf{e}_{pl,i}$ addiert und ergeben in Summe den plastischen Gesamtverzerrungszuwachs $d\mathbf{e}_{pl}$. Bevor die Superposition mehrerer Mechanismen betrachtet wird, soll der einzelne plastische Versagensmechanismus untersucht werden.

6.4.1 Versagensmechanismus

Die Spannung \mathbf{s}_n liegt auf der elastischen Grenzfläche. Aus schreibökonomischen Gründen wird die Indizierung zur Unterscheidung verschiedener Versagensbedingungen und -mechanismen in diesem Abschnitt weggelassen, weil nur eine einzige Versagensbedingung betrachtet wird. Der differentielle Zuwachs an der Stelle \mathbf{s}_n wird in Form eines Produktes aus einer skalaren Betragsinformation und einem Vektor (einer Richtungsinformation) angegeben:

$$d\mathbf{e}_{pl} = d\lambda \mathbf{n}|_{\mathbf{s}_n} \quad \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E} \text{ und } d\lambda \geq 0 \quad (6-9)$$

Der plastische Multiplikator $d\lambda$ ist im Fall plastischer Verformungen größer als null. Damit ist festgelegt, dass die plastischen Verzerrungen nur in positiver \mathbf{n} -Richtung anwachsen können. Die Richtung \mathbf{n} gibt die Form des plastischen Versagensmechanismus an.

Im perfekt-plastischen Fall kommt es bei \mathbf{s}_n zu keinem Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$, wenn das eingepreßte Differential $d\mathbf{e}$ in Richtung von \mathbf{n} weist.

6.4.1.1 Plastischer Belastungsschritt

In Bild 6.2 ist ein differentieller plastischer Belastungsschritt dargestellt. Die Ausgangsspannungen \mathbf{s}_n erfüllen die Versagensbedingung. Ein differentieller Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}$ ist so vorgegeben, dass die Spannungen $\mathbf{s}_n + \mathbf{C} d\mathbf{e}$ außerhalb des elastischen Bereichs liegen. Der Spannungszuwachs wird mit

$$d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} d\mathbf{e} \quad (6-10)$$

bezeichnet; TR steht dabei für *TRial*. Außerdem folgt aus der Konsistenzbedingung (6-8), dass $d\mathbf{s}$ in der Tangentialebene der Versagensbedingung im Punkt \mathbf{s}_n liegen muss. Um diese Situation zu korrigieren, wird zusätzlich das plastische Verzerrungsdifferential $d\mathbf{e}_{pl}$ benötigt; abhängig von $d\mathbf{e}$ ändert sich dabei die betragsmäßige Länge $d\lambda$ von $d\mathbf{e}_{pl}$, nicht aber die Richtung \mathbf{n} .

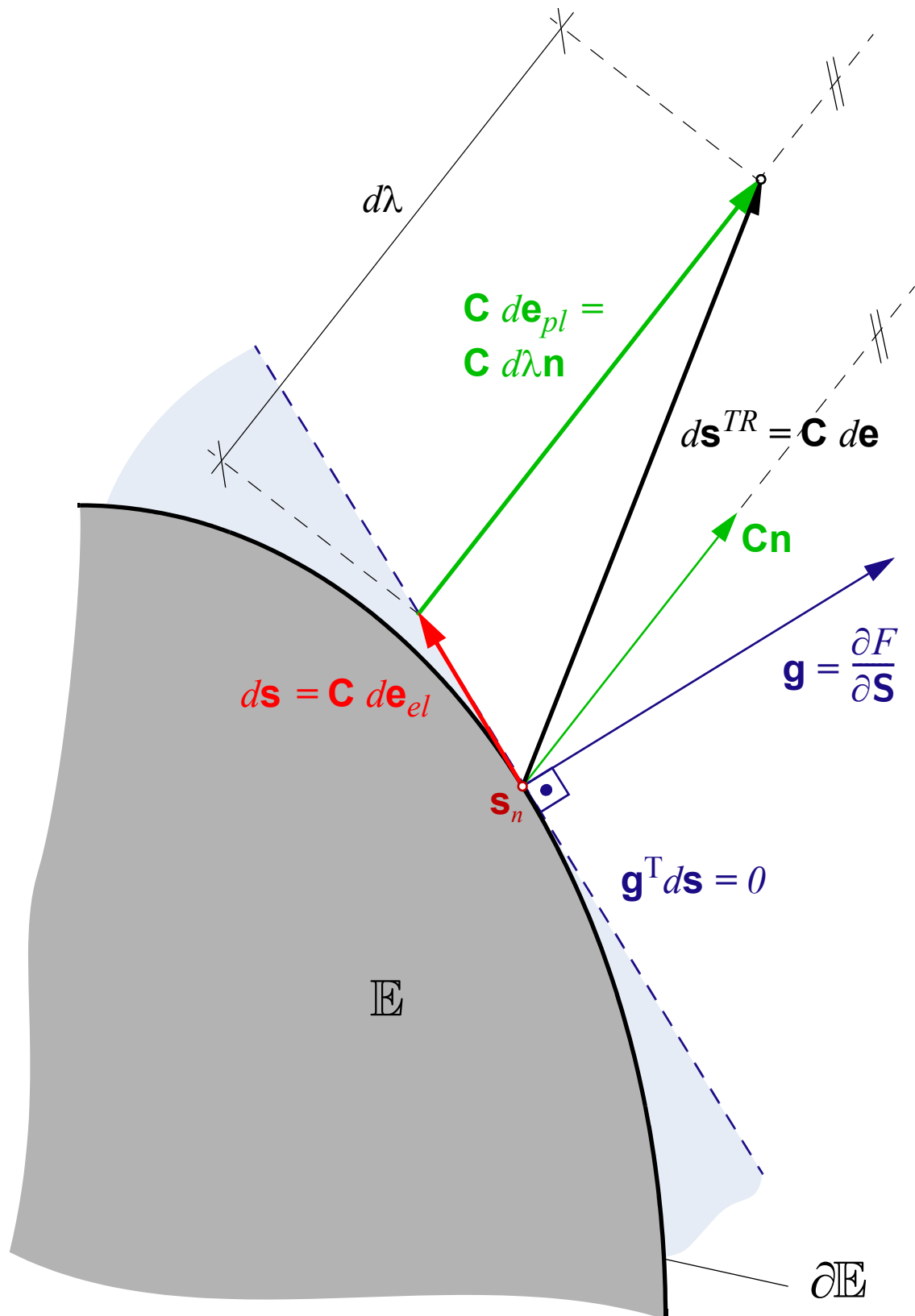


Bild 6.2 Plastischer Belastungsschritt im Spannungsraum; die mit der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} in den Spannungsraum projizierte Verzerrung $d\mathbf{e}$ minus der Spannungen $\mathbf{C} de_{pl}$ ergibt den Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$, der aufgrund der Konsistenzbedingung (6-8) in der Tangentialebene zur elastischen Grenzfläche liegt

$$d\mathbf{s} = \mathbf{C}(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}_{pl}) = \mathbf{C}(d\mathbf{e} - d\lambda\mathbf{n}) = d\mathbf{s}^{TR} - d\lambda\mathbf{Cn} \quad (6-11)$$

Durch Einsetzen von (6-11) in die Konsistenzbedingung (6-8) ergibt sich der Betrag des plastischen Multiplikators:

$$d\lambda = \frac{1}{\mathbf{g}^T \mathbf{Cn}} (\mathbf{g}^T \mathbf{C} d\mathbf{e}) \quad (6-12)$$

Der Gradient \mathbf{g} und der Vektor \mathbf{n} werden dazu an der Stelle \mathbf{s}_n berechnet. Kernbestandteil zur Beschreibung des plastischen Versagensmechanismus ist der Vektor \mathbf{n} . Dieser hängt vom aktuellen Spannungszustand \mathbf{s}_n ab und muss über Versuche bestimmt werden. Aus theoretischen Überlegungen heraus lässt sich aber bereits im Vorfeld zeigen, dass die Richtungsinformation \mathbf{n} nicht beliebig wählbar ist, sondern zwei Einschränkungen unterliegt.

6.4.1.2 Restriktion I für \mathbf{n}

Der Zähler in (6-12) ist im Fall eines plastischen Belastungsschrittes positiv bzw. null. Um $d\lambda \geq 0$ zu garantieren, muss \mathbf{n} so vorgegeben sein, dass der Nenner

$$\mathbf{g}^T \mathbf{Cn} > 0 \quad \forall \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E} \quad (6-13)$$

immer größer als null ist. Im Spannungsraum dargestellt, bedeutet das, dass auf jedem Punkt \mathbf{s}_n der betrachteten Versagensbedingung das Produkt \mathbf{Cn} mit der Flächennormalen \mathbf{g} einen Winkel kleiner als 90° einschließt (Bild 6.2).

6.4.1.3 Restriktion II für \mathbf{n}

Eine zweite Einschränkung der möglichen Orientierung des Vektors \mathbf{n} ergibt sich aus einer energetischen Betrachtung. Die plastische Arbeit (pro Volumeneinheit) dw_{pl} entspricht im perfekt plastischen Fall der Dissipation (pro Volumeneinheit) dD . Diese muss stets größer bzw. gleich null sein:

$$dw_{pl} = \mathbf{s}_n^T d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{s}_n^T d\lambda\mathbf{n} \geq 0 \quad \forall \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E} \quad (6-14)$$

Da bereits festgelegt wurde, dass $d\lambda$ stets positiv sein muss, ist nur noch das Produkt zwischen den Spannungen \mathbf{s}_n und \mathbf{n} in jedem Punkt der elastischen Grenzfläche zu betrachten; dieses soll immer positiv sein. Der Fall $\mathbf{s}_n^T \mathbf{n} = 0$ wird ausgeschlossen, da dabei keine plastische Arbeit verrichtet wird. In Bild 6.3 ist das Produkt \mathbf{Cn} im Spannungsraum dargestellt. Um die zweite Restriktion einzuzeichnen, ist \mathbf{s}_n mit der Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{D} zu multiplizieren, wobei $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}$ gilt.

$$\mathbf{s}_n^T \mathbf{n} = \mathbf{s}_n^T \mathbf{DCn} > 0 \quad \forall \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E} \quad (6-15)$$

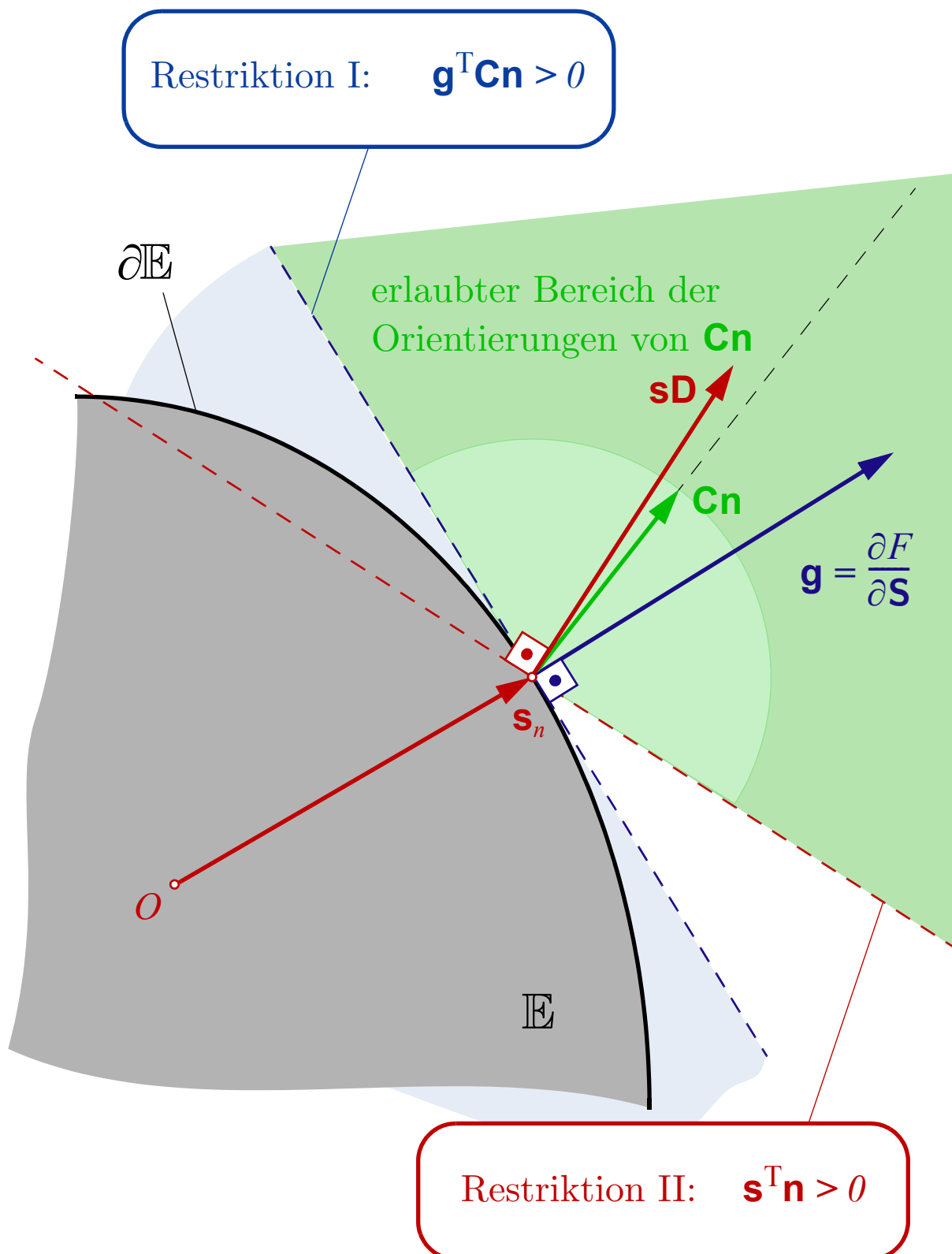


Bild 6.3 Restriktionen der Richtung des plastischen Versagensmechanismus \mathbf{n} im Spannungsraum; der Ortsvektor \mathbf{s}_n ist vom Koordinatenursprung O aus eingezeichnet.

6.4.1.4 Assoziierter plastischer Versagensmechanismus

Die Richtung \mathbf{n} in (6-9) wird teilweise als Ableitung einer skalaren Funktion $G(\mathbf{s})$, dem sogenannten plastischen Potential, nach den Spannungen \mathbf{s} angegeben. Trotzdem ist es nicht einfach eine Funktion G so zu wählen, dass die beiden angeführten Restriktionen an jedem(!) Punkt der Versagensbedingung eingehalten werden. Wird für die Funktion G die Versagensbedingung F selbst gewählt, spricht man von einem assoziierten plastischen Versagensmechanismus:

$$\mathbf{n}(\mathbf{s}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}) \quad (6-16)$$

Die Wahl von \mathbf{n} in Richtung des Gradienten von F erfüllt bei allen konvexen und stetig differenzierbaren Funktionen und einer positiv definiten Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} die Restriktion I (6-13) und II (6-15).

Beweis 1:

Da die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} der angegebenen linear-elastischen Materialgesetze positiv definit ist, wird Restriktion I nie verletzt.

Beweis 2:

Um zu beweisen, dass Restriktion II bei einem assoziierten plastischen Versagensmechanismus immer eingehalten wird, muss auf die funktionellen Anforderungen an die Versagensbedingungen aus Kap. 3.2 zurückgegriffen werden. Es gilt:

- F ist konvex und mindestens zweimal nach \mathbf{s} stetig differenzierbar,
- der Spannungsnullpunkt $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ liegt innerhalb von \mathbb{E} und die Versagensbedingung ist dort immer negativ und
- der Spannungspunkt $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$ liegt auf der elastischen Grenzfläche.

Aus der Definition der Konvexität einer mindestens einmal differenzierbaren Funktion bei Vorgabe der Spannungen \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_0 (die beide Elemente der konvexen Menge \mathbb{E} sind), ergibt sich:

$$F(\mathbf{s}_1) - F(\mathbf{s}_0) \leq \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}_1} \right)^T (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \quad (6-17)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} \in \partial \mathbb{E}, \quad F(\mathbf{s}_1) = 0$$

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{E}, \quad F(\mathbf{s}_0) < 0$$

Diese Gleichungen lassen sich vereinfachen und es folgt der Beweis, dass Restriktion II bei Einhaltung der Funktionsanforderungen aus Kap. 3.2 und einem assoziierten Versagensmechanismus immer erfüllt wird:

$$0 < -F(\mathbf{s}_0) \leq \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}_1} \right)^T \mathbf{s}_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s}_1^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}_1} = \mathbf{s}_1^T \mathbf{g}|_{\mathbf{s}_1} > 0, \forall \mathbf{s}_1 \in \partial \mathbb{E} \quad (6-18)$$

In dieser Arbeit werden nur assoziierte plastische Verformungsmechanismen verwendet, obwohl sich in Versuchen und anhand einfacher Beispiele, z.B. das elementare Reibungsblockbeispiel von Mandel (1966), auch das Auftreten von nicht-assozierten plastischen Versagensmechanismen zeigen lässt.

6.4.2 Plastischer Gesamtverzerrungszuwachs

Jeder der N Versagensbedingungen F_i ist ein assoziierter plastischer Versagensmechanismus $d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \mathbf{g}_i$ zugeordnet, der sich unabhängig von allen Anderen ausbilden kann. Liegt der Spannungspunkt im Schnittbereich mehrerer Versagensbedingungen, können diese gleichzeitig/simultan aktiv sein. Im Fall kleiner Verzerrungen setzt sich die plastische Gesamtverzerrung $d\mathbf{e}_{pl}$ additiv aus den einzelnen plastischen Verzerrungszuwächsen der aktuell aktiven plastischen Mechanismen zusammen:

$$d\mathbf{e}_{pl} = \sum_{i \in \mathcal{A}} d\mathbf{e}_{pl,i} = \sum_{i \in \mathcal{A}} d\lambda^i \mathbf{g}_i = \mathbf{G}_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \quad (6-19)$$

Für eine kompakte Schreibweise der Summe wird der einspaltige Vektor $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}$ eingeführt; die Zeilenanzahl hängt von den aktiven Versagensbedingungen ab. Werden \mathbf{G} und $d\boldsymbol{\lambda}$ ohne Index \mathcal{A} geschrieben, hat man alle N Vektoren \mathbf{g}_i und alle N plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ in einer $(6,N)$ bzw. $(N,1)$ -Matrix zusammengefasst:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N], \quad d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \\ \vdots \\ d\lambda^N \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

6.5 Be- und Entlastungsbedingungen

Durch Angabe des aktuellen Spannungszustandes \mathbf{s}_n und durch Vorgabe der Verzerrungen $d\mathbf{e}$ ist beurteilbar, ob ein rein elastisches ($d\mathbf{e} = d\mathbf{e}_{el}$) Verzerrungszuwachs auftritt oder sich zusätzlich ein plastischer Verzerrungsanteil ($d\mathbf{e} = d\mathbf{e}_{el} + d\mathbf{e}_{pl}$) ausbildet. Bei vorläufiger Annahme von rein elastischem Materialverhalten wird das $d\mathbf{s}^{TR}$ (6-10) berechnet. Es lassen sich drei Belastungssituationen unterscheiden.

6.5.1 Situation A: elastischer Belastungsschritt

Liegen die Spannungen \mathbf{s}_n nicht auf der elastischen Grenzfläche treten bei differentieller Änderung der Verzerrungen keine plastischen Verzerrungszuwächse auf (Bild 6.4); alle plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ sind null. Der Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$ entspricht dem Spannungszuwachs $d\mathbf{s}^{TR}$ aus Gleichung (6-10):

$$\mathbf{s}_n \notin \partial\mathbb{E}, \mathcal{A}_0 = \{ \} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{0}, d\lambda^i = 0 \text{ für } \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \mathcal{A} = \{ \} \\ d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} d\mathbf{e} \end{cases} \quad (6-21)$$

6.5.2 Situation B: elastische Entlastung und neutrale Belastung

Die Spannungen \mathbf{s}_n liegen auf der elastischen Grenzfläche $\partial\mathbb{E}$. Ob differentielle plastische Verzerrungsanteile auftreten, hängt von der Richtung von $d\mathbf{s}^{TR}$ ab (Bild 6.4); weist diese in den elastischen Bereich, hat man elastische Entlastung. Liegt $d\mathbf{s}^{TR}$ bei mehreren potentiell aktiven Versagensmechanismen in einer Tangentialebene oder im Schnittbereich mehrerer Tangentialebenen, hat man eine neutrale Belastungssituation.

Mit dem Skalarprodukt $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}^{TR}$ lässt sich beurteilen, ob diese Situationen auftreten. Ist dieses für alle $i \in \mathcal{A}_0$ kleiner als null, hat man eine elastische Entlastung; ist das Produkt für alle $i \in \mathcal{A}_0$ kleiner oder gleich null, hat man eine neutrale Belastung. Bei beiden Belastungssituationen treten keine plastischen Verzerrungen auf und alle plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ sind daher null. Die Menge \mathcal{A} ist im Fall neutraler Belastung keine leere Menge:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E}, \mathcal{A}_0 \neq \{ \} \\ \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}^{TR} \leq 0 \text{ für } \forall i \in \mathcal{A}_0 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{0}, d\lambda^i = 0 \text{ für } \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \\ d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} d\mathbf{e} \end{cases} \quad (6-22)$$

6.5.3 Situation C: plastischer Belastungsschritt

Die Ausgangssituation ist dieselbe wie bei Fall B (Bild 6.5). Die differentielle Spannung $d\mathbf{s}^{TR}$ weist von der elastischen Grenzfläche nach außen. Die Spannungen dürfen aber den elastischen Bereich nie verlassen, deshalb muss der differentielle Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$ in der Tangentialebene bzw. im Schnitt der Tangentialebenen an die elastische Grenzfläche

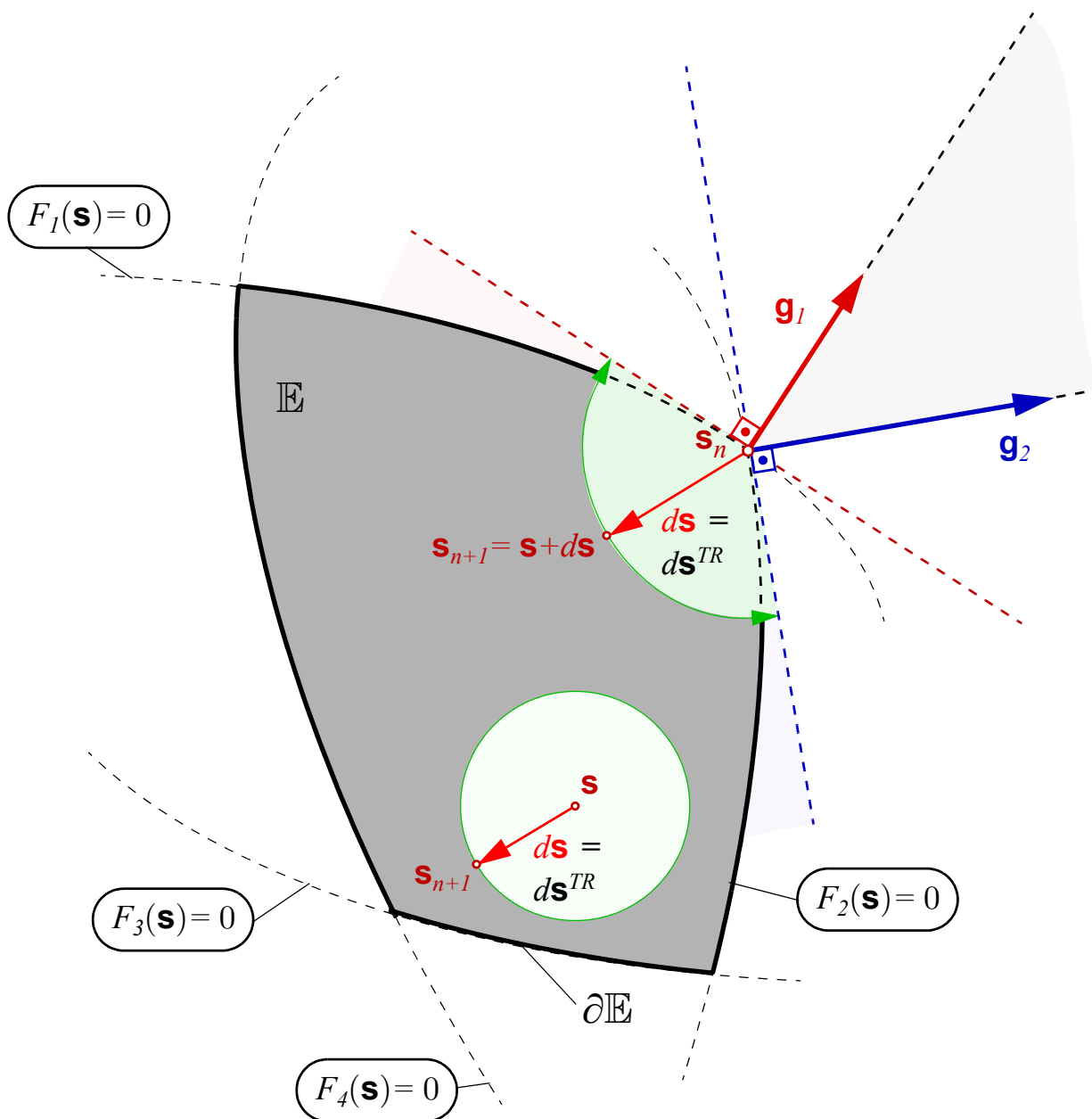


Bild 6.4 Situation A „elastischer Belastungsschritt“ und Situation B „elastisches Entlastung und neutrale Belastung“; in beiden Situationen gibt es keinen Zuwachs an plastischen Verzerrungen

liegen. Es treten plastische Verzerrungszuwächse auf:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E}, \mathcal{A}_0 \neq \{ \} \\ \mathbf{g}_i^\top d\mathbf{s}^{TR} > 0 \text{ für mind. ein } i \in \mathcal{A}_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\lambda^i \geq 0 \text{ für } \forall i \in \mathcal{A} \\ d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{A}}d\lambda_{\mathcal{A}}, \text{ mit } (\mathbf{G}_{\mathcal{A}})^\top d\mathbf{s} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6-23)$$

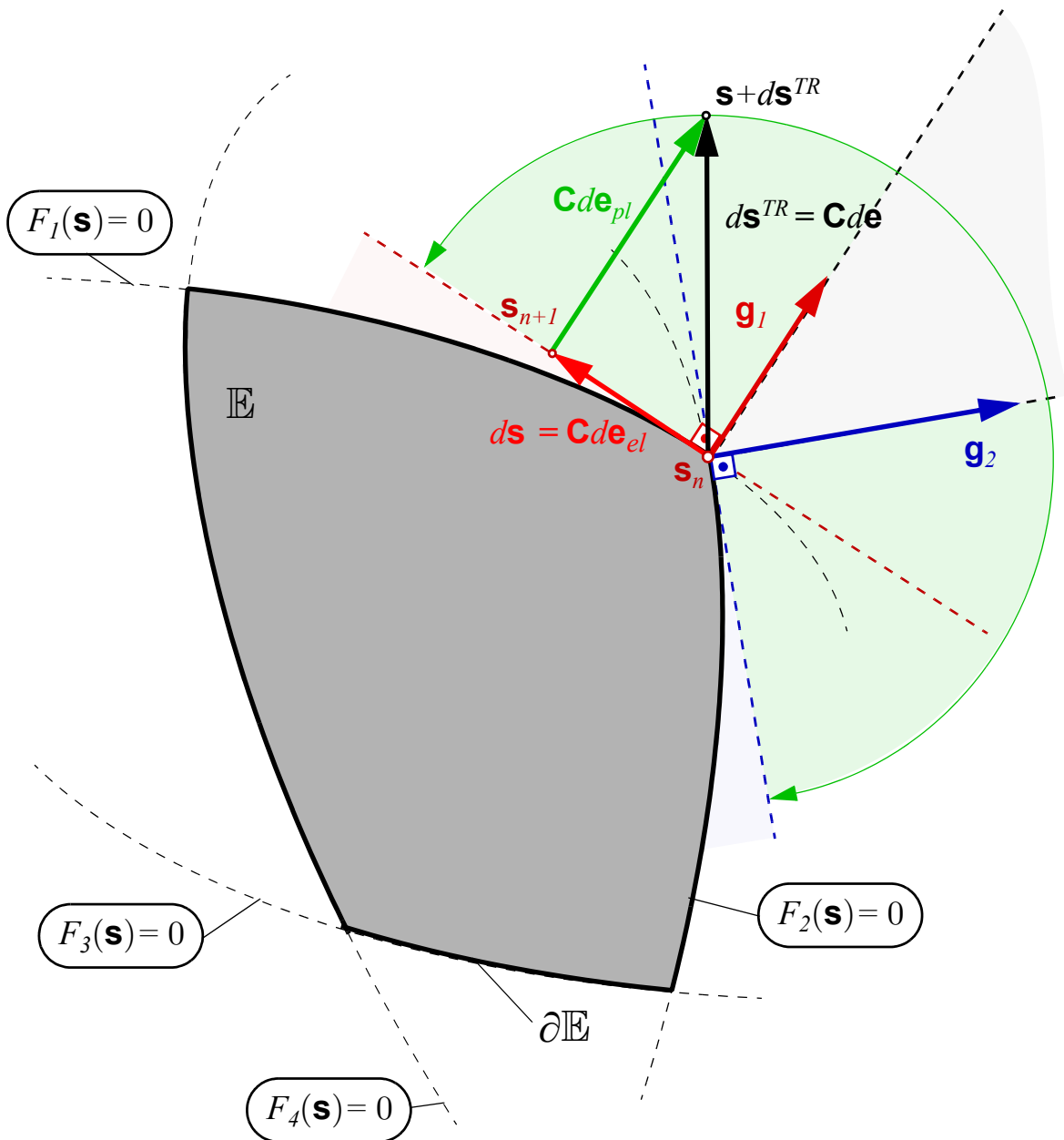
(für die Graphik gilt $\mathbf{C}=\mathbf{J}$!)

Bild 6.5 Situation C: plastischer Belastungsschritt: die potentiell aktiven Mechanismen sind $\mathcal{A}_0=\{1,2\}$. Durch den eingprägten Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}$ ist schlussendlich nur Mechanismus 1 aktiv, d.h. $\mathcal{A}=\{1\}$. zur Vereinfachung der Darstellung wurde $\mathbf{C}=\mathbf{J}$ gewählt

6.5.4 Elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix

Bei Kenntnis der aktiven Versagensmechanismen lässt sich der Vektor mit den plastischen Multiplikatoren aus der Konsistenzbedingung (6-8) und dem linear-elastischen Materialgesetz berechnen:

$$d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \left[(\mathbf{G}_{\mathcal{A}})^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A}} \right]^{-1} (\mathbf{G}_{\mathcal{A}})^T \mathbf{C} d\mathbf{e} \quad d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \geq \mathbf{0} \quad (6-24)$$

Mit der positiven Definitheit von \mathbf{C} und der Gramschen Matrix lässt sich zeigen, dass das Matrixprodukt $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}$ positiv definit bzw. positiv semidefinit ist. Positive Definitheit ist garantiert, wenn die Vektoren \mathbf{g}_i , aus denen $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}$ aufgebaut ist, linear unabhängig sind. Mit der positiven Definitheit lässt sich das Matrixprodukt auch - wie bereits in (6-24) angegeben - invertieren. Vorerst soll nur der Fall linear unabhängiger \mathbf{g}_i betrachtet werden. Sind die Vektoren \mathbf{g}_i voneinander linear abhängig, ist $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}$ nicht mehr regulär invertierbar. Wann solche Situationen auftreten und wie in diesen Fällen vorzugehen ist, wird in Kap. 6.8 im Detail behandelt.

Durch Rückeinsetzen von (6-24) in (6-23) ergibt sich die elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A}} (\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A}})^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T \mathbf{C} \quad (6-25)$$

6.5.5 Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

Ob ein plastischer Belastungsschritt auftritt oder nicht, die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen (ein Begriff aus der mathematischen Optimierung)

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{s}) \\ F_2(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ F_N(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \\ \vdots \\ d\lambda^N \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad F_i d\lambda^i = 0 \quad (6-26)$$

müssen immer und für jeden Spannungszustand \mathbf{s} erfüllt sein. Das ist durch Betrachtung der Belastungssituationen A bis C und der zugehörigen Gleichungen (6-21) bis (6-23) unmittelbar einsichtig. Für die dritte Gleichung in (6-26) ist zu beachten, dass die Summationskonvention nicht gilt! Außerdem lässt sich aus den Gleichungen (6-21) bis (6-23) bzw. aus (6-26) ein Zusammenhang zwischen der Konsistenzbedingung (6-8) und den differentiellen plastischen Multiplikatoren ablesen. Die Bedingungen (6-26) müssen für jeden Spannungszustand gelten, z.B. für \mathbf{s}_n und \mathbf{s}_{n+1} . Damit beinhalten die KKT-Bedingungen die Be- und Entlastungsbedingungen (6-30) und die Konsistenzbedingung (6-31).

6.6 Zusammenfassung der Grundgleichungen & Äquivalentes Optimierungsproblem

Additive Aufteilung der Verzerrungen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{el} + \mathbf{e}_{pl} \quad (6-27)$$

Linear-elastisches Materialgesetz:

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\mathbf{e}_{el} = \mathbf{C}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_{pl}) \quad (6-28)$$

Assoziierter Versagensmechanismus:

$$d\mathbf{e}_{pl} = \sum_{i=1}^N d\mathbf{e}_{pl,i} = \sum_{i=1}^N d\lambda^i \mathbf{g}_i = \mathbf{G} d\boldsymbol{\lambda}$$

mit $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N]$, $d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \\ \vdots \\ d\lambda^N \end{bmatrix}$ (6-29)

Be- und Entlastungsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{s}_n) &\leq \mathbf{0} \\ d\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ F_i(\mathbf{s}_n) d\lambda^i &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{s}) \\ F_2(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ F_N(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \quad (6-30)$$

Konsistenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}) &= \mathbf{f}(\mathbf{s}_n) + [\mathbf{G}(\mathbf{s}_n)]^T d\mathbf{s} \leq \mathbf{0} \\ d\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ F_i(\mathbf{s}_{n+1}) d\lambda^i &= [F_i(\mathbf{s}_{n+1}) + \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}] d\lambda^i = 0 \end{aligned} \quad (6-31)$$

Box 6.1 Grundgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität

Nur bei den aktiven Mechanismen ist $d\lambda^i \geq 0$; bei allen anderen ist $d\lambda^i$ null. Aus diesem Grund kann $d\mathbf{e}_{pl}$ als Summe aller N $d\mathbf{e}_{pl,i}$ dargestellt werden. Da bei allen inaktiven Versagensmechanismen die plastischen Multiplikatoren null sind, ist Gleichung (6-29) gleichbedeutend mit (6-19). Ob es bei überhaupt zu einem Zuwachs in den plastischen Verzerrungen kommt und welche der Versagensmechanismen aktiv sind, wird in beiden Fällen mithilfe der Belastungsbedingungen und der Konsistenzbedingungen bestimmt.

6.6.1 Darstellung der Grundgleichungen durch ein äquivalentes konvexes Optimierungsproblem

Es lässt sich zeigen, dass die Lösung der Grundgleichungen aus Box 6.1 der Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe entspricht. Die Gleichungen des konvexen Optimierungsproblems finden sich in Kap. 9.2. Die dort allgemein angeschriebenen Größen lassen sich den mechanischen Größen zuweisen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{s} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s} & \mathbf{D} &\leftarrow \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{x}_A &\leftarrow \mathbf{s}^{TR} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}^{TR} & \lambda^i &\leftarrow d\lambda^i \\ \mathbf{x}^* &\leftarrow \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^* = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (6-32)$$

6.6.1.1 Zielfunktion

Die Zielfunktion

$$\mathcal{d} = \frac{1}{2} (d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s})^T \mathbf{D} (d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s}) \quad (6-33)$$

lässt sich lt. Kap. 9.2.2 geometrisch interpretieren und als allgemeine Abstandsfunktion bezeichnen. Da \mathbf{D} positiv definit ist, ist die Funktion \mathcal{d} strikt konvex.

6.6.1.2 Zwangsgleichungen

Die zu erfüllenden bzw. einzuhaltenden Zwangsgleichungen sind die Versagensbedingungen F_i . Es muss $F_i \leq 0$ gelten und die gesuchte Lösung $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}_{n+1}$ muss im erlaubten Bereich \mathbb{E} liegen. Da alle Versagensbedingungen konvex sind, ist auch der erlaubte Bereich \mathbb{E} konvex.

6.6.1.3 Optimierungsaufgabe - Minimalabstandsaufgabe

Mit der Zielfunktion \mathcal{d} und den einzuhaltenden Zwangsgleichungen, lässt sich eine konvexe Optimierungsaufgabe (Box 6.2) formulieren. Geometrisch lässt sich diese Aufgabe als allgemeine Minimalabstandsaufgabe deuten (siehe Bild 6.6 und Kap. 9.2).

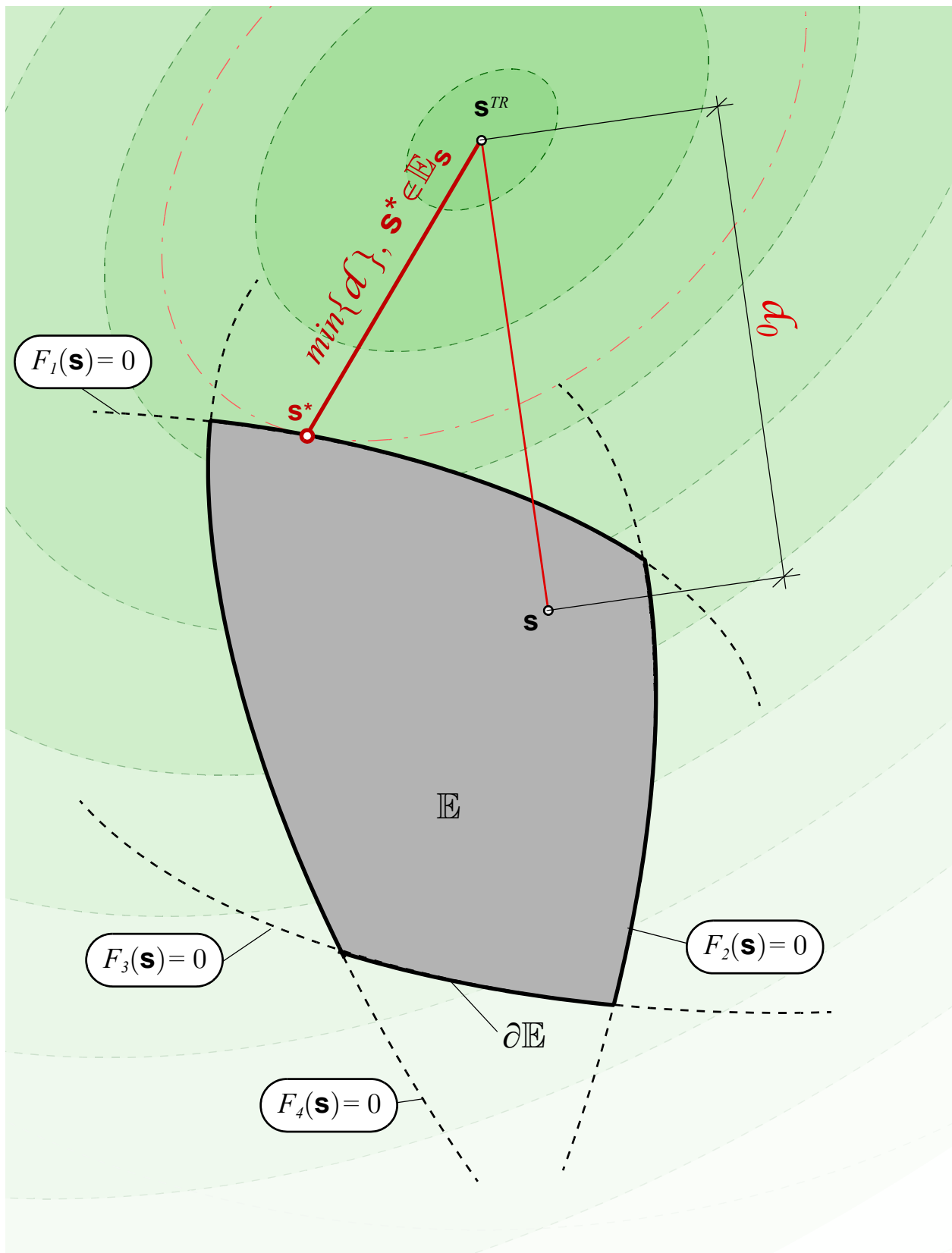


Bild 6.6 Illustration der Minimalabstandsaufgabe; die Höhengschichtenlinien der strikt konvexen Abstandsfunktion d bilden konzentrische Ellipsen, alle Funktionen F_i sind stetig differenzierbar und konvex.

Minimalabstandsaufgabe

$$\mathcal{d}(\mathbf{s}^*) = \min\{\mathcal{d}(\mathbf{s})\} = \min\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s})^T \mathbf{D}(\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s})\right\} \quad (6-34)$$

wobei

$$F_i(\mathbf{s}) \leq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Box 6.2 Optimierungsaufgabe

6.6.1.4 Minimumpunkt - Lösung der Optimierungsaufgabe

Die gesuchte Lösung $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}_{n+1}$ der Optimierungsaufgabe ist ein Minimumpunkt und erfüllt die Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{G}d\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{D}(\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s}) + \mathbf{G}d\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{D}(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s}) + \mathbf{G}d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6-35)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) \leq 0$$

$$d\boldsymbol{\lambda} \geq 0$$

$$d\lambda^i F_i(\mathbf{s}) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

6.6.1.5 Äquivalenznachweis

Mit $d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C}d\mathbf{e}$, der additiven Aufteilung der Verzerrung (6-27) und dem elastischen Materialgesetz (6-28), sowie $d\mathbf{s} = \mathbf{C}d\mathbf{e}_{el}$, lässt sich die erste Gleichung aus (6-35) umformulieren:

$$-\mathbf{D}(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s}) + \mathbf{G}d\boldsymbol{\lambda} = -d\mathbf{e}_{pl} + \mathbf{G}d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6-36)$$

Diese beschreibt den plastischen Versagensmechanismus aus (6-29). Die KKT-Bedingungen lassen sich nach Kap. 6.5.5 in die Gleichungen (6-31) umformulieren. Damit ist gezeigt, dass die Lösung (das gesuchte Minimum) der Optimierungsaufgabe aus Box 6.2 auch die Grundgleichungen aus Box 6.1 erfüllt.

Die Optimierungsaufgabe besitzt aufgrund der Konvexität der Zwangsgleichung und der strikten Konvexität der Zielfunktion \mathcal{d} ein einziges (globales) Minimum und damit eine eindeutige Lösung. Dieses Erkenntnis lässt sich rückwirkend auf die Lösung der Grundgleichungen der Plastizität übertragen: auch diese Gleichungen haben aufgrund der festgelegten Konvexitätseigenschaften eine einzige Lösung $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}_{n+1}$.

6.6.1.6 Prinzip der maximalen plastischen Arbeit

Der gesuchten Lösung und der übergeordneten Minimierungsaufgabe kann noch eine andere Interpretation gegeben werden. Als Zielfunktion einer Minimierungsaufgabe wird die plastische Arbeit bzw. Dissipation verwendet:

$$dD(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl} \quad (6-37)$$

Das Minimum der negativen plastischen Arbeit entspricht dem Maximum der plastischen Dissipation. Die Optimierungsaufgabe, das Prinzip der maximalen plastischen Arbeit oder das Prinzip der maximalen Dissipation, lautet:

$$dD(\mathbf{s}^*) = \max\{dD\} = \min\{-dD\} = \min\{-\mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl}\} \quad (6-38)$$

wobei

$$F_i(\mathbf{s}) \leq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Die Minimumbedingungen dieser Optimierungsaufgabe entsprechen Gleichung (6-35) mit Gleichung (6-36) in die erste Gleichung rückeingesetzt, d.h., die Grundgleichungen aus Box 6.1 lassen sich auch durch das elastische Materialgesetz, die additive Aufteilung der Verzerrungen und das Prinzip der maximalen plastischen Arbeit angeben.

Mit der Idee der maximalen plastischen Arbeit formuliert man eine attraktive physikalische Vorstellung, dass das Material im Fall eines plastischen Verformungsvorgangs den „Weg des geringsten Widerstandes“ wählt, oder wie Ulm/Coussy (2003) es formulieren: das *principle of noneconomy of matter*. Damit ist gemeint, dass von dem aufgebrauchten Arbeitsdifferential möglichst wenig als elastische Verzerrungsenergie im RME gespeichert bzw. der größtmögliche Anteil dissipiert wird. Mit dieser Vorstellung lässt sich auch die Wahl eines assoziierten Versagensmechanismus untermauern. Man kann aber auch in die entgegengesetzte Richtung argumentieren: Sobald die Versagensbedingungen konvex und ein assoziierter plastischer Versagensmechanismus angenommen wird, gilt das Prinzip der maximalen Dissipation.

Herauszustreichen ist, dass es sich beim „Prinzip“ der maximalen Dissipation nicht um ein physikalisches Gesetz handelt, sondern um eine mechanische Idealvorstellung, da das Auftreten eines nicht-assozierten plastischen Versagensmechanismus physikalisch nicht auszuschließen ist, siehe z.B. Mandel (1966).

6.6.1.7 Optimierungsaufgabe im Differentiellen

Gegeben ist ein Spannungszustand $\mathbf{s}_n \in \mathbb{E}$ und $d\mathbf{e}$. Die gesuchte Lösung der Grundgleichungen aus Box 6.1 bzw. der Optimierungsaufgabe (6-34) ist $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}$ und liegt demnach in der differentiellen Umgebung von \mathbf{s}_n . Bevor \mathbf{s}_{n+1} berechnet wird, lassen sich abhängig von \mathbf{s}_n zwei Ausgangssituationen unterscheiden:

Situation 1: $\mathbf{s}_n \notin \partial\mathbb{E}$

Es ergibt sich die triviale Lösung, dass $d\mathbf{s}$ mit $d\mathbf{s}^{TR}$ zusammenfällt und der Abstand \mathcal{d} mit null ein Minimum erreicht:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_n) \leq \mathbf{0} \text{ bzw. } \mathcal{A}_0 = \{ \}: \quad \min\{\mathcal{d}\} = 0, \quad d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{TR} \quad (6-39)$$

Situation 2: $\mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E}$

Der Spannungspunkt \mathbf{s}_n liegt auf der elastischen Grenzfläche und dabei auf mehreren Teilflächen $F_i(\mathbf{s}_n) = 0$. Die Indizes i dieser Versagensbedingungen sind in der Menge \mathcal{A}_0 zusammengefasst. Da $d\mathbf{s}^{TR}$ einen differentiellen Zuwachs bezeichnet, liegt der Lösungspunkt $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}_{n+1}$ in der differentiellen Umgebung des Punktes \mathbf{s}_n . Deshalb ist es bei der Minimalabstandsberechnung nur notwendig die differentielle Umgebung von \mathbb{E} am Punkt \mathbf{s}_n zu betrachten. Diese wird durch die Tangentialebenen an die potentiell aktiven Versagensbedingungen im Punkt \mathbf{s}_n beschrieben. Der Lösungspunkt $\mathbf{s} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}$ muss innerhalb des Bereichs, der von den Tangentialebenen abgegrenzt wird, liegen. Es gilt:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) = \underbrace{\mathbf{f}_{\mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_n)}_{=\mathbf{0}} + (\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0})^T d\mathbf{s} = (\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0})^T d\mathbf{s} \leq \mathbf{0} \quad (6-40)$$

Mit der Vorbedingung, dass \mathbf{s}_n auf der elastischen Grenzfläche liegt und \mathcal{A}_0 damit keine leere Menge ist, wird die Optimierungsaufgabe (6-34) mit der allgemeinen Abstandsfunktion (6-33) unter Berücksichtigung der linearisierten Zwangsbedingung (6-40), die in der differentiellen Umgebung von \mathbf{s}_n gelten, modifiziert:

Minimalabstandsaufgabe: $\mathbf{f}_{\mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_n) = \mathbf{0}$ bzw. $\mathcal{A}_0 \neq \{ \}$

geg.: $\mathcal{A}_0 \neq \{ \}$ mit $\mathbf{f}_{\mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_n) = \mathbf{0}$, $d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} d\mathbf{e}$

ges.: $\min\{\mathcal{d}\} = \min\left\{\frac{1}{2}(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s})^T \mathbf{D} (d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s})\right\} \quad (6-41)$

wobei $(\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0})^T d\mathbf{s} \leq \mathbf{0}$

Box 6.3 Optimierungsaufgabe im Differentiellen

Aufgrund der Betrachtung der differentiellen Umgebung sind in der modifizierten Optimierungsaufgabe (Box 6.3) die Zwangsungleichungen linear in der gesuchten Größe $d\mathbf{s}$. Die Zielfunktion ist quadratisch in $d\mathbf{s}$. Damit ist die Optimierungsaufgabe aus Box 6.3 eine *quadratic programming* (kurz: QP) Aufgabe.

Die Lösung $d\mathbf{s}$ dieser Optimierungsaufgabe erfüllt die in Gleichung (6-41) angegebenen notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{D} \left(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s} \right) + \mathbf{G}_{\mathcal{A}_0} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}_0} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{f}_{\mathcal{A}_0} (\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) &= \left(\mathbf{G}_{\mathcal{A}_0} \right)^T d\mathbf{s} \leq 0 \\
d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}_0} &\geq 0 \\
d\lambda^i F_i (\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) &= d\lambda^i \left(\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} \right) = 0 \quad i \in \mathcal{A}_0
\end{aligned} \tag{6-42}$$

oder in alternativer Form

$$\begin{aligned}
-\mathbf{D} \left(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s} \right) + \mathbf{G}_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{f}_{\mathcal{A}} (\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) &= \left(\mathbf{G}_{\mathcal{A}} \right)^T d\mathbf{s} = \mathbf{0} \\
d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} &\geq \mathbf{0} \\
F_i (\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}) &= \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} < 0 \quad i \in \mathcal{A}_0, i \notin \mathcal{A} \\
d\lambda^i &= 0 \quad i \in \mathcal{A}_0, i \notin \mathcal{A}
\end{aligned} \tag{6-43}$$

In Bild 6.7 liegt \mathbf{s}_n im Schnitt der Versagensbedingungen 1 und 2. Der durch Gleichung (6-41) abgegrenzte Bereich ist dunkelblau eingezeichnet und wird durch die beiden Tangentialebenen an die Versagensbedingungen 1 und 2 im Punkt \mathbf{s}_n beschrieben. Für die Darstellung wurde $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{J}$ gewählt.

6.7 Berechnung eines aktiven Sets

6.7.1 Aufgabenstellung

Gegeben:

- Der anfängliche Spannungszustand \mathbf{s}_n liegt auf der elastischen Grenzfläche.
- Die Indizes der potentiell aktiven plastischen Versagensmechanismen sind in der Menge \mathcal{A}_0 (6-4) zusammengefasst.
- Es wird ein differentieller Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}$ aufgebracht und $d\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} d\mathbf{e}$ berechnet, wobei $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}^{TR}$ für mindestens ein i von \mathcal{A}_0 größer als null ist (Situation C, Kap. 6.5.3.)

Gesucht:

- Der Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$
- Das plastische Verzerrungsdifferential $d\mathbf{e}_{pl}$ und die Anteile $d\mathbf{e}_{pl,i}$ der einzelnen plastischen Versagensmechanismen

Diese Größen müssen die Gleichungen (6-42) bzw. (6-43) oder - was äquivalent ist - die Optimierungsaufgabe aus Box 6.3 erfüllen. Wie bereits in Gleichung (6-24) gesehen, müssen zur Berechnung der plastischen Multiplikatoren $d\lambda_{\mathcal{A}}$ die aktiven Versagensbedingungen bekannt sein. Dabei dienen aber eben diese Größen auch dazu, die aktiven plastischen Versagensmechanismen zu bestimmen.

Die Hauptaufgabe ist die Bestimmung der Menge \mathcal{A} der aktiven plastischen Versagensmechanismen.

Ist diese bekannt, ist der differentielle Spannungszuwachs $d\mathbf{s}$ und der Zuwachs an plastischen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{pl}$ berechenbar.

Wie lassen sich die aktiven Mechanismen systematisch bestimmen? Eine Möglichkeit wäre alle Kombination der potentiell aktiven plastischen Versagensmechanismen \mathcal{A}_0 zu probieren, bis alle Gleichungen (6-43) erfüllt sind oder \mathcal{A} aus (6-41) ein Minimum ist. Enthält die Menge \mathcal{A}_0 q Elemente, sind $(2^q - 1)$ Kombinationen möglich. Im Fall von $q = 6$ sich schneidenden Flächen wären 63 Kombinationen zu berechnen. Dieses Vorgehen mit Trial-and-Error Charakter führt zwar zum Ziel, ist aber nicht sonderlich ökonomisch.

Da in Kap. 6.6.1.7 gezeigt werden konnte, dass die gestellte mechanische Aufgabe einer konvexen QP-Aufgabe entspricht, können Standardverfahren zur Lösung dieser Art von Optimierungsaufgaben eingesetzt werden.

6.7.2 Lösung mit der Active-Set-Methode

Um systematisch die eindeutige Lösung der QP-Aufgabe zu bestimmen, wird hier die so-

genannte *Active-Set-Methode* verwendet. Dabei handelt es sich um ein Standardverfahren der quadratischen Programmierung. Details zu dieser Methode findet man in den Büchern von Fletcher (1987) oder Luenberger/Ye (2008).

Grob lässt sich das Verfahren wie folgt skizzieren: Es wird eine Menge (ein Set) von Zwangsungleichungen als Zwangsgleichungen festgelegt bzw. aktiv gesetzt. Dieses aktuell aktive Set wird auch als *working Set* bezeichnet und wird hier abgekürzt mit \mathcal{W} geschrieben. Mit diesem fixen Set \mathcal{W} von Zwangsgleichungen wird die Minimalabstandsaufgabe gelöst. Verletzt die berechnete Lösung eine der Gleichungen in (6-43), werden die zugehörigen Indizes der Zwangsgleichungen aus dem Set \mathcal{W} gestrichen oder um diese Indizes erweitert; das Set \mathcal{W} wird modifiziert. Mit diesem neuen, aktualisierten working Set \mathcal{W} wird wiederum der Minimalabstand berechnet und die Erfüllung aller Gleichungen wird kontrolliert. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis alle Gleichungen in (6-43) erfüllt sind. Der Beweis für die Konvergenz dieses Verfahrens ist z.B. in Luenberger/Ye (2008) angeführt.

Zuerst wird die Minimalabstandsrechnung auf ein fix vorgegebenes Set dargestellt. Dieser Rechenschritt wird als Grundaufgabe bezeichnet. Anschließend wird das Set \mathcal{W} systematisch verändert. Der komplette Berechnungsablauf ist in Box 6.4 dargestellt. Das Active-Set-Verfahren kommt noch einmal in Kap. 9.3 dieser Arbeit vor.

6.7.2.1 Grundaufgabe - Minimalabstand auf ein fix vorgegebenes Set \mathcal{W}

Gegeben ist eine Teilmenge \mathcal{W} der potentiell aktiven Versagensmechanismen des Sets \mathcal{A}_0 und $d\mathbf{e}$ bzw. $d\mathbf{s}^{TR}$, wobei $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}^{TR}$ für mindestens ein i von \mathcal{A}_0 größer als null ist.

Gesucht wird der Minimalabstand \mathcal{d} (6-33) auf den Schnittbereich der Versagensbedingungen $F_i = 0$ mit $i \in \mathcal{W}$.

$$\min\{\mathcal{d}\} = \min\left\{\frac{1}{2}(d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s})^T \mathbf{D} (d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s})\right\} \quad (6-44)$$

$$\text{wobei } (\mathbf{G}_{\mathcal{W}})^T d\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \mathbf{G}_{\mathcal{W}} = [\mathbf{g}_i]_{i \in \mathcal{W}}$$

Die Lagrange Funktion mit den Lagrange'schen Multiplikatoren $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}$ lautet:

$$\mathcal{L}(d\mathbf{s}, d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}) = \mathcal{d} + (d\mathbf{s})^T \mathbf{G}_{\mathcal{W}} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} \quad (6-45)$$

Das Minimum der Lagrange Funktion ist die Lösung der Minimalabstandsaufgabe. Durch Ableitung nach den Unbekannten $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}$ und $d\mathbf{s}$, ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\mathbf{s})} &= -\mathbf{D} (d\mathbf{s}^{TR} - d\mathbf{s}) + \mathbf{G}_{\mathcal{W}} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}})} &= (\mathbf{G}_{\mathcal{W}})^T d\mathbf{s} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}_{\mathcal{W}} \\ (\mathbf{G}_{\mathcal{W}})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{s} \\ d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6-46)$$

Die Matrix in (6-46) ist mit der Matrixidentität aus Anhang I invertierbar und ergibt die gesuchten Größen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= \left[\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{W}} (\mathbf{G}_{\mathcal{W}}^T \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{W}})^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{W}}^T \mathbf{C} \right] d\mathbf{e} = \mathbf{C}_{ep, \mathcal{W}} d\mathbf{e} \\ d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} &= (\mathbf{G}_{\mathcal{W}}^T \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{W}})^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{W}}^T \mathbf{C} d\mathbf{e} \end{aligned} \quad (6-47)$$

Diese beiden Gleichungen sind bereits in (6-25) und (6-24) für $\mathcal{W} = \mathcal{A}$ angeführt. Für das Set \mathcal{W} müssen aber noch nicht alle Gleichungen (6-43) erfüllt sein. Einerseits kann $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}$ für ein $i \in \mathcal{A}_0$ größer als null sein oder eines der berechneten $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}$ ist negativ. Falls dies der Fall ist, muss das Set \mathcal{W} modifiziert werden.

6.7.2.2 Systematischer Wechsel des Sets \mathcal{W}

Die Berechnung der Lösung ist eine Abfolge von Minimalabstandsberechnungen, bei jedem Rechenschritt wird das Set \mathcal{W} erweitert oder reduziert, bis die Lösung erreicht ist. Jeder Rechenschritt wird mit einem Zähler k versehen.

Die Erweiterung findet statt, wenn der Lösungspunkt $\mathbf{s}_n + d\mathbf{s}$ eine oder mehrere der \mathcal{A}_0 Versagensbedingungen verletzt, d.h., nicht mehr auf dem von den Tangentialflächen aufgespannten ebenen Gebilde liegt und $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}$ größer als null ist. Die Indizes der Versagensbedingungen für die $\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} > 0$ gilt, werden in der Menge \mathcal{F} - das kalligraphische \mathcal{F} steht dabei für *Fail* - zusammengefasst. Das working Set $\mathcal{W}^{(k)}$ wird im nächsten Minimalabstandsberechnungsschritt $k+1$ um die Menge \mathcal{F} erweitert.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{i \in \mathcal{A}_0 \mid \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} > 0\} \\ \mathcal{W}^{(k+1)} &= \mathcal{W}^{(k)} \cup \mathcal{F} \end{aligned} \quad (6-48)$$

Wird keine Versagensbedingung verletzt - es gilt $\mathcal{F} = \{\}$ -, wird kontrolliert, ob bei der Berechnung des Minimalabstandes $d\mathbf{s}^{(k)}$ einige der Lagrange'schen Multiplikatoren $d\boldsymbol{\lambda}^{i(k)}$ aus $i \in \mathcal{W}^{(k)}$ negative Werte haben. Alle plastischen Verformungsmechanismen i mit negativen Multiplikatoren werden aus dem Set eliminiert:

$$\mathcal{W}^{(k+1)} = \{i \in \mathcal{W}^{(k)} \mid d\boldsymbol{\lambda}^{i(k)} \geq 0\} \quad (6-49)$$

Mit dem neuen, reduzierten Set $\mathcal{W}^{(k+1)}$ wird wiederum der Minimalabstand berechnet.

$$[d\mathbf{e}_{pl}, d\mathbf{s}, \mathcal{A}, d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}] = \text{ACTIVESETCALC_FUNC}(\mathcal{A}_0, \mathbf{G}_{\mathcal{A}}, d\mathbf{s}^{TR})$$

IN: $\mathcal{A}_0, \mathbf{G}_{\mathcal{A}}, d\mathbf{e}$

OUT: $d\mathbf{e}_{pl}, d\mathbf{s}, \mathcal{A}, d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}$

1. Initialisierung

$$k = 1, \mathcal{W}^{(k)} = \mathcal{A}_0, \mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} = \mathbf{G}_{\mathcal{A}}$$

2. Minimalabstandsberechnung

compute

$$\mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} = [\mathbf{g}_i]_{i \in \mathcal{W}^{(k)}}$$

$$d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}^{(k)} = \left[\left(\mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} \right)^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} \right]^{-1} \left(\mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} \right)^T d\mathbf{s}^{TR}$$

$$d\mathbf{e}_{pl}^{(k)} = \mathbf{G}_{\mathcal{W}}^{(k)} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}^{(k)}$$

$$d\mathbf{s}^{(k)} = d\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{C} d\mathbf{e}_{pl}^{(k)}$$

3. Kontrolle ob $\mathbf{s}_n + d\mathbf{s} \in \partial\mathbb{E}_{\mathbf{s}}$

compute $\mathcal{F} = \{i \in \mathcal{A}_0 \mid \mathbf{g}_i^T d\mathbf{s} > 0\}$

IF $\mathcal{F} = \{\}$

GOTO 4

ELSE

$$\mathcal{W}^{(k+1)} = \mathcal{W}^{(k)} \cup \mathcal{F}$$

set $k \leftarrow k+1$, **GOTO 2**

ENDIF

4. Kontrolle ob $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}^{(k)} \geq \mathbf{0}$

IF $d\lambda^{i(k)} < 0, i \in \mathcal{W}^{(k)}$

$$\mathcal{W}^{(k+1)} = \{i \in \mathcal{W}^{(k)} \mid d\lambda^{i(k)} \geq 0\}$$

$k \leftarrow k+1$, **GOTO 2**

ELSE

$$d\mathbf{e}_{pl} = d\mathbf{e}_{pl}^{(k)}, d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{(k)}, \mathcal{A} = \mathcal{W}^{(k)}, d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}^{(k)}, \text{EXIT}$$

ENDIF

Box 6.4 Active-Set-Methode zur Bestimmung von \mathcal{A} , $d\mathbf{e}_{pl}$ und $d\mathbf{s}$

6.8 Lösung in Pyramidenpunkten

6.8.1 Problemformulierung

Zur Berechnung der plastischen Multiplikatoren $d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}$ (Gleichung (6-24) bzw. Box 6.4) ist die positiv semidefinite Matrix $\mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G}$ zu invertieren. In diesem Abschnitt wird der Index \mathcal{W} bzw. \mathcal{A} aus schreibökonomischen Gründen nicht angeschrieben. \mathbf{G} soll aber nicht mit $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_M]$ aus (6-20) verwechselt werden!

Das zu lösende Gleichungssystem ist in (6-50) in kompakter Schreibform mit den allgemeinen Abkürzungen \mathbf{A} , \mathbf{x} und \mathbf{b} angeschrieben. Um die Darstellung nicht auf den sechsdimensionalen Spannungsraum einzuschränken, wird die variable Raumdimension mit p bezeichnet. Die Anzahl q entspricht der Elementanzahl der Menge \mathcal{W} bzw. der Spaltenanzahl der (p,q) -Matrix \mathbf{G} .

$$\underbrace{\left[\mathbf{G}_{(q,p)}^T \mathbf{C}_{(p,p)} \mathbf{G}_{(p,q)} \right]_{(q,q)}}_{\mathbf{A}_{(q,q)}} \underbrace{d\boldsymbol{\lambda}_{(q,1)}}_{\mathbf{x}_{(q,1)}} = \underbrace{\mathbf{G}_{(q,p)}^T d\mathbf{s}_{(p,1)}^{TR}}_{\mathbf{b}_{(q,1)}} \quad \rightarrow \quad (6-50)$$

\mathbf{A} ist eine symmetrische, quadratische, positiv definite oder positiv semidefinite (q, q) -Matrix. Die Invertierung von \mathbf{A} ist nur möglich, wenn der Rang von \mathbf{A} gleich q ist. Bisher wurde die Betrachtung auf solche Situationen beschränkt. Trotzdem ist eine positiv-semidefinite \mathbf{A} Matrix möglich. Situationen dieser Art treten z.B. bei plastischen Gleitmechanismen von FCC- bzw. BCC-Kristallen (Kap. 4.3.3.4) oder bei der Diskretisierung von isotropen oder transversal isotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen (Kap. 5) auf. Bei Semidefinitheit ist mindestens ein Matrixeigenwert von \mathbf{A} null und die reguläre Invertierung von \mathbf{A} ist nicht mehr möglich. Die zu beantwortende Frage lautet: Wann wird \mathbf{A} positiv semidefinit, d.h. $\text{rank}(\mathbf{A})$ kleiner als q , und wie ist in diesen Fällen vorzugehen?

6.8.2 Definitheit von $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G}$

Positive Definitheit oder Semidefinitheit von \mathbf{A} lässt sich über die lineare Abhängigkeit der Vektoren \mathbf{g}_i der Matrix \mathbf{G} bestimmen: Wenn \mathbf{G} aus linear unabhängigen Gradientenvektoren \mathbf{g}_i (mit $i \in \mathcal{W}$) aufgebaut ist, ist das Matrizenprodukt \mathbf{A} positiv definit. Die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren \mathbf{g}_i der Matrix \mathbf{G} wird durch den Rang der Matrix, $\text{rank}(\mathbf{G})$, bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \quad \dots \text{ linear unabhängig} &\rightarrow \text{rank}(\mathbf{G}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = r = q \\ \mathbf{g}_i \quad \dots \text{ linear abhängig} &\rightarrow \text{rank}(\mathbf{G}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = r < q \end{aligned} \quad (6-51)$$

In einem Pyramidenpunkt gilt $r < q$.

6.8.3 Graphische Darstellung von Pyramidenpunkten

In Bild 6.8 und Bild 6.9 sind Situationen dargestellt, in denen sich im Punkt \mathbf{s}_n mehrere Versagensbedingungen schneiden. Die Normalenvektoren \mathbf{g}_i im Punkt \mathbf{s}_n auf die jeweiligen Teilflächen sind dabei linear abhängige Vektoren.

6.8.3.1 Beispiel 1

In Bild 6.8 a) ist der elastische Bereich durch zwei Versagensbedingungen begrenzt. Im Punkt \mathbf{s}_n berühren sich die beiden Teilflächen. Die beiden Normalenvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 sind in diesem Punkt kollinear. Der Rang der Matrix \mathbf{G} und der Matrix \mathbf{A} ist eins.

Interessant ist, dass trotz der Unbestimmtheit der beiden plastischen Multiplikatoren $d\lambda^1$ und $d\lambda^2$ die Lösung $d\mathbf{s}$ eindeutig ist. Diese Eindeutigkeit ist im konvexen Optimierungsproblem begründet. Wie teilt sich aber der - eindeutig bestimmte - plastische Verzerrungsvektor $d\mathbf{e}_{pl}$ in die Komponenten der beiden Versagensmechanismen auf? Es lässt sich erkennen, dass unendliche viele Möglichkeiten gültig sind.

In Bild 6.8 b) schneiden sich vier lineare Versagensbedingungen im Punkt \mathbf{s}_n . Trotz der Redundanz von Versagensbedingung 2 und 3 hat auch diese Aufgabenstellung eine eindeutige Lösung; abhängig von $d\mathbf{s}^{TR}$ liegt \mathbf{s}_{n+1} entweder auf der Versagensbedingung 1, 2 oder verbleibt im Punkt \mathbf{s}_n . Trotzdem ist der Vektor $d\boldsymbol{\lambda}$ mit den vier Koeffizienten $d\lambda^i$ wiederum nicht eindeutig bestimmbar, da $\text{rank}(\mathbf{G}) = 2 < q = 4$ ist. Obwohl die Versagensmechanismen 2 und 3 redundant erscheinen, können auch diese Mechanismen einen Teilbetrag zu $d\mathbf{e}_{pl}$ beisteuern (siehe z.B. die beiden Varianten in Bild 6.10).

6.8.3.2 Beispiel 2

In Bild 6.9 sind Situationen mit linear abhängigen Normalenvektoren im dreidimensionalen Raum ($p = 3$) dargestellt. Bild 6.9 a) ist ähnlich der Situation in Bild 6.8 b). Es schneiden sich drei lineare Versagensbedingungen - sprich drei Ebenen - entlang einer Geraden. Die Ebene mit dem Index 2 liegt auf der von den Ebenen 1 und 3 gebildeten Kante auf. Der Punkt \mathbf{s}_n liegt auf der Schnittgeraden. Der Lösungspunkt \mathbf{s}_{n+1} liegt entweder auf der Ebene 1, 3 oder auf der Schnittgeraden der drei Ebenen.

In den ersten beiden Fällen ist entweder nur der Versagensmechanismus 1 oder nur der Mechanismus 3 aktiv. Liegt der Lösungspunkt auf der Schnittgeraden der drei Ebenen (Bild 6.9 a) können alle drei Mechanismen einen unbestimmten plastischen Verzerrungsbeitrag $d\mathbf{e}_{pl,i}$ liefern, die Lage des Lösungspunktes \mathbf{s}_{n+1} ist aber wiederum eindeutig festgelegt und hängt nur von \mathbf{s}_n und $d\mathbf{s}^{TR}$ ab. $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$ ist eine (3,3)-Matrix. Da die drei Vektoren im Punkt \mathbf{s}_n in einer Ebene liegen, sind sie linear voneinander abhängig, es gilt $\text{rank}(\mathbf{G}) = 2 < 3$.

In den Abbildungen Bild 6.8 b) und Bild 6.9 a) sind jeweils redundante Versagensbedingungen vorhanden. Durch Wegnahme der Versagensbedingungen 2 und 3 in Bild 6.8 b) bzw. 2 in Bild 6.9 a) bleibt das Problem und die Lösung ungeändert.

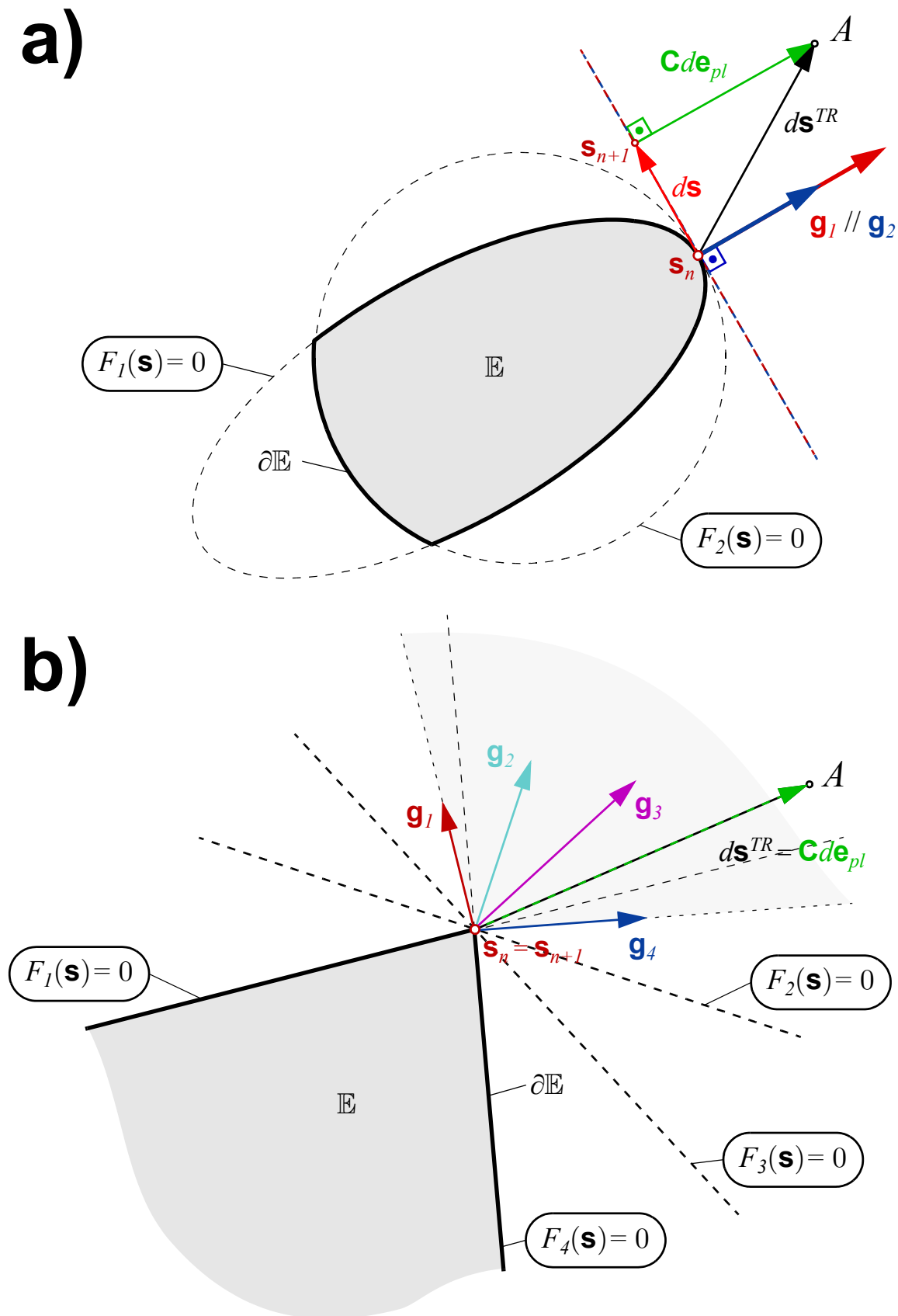


Bild 6.8 Linear abhängige \mathbf{g}_i in \mathbb{R}^2 : a) zwei kollineare Normalenvektoren \mathbf{g}_i ; b) „Pyramidenpunkt“ in \mathbb{R}^2 : in \mathbf{s}_n schneiden sich mehr als zwei Versagensbedingungen (hier: vier)

In Bild 6.9 b) ist keine Versagensbedingung redundant. Es schneiden sich vier lineare Versagensbedingungen in \mathbf{s}_n . Diese vier Ebenen begrenzen den erlaubten Bereich in Form einer unregelmäßigen vierseitigen Pyramide. Die Matrix \mathbf{G} in \mathbf{s}_n ist eine (3,4)-Matrix. Da die Anzahl der Vektoren \mathbf{g}_i größer als die Raumdimension ist, sind diese automatisch linear abhängig voneinander; es gilt $\text{rank}(\mathbf{G}) = 3 < 4$. Wiederum ist der Lösungspunkt \mathbf{s}_{n+1} eindeutig bestimmbar. Liegt dieser in der Pyramidenspitze $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_{n+1}$, können alle vier Versagensmechanismen einen unbestimmten Anteil an dem eindeutig gegebenen plastischen Verzerrungsdifferential $d\mathbf{e}_{pl}$ liefern.

6.8.4 Bestmögliche Anpassung von \mathbf{Ax} an \mathbf{b} - die Moore-Penrose-Pseudoinverse

6.8.4.1 Problemformulierung

Aus den Abbildungen Bild 6.8 und Bild 6.9 und den dort dargestellten vier Situationen lässt sich schlussfolgern, dass trotz der linearen Abhängigkeit der Normalenvektoren \mathbf{g}_i alle Lösungen \mathbf{s}_{n+1} und damit auch der plastische Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}_{pl}$ eindeutig bestimmbar sind. Die eindeutige Lösbarkeit folgt aus der Formulierung der Aufgabenstellung als konvexes Optimierungsproblem. Diese Eigenschaft bleibt von der möglichen positiven Semidefinitheit des Matrixproduktes $\mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G}$ unberührt.

Die lineare Abhängigkeit der Vektoren \mathbf{g}_i führt aber zu einer Unbestimmtheit in der Aufteilung der einzelnen plastischen Verzerrungsanteile $d\mathbf{e}_{pl,i}$, d.h., es gibt mehrere Kombinationen der plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ mit der Einschränkung, dass jeder plastische Multiplikator positiv sein muss. Zwei solcher möglichen gültigen Kombinationen sind exemplarisch in Bild 6.10 dargestellt. Um aber Gleichung (6-50) aufzulösen, muss aus der Menge der möglichen Kombinationen der plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ eine eindeutig definierte Kombination ausgewählt werden.

Wünschenswert wäre es hier zusätzliche physikalische Information zu haben, um die physikalische und in Folge algebraisch uneindeutige Situation durch eine zusätzliche Modellvorstellung in eine eindeutig auflösbare Aufgabenstellung überzuführen. Da diese physikalische Zusatzinformation aber fehlt, wird ein algebraisches Hilfsmittel zur Lösung herangezogen: Es wird die bestmögliche Näherung des Vektors \mathbf{Ax} an den Vektor \mathbf{b} gesucht. Das heißt, dass der Betrag des Differenzvektors $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ kleinstmöglich sein soll.

6.8.4.2 Lösung mittels Moore-Penrose-Pseudoinverse

Dieses algebraische *BestFit*-Aufgabe wird mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen gelöst. Statt des bei der Invertierung verwendeten hochgestellten „-1“ wird bei der Moore-Penrose-Pseudoinversen ein hochgestelltes Pluszeichen verwendet. Mit der pseudoinvertierten Matrix \mathbf{A}^+ ist eine eindeutige Lösung von \mathbf{x} angebar. Ist $\text{rank}(\mathbf{A}) = q$ stimmt die Moore-Penrose-Pseudoinverse \mathbf{A}^+ mit der regulären Inverse \mathbf{A}^{-1} überein.

Angewandt auf das Ausgangsproblem (6-50) lässt sich somit für $d\lambda_w$ in jedem Fall - auch

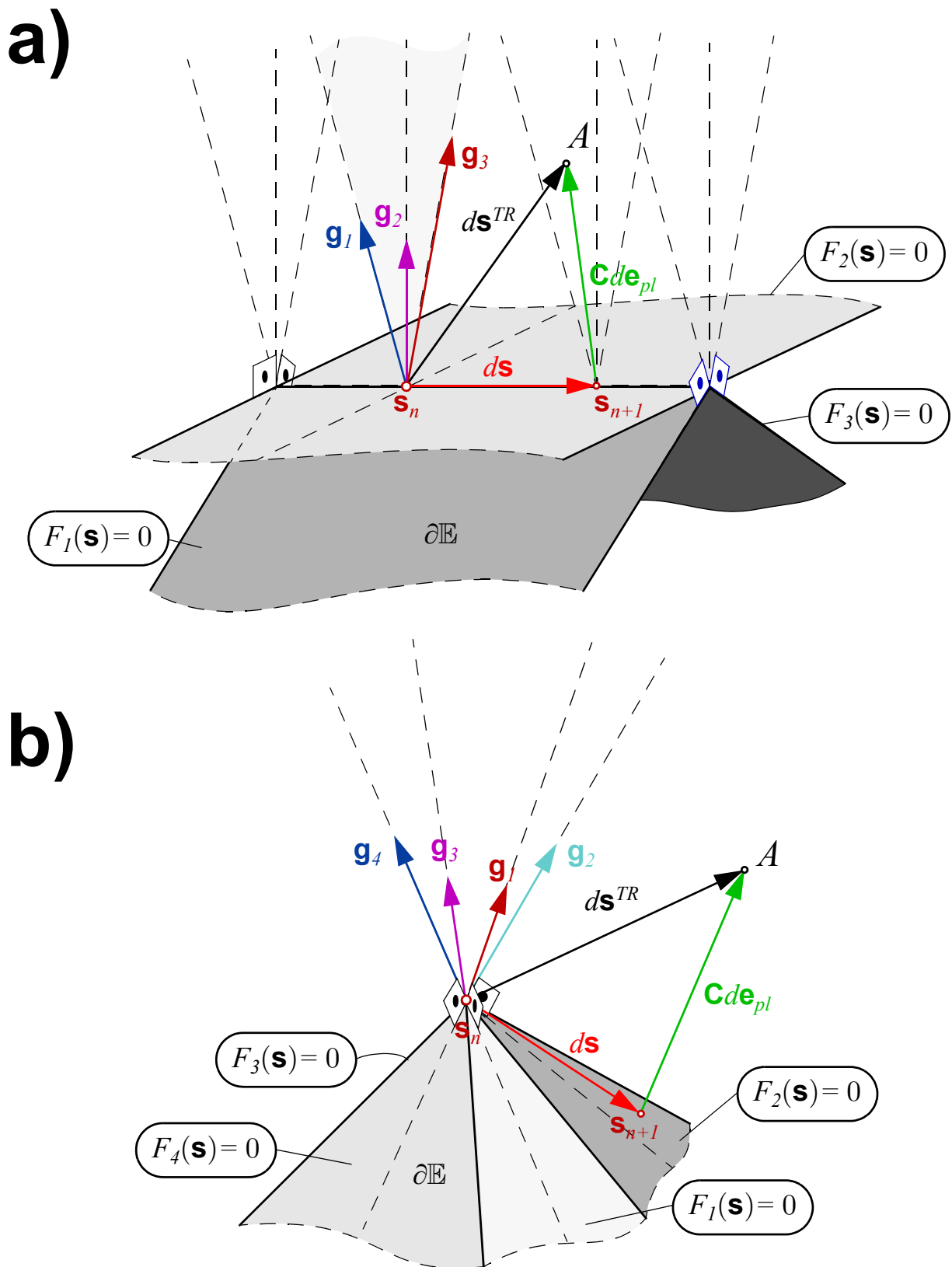


Bild 6.9 Linear abhängige \mathbf{g}_i in \mathbb{R}^3 : a) drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene, im Subraum \mathbb{R}^2 ; b) Pyramidenpunkt: es schneiden sich $q > p$ konvexe Flächen in \mathbb{R}^p (hier $p=3$, $q=4$) in einem Punkt

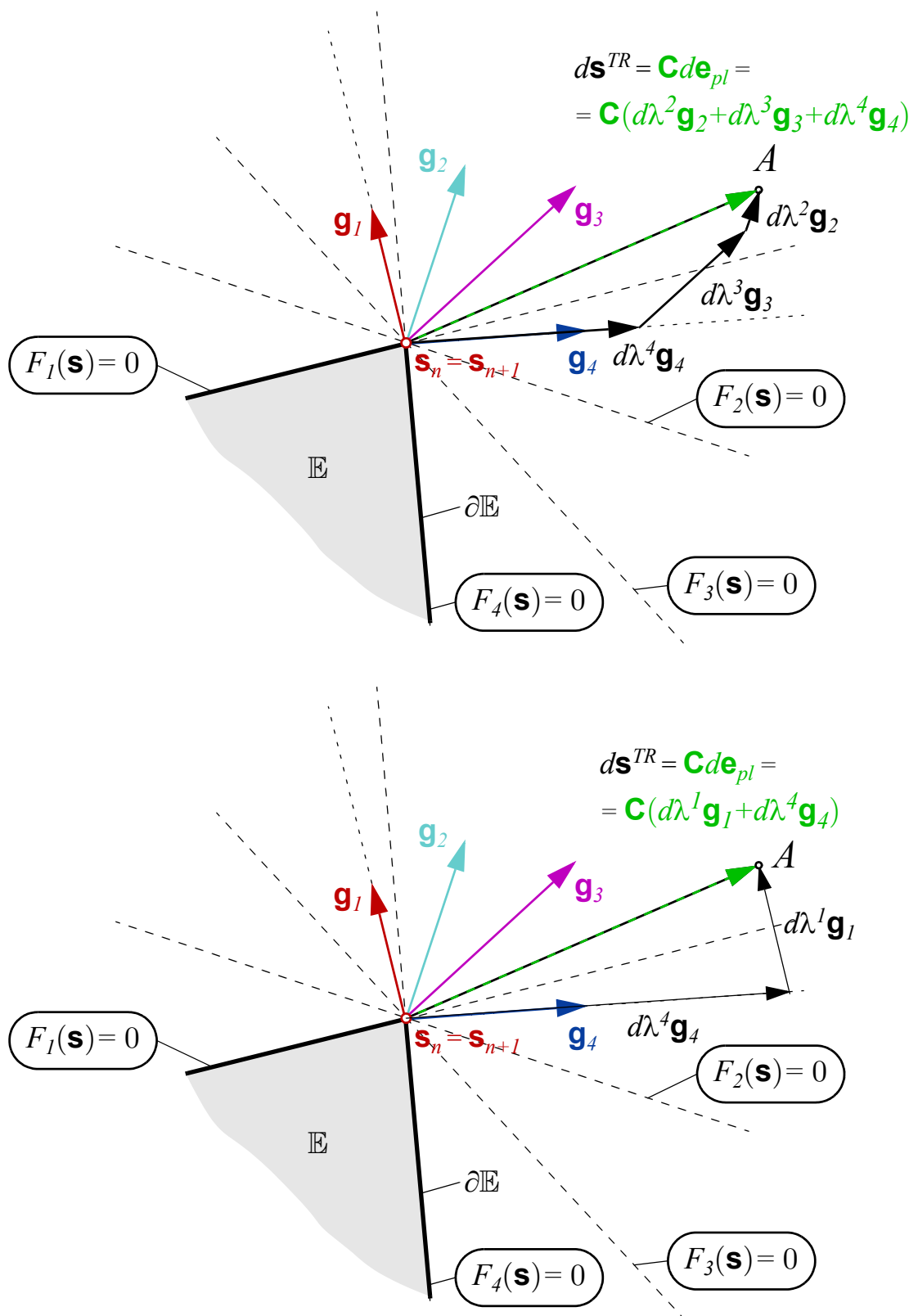


Bild 6.10 Mögliche gültige Aufteilungen von $d\mathbf{e}_{pl}$ in einzelne Teilbeträge $d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \mathbf{g}_i$

wenn \mathbf{G}_W aus linear abhängigen Vektoren aufgebaut ist - aus der Vielzahl an möglichen Lösungen eine einzige eindeutige Lösung angeben:

$$d\boldsymbol{\lambda}_W = \left[(\mathbf{G}_W)^T \mathbf{C} \mathbf{G}_W \right]^+ (\mathbf{G}_W)^T d\mathbf{s}^{TR} \quad (6-52)$$

Im Berechnungsablauf Box 6.4 ist das „-1“ nur durch ein „+“-Zeichen zu ersetzen. In Programmpaketen wie Matlab oder Mathematica gibt es vordefinierte Befehle, um die Moore-Penrose-Pseudoinverse zu berechnen. Zusätzliche Informationen zu dieser algebraischen Größe sind in Anhang G angegeben.

6.9 Offene Punkte

6.9.1 Erweiterung 1: Verfestigung

Bei den betrachteten Modellgleichungen wurden Verfestigungsterme bewusst (noch) nicht inkludiert. Bei Materialmodellen mit mehreren plastischen Versagensmechanismen ergibt sich die interessante Frage, ob die jeweils zugehörigen Verfestigungsmechanismen miteinander interagieren oder sich vollkommen unabhängig ausbilden. In der Plastizität von Monokristallen ist diese Frage seit Anbeginn der Forschung präsent. Ein Überblick über verschiedenen Verfestigungsmodelle und mögliche Interaktionen bei Monokristallen findet sich in Kap. 10.4 von Khan/Huang (1995). Eine allgemeine Formulierung und einer Diskussion unterschiedlicher Interaktionen und Kopplungen der Verfestigungsmechanismen bei mehreren linearen Versagensbedingungen hat Maier (1970) untersucht.

Wie die Gleichungen um diesen Zusatzeffekt zu erweitern sind und welche Gestalt die Verfestigung einschränkend haben muss, um die Möglichkeit aufrechtzuerhalten eine äquivalente Optimierungsaufgabe, die weiterhin konvex ist, zu formulieren, ist noch auszuarbeiten.

6.9.2 Erweiterung 2: nicht-assozierte Versagensmechanismen

Die Modellgleichungen wurden auf den Fall mit assoziiertem Versagensmechanismus eingeschränkt, was mehrere Vorteile mit sich bringt: (i) die Formulierung ist damit stets thermodynamisch konsistent, d.h., die Dissipation ist stets größer als null und (ii) die Lösung der Grundgleichungen lässt sich durch ein äquivalentes konvexes Optimierungsproblem berechnen.

Grundsätzliche Arbeiten zu nicht-assozierten plastischen Versagensmechanismen finden sich z.B. bei Bigoni (2012). Beiträge zu Multi-Mechanismen-Plastizität mit nicht-assozierten Versagensmechanismen liefern Ottosen/Ristinmaa (1996) und Klisinski (1998). Eine umfassende Diskussion und die zugehörige rechnerische Umsetzung scheinen - nach Ansicht und Kenntnisstand des Autors - noch auszustehen und sind ein Gebiet mit Forschungsbedarf.

6.9.3 Starr-plastische Traglastanalysen

Die in diesem Kapitel dargestellten Modellgleichungen mit den angegebenen Beschränkungen sind auch Ausgangspunkt bzw. Grundvoraussetzung für starr-plastische Traglastanalysen. Die Methoden und Vorgehensweisen dazu sind hier nicht dargestellt, würde aber den Themenkreis Multi-Mechanismen-Plastizität komplettieren. Einige Beispiele dazu sind später ausgearbeitet.

7

**Multi-Mechanismen-Plastizität
mit zusätzlichen
Spannungs-
nullbedingungen**

7.1 Einleitung und Kapitelaufbau

7.1.1 Problemstellung

7.1.1.1 Reduzierter Spannungszustand

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität eingeführt. Zur Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs wurden sechs Verzerrungen $d\mathbf{e}$ vorgegeben und die Spannungen $d\mathbf{s}$ bestimmt. In diesem Kapitel soll wiederum der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang berechnet werden, aber unter der Nebenbedingung, dass ausgewählte Spannungskomponenten - diese werden mit \mathbf{s}_b bezeichnet - null sind; es gilt $d\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$. Die Spannungskomponenten \mathbf{s}_a , die nicht null sind, beschreiben einen sogenannten *reduzierten Spannungszustand*.

7.1.1.2 Konsistent reduziertes Materialmodell

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich durch Einarbeitung der Spannungsnullbedingungen

$$\mathbf{s}_b = \mathbf{0} \quad d\mathbf{s}_b = \mathbf{0} \quad (7-1)$$

in die 3D-Modellgleichungen, die passiven Verzerrungen \mathbf{e}_b aus den Gleichungen kondensieren lassen. Der verbleibende Zusammenhang zwischen den aktiven Spannungs- und aktiven Verzerrungskomponenten wird als *reduziertes Materialmodell* bezeichnet. Die aus den Gleichungen herauskondensierten passiven Verzerrungskomponenten \mathbf{e}_b , die sich begleitend aus den aktiven Komponenten ergeben, sind im Allgemeinen nicht null, werden aber manchmal als untergeordnet angesehen und daher vernachlässigt.

Ein reduziertes Materialmodell und die begleitend auftretenden passiven Verzerrungen beschreiben also den kompletten dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang, aber unter Berücksichtigung von speziellen bzw. vorab festgelegten Spannungsnullbedingungen.

In mechanischen Strukturmodellen wie Schalen, Platten, Biegebalken oder Fachwerkstäben werden Materialmodelle, die Nullspannungsrandbedingung berücksichtigen, verwendet. Die kinetische Annahme der zu null gesetzten Spannungskomponenten hilft z.B. bei Plattenmodellen die Bedingung der spannungsfreien Plattenoberfläche zu erfüllen, ohne auf die weit aufwendigere Einführung einer kinematischen Dickenverformungsannahme zurückgreifen zu müssen.

7.1.2 Literatur & Stand der Forschung

7.1.2.1 Klassische Prandl-Reuss Plastizitätsgleichungen mit Spannungsnullbedingungen

Die überwiegende Mehrzahl der durchgeführten Arbeiten betrachten vornehmlich die sogenannten Prandl-Reuss Plastizitätsgleichungen (oder J_2 *elastoplasticity*) bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen. Deren Bestandteile sind:

- eine isotrope, linear-elastische Materialsteifigkeitsmatrix,
- eine isotrope Mises-Versagensbedingung und
- ein dazu assoziierter Versagensmechanismus.

In den meisten Fällen werden diese Gleichungen noch um eine Verfestigungsregel erweitert.

Ebener Spannungszustand

Für den ebenen Spannungszustand (kurz: ESZ) sind die Prandl-Reuss Gleichungen bekannt, siehe z.B. Simo/Taylor (1986) oder de Souza Neto/Peric/Owen (2008). Die plastischen Dickenverzerrungen und begleitenden Verzerrungen werden aus der Bedingung, dass die Spur der plastischen Verzerrungen bei dem verwendeten Modell null sein muss, berechnet. Simo/Taylor (1986) inkludieren zusätzlich isotrope und kinematische Verfestigung und geben die rechnerisch-approximative Lösung der Differentialgleichungen mit einem impliziten Euler-Rückwärts-Verfahren an. Betrachtet werden nur die drei aktiven Spannungs- und Verzerrungskomponenten des ESZ; in einem begleitenden Rechenschritt lassen sich optional die Dickenverzerrungen berechnen. Diese Methode übernehmen Ramm/Matzenmiller (1987) und erweitern das Vorgehen von Simo/Taylor (1986) um die beiden transversalen Schubspannungskomponenten um plastische Schalenberechnungen durchführen zu können.

In ihrem Buch geben de Souza Neto/Peric/Owen (2008) einen zusammenfassenden Überblick über die Prandl-Reuss Gleichungen inklusive isotroper Verfestigung bei ebenem Spannungszustand an. Es wird zwischen drei Verfahren (S. 360) zur Berücksichtigung der Spannungsnullbedingungen in den Plastizitätsgleichungen unterschieden. Als Unterscheidungsmerkmal dient dabei, auf welcher Stufe die Spannungsnullbedingungen als Zwangsgleichungen in das Gleichungssystem inkorporiert werden:

- (i) *Plane stress-projected plasticity*: Die Spannungs- und Verzerrungskomponenten werden in aktive und passiv-begleitende Anteile aufgespalten; die aktiven Verzerrungen E_{11} , E_{22} und γ_{12} werden vorgegeben und die zugehörigen arbeitskonjugierten Spannungskomponenten berechnet. In einem weiteren Rechenschritt können die begleitenden Dickenverzerrungen bestimmt werden. Die Spannungsnullbedingungen werden also in die Plastizitätsgleichungen inkorporiert, wodurch sich eine reduzierte Problemstellung, die den Fokus auf den aktiven Verzerrungsgrößen hat, ergibt. Diese Vorgehensweise wird z.B. in der Arbeit von Simo/Taylor (1986) umgesetzt.

- (ii) *Plane stress constraint at Gauss point level*: Dabei werden die kompletten 3D-Materialgleichungen um die Spannungsnullbedingungen als zusätzliche Zwangsgleichungen erweitert. Im Gegensatz zur ersten Methode wird die Anzahl der Problemunbekannten aufgrund der Erweiterung des Gleichungssystems um die Zwangsbedingungen erhöht. Eine Variante dieses Verfahrens setzt Dodds (1986) um.
- (iii) *Plane stress constraint at structural level*: Eine alternative Möglichkeit zu (ii) schlägt de Borst (1991) vor. Die Spannungsnullbedingungen werden erst auf Struktur- bzw. Elementgleichungslevel bei der Berechnung des inneren Festhaltekräftevektors - und nicht - wie in (ii) - im Rahmen der Materialberechnungsroutine - als Zwangsgleichungen berücksichtigt.

Alfano/de Angelis/Rosati (1998) schreiben die Prandl-Reuss Gleichungen mit kinematischer Verfestigung als konvexes Optimierungsproblem an, wobei die Spannungsnullbedingungen zur Realisierung des ebenen Spannungszustandes als Zwangsgleichungen berücksichtigt werden. Die mathematische Problemformulierung als konvexe Minimierungsaufgabe wird zur Entwicklung eines global konvergenten Lösungsalgorithmus genutzt. Montáns (2004) erweitert die Prandl-Reuss Gleichungen bei ebenem Spannungszustand um das *Multilayer*-Verfestigungsmodell nach Mróz (1969).

Balkenspannungszustand

Die konsistent reduzierten Prandl-Reuss Gleichungen für den Balkenspannungszustand, d.h. $S_{22} = S_{33} = S_{23} = 0$, wobei die x_1 -Achse die Stabachse ist, finden sich in nur sehr wenigen Arbeiten, z.B. bei Battini (2002), de Souza Neto/Peric/Owen (2008) und Ritto-Corrêa/Camotim (2001).

Mixed stress-strain control

Das Hauptaugenmerk bei den zuvor angeführten Aufsätzen liegt auf den Plastizitätsdifferentialgleichungen und deren numerisch-approximative Lösung bei Vorgabe eines Verzerungsinkrements unter Einhaltung von ausgesuchten Spannungsnullbedingungen.

Eine allgemeine Betrachtung der Formulierung der Plastizitätsgleichungen bei Vorgabe von differentiellen Verzerrungs- und Spannungszuwächsen (*mixed stress-strain control*) für den Fall mit nur einer Versagensbedingung haben Klisinski/Mróz/Runesson (1992) gearbeitet. Hauptaugenmerk dieser theoretischen Abhandlung ist die Untersuchung der Eindeutigkeitsbedingung bzw. die Einhaltung der Be- und Entlastungsbedingungen bei verschiedenen Verzerrungs- und Spannungsvorgaben und die daraus sich ergebenden Einschränkungen auf den Verfestigungsmodul. In Klisinski (1998) wird diese Betrachtung auf den Fall mit mehrfachen Versagensmechanismen erweitert. Die in den oben angeführten Aufsätzen verwendeten Plastizitätsdifferentialgleichungen für den ebenen Spannungszustand bzw. für den Balkenspannungszustand sind jeweils ein Sonderfall dieser *mixed stress-strain control* Vorgehensweise, wobei die Verzerrungen \mathbf{e}_a und die Nullspannungen \mathbf{s}_b als steuernde Größen vorgegeben werden.

Ritto-Corrêa/Camotim (2001) betrachten die Prandl-Reuss Gleichungen mit kombinierter kinematischer und isotroper Verfestigung, wobei - ausgehend von der Arbeit von Klisinski/Mróz/Runesson (1992) - bei der Integration der Plastizitätsdifferentialgleichungen als steuernde Größen verschiedene Kombinationen von finiten Verzerrungs- und Spannungskomponenten vorgegeben werden können. Damit wird der ebene Spannungszustand, der Balkenspannungszustand, der einaxiale Spannungszustand, die triaxiale Testsituation, der ebene Verzerrungszustand mit zusätzlicher Spannungskontrolle und die reine Spannungskontrolle für das zuvor beschriebene Materialgesetz formuliert und rechnerisch umgesetzt.

7.1.2.2 Verschiedene elasto-plastische Materialmodelle mit Spannungsnullbedingungen

Fuschi/Dutko/Peric/Owen (1994) formulieren die Gleichungen des isotropen Betonmodells von William-Warnke für den ebenen Spannungszustand und ohne Verfestigungsterme und integrieren diese numerisch mit dem *Return-Mapping Algorithm* und dem *Cutting-Plane Algorithm*. Die begleitenden bzw. passiven Verzerrungsgrößen, die zu den Nullspannungen arbeitskonjugiert sind, werden nicht angegeben. Valoroso/Rosati (2009a) formulieren die 3D-Plastizitätsgleichungen mit einer generellen isotropen Versagensbedingung, die durch die drei Invarianten I_1 , J_2 und I_3 (siehe Anhang F) angegeben ist, und reduzieren diese Gleichungen konsistent auf den ebenen Spannungszustand. Im zweiten Teil der Arbeit, Valoroso/Rosati (2009b) wird die Implementierung des theoretischen Modells dargestellt und an einigen Beispielen umgesetzt. Einen Aufsatz zum ebenen Spannungszustand bei anisotropen Materialien inklusive rechnerischer Umsetzung haben Lourenço/de Borst/Rots (1997) verfasst. Zur Beschreibung des unterschiedlichen Versagensverhaltens bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung werden zwei Versagensbedingungen kombiniert. Die begleitenden Verzerrungen werden nicht angegeben.

7.1.3 Aufgabenstellungen & Ziel des Abschnitts

Ausgangspunkt für die nachfolgende Arbeit ist die Idee von Klisinski/Mróz/Runesson (1992) einer gemischten Spannungs-Verzerrungs-Steuerung (*mixed stress-strain control*) bei der Lösung der Plastizitätsgleichungen. Dabei sollen uneingeschränkt viele Versagensbedingungen und Versagensmechanismen in den Grundgleichungen erlaubt sein und keine Einschränkung auf ein spezielles Material- bzw. Plastizitätsmodell eingeführt werden. Die in dieser Vorgehensweise vorkommenden steuernden Spannungsgrößen werden null gesetzt. Welche von den sechs Spannungskomponenten null sind, soll beliebig vorgebar sein. Damit lassen sich die komplett dreidimensional formulierten Materialmodelle konsistent, z.B. auf den ebenen Spannungszustand oder den einaxialen bzw. Fachwerkspannungszustand, reduzieren.

Die in diesem Kapitel gezeigte Reduktionsprozedur führt zu einer Zweiteilung der Berechnung:

- Der primäre Berechnungsteil operiert nur mit den aktiven Spannungs- und Verzer-

rungskomponenten.

- Im zweiten (oder sekundären) Rechnungsteil werden die begleitenden Verzerrungskomponenten berechnet.

Diese Zweiteilung ist Ausgangspunkt für besonders effiziente Berechnungsprozeduren und entspricht der von de Souza Neto/Peric/Owen (2008) als *plane stress-projected plasticity* bezeichnete Vorgehensweise. In Remark 9.7 in Kapitel 9 von de Souza Neto/Peric/Owen (2008) merken die Autoren an, dass diese Zweiteilung für komplexere Modelle nicht einfach umzusetzen sei. Diese vermeintliche Lücke sollte mit der in diesem Kapitel systematisch-generell gehaltene Prozedur, die auf beliebige plastische Materialmodelle anwendbar ist, geschlossen werden.

Zusammengefasst sind die Ziele des Abschnitts:

- Inkorporation von beliebigen Spannungsnullbedingungen in die Multi-Mechanismen-Plastizität,
- Aufteilung in aktive Verzerrungs- und arbeitskonjugierte Spannungskomponenten und begleitende Verzerrungen, die zu den Nullspannungen arbeitskonjugiert sind,
- komplette 3D-Betrachtung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs des Materials, d.h. zusätzlich zu den aktiven Spannungen und Verzerrungen, sollen die begleitenden Verzerrungskomponenten mitberechnet werden,
- Darstellung des Berechnungsablaufs zur Bestimmung der aktiven plastischen Mechanismen.

7.1.4 Inhalt von Kapitel 7

7.2 Allgemeines & Vorgehensweise

7.3 Aktive und passive Verzerrungs- und Spannungskomponenten

7.4 Reduktion des linear-elastischen 3D-Materialgesetzes

7.5 Reduktion der elasto-plastischen Materialgleichungen

7.6 Minimalabstandsaufgabe im Spannungssubraum

7.7 Beispiel: Reduktion der Prandl-Reuss Gleichungen

7.8 Beispiel: Fachwerkstab mit zwei Schubmechanismen

7.9 Zusammenfassung und Ausblick

7.2 Allgemeines & Vorgehensweise

7.2.1 Verzerrungs-, spannungsgesteuerte oder gemischt-gesteuerte Berechnung

Das Materialmodell stellt einen Zusammenhang zwischen den sechs Verzerrungen und den sechs Spannungen bzw. zwischen den differentiellen Zuwächsen dieser Größen her. Von diesen zwölf Größen werden sechs vorgegeben und die verbleibenden sechs Größen über die Gleichungen des Materialmodells berechnet.

7.2.1.1 Verzerrungs- vs. spannungsgesteuerte Berechnung

Zunächst wird von einem verzerrungsgesteuerten Problem ausgegangen: die sechs Verzerrungen $d\mathbf{e}$ werden vorgegeben und anschließend über die Gleichungen des Materialmodells die Spannungen $d\mathbf{s}$ berechnet. Das linear-elastische Materialmodell z.B. gibt diesen Zusammenhang über die konstante Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} an.

Bei einer reinen Spannungssteuerung ist es genau umgekehrt: die sechs Spannungen $d\mathbf{s}$ werden vorgegeben und die zugehörigen Verzerrungen berechnet. Bei linear-elastischem Materialverhalten berechnen sich die Verzerrungen $d\mathbf{e}$ aus der Materialnachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ mal den Spannungen $d\mathbf{s}$. Im perfekt-plastischen Fall ist eine reine Spannungssteuerung, d.h. die Berechnung von $d\mathbf{e}$ durch Vorgabe von $d\mathbf{s}$, nicht realisierbar.

7.2.1.2 Gemischte verzerrungs- und spannungsgesteuerte Berechnung

Anstatt alle sechs Verzerrungskomponenten vorzugeben, sollen in der gemischten Steuerung nur $1 \leq n_a < 6$ ausgewählter Verzerrungen vorgegeben werden. Diese n_a Verzerrungskomponenten werden als aktive oder primäre Verzerrungskomponenten bezeichnet und der $(n_a, 1)$ -Vektor mit $d\mathbf{e}_a$ geschrieben. Um trotzdem in Summe sechs steuernde Größen vorzugeben, sind zusätzlich $6 - n_a$ Spannungen in Form des $(6 - n_a, 1)$ -Vektors $d\mathbf{s}_b$ anzugeben. Die zu berechnenden Spannungs- und Verzerrungskomponenten werden mit $d\mathbf{s}_a$ bzw. $d\mathbf{e}_b$ bezeichnet. Die $6 - n_a$ Verzerrungen $d\mathbf{e}_b$ werden mitgehende, passive oder begleitende Verzerrungen genannt.

7.2.2 „Reduziertes“ Materialmodell

Die gemischte Formulierung in Kombination mit den Spannungsnullbedingungen ist der Ausgangspunkt für die systematisch-konsistente Reduktion der Gleichungen des Materialmodells. Die vorgegebenen Größen sind die n_a Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$ und die $(6 - n_a)$ Spannungen $d\mathbf{s}_b$.

7.2.2.1 Steuernde Größen - Spannungsnullbedingungen

Bei reduzierten Materialmodellen wird angenommen, dass während des gesamten Verformungsvorganges die Spannungscomponenten \mathbf{s}_b null sind; somit ist auch der differentielle

Spannungszuwachs $d\mathbf{s}_b$ stets null (7-1).

Streng genommen kann man bei Vorgabe dieser Nullspannungen nicht von aktiv steuernden Größen sprechen. Es sind Spannungszwangsbedingungen, die während der kompletten Belastungsgeschichte einzuhalten sind. Aktiv steuernde und vorgegebene Größen sind die Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$. Gesucht werden die Spannungszuwächse $d\mathbf{s}_a$ und die begleitenden Verzerrungszuwächse $d\mathbf{e}_b$. Das Adjektiv „reduziert“ bezieht sich auf die auftretenden Spannungskomponenten \mathbf{s}_a ; durch die Spannungsnullbedingung treten nur diese n_a Spannungskomponenten, die nicht null sind, in den Materialmodellgleichungen auf.

7.2.2.2 „Reduktion“ - Zweiteilung der Rechenprozedur

Durch die zuvor getroffene Annahme der Spannungsnullrandbedingung und der eingepprägten Verzerrungen lässt sich sowohl das elastische als auch das elasto-plastische Materialmodell durch Einarbeitung dieser Nullspannungskomponenten und durch algebraische Umordnung in zwei aufeinanderfolgende Berechnungsschritte aufteilen.

Der primäre Berechnungsschritt stellt den Zusammenhang zwischen den vorgegebenen Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$ und Spannungen $d\mathbf{s}_a$ her. In einem nachfolgenden Berechnungsschritt werden die begleitenden, passiven Verzerrungen $d\mathbf{e}_b$ (sekundäre Berechnungsgrößen) aus den zuvor berechneten, primären Größen bestimmt. Die Spannungen \mathbf{s}_b und die differentiellen Veränderungen $d\mathbf{s}_b$ bleiben dabei stets null.

7.2.2.3 „Reduziertes“ Materialmodell

Wird nur der erste Berechnungsteil, der Zusammenhang zwischen den n_a aktiven Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$ und den zugeordneten Spannungen $d\mathbf{s}_a$, betrachtet, reduzieren sich die algebraischen Gleichungen, die diesen Zusammenhang der aktiven Größen beschreiben, von sechs auf n_a algebraische Gleichungen. Dieser Zusammenhang wird als *reduziertes Materialgesetz* bezeichnet. Im zweiten Berechnungsteil werden die begleitenden Verzerrungen $d\mathbf{e}_b$ berechnet. Manchmal werden die Verzerrungen $d\mathbf{e}_b$ als untergeordnet angesehen und vernachlässigt. Doch eben diese mitgehenden Verzerrungsgrößen komplettieren das dreidimensionale Materialverhalten.

Der hier verwendete Terminus *reduziertes Materialmodell* steht als Kürzel für ein dreidimensionales Materialmodell mit vorgegebenen speziellen Spannungsnullbedingungen, deren Einführung eine algebraisch-reduzierte Betrachtung des Zusammenhangs zwischen den primären Spannungs- und Verzerrungsgrößen und eine nachlaufende Berechnung der verbleibenden/passiven Verzerrungskomponenten erlaubt.

7.2.3 Vorgehensweise

Zuerst wird festgelegt, welche $6-n_a$ Spannungskomponenten \mathbf{s}_b während der kompletten Deformation null sein sollen. Aus dieser Festlegung ergeben sich die Verzerrungskomponenten \mathbf{e}_b und die komplementären Spannungs- und Verzerrungskomponenten \mathbf{s}_a und \mathbf{e}_a . Die systematische Abspaltung dieser Komponenten aus den sechs Verzerrungen oder Span-

nungen erfolgt über sogenannte Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b , die im nächsten Abschnitt mit ihren Eigenschaften vorgestellt werden.

Die systematische Umordnung und Zweiteilung der Gleichungen wird zunächst an den linear-elastischen Materialgleichungen gezeigt. Die Vorgehensweise entspricht der traditionell-baustatischen Methode der statischen Kondensation. Diese Umordnung ist Ausgangspunkt für die Reduktionsprozedur bzw. algebraische Umsortierung der elasto-plastischen Modellgleichungen bei Berücksichtigung der Spannungsnullbedingungen. Mit der nachfolgend dargestellten, allgemeingültigen und konsistenten algebraischen Umordnungsprozedur - kurz: konsistente Reduktion - soll bewusst gemacht werden, dass das Materialmodell stets uneingeschränkt und ungeändert dreidimensional bleibt, die mathematische Problemdimension des primären Berechnungsteils aber reduziert wird.

7.3 Aktive und passive Verzerrungs- und Spannungskomponenten

Der erste Schritt der Reduktionsprozedur ist die systematische Ein- und Aufteilung des Spannungs- bzw. Verzerrungsvektors über Filtermatrizen in aktiv-primäre und passiv-begleitende Komponenten. Die eingeführten Filtermatrizen haben spezielle Eigenschaften, die im zweiten Unterabschnitt dargestellt werden. Für spezielle reduzierte Spannungszustände sind die Nullspannungskomponenten und die zugehörigen Filtermatrizen im letzten Unterkapitel angegeben.

Zu beachten ist, dass die Nullspannungskomponenten \mathbf{s}_b nur bezüglich des speziell gewählten Koordinatensystems gelten. Bei Bezug des reduzierten Spannungszustands auf ein anderes Koordinatensystem sind die Spannungskomponenten nicht null.

Welche der sechs Spannungskomponenten des gewählten Bezugskordinatensystems null gesetzt werden, soll frei wählbar sein. Bei sechs Spannungskomponenten sind 62 verschiedene Kombinationen möglich. Aus dieser möglichen Anzahl an Kombinationen werden einige reduzierte Spannungszustände, die öfter in dieser Arbeit verwendet werden, mit einer speziellen Bezeichnung und einem zugehörigen Kürzel versehen.

7.3.1 Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b

Um die aktiven und begleitenden/passiven Komponenten aus \mathbf{s} und \mathbf{e} bzw. $d\mathbf{s}$ und $d\mathbf{e}$ herauszulösen, werden die Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b (Box 7.1) eingeführt. Die Einträge der Filtermatrizen sind eins oder null, wobei in jeder Matrixzeile nur ein einziger Einsereintrag steht. Die Zeilenanzahl von \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b wird durch die Anzahl der als aktiv festgelegten Verzerrungsgrößen bestimmt. Die Matrix \mathbf{P}_a hat somit n_a Zeilen und sechs Spalten. Komplementär dazu hat die Matrix \mathbf{P}_b $6-n_a$ Zeilen und sechs Spalten. Die Eigenschaften der Matrizen sind in Box 7.1 angegeben.

Primäre Verzerrungs- und Spannungskomponenten	
$\mathbf{e}_a = \mathbf{P}_a \mathbf{e}$...aktive Verzerrungskomponenten
$\mathbf{s}_a = \mathbf{P}_a \mathbf{s}$...zu berechnende Spannungskomponenten
$\mathbf{P}_{a(n_a,6)}$...Filtermatrix $0 \leq n_a \leq 6$

(7-2)

Box 7.1 Aufteilung in primäre und sekundäre Verzerrungs- und Spannungskomponenten mittels Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b ; Eigenschaften und Identitäten der Filtermatrizen

Begleitende Verzerrungs- und Spannungsnullkomponenten

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_b &= \mathbf{P}_b \mathbf{e} && \dots \text{passive/begleitende Verzerrungskomponenten} \\ \mathbf{s}_b &= \mathbf{P}_b \mathbf{s} = \mathbf{0} && \dots \text{vorgegebene Spannungsnullkomponenten} \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$\mathbf{P}_{b(6-n_a,6)} \quad \dots \text{Filtermatrix } 0 \leq n_a \leq 6$$

Additive Dekomposition der Verzerrungen und Spannungen

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{e}_a + \mathbf{P}_b^T \mathbf{e}_b \quad \mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a + \mathbf{P}_b^T \mathbf{s}_b \quad (7-4)$$

Identitäten der Filtermatrizen

$$\mathbf{P}_a^T \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b^T \mathbf{P}_b = \mathbf{J}_{(6,6)} \quad (7-5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a \mathbf{P}_a^T &= \mathbf{J}_{(n_a, n_a)} & \mathbf{P}_b \mathbf{P}_b^T &= \mathbf{J}_{(6-n_a, 6-n_a)} \\ \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b^T &= \mathbf{0}_{(n_a, 6-n_a)} & \mathbf{P}_b \mathbf{P}_a^T &= \mathbf{0}_{(6-n_a, n_a)} \end{aligned} \quad (7-6)$$

Box 7.1 Aufteilung in primäre und sekundäre Verzerrungs- und Spannungskomponenten mittels Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b ; Eigenschaften und Identitäten der Filtermatrizen

7.3.2 Ausgewählte reduzierte Spannungszustände

In Bild 7.1 bis Bild 7.2 sind ausgewählte reduzierte Spannungszustände dargestellt. Um eine möglichst allgemeine Darstellung zu erhalten, werden die Bezugskoordinatenachsen mit den Indizes $\{i, j, k\}$ versehen, die als Platzhalter für die Indizes $\{1, 2, 3\}$ oder zyklische Vertauschungen von diesen - also $\{2, 3, 1\}$ und $\{3, 1, 2\}$ - stehen.

7.3.2.1 FSZ - FachwerkSpannungszustand

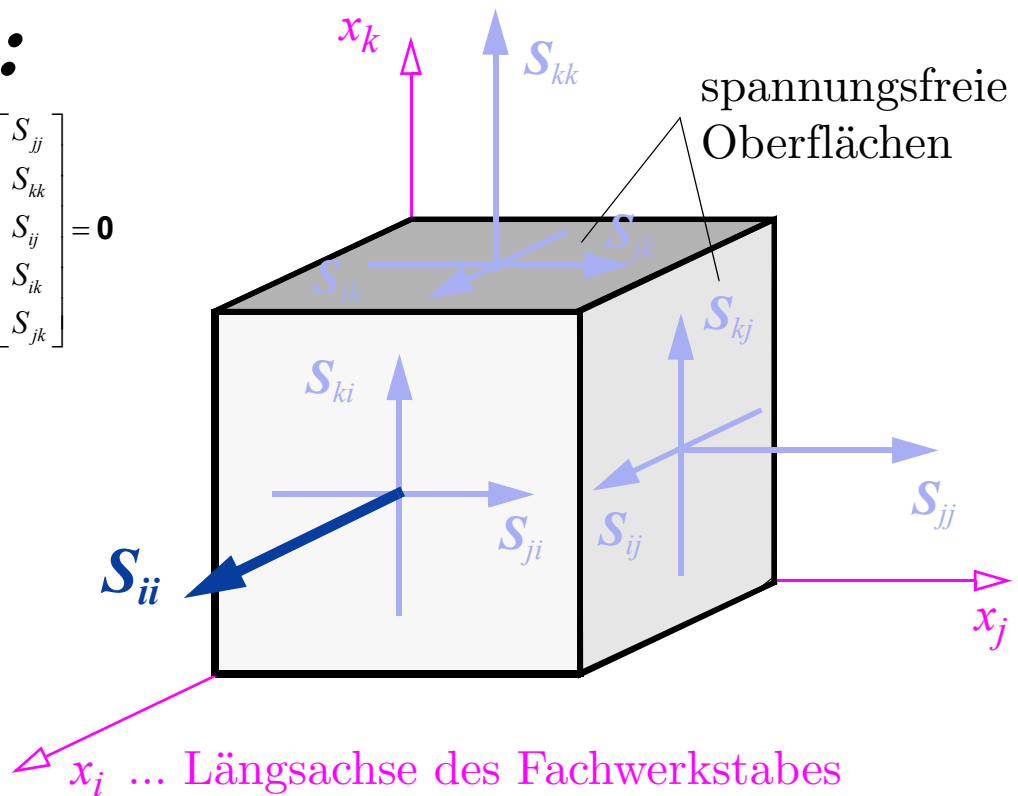
Beim Fachwerkspannungszustand (Kurzbezeichnung *FSZ*) oder 1D-Spannungszustand (Bild 7.1) sind bis auf eine Normalspannungskomponente \mathbf{s}_a alle verbleibenden Spannungskomponenten null. Die x_f -Achse des RME wird dabei als Stabachse bezeichnet. In der Querschnittsfläche normal zur Stabachse wirkt nur eine Normalspannung, die Mantelflächen des RME sind spannungsfrei. Ergänzend zu den Spannungen ergeben sich die aktiven und die begleitenden Verzerrungen:

$$\mathbf{e}_a = [E_{ii}], \quad \mathbf{e}_b = [E_{jj} \quad E_{kk} \quad \gamma_{ij} \quad \gamma_{ik} \quad \gamma_{jk}]^T \quad (7-7)$$

Zu beachten ist, dass die begleitenden Verzerrungen \mathbf{e}_b im Allgemeinen nicht null sind. Für den Fall $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ergeben sich die Filtermatrizen zu:

FSZ:

$$\mathbf{s}_a = [S_{ii}], \mathbf{s}_b = \begin{bmatrix} S_{jj} \\ S_{kk} \\ S_{ij} \\ S_{ik} \\ S_{jk} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



BSZ:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{ii} \\ S_{ij} \\ S_{ik} \end{bmatrix}, \mathbf{s}_b = \begin{bmatrix} S_{jj} \\ S_{kk} \\ S_{jk} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

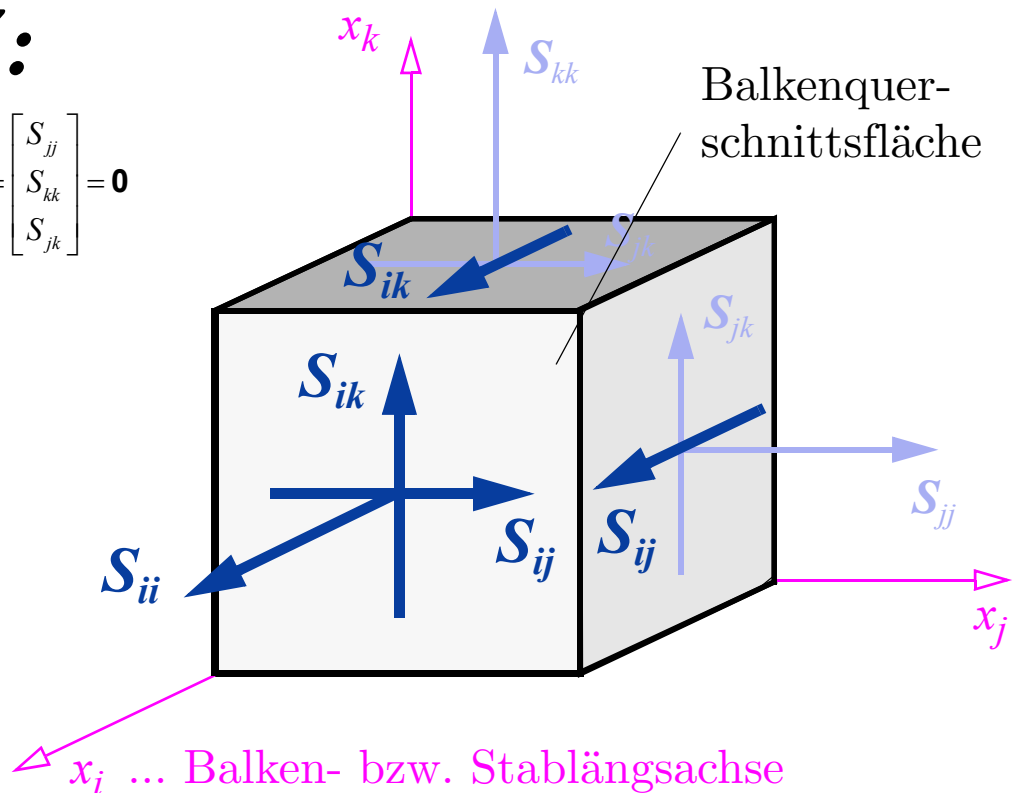


Bild 7.1 *F*achwerk*S*pannungszustand und *B*alken*S*pannungszustand

$$\mathbf{P}_a = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-8)$$

7.3.2.2 BSZ - BalkenSpannungszustand

Bei reduzierten Materialmodellen für Biegebalken werden nur die Spannungskomponenten \mathbf{s}_a in der Querschnittsebene benötigt. Zusätzlich zur Normalspannung des FSZ werden die zwei transversalen Schubspannungskomponenten S_{ik} und S_{ij} mitberücksichtigt (Bild 7.1). Bei den aktiven Verzerrungen \mathbf{e}_a verbleiben zwei Schubverzerrungen und eine Normalverzerrung. Für den ausgewählten Fall $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ergeben sich die Filtermatrizen für den BSZ zu:

$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-9)$$

7.3.2.3 ESZ - Ebener Spannungszustand

Die aktiven Komponenten dieses reduzierten Spannungszustandes liegen in einer Ebene, weshalb der ebene Spannungszustand auch als 2D-Spannungszustand bezeichnet wird. Eine Oberfläche des RME ist spannungsfrei. In Bild 7.2 wurde dafür die Schnittfläche normal zur x_k -Achse gewählt. Damit ergeben sich die aktiven und die begleitenden Verzerrungskomponenten zu:

$$\mathbf{e}_a = [E_{ii} \ E_{jj} \ \gamma_{ij}]^T, \quad \mathbf{e}_b = [E_{kk} \ \gamma_{ik} \ \gamma_{jk}]^T \quad (7-10)$$

Mit $k = 3$ lauten die Filtermatrizen:

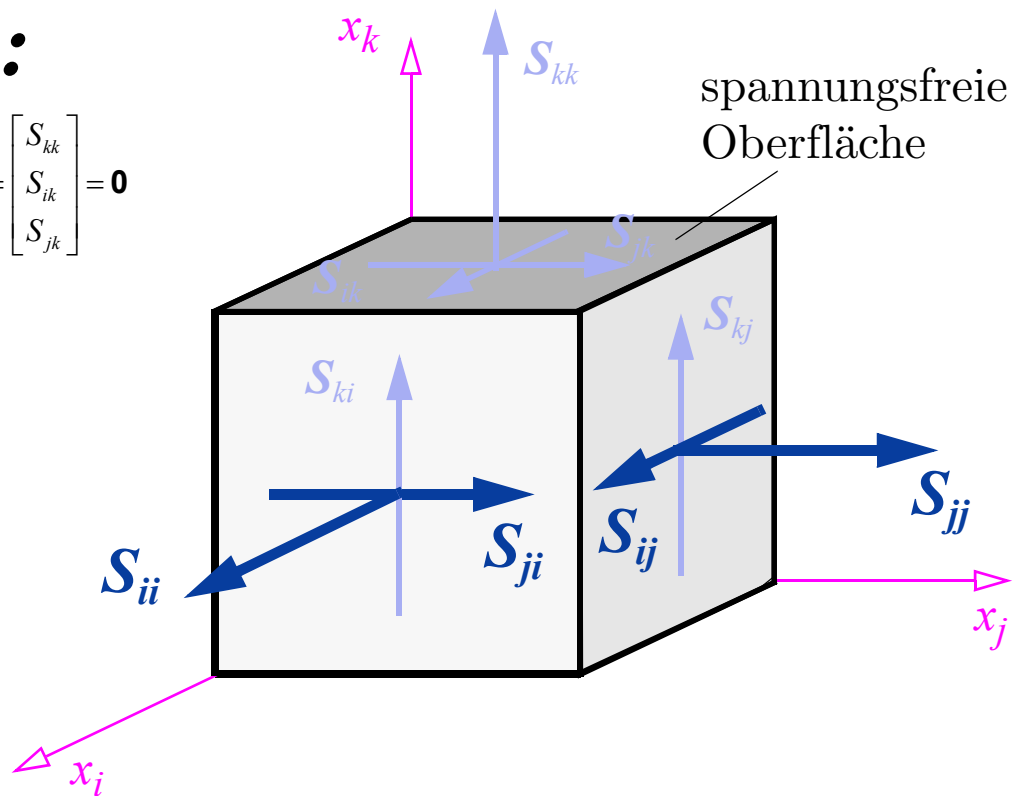
$$\mathbf{P}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

7.3.2.4 BiSZ - Biaxialer Spannungszustand

Der sogenannte biaxiale Spannungszustand ist eine Sonderform des ebenen Spannungszustands, bei dem die Schubspannungskomponente S_{ij} null ist (Bild 7.2).

ESZ:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{ii} \\ S_{jj} \\ S_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_b = \begin{bmatrix} S_{kk} \\ S_{ik} \\ S_{jk} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



BiSZ:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{ii} \\ S_{jj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_b = \begin{bmatrix} S_{kk} \\ S_{ij} \\ S_{ik} \\ S_{jk} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

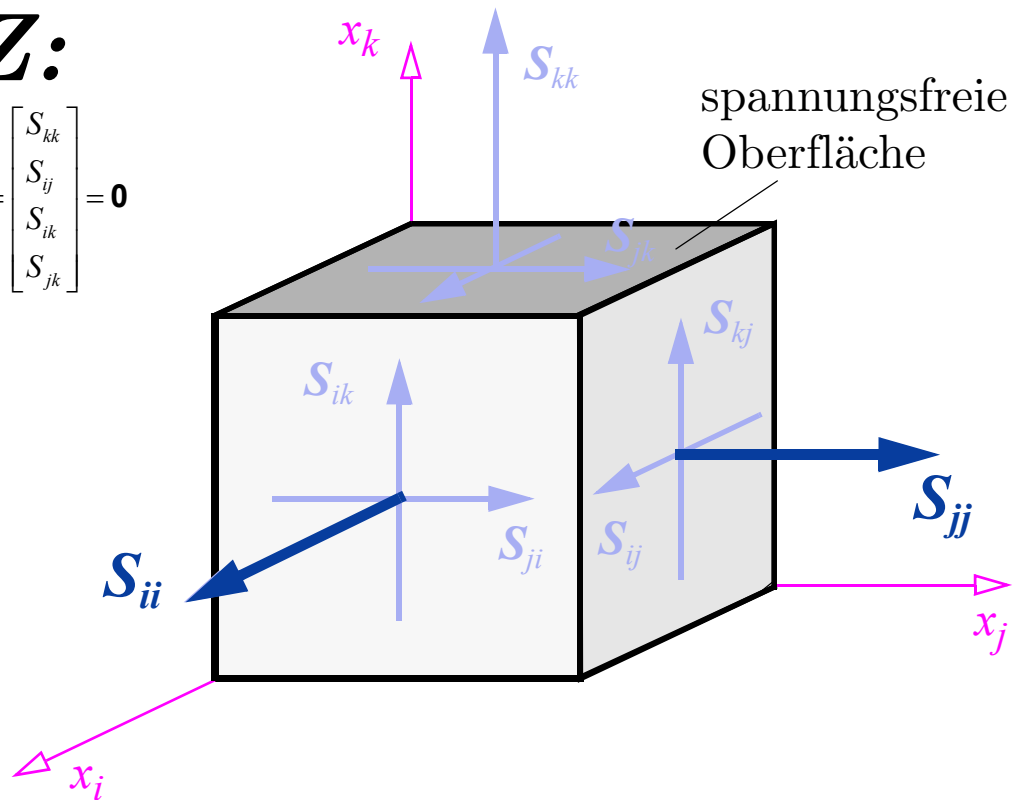


Bild 7.2 Ebener Spannungszustand und Biaxialer Spannungszustand

7.4 Reduktion des linear-elastischen 3D-Materialgesetzes

Ausgangspunkt ist der Zusammenhang $d\mathbf{s} = \mathbf{C}d\mathbf{e}_{el}$ zwischen den Spannungen und den (elastischen) Verzerrungen. Es werden die $(6-n_a)$ Spannungsnullkomponenten $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ und damit die n_a aktiven Verzerrungskomponenten $\mathbf{e}_{a,el}$ angegeben. Gesucht sind die verbleibenden Spannungen \mathbf{s}_a und begleitenden Verzerrungsgrößen $\mathbf{e}_{b,el}$.

7.4.1 Umsortierung der linear-elastischen Materialmatrix

Durch Aufteilung in diese Spannungs- und Verzerrungskomponenten und Umsortierung des linearen Zusammenhangs zwischen den Verzerrungen und den Spannungen, ergibt sich das reduzierte linear-elastische Materialgesetz, das $\mathbf{e}_{a,el}$ und \mathbf{s}_a verbindet, und eine Koppelungsmatrix, mit der aus den aktiven Verzerrungen die begleitenden Verzerrungen \mathbf{e}_b berechnet werden.

7.4.1.1 Ausgangsgleichungen

Die Ausgangsgleichungen (7-12) sind die linear-elastischen Materialgleichungen und die Zwangsbedingungen für \mathbf{s}_b . Die Verzerrungen werden mit Gleichung (7-4) in die aktiven und begleitenden Komponenten aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} - \mathbf{C}\mathbf{e}_{el} &= \mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{e}_{a,el} + \mathbf{P}_b^T \mathbf{e}_{b,el}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_b - \mathbf{P}_b \mathbf{s} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7-12)$$

Gleichungen (7-12) sind $(6+6-n_a)$ lineare Gleichungen für die $(6+6-n_a)$ Unbekannten \mathbf{s} und $\mathbf{e}_{b,el}$. Die Spannungen \mathbf{s}_b und die Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,el}$ werden vorgegeben.

7.4.1.2 Umsortierung und Auflösung des gegebenen Gleichungssystems

Bringt man die gegebenen Größen $\mathbf{e}_{a,el}$ und \mathbf{s}_b auf die rechte Gleichungsseite, ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{P}_b^T \\ -\mathbf{P}_b & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{e}_{b,el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a^T \mathbf{e}_{a,el} \\ -\mathbf{s}_b \end{bmatrix} \quad (7-13)$$

Mit der Matrixidentität aus Anhang I lässt sich die Matrix auf der linken Seite invertieren; als Schreibabkürzung werden die Matrizen $\mathbf{C}_{aa} = \mathbf{P}_a \mathbf{C} \mathbf{P}_a^T$, $\mathbf{C}_{bb} = \mathbf{P}_b \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T$ und $\mathbf{C}_{ab} = \mathbf{P}_a \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T$ eingeführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{e}_{b,el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{P}_a^T - \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T \mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T & \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T \mathbf{C}_{bb}^{-1} \\ -\mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T & \mathbf{C}_{bb}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{a,el} \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} \quad (7-14)$$

Die Vormultiplikation der ersten Gleichung in (7-14) mit der Filtermatrix \mathbf{P}_a ergibt den gesuchten Zusammenhang:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_a \\ \mathbf{e}_{b,el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} - \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T & \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{bb}^{-1} \\ -\mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T & \mathbf{C}_{bb}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{a,el} \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} \quad (7-15)$$

7.4.2 Reduzierte Materialsteifigkeits- und Kopplungsmatrix

Die als Matrixprodukte geschriebenen Submatrizen in Gleichung (7-15) werden abgekürzt mit \mathbf{C}_a und \mathbf{H}_{ba} geschrieben. Da \mathbf{s}_b null ist, gibt die Matrix \mathbf{C}_a (7-17) den Zusammenhang zwischen den aktiven Spannungen \mathbf{s}_a und den Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,el}$ an. Aus diesem Grund wird \mathbf{C}_a als *reduzierte* (linear-elastische) *Materialsteifigkeitsmatrix* bezeichnet. Mit der *Kopplungsmatrix* \mathbf{H}_{ba} (7-19) lassen sich die mitgehenden Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,el}$ aus den aktiven Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,el}$ berechnen (Box 7.2).

Aus Gleichung (7-16) ist ersichtlich, dass sich die Aufgabe in zwei getrennt berechenbare Teilprobleme aufgeteilt hat. Mit der ersten Zeile des Gleichungssystems lassen sich die gesuchten Spannungen \mathbf{s}_a aus den vorgegebenen Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,el}$ berechnen. Im sekundären Berechnungsteil, der zweiten Gleichungszeile in (7-16), werden die begleitenden Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,el}$ mit der Kopplungsmatrix abhängig von $\mathbf{e}_{a,el}$ bestimmt.

Umsortierte Materialsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_a \\ \mathbf{e}_{b,el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & -\mathbf{H}_{ba}^T \\ \mathbf{H}_{ba} & \mathbf{C}_{bb}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{a,el} \\ \mathbf{s}_b = \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7-16)$$

Reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_a = (\mathbf{C}_{aa} - \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T) \quad (7-17)$$

Kopplungsmatrix

$$\mathbf{H}_{ba} = -\mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T \quad (7-18)$$

Verwendete Submatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{aa} &= \mathbf{P}_a \mathbf{C} \mathbf{P}_a^T = \mathbf{C}_{aa}^T & \mathbf{C}_{bb} &= \mathbf{P}_b \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T = \mathbf{C}_{bb}^T \\ \mathbf{C}_{ab} &= \mathbf{P}_a \mathbf{C} \mathbf{P}_b^T & \mathbf{C}_{ba} &= \mathbf{P}_b \mathbf{C} \mathbf{P}_a^T = \mathbf{C}_{ab}^T \end{aligned} \quad (7-19)$$

Box 7.2 Reduzierte linear-elastische Materialsteifigkeits- und Kopplungsmatrix

7.5 Reduktion der elasto-plastischen Materialgleichungen

Ausgangspunkt sind die Gleichungen aus Kap. 6.6.

7.5.1 Ausgangssituation und elastisches Materialgesetz

Bei den elasto-plastischen Materialmodellgleichungen teilen sich die Verzerrungen \mathbf{e} additiv in plastische Verzerrungen \mathbf{e}_{pl} und elastische Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{el} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{pl}$ auf. Mit den elastischen Verzerrungen lassen sich mit der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} die Spannungen \mathbf{s} berechnen.

7.5.1.1 Aufteilung der Spannungskomponenten - Spannungsnullbedingung

Zu jedem Zeitpunkt der Belastungsgeschichte müssen die Spannungen im Fall eines reduzierten Materialmodells zwei Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{s} &\in \mathbb{E} \\ \bullet \quad \mathbf{s}_b = \mathbf{P}_b \mathbf{s} &= \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad d\mathbf{s}_b = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7-20)$$

Es verbleiben die Spannungskomponenten \mathbf{s}_a und deren differentielle Zuwächse $d\mathbf{s}_a$, die nicht null sind. Mit Gleichung (7-4) und der Spannungsnullbedingung (7-20) sind die Spannungen:

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T d\mathbf{s}_a \quad (7-21)$$

Damit spielt sich das gesamte Spannungsgeschehen im \mathbf{s}_a -Subspannungsraum ab.

7.5.1.2 Aufteilung der Verzerrungskomponenten

Die Verzerrungen \mathbf{e} und die plastischen Verzerrungen \mathbf{e}_{pl} lassen sich durch die Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b in jeweils aktive und begleitende Komponenten aufteilen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a &= \mathbf{P}_a \mathbf{e} & \mathbf{e}_b &= \mathbf{P}_b \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_{a,pl} &= \mathbf{P}_a \mathbf{e}_{pl} & \mathbf{e}_{b,pl} &= \mathbf{P}_b \mathbf{e}_{pl} \end{aligned} \quad (7-22)$$

7.5.1.3 Reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix und Kopplungsmatrix

Für das linear-elastische Materialgesetz wird die umsortierte Materialsteifigkeitsmatrix aus Box 7.2 verwendet:

$$\mathbf{s}_a = \mathbf{C}_a (\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_{a,pl}) \quad (7-23)$$

Mit den elastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,el}$ lassen sich mit der Kopplungsmatrix die begleiten-

den elastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,el}$ berechnen:

$$\mathbf{e}_{b,el} = \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{H}_{ba} \mathbf{e}_{a,el} = \mathbf{H}_{ba} (\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_{a,pl}) \quad (7-24)$$

Die elastischen Materialgleichungen gelten selbstverständlich auch für differentielle Verzerrungs- und Spannungszuwächse.

7.5.2 Reduktion der Versagensbedingungen

7.5.2.1 Versagensbedingungen

Alle Versagensbedingungen sind in der Form $F_i(\mathbf{s})$ gegeben. Per definitionem (7-20) sind die Spannungen \mathbf{s}_b und der Spannungszuwachs $d\mathbf{s}_b$ null. Durch Einsetzen von $\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a$ (7-21) in die Versagensbedingungen F_i ergeben sich die reduzierten Versagensbedingungen $F_{a,i}$, die nur Funktion in den Spannungskomponenten \mathbf{s}_a sind:

$$F_i \left(\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a + \underbrace{\mathbf{P}_b^T \mathbf{s}_b}_{=0} \right) = F_i (\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a) = F_{a,i} (\mathbf{s}_a) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (7-25)$$

Jede Versagensbedingung $F_i(\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a) = 0$ stellt einen Subraum (eine Subfläche) der Fläche $F_i(\mathbf{s}) = 0$ dar. Alle Versagensbedingungen werden im Vektor \mathbf{f}_a zusammengefasst:

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{s}_a) = \begin{bmatrix} F_{a,1}(\mathbf{s}_a) \\ F_{a,2}(\mathbf{s}_a) \\ \vdots \\ F_{a,N}(\mathbf{s}_a) \end{bmatrix} \quad (7-26)$$

7.5.2.2 Ableitung der Versagensbedingungen nach den Spannungen

Mit der Kettenregel und den Eigenschaften der Filtermatrizen aus Box 7.1 sind die Gradientenvektoren \mathbf{g}_i der Versagensbedingungen in einen Anteil $\mathbf{g}_{a,i}$ und $\mathbf{g}_{b,i}$ zerlegbar:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} = \left(\frac{\partial \mathbf{s}_a}{\partial \mathbf{s}} \right)^T \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_a} + \left(\frac{\partial \mathbf{s}_b}{\partial \mathbf{s}} \right)^T \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_b} = \mathbf{P}_a^T \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_a} + \mathbf{P}_b^T \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_b} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{g}_{a,i} + \mathbf{P}_b^T \mathbf{g}_{b,i} \quad (7-27)$$

Mit der Identität aus (7-6) lässt sich zeigen, dass $\mathbf{P}_a^T \mathbf{g}_{a,i}$ und $\mathbf{P}_b^T \mathbf{g}_{b,i}$ orthogonal zueinander stehen und sich die Vektoren $\mathbf{g}_{a,i}$ und $\mathbf{g}_{b,i}$ mit

$$\mathbf{g}_{a,i} = \mathbf{P}_a \mathbf{g}_i \quad \mathbf{g}_{b,i} = \mathbf{P}_b \mathbf{g}_i \quad (7-28)$$

berechnen lassen. Die Gradienten \mathbf{g}_i sind Funktionen in der Spannung $\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a$. Der Gradient $\mathbf{g}_{a,i}$ (7-29) ist auch direkt aus der reduzierten Versagensbedingung $F_{a,i}$ (7-25) bere-

chenbar. Zur Bestimmung von $\mathbf{g}_{b,i}$ darf nicht (!) von der reduzierten Versagensbedingung $F_{a,i}$ ausgegangen werden, sondern von der Funktion $F_i(\mathbf{s})!$

$$\mathbf{g}_{a,i} = \frac{\partial F_{a,i}}{\partial \mathbf{s}_a} = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_a} = \mathbf{P}_a \mathbf{g}_i \quad \mathbf{g}_{b,i} = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}_b} = \mathbf{P}_b \mathbf{g}_i \quad (7-29)$$

Die $(6,N)$ -Matrix \mathbf{G} wird mit den Filtermatrizen in einen Anteil \mathbf{G}_a und \mathbf{G}_b aufgespalten.

$$\mathbf{G}_a = \mathbf{P}_a \mathbf{G} = \mathbf{P}_a [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N] = [\mathbf{g}_{a,1}, \mathbf{g}_{a,2}, \dots, \mathbf{g}_{a,N}] = \left[\frac{\partial F_{a,1}}{\partial \mathbf{s}_a}, \frac{\partial F_{a,2}}{\partial \mathbf{s}_a}, \dots, \frac{\partial F_{a,N}}{\partial \mathbf{s}_a} \right] \quad (7-30)$$

$$\mathbf{G}_b = \mathbf{P}_b \mathbf{G} = \mathbf{P}_b [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N]$$

In der numerisch-approximativen Umsetzung der Plastizitätsgleichungen wird die zweite Ableitung der Versagensbedingung nach den Spannungskomponenten \mathbf{s}_a benötigt:

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s}_a \partial \mathbf{s}_a} = \mathbf{P}_a \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \mathbf{P}_a^T \quad (7-31)$$

7.5.3 Plastischer Versagensmechanismus

7.5.3.1 Assoziierter plastischer Versagensmechanismus

Der plastische Versagensmechanismus $d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \mathbf{g}_i$ ist zur Versagensbedingung $F_i(\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}) = 0$ assoziiert und steht damit im Spannungsraum im Punkt \mathbf{s}_n normal auf die jeweilige Versagensbedingung. $d\mathbf{e}_{pl,i}$ lässt sich mit den Filtermatrizen aus Box 7.1 additiv zerlegen:

$$d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \mathbf{g}_i = d\lambda^i (\mathbf{P}_a^T \mathbf{g}_{a,i} + \mathbf{P}_b^T \mathbf{g}_{b,i}) \quad \begin{aligned} d\mathbf{e}_{a,pl,i} &= \mathbf{P}_a d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda \mathbf{g}_{a,i} \\ d\mathbf{e}_{b,pl,i} &= \mathbf{P}_b d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda \mathbf{g}_{b,i} \end{aligned} \quad (7-32)$$

Der Gradientenvektor \mathbf{g}_i - und somit auch $\mathbf{g}_{a,i}$ und $\mathbf{g}_{b,i}$ - wird bei $\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}$ berechnet. Aus der in Gleichung (7-32) dargestellten additiven Aufteilung folgt:

- Der Vektor $\mathbf{g}_{b,i}$ und damit die begleitenden-passiven plastischen Verzerrungsanteile $d\mathbf{e}_{b,pl,i}$ sind i.A. nicht null.
- Die aktiven plastischen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{a,pl,i}$ sind auch zur reduzierten Versagensbedingung F_a assoziiert.
- $d\mathbf{e}_{a,pl,i}$ und $d\mathbf{e}_{b,pl,i}$ haben denselben plastischen Multiplikator $d\lambda^i$.

7.5.3.2 Plastische Verzerrung

Die plastische Verzerrung $d\mathbf{e}_{pl}$ ist additiv aus den einzelnen $d\mathbf{e}_{pl,i}$ aufgebaut und wird als Matrixprodukt $\mathbf{G}d\lambda$ angeschrieben. Mit den Filtermatrizen wird $d\mathbf{e}_{pl}$ in die aktiven und passiven Verzerrungskomponenten aufgeteilt. Diese Aufteilung betrifft ebenso die Verzer-

rungsbeiträge der einzelnen Mechanismen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_{a,pl} &= \mathbf{P}_a d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{P}_a \mathbf{G} d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^N d\lambda^i \mathbf{g}_{a,i} \\ d\mathbf{e}_{b,pl} &= \mathbf{P}_b d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{P}_b \mathbf{G} d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}_b d\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^N d\lambda^i \mathbf{g}_{b,i} \end{aligned} \quad d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \\ \vdots \\ d\lambda^N \end{bmatrix} \quad (7-33)$$

7.5.4 Plastischer Belastungsschritt

Ausgangspunkt sind die Spannungen $\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}$. Aus den vorgegebenen Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$ lässt sich $d\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a d\mathbf{e}_a$ berechnen.

7.5.4.1 Berechnung des aktiven Spannungszuwachses

Die Berechnung des aktiven Sets \mathcal{A} und des Spannungszuwachses $d\mathbf{s}_a$ erfolgt im \mathbf{s}_a -Spannungssubraum. Die Be- und Entlastungsbedingungen, sowie die Konsistenzbedingung sind ebenso in diesem Spannungssubraum formuliert. Der Spannungszuwachs $d\mathbf{s}_a$ wird aus dem reduzierten elastischen Materialgesetz berechnet:

$$d\mathbf{s}_a = \mathbf{C}_a (d\mathbf{e}_a - d\mathbf{e}_{a,pl}) = \mathbf{C}_a (d\mathbf{e}_a - \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda}) = d\mathbf{s}_a^{TR} - \mathbf{C}_a \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda} \quad (7-34)$$

Die Vorgehensweise zur Berechnung des aktiven Sets ist ident zu Kap. 6.7. Der Unterschied besteht nur darin, dass sich die Berechnung im n_a -dimensionalen Subraum mit den aktiven Verzerrungen und den Spannungen abspielt.

7.5.4.2 Rückrechnung von $d\mathbf{e}_{b,pl}$ und $d\mathbf{e}_b$

Über die Kopplungsmatrix (7-24) und die additive Dekomposition der Verzerrungen in einen elastischen und plastischen Anteil lassen sich mittels der bereits bestimmten aktiven Verzerrungen die begleitenden Verzerrungen $d\mathbf{e}_{b,pl}$ und $d\mathbf{e}_b$ rückrechnen. Zuerst wird die plastische Verzerrung

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{G}_b \Big|_{\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}} d\boldsymbol{\lambda} \quad (7-35)$$

mit den bereits berechneten plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ bestimmt. Mit der Kopplungsmatrix (7-24) lässt sich $d\mathbf{e}_b$ berechnen:

$$d\mathbf{e}_b = \mathbf{H}_{ba} (d\mathbf{e}_a - d\mathbf{e}_{a,pl}) + d\mathbf{e}_{b,pl} \quad (7-36)$$

Mit den letzten beiden Gleichungen ist garantiert, dass alle Gleichungen die 3D-Materialmodellgleichungen - bei zusätzlicher Berücksichtigung der Spannungsnullbedingungen und unter Einhaltung des assoziierten plastischen Versagensmechanismus - erfüllen.

7.5.5 Zusammenfassung der Grundgleichungen

Der Aufbau und auch die beinhalteten Gleichungen entsprechen Box 6.1, wobei durch die Aufteilung in aktive und begleitende Größen und der Bedingung $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ und $d\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$, die Gleichungen in zwei Gleichungsgruppen zerfallen: die primären Gleichungen (Box 7.3) mit den aktiven Verzerrungen und Spannungen und die sekundären, begleitenden Gleichungen (Box 7.4) zur Berechnung der mitgehenden Verzerrungskomponenten.

Primäre Gleichungen: aktive Spannungs- und Verzerrungskomponenten

Additive Aufteilung der Verzerrungen:

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_{a,el} + \mathbf{e}_{a,pl} \quad (7-37)$$

Linear-elastische, reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{s}_a = \mathbf{C}_a \mathbf{e}_{a,el} \quad (7-38)$$

Assoziierter plastischer Versagensmechanismus:

$$d\mathbf{e}_{a,pl} = \mathbf{G}_a|_{\mathbf{s}_n} d\lambda$$

mit $\mathbf{G}_a|_{\mathbf{s}_n} = \mathbf{P}_a \mathbf{G}|_{\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}} = \mathbf{P}_a [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N]|_{\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}}$, $d\lambda = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \\ \vdots \\ d\lambda^N \end{bmatrix}$ (7-39)

Be- und Entlastungsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a(\mathbf{s}_{a,n}) &\leq \mathbf{0} \\ d\lambda &\geq \mathbf{0} \\ F_{a,i}(\mathbf{s}_{a,n}) d\lambda^i &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit } \mathbf{f}_a(\mathbf{s}_{a,n}) = \begin{bmatrix} F_{a,1}(\mathbf{s}_{a,n}) \\ F_{a,2}(\mathbf{s}_{a,n}) \\ \vdots \\ F_{a,N}(\mathbf{s}_{a,n}) \end{bmatrix} \quad (7-40)$$

Konsistenzbedingung:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a(\mathbf{s}_{a,n+1}) &= \mathbf{f}_a(\mathbf{s}_{a,n}) + (\mathbf{G}_a|_{\mathbf{s}_n})^T d\mathbf{s}_a \leq \mathbf{0} \\ d\lambda &\geq \mathbf{0} \\ F_{a,i}(\mathbf{s}_{a,n+1}) &= \left[F_{a,i}(\mathbf{s}_{a,n}) + (\mathbf{g}_{a,i}|_{\mathbf{s}_n})^T d\mathbf{s}_a \right] d\lambda^i = 0 \end{aligned} \quad (7-41)$$

Box 7.3 Primären Grundgleichungen der Plastizität in den aktiven Komponenten

**Sekundäre Gleichungen:
begleitende Verzerrungskomponenten**

Additive Aufteilung der Verzerrungen:

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_{b,el} + \mathbf{e}_{b,pl} \quad (7-42)$$

Linear-elastisches Materialgesetz - Kopplungsmatrix:

$$\mathbf{e}_{b,el} = \mathbf{H}_{ba} \mathbf{e}_{a,el} \quad (7-43)$$

Assoziierter plastischer Mechanismus der begleitenden Verzerrungen:

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{G}_b \Big|_{\mathbf{s}_n} d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P}_b \mathbf{G} \Big|_{\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n}} d\boldsymbol{\lambda} \quad (7-44)$$

Box 7.4 Gleichungen zur Berechnung der begleitenden Verzerrungskomponenten

7.6 Minimalabstandsaufgabe im Spannungssubraum

Zur Bestimmung von $d\mathbf{e}_{a,pl}$ wird das Active-Set-Verfahren aus Kap. 6.7.2 übernommen. Die Voraussetzung für die Anwendung dieser Lösungsmethode ist die Formulierung der Aufgabenstellung als Optimierungsaufgabe.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Anwendung des Active-Set-Verfahrens uneingeschränkt möglich ist, da sich die Minimalabstandsaufgabe im n_a -dimensionalen Subraum aus der allgemeinen Minimalabstandsaufgabe (siehe Box 6.3) unter Beachtung der Spannungsnullbedingung $d\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ ableiten lässt.

Ausgangspunkt ist das Problem aus Box 6.3 und die zugehörigen Minimumsbedingungen aus Gleichung (6-42). Diese werden um die Zwangsbedingung $d\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ erweitert. Der Subskript \mathcal{A}_0 aus (6-42) wird hier aus schreibökonomischen Gründen nicht angeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}d\mathbf{s} - d\mathbf{e}_{el} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{P}_b d\mathbf{s} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{G}^T d\mathbf{s} &\leq \mathbf{0} \\
 d\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\
 d\lambda^i (\mathbf{g}_i^T d\mathbf{s}) &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}_0
 \end{aligned} \tag{7-45}$$

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich mit der Dekomposition der Verzerrungen in die Gestalt der Gleichung (7-13) bringen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{P}_b^T \\ -\mathbf{P}_b & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{s} \\ d\mathbf{e}_{b,el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a^T d\mathbf{e}_{a,el} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7-46}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich invertieren, siehe Gleichung (7-14), und gibt:

$$d\mathbf{s}_a - \mathbf{C}_a d\mathbf{e}_{a,el} = d\mathbf{s}_a - \mathbf{C}_a (d\mathbf{e}_a - d\mathbf{e}_{a,pl}) = d\mathbf{s}_a - \mathbf{C}_a (d\mathbf{e}_a - \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda}) \tag{7-47}$$

Mit $d\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a d\mathbf{e}_a$ und durch Dekomposition der Spannungen und Einsetzen der Spannungsnullbedingung in die Ungleichungen in (7-45), ergibt sich mit (7-47) das zu den Gleichungen (7-45) äquivalente Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{C}_a^{-1} (d\mathbf{s}_a^{TR} - d\mathbf{s}_a) + \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{G}_a^T d\mathbf{s}_a &\leq \mathbf{0} \\
 d\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\
 d\lambda^i (\mathbf{g}_{a,i}^T d\mathbf{s}_a) &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}_0
 \end{aligned} \tag{7-48}$$

Damit lässt sich die übergeordnete Minimalabstandsaufgabe formulieren, q.e.d.

Minimalabstandsaufgabe: $\mathbf{f}_{a, \mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_{a,n}) = \mathbf{0}$ bzw. $\mathcal{A}_0 \neq \{ \}$

geg.: $\mathcal{A}_0 \neq \{ \}$ mit $\mathbf{f}_{a, \mathcal{A}_0}(\mathbf{s}_{a,n}, \mathbf{s}_b) = \mathbf{0}$, $d\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a d\mathbf{e}_a$

ges.: $\min\{\mathcal{A}_a\} = \min\left\{\frac{1}{2}(d\mathbf{s}_a^{TR} - d\mathbf{s}_a)^T (\mathbf{C}_a^{-1})(d\mathbf{s}_a^{TR} - d\mathbf{s}_a)\right\}$ (7-49)

wobei $(\mathbf{G}_{a, \mathcal{A}_0})^T d\mathbf{s}_a \leq \mathbf{0}$

Box 7.5 Minimalabstandsaufgabe im n_a -dimensionalen Subraum bei mehreren simultan aktivierbaren Versagensmechanismen

7.7 Beispiel: Reduktion der Prandl-Reuss Gleichungen

Die Reduktionsprozedur wird exemplarisch auf den klassischen Fall der isotropen Mises-Versagensbedingung mit isotrop-elastischem Materialverhalten (Prandl-Reuss Gleichungen) angewandt. Konkret werden die reduzierten elasto-plastischen Materialgleichungen für den *ESZ*, den *BSZ* und den *FSZ* angegeben.

7.7.1 Allgemein: Reduktion der Mises-Typ-Versagensbedingung

Die Mises-Typ-Versagensbedingung und die erste Ableitung nach den Spannungen sind:

$$F(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{a}^T \mathbf{s} - 1 \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{a} \quad (7-50)$$

Da \mathbf{s}_b per definitionem null ist, wird die Versagensbedingung mit der Filtermatrix \mathbf{P}_a nach der Regel aus (7-25) zu einer Funktion F_a mit den primären Spannungskomponenten \mathbf{s}_a als Funktionsargumente reduziert:

$$F_a(\mathbf{s}_a) = \mathbf{s}_a^T \mathbf{P}_a \mathbf{A} \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a + \mathbf{a}^T \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a - 1 = \mathbf{s}_a^T \mathbf{A}_{aa} \mathbf{s}_a + \mathbf{a}_a^T \mathbf{s}_a - 1 \quad (7-51)$$

Die Gradientenvektoren \mathbf{g}_a und \mathbf{g}_b ergeben sich bei $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ mit (7-28) und dem Gradienten der Versagensbedingung aus (7-50) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a &= \mathbf{P}_a \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = 2 \mathbf{A}_{aa} \mathbf{s}_a + \mathbf{a}_a = \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{s}_a} \\ \mathbf{g}_b &= \mathbf{P}_b \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = 2 \mathbf{P}_b \mathbf{A} \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a + \mathbf{P}_b \mathbf{a} = 2 \mathbf{A}_{ba} \mathbf{s}_a + \mathbf{a}_b \end{aligned} \quad (7-52)$$

Mit den Gleichungen (7-51) und (7-52), besonders den Matrizen \mathbf{A}_{aa} , \mathbf{A}_{ba} , \mathbf{a}_a und \mathbf{a}_b , und den reduzierten elastischen Matrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{H}_{ba} hat man alle Bestandteile für Grundgleichungen der Plastizität aus Box 7.3 und Box 7.4.

7.7.2 Isotrope Mises-Versagensbedingung & isotrope elastische Materialmatrix

Die (klassische) isotrope Mises-Versagensbedingung ist quadratisch in den deviatorischen Spannungen und lässt sich als Matrixprodukt (7-50) mit der (6,6)-Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{iso,dev}$ (7-53) anschreiben. Der Vektor \mathbf{a} ist null. Zur Reduktion auf die drei ausgewählten Spannungszustände (*FSZ*, *BSZ* und *ESZ*) werden die jeweiligen Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b aus Kap. 7.3.2 verwendet.

$$\mathbf{A}_{iso,dev} = \frac{1}{2f_y^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \mathbf{0} & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 6 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (7-53)$$

7.7.2.1 FSZ - Fachwerkspannungszustand

Für den Fachwerkspannungszustand ergeben sich die reduzierten Matrizen:

$$\mathbf{A}_{aa,FSZ} = \left(\frac{1}{2f_y^2} \right) [2] \quad \mathbf{A}_{ba,FSZ} = \left(\frac{1}{2f_y^2} \right) [-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7-54)$$

Die reduzierte 1D-Mises-Versagensbedingung F_a (7-51) lautet in diesem Fall:

$$F_a = \left(\frac{S_{11}}{f_y} \right)^2 - 1 \quad (7-55)$$

Die aktiven plastischen und die begleitenden plastischen Verzerrungszuwächse sind:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_{a,pl} &= [dE_{11,pl}] = d\lambda \mathbf{g}_a = d\lambda \left(\frac{1}{f_y^2} \right) S_{11} \\ d\mathbf{e}_{b,pl} &= \begin{bmatrix} dE_{22,pl} \\ dE_{33,pl} \\ d\gamma_{12,pl} \\ d\gamma_{13,pl} \\ d\gamma_{23,pl} \end{bmatrix} = d\lambda \mathbf{g}_b = d\lambda \left(\frac{1}{2f_y^2} \right) \begin{bmatrix} -S_{11} \\ -S_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{dE_{11,pl}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-56)$$

Die volumetrischen plastischen Verzerrungen (= die Summe der plastischen Hauptnormalverzerrungen) sind bei der Mises-Versagensbedingung definitionsgemäß null. Diese Besonderheit des Mises-Materialmodells ist durch die plastischen Verzerrungen in (7-56) erfüllt. Um die begleitenden Verzerrungen mit dem isotropen elastischen Materialgesetz rückzurechnen, wird die Matrix \mathbf{H}_{FSZ} mit (7-18) berechnet. Die elastischen Schubverzerrungen sind null und die begleitenden elastischen Dickenverzerrungen $E_{22,el}$ und $E_{33,el}$ sind gleich und ergeben sich zu $-vE_{11,el}$.

7.7.2.2 BSZ - Balkenspannungszustand

Für diesen Fall ergeben sich die reduzierten Matrizen:

$$\mathbf{A}_{aa,BSZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ba,BSZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-57)$$

Die Versagensbedingung und die aktiven und begleitenden plastischen Verzerrungszuwächse sind:

$$F_a(\mathbf{s}_a) = \mathbf{s}_a^T \mathbf{A}_{aa,BSZ} \mathbf{s}_a - 1 = \frac{1}{f_y^2} (S_{11}^2 + 3S_{12}^2 + 3S_{13}^2) - 1$$

$$d\mathbf{e}_{a,pl} = \begin{bmatrix} dE_{11,pl} \\ d\gamma_{12,pl} \\ d\gamma_{13,pl} \end{bmatrix} = d\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2S_{11} \\ 6S_{12} \\ 6S_{13} \end{bmatrix} \quad d\mathbf{e}_{b,pl} = \begin{bmatrix} dE_{22,pl} \\ dE_{33,pl} \\ d\gamma_{23,pl} \end{bmatrix} = d\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -S_{11} \\ -S_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{dE_{11,pl}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-58)$$

Die Konsistenz mit dem plastischen 3D-Mechanismus zeigt sich wiederum im Verschwinden der plastischen volumetrischen Verzerrung, $dE_{11,pl} + dE_{22,pl} + dE_{33,pl} = 0$.

7.7.2.3 ESZ - Ebener Spannungszustand

Beim ESZ ergeben sich die reduzierten Matrizen:

$$\mathbf{A}_{aa,ESZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ba,ESZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-59)$$

Die Versagensbedingung und die plastischen Verzerrungskomponenten für den ESZ sind:

$$F_a(\mathbf{s}_a) = \mathbf{s}_a^T \mathbf{A}_{aa,ESZ} \mathbf{s}_a - 1 = \frac{1}{f_y^2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 - S_{11}S_{22} + 3S_{12}^2) - 1$$

$$d\mathbf{e}_{a,pl} = \begin{bmatrix} dE_{11,pl} \\ dE_{22,pl} \\ d\gamma_{12,pl} \end{bmatrix} = d\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2S_{11} - S_{22} \\ 2S_{22} - S_{11} \\ 6S_{12} \end{bmatrix} \quad (7-60)$$

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \begin{bmatrix} dE_{33,pl} \\ d\gamma_{13,pl} \\ d\gamma_{23,pl} \end{bmatrix} = d\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f_y^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -S_{11} - S_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dE_{11,pl} - dE_{22,pl} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

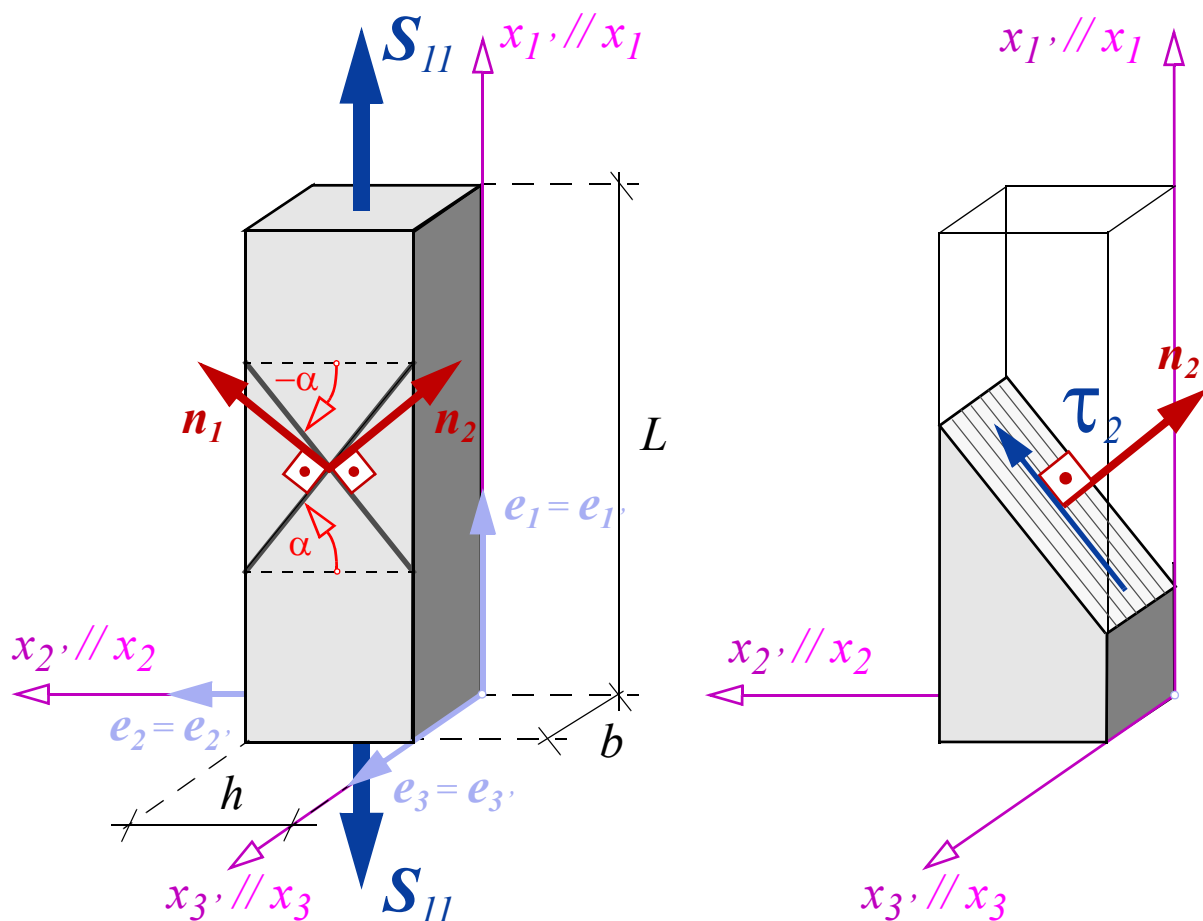
Die beiden begleitenden elastischen Schubverzerrungen sind wiederum null; die Dickenverzerrung ist über die Querdehnzahl von den aktiven elastischen Normalverzerrungen $E_{11,el}$ und $E_{22,el}$ abhängig: $E_{33,el} = -\nu/(1-\nu)(E_{11,el} + E_{22,el})$.

7.8 Beispiel: Fachwerkstab mit zwei Schubmechanismen

In diesem Abschnitt wird das elasto-plastische Materialverhalten eines Fachwerkstabs beschrieben, wobei von einer dreidimensionalen Materialbeschreibung ausgegangen wird.

7.8.1 Vorgehensweise

Das Materialmodell setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen: der Materialsteifigkeitsmatrix und den Versagensbedingungen und den zugehörigen plastischen Versagensmechanismen. Durch Einführung der Spannungsnullbedingungen (FSZ) wird das Materialmodell reduziert. Im letzten Schritt wird der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang berechnet.



$$\mathbf{s}_a = [S_{11}]$$

$$\mathbf{s}_b = [S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{23}] = \mathbf{0}$$

Bild 7.3 Stabelement mit zwei Scharen von möglichen Versagensebenenorientierungen. Die Ebenen sind um die Winkel $\pm\alpha$ zur horizontalen x_2' -Achse geneigt.

7.8.2 Systemgeometrie

Die finiten Abmessungen des quaderförmigen Körpers sind die Querschnittsbreite b und -höhe h und die Länge L (Bild 7.3). Die $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen und die globalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatenachsen liegen parallel zu den Quaderkanten. Die Stablängsachse verläuft parallel zur x_1 -Achse.

7.8.3 3D-Materialmodell

7.8.3.1 Linear-elastische Modellbestandteile

Das Materialverhalten im elastischen Bereich ist linear und isotrop und wird durch die Materialsteifigkeitsmatrix beschrieben:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7-61)$$

7.8.3.2 Versagensbedingungen

Obwohl das elastische Materialverhalten isotrop ist, weist das plastische Materialverhalten eine Richtungsabhängigkeit auf. Es gibt zwei ausgezeichnete Versagensebenenorientierungen \mathbf{n}_i , in denen ab einer Grenzscherubspannung τ_u plastische Schubmechanismen aktiviert werden. Diese beiden Orientierungen liegen jeweils im Winkel $\pm\alpha$ zur x_2 -Achse geneigt. Der Winkel α soll im Wertebereich $(0^\circ, 90^\circ)$ liegen. Es wird angenommen, dass die Oberfläche dieser Ebenen parallel zur $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatenebene eine gerillte Struktur aufweist, sodass ein plastischer Gleitvorgang nur in der Richtung parallel zur $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatenebene stattfinden kann. Diese gerillte Oberfläche ist in Bild 7.3 anhand eines Schnitts parallel zu einer der beiden Gleitebenenorientierungen schematisch dargestellt.

Die für die beiden Versagensbedingungen maßgebenden Spannungen sind die Schubspannungen:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathbf{p}_1^T \mathbf{s} = \begin{bmatrix} -sc & sc & 0 & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{s} \\ \tau_2 &= \mathbf{p}_2^T \mathbf{s} = \begin{bmatrix} sc & -sc & 0 & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{s} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} s &= \sin \alpha \\ c &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (7-62)$$

Sobald der Betrag einer der beiden Schubspannungen den Grenzwert τ_u erreicht, können plastische Verformungsvorgänge aktiviert werden. Die beiden Mohr-Typ-Versagensbedingungen lauten:

$$F_i = \left(\frac{\tau_i}{\tau_u} \right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{\tau_u^2} \right) \mathbf{s}^T (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i) \mathbf{s} - 1 \quad i = 1, 2 \quad (7-63)$$

Die erste Ableitung von F_i nach den Spannungen ist:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} = \left(\frac{2}{\tau_u^2} \right) (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i) \mathbf{s} \quad (7-64)$$

Die assoziierten plastischen Verzerrungszuwächse ergeben sich zu $d\mathbf{e}_{pl,i} = d\lambda^i \mathbf{g}_i$.

7.8.4 Konsistente Reduktion des elastischen Materialmodells

7.8.4.1 Fachwerkspannungszustand - FSZ

Bei dem Einzelstabelement, bestehend aus dem oben beschriebenen Material mit der Stabachse parallel zur x_1 - bzw. x_2 -Koordinatenachse, sind per definitionem die Seitenflächen stets spannungsfrei. Dieser reduzierte Spannungszustand (FSZ) wurde bereits in Kap. 7.3.2.1 definiert. Obwohl \mathbf{s}_a nur die Normalspannung S_{11} enthält, wird die Matrixschreibweise beibehalten. Ergänzend zu den in Bild 7.3 angeführten Spannungen ergeben sich die aktiven und die begleitenden Verzerrungen:

$$\mathbf{e}_a = [E_{11}], \quad \mathbf{e}_b = [E_{22} \quad E_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}]^T \quad (7-65)$$

Die begleitenden Verzerrungen \mathbf{e}_b sind im Allgemeinen nicht null. Die für diesen Fall zur Durchführung der konsistenten Reduktionsprozedur benötigten Filtermatrizen sind in (7-8) angeführt.

7.8.4.2 Reduktion der linear-elastischen, isotropen Materialsteifigkeitsmatrix

Für den FSZ ergeben sich die reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix und die Kopplungsmatrix zu:

$$\mathbf{C}_a = [E], \quad \mathbf{H}_{ba}^T = -\nu [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (7-66)$$

Im isotropen Fall entstehen im elastischen Fall zur aktiven axialen Normalverzerrung somit nur begleitende Normalverzerrungen in der Querschnittsebene, die aufgrund der Isotropie in alle Richtungen gleich groß sind.

7.8.5 Reduktion der elasto-plastischen Materialgleichungen

7.8.5.1 Reduktion der Versagensbedingung und einaxiale Versagenslast

Die beiden quadratischen Versagensbedingungen reduzieren sich im Fall des FSZ auf zwei

gleiche Funktionen $F_{a,i}$ in der einzigen Normalspannungskomponente S_{II} :

$$F_{a,1} = F_{a,2} = \left(\frac{S_{II} sc}{\tau_u} \right)^2 - 1 \quad (7-67)$$

Die einaxiale Grenzspannung $S_{II,ult}$, die den Versagensbeginn angibt, ist:

$$S_{II,ult} = \pm \frac{\tau_u}{sc}. \quad (7-68)$$

Im Wertebereich von $\alpha \in (0, \pi/2)$ ist das Produkt der trigonometrischen Funktionen im Nenner von Gleichung (7-68) immer positiv. Der Betrag der elastischen Druck- und Zuglimitspannung ist gleich. Bei Erreichen dieses Limits sind beide Versagensbedingungen erfüllt und daher können beide zugehörigen Versagensmechanismen aktiviert werden. Die Menge der potentiell aktiven Versagensmechanismen ist $\mathcal{A}_0 = \{1,2\}$

7.8.5.2 Gradienten der Versagensbedingungen

Die beiden Gradienten beim FSZ sind:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a) = \left(\frac{2S_{II}}{\tau_u^2} \right) sc \begin{bmatrix} sc \\ -sc \\ 0 \\ -(c^2 - s^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a) = \left(\frac{2S_{II}}{\tau_u^2} \right) sc \begin{bmatrix} sc \\ -sc \\ 0 \\ (c^2 - s^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-69)$$

Diese lassen sich in der ($q = 6, p = 2$)-Matrix \mathbf{G} zusammenfassen. Am Limitspannungspunkt $\mathbf{s}_a = [S_{II,ult}]$ (7-68) hat die Matrix \mathbf{G} den Rang $r = 2$. Laut den Definitionen aus Gleichung (3-6) bilden die beiden Ebenen im Schnittpunkt $\mathbf{s}_n = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a$ eine (zweidimensionale) Kante im sechsdimensionalen Raum ($q = 6$).

7.8.5.3 Plastische Verzerrungszuwächse

Für den angegebenen, reduzierten Spannungszustand ergeben sich aus den beiden Versagensbedingungen die plastischen Verzerrungszuwächse $d\mathbf{e}_{pl,i}$. Diese werden aktiviert, sobald die Normalspannung S_{II} die Limitlast $S_{II,ult}$ aus Gleichung (7-68) erreicht. Für die Limitzugspannung sind die plastischen Verzerrungszuwächse:

$$d\mathbf{e}_{pl,1} = d\lambda^1 \begin{pmatrix} \frac{2}{\tau_u} \\ 0 \\ -(c^2 - s^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} dE_{11,pl,1} \\ dE_{22,pl,1} \\ 0 \\ d\gamma_{12,pl,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{e}_{pl,2} = d\lambda^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{\tau_u} \\ 0 \\ (c^2 - s^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} dE_{11,pl,2} \\ dE_{22,pl,2} \\ 0 \\ d\gamma_{12,pl,2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-70)$$

Bei der Drucklimitlast ändern sich bei beiden plastischen Verzerrungszuwächsen die Vorzeichen.

7.8.5.4 Plastische Verformungen

Zugehörig zu den plastischen Verzerrungszuwächsen lässt sich je Versagensmechanismus ein differentieller plastischer Verschiebungszustand des Stabelements angeben:

$$d\mathbf{U}_{pl,i} = \begin{bmatrix} dU_{1,pl,i} \\ dU_{2,pl,i} \\ dU_{3,pl,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dE_{11,pl,i} x_1 \\ dE_{22,pl,i} \left(x_2 - \frac{h}{2} \right) + d\gamma_{12,pl,i} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-71)$$

Die differentiellen plastischen Verschiebungen $d\mathbf{U}_{pl,i}$ lassen sich in drei Anteile aufteilen, die in Gleichung (7-71) bereits superponiert wurden:

- einen axialen Verschiebungsanteil $dU_{1,pl,i}$, der so gewählt wurde, dass sich das Stabelement am Fußpunkt bei $x_1 = 0$ nicht in axialer Richtung verschiebt und seine maximale Größe bei $x_1 = L$ hat.
- einen vertikalen Verschiebungsanteil in x_2 -Richtung zufolge $dE_{22,pl,i}$, der linear in x_2 ist. Die Achse durch den Stabquerschnitt verschiebt sich dabei nicht. Bei der Zuglimitlast $S_{11,ult} > 0$ kommt es, aufgrund von $dE_{22,pl,i} < 0$, bei Versagensmechanismus eins und zwei zu einer gleichförmigen Querschnittsverjüngung über die Stablänge in x_2 -Richtung.
- einen vertikalen Verschiebungsanteil in x_2 -Richtung zufolge von $d\gamma_{12,pl,i}$, der linear in x_1 ist und somit einen Schubmechanismus repräsentiert.

Die plastischen Verschiebungszuwächse $dU_{3,pl,i}$ in die x_3 -Richtung sind bei den angegebenen plastischen Versagensmechanismen null.

Bei simultaner Aktivierung beider Versagensmechanismen werden die Verzerrungen und Verschiebungen aus Gleichung (7-70) bzw. (7-71) überlagert. Offen bleibt die Frage, welche der beiden Versagensmechanismen wirklich aktiv ist und wie groß die plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$, die die betragsmäßige Größe der plastischen Verzerrungszuwächse festlegen, sind.

7.8.5.5 Aufteilung der plastischen Versagensmechanismen

Die plastischen Verzerrungen in aktive und begleitende Komponenten aufgeteilt lauten:

$$d\mathbf{e}_{a,pl} = \mathbf{P}_a d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{G}_a d\boldsymbol{\lambda} = 2S_{11} \left(\frac{sc}{\tau_u} \right)^2 [1 \quad 1] \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{P}_b d\mathbf{e}_{pl} = \mathbf{G}_b d\boldsymbol{\lambda} = 2S_{11} \frac{sc}{\tau_u^2} \begin{bmatrix} -sc & -sc \\ 0 & 0 \\ -(c^2 - s^2) & (c^2 - s^2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (7-72)$$

7.8.6 Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs

7.8.6.1 Spannungs- und Verformungszustand bei t_n

Ausgangspunkt ist ein einaxialer Limitspannungszustand im Zugbereich, d.h. $S_{11} = S_{11,ult}$. Beide Versagensbedingungen sind erfüllt und beide plastischen Versagensmechanismen können potentiell aktiviert werden. Es wird eine differentieller positiver Verzerrungszuwachs dE_{11} vorgegeben. Bis zum aktuellen Belastungszeitpunkt t_n sollen sich noch keine plastischen Verzerrungen ausgebildet haben. Die Verzerrungsgrößen zum Startzeitpunkt t_n sind:

$$\mathbf{e}_{a,n} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_u}{E sc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_{b,n}^T = - \left(\frac{\nu \tau_u}{E sc} \right) [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{e}_{a,pl,n} = [0] \quad \mathbf{e}_{b,pl,n}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (7-73)$$

$$d\mathbf{e}_a = [dE_{11}]$$

Mit diesen Verzerrungsgrößen lassen sich die Ausgangswerte bestimmen:

$$\mathbf{s}_{a,n} = [S_{11}] = \begin{bmatrix} \tau_u \\ sc \end{bmatrix} \quad d\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a d\mathbf{e}_a = [E dE_{11}] \quad dE_{11} > 0$$

$$\mathcal{A}_0 = \{1, 2\} \quad \mathbf{G}_{a,\mathcal{A}_0} = \frac{2sc}{\tau_u} [1 \quad 1] \quad (7-74)$$

Der Subraum der aktiven Spannungskomponente hat die Dimension $p_a = 1$; die Anzahl der sich im Limitspannungspunkt schneidenden Versagensbedingungen ist $q = 2$; die Matrix \mathbf{G}_a aus Gleichung (7-74) hat den Rang $r = 1$. Nach den Definitionen aus Kap. 3.4 ist im

Limitspannungspunkt im Subraum das Schnittgebilde der beiden Versagensbedingungen ein Eck- und Berührungspunkt (bei der Raumdimension $p = 1$ fallen die Definitionen für Eck- und Berührungspunkt zusammen). Da ein Berührungspunkt auch immer ein Pyramidenpunkt ist, hat man im eindimensionalen Subraum eine uneindeutige Situation, da die plastischen Verzerrungszuwächse $d\mathbf{e}_{a,pl,i}$ kollinear sind. Die Auflösung des Pyramidenpunkts in der Berechnung erfolgt über die Moore-Penrose-Pseudoinverse.

7.8.6.2 Berechnung

Mit $d\mathbf{e}_a$ und $d\mathbf{s}_a^{TR}$ ergibt sich ein plastischer Deformationsschritt. Die plastischen Multiplikatoren $d\lambda^i$ werden über die **ACTIVESETCALC_FUNC** Funktion aus Box 6.4 berechnet:

$$d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \end{bmatrix} = \left[E \left(\frac{2sc}{\tau_u} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right]^+ \begin{bmatrix} 2sc \\ \tau_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} E dE_{11} = \frac{\tau_u}{4sc} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dE_{11} \quad (7-75)$$

Damit ergibt sich:

$$d\mathbf{e}_{a,pl} = [dE_{11}] \quad d\mathbf{s}_a = [0] \quad \mathcal{A} = \{1,2\} \quad d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \frac{\tau_u}{4sc} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dE_{11} \quad (7-76)$$

Beide Versagensmechanismen sind aktiv und aufgrund der Berechnung (7-75) mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen ergeben sich gleich große plastische Multiplikatoren. Die aufgebrachte Verzerrung dE_{11} geht zur Gänze in den plastischen Verzerrungsanteil über; die aktiven Spannungszuwächse sind im Fall perfekter Plastizität null.

Mit dem sekundären Berechnungsteil werden die begleitenden plastischen Verzerrungszuwächse $d\mathbf{e}_{b,pl}$ mit (7-72) und den Größen aus (7-75) berechnet:

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{G}_{b,\mathcal{A}} \Big|_{\mathbf{s}_n} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = dE_{11} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dE_{22,pl} \\ dE_{33,pl} \\ d\gamma_{12,pl} \\ d\gamma_{13,pl} \\ d\gamma_{23,pl} \end{bmatrix} \quad (7-77)$$

Es verbleibt somit nur mehr eine begleitende plastische Verzerrungskomponente $dE_{22,pl}$, da beide plastische Multiplikatoren $d\lambda^i$ denselben Betrag haben. Die Zuwächse der begleitenden Kompletverzerrungen $d\mathbf{e}_b$ sind in diesem Fall gleich den plastischen Zuwächsen $d\mathbf{e}_{b,pl}$ aus Gleichung (7-77).

7.8.6.3 Spannungs- und Verformungszustand bei t_{n+1}

Die Verzerrungsgrößen zum Zeitpunkt t_{n+1} sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{a,n+1} &= \left[\frac{\tau_u}{E sc} + dE_{11} \right] & \mathbf{e}_{b,n+1}^T &= \left[-\left(\frac{\nu \tau_u}{E sc} \right) - dE_{11} \quad -\left(\frac{\nu \tau_u}{E sc} \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\
\mathbf{e}_{a,pl,n+1} &= [dE_{11}] & \mathbf{e}_{b,pl,n+1}^T &= dE_{11} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T
\end{aligned} \tag{7-78}$$

Mit dem Rückeinsetzen der Verzerrungen aus (7-78) in das elastische dreidimensionale Materialgesetz ist die Richtigkeit des Ergebnisses kontrollierbar.

7.8.7 Mehrdeutigkeit der Lösung

Mit der Anwendung der Moore-Penrose-Pseudoinversen zur Berechnung der Anteile $d\lambda^i$ (7-75) wurde eine mögliche Lösung berechnet. Aufgrund der Uneindeutigkeit der Situation sind alle plastischen Multiplikatoren

$$d\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} d\lambda^1 \\ d\lambda^2 \end{bmatrix} = \frac{\tau_u}{4sc} \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} dE_{11} \quad \delta \in [-1,1] \tag{7-79}$$

ohne dass sich der axiale Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang ändert mögliche Lösungen. Der Parameter kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen; bei $\delta = 1$ ist nur der Mechanismus 1 aktiv; bei $\delta = -1$ nur Mechanismus 2. Auf die axiale Verformung hat das keinen Einfluss; es gilt weiterhin $d\mathbf{e}_a = d\mathbf{e}_{a,pl} = [dE_{11}]$. Aber der differentielle Zuwachs der begleitenden plastischen Verzerrungen ändert sich:

$$d\mathbf{e}_{b,pl} = \mathbf{G}_{b,\mathcal{A}} \Big|_{\mathbf{s}_n} d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\left(\frac{c^2 - s^2}{sc} \right) \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dE_{11} \tag{7-80}$$

Die Verjüngung in Dickenrichtung $dE_{22,pl}$ bleibt gleich, aber die plastische Schubverzerrung $d\gamma_{12,pl}$ ist von δ abhängig. Die Gesamtverzerrungen zum Zeitpunkt t_{n+1} ist:

$$\mathbf{e}_{b,n+1} = \left[-\left(\frac{\nu \tau_u}{E sc} \right) - dE_{11} \quad -\left(\frac{\nu \tau_u}{E sc} \right) \quad -\left(\frac{c^2 - s^2}{sc} \right) \delta dE_{11} \quad 0 \quad 0 \right]^T \tag{7-81}$$

Der axiale Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang bleibt ungeändert, aber die Systemverformung hängt von der Aufteilung zwischen den plastischen Mechanismen ab, man hat also physikalisch eine uneindeutige Situation.

7.9 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, wie sich Spannungsnullbedingungen $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ in elasto-plastische Materialmodelle mit beliebig vielen Versagensbedingungen und plastischen Versagensmechanismen systematisch und konsistent inkorporieren lassen. Mit den erhaltenen Gleichungen lässt sich ein differentieller elastischer bzw. elasto-plastischer Deformationsschritt bei Vorgabe der n_a aktiven Verzerrungen $d\mathbf{e}_a$ berechnen.

Die Berechnung lässt sich dabei in zwei Rechenschritte aufspalten. Im primären Berechnungsschritt werden die aktiven Verzerrungen vorgegeben und die zugehörigen Spannungskomponenten $d\mathbf{s}_a$ berechnet. In einem zweiten Berechnungsteil werden die begleitenden elastischen und plastischen Verzerrungskomponenten $d\mathbf{e}_b$ so bestimmt, dass der assoziierte Versagensmechanismus und die Spannungsnullbedingungen erfüllt sind. Der Hauptgewinn in der Aufspaltung der Rechenprozedur liegt in einem effizienter zu berechnenden, weil algebraisch-reduzierten, primären Rechenteil. Das Materialmodell selbst bleibt aber ungeändert dreidimensional!

Mit der hier vorgestellten Systematik können beliebige dreidimensional formulierte elasto-plastische Materialmodelle mit einer uneingeschränkten Anzahl von Versagensmechanismen so umgewandelt werden, um diese „reduzierten“ Materialmodelle in Platten-, Schalen- und Balkenmodelle einzubauen. Auch im später vorgestellten Mikrostrukturmodell kommen Materialmodelle mit Spannungsnullrandbedingungen zum Einsatz.

TEIL III

Rechnerische Umsetzung der Multi- Mechanismen- Plastizität

Inhalt:

- 8 Lösung der Multi-Mechanismen-Plastizitätsgleichungen**
 - 9 Lösungsmethoden nichtlinearer Optimierungsaufgaben**
-

8

Lösung der Multi- Mechanismen- Plastizitäts- gleichungen

8.1 Einleitung

8.1.1 Problemstellung

In Kap. 6 bzw. Kap. 7 wurde als Belastung das Differential $d\mathbf{e}$ vorgegeben und dann der Zuwachs der plastischen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{pl}$ und Spannungen $d\mathbf{s}$ bestimmt. Zur Berechnung dieser Größen mussten die Differentialgleichungen nur als algebraische Gleichungen behandelt werden. In diesem Abschnitt wird diese Aufgabe erweitert: Es wird ein Verzerrungsverlauf $\mathbf{e}(t)$ zwischen den Verzerrungen zum Zeitpunkt t_n und t_{n+1} vorgegeben (Bild 8.1). Zum Anfangszeitpunkt sind alle problemrelevanten Größen, wie die Verzerrungen \mathbf{e}_n und die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n}$, bekannt. Mit dem elastischen Materialgesetz ergeben sich daraus die Spannungen \mathbf{s}_n . Gesucht wird der Verlauf der plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl}(t)$ und der Spannungen $\mathbf{s}(t)$ bis zum Zeitpunkt t_{n+1} .

Um für den vorgegebenen Verzerrungsverlauf die gesuchten Größen zu bestimmen, muss das Differentialgleichungssystem, das den elasto-plastischen Deformationsvorgang beschreibt, integriert werden. Dieser Vorgang wird abgekürzt als *Spannungsintegration* bezeichnet. Im Allgemeinen handelt es sich bei den Plastizitätsgleichungen um ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zugehörigen Zwangsgleichungen (KKT-Bedingungen). Die Nichtlinearität erlaubt nur in einigen Sonderfällen eine geschlossene analytische Lösung, ansonsten muss eine approximativ-numerische Integrationsmethode gewählt werden. Dabei werden die Integralgleichungen in nichtlineare algebraische Gleichungen umgewandelt.

Analog zu der differentiellen Aufgabenformulierung lassen sich diese algebraischen Gleichungen in ein äquivalentes konvexes Optimierungsproblem umformulieren. Damit eröffnet sich eine Palette an möglichen Verfahren, um diese nichtlineare Optimierungsaufgabe zu lösen.

Zwei Sonderkapitel sind hier noch angeführt: In einer globalen Newton-Raphson Berechnungsprozedur wird die Linearisierung der Spannungen nach den Verzerrungszuwächsen benötigt. Je nach verwendetem Integrationsverfahren unterscheiden sich diese Größen, was zur Namensgebung *algorithmische elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix* $\mathbf{C}_{ep,alg}$ geführt hat. Im letzten Unterkapitel soll gezeigt werden, dass bei der Integration der elasto-plastischen Differentialgleichungen bei reduzierten Spannungszuständen ebenso ein konvexes Optimierungsproblem resultiert. Damit lassen sich dieselben Lösungsverfahren, wie im allgemeinen 3D-Fall anwenden.

8.1.2 Literatur & Stand der Forschung

8.1.2.1 Analytische Lösung

Reuss (1930) löst die Differentialgleichungen mit Mises-Versagensbedingung und assoziier-

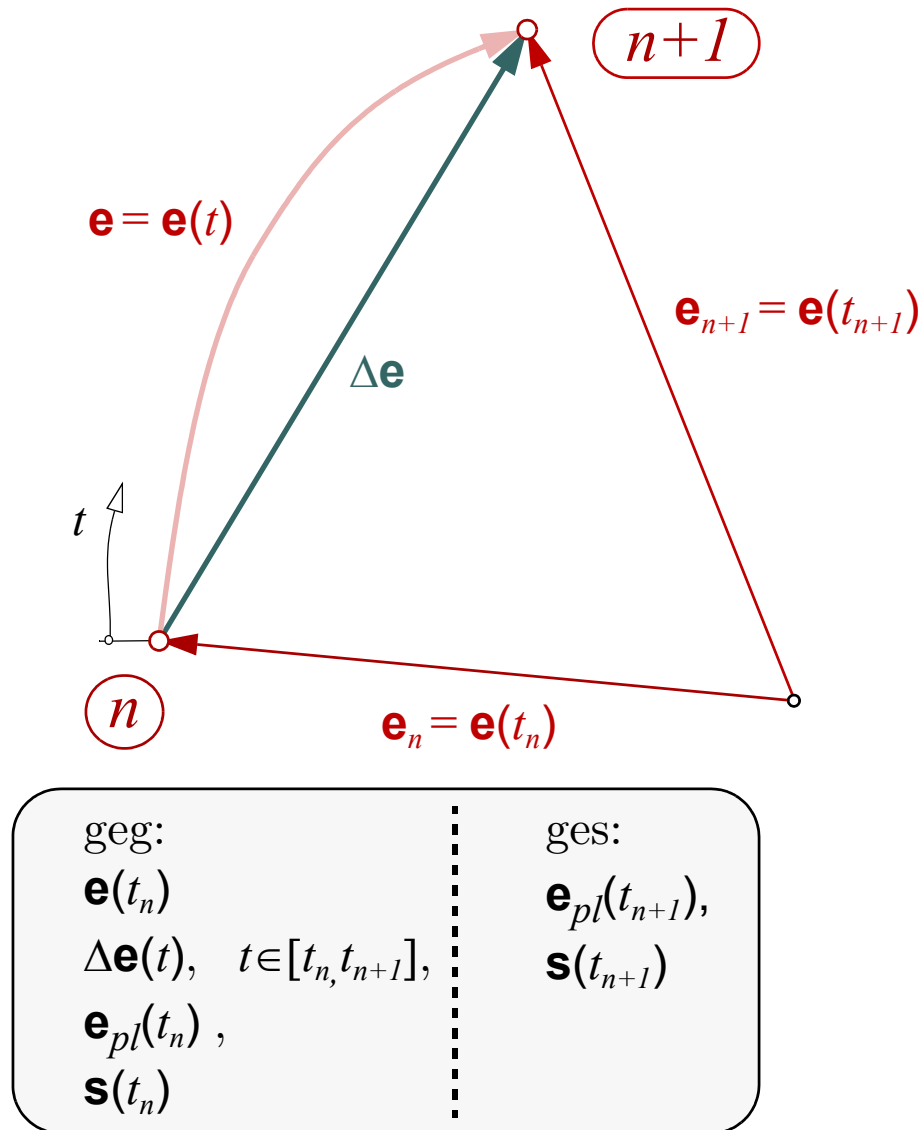


Bild 8.1 Darstellung des finiten Verzerrungsverlaufs $\mathbf{e}(t)$ zwischen den Zeitpunkten t_n und t_{n+1} und der Sekante $\Delta \mathbf{e}$ mit dem linearen Verlauf zwischen \mathbf{e}_n und \mathbf{e}_{n+1}

tem Versagensmechanismus bei einem vorgegebenen finiten Verzerrungszinkrement analytisch exakt; fast 50 Jahre vor dem bekannten Aufsatz von Krieg/Krieg (1977).

8.1.2.2 Euler-Rückwärts-Verfahren

In der approximativen Lösung der Plastizitätsdifferentialgleichungen hat sich das Euler-Rückwärts-Verfahren etabliert. Das zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems verwendete Newton-Raphson-Verfahren wird in diesem Kontext von Simo/Taylor (1986) als *Return-Mapping Algorithm* bezeichnet. Eine umfassende Darstellung dieser Vorgehensweise findet sich in Simo/Hughes (1998). Das einfache Newton-Raphson-Verfahren des Return-Mapping Algorithmus hat den Mangel, dass es nur lokale Konvergenz besitzt. Dieses Konvergenzproblem wird z.B. bei Versagensbedingungen mit stark gekrümmten Bereichen schlagend. Um globale Konvergenz (und damit stets eine Lösung) zu erhalten, formulieren

Armero/Pérez-Foguet (2002a) die Grundgleichungen als Variationsprinzip und setzen diese Gleichungen in einem global-konvergenten Algorithmus zur Lösung der Spannungsintegration um, siehe Armero/Pérez-Foguet (2002b). Eine Zusammenfassung dieser Arbeit findet sich auch in Kapitel 7 von Stein/de Borst/Hughes, eds. (2004).

8.1.2.3 Euler-Rückwärts-Verfahren in der Multi-Mechanismen-Plastizität

Die rechnerische Umsetzung der Plastizitätsgleichungen mit mehreren simultan aktivierbaren Mechanismen im Rahmen dieses Euler-Rückwärts-Verfahrens behandeln Simo/Kennedy/Govindjee (1988) bzw. Simo/Hughes (1998) in Kapitel 5. Dabei werden aber uneindeutige Situationen, sogenannte Pyramidenpunkte, explizit ausgeschlossen. Die Lösung dieser Situationen durch Anwendung von Pseudoinversen bei den Plastizitätsgleichungen von Einzelkristallen geben die Arbeiten von Borja/Wren (1993), Anand/Kothari (1996) und Schröder/Miehe (1997). Schmidt-Baldassari (2003) formuliert die Grundgleichungen der Kristallplastizität als Optimierungsaufgabe und setzt verschiedene Standardlösungsverfahren der nichtlinearen Programmierung ein.

8.1.2.4 Konsistente Linearisierung des Integrationsverfahrens

Für die Einbettung in ein globales Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung der sich ergebenden nichtlinearen Strukturgleichungen wird für das verwendete Integrationsverfahren die zugehörige (konsistente) Linearisierung der Spannungen am Lösungspunkt nach den Verzerrungen benötigt, siehe Simo/Taylor (1986) und Simo/Hughes (1998).

8.1.3 Aufgabenstellungen & Ziel des Abschnitts

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise von Schmidt-Baldassari (2003) uneingeschränkt erweitert und umgesetzt. Die Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität werden durch ein Euler-Rückwärts-Verfahren für ein vorgegebenes finites Verzerrungsinkrement in ein algebraisches Gleichungssystem umgeschrieben. Diese Gleichungen lassen sich durch eine äquivalente Optimierungsaufgabe anschreiben. Es soll gezeigt werden, dass sich diese Vorgehensweise auch auf die Situation mit Spannungsnullbedingungen übertragen lässt.

Die dabei erhaltene Aufgabenstellung lässt sich mit Standardverfahren der nichtlinearen Programmierung, wie sie in dem Buch von Fletcher (1987) oder Luenberger/Ye (2008) angegeben sind, lösen. Diese Lösungsverfahren lassen sich so formulieren bzw. erweitern, dass sie global konvergent sind. Die Algorithmen zur Lösung der Optimierungsaufgabe sind nicht Bestandteil dieses Abschnitts, sondern werden erst im anschließenden Kapitel ausgearbeitet.

Für das verwendete Integrationsverfahren wird die konsistent linearisierte algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix angegeben.

Das Euler-Rückwärts-Verfahren hat sich weitestgehend zur approximativ-numerischen Lösung der Plastizitätsgleichungen etabliert, ist aber nicht die einzige Möglichkeit die gege-

bene Anfangswertaufgabe approximativ zu lösen. Zusätzlich wird in diesem Kapitel ein kleiner Exkurs zur analytischen Integration, sofern der Aufbau der Differentialgleichung diese Lösungsmöglichkeit erlaubt, und zur Integration mit Subinkrementierung angeführt.

Zusammengefasst lauten die Ziele des Abschnitts:

- Umwandlung des Differentialgleichungssystems in ein i.A. nichtlineares algebraisches Gleichungssystem durch ein approximatives Integrationsverfahren,
- Formulierung der nichtlinearen Gleichungen durch eine äquivalente konvexe Optimierungsaufgabe,
- konsistente Linearisierung der Spannungsintegration nach den Verzerrungen zur Berechnung der konsistent algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix und
- Anwendung und Übertragung dieser Vorgehensweise auf den Fall mit Spannungsnullbedingungen.

8.1.4 Inhalt von Kapitel 8

8.2 Diskretisierung des Verzerrungsverlaufs

8.3 Be- und Entlastungsbedingung

8.4 Integration der Grundgleichungen der Plastizität

8.5 Formulierung der Aufgabenstellung als äquivalentes Optimierungsproblem

8.6 Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix

8.7 Euler-Rückwärts-Verfahren bei zusätzlichen Spannungsnullbedingungen

8.8 Aufbau und Ablauf der Materialroutine

8.2 Diskretisierung des Verzerrungsverlaufs

8.2.1 Finites Verzerrungsinkrement

In nichtlinearen strukturmechanischen Berechnungen wird jeder Belastungsvorgang in eine diskrete Abfolge von Belastungszuständen bzw. -inkrementen unterteilt. Die Feinheit der Inkrementierung wird dabei vom Benutzer festgelegt. Ebenso wird hier bei der verzerrungsgesteuerten Belastung des RME mit elasto-plastischem Materialverhalten vorgegangen. Die der Verzerrung \mathbf{e}_n chronologisch nachfolgende Verzerrung wird mit $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}(t_{n+1})$ bezeichnet. Die Differenz zwischen den Verzerrungen ergibt das finite Verzerrungsinkrement:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n \quad (8-1)$$

Der Verzerrungsverlauf zwischen t_n und t_{n+1} wird durch einen linearen Verlauf angenähert (Bild 8.1):

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{e} \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (8-2)$$

8.2.2 Aufgabenstellung

Bekannt sind die Verzerrung \mathbf{e}_n und die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n}$ zum Zeitpunkt t_n . Über das elastische Materialgesetz lassen sich die elastischen Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{el,n}$ und damit die Spannungen \mathbf{s}_n berechnen. Die Spannungen müssen im erlaubten Bereich \mathbb{E} liegen. Die Verzerrungen werden um den inkrementellen Zuwachs $\Delta \mathbf{e}$ auf \mathbf{e}_{n+1} erhöht. Gesucht wird das plastischen Verzerrungsinkrement $\Delta \mathbf{e}_{pl}$ und das Spannungsinkrement $\Delta \mathbf{s}$ bzw. die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n+1}$ und Spannungen \mathbf{s}_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} :

$$geg : \begin{cases} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{pl,n}, \Delta \mathbf{e}, \\ \mathbf{s}_n = \mathbf{C}(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{pl,n}), \quad \mathbf{s}_n \in \mathbb{E} \\ \mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{e} \end{cases} \quad ges : \begin{cases} \mathbf{e}_{pl,n+1} = \mathbf{e}_n + \Delta \mathbf{e}_{pl,n}, \\ \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{pl,n+1}), \quad \mathbf{s}_{n+1} \in \mathbb{E} \end{cases} \quad (8-3)$$

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen die Differentialgleichungen vom Zeitpunkt t_n bis t_{n+1} integriert werden. Doch zuerst soll überprüft werden, ob überhaupt ein plastischer Deformationsschritt stattfindet.

8.3 Be- und Entlastungsbedingung

Im Fall des Plastizitätsmodells muss zuerst geklärt werden, ob das Aufbringen des Verzerrungsincrement $\Delta \mathbf{e}$ auf das i.A. bereits verzerrte RME zu einem elastischen Belastungsincrement (Situation A) oder zu einem Deformationsinkrement mit plastischem Verzerrungszuwachs $\Delta \mathbf{e}_{pl}$ (Situation B) führt. Nur bei Situation B ist es notwendig, die Differentialgleichungen der Plastizität zu lösen. Welche der beiden Situationen auftritt, lässt sich durch den Spannungszustand \mathbf{s}_n und durch Aufbringen des Verzerrungsincrement $\Delta \mathbf{e}$ beurteilen. Zunächst soll angenommen werden, dass sich das RME nur elastisch verformt. Die sich ergebenden Spannungen bzw. die Spannungszuwächse

$$\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{s}_n + \Delta \mathbf{s}^{TR} = \mathbf{s}_n + \mathbf{C} \Delta \mathbf{e} = \mathbf{C} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{pl,n}) \quad (8-4)$$

werden mit dem hochgestellten TR (*TRial*) versehen, um die Vorläufigkeit dieses Testschritts zu kennzeichnen.

8.3.1 Situation A: elastisches Deformationsinkrement

Ein elastischer Verformungsschritt liegt vor, wenn der Spannungszustand \mathbf{s}^{TR} im erlaubten Bereich \mathbb{E} liegt. Ist das der Fall, sind die finiten plastischen Verzerrungszuwächse null und der Spannungszuwachs $\Delta \mathbf{s}$ entspricht $\Delta \mathbf{s}^{TR}$ (Bild 8.2).

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}^{TR} \in \mathbb{E} \text{ bzw.} \\ F_i(\mathbf{s}^{TR}) \leq 0 \text{ für } \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{e}_{pl} = \mathbf{0}, \Delta \lambda^i = 0 \text{ für } \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{e} \end{array} \right. \quad (8-5)$$

8.3.2 Situation B: plastisches Deformationsinkrement

Liegt \mathbf{s}^{TR} nicht im erlaubten Bereich \mathbb{E} , treten plastische Zusatzverzerrungen $\Delta \mathbf{e}_{pl}$ auf. Wie in Bild 8.2 dargestellt, muss der Spannungspunkt \mathbf{s}_n auf der elastischen Grenzfläche $\partial \mathbb{E}$ liegen.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}^{TR} \notin \mathbb{E} \text{ bzw.} \\ F_i(\mathbf{s}^{TR}) > 0 \text{ für mind. ein } i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{e}_{pl} \neq \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{s}^{TR} - \mathbf{C} \Delta \mathbf{e}_{pl} \\ \mathbf{s}_{n+1} \in \partial \mathbb{E} \end{array} \right. \quad (8-6)$$

8.3.3 Weitere Anmerkungen zur Be- und Entlastung

8.3.3.1 Differentielles vs. finites Verzerrungsincrement

Vergleicht man die Belastungssituationen bei einem finiten Verzerrungsincrement mit den Belastungsszenarien bei einem differentiellen Verzerrungsschritt (Kap. 6.5), fällt folgende

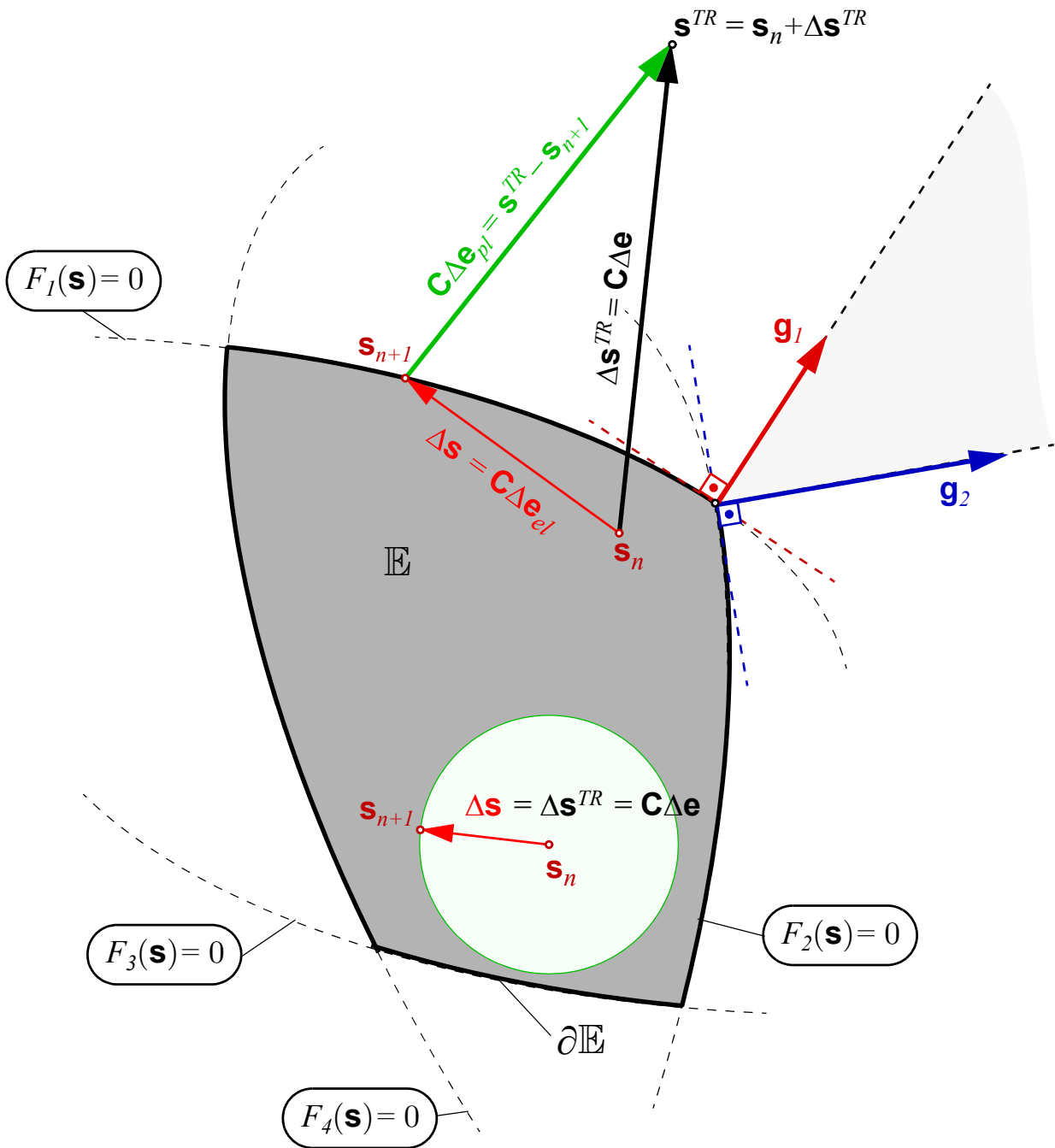


Bild 8.2 Darstellung eines elastischen (Situation A) und eines plastischen Belastungszuwachses (Situation B) bei Vorgabe des Verzerrungszuwachses $\Delta\mathbf{e}$

grundsätzliche Verschiedenheit auf: \mathbf{s}_n muss bei einem finiten Verzerrungsincrement nicht unbedingt auf der elastischen Grenzfläche $\partial\mathbb{E}$ liegen, um ein plastisches Deformationsinkrement auszulösen. Die Forderung $\mathbf{s}_n \in \partial\mathbb{E}$ bei Betrachtung der differentiellen Be- und Entlastungssituation führt deshalb zur Unterscheidung von drei Situationen (Kap. 6.5), im finiten Fall zu nur zwei Unterscheidungsfällen.

8.3.3.2 Aktive plastische Versagensmechanismen

Der in Kap. 6.3.2 eingeführte Begriff der aktiven Versagensmechanismen, inklusive der dort angeführten Definition (6-5), ist auf die Situation bei Belastung durch ein finites Verzerrungsincrement übertragbar. Im Allgemeinen leisten nur die aktiven Versagensmechanismen einen Beitrag zum plastischen Verzerrungszuwachs:

$$\Delta\lambda^i = \lambda_{n+1}^i \geq 0 \quad i \in \mathcal{A} \quad (8-7)$$

Die plastischen Multiplikatoren der einzelnen Versagensmechanismen werden bei jedem neu zu rechnenden Inkrement auf null zurückgesetzt. Es gilt $\lambda_n^i = 0$. Damit entsprechen die Werte λ_{n+1}^i dem jeweiligen finiten Zuwachs $\Delta\lambda^i$.

8.3.3.3 Karush-Kuhn-Tucker und Konsistenzbedingungen

Ob Situationen A oder B auftritt, die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}) &\leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &\geq \mathbf{0} \\ F_i(\mathbf{s}_{n+1})\lambda_{n+1}^i &= 0 \end{aligned} \quad (8-8)$$

müssen immer erfüllt sein, wie sich aus den Gleichungen (8-5) und (8-6) zeigen lässt. Diese beinhalten die Be- und Entlastungskontrolle mit \mathbf{s}^{TR} und die Bedingung, dass \mathbf{s}_{n+1} (im Fall, dass \mathbf{s}^{TR} nicht im erlaubten Bereich \mathbb{E} liegt) auf der elastischen Grenzfläche liegen muss (Konsistenzbedingung).

8.4 Integration der Grundgleichungen der Plastizität

8.4.1 Aufgabenstellung

Die zu integrierenden Grundgleichungen der Plastizität sind:

Differential-algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{e}}_{pl} &= \dot{\mathbf{e}} \\
 \dot{\mathbf{e}}_{pl} - \mathbf{G}(\mathbf{s})\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}(\mathbf{s}) &\leq \mathbf{0} \\
 \dot{\boldsymbol{\lambda}} &\geq \mathbf{0} \\
 \lambda^i F_i(\mathbf{s}) &= \mathbf{0} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}
 \end{aligned} \tag{8-9}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_n, \mathbf{e}_{pl,n}, \boldsymbol{\lambda}_n &= \mathbf{0} \\
 \text{mit:} & \\
 \dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\Delta \mathbf{e}}{t_{n+1} - t_n} &
 \end{aligned} \tag{8-10}$$

Box 8.1 Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität

Die Problemunbekannten sind die Spannungen \mathbf{s} , die plastischen Verzerrungen \mathbf{e}_{pl} und die plastischen Multiplikatoren $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$. Für diese Größen sind die Anfangswerte zum Zeitpunkt t_n bekannt. Die Verzerrungen zwischen den diskreten Verzerrungspunkten \mathbf{e}_n und \mathbf{e}_{n+1} verlaufen linear (8-2). Neben der Anforderung das nichtlineare Differentialgleichungssystem zu lösen, muss bei der Vorgabe mehrerer Versagensbedingungen darauf geachtet werden, welche Versagensbedingungen im Laufe des Berechnungsintervalls $[t_n, t_{n+1}]$ aktiv sind. Bis das aktive Set \mathcal{A} am Lösungspunkt \mathbf{s}_{n+1} beim Endpunkt t_n des Integrationsintervalls erreicht ist, können verschiedene *working Sets* \mathcal{W} im Laufe des Integrationsintervalls zeitweise aktiv sein. Diese doppelte mathematische Herausforderung erlaubt nur in wenigen Sonderfällen eine geschlossene analytische Lösung; Beispiele dazu sind im nächsten Kapitel angeführt. Im Allgemeinen werden die Differentialgleichungen durch ein numerisches Näherungsverfahren gelöst.

8.4.2 Exakte Integration

Es soll festgelegt werden, dass

- der Spannungspunkt \mathbf{s}^{TR} außerhalb des erlaubten Bereichs \mathbb{E} liegt,
- nur eine einzige Versagensbedingung betrachtet wird,

- der Anfangspunkt der Spannungen \mathbf{s}_n die Versagensbedingung $F(\mathbf{s}_n) = 0$ erfüllt und
- die Verzerrungen zwischen \mathbf{e}_n und $\mathbf{e}_{pl,n}$ entsprechend Gleichung (8-2) linear verlaufen.

Unter Voraussetzung der anfänglich geforderten Konvexität der Versagensbedingung hat man im Belastungsintervall $[t_n, t_{n+1}]$ einen plastischen Belastungsvorgang; zeitweise elastische Entlastung ist damit ausgeschlossen. Der plastische Multiplikator λ nimmt stetig zu, es gilt $\dot{\lambda} > 0$, und die Spannungen $\mathbf{s}(t)$ erfüllen durchgehend die Konsistenzbedingung mit $F(\mathbf{s}) = 0$. Unter diesen Voraussetzungen sind die Ungleichungen der drei Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen in (8-9) automatisch erfüllt. Durch Einsetzen des plastischen Versagensmechanismus in das elastische Materialgesetz werden die sechs plastischen Verzerrungen als Problemunbekannte eliminiert. Es verbleiben in der so reduzierten Form sieben Gleichungen (sechs Differentialgleichungen und eine algebraische Gleichung) für die sieben Unbekannten \mathbf{s} und λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}\dot{\lambda} &= \dot{\mathbf{e}} \\ F(\mathbf{s}) &= 0 \end{aligned} \quad (8-11)$$

Ist die Funktion $\mathbf{s}(t)$ - nach Lösen der Differentialgleichungen - bekannt, lässt sich der Verlauf der plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl}(t)$ über das elastische Materialgesetz rückrechnen.

Die stets geforderte Erfüllung der Versagensbedingung ist auch als Differentialgleichung anschreibbar, wobei die Gleichung (8-11) in ein nichtlineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung übergeführt wird:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-12)$$

Die Nichtlinearität steckt in der Abhängigkeit des Gradientenvektors \mathbf{g} von den Spannungen \mathbf{s} . Auch der plastische Multiplikator lässt sich aus dem Gleichungssystem (8-12) eliminieren. Der verbleibende Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Spannungen ist die elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\dot{\mathbf{s}} = \left[\mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{g}} \mathbf{C} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}) \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{C}_{ep} \dot{\mathbf{e}} \quad (8-13)$$

Es verbleibt die Aufgabe, diese Differentialgleichungen zu lösen. Es werden in den beiden anschließenden Kapiteln zwei Spezialfälle besprochen, bei denen diese Integration analytisch möglich ist.

8.4.2.1 Lineare Versagensbedingungen

Ist die Versagensbedingung eine lineare Funktion in den Spannungen - geometrisch eine Ebene - ist der Gradientenvektor \mathbf{g} eine konstante Größe. In diesem Fall ist die Auflösung

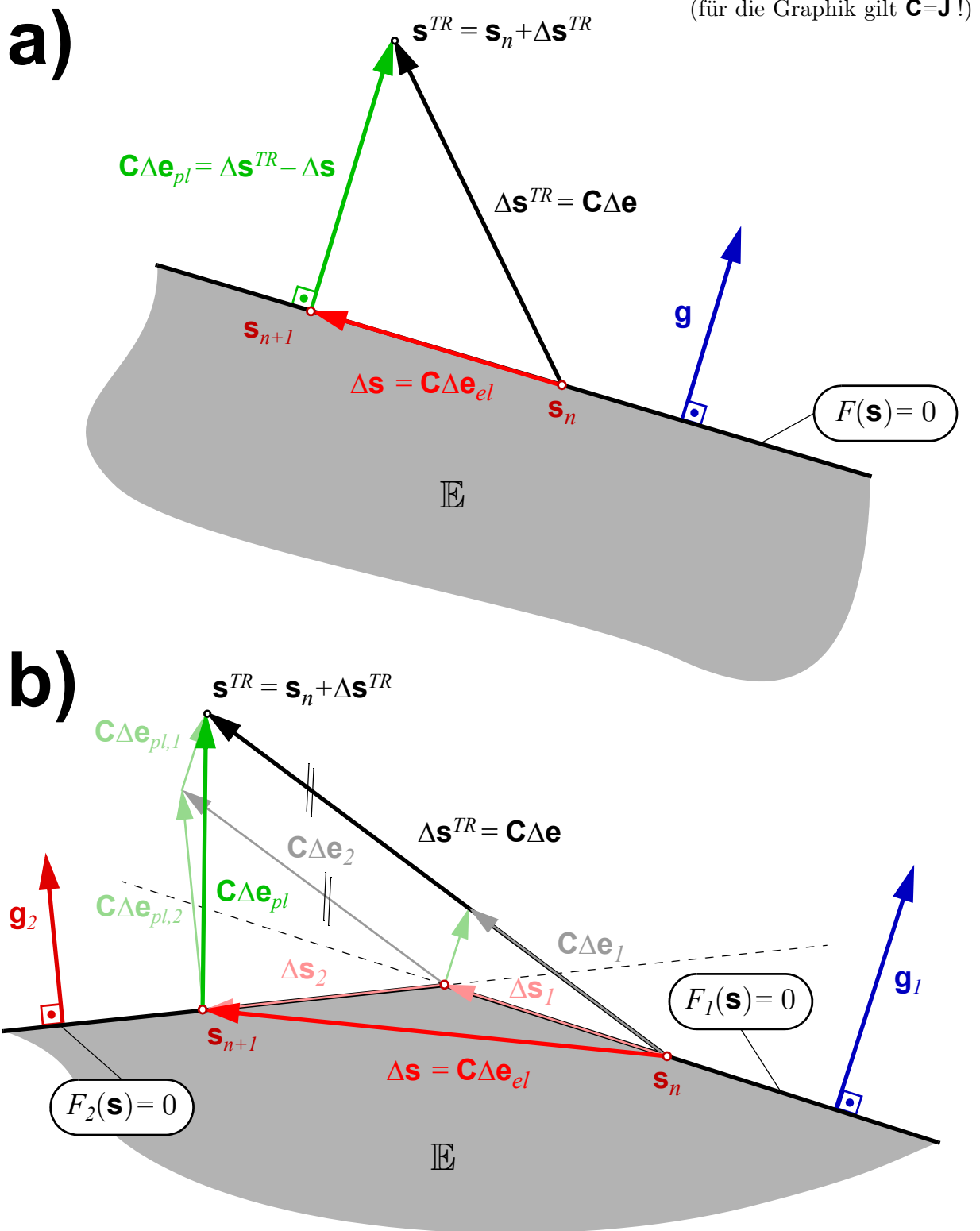


Bild 8.3 Graphische Darstellung der exakten Integration bei Vorgabe einer (a) einzigen linearen Versagensbedingung; (b) bei zwei linearen Versagensbedingungen

des Differentialgleichungssystems (8-13) trivial, da \mathbf{C}_{ep} eine von den Spannungen \mathbf{s} unabhängige Matrix ist:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{s}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}_{ep} \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{C}_{ep} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{e}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_n + \mathbf{C}_{ep} \Delta \mathbf{e} \quad (8-14)$$

Zur Darstellung (Bild 8.3 a) wird $\mathbf{C} = \mathbf{J}$ gesetzt, damit wird unmittelbar ersichtlich, dass \mathbf{C}_{ep} geometrisch als Projektionsmatrix interpretierbar ist:

$$\Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{s}^{TR} - \frac{1}{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{g}} \mathbf{C} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}) \mathbf{C} \Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{s}^{TR} - \mathbf{C} \Delta \mathbf{e}_{pl} \quad (8-15)$$

In diesem einfachen Fall lohnt es sich, die zuvor getroffenen Festlegungen etwas zu lockern und die exakte Integration im Fall von zwei linearen Versagensbedingungen zu betrachten (Bild 8.3 b). Das Hauptmerkmal ist, dass die exakte Integration (geometrisch gesprochen: die Projektion auf die elastische Grenzfläche) in zwei Teilschritten, respektive in zwei Teilintegrationsintervalle, unterteilt werden muss. Die gesamte plastische Verzerrung setzt sich aus den beiden Einzelanteilen zusammen und ist nicht mehr normal auf die zweite Versagensbedingung, die auch die schlussendlich aktive Versagensbedingung ist. Bis zum Erreichen der finiten Verzerrungsgröße $\Delta \mathbf{e}_I$ ist die erste Versagensbedingung bei der Integration die maßgebende Versagensbedingung. Ähnliche geometrische Betrachtungen werden uns später bei Aufgabenstellungen aus dem Bereich der quadratischen Programmierung begegnen. Bild 8.3 b) wird später noch mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren verglichen, wobei sich an dieser einfachen Situation sehr schön der Unterschied zwischen der exakten und dem approximativen Integrationsverfahren zeigen lässt.

8.4.2.2 Prandl-Reuss Gleichungen

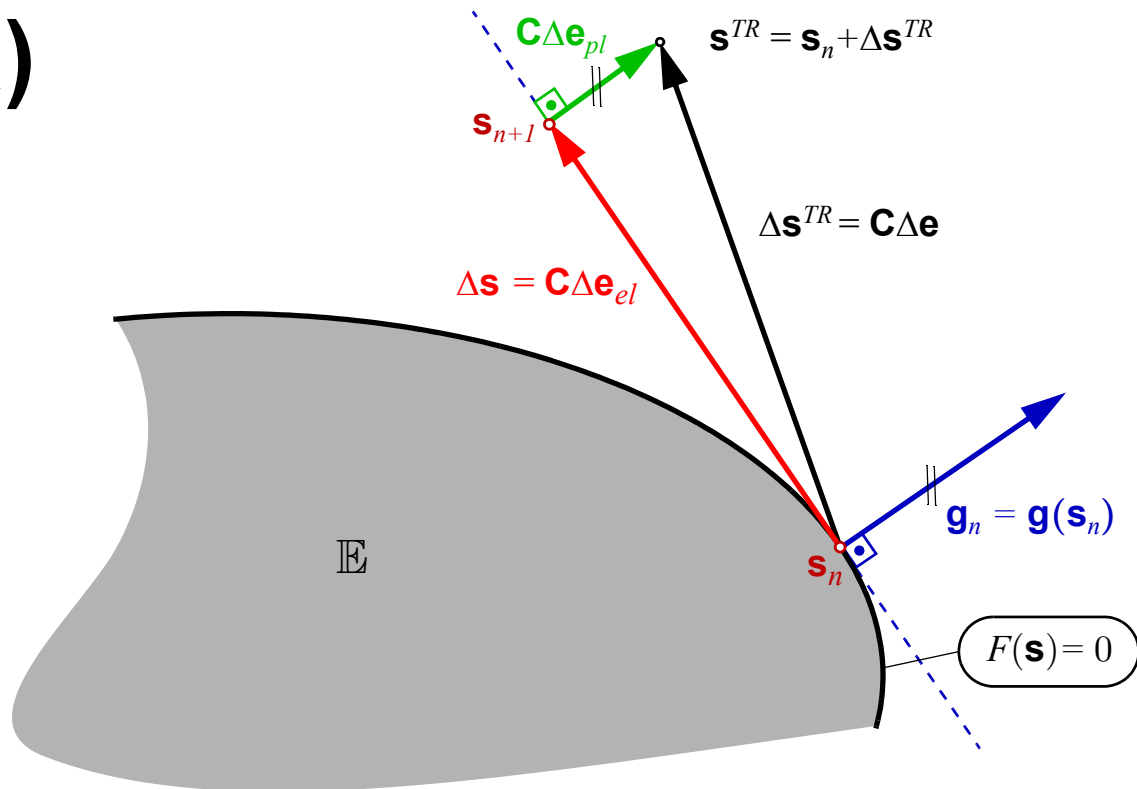
Die Prandl-Reuss Gleichungen (siehe Seite 193) sind nichtlineare Differentialgleichungen, können aber analytisch exakt gelöst werden. Die erste Lösung stammt von Reuss (1930). Eine auf geometrischen Betrachtungen beruhende Lösung des Gleichungssets wurde von Krieg/Krieg (1977) veröffentlicht. Einen alternativen Zugang zur Integration dieser Differentialgleichungen zeigen Aurrichio/Beirão da Veiga (2003), mit dem Bestreben die Prozedur auf den erweiterten Fall mit linearer Verfestigung zu übertragen. Die exakte Integration der Prandtl-Reuss Gleichungen für den Fall kombinierter kinematischer und isotroper linearer Verfestigung lösen Kossa/Szabó (2009). Die exakte Integration ist nur in wenigen Sonderfällen durchführbar. Im Allgemeinen wird das differential-algebraische Gleichungssystem numerisch approximativ gelöst.

8.4.3 Numerisch-approximative Integrationsverfahren

Hier sollen nur das elementare Euler-Vorwärts- und das Euler-Rückwärts-Verfahren und ihre Anwendung auf die Plastizitätsdifferentialgleichungen betrachtet werden. Umgesetzt

(für die Graphik gilt $\mathbf{C}=\mathbf{J}$!)

a)



b)

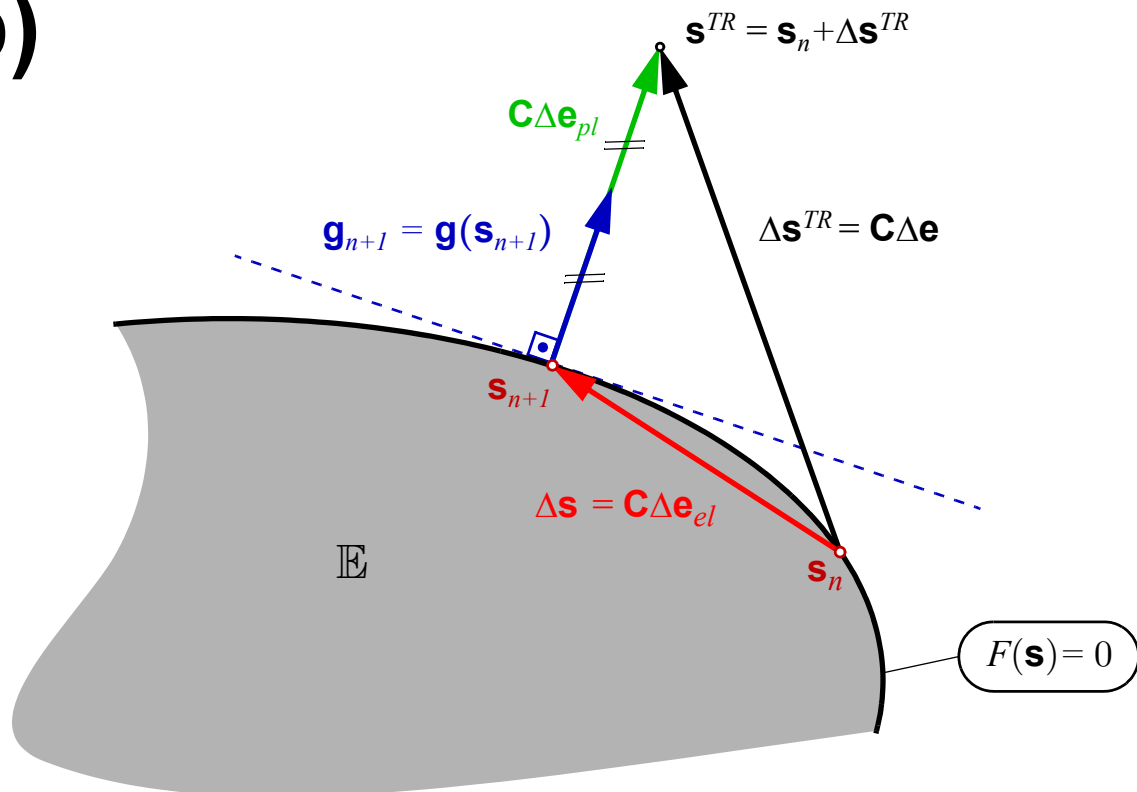


Bild 8.4 Graphischer Vergleich des a) Euler-Vorwärts und b) Euler-Rückwärts-Verfahrens auf die Differentialgleichungen der Plastizität bei einer einzigen Versagensbedingung

wird später aber nur das Euler-Rückwärts-Verfahren.

8.4.3.1 Euler-Vorwärts- vs. Euler-Rückwärts-Verfahren

Das rechnerische Vorgehen beim Euler-Vorwärts- bzw. Euler-Rückwärts-Verfahren soll anhand des nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems in (8-16) gezeigt werden. Die skalare Funktion g und die Vektorfunktion \mathbf{f} sind nichtlineare Funktionen in den Unbekannten \mathbf{x} und t . Gesucht wird der Wert von \mathbf{x} zum Zeitpunkt t_{n+1} . Der Anfangswert \mathbf{x}_n ist angegeben.

$$g(\mathbf{x}, \tau) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\mathbf{x}, \tau) \dot{\mathbf{x}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) dt \quad \rightarrow \mathbf{x}_{n+1} \quad (8-16)$$

Beim Euler-Vorwärts-Verfahren werden die nichtlinearen Funktionen g und \mathbf{f} zum Zeitpunkt t_n mit \mathbf{x}_n ausgewertet. Der gesuchte Wert \mathbf{x}_{n+1} ergibt sich durch Lösung des linearen Gleichungssystems. Beim Euler-Rückwärts-Verfahren sollen die Funktionen g und \mathbf{f} zum Zeitpunkt t_{n+1} ausgewertet werden. Die gesuchte Lösung \mathbf{x}_{n+1} ist aber noch unbekannt. Es verbleibt - im Unterschied zum Euler-Vorwärts-Verfahren - als weiterer Schritt das formulierte nichtlineare algebraische Gleichungssystem zu lösen:

Euler - Vorwärts - Verfahren :

$$g_n(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}_n(t_{n+1} - t_n) \quad g_n = g(\mathbf{x}_n, t_n), \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) \quad (8-17)$$

Euler - Rückwärts - Verfahren :

$$g_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}_{n+1}(t_{n+1} - t_n) \quad g_{n+1} = g(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}), \quad \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})$$

8.4.3.2 Anwendung des Euler-Vorwärts-Verfahrens

Das Euler-Vorwärts-Verfahren ergibt lineare algebraische Gleichungen, die einfach zu lösen sind, hat aber den massiven Nachteil, dass bei finiten Schrittweiten der Spannungspunkt \mathbf{s}_{n+1} nicht mehr auf der elastischen Grenzfläche, sondern außerhalb liegt. Dieser Fehler akkumuliert sich - selbst bei sehr kleinen Schrittgrößen - bei fortlaufender Belastungsgeschichte, was der Hauptgrund - trotz der einfachen Lösbarkeit - ist, dieses Verfahren bei der numerischen Lösung der Differentialgleichungen der Plastizität auszuschließen. Betrachtet man die Gleichungen unter denselben Voraussetzungen wie im exakten Integrationsfall (Seite 240), sieht man, dass der plastische Mechanismus im expliziten Fall an der Spannung \mathbf{s}_n ausgewertet wird, d.h. der plastische Verzerrungsvektorzuwachs ist parallel zum Gradientenvektor \mathbf{g}_n der Versagensbedingung bei \mathbf{s}_n :

$$\Delta \mathbf{e}_{pl} = \mathbf{g}_n \Delta \lambda \quad \mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{s}_n) \quad (8-18)$$

Diese Situation ist in Bild 8.4 a) dargestellt. Ein weiterer Punkt dieses Verfahren nicht

weiter anzuwenden, ist die offene Frage, wie im Fall beliebig vieler Versagensmechanismen überhaupt vorzugehen ist.

8.4.3.3 Anwendung des Euler-Rückwärts-Verfahrens

Das Euler-Rückwärts-Verfahren ist bei der Lösung der Differentialgleichungen der Plastizität die am weitesten verbreitete Methode. Ein Hauptgrund dafür ist, dass dieses Verfahren die Erfüllung der Versagensbedingung bzw. der Konsistenzbedingung bei \mathbf{s}_{n+1} fordert, es gilt also $F_i(\mathbf{s}_{n+1}) = 0$. Damit liegt der Lösungspunkt der Spannung trotz finiter Schrittweiten des aufgebrauchten Verzerrungsincrements immer auf der elastischen Grenzfläche (Bild 8.4 b). Der plastische Versagensmechanismus im impliziten Integrationsfall ergibt sich mit $\boldsymbol{\lambda}_n = \mathbf{0}$ zu:

$$\Delta \mathbf{e}_{pl} = \mathbf{e}_{pl,n+1} - \mathbf{e}_{pl,n} = \mathbf{G}_{n+1} \Delta \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad \mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{s}_{n+1}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N] \Big|_{\mathbf{s}_n} \quad (8-19)$$

In Bild 8.4 b) ist die Integrationsituation bei einer einzigen Versagensbedingung dargestellt. Der Vektor des plastischen Verzerrungszuwachses ist kollinear zu dem Gradientenvektor \mathbf{g}_{n+1} der Versagensbedingung. Bei Anwendung des Euler-Rückwärts-Verfahrens auf die Differentialgleichungen der Plastizität ergeben sich nichtlineare algebraische Gleichungen (siehe Box 8.2) in den Unbekannten \mathbf{s}_{n+1} , $\mathbf{e}_{pl,n+1}$ und $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$.

Linear-elastisches Materialgesetz:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{pl,n+1}) \quad (8-20)$$

Assoziierter plastischer Versagensmechanismus:

$$\mathbf{e}_{pl,n+1} - \mathbf{e}_{pl,n} = \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad (8-21)$$

Konsistenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}) &\leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &\geq \mathbf{0} \\ F_i(\mathbf{s}_{n+1}) \lambda_{n+1}^i &= 0 \end{aligned} \quad (8-22)$$

Box 8.2 Algebraische Gleichungen der Plastizität bei Euler-Rückwärts-Integration

Durch Einsetzen von (8-21) in (8-20) werden die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n+1}$ als Problemunbekannte eliminiert. Mit \mathbf{s}^{TR} aus (8-4) ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}^{TR}) + \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}) &\leq \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\lambda}_{n+1} &\geq \mathbf{0} \\
F_i(\mathbf{s}_{n+1}) \lambda_{n+1}^i &= 0
\end{aligned} \tag{8-23}$$

8.4.3.4 Euler-Rückwärts-Verfahren vs. exakte Integration & Subinkrementierung

Bei der exakten und bei der expliziten Integration (Euler-Vorwärts-Verfahren) muss, sobald der Spannungspunkt \mathbf{s}_n am Integrationsintervallanfang t_n nicht auf der elastischen Grenzfläche liegt, in einem Vorabschritt dieser Spannungspunkt berechnet werden. Das finite Verzerrungsinkrement wird damit in einen anfänglich elastischen und einen anschließenden plastischen Berechnungsschritt aufgeteilt. Das ist beim Euler-Rückwärts-Verfahren nicht notwendig.

Bei einer einzigen linearen Versagensbedingung liefern die exakte Integration, das Euler-Vorwärts- und das Euler-Rückwärts-Verfahren dieselben Lösungen. Bei zwei linearen Versagensbedingungen ergeben sich zwischen der exakten Integration (Bild 8.3 b) und der Lösung mit dem impliziten Euler-Rückwärts-Verfahren (Bild 8.5 a) bereits unterschiedliche Lösungen für \mathbf{s}_{n+1} .

Im Fall der Prandl-Reuss Gleichungen z.B. lässt sich der Integrationsvorgang geometrisch an einem ebenen Kreis darstellen (Krieg/Krieg (1977) und Bild 8.5 b). Die Lösung der impliziten Integration $\mathbf{s}_{n+1,impl}$ lässt sich als Durchstoßpunkt der Gerade vom Kreismittelpunkt zu \mathbf{s}^{TR} durch den Kreis konstruieren. Dass der Lösungspunkt der exakten Integration in Umfangsrichtung weiter von \mathbf{s}_n entfernt liegt, lässt sich anhand Bild 8.5 erklären: Denkt man sich den Kreis durch einen beliebig fein gewählten Polygonzug angenähert, hat man die vielfache Wiederholung der in Bild 8.5 a) dargestellten Situation; mit jedem Polygoneckpunkt wandert die exakte Lösung der impliziten Lösung etwas voraus. Die Abweichungen zwischen exakter und impliziter Euler-Rückwärts-Integration haben drei Ursachen: die Größe des aufgebrauchten Verzerrungsinkrements, die Richtung des Verzerrungsinkrements und die lokale Gestalt der Versagensbedingung(en).

Grundsätzlich werden die Abweichungen geringer, je kleiner der Betrag des anfänglich aufgebrauchten Verzerrungsinkrements $\Delta \mathbf{e}$ ist. Bei sehr kleinen Verzerrungsinkrementen konvergiert die Situation gegen den differentiellen Fall. Eine Idee um die Abweichungen zwischen exakter und impliziter Integration zu verringern ist, das aufgebrauchte Verzerrungsinkrement $\Delta \mathbf{e}$ in Subinkremente $\Delta \mathbf{e}_k$ zu unterteilen und für jedes Subinkrement einen impliziten Integrationsschritt durchzuführen. Bei hoher Subinkrementanzahl konvergiert die Lösung dieser Prozedur gegen die exakte Lösung. In Bild 8.6 ist die Euler-Rückwärts-Integration mit einem impliziten Subinkrementierungsverfahren verglichen. Man könnte meinen, dass eine Subinkrementierung oder - wenn möglich - das exakte Integrationsverfahren das Nonplusultra sei, da mit beiden Verfahren eine hohe Genauigkeit bzw. Exaktheit der Integration der lokalen plastischen Gleichungen erreicht wird. Betrachtet man

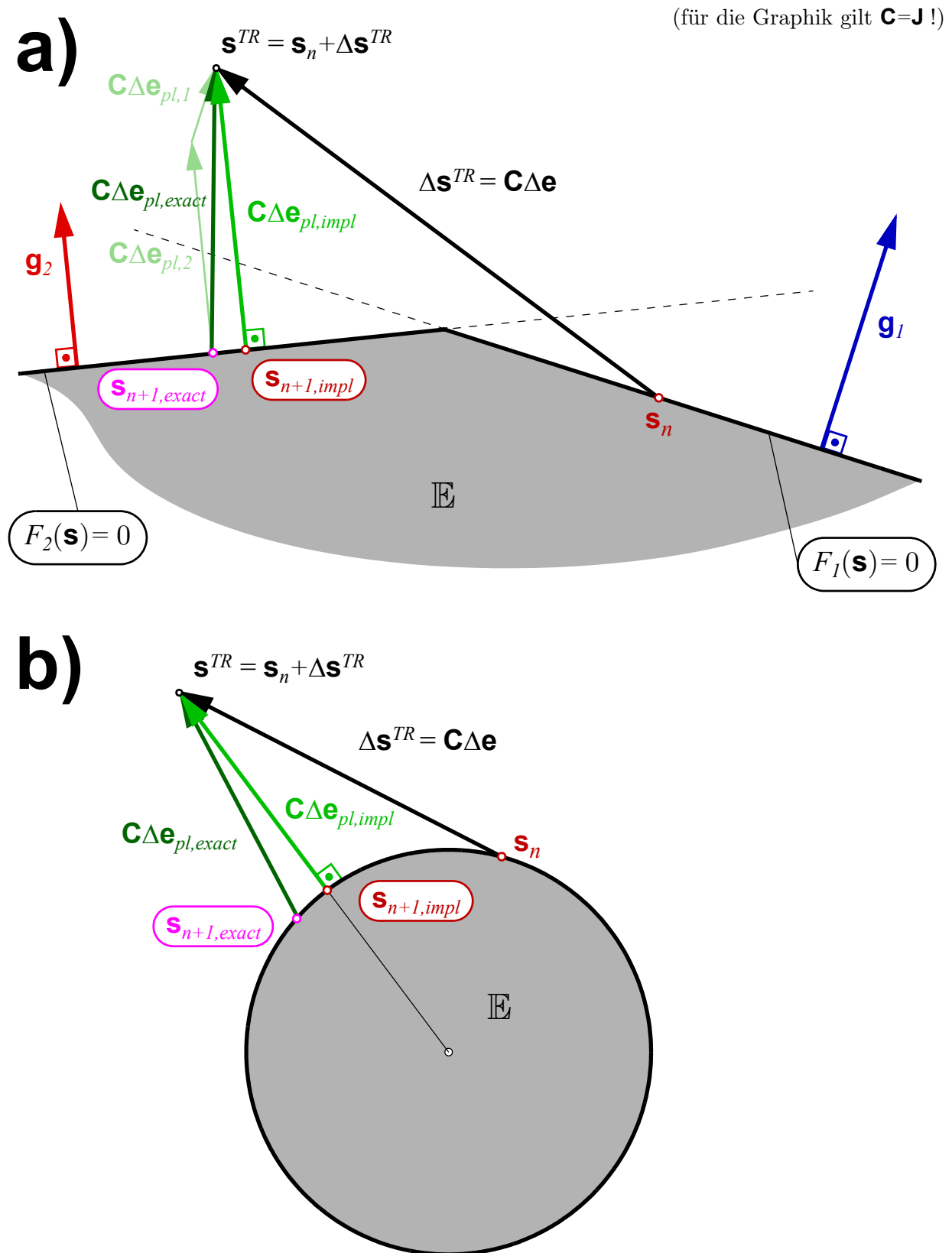


Bild 8.5 Graphischer Vergleich der Euler-Rückwärts-Verfahrens (impl) mit der exakten Integrationsprozedur bei zwei Elementarfällen

8.5 Formulierung der Aufgabenstellung als äquivalentes Optimierungsproblem

Dass die Grundgleichungen der Plastizität den Minimumsbedingungen eines konvexen Optimierungsproblems entsprechen, wurde in Kap. 6.6 gezeigt. Es stellt sich die Frage, ob eine solche übergeordnete Problemformulierung auch für die aus der Euler-Rückwärts-Integration, Box 8.2 und Gleichungen (8-23), entstandenen algebraischen Gleichungen existiert. Man kann die Antwort vorwegnehmen: Es existiert auch für den Fall des finiten Verzerrungsincrements eine übergeordnete konvexe Optimierungsaufgabe, die sich geometrisch als Minimalabstandsaufgabe interpretieren lässt. Alle zuvor gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich der Lösungseigenschaften dieses Gleichungssystem - es gibt eine einzige eindeutige Lösung - sind damit weiterhin uneingeschränkt gültig.

Die Minimalabstandsaufgabe und der Äquivalenzbeweis wurden bereits in Kap. 6.6.1 beschrieben. Die Optimierungsaufgabe ist in Box 8.3 noch einmal angegeben. In Bild 6.6 ist die Aufgabe geometrisch dargestellt. Die Minimumsbedingungen von (8-24) entspricht Gleichungen (8-23) und damit weiter den Gleichungen aus Box 8.2, womit gezeigt ist, dass ein Minimum \mathbf{s}^* der Minimalabstandsaufgabe aus Box 8.3 die gesuchte Lösung \mathbf{s}_{n+1} für die algebraischen Gleichungen der Plastizität bei Euler-Rückwärts-Integration ist. Die Lagrange'schen Parameter sind ebenso gleich, es gilt $\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \boldsymbol{\lambda}$.

Minimalabstandsaufgabe:

$$\min \{ \mathcal{A} \} = \min \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s})^T \mathbf{D} (\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s}) \right\}$$

$$\text{wobei } \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{s}) \\ F_2(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ F_N(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (8-24)$$

Box 8.3 Optimierungsaufgabe bzw. Minimalabstandsaufgabe

8.6 Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix

8.6.1 Gleichgewichtsgleichungen des RME

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein RME, das mit den Oberflächenlasten \mathbf{t} belastet wird. Während des gesamten Belastungsvorgangs sind diese Oberflächenlasten mit den Spannungen \mathbf{s} im Gleichgewicht. Bei einem lastgesteuerten Berechnungsvorgang wird ein Referenzlastzustand $\bar{\mathbf{t}}$ angegeben, dessen Betrag mit einem Lastfaktor Λ gesteuert wird. Damit lauten die sechs Gleichgewichtsgleichungen:

$$\mathbf{s} - \Lambda \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (8-25)$$

8.6.1.1 Aufgabenstellung

Ausgangspunkt sind die Verzerrungen \mathbf{e}_n , die zugehörigen Spannungen \mathbf{s}_n und der Lastfaktor Λ_n beim Gleichgewichtszustand t_n . Gesucht wird das Gleichgewicht des Systems bei t_{n+1} , wenn eine Verzerrungsgröße bzw. der Lastfaktor um einen finiten Betrag verändert wird.

$$\text{ges.: } \mathbf{r}(\mathbf{e}_{n+1}, \Lambda_{n+1}) = \mathbf{s}_{n+1} - \Lambda_{n+1} \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (8-26)$$

$$\text{mit } \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1}(\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{pl,n})$$

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + \Delta \Lambda$$

Zu beachten ist, dass sich die Spannungen zum Zeitpunkt t_{n+1} aus den Verzerrungen \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_{n+1} und den plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n}$ berechnen. Die Gleichungen \mathbf{r} sind sechs nicht-lineare Gleichungen in den sieben Unbekannten \mathbf{e}_{n+1} und Λ_{n+1} .

8.6.1.2 Lösung der Gleichungen mit dem Newton-Raphson-Verfahren

Eine der sieben Unbekannten wird zum Zeitpunkt t_{n+1} vorgegeben und ist damit die steuernde Größe im aktuellen Recheninkrement. Die verbleibenden Unbekannten müssen gesucht werden, sodass die Gleichungen \mathbf{r} wiederum null werden und das Gleichgewicht erfüllt ist. Eine Möglichkeit ist das Newton-Raphson-Verfahren zu verwenden. Um die nichtlinearen Gleichungen \mathbf{r} mit diesem Verfahren zu lösen, müssen diese nach den Unbekannten in einer Taylorreihe bis zum linearen Glied entwickelt werden:

$$\mathbf{r}(\mathbf{e}_{n+1} + \Delta \mathbf{e}_{n+1}, \Lambda_{n+1} + \Delta \Lambda_{n+1}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{e}_{n+1}, \Lambda_{n+1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} \right|_{n+1} \Delta \mathbf{e}_{n+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda_{n+1}} \right|_{n+1} \Delta \Lambda_{n+1} =$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{e}_{n+1}, \Lambda_{n+1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} \right|_{n+1} \Delta \mathbf{e}_{n+1} + \bar{\mathbf{t}} \Delta \Lambda_{n+1} \quad (8-27)$$

Die in dieser Reihenentwicklung vorkommende Ableitung der Spannungen nach Verzerrungen ist die algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{C}_{ep,alg} = \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} \quad (8-28)$$

Achtung: die Matrix $\mathbf{C}_{ep,alg}$ wird zum Zeitpunkt t_{n+1} ausgewertet. Dazu werden die Spannungen \mathbf{s}_{n+1} und die plastischen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ benötigt. Diese wiederum werden durch Integration vom Zustand t_n aus bestimmt. Damit ist gewährleistet, dass die Lösung nicht vom Lösungspfad des inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahrens abhängt.

8.6.2 Berechnung der algorithmischen Steifigkeitsmatrix

Um die Linearisierung (8-28) vorzunehmen, muss bekannt sein, wie die Verzerrungen \mathbf{e}_{n+1} und die Spannungen \mathbf{s}_{n+1} zusammenhängen. Diesen Zusammenhang geben die nichtlinearen algebraischen Gleichungen der numerischen Integrationsprozedur an.

8.6.2.1 Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix des Euler-Rückwärts-Verfahrens

Für die implizite Einschrittintegration müssen die Gleichungen (8-23) bzw. die Gleichungen in Box 8.2 linearisiert werden. Diese Gleichungen sollten bereits gelöst sein und das aktive Set \mathcal{A} , die plastischen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ und die Spannungen \mathbf{s}_{n+1} werden als bekannt vorausgesetzt und erfüllen die Gleichungen in Box 8.2 bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}^{TR} + \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1} \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A},n+1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{s}_{n+1}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8-29)$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{n+1} = \mathbf{g}_i(\mathbf{s}_{n+1}) \right]_{i \in \mathcal{A}}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A},n+1} = [\lambda_{n+1}^i]_{i \in \mathcal{A}}, \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = [F_i(\mathbf{s}_{n+1})]_{i \in \mathcal{A}}$$

Die Gleichungen (8-29) werden nach den Größen \mathbf{s}_{n+1} und \mathbf{e}_{n+1} bei t_{n+1} linearisiert. Dabei ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{C} \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_{n+1}^i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \Big|_{n+1} & \mathbf{C}\mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1} \\ (\mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{s}_{n+1} \\ d\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A},n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}d\mathbf{e}_{n+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8-30)$$

In Bild 8.7 ist dieser differentielle Zusammenhang für den Fall mit nur einer aktiven Versagensbedingung dargestellt. Der Spannungszuwachs $d\mathbf{s}_{n+1}$ liegt immer im Tangentialraum an die momentan aktiven Versagensbedingungen. Mit der Matrixidentität aus Anhang I

(für die Graphik gilt $\mathbf{C}=\mathbf{J}$!)

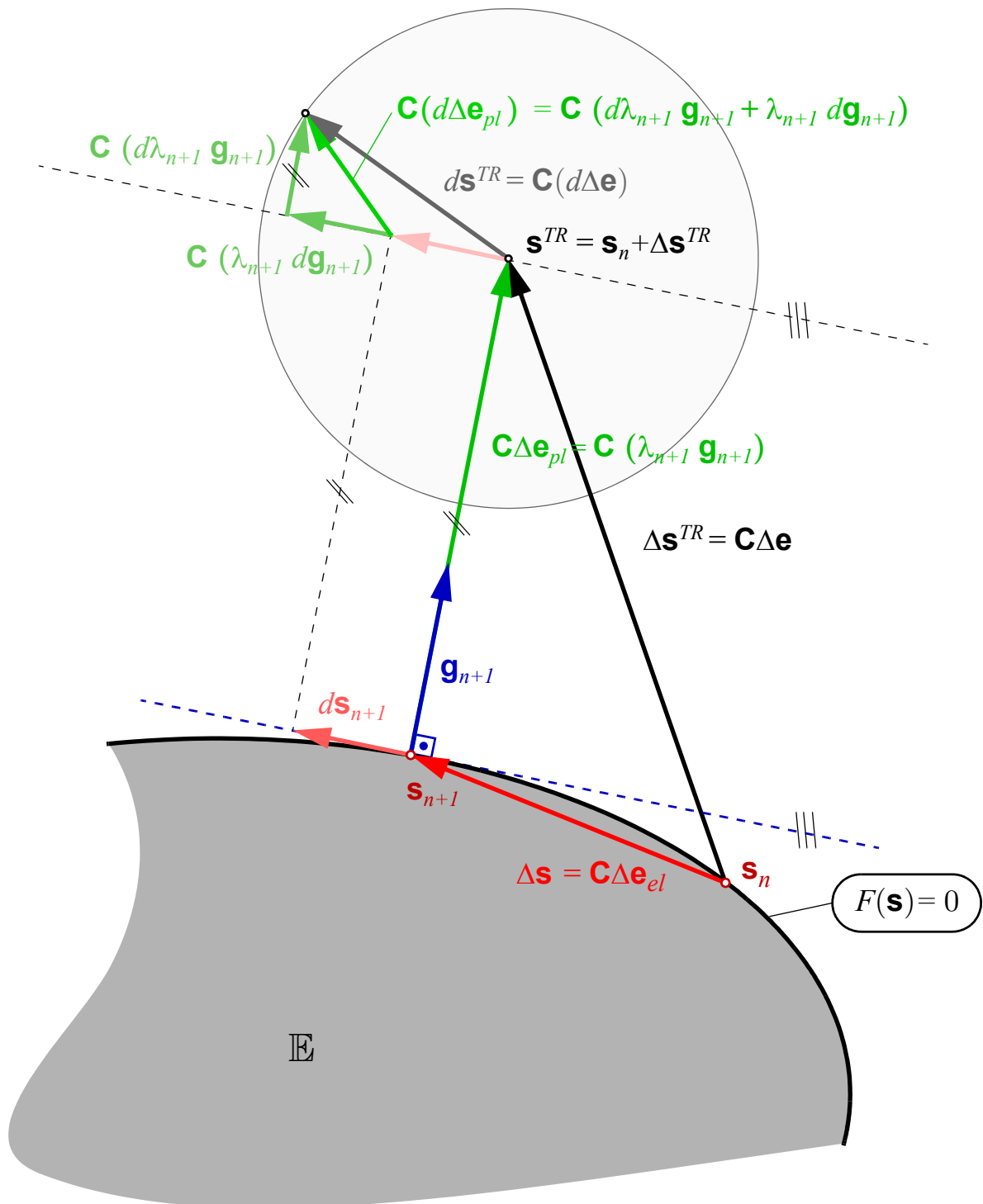


Bild 8.7 Darstellung der Linearisierung des Euler-Rückwärts-Verfahrens: bei \mathbf{s}_{n+1} nach \mathbf{e}_{n+1} und den plastischen Multiplikator λ_{n+1} ; zufolge der linear-elastischen Materialgleichung bilden die Zuwächse ein geschlossenes Dreieck

lässt sich das Gleichungssystem invertieren und man erhält:

$$\mathbf{C}_{ep,alg} = \left(\mathbf{J} + \mathbf{C}_{ep,n+1} \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_{n+1}^i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \Big|_{n+1} \right)^{-1} \mathbf{C}_{ep,n+1} \quad (8-31)$$

mit
$$\mathbf{C}_{ep,n+1} = \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1} \left[(\mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1} \right]^+ (\mathbf{G}_{\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C}$$

Box 8.4 Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix des Euler-Rückwärts-Verfahrens

8.6.2.2 Algorithmische Materialsteifigkeit bei der exakten Integration der Prandl-Reuss Gleichungen und bei Subinkrementierung

Wei/Peric/Owen (1996) haben die algorithmische Materialsteifigkeit bei der exakten Integrationsprozedur der Prandl-Reuss Gleichungen berechnet. Die dabei berechnete algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix ist unsymmetrisch. Dasselbe zeigt sich bei der Subinkrementierung; die berechnete algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix, die durch ein rekursives Schema berechnet wird, ist i.A. unsymmetrisch.

8.7 Euler-Rückwärts-Verfahren bei zusätzlichen Spannungsnullbedingungen

8.7.1 Ausgangssituation und Aufgabenstellung

8.7.1.1 Spannungsnullbedingungen

Bei den reduzierten Spannungszuständen sind die Spannungskomponenten \mathbf{s}_b im Laufe der gesamten Deformationsgeschichte null:

$$\mathbf{s}_b(t) = \mathbf{P}_b \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad t \in [0, +\infty) \quad (8-32)$$

Bei den Gesamtspannungen \mathbf{s} sind nur die aktiven Spannungskomponenten \mathbf{s}_a ungleich null:

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a + \underbrace{\mathbf{P}_b^T \mathbf{s}_b}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a = \mathbf{0} \quad t \in [0, +\infty) \quad (8-33)$$

Wird die Zwangsbedingung (8-32) in das elastische Materialgesetz eingearbeitet, ergibt sich der Zusammenhang zwischen den aktiven elastischen Verzerrungskomponenten $\mathbf{e}_{a,el}$ und den passiven, begleitenden Verzerrungskomponenten $\mathbf{e}_{b,el}$ über die Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{ba} und die reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}_a :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_a &= \mathbf{C}_a \mathbf{e}_{a,el} \\ \mathbf{e}_{b,el} &= \mathbf{H}_{ba} \mathbf{e}_{a,el} \end{aligned} \quad (8-34)$$

Diese beiden linearen Zusammenhänge sind auch zu jedem Belastungszeitpunkt t gültig.

8.7.1.2 Aufgabenstellung

Ausgangspunkt sind die Verzerrungen \mathbf{e}_n und die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n}$ zum Zeitpunkt t_n . Durch Einsetzen in das linear-elastische Materialgesetz lässt sich kontrollieren, ob die Bedingung $\mathbf{s}_{b,n} = \mathbf{0}$ erfüllt ist. Die Eingangsgrößen werden in aktive und passive Verzerrungskomponenten aufgeteilt. Es soll gezeigt werden, dass die bereits bekannten Beziehungen (Kap. 7) zwischen den aktiven und passiven Größen, sowie die Zweiteilung der Aufgabenlösung auch im Fall der mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren integrierten Gleichungen der Plastizität gelten. Die zweite Aufgabe ist die Berechnung der algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix für die konsistent reduzierte Situation.

8.7.2 Konsistente Reduktion der Gleichungen

8.7.2.1 Ausgangsgleichungen

Ausgangspunkt sind die mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren integrierten Gleichungen der Plastizität (Box 8.2). Zusätzlich zu diesen Gleichungen ist die Spannungsnullbedingung aus (8-32) mitzuberechnen. Für die Ausgangsgrößen zum Zeitpunkt t_n muss

$$\mathbf{s}_{b,n} = \mathbf{P}_b \mathbf{s}_n = \mathbf{P}_b \mathbf{C} (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{pl,n}) = \mathbf{0} \quad (8-35)$$

gelten. Zum Zeitpunkt t_{n+1} müssen die Gleichungen aus Box 8.5 erfüllt sein. Es ist ersichtlich, dass aufgrund der Spannungsnullbedingung alle von den Spannungen abhängigen Funktionen am Spannungszustand $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}$ ausgewertet werden.

Linear-elastisches Materialgesetz:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{pl,n+1}) \quad (8-36)$$

Spannungsnullbedingung:

$$\mathbf{s}_{b,n+1} = \mathbf{P}_b \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1} \quad (8-37)$$

Assoziierter plastischer Versagensmechanismus:

$$\mathbf{e}_{pl,n+1} - \mathbf{e}_{pl,n} = \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{s}_{n+1}) \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad (8-38)$$

Konsistenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}) &= \mathbf{f}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) && \leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &&& \geq \mathbf{0} \\ F_i(\mathbf{s}_{n+1}) \lambda_{n+1}^i &= F_i(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) \lambda_{n+1}^i && = 0 \end{aligned} \quad (8-39)$$

Box 8.5 Algebraische Gleichungen der Elasto-Plastizität bei Euler-Rückwärts-Integration bei zusätzlicher Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$

8.7.2.2 Einarbeitung der Spannungsnullbedingung

Durch Aufteilung der Spannungs- und Verzerrungskomponenten in passive und aktive Anteile und durch Anwendung bzw. Einarbeitung der Spannungsnullbedingung (8-37) in alle Gleichungen lässt sich das Gleichungssystem aus Box 8.5 reduzieren und zweiteilen. Das genaue Vorgehen ist bereits in Kap. 7.6 gezeigt worden und wird hier kurz wiederholt.

Das elastische Materialgesetz (8-36) teilt sich in das reduzierte elastische Materialgesetz und den Zusammenhang zwischen den aktiven und passiven elastischen Verzerrungen auf:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{a,n+1} &= \mathbf{C}_a \mathbf{e}_{a,el,n+1} &= \mathbf{C}_a (\mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n+1}) \\ \mathbf{e}_{b,el} &= \mathbf{e}_{b,n+1} - \mathbf{e}_{b,pl,n+1} &= \mathbf{H}_{ba} \mathbf{e}_{a,el}\end{aligned}\quad (8-40)$$

Der assoziierte plastische Versagensmechanismus (8-38) wird mit den Filtermatrizen additiv in einen aktiven und einen passiven Anteil aufgespalten:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{a,pl,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n} &= \mathbf{P}_a \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &= \mathbf{G}_{a,n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \\ \mathbf{e}_{b,pl,n+1} - \mathbf{e}_{b,pl,n} &= \mathbf{P}_b \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &= \mathbf{G}_{b,n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}\end{aligned}\quad (8-41)$$

8.7.2.3 Primärer Berechnungsteil

Vorgegeben werden nur die aktiven Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,n+1}$. Im primären Berechnungsschritt werden die aktiven plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,pl,n+1}$ bzw. die aktiven Spannungen $\mathbf{s}_{a,n+1}$ bestimmt. Dafür sind nur die Gleichungen mit den aktiven Verzerrungs- und Spannungsgrößen notwendig. Durch Einsetzen der Gleichung (8-38) in (8-36) werden die aktiven plastischen Verzerrungen als Problemunbekannte eliminiert. Mit Einführung des aktiven Trial-Spannungszustands $\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a (\mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n})$ ergibt sich das zu lösende primäre Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_a (\mathbf{s}_{a,n+1} - \mathbf{s}_a^{TR}) + \mathbf{G}_{a,n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) &\leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} &\geq \mathbf{0} \\ F_i (\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) \lambda_{n+1}^i &= 0\end{aligned}\quad (8-42)$$

Analog zu Kap. 9.2.4 lässt sich zeigen, dass sich diese Gleichungen des primären Berechnungsteils als Minimierungsaufgabe in den aktiven Spannungsgrößen anschreiben lassen:

Minimalabstandsaufgabe:

$$\min \{ \mathcal{A}_a \} = \min \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{s}_a^{TR} - \mathbf{s}_a)^T \mathbf{D}_a (\mathbf{s}_a^{TR} - \mathbf{s}_a) \right\}\quad (8-43)$$

$$\text{wobei } \mathbf{f}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a) = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_N]^T \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a} \leq \mathbf{0}$$

Box 8.6 Minimalabstandsaufgabe bei mehreren simultan aktivierbaren Versagensmechanismen im Subraum der aktiven Spannungen

Nach durchgeführter Berechnung ergeben sich die aktiven Spannungen $\mathbf{s}_{a,n+1}$ und die Lagrange'schen Parameter λ_{n+1} . Über das reduzierte Materialgesetz (8-40) werden die aktiven plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,pl,n+1}$ rückgerechnet.

8.7.2.4 Sekundärer Berechnungsteil

Für den sekundären Berechnungsteil müssen als Ausgangsgrößen die passiven plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,pl,n}$ bei t_n gegeben sein. Es sind die begleitenden passiven Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,n+1}$ und die passiven plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,pl,n+1}$ gesucht. Über den assoziierten plastischen Versagensmechanismus (8-41) werden die Verzerrungen $\mathbf{e}_{b,pl,n+1}$ berechnet; mit der Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{ba} (8-40) ergeben sich die begleitenden passiven Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{b,pl,n+1} &= \mathbf{e}_{b,pl,n} + \mathbf{P}_b \mathbf{G}_{n+1} \lambda_{n+1} & \mathbf{G}_{n+1} &= \mathbf{G}(\mathbf{s}_{n+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}) \\ \mathbf{e}_{b,n+1} &= \mathbf{e}_{b,pl,n+1} + \mathbf{H}_{ba} (\mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n+1}) \end{aligned} \quad (8-44)$$

8.7.2.5 Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix

Der Vorgang zur Herleitung der algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix verläuft analog zu Kap. 8.6.2.1, wobei nur die aktiven Spannungen und Verzerrungen betrachtet werden; die zugehörigen Ausgangsgleichungen sind die Gleichungen (8-42).

$$\mathbf{C}_{a,ep,alg} = \left(\mathbf{J} + \mathbf{C}_{a,ep,n+1} \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_{n+1}^i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s}_a \partial \mathbf{s}_a} \Big|_{n+1} \right)^{-1} \mathbf{C}_{a,ep,n+1} \quad (8-45)$$

mit

$$\mathbf{C}_{a,ep,n+1} = \mathbf{C}_a - \mathbf{C}_a \mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1} \left[(\mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C}_a \mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1} \right]^+ (\mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C}_a$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s}_a \partial \mathbf{s}_a} \Big|_{n+1} = \mathbf{P}_a \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,n+1}} \right) \mathbf{P}_a^T$$

Zu beachten ist bei der Berechnung von $\mathbf{C}_{a,ep,alg}$ die zweite Ableitung der Versagensbedingungen F_i nach den Spannungskomponenten \mathbf{s}_a .

8.7.3 Alternative Berechnungsprozedur

In Chap. 9 von de Souza Neto/Peric/Owen (2008) werden verschiedene Verfahren aufgelistet um die Spannungsnullbedingungen im Euler-Rückwärts-Verfahren mitzuberechnen. Eine allgemein umsetzbare Variante geht von den Gleichungen in Kap. 8.6.1 aus; in den Referenzspannungszustand lassen sich die Nullspannungsbedingungen einarbeiten. Anschließend müssen die nichtlinearen Gleichungen mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden. Diese Methode lässt sich auf ein beliebiges dreidimensionales Plastizitätsmodell anwenden.

8.8 Aufbau und Ablauf der Materialroutine

8.8.1 Eingangsgrößen

8.8.1.1 Materialbeschreibung

Um das dreidimensionale elasto-plastische Materialmodell zu beschreiben, sind die elastische Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} und die materialspezifischen N Versagensbedingungen F_i anzugeben.

8.8.1.2 Aktive Spannungs- und Verzerrungskomponenten

Die Angabe der aktiven Verzerrungs- bzw. Spannungskomponenten erfolgt durch einen Zeilenvektor mit sechs Spalten, wobei die aktiven Komponenten mit einem Einsereintrag vorgegeben werden. Damit ergeben sich die komplementären passiven Komponenten. Mit diesen lassen sich die Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b berechnen.

8.8.1.3 Vorgegebenen Verzerrungs- und Spannungsgrößen

Ausgangsgrößen sind die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,n}$. Diese teilen sich in die aktiven $\mathbf{e}_{a,pl,n}$ und die passiven $\mathbf{e}_{b,pl,n}$ Komponenten auf. Als berechnungssteuernde Größen sind die aktiven Verzerrungen $\mathbf{e}_{a,n+1}$ und zusätzlich die Spannungen \mathbf{s}_b vorgegeben. Diese Spannungen sind dabei unabhängig vom Belastungszeitpunkt stets null. Es gilt $\mathbf{s}_b = \mathbf{s}_{b,n} = \mathbf{s}_{b,n+1} = \mathbf{0}$.

8.8.2 Berechnungsablauf der Materialroutine

Die Materialroutine dient zur Berechnung der plastischen Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{a,pl,n+1}$ und $\mathbf{e}_{b,pl,n+1}$ und der algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{C}_{a,ep,alg}$. Entsprechend gliedert sich der Berechnungsaufbau in drei Teile:

- Part I - „Primärberechnungsteil“: Berechnung der aktiven plastischen Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{a,pl,n+1}$,
- Part II - „Sekundärberechnungsteil“: Bestimmung der begleitenden passiven plastischen Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{b,pl,n+1}$,
- Part III: Berechnung der algorithmischen Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{C}_{a,ep,alg}$.

In Part I muss die konvexe Optimierungsaufgabe (Box 8.3) entweder mit der ALPM oder dem SQP-Verfahren gelöst werden (mehr zu diesen Lösungsverfahren findet sich im Anschlusskapitel). Zu beachten ist, dass diese Minimierungsaufgabe im Subraum der aktiven Spannungskomponenten stattfindet. Diese Berechnung liefert die aktiven Spannungskomponenten $\mathbf{s}_{a,n+1}$, die Indizes \mathcal{A} , der in diesem Spannungspunkt aktiven Versagensbedingungen und die Lagrange'schen Parameter $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$. Aus diesen Größen lassen sich mit dem reduzierten linear-elastischen Materialgesetz die aktiven plastischen Verzerrungskomponenten $\mathbf{e}_{a,pl,n+1}$ rückrechnen.

Mit Gleichung (8-44) werden die passiven plastischen Verzerrungskomponenten $\mathbf{e}_{b,pl,n+1}$ und mit der Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{ba} die passiven Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{b,n+1}$ berechnet. Zur Komplettierung der Materialroutine wird mit den Gleichungen (8-44) die algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{C}_{a,ep,alg}$ bestimmt.

$$[\mathbf{s}_{a,n+1}, \mathbf{e}_{a,pl,n+1}, \mathbf{e}_{b,pl,n+1}, \mathbf{C}_{a,ep,alg}] = \text{MATERIAL_FUNC}(\mathbf{e}_{a,n+1}, \mathbf{e}_{a,pl,n}, \mathbf{e}_{b,pl,n}, \mathbf{C}, F_i, \mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b)$$

$$\text{IN: } \mathbf{e}_{a,n+1}, \mathbf{e}_{a,pl,n}, \mathbf{e}_{b,pl,n}, \mathbf{C}, F_i,$$

$$\text{OUT: } \mathbf{s}_{a,n+1}, \mathbf{e}_{a,pl,n+1}, \mathbf{e}_{b,pl,n+1}, \mathbf{C}_{a,ep,alg}$$

Primärer Berechnungsteil

1. Berechne reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{C}_{aa} - \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T$$

2. Berechne Trial-Spannungszustand

$$\mathbf{s}_a^{TR} = \mathbf{C}_a (\mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n})$$

3. Löse Minimalabstandsaufgabe

$$\text{Aufpunkt: } \mathbf{x}_A = \mathbf{s}_a^{TR}$$

$$\text{positiv-definite Matrix: } \mathbf{D}_a = \mathbf{C}_a^{-1}$$

$$\text{Zwangsungleichungen } F_i \text{ als Funktionen in } \mathbf{s}_a: F_i(\mathbf{s} = \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a)$$

$$[\mathbf{s}_{a,n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \mathcal{A}] = \text{SQP (ALPM) _FUNC}(\mathbf{x}_A, \mathbf{D}_a, F_{a,i})$$

4. Rückrechnung der aktiven plastischen Verzerrungen

$$\mathbf{e}_{a,pl,n} = \mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{D}_a \mathbf{s}_{a,n+1}$$

Box 8.7 Materialroutine; Part I - primärer Berechnungsteil

Sekundärer Berechnungsteil

5. Berechnung der passiven plastischen Verzerrungen

$$\mathbf{e}_{b,pl,n+1} = \mathbf{e}_{b,pl,n} + \mathbf{P}_b \mathbf{G}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$$

6. Berechne passive Verzerrungen

Berechne Kopplungsmatrix

$$\mathbf{H}_{ba} = -\mathbf{C}_{bb}^{-1} \mathbf{C}_{ab}^T$$

Berechne passiven Gesamtverzerrungen

$$\mathbf{e}_{b,n+1} = \mathbf{e}_{b,pl,n+1} + \mathbf{H}_{ba} (\mathbf{e}_{a,n+1} - \mathbf{e}_{a,pl,n+1})$$

Algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix

7. Berechne elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_{a,ep,n+1} = \mathbf{C}_a - \mathbf{C}_a \mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1} \left[(\mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C}_a \mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1} \right]^+ (\mathbf{G}_{a,\mathcal{A},n+1})^T \mathbf{C}_a$$

8. Berechne algorithmische Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_{a,ep,alg} = \left(\mathbf{J} + \mathbf{C}_{a,ep,n+1} \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_{n+1}^i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{s}_a \partial \mathbf{s}_a} \bigg|_{n+1} \right)^{-1} \mathbf{C}_{a,ep,n+1}$$

Box 8.8 Materialroutine; Part II und III

9

Lösungsmethoden nichtlinearer Optimierungs- aufgaben

9.1 Einleitung

9.1.1 Problembeschreibung

Im vorigen Kapitel konnte gezeigt werden, dass die Lösung der algebraischen Gleichungen, die sich aus der approximativen Integration der Differentialgleichungen der Plastizität mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren ergeben, ebenso die Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe ist. Die dabei verwendeten mechanischen Begriffe, wie z.B. Spannungen, Verzerrungen und Materialsteifigkeitsmatrix, sollen in diesem Kapitel ausgeblendet werden und die gestellte Aufgabe aus rein geometrischem Gesichtspunkt betrachtet werden.

Zuerst soll die konvexe Optimierungsaufgabe angeschrieben werden. Die Zielfunktion d bzw. - geometrisch interpretiert - die allgemeine Abstandsfunktion d ist eine quadratische Funktion und strikt konvex. Die Zwangsfunktionen F_i sind i.A. nichtlinear und konvex.

Für den Sonderfall linearer Zwangsfunktionen ergibt sich eine quadratische Programmierungsaufgabe (Kurzbezeichnung: QP). Diese wird hier mit dem Active-Set-Verfahren gelöst. Bei nichtlinearen Zwangsfunktionen wird die sequentielle quadratische Programmierungsmethode (SQP) vorgestellt. Diese löst die nichtlineare Aufgabenstellung durch eine Abfolge von QP -Lösungsschritten. Die Rechenabläufe werden durch Pseudocodes angegeben und durch ein Line-Search-Verfahren modifiziert, sodass man globale Konvergenz erhält. In Anhang J sind zwei alternative nichtlineare Programmierungsverfahren, die Penalty-Methode (Kurzbezeichnung: PM) und die Augmented-Lagrange-Penalty-Methode ($ALPM$), angeführt und ausgearbeitet. Diese Standardlösungsverfahren finden sich in den Büchern von Bazaraa/Sherali/Shetty (2006), Bhatti (2000), Luenberger/Ye (2008) oder Fletcher (1987) und werden hier für die gegebene Aufgabenstellung entsprechend adaptiert. Illustrationen zum Rechenablauf und zugehörige Teilrechen Schritte sind im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum dargestellt und werden anhand dieser Darstellungen erläutert. Anschließend lassen sich diese im Anschauungsraum formulierten und entwickelten Prozeduren ohne Einschränkungen auf einen beliebig p -dimensionalen Raum übertragen.

9.1.2 Inhalt von Kapitel 9

9.2 Aufgabenstellung - konvexe Optimierungsaufgabe

9.3 QP: Quadratische Programmierung

9.4 SQP: Sequentielle quadratische Programmierung

9.5 Anwendungen auf Aufgabenstellungen der Plastizitätsgleichungen und offene Punkte

9.6 Beispiel: Tragverhalten eines schubbeanspruchten RME

9.7 Beispiel: Tragspannungsberechnung von Kristallen

9.2 Aufgabenstellung - konvexe Optimierungsaufgabe

9.2.1 Mechanische Eingangsgrößen und geometrische Größen

Die Problemdarstellung basiert auf rein geometrischen Betrachtungen und Begriffen. Mit Box 9.1 wird die Querverbindung von den geometrischen Bezeichnungen zu den mechanischen Größen hergestellt.

Mechanische Größen	Geometrische Größen
\mathbf{s} ...Spannungen	\mathbf{x} ...Ortsvektor in \mathbb{R}^p ($p \leq 6$)
\mathbf{s}^{TR} ...Trial-Spannungen	\mathbf{x}_A ...Aufpunkt
\mathbf{s}_n ...Spannungen am Inkrementanfang t_n	\mathbf{x}_0 ...Berechnungsstartpunkt
\mathbf{s}_{n+l} ...Spannungen am Inkrementende t_{n+l}	\mathbf{x}^* ...Lösungspunkt
\mathbf{C}, \mathbf{D} ...Materialsteifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix	\mathbf{C}, \mathbf{D} ... positiv definite Matrizen
d ...strikt konvexe, allgemeine Minimalabstandsfunktion bzw. Zielfunktion	
$F_i(\mathbf{s}) \leq 0$...Versagensbedingung	$F_i(\mathbf{x}) \leq 0$...Zwangsgleichung
\mathbb{E} ...erlaubter Spannungsbereich	\mathbb{E} ...konvexe Punktmenge bzw. konvexes Gebiet in \mathbb{R}^m
$\partial\mathbb{E}$...elastische Grenzfläche	$\partial\mathbb{E}$...Oberfläche von \mathbb{E} (facettierte Hyperfläche in \mathbb{R}^m)
\mathcal{A} ...Indexmenge der aktiven Versagensmechanismen bei \mathbf{s}_{n+l}	\mathcal{A} ...aktive Zwangsgleichungen bei \mathbf{x}^*
	\mathcal{W} ...momentanes Workingset der Zwangsgleichungen bei der Gleichungslösung

Box 9.1 Mechanische und zugeordnete geometrische Größen und Bezeichnungen

9.2.1.1 Geometrische Grundbegriffe

Die Aufgabenstellung ist in Räumen \mathbb{R}^p mit beliebiger Dimension p formuliert. Alle Vorstellungen und Überlegungen werden zunächst im zwei- bzw. dreidimensionalen Anschauungsraum durchgeführt und können ohne Einschränkung in einen beliebig höherdimensionalen Raum übertragen werden. Ein Punkt in \mathbb{R}^p wird durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m] \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \quad (9-1)$$

gekennzeichnet. Um die euklidische Geometrie auf beliebige Dimensionalität anzuwenden, ist das Skalarprodukt bzw. innere Produkt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (9-2)$$

definiert. Damit sind die Distanz zwischen Punkten und der Winkel zwischen Vektoren in \mathbb{R}^p bestimmbar:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x})} \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (9-3)$$

9.2.2 Zielfunktion \mathcal{d}

9.2.2.1 Abstandsfunktion

Der Abstand zwischen dem Punkt A , dem sogenannten Aufpunkt, und einem beliebigen Punkt in \mathbb{R}^p wird mithilfe der Ortsvektoren \mathbf{x}_A und \mathbf{x} berechnet und ist:

$$\mathcal{d}_0(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x})^T (\mathbf{x}_A - \mathbf{x})} \quad (9-4)$$

9.2.2.2 Allgemeine Abstandsfunktion

Als *allgemeine Abstandsfunktion* wird

$$\mathcal{d}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}) \quad (9-5)$$

bezeichnet. Die dabei eingeführte Matrix \mathbf{D} ist positiv definit und daher \mathcal{d} strikt konvex. Geometrisch betrachtet stellen die Gleichungen $\mathcal{d} = \text{konst.}$ Hyperellipsoidflächen in \mathbb{R}^p dar (Bild 9.1). Die Hauptachsen dieser Hyperellipsoidflächen schneiden sich im Aufpunkt A . Bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$ ist \mathcal{d} null. Der Gradient der Zielfunktion ist:

$$\frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{D} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}) \quad (9-6)$$

Die allgemeine Abstandsfunktion \mathcal{d} ist als Quadrat der Länge des um $\sqrt{1/2\mathbf{D}}$ gestreckten und verschwenkten Vektors $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}$ graphisch darstellbar. Da \mathbf{D} positiv definit ist, schließt der Vektor $\sqrt{1/2\mathbf{D}} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x})$ mit dem Vektor $(\mathbf{x}_A - \mathbf{x})$ stets einen Winkel kleiner als 90° ein.

9.2.3 Zwangsbedingungen & konvexe Menge \mathbb{E}

Die Zwangsfunktionen $F_i(\mathbf{x})$ haben die Eigenschaften aus Gleichung (3-2). Jede der N -Funktionen beschreibt, in implizierte Form $F_i(\mathbf{x})=0$ gegeben, eine konvexe Hyperfläche, d.h. einen Subraum von \mathbb{R}^p mit der Dimension $p-1$. Aufgrund der Konvexität teilt jede dieser Flächen den Raum in einen Bereich $F_i < 0$ (Innenbereich i) und $F_i > 0$ (Außenbereich i). Der Gradient $\nabla F_i = \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}}$ auf die Fläche $F_i(\mathbf{x}) = 0$ weist stets nach außen.

Aus der vorangegangenen Betrachtung lässt sich folgern, dass für alle Punkte \mathbf{x} im grau unterlegten Bereich \mathbb{E} (Bild 9.1) $F_i(\mathbf{x}) \leq 0$ gilt. Damit ergibt sich die Definition:

Konvexe Menge \mathbb{E} in \mathbb{R}^p :

$$\mathbb{E} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \mid F_i(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ for all } i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \quad (9-7)$$

Oberfläche von \mathbb{E} :

$$\partial \mathbb{E} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E} \mid F_i(\mathbf{x}) = 0, \text{ for some } i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$$

9.2.4 Minimalabstandsberechnung - eine konvexe Optimierungsaufgabe

9.2.4.1 Minimalabstandsaufgabe

Mit den zuvor angeführten Größen kann die Minimalabstandsaufgabe (9-8) formuliert werden. Da die allgemeine Abstandsfunktion \mathcal{d} (9-5) und alle F_i konvex sind, ergibt sich ein konvexes Optimierungsproblem. Diese Aufgabe hat daher eine eindeutige Lösung \mathbf{x}^* .

Minimalabstandsaufgabe

$$\begin{aligned} \mathcal{d}(\mathbf{x}^*) &= \min \{ \mathcal{d}(\mathbf{x}) \} \\ \text{wobei} & \\ F_i(\mathbf{x}) &\leq 0 \text{ für alle } i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (9-8)$$

Box 9.2 Minimalabstandsaufgabe

9.2.4.2 Aktive Zwangsgleichungen

Der Lösungspunkt \mathbf{x}^* der Minimalabstandsaufgabe liegt - wenn \mathbf{x}_A außerhalb von \mathbb{E} ist - auf der Oberfläche $\partial \mathbb{E}$. Einige der Zwangsungleichungen F_i sind damit null, werden also zu Zwangsgleichungen. Damit können die Gleichungen F_i in zwei Gruppen eingeteilt werden: Die *aktiven* Gleichungen für die $F_i(\mathbf{x}^*) = 0$ gilt. Alle Übrigen, die bei \mathbf{x}^* kleiner als Null sind, werden als *inaktiv* bezeichnet. Die Indizes i lassen sich dementsprechend in zwei Gruppen einteilen, die Gruppe

$$\mathcal{A} = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid F_i(\mathbf{x}^*) = 0\} \quad (9-9)$$

für die aktiven Gleichungen und jene für die inaktiven Ungleichungen, die nicht in \mathcal{A} enthalten sind. Einige Rechenverfahren zur Bestimmung der Lösung \mathbf{x}^* und dem zugehörigen Set \mathcal{A} werden in den nachfolgenden Kapiteln vorgestellt. Zuvor sollen kurz die notwendigen Bedingungen und Gleichungen angeführt werden, die im Lösungspunkt, d.h. dem gesuchten Minimum, erfüllt sein müssen.

9.2.4.3 Lagrange Funktion

Bevor die Lagrange'sche Funktion \mathcal{L} angeschrieben wird, werden die Zwangsungleichungen F_i mittels neu eingeführter positiver reeller Schlupfvariablen z_i^2 in Zwangsgleichungen umgeschrieben.

$$F_i(\mathbf{x}) + z_i^2 = 0 \quad z_i^2 \geq 0 \quad (9-10)$$

Die Gleichungen F_i werden im Vektor \mathbf{f} zusammengefasst. Die Schlupfvariablen z_i^2 ergeben sich durch ein Matrix-Vektorprodukt. Damit lassen sich die N -Gleichungen aus (9-10) in einer Matrixgleichung zusammengefasst anschreiben:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{Z}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \text{diag}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & & 0 \\ 0 & z_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & z_N \end{bmatrix} \quad (9-11)$$

Damit ergibt sich die Lagrange'sche Funktion:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}) = \mathcal{d}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda^i [F_i(\mathbf{x}) + z_i^2] = \mathcal{d} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} + \mathbf{Z}\mathbf{z}) \quad (9-12)$$

mit den $(p + 2N)$ -Unbekannten \mathbf{x} , $\boldsymbol{\lambda}$ und \mathbf{z} . Zu beachten ist, dass die Lagrangen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ größer bzw. gleich null sein müssen.

9.2.4.4 Minimumsbedingungen

Die zu erfüllenden Minimumsbedingungen der Lagrange'schen Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$ werden durch Ableitung von \mathcal{L} nach den Unbekannten gefunden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial d}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{f} + \mathbf{Z}\mathbf{z} = \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}} &= 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_N] \quad (9-13)$$

Die erste Gleichung ist eine Vektorgleichung in \mathbb{R}^p und besagt, dass der negative Gradient der Abstandsfunktion gleich einer Linearkombination aus den Gradienten der aktiven Zwangsbedingungen ist. Die Koeffizienten zu den Gradienten der aktiven F_i werden durch die Lagrange'schen Multiplikatoren angegeben. Die zweite Gleichung gewährleistet die Erfüllung der Zwangsgleichungen (9-10). Die dritte Gleichung gibt an, ob entweder z_i oder λ^i gleich null ist. Damit entscheidet diese Gleichung darüber, welche Zwangsbedingungen aktiv und welche inaktiv sind: Ist z_i null, ist die Zwangsgleichung mit demselben Index i aktiv; ist z_i nicht null, ist die zugehörige Zwangsungleichung kleiner als null, also inaktiv. Gleichungen (9-13) sind im Fall einer konvexen Optimierungsaufgabe notwendige und hinreichende Bedingungen für ein globales Minimum.

In Gleichung (9-13) können die Schlupfvariablen z_i eliminiert werden. Damit reduzieren sich die $(p + 2N)$ -Gleichungen auf $(p + n)$ -Gleichungen mit den Unbekannten \mathbf{x} und $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial d}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{D}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}) + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &\leq 0 \\
\boldsymbol{\lambda} &\geq 0 \\
\lambda^i F_i(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}
\end{aligned} \quad (9-14)$$

9.2.4.5 Aufgabenstellung

Wird das in Gleichung (9-14) kompakt angeschriebene Gleichungssystem wieder aufgeschlüsselt, ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}_A \boldsymbol{\lambda}_A &= -\mathbf{D}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}) + \mathbf{G}_A \boldsymbol{\lambda}_A = \mathbf{0} \\
\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\lambda}_A &\geq \mathbf{0} \\
F_i(\mathbf{x}) &< 0 \quad i \notin \mathcal{A} \\
\lambda^i &= 0 \quad i \notin \mathcal{A}
\end{aligned} \quad (9-15)$$

Dabei sind in der ersten Vektorgleichung nur mehr die Gradienten der aktiven Zwangsglei-

chungen angeschrieben, was durch das tief gestellte \mathcal{A} gekennzeichnet ist. Die aktiven Zwangsgleichungen $F_i = 0$ mit $i \in \mathcal{A}$ sind im Vektor $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ zusammengefasst.

Sind also die aktiven Flächen F_i bekannt, lassen sich die gesuchten Unbekannten \mathbf{x} und die Lagrange'schen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}$ aus den Gleichungen (9-15) berechnen. Man hat somit $(p+N_{\mathcal{A}})$ -Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten. Die Lösung erfüllt alle Gleichungen (9-15). Das ist aber unter der Voraussetzung geschehen, dass das aktive Lösungsset \mathcal{A} , also die eigentliche Lösung, bereits bekannt ist. Die wesentliche Fragestellung lautet:

Wie findet man aber unter N -Zusatzgleichungen F_i das aktive Set \mathcal{A} ?

Das ist mit der Bestimmung von \mathbf{x}^* die zu lösende Hauptaufgabe.

Anzumerken ist, dass der Begriff des aktiven Sets für alle Lösungsprozeduren Gültigkeit und Bedeutung hat, da er nach der Definition in Gleichung (9-9) - unabhängig vom verwendeten Lösungsverfahren - die Flächensegmente kennzeichnet, auf denen der Lösungspunkt \mathbf{x}^* der konvexen Optimierungsaufgabe liegt.

9.3 QP: Quadratische Programmierung

Bei der quadratischen Programmierung ist die Zielfunktion \mathcal{d} quadratisch in \mathbf{x} und die Zwangsfunktionen sind alle linear in \mathbf{x} .

9.3.1 Aufgabenformulierung

9.3.1.1 Minimalabstandsfunktion

Die Minimalabstandsfunktion (9-5) kann auch in der Form

$$\mathcal{d}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0 \quad \mathbf{d} = -\mathbf{D} \mathbf{x}_A, \quad d_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_A^T \mathbf{D} \mathbf{x}_A \quad (9-16)$$

angegeben werden. Für die geometrische Lösungsprozedur ist der Aufpunkt aus \mathbf{d} rückrechenbar. Diese Form der Eingangsgrößen wird im Kapitel zur sequentiell quadratischen Programmierung benötigt. Der konstante Zusatzterm d_0 muss nicht angegeben werden, da der Ortspunkt \mathbf{x}^* des Minimums von diesem Wert unabhängig und der konkrete Minimalabstandswert \mathcal{d} im Gesamtkontext der Spannungsintegration von untergeordnetem Interesse ist.

9.3.1.2 Lineare Zwangsfunktionen und konvexes Polyeder

Gegeben sind N lineare Funktionen $F_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$. Die ersten beiden Anforderungen (Konvexität und C_2 -Kontinuität) auf Seite 34 werden durch die linearen Funktionen erfüllt. Um der dritten Anforderung, $F_i(\mathbf{x}=\mathbf{0}) < 0$, zu genügen, muss b_i stets positiv sein. Geometrisch stellen die linearen Funktionen F_i Ebenen in \mathbb{R}^p dar. Der Gradient \mathbf{g}_i von $F_i(\mathbf{x})$ ist \mathbf{a}_i . Damit kann der Vektor \mathbf{f} aller F_i Funktionen als Matrixgleichung angeschrieben werden:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{b} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (9-17)$$

Die Spalten der (p, N) -Matrix \mathbf{A} sind die Gradienten \mathbf{a}_i der N -Funktionen F_i . Alle N Abstände b_i werden im Vektor \mathbf{b} zusammengefasst. Die Ebenengleichungen (9-17) begrenzen das konvexe Polyeder:

$$\begin{aligned} \text{Konvexes Polyeder : } \mathbb{E} &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \} \\ \text{Oberfläche von } \mathbb{E} : \quad \partial \mathbb{E} &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E} \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i = 0, \text{ for some } i \in \{1, 2, \dots, N\} \} \end{aligned} \quad (9-18)$$

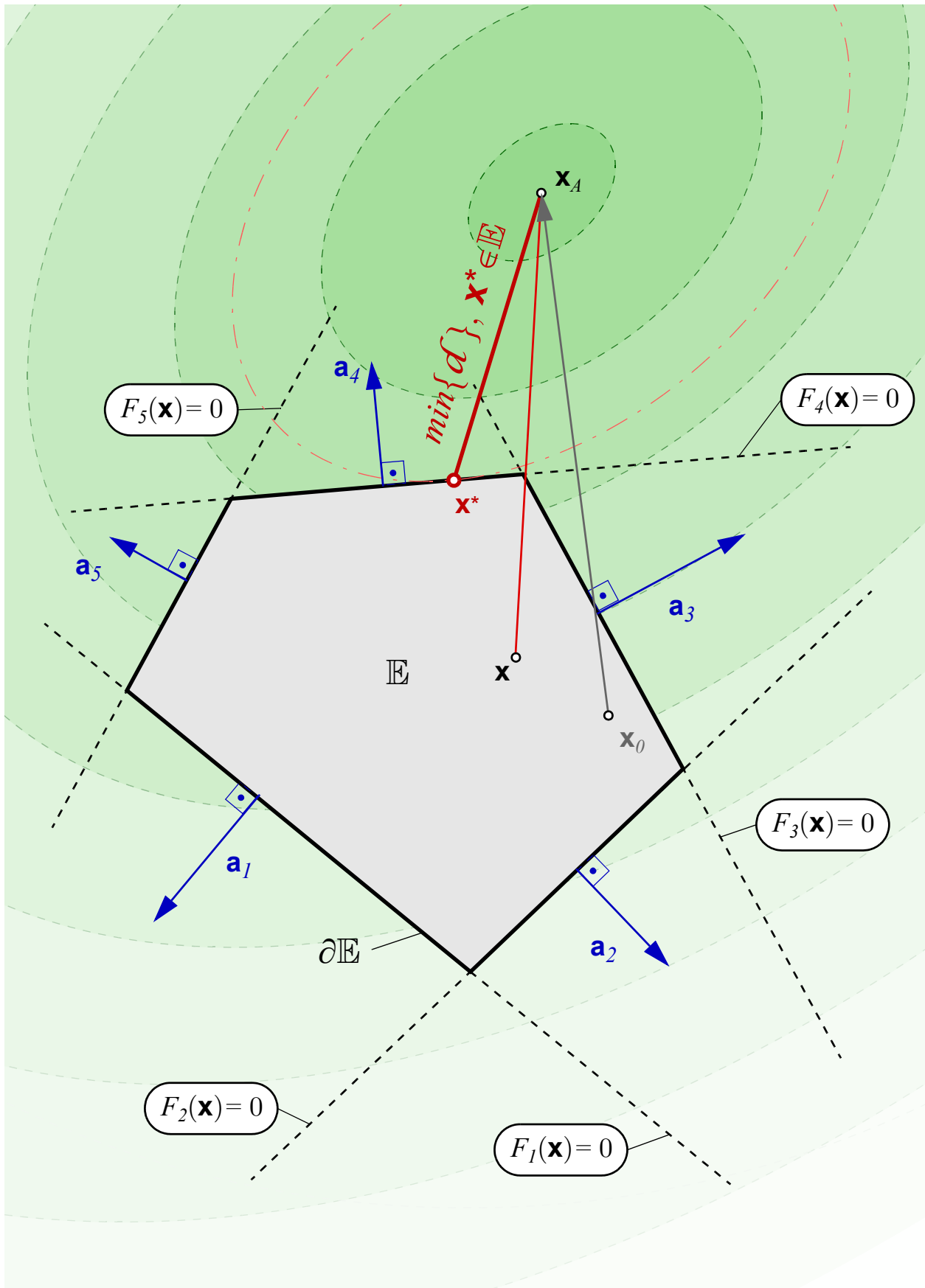


Bild 9.1 Illustration der Minimalabstandsaufgabe zu einem konvexen Polyeder \mathbb{E}

9.3.1.3 Minimalabstandsaufgabe

Gesucht wird der Minimalabstandspunkt \mathbf{x}^* zum konvexen Polyeder, siehe Aufgabenstellung Box 9.2. Die Minimalbedingungen (9-15) ergeben bei der QP-Aufgabenstellung lineare Gleichungen und Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}} \\ (\mathbf{A}_{\mathcal{A}})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i &< 0 & i \notin \mathcal{A} \\ \lambda^i &= 0 & i \notin \mathcal{A} \end{aligned} \quad (9-19)$$

9.3.2 Active-Set-Methode

Bei der Active-Set-Methode wird die zu lösende Aufgabe aufgrund der Nichtglattheit von $\partial\mathbb{E}$ in Berechnungsteilschritte - sogenannten Grundaufgaben - zerlegt, die sich jeweils auf ausgesuchten ebenen Teilsegmenten von $\partial\mathbb{E}$ abspielen. Die Indizes dieser momentan aktiven Ebenengleichungen $F_i = 0$ werden in der Menge \mathcal{W} , dem sogenannten *working Set*, zusammengefasst.

9.3.2.1 Grundaufgabe I: Durchstoßpunktberechnung

Gegeben ist ein Anfangspunkt \mathbf{x}_a , der in \mathbb{E} liegt (somit kann er sich auch auf der Oberfläche $\partial\mathbb{E}$ befinden), und ein Endpunkt \mathbf{x}_e , der außerhalb von \mathbb{E} liegt. Die Indizes aller Zwangsfunktion F_i , die bei \mathbf{x}_e größer als null sind, werden in der Menge

$$\mathcal{F} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}_e) > 0\} \quad (9-20)$$

zusammengefasst. Zwischen den beiden Punkten wird eine Geradenfunktion mit dem Parameter ξ gelegt:

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_a + \xi(\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a) \quad (9-21)$$

Gesucht wird der Durchstoßpunkt \mathbf{x}_p der Geraden durch die Fläche $\partial\mathbb{E}$. Dieser liegt dabei auf einer oder mehreren der Ebenen aus der Menge \mathcal{F} . Für jede dieser Teilflächen lässt sich der Durchstoßpunkt mit dem Parameter

$$\xi_{p,i} = -\frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_a - b_i}{\mathbf{a}_i^T (\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a)} \quad (9-22)$$

bestimmen. Der kleinste Parameter $\min\{\xi_{p,i}\}$ gibt die zuerst durchstoßene Fläche an und liegt damit noch auf $\partial\mathbb{E}$.

Die Indizes der Flächen, auf denen der Durchstoßpunkt liegt, werden in der Menge \mathcal{W} zusammengefasst. Der Rechenablauf ist in Box 9.3 dargestellt.

In Bild 9.2 ist eine Berechnungssituation in \mathbb{R}^3 dargestellt: Der Anfangspunkt liegt auf der Schnittkante der Flächen eins und zwei. Auf dieses Flächenset wird der Minimalabstand vom Aufpunkt \mathbf{x}_a aus berechnet. Der Punkt \mathbf{x}_e liegt dabei nicht mehr in \mathbb{E} , da die Schnittkante der Flächen eins und zwei durch eine ebene Fläche mit dem Index 3 abgeschnitten wird. Der Durchstoßpunkt \mathbf{x}_p der Kante durch diese Fläche liegt auf dem Schnittpunkt aller drei Ebenen; es gilt $\mathcal{W} = \{1,2,3\}$.

[$\mathbf{x}_p, \mathcal{W}$] = DURCHSTOSSPKT_FUNC($\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_e, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{F}$)

IN: $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_e, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{F}$

OUT: $\mathbf{x}_p, \mathcal{W}$

1. Berechne Durchstoßpunktparameter $\xi_{p,i}$

FOR $i \in \mathcal{F}$
compute

$$\xi_{p,i} = -\frac{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}_a - b_i}{\mathbf{a}_i^\top (\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a)}$$

END

2. Berechne Durchstoßpunkt \mathbf{x}_p und zugehöriges Set \mathcal{W}

compute

$$\xi_p = \min\{\xi_{p,i}\},$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_a + \xi_p (\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a),$$

$$\mathcal{W} = \{i \in \{1,2,\dots,N\} \mid F_i(\mathbf{x}_p) = 0\}$$

3. Output

$\mathbf{x}_p, \mathcal{W}$

EXIT

Box 9.3 Durchstoßpunktberechnungsfunktion bei linearen Zwangsgleichungen

(für die Graphik gilt $\mathbf{C}=\mathbf{J}$!)

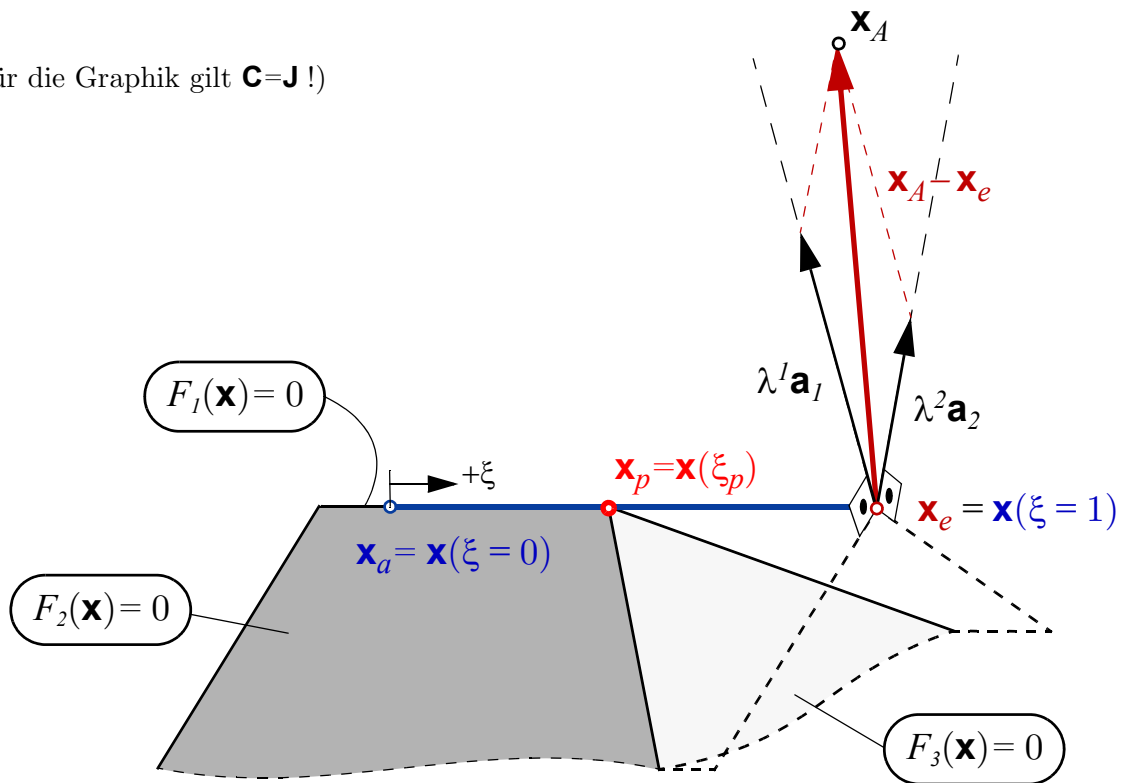


Bild 9.2 Durchstoßpunktberechnung bei linearen Zwangsgleichungen; Gegeben ist das Set $\{1,2\}$ und $\mathcal{F} = \{3\}$. Der Minimalabstandspunkt von \mathbf{x}_A aus auf die Flächen der Menge $\{1,2\}$ \mathbf{x}_e liegt außerhalb des konvexen Bereichs \mathbb{E} . Gesucht ist der Durchstoßpunkt \mathbf{x}_p durch die Ebene mit dem Index 3, der auf der Verbindungsgeraden von \mathbf{x}_A nach \mathbf{x}_e liegt. Das Set \mathcal{W} ist somit $\mathcal{W} = \{1, 2, 3\}$

9.3.2.2 Grundaufgabe II: Minimalabstandsaufgabe

Ein zweiter Bestandteil der Active-Set-Methode ist die Berechnung des Minimalabstandes vom Aufpunkt \mathbf{x}_A auf ein vorgegebenes Flächenset \mathcal{W} . Um den Fußpunkt \mathbf{x} zu berechnen, werden die linearen Gleichungen (9-19) für das Flächenset \mathcal{W} angeschrieben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{A}_{\mathcal{W}} \\ (\mathbf{A}_{\mathcal{W}})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{x}_A \\ \mathbf{b}_{\mathcal{W}} \end{bmatrix} \tag{9-23}$$

Die symmetrische Matrix der linken Seite lässt sich mithilfe der Matrixidentität aus Anhang I invertieren und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} &= \left[(\mathbf{A}_{\mathcal{W}})^T \mathbf{C} \mathbf{A}_{\mathcal{W}} \right]^+ \left[(\mathbf{A}_{\mathcal{W}})^T \mathbf{x}_A - \mathbf{b}_{\mathcal{W}} \right] \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_A - \mathbf{C} \mathbf{A}_{\mathcal{W}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}} \end{aligned} \tag{9-24}$$

Die invertierte Matrix \mathbf{D} ist dabei mit \mathbf{C} angeschrieben. Das hochgestellte Pluszeichen kennzeichnet die bereits bekannte Moore-Penrose-Pseudoinverse. Diese ist in Situationen

notwendig, wenn die Vektoren \mathbf{a}_i , aus denen sich \mathbf{A}_W aufbaut, voneinander linear abhängig sind. Der allgemeine Berechnungsablauf zur Bestimmung des Minimalabstandes ist:

[$\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_W$] = MINIMALABSTAND_FUNC($\mathbf{x}_A, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, W$)

IN: $\mathbf{x}_A, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, W$

OUT: $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_W$

1. Extrahiere aus \mathbf{A} Spalten und aus \mathbf{b} Zeilen mit dem Index $i \in W$

$\mathbf{A}_W = [\mathbf{a}_i]_{i \in W}$,

$\mathbf{b}_W = [b_i]_{i \in W}$

2. Berechne \mathbf{x} und $\boldsymbol{\lambda}_W$

compute

$\boldsymbol{\lambda}_W = [(\mathbf{A}_W)^T \mathbf{C} \mathbf{A}_W]^+ [(\mathbf{A}_W)^T \mathbf{x}_A - \mathbf{b}_W]$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{C} \mathbf{A}_W \boldsymbol{\lambda}_W$

3. Output

$\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_W$

EXIT

Box 9.4 Minimalabstandsberechnung bei linearen Zwangsgleichungen

9.3.2.3 Exkurs: Graphische Interpretation der Minimalabstandsberechnung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich die obigen Gleichungen (für den Fall $\mathbf{C} = \mathbf{J}$)

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{x}_A - \mathbf{b}) \tag{9-25}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{C} \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda}$$

graphisch interpretieren lassen. Es werden folgende Vereinfachungen festgelegt:

- die Matrix \mathbf{C} und \mathbf{D} sind Einheitsmatrizen,
- die Vektoren \mathbf{a}_i sind Einheitsvektoren und (vorerst) linear unabhängig.

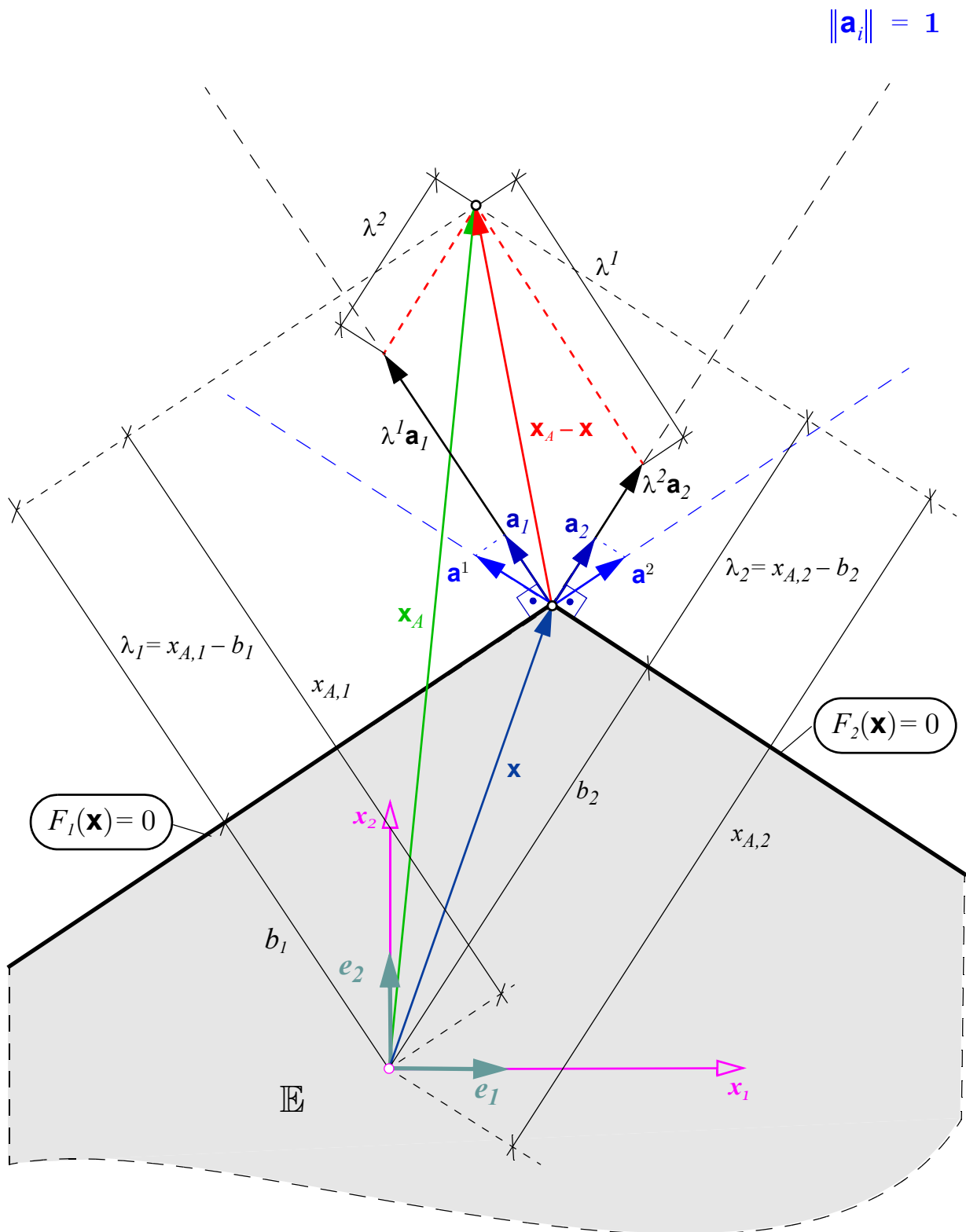


Bild 9.3 Graphische Interpretation der Minimalabstandsrechnung in \mathbb{R}^2 mit zwei Zwangsgleichungen.

Der Index \mathcal{W} wird, um die Notation kompakt zu halten, in der nachfolgenden Darstellung nicht angeschrieben.

In Bild 9.3 ist die Minimalabstandsbestimmung in \mathbb{R}^2 auf zwei Geraden dargestellt. Die Normalenvektoren \mathbf{a}_i der beiden Geraden sind Einheitsvektoren. Der Normalabstand jeder Geraden $F_i = 0$ vom Nullpunkt in Richtung dieser Vektoren ist mit b_i bezeichnet. Die Projektion des Ortsvektors \mathbf{x}_A zum Aufpunkt auf jeweils eine der Normalenvektorrichtungen ist mit $x_{A,i}$ beschriftet. Die jeweiligen Differenzen dieser beiden Längen werden - im Sinne der Vektoralgebra schiefwinkliger Koordinatensysteme - die kovarianten Koeffizienten λ_i genannt. Alle diese Koeffizienten des Sets \mathcal{W} sind im kovarianten $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ -Vektor zusammengefasst.

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_A - b_i = x_{A,i} - b_i \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} &= [\lambda_i]_{i \in \mathcal{W}}\end{aligned}\tag{9-26}$$

Der kontravariante $\boldsymbol{\lambda}$ -Vektor wurde bereits eingeführt. Hiermit erklärt sich auch die gewählte hochgestellte Indizierung der λ^i in den vorangegangenen Abschnitten: Einerseits geht es um eine leichter lesbare Darstellung der Summation mit gemischt, d.h. hoch- und tief gestellten Indizes, andererseits gibt diese Bezeichnung die kontravarianten Koeffizienten in der schiefwinkligen (kovarianten) Basis \mathbf{a}_i an. Mit (9-26) wird die erste Gleichung aus (9-25) umgeschrieben:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \bar{\boldsymbol{\lambda}}\tag{9-27}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ist also die Umrechnung von den kontravarianten in die kovarianten Koeffizienten bzw. - wie hier - der Term $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ die Umrechnung des kovarianten $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ -Vektors in den kontravarianten $\boldsymbol{\lambda}$ -Vektor. Mit den aus (9-27) und (9-26) berechneten kontravarianten Koeffizienten λ^i ist der Lösungspunkt \mathbf{x} aus der Differenz von \mathbf{x}_A und der Vektorsumme der Einzelkomponenten in der kovarianten Basis \mathbf{a}_i , mit $\mathbf{A} \boldsymbol{\lambda}$ bezeichnet, bestimmbar. In Bild 9.3 sind diese Zusammenhänge dargestellt.

9.3.3 Berechnungsablauf der Active-Set-Methode

Um die Lösung der Minimalabstandsaufgabe zu finden, werden die in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten Grundaufgaben systematisch hintereinander ausgeführt. Nach Ausführung jedes dieser Teilschritte wird das working Set \mathcal{W} abgeändert, und zwar so lange, bis alle Bedingungen des Gleichungssystems (9-15) erfüllt sind. Damit ist das letztgültige Set \mathcal{W} das gesuchte aktive Set \mathcal{A} . Die Abänderung des Sets \mathcal{W} erfolgt dabei so, dass in jedem Rechenteilschritt der Minimalabstand stets verringert wird. Dadurch steuert diese Prozedur - nach einer endlichen Anzahl von k Teilschritten - unweigerlich dem Lösungspunkt \mathbf{x}^* entgegen.

$[\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathcal{A}] = \text{QP_FUNC}(\mathbf{x}_0, \mathbf{D}, \mathbf{d}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

IN: $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}, \mathbf{D}, \mathbf{d}, \mathbf{A}, \mathbf{b}$

OUT: $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathcal{A}$

0. Berechne Aufpunkt \mathbf{x}_A

compute

$$\mathbf{x}_A = -(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{d} = -\mathbf{C}\mathbf{d}$$

compute \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}_A) > 0\}$$

IF $\mathcal{F} \neq \{ \}$

GOTO 1

ELSE

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \mathcal{A} = \{ \},$$

EXIT

ENDIF

1. Berechne Durchstoßpunkt

$k = 0$

compute Durchstoßpunkt $\mathbf{x}_p^{(k)}$ und zugehöriges $\mathcal{W}^{(k)}$:

$$[\mathbf{x}_p^{(k)}, \mathcal{W}^{(k)}] = \text{DURCHSTOSSPKT_FUNC}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_A, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{F})$$

2. Minimalabstandsberechnung

compute Minimalabstandspunkt $\mathbf{x}^{(k)}$ und zugehörige $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ auf $\mathcal{W}^{(k)}$:

$$[\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}] = \text{MINIMALABSTAND_FUNC}(\mathbf{x}_A, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathcal{W}^{(k)})$$

3. Kontrolle ob $\mathbf{x}^{(k)} \in \partial\mathbb{E}$

compute $\mathcal{F}^{(k)}$:

$$\mathcal{F}^{(k)} = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid F_i(\mathbf{x}^{(k)}) > 0\}$$

IF $\mathcal{F}^{(k)} \neq \{ \}$

GOTO 4

ELSE

GOTO 5

ENDIF

4. Durchstoßpunktberechnung

Berechne Schnittpunkt $\mathbf{x}_p^{(k+1)}$ und zugehöriges $\mathcal{W}^{(k+1)}$:

$[\mathbf{x}_p^{(k+1)}, \mathcal{W}^{(k+1)}] = \text{DURCHSTOSSPKT_FUNC}(\mathbf{x}_p^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathcal{F}^{(k)})$

$k \leftarrow k+1$, **GOTO 2**

5. Kontrolle ob $\lambda^{i(k)} \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{W}^{(k)}$

IF $\lambda^{i(k)} < 0$ for some $i \in \mathcal{W}^{(k)}$

$\mathcal{W}^{(k+1)} = \{i \in \mathcal{W}^{(k)} \mid \lambda^{i(k)} \geq 0\}$

$k \leftarrow k+1$, **GOTO 2**

ELSE

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)}$, $\mathcal{A} = \mathcal{W}^{(k)}$,

EXIT

ENDIF

Box 9.5 QP-Aufgabe: Lösung mit Active-Set Methode

9.3.3.1 Eingangsgrößen und gesuchte Lösung

Benötigte Eingangsgrößen sind neben der Beschreibung des konvexen Gebietes durch \mathbf{A} und \mathbf{b} , die Matrix \mathbf{D} und der Vektor \mathbf{d} (zur Beschreibung der quadratischen Zielfunktion) und der Startpunktvektor \mathbf{x}_0 . Der Ortsvektor des Aufpunktes \mathbf{x}_A ist aus \mathbf{d} und \mathbf{D} (9-16) rückrechenbar. Der Startpunkt \mathbf{x}_0 liegt innerhalb bzw. auf der Oberfläche von \mathbb{E} , während \mathbf{x}_A außerhalb von \mathbb{E} liegen muss. Sofern kein Startpunkt explizit angegeben ist, kann - aufgrund der anfänglichen Festlegung $F_i(\mathbf{x} = \mathbf{0}) < 0$ in (3-2) - der Nullpunkt immer als möglicher Startpunkt gewählt werden. Berechnet werden die Fußpunktkoordinaten \mathbf{x}^* , das aktive Set \mathcal{A} und die zugehörigen Lagrange'schen Multiplikatoren.

9.3.3.2 Berechnungsablauf - systematischer Wechsel des Sets \mathcal{W}

Liegt \mathbf{x}_A außerhalb von \mathbb{E} , ist im ersten Rechenschritt ($k = 0$) ein Startpunkt $\mathbf{x}_p^{(k=0)}$ auf der Oberfläche $\partial\mathbb{E}$ mit der Durchstoßpunktprozedur (Grundaufgabe I - Box 9.3) zu bestimmen. Damit ist auch das erste Set $\mathcal{W}^{(0)}$ festgelegt. Auf den Ebenen dieses Sets wird die Minimalabstandsberechnung (Grundaufgabe II) ausgeführt. Verlässt dabei die Lösung \mathbf{x} die Oberfläche $\partial\mathbb{E}$, wird auf die Grundaufgabe I umgeschaltet und der neue Schnittpunkt $\mathbf{x}_p^{(k+1)}$ berechnet. Das Set \mathcal{W} wird um die Indizes der durchstoßenen Flächen erweitert und die Grundaufgabe II wird für dieses erweiterte Set \mathcal{W} abermals durchgeführt.

Das wiederholt sich so lange, bis der Minimalabstandspunkt \mathbf{x} keine Bedingung F_i mehr verletzt, also auf $\partial\mathbb{E}$ zu liegen kommt. Es gilt somit $F_i(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Ist dieser Punkt erreicht, wird kontrolliert, ob die zugehörigen berechneten Lagrange'schen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{W}}$ alle größer oder gleich null sind. Alle Zwangsbedingungen i aus \mathcal{W} ,

bei denen $\lambda_{\mathcal{W}}$ negativ ist, werden aus dem Set \mathcal{W} entfernt. Mit diesem neuen, reduzierten Set \mathcal{W} wird wiederum Grundaufgabe II gelöst, bis wieder ein Punkt $F_i(\mathbf{x}) \leq 0$ erreicht wird. Sind schlussendlich auch alle $\lambda_{\mathcal{W}}$ größer oder gleich null, hat man die Lösung \mathbf{x}^* erreicht und es gilt $\mathcal{W} = \mathcal{A}$.

9.3.3.3 Exemplarische Darstellung des Berechnungsablaufes

Gegeben sind fünf Geraden F_i , der Aufpunkt \mathbf{x}_A und der Startpunkt \mathbf{x}_θ . Die Matrix \mathbf{C} ist die Einheitsmatrix \mathbf{J} . Die in Bild 9.4 dargestellte Berechnungschronologie ist nach Box 9.5 folgende:

- Input: $\mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_A, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D} = \mathbf{C} = \mathbf{J}$
- 1. Berechne Durchstoßpunkt: $k = 0, \mathcal{F} = \{2,3,4\}, \mathbf{x}_p^{(0)}, \mathcal{W}^{(0)} = \{2\}$
- 2. Minimalabstandsberechnung: $\mathbf{x}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = [\lambda^{2(0)}]$
- 3. Kontrolle ob $\mathbf{x}^{(0)} \in \partial\mathbb{K}$: $\mathcal{F}^{(0)} = \{3,4\}$
- 4. Durchstoßpunktberechnung: $\mathbf{x}_p^{(1)}, \mathcal{W}^{(1)} = \{2,3\}, k = 1$
- 2. Minimalabstandsberechnung: $\mathbf{x}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(1)} = [\lambda^{2(1)}, \lambda^{3(1)}]^T$
- 3. Kontrolle ob $\mathbf{x}^{(1)} \in \partial\mathbb{K}$: $\mathcal{F}^{(1)} = \{\}$
- 5. Kontrolle ob $\lambda^{i(1)} \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{W}^{(1)}$: $\lambda^{2(1)} < 0, \lambda^{3(1)} > 0, \mathcal{W}^{(2)} = \{3\}, k = 2$
- 2. Minimalabstandsberechnung: $\mathbf{x}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}^{(2)} = [\lambda^{3(2)}]$
- 3. Kontrolle ob $\mathbf{x}^{(2)} \in \partial\mathbb{K}$: $\mathcal{F}^{(2)} = \{\}$
- 5. Kontrolle ob $\lambda^{i(2)} \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{W}^{(2)}$: $\lambda^{3(2)} > 0$
- Output: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{(2)}, \mathcal{A} = \mathcal{W}^{(2)} = \{3\}$

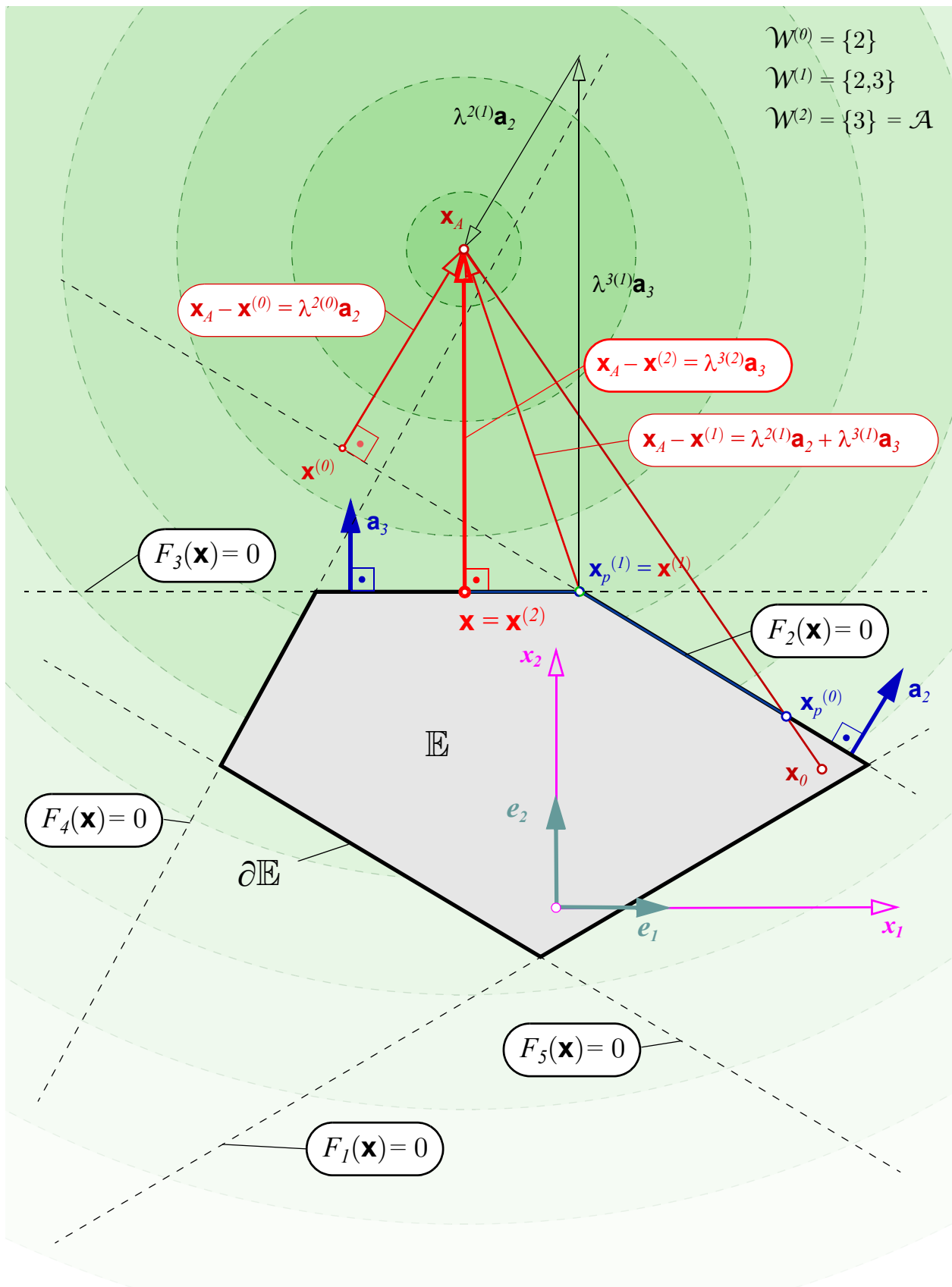


Bild 9.4 Berechnungsablaufes der Active-Set-Methode

9.4 SQP: Sequentielle quadratische Programmierung

Bei der sequentiellen quadratischen Programmierung wird die Lösung einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe durch eine Abfolge von QP-Berechnungsschritten bestimmt. Die QP-Aufgabe ergibt sich aus einer quadratischen Zielfunktion im Inkrement $\Delta \mathbf{x}$ an der aktuellen Näherung bei k mit $\mathbf{x}^{(k)}$ und $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ und den bis zum linearen Glied entwickelten Zwangsungleichungen F_i . Diese Teilaufgabenstellung wird mit dem Rechenverfahren aus dem vorangegangenen Kapitel gelöst. Das berechnete Inkrement $\Delta \mathbf{x}$ wird zum Ausgangspunkt $\mathbf{x}^{(k)}$ addiert ($\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}$), der Zählindex k upgedatet und vom neu berechneten Punkt $\mathbf{x}^{(k)}$ wird die QP-Rechnung wiederholt. Diese Sequenz an QP-Aufgaben wird so lange ausgeführt, bis ein Lösungspunkt erreicht ist und die geforderte Rechen- bzw. Ergebnistoleranz $RTOL$ unterschritten wird. Die berechnete $\mathbf{x}^{(k)}$ Sequenz konvergiert lokal gegen die Minimumsbedingungen (9-14). Der Konvergenzbeweis findet sich z.B. bei Fletcher (1987) auf S. 308. Um das Verfahren auch global konvergent zu gestalten, wird eine L_f -Penalty- bzw. Merit-Funktion eingeführt. Jeder neu berechnete Lösungspunkt $\mathbf{x}^{(k+1)}$ muss den Funktionswert der L_f -Funktion im Vergleich zum Funktionswert bei $\mathbf{x}^{(k)}$ verringern. Damit ist ein unweigerliches Voranschreiten der Punktfolge in Richtung des Lösungspunktes garantiert. Zur Bestimmung einer geeigneten Startnäherung wird der Durchstoßpunkt \mathbf{x}_p der Geraden, die den Nullpunkt mit dem Aufpunkt \mathbf{x}_A verbindet, durch die konvexe Fläche $\partial \mathbb{E}$ berechnet. Der Berechnungsablauf des SQP-Verfahrens ist als Abschluss in Box 9.6 dargestellt.

9.4.1 QP-Aufgabenstellung

Für die Subaufgabe muss die QP-Aufgabe

$$\min \left\{ \tilde{\mathcal{d}}(\Delta \mathbf{x}) \right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \quad (9-28)$$

in $\Delta \mathbf{x}$ gelöst werden.

9.4.1.1 Quadratische Zielfunktion

Die in $\Delta \mathbf{x}$ quadratische Zielfunktion

$$\tilde{\mathcal{d}}(\Delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{d}}^T \Delta \mathbf{x} \quad (9-29)$$

baut sich aus

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}} = \mathbf{D} + \sum_{i \in \mathcal{W}^{(k)}} \lambda^{(k),i} \left. \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}} \quad \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{D} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} \quad (9-30)$$

auf. Beide Größen werden an der aktuellen Lösungsnaheung $\mathbf{x}^{(k)}$ und $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ ausgewertet. Die Matrix \mathbf{D} ist positiv definit und die zweite Ableitung aller F_i nach \mathbf{x} ist aufgrund der Konvexität positiv semidefinit. Die Lagrange'schen Multiplikatoren sind per definitionem ebenso positiv. Aus diesen Gründen ist die Matrix $\tilde{\mathbf{D}}$ positiv definit.

9.4.1.2 Lineare Zwangsgleichungen

Die in $\Delta\mathbf{x}$ linearen Zwangsgleichungen in Gleichung (9-28) ergeben sich durch Reihenentwicklung der i.A. nichtlinearen Zwangsgleichungen nach \mathbf{x} bei $\mathbf{x}^{(k)}$ mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}^{(k)} = \left[\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^{(k)}} \quad \mathbf{b} = -\mathbf{f}^{(k)} = - \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}^{(k)}) \\ F_2(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \vdots \\ F_N(\mathbf{x}^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (9-31)$$

9.4.1.3 Startwertwahl für die QP-Prozedur

In der QP-Berechnungsprozedur ist der benötigte Startwert \mathbf{x}_0 immer bekannt. Sollte das nicht der Fall sein, kann immer auch $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ als Startwert gewählt werden, da die dritte Forderung in (3-2) aus physikalischer Sicht immer erfüllt sein muss. Bei der oben formulierten QP-Aufgabe in $\Delta\mathbf{x}$ ist auch ein Startwert $\Delta\mathbf{x}_0$ gefragt, der innerhalb des eben facetierten Gebietes, das durch die linearen Gleichungen in (9-28) begrenzt wird, liegt. Der Wert $\mathbf{x}^{(k)}$ ist gegeben und alle Funktionen F_i sind konvex, es gilt:

$$F_i(\mathbf{x}^{(k)}) - F_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \right)^T (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (9-32)$$

Wird $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{0}$ gewählt, ist mit Bedingung $F_i(\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{0}) < 0$ und der Konvexitätsbedingung nachweisbar, dass für alle Funktionen

$$F_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \right)^T \mathbf{x}^{(k)} < 0 \quad (9-33)$$

gilt. Damit ist $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{0}$ bzw. $\Delta\mathbf{x}_0 = -\mathbf{x}^{(k)}$ ein uneingeschränkt gültiger Startwert für die QP-Berechnungsprozedur.

9.4.2 Penalty- bzw. Merit-Funktion

Ein wesentlicher Nachteil des oben beschriebenen Verfahrens ist, dass Konvergenz i.A. nicht garantiert ist. Um die Konvergenz unabhängig vom gewählten Startwert - „globale Konvergenz“ - zu garantieren, wird eine Penalty- bzw. Merit-Funktion $P(\mathbf{x})$ eingeführt.

9.4.2.1 L_I -Funktion

Der Penalty-Funktionswert ist ein Gradmesser, wie stark die Zielfunktion und die zugehörigen Zwangsgleichungen bzw. -ungleichungen eines Minimierungsproblems nicht erfüllt werden. Der Wert von $P(\mathbf{x})$ nimmt zum gesuchten Minimumspunkt hin immer ab. Diese Funktionen bauen sich somit aus der Zielfunktion und den Zwangsfunktionen zusammen. Eine spezielle Klasse sind die *exakten* Penalty-Funktionen. Diese haben die Eigenschaft, dass das Minimum dieser Funktion auch das Minimum der gesuchten Optimierungsaufgabe ist. Zu dieser Funktionsklasse gehört die L_I -Penalty-Funktion:

$$L_I(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) + \mu \sum_{i=1}^N \max[0, F_i(\mathbf{x})] \quad (9-34)$$

Damit das Minimum der Optimierungsaufgabe mit dem Minimum der L_I -Funktion übereinstimmt, muss der frei wählbare Penaltyparameter μ im Lösungspunkt \mathbf{x}^* Bedingung

$$\mu \geq \max\{\lambda_i^*\} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (9-35)$$

einhalten.

9.4.2.2 Line-Search-Verfahren

Durch Erweiterung des Rechenverfahrens um die L_I -Funktion in Kombination mit einem Line-Search-Algorithmus wird globale Konvergenz garantiert. Die Funktion L_I hat den Charakter einer Kontrollfunktion. Nach Lösung eines QP-Inkrement werden die Funktionswerte bei $L_I(\mathbf{x}^{(k)})$ und $L_I(\mathbf{x}^{(k+1)})$ ausgewertet. Um den Abstieg - die fortschreitende Annäherung an das gesuchte Minimum - zu gewährleisten, muss der Wert $L_I(\mathbf{x}^{(k+1)})$ kleiner als $L_I(\mathbf{x}^{(k)})$ sein. Trifft das nicht zu, wird ein exaktes Line-Search-Verfahren entlang der Verbindungslinie von $\mathbf{x}^{(k)}$ nach $\mathbf{x}^{(k+1)}$ aktiviert, d.h., es wird der Pfadparameter α der Geraden zwischen den beiden Lösungspunkten gesucht, der die L_I -Funktion in α minimiert:

$$\min\{L_I(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha\Delta\mathbf{x})\} = L_I(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{\min}\Delta\mathbf{x}) \quad (9-36)$$

Als Startwert für das nächste QP-Subproblem wird $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} + \alpha_{\min}\Delta\mathbf{x}$ gewählt. Zur Lösung des Line-Search-Verfahrens wird die Methode nach Brent (1973) verwendet. Dabei werden keine Funktionsableitungen von L_I (9-34) benötigt. Durch Erweiterung des Rechenverfahrens um eine Penalty-Funktion in Kombination mit einem Line-Search-Verfahren wird globale Konvergenz garantiert. Der Beweis der globalen Konvergenz kann bei Han (1975) nachgelesen werden.

Eine essentielle Frage ist noch offen: Ist die aus dem QP-Schritt berechnete Richtung $\Delta\mathbf{x}$ eine Abstiegsrichtung der L_I -Funktion? Wäre dies nicht der Fall, würde sich die Rechnung

am Punkt $\mathbf{x}^{(k)}$ „festfressen“, da das Line-Search-Verfahren immer $\alpha_{min} = 0$ liefert. Bazararaa/Sherali/Shetty (2006) zeigen in ihrem Buch (S.582), dass für jede positiv definite Matrix $\tilde{\mathbf{D}}$ bei Einhaltung der Bedingung (9-35) $\Delta\mathbf{x}$ eine Abstiegsrichtung der L_I -Funktion ist.

9.4.2.3 Maratos-Effekt

Ein Nachteil ist, dass die lokale quadratische Konvergenz wie z.B. bei dem oben vorgestellten SQP-Verfahren ohne Merit-Funktion, durch Einführung der L_I -Funktion inklusive Line-Search-Verfahren zerstört werden kann. Das kann in Lösungsnähe zu einer massiven Entschleunigung des Konvergenzverhaltens des Rechenverfahrens führen, da das Line-Search-Verfahren einen optimal konvergenten Rechenschritt verhindert. Dieser unerwünschte Effekt wird nach seinem Entdecker als Maratos-Effekt bezeichnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten diesen zu beheben:

- eine andere Penalty-Funktion, als die L_I -Funktion wird verwendet,
- die Fortschrittsrichtung $\Delta\mathbf{x}$ kann modifiziert werden (SOC = Second Order Correction Step) oder
- man schaltet die Kontrolle durch die Penalty-Funktion temporär aus.

Eine weitere Möglichkeit, die allerdings nur bei konvexen Optimierungsaufgaben funktioniert, gibt Coope (1985) an. Der Maratos Effekt wird dabei durch eine günstige Wahl des Penalty-Parameters μ weitestgehend unterdrückt. In Anlehnung an diesen Aufsatz wurde ein variabler Vorfaktor zwischen 2 und 5 gewählt.

$$\mu = (2 \div 5) \max\{\lambda^{(k+1)}\} \quad (9-37)$$

Allzu große Vorfaktoren erhöhen die Möglichkeit, dass der Maratos-Effekt auftritt; auszuschließen ist er aber nicht.

9.4.3 Berechnungsablauf

[\mathbf{x} , $\boldsymbol{\lambda}$, \mathcal{A}] = SQP_FUNC(\mathbf{x}_A , \mathbf{D} , F_i)

IN: \mathbf{x}_A , \mathbf{D} , F_i

OUT: \mathbf{x} , $\boldsymbol{\lambda}$, \mathcal{A}

0. Kontrolle ob Aufpunkt \mathbf{x}_A in \mathbb{E} liegt

compute \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}_A) > 0\}$$

IF $\mathcal{F} \neq \{ \}$

GOTO 1

ELSE

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \mathcal{A} = \{ \},$$

EXIT

ENDIF

1. Initialisiere Startwerte

$$k = 0$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \text{penpkt_func}(\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_A, \mathcal{F})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = [\]$$

$$\mathcal{W}^{(k)} = \{ \}$$

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

2. Berechne Eingangsgrößen für QP-Aufgabe

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \sum_{i \in \mathcal{W}^{(k)}} \lambda^{(k),i} \left. \frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}},$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_A),$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}^{(k)},$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{f}^{(k)}$$

Box 9.6 SQP-Berechnungsablauf inklusive L_J -Penalty-Funktion mit Line-Search-Verfahren

3. Löse QP-Aufgabe

Startwert: $\Delta \mathbf{x}_0 = -\mathbf{x}^{(k)}$

compute

$[\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}, \mathcal{W}^{(k+1)}] = \text{QP_func}(\Delta \mathbf{x}_0, \mathbf{D}, \mathbf{d}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

compute

$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}$

4. Konvergenzkontrolle/Abbruchkriterium

IF $F_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) < RTOL$ for all i **AND** $\left| \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_A) + \mathbf{G}^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} \right| < RTOL$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}, \mathcal{A} = \mathcal{W}^{(k+1)},$

EXIT

ELSE

GOTO 5

ENDIF

5. Linesearch - Verfahren

compute Penalty-Parameter μ

$\mu = 5 \max(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})$

compute L_I -Penaltyfunktion bei $\mathbf{x}^{(k)}$ und $\mathbf{x}^{(k+1)}$

$L_1^{(k)} = L_1(\mathbf{x}^{(k)})$

$L_1^{(k+1)} = L_1(\mathbf{x}^{(k+1)})$

IF $L_1^{(k+1)} > L_1^{(k)}$

Linesearch-Verfahren

$\alpha_{min} \leftarrow L_{I,min} = \min\{L_I(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \Delta \mathbf{x})\},$

$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{min} \Delta \mathbf{x}$

ENDIF

$k \leftarrow k+1, \text{GOTO 2}$

Box 9.6 SQP-Berechnungsablauf inklusive L_I -Penalty-Funktion mit Line-Search-Verfahren

9.5 Anwendungen auf Aufgabenstellungen der Plastizitätsgleichungen und offene Punkte

In die Materialroutine (Box 8.7) werden sowohl das SQP-Verfahren als auch das Augmented-Lagrange-Penalty Verfahren (Anhang J) eingebaut. Über einen zusätzlichen Parameter lässt sich eine Auswahl treffen, welche der beiden Methoden in der Berechnung des Spannungsinkrements zur Anwendung kommen soll.

Für eine Implementierung des kompletten Berechnungsapparates in eine kommerzielle FEM-Software treten weiter Frage- und Aufgabenstellungen in den Vordergrund, die in diesem Abschnitt nicht behandelt wurden. Da sich die vorgestellten Berechnungsabläufe bei einer nichtlinearen Strukturberechnung vielfach wiederholen (in jedem Iterationsschritt des Newton-Raphson-Verfahrens und dabei wiederum in jedem Gausspunkt jedes Elements), ist bei einer kommerziellen Umsetzung der Aspekt der Zeitoptimierung der Berechnungsroutine - Robustheit und Konvergenz vorausgesetzt - das primäre Ziel. Eventuell sind auch weitere Lösungsverfahren vorhanden, die zeitsparendere Berechnungen ermöglichen.

Die beiden nachfolgend dargestellten Beispiele haben jeweils lineare Versagensbedingungen und lassen sich daher mit dem QP-Verfahren berechnen.

9.6 Beispiel: Tragverhalten eines schubbeanspruchten RME

Das betrachtete RME (Bild 9.5) wird nur auf Schub belastet. Gesucht werden der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und die Schubtragsspannung.

9.6.1 Materialbeschreibung

Das RME hat linear-elastisches isotropes Materialverhalten. Es werden zwei Schubversagensmechanismen angenommen. Die Versagensebenenorientierungen sollen um 90° um die x_3 -Achse zueinander verdreht sein. Das Abgleiten ist bei beiden Orientierungen ab der gleichen Grenzscherungsspannung τ_Y nur in Richtung der x_3 -Achse möglich. Der Winkel α zwischen dem materiellen $\{x_1, x_2\}$ -Bezugssystem und den globalen $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatenachsen nimmt Werte zwischen -45° und 45° ein. Mit diesem Wertebereich sind alle möglichen Positionen der Versagensebenenorientierungen relativ zu den $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatenachsen angebar. Die Schubversagensbedingungen sind:

$$F_{1(2)} = \pm \frac{1}{\tau_Y} (c S_{13} + s S_{23}) - 1 \quad F_{3(4)} = \pm \frac{1}{\tau_Y} (-s S_{13} + c S_{23}) - 1 \quad (9-38)$$

Mit den vier Versagensbedingungen ergeben sich der erlaubte Bereich und die elastische Grenzfläche. Der erlaubte Bereich ist im $\{S_{13}, S_{23}\}$ -Spannungsraum ein Quadrat mit der Seitenlänge zwei, das um den Winkel α bezüglich des $\{S_{13}, S_{23}\}$ -Koordinatenachsen verdreht ist (Bild 9.6).

9.6.2 Tragspannungsberechnung

9.6.2.1 Deformationsgesteuerte Beanspruchung

Es wird eine Abscherung γ des Körpers schräg (um den Winkel β zur x_1 -Achse geneigt) zum globalen Koordinatensystem (und damit auch zur materiellen Schichtneigung α) vorgegeben. Da nur die Verzerrungen γ_{13} und γ_{23} auftreten, ist der vorgegebene Verzerrungsvektor:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \gamma \quad \gamma \geq 0 \quad (9-39)$$

Die Größe γ wird monoton gesteigert. Aufgrund des isotropen elastischen Verhaltens und der beiden orthogonal zueinanderstehenden Versagensebenenorientierungen muss nur der Bereich $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ untersucht werden.

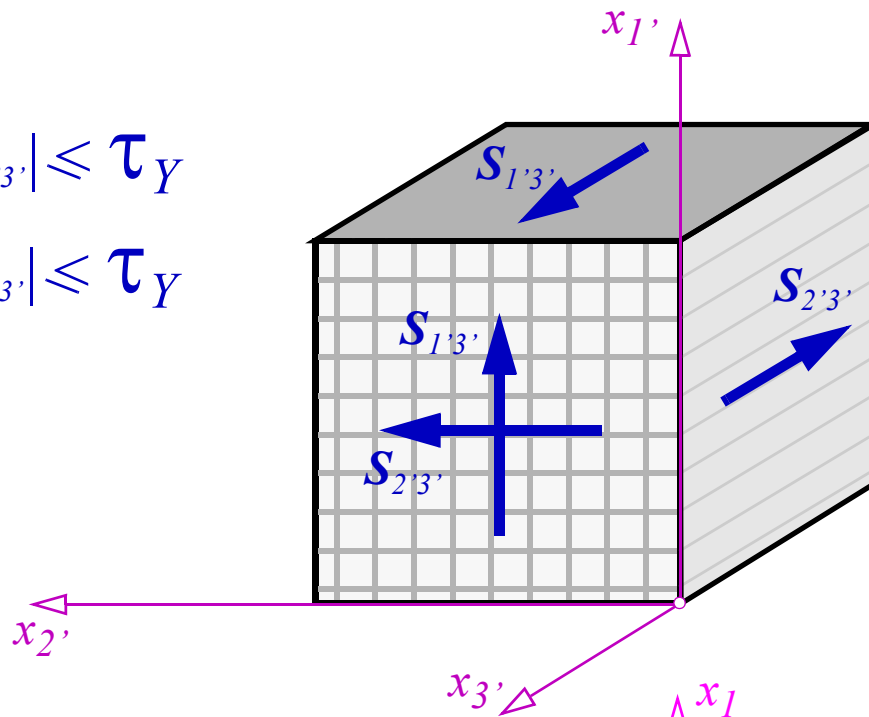
9.6.2.2 Elastische Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang

Mit der Referenzspannung τ_Y und der Bezugsverzerrung $\gamma_Y = \tau_Y/G$, ergibt sich der elastische

a)

$$|S_{1'3'}| \leq \tau_Y$$

$$|S_{2'3'}| \leq \tau_Y$$



b)

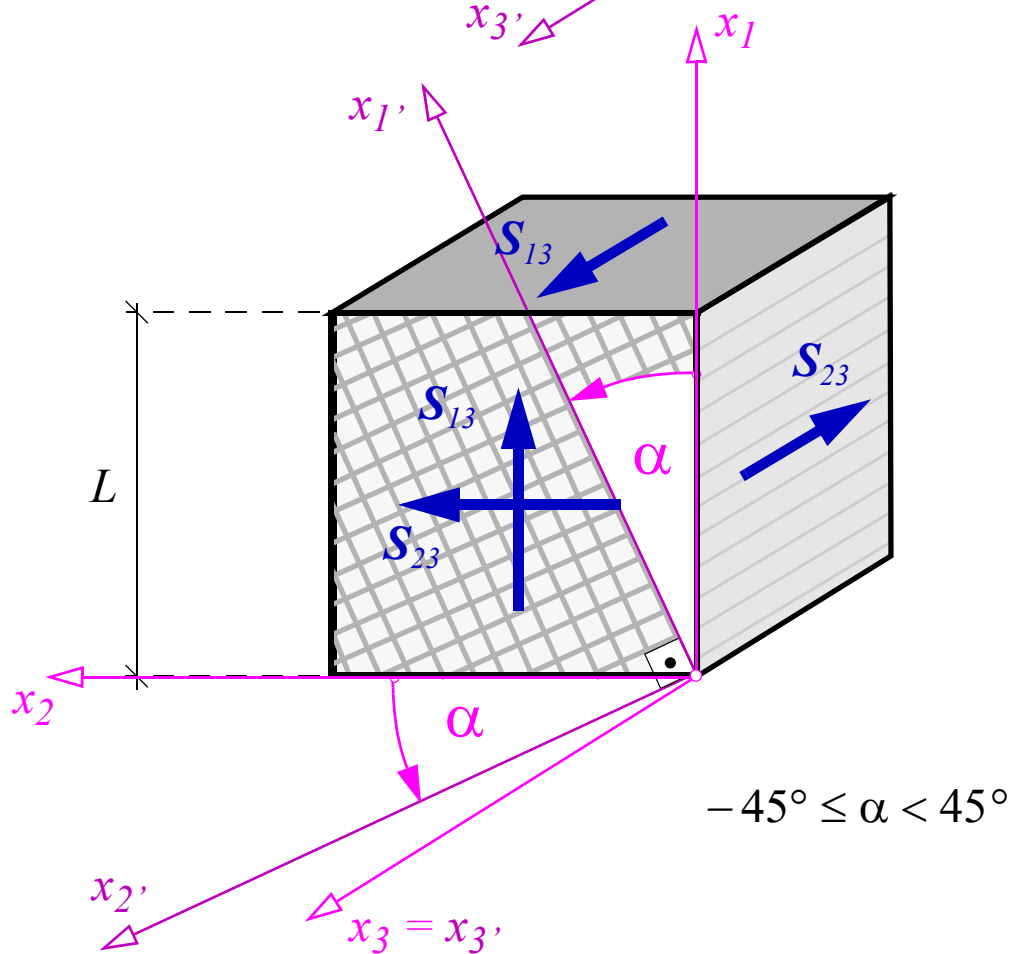


Bild 9.5 RME mit zwei Schubversagensmechanismen, die durch die Schubspannungen $S_{1'3'}$ oder $S_{2'3'}$ aktiviert werden

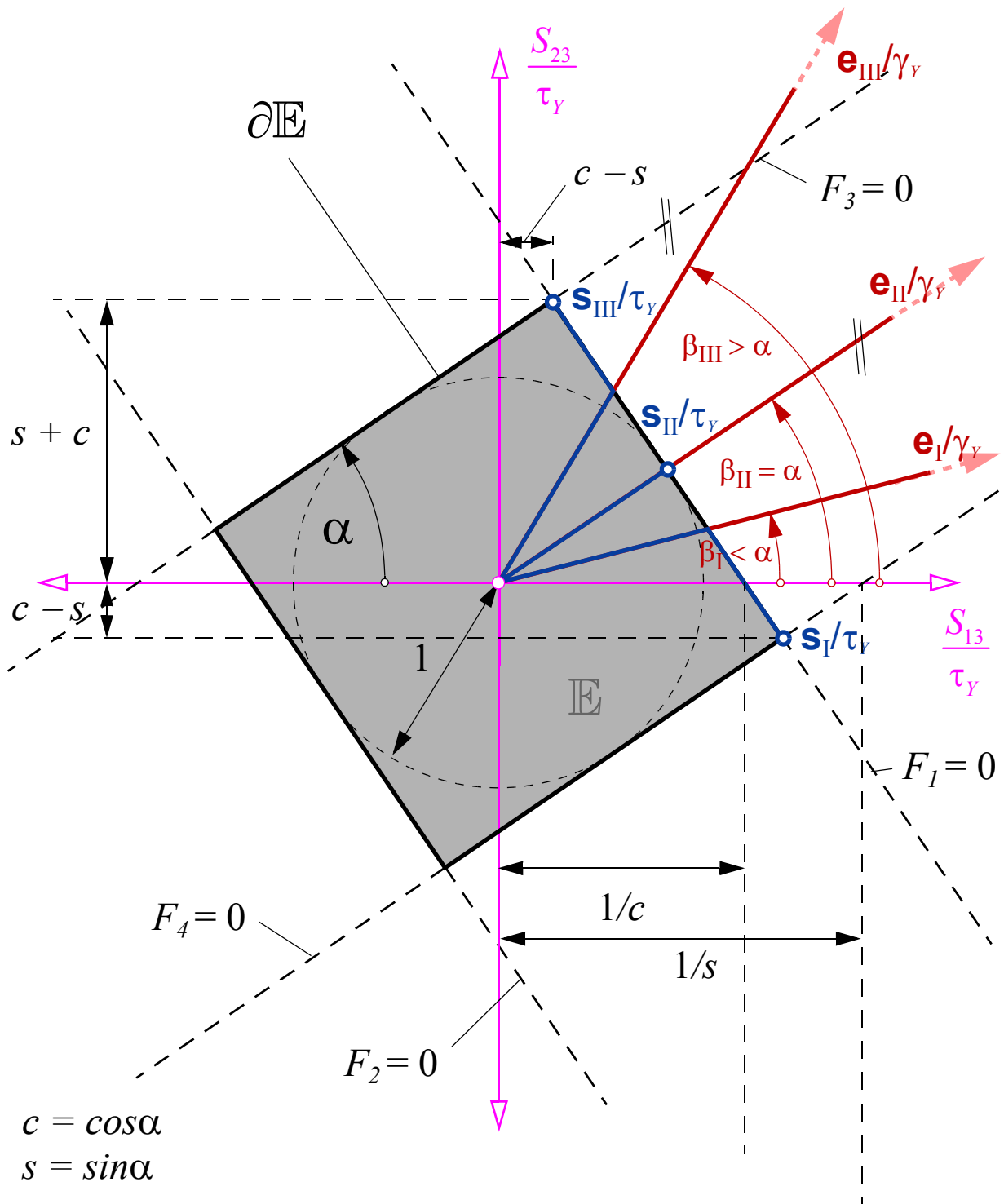


Bild 9.6 Erlaubter Bereich und elastische Grenzfläche des Materialmodells im $\{S_{13}, S_{23}\}$ -Spannungsraum. Die eingepprägten ($\gamma > 0$) Verzerrungsverläufe sind für drei Situationen (mit den römischen Indizes versehen) rot eingezeichnet; blau sind die zugehörigen Spannungspfade dargestellt. Abhängig vom Verhältnis β zu α sind (bei $0 < \beta < 90^\circ$) drei unterschiedliche Tragschubspannungen möglich

Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang in dimensionsloser Form zu:

$$\frac{\mathbf{s}}{\tau_Y} = \begin{bmatrix} S_{13}/\tau_Y \\ S_{23}/\tau_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \frac{\gamma}{\gamma_Y} = \frac{\mathbf{e}}{\gamma_Y} \quad (9-40)$$

In Bild 9.6 sind die Verzerrungen rot und die Spannungen blau dargestellt.

9.6.2.3 Tragschubspannungen bei Abscherung

Untersucht werden drei unterschiedliche Belastungsbereiche, die sich durch das Verhältnis von β zu α unterscheiden: $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ und $\beta > \alpha$. Die jeweils zugeordneten Spannungs- und Verzerrungsgrößen werden mit einem römischen Zählindex versehen. Damit ergeben sich mit Gleichung (9-39) drei monoton ansteigende Verzerrungsverläufe, die als rote Geraden \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} und \mathbf{e}_{III} (bezogen auf γ_Y) in Bild 9.6 gezeichnet sind.

Vom Belastungsbeginn (die plastischen Verzerrungsanteile sind null) bis zur elastischen Grenzfläche sind die Spannungs- und Verzerrungsverläufe deckungsgleich. Wird die Größe γ weiter gesteigert, trennen sich Spannungs- und Verzerrungsverlauf. Die blau gezeichneten Spannungspfade dürfen den erlaubten Bereich \mathbb{E} nicht verlassen. Bei allen drei Bereichen von β erreichen die Schubspannungspfade jeweils einen Punkt, ab dem sich die Spannungen, trotz weiterer Erhöhung der Verzerrungen, nicht mehr ändern. Diese drei Tragschubspannungen sind in Bild 9.6 mit \mathbf{s}_I , \mathbf{s}_{II} und \mathbf{s}_{III} (bezogen auf τ_Y) bezeichnet. Die zugehörigen Werte der Spannungs-komponenten S_{13} und S_{23} lassen sich durch geometrische Konstruktion ermitteln:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \beta < \alpha &: \frac{\mathbf{s}_I}{\tau_Y} = \frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+c \\ s-c \end{bmatrix} \\ \text{II} \quad \beta = \alpha &: \frac{\mathbf{s}_{II}}{\tau_Y} = \frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} & \quad 0 \leq \beta, \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \text{III} \quad \beta > \alpha &: \frac{\mathbf{s}_{III}}{\tau_Y} = \frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-s \\ s+c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9-41)$$

9.6.2.4 Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang im Sonderfall $\beta = 0^\circ$

Wird β in (9-39) null gesetzt, hat man nur eine Abscherung $\gamma = \gamma_{13} > 0$ und $\gamma_{23} = 0$. Gesucht ist der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang $S_{13}(\gamma_{13})$ und $S_{23}(\gamma_{13})$ bei monoton anwachsender Abscherung γ_{13} . Die nachfolgenden Gleichungen sind im Wertebereich $-45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ gültig. Damit sind aufgrund der zueinander orthogonalen Anordnung der beiden Versagensebenenorientierungen alle im Wertebereich $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ möglichen Schichtorientierungen ebenso erfasst. Der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang ist z.B. bei $\alpha = -20^\circ$ und $\alpha = +70^\circ$ gleich. Man erhält den Spannungsverlauf und damit den Verlauf der elasti-

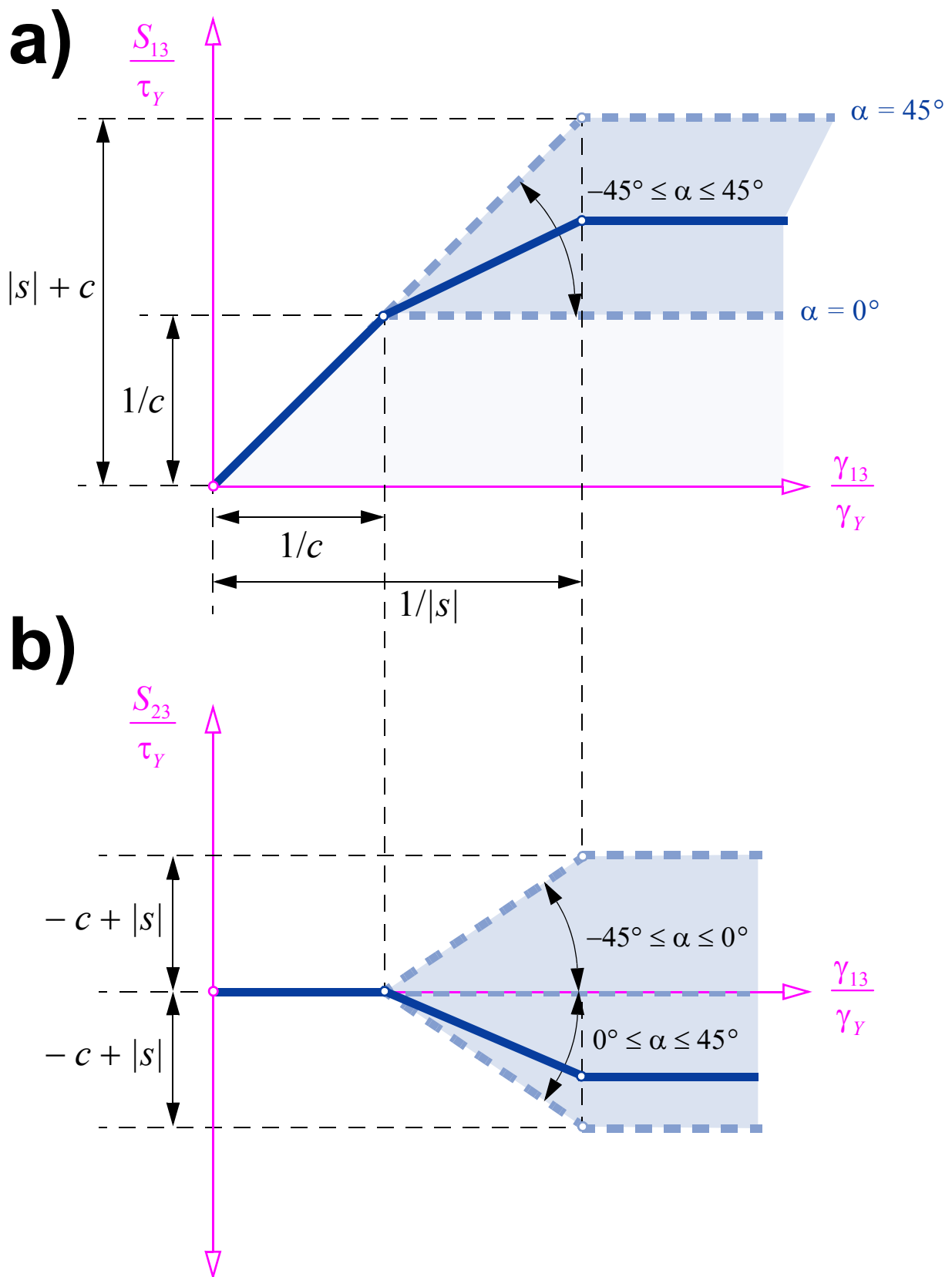


Bild 9.7 Schubspannungs-Schubverzerrungs-Zusammenhang

schen Verzerrungen, womit sich die plastischen Verzerrungen rückrechnen lassen, als Funktion der aufgebrauchten Schubverzerrung γ_{13} zu:

$$\frac{S_{13}}{\tau_Y} = \frac{\gamma_{13,el}}{\gamma_Y} = \begin{cases} \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} & 0 \leq \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{c} \\ \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} s^2 + c & \frac{1}{c} < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{|s|} \\ |s| + c & \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} > \frac{1}{|s|} \end{cases} \quad -45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \quad (9-42)$$

$$\frac{S_{23}}{\tau_Y} = \frac{\gamma_{23,el}}{\gamma_Y} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{c} \\ -\frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} sc + s & \frac{1}{c} < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{|s|} \\ \text{sign}(s)(-c + |s|) & \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} > \frac{1}{|s|} \end{cases}$$

Ab der Verzerrung $\gamma_{13} = \gamma_{13,Yl} = \gamma_Y/c$ beginnen sich plastische Verzerrungsanteile auszubilden. Erreicht die Spannungen bei $\gamma_{13} = \gamma_{13,Yl} = \gamma_Y/|s|$ den Schnittpunkt der Versagensbedingungen $F_1 = 0$ und $F_4 = 0$ (das entspricht \mathbf{s}_1 in Bild 9.6 bei $\beta = 0$), ändern sich die Spannungen S_{13} und S_{23} nicht mehr. Damit bleiben auch die elastischen Verzerrungsanteile unverändert. Die plastischen Verzerrungen $\gamma_{23,pl}$ wachsen ab dem Verzerrungszustand $\gamma_{13} > \gamma_{13,Yl}$ nicht mehr weiter an. Der Zuwachs der plastischen Verzerrungen $\gamma_{13,pl}$ ab dem Verzerrungszustand $\gamma_{13,Yl}$ entspricht dem aufgebrauchten Verzerrungszuwachs. Im Materialhauptachsensystem sind die Spannungs- und Verzerrungskomponenten:

$$\frac{S_{1'3'}}{\tau_Y} = \frac{\gamma_{1'3',el}}{\gamma_Y} = \begin{cases} \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} c & 0 \leq \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{c} < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \end{cases} \quad -45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \quad (9-43)$$

$$\frac{S_{2'3'}}{\tau_Y} = \frac{\gamma_{2'3',el}}{\gamma_Y} = \begin{cases} -\frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} s & 0 \leq \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{|s|} \\ -\text{sign}(s) & \frac{1}{|s|} < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \end{cases}$$

Die beiden Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge verhalten sich linear-elastisch, perfekt-plastisch, was wiederum das Erreichen einer Schubtragspannung des RME und den trilinearen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang im globalen Bezugssystem in Bild 9.7

erklärt.

9.6.2.5 Elastische Verzerrungsenergiegedichte im Sonderfall $\beta = 0^\circ$

Die elastische Verzerrungsenergiegedichte des RME als Funktion der vorgegebenen Verzerrungen lautet:

$$\frac{\Psi_{el}}{\tau_Y \gamma_Y} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \right)^2 & 0 \leq \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{c} \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \right)^2 s^2 + 1 \right] & \frac{1}{c} < \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} \leq \frac{1}{|s|} \\ 1 & \frac{\gamma_{13}}{\gamma_Y} > \frac{1}{|s|} \end{cases} \quad -45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \quad (9-44)$$

Diese kann bei diesem Verzerrungszustand nicht unbegrenzt anwachsen, sondern hat die Obergrenze $\Psi_{el,max} = \tau_Y \gamma_Y$ (Bild 9.8). Ausnahme ist der Fall mit $\alpha = 0^\circ$; die Obergrenze dabei ist $\Psi_{el,max} = 1/2 \tau_Y \gamma_Y$.

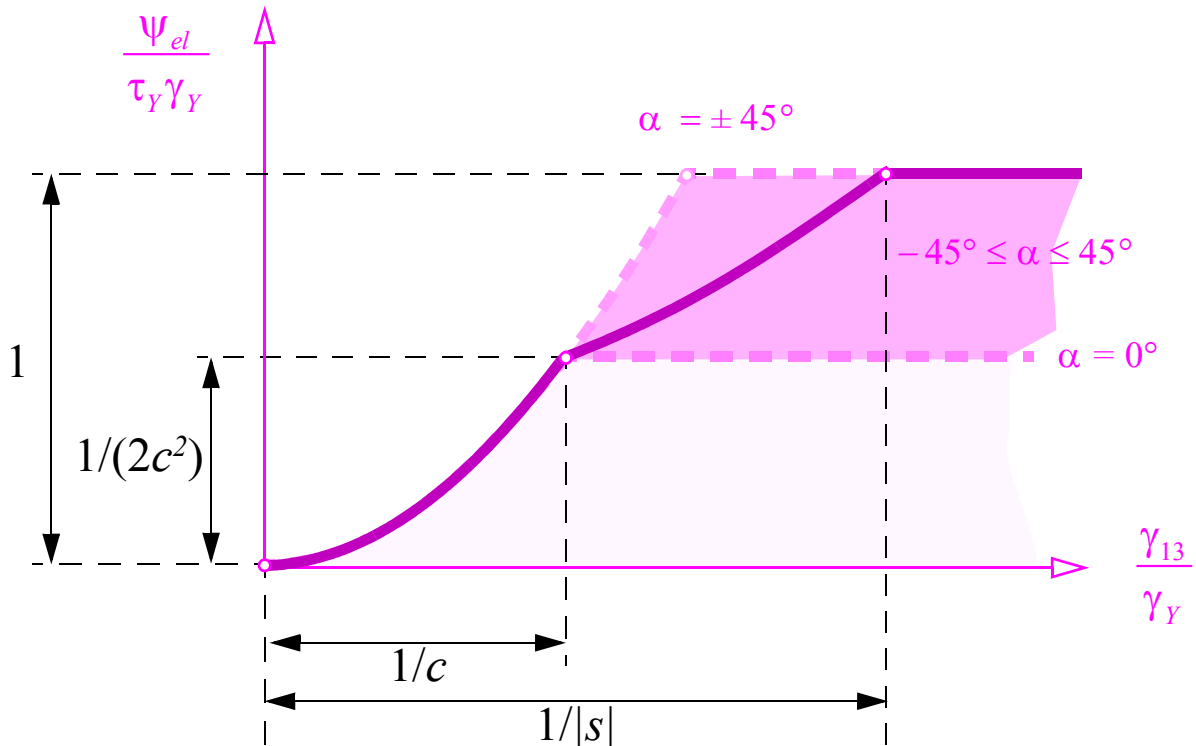


Bild 9.8 Elastische Verzerrungsenergiegedichte $\Psi_{el}(\gamma_{13})$ bei monoton anwachsender Schubverzerrung γ_{13} mit veränderlichem Winkel α

9.7 Beispiel: Tragspannungsberechnung von Kristallen

In diesem Abschnitt werden die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung und besonders das Tragverhalten von Kristallen betrachtet. Zuerst wird das elasto-plastische Materialmodell beschrieben. Dabei werden drei Kristalltypen unterschieden:

- das **Minimal-Schub-System** *MSS* (5 Schubmechanismen),
- das Gleitsystem eines kubisch flächenzentrierten Kristalls, abgekürzt mit *FCC* (12 Schubmechanismen, Kap. 4.3),
- das Schubsystem eines kubisch raumzentrierten Kristalls, kurz *BCC* (48 Schubmechanismen, Kap. 4.3).

Das elastische Verhalten wird bei allen drei Typen linear-elastisch und isotrop angenommen. Anschließend werden die plastischen Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} bei Vorgabe von Verzerrungen $\mathbf{e}(t)$ berechnet. Exemplarisch werden auch die Spannungs-Verzerrungs-Verläufe bei solchen verzerrungsgesteuerten Belastungsvorgängen bis zum Erreichen der plastischen Tragspannungen angegeben. In Kap. 9.7.4 wird gezeigt, dass man die Tragspannungen eines Kristalles bei Vorgabe eines Verzerrungszustandes \mathbf{e} direkt berechnen kann, wenn man die zur Lösung notwendige QP-Aufgabe im Grenzfall $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$ betrachtet.

9.7.1 Elastisches Materialverhalten der Kristalle

9.7.1.1 Isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

Das elastische Materialverhalten wird bei allen drei Kristalltypen gleich festgelegt und wird im materiellen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Bezugssystem durch die isotrope Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} aus Kap. D.4 beschrieben.

9.7.1.2 Split in deviatorischen und volumetrischen Anteil

Die linear-elastische isotrope Materialsteifigkeitsmatrix hat die Eigenschaft, dass durch Aufbringen eines volumetrischen Verzerrungszustandes $\mathbf{e}_{el,vol} = 3E_{vol} \mathbf{p}_{vol}$ mit

$$(\mathbf{p}_{vol})^T = \frac{1}{3}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (9-45)$$

nur ein hydrostatischer Spannungsanteil $\mathbf{s}_{vol} = 3p \mathbf{p}_{vol}$ geweckt wird, wobei die volumetrische Verzerrungsgröße E_{vol} multipliziert mit dem Kompressionsmodul K den hydrostatischen Druck p ergibt. Es gilt $\mathbf{s}_{vol} = 3K \mathbf{e}_{el,vol}$ und $p = 3K E_{vol}$. Der hydrostatische Spannungsanteil \mathbf{s}_{vol} und der volumetrische Verzerrungsanteil \mathbf{e}_{vol} lassen sich aus den Spannungen \mathbf{s} durch Multiplikation mit der Matrix

$$\mathbf{P}_{vol} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \mathbf{0}_{(3,3)} & \mathbf{0}_{(3,3)} \end{bmatrix} = 3\mathbf{p}_{vol} \otimes \mathbf{p}_{vol} \quad (9-46)$$

abspalten. Die deviatorischen Verzerrungs- und Schubanteile sind nur über den Schubmodul G miteinander verknüpft:

$$\mathbf{s}_{dev} = \begin{bmatrix} S_{11,dev} \\ S_{22,dev} \\ S_{33,dev} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 2\mathbf{J}_{(3,3)} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \mathbf{J}_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11,el,dev} \\ E_{22,el,dev} \\ E_{33,el,dev} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_{el,dev}. \quad (9-47)$$

Die Matrix \mathbf{P} ist Box B.9 entnommen. Mit $\mathbf{s}_{dev} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_{vol}$ ergibt sich die Matrix:

$$\mathbf{P}_{dev} = \mathbf{J} - \mathbf{P}_{vol} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (9-48)$$

Mit dieser lassen sich die deviatorischen Komponenten aus dem Spannungs- und Verzerrungsvektor abtrennen. Die isotrope elastische Materialsteifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{C}_{iso} = 3K\mathbf{P}_{vol} + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}_{dev} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3K+4G & 3K-2G & 3K-2G \\ 3K-2G & 3K+4G & 3K-2G \\ 3K-2G & 3K-2G & 3K+4G \end{bmatrix} & & \\ & \mathbf{0}_{(3,3)} & \\ & & G & 0 & 0 \\ & & & 0 & G & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (9-49)$$

Die elastische Verzerrungsenergie bei Isotropie lässt sich ebenso in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil aufspalten:

$$\Psi_{el} = \Psi_{el,vol} + \Psi_{el,dev} = \frac{3K}{2} \mathbf{e}_{el,vol}^T \mathbf{e}_{el,vol} + \frac{1}{2} G \mathbf{e}_{el,dev}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e}_{el,dev} \quad (9-50)$$

9.7.2 Plastisches Materialverhalten der Kristalle

9.7.2.1 Elementarer Schubversagensmechanismus

Die Schubsysteme von Kristallen wurde bereits in Kap. 4.3 angegeben. Die Projektionsmatrizen $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_s'$ sind in Box 4.2 (FCC) und Box 4.3 (BCC) angeführt. Kernbestandteil des Materialmodells zur Beschreibung plastischer Deformationen sind die N_s Schubmechanismen mit den $N = 2N_s$ Versagensbedingungen:

$$\begin{aligned} F_s' &= +\frac{1}{\tau_Y} (\mathbf{p}_s')^T \mathbf{s}' - 1 \\ F_{s+N_s}' &= -\frac{1}{\tau_Y} (\mathbf{p}_s')^T \mathbf{s}' - 1 \end{aligned} \quad s \in \{1, 2, \dots, N_s\} \quad (9-51)$$

Die Versagensbedingungen und die Spannungskomponenten werden zunächst bezüglich des Materialhauptachsensystems beschrieben. Bei allen Schubmechanismen und bei den drei zu untersuchenden Kristallsystemen hat die Versagensspannung τ_Y stets denselben Wert.

9.7.2.2 Darstellung der Versagensbedingungen bezüglich des globalen Koordinatensystems

Im Allgemeinen sind die materiellen $\{x_1', x_2', x_3'\}$ -Bezugskordinatenachsen zu den drei globalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatenachsen räumlich verdreht (Bild 9.9). Diese Koordinatenachsenverdrehung ist durch die drei Winkel, α , β und ϕ , angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\alpha, \beta) &= (c_1 c_2) \mathbf{e}_1' + (s_1 c_2) \mathbf{e}_2' + (-s_2) \mathbf{e}_3' \\ \mathbf{l}(\alpha, \beta, \phi) &= (c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3) \mathbf{e}_1' + (c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3) \mathbf{e}_2' + (c_2 s_3) \mathbf{e}_3' \\ \mathbf{m}(\alpha, \beta, \phi) &= (c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3) \mathbf{e}_1' + (s_1 s_2 c_3 - c_1 s_3) \mathbf{e}_2' + (c_2 c_3) \mathbf{e}_3' \end{aligned} \quad (9-52)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \alpha & s_1 &= \sin \alpha \\ \text{mit } c_2 &= \cos \beta & s_2 &= \sin \beta \\ c_3 &= \cos \phi & s_3 &= \sin \phi \end{aligned}$$

Die Transformation der Spannungen und Verzerrungen erfolgt mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} aus Box B.13. Die Versagensbedingungen in globalen Spannungskomponenten formuliert lauten:

$$\begin{aligned} F_s &= +\frac{1}{\tau_Y} (\mathbf{p}_s')^T \mathbf{T} \mathbf{s} - 1 = +\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_s'^T \mathbf{s} - 1 \\ F_{s+N_s} &= -\frac{1}{\tau_Y} (\mathbf{p}_s')^T \mathbf{T} \mathbf{s} - 1 = -\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_s'^T \mathbf{s} - 1 \end{aligned} \quad s \in \{1, 2, \dots, N_s\} \quad (9-53)$$

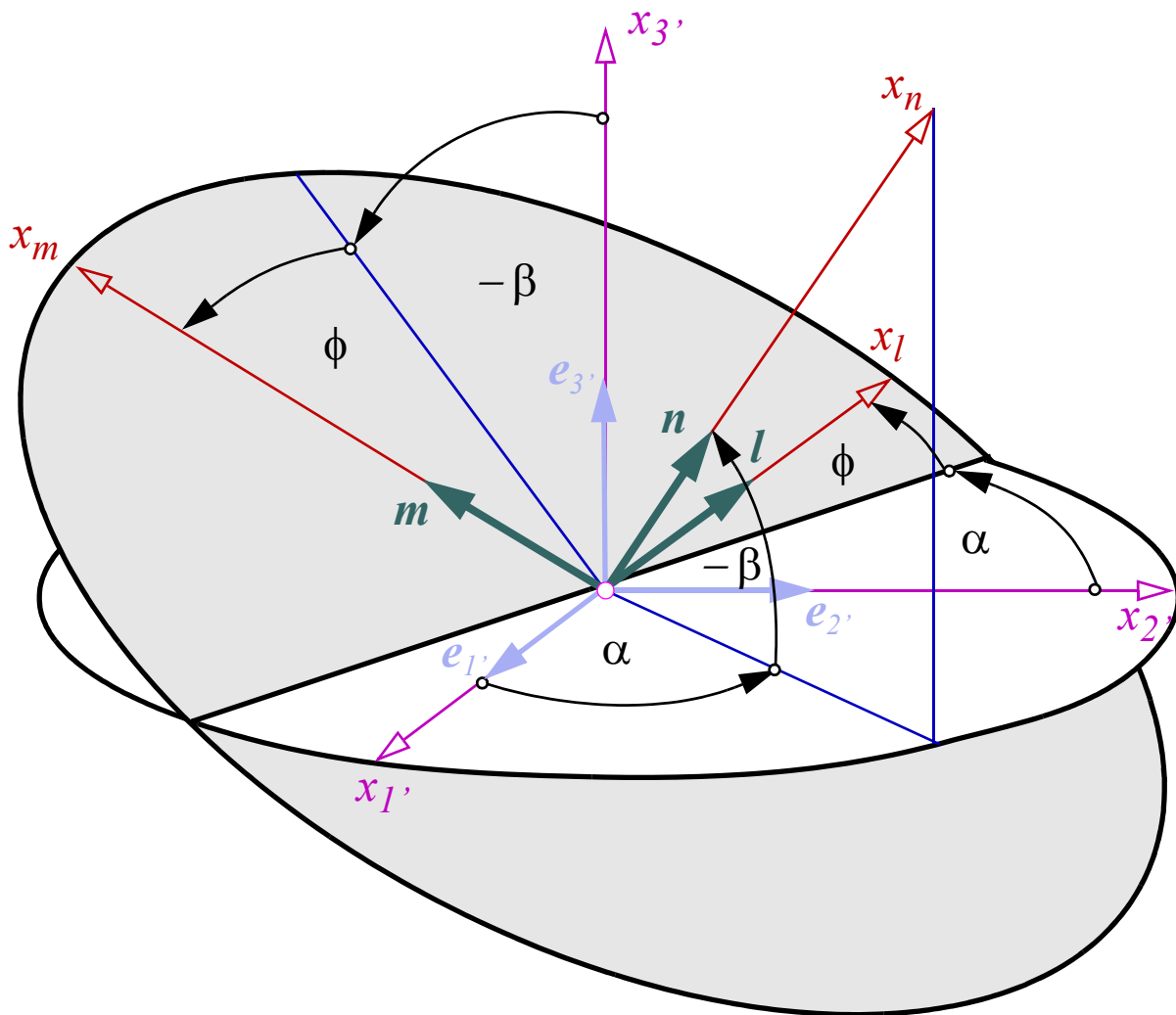


Bild 9.9 Beschreibung des Dreibeins $\{l, m, n\}$ relativ zum $\{e_1, e_2, e_3\}$ -Materialhauptachsensystem mittels der drei Winkel α , β und ϕ

9.7.2.3 Eigenschaften des Schubmechanismus

Die Projektionsmatrizen haben die allgemeine Eigenschaft $\mathbf{p}_s^T \mathbf{p}_{vol} = 0$ (Kap. 4.3.1.3), d.h., bei Kristallen, die nur Versagensbedingungen der Form (9-51) bzw. (9-53) beinhalten, wird bei einem hydrostatischen Spannungszustand \mathbf{s}_{vol} niemals ein plastischer Deformationsvorgang aktiviert. Aufgrund der isotropen elastischen Materialsteifigkeitsmatrix verursacht ein volumetrischer Verzerrungszustand nur einen hydrostatischen Spannungszustand.

Damit lässt sich per Gegenschluss feststellen: Bei dem hier beschriebenen Materialmodell werden nur durch Aufbringen von deviatorischen bzw. Schubverzerrungen Schubspannungen oder deviatorische Spannungsanteile geweckt, die zu den plastischen Tragspannungen des Kristalles führen. Aus diesem Grund werden nur deviatorische Verzerrungszustände \mathbf{e}_{dev} (was auch alle Schubverzerrungen beinhaltet) als Lastfälle betrachtet.

9.7.2.4 Mindestanzahl an benötigten Schubmechanismen

Gesucht ist die Mindestanzahl von Schubmechanismen N_s und damit die zugehörige An-

zahl von $N = 2N_s$ Versagensbedingungen der Form (9-51), sodass bei einem beliebigen deviatorischen Spannungszustand immer eine elastische Grenzlast erreicht wird. Die Erfüllung dieser Bedingung ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass das RME bei Vorgabe eines beliebigen deviatorischen Verzerrungszustandes immer einen plastischen Tragspannungszustand erreichen soll.

Um bei einem deviatorischen Spannungszustand immer eine elastische Grenzlast zu erreichen, sind mindestens $N_s = 5$ unabhängige Schubmechanismen und damit $N = 10$ lineare Versagensbedingungen von Nöten. Die Unabhängigkeit der Schubmechanismen ist durch die lineare Unabhängigkeit der benötigten fünf Projektionsmatrizen \mathbf{p}_s gewährleistet. Zu diesem Ergebnis kommt man über eine geometrische Überlegung: die Versagensbedingung aus (9-53) spannen jeweils eine Ebene im sechsdimensionalen Spannungsraum auf. Diese beiden Ebenen liegen parallel zueinander und haben denselben Normalabstand zum Koordinatenursprung. Parallel zu diesen beiden Ebenen bzw. orthogonal zu den Normalenvektoren \mathbf{p}_s verläuft der Vektor \mathbf{p}_{vol} (9-45). Das bedeutet, dass ein hydrostatischer Spannungszustand in die Versagensbedingungen eingesetzt, stets den Wert -1 hat und daher niemals null werden kann, also nie zu einem elastischen Grenzzustand führt. Von Interesse ist also vornehmlich der fünfdimensionale Subraum, der deviatorische Spannungsraum, in dem alle Vektoren liegen, die zu \mathbf{p}_{vol} normal stehen. Das sind alle Vektoren \mathbf{p}_s . Um die oben formulierte Forderung zu erfüllen, dass bei einem beliebigen deviatorischen Spannungs- bzw. Schubspannungszustand immer eine elastische Grenzlast erreicht wird, muss in diesem fünfdimensionalen Spannungssubraum durch die linearen Versagensbedingungen ein komplett geschlossener Bereich begrenzt werden. Dies erreicht man durch fünf Ebenenpaare, die fünf Schubmechanismen repräsentieren, deren fünf Ebenennormalenvektoren \mathbf{p}_s (bzw. $-\mathbf{p}_s$) voneinander linear unabhängig sind. q.e.d.

Um zu kontrollieren, ob ein gewähltes oder vorgegebenes Schubsystem mit N Versagensbedingungen (N kann dabei größer als 10 sein) diese Bedingung erfüllt, ist folgende algebraische Kontrolle durchzuführen:

$$\text{rank}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 5 \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_N]. \quad (9-54)$$

Ist der Rang dieses Matrixproduktes kleiner als fünf, ist oben aufgestellte Forderung nicht erfüllt und es gibt deviatorische Spannungszustände, die ohne Begrenzung elastisch anwachsen.

9.7.2.5 MSS-, FCC- und BCC-Kristallsysteme

In diesem Beispiel werden - wie bereits zuvor erwähnt - drei unterschiedliche Kristallsysteme betrachtet, die sich durch Anzahl und räumliche Anordnung der Schubmechanismen unterscheiden. Die Projektionsmatrizen \mathbf{p}_s' der Schubmechanismen eines kubisch flächen- bzw. raumzentrierten Kristalls wurden bereits in Kap. 4.3 angegeben. Beide Kristallsysteme erfüllen Bedingung (9-54). Als drittes Modell wird ein artifizielles Kristallsystem mit

der Mindestanzahl von fünf Schubmechanismen eingeführt, das mit dem Kürzel MSS gekennzeichnet ist. Aus der Vielzahl an möglichen Kombinationen von fünf voneinander unabhängigen Schubmechanismen werden für die nachfolgenden Rechnungen die Projektionsmatrizen \mathbf{p}_s' verwendet, die der Bedingung $\text{rank}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 5$ genügen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_1' &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_2' &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_3' &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_4' &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_5' &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]
 \end{aligned} \tag{9-55}$$

9.7.3 Plastische Tragspannungen & Spannungs-Verzerrungs-Verhalten

9.7.3.1 Allgemeines

Für die drei Kristalltypen werden die plastischen Tragspannungen bei verzerrungsgesteuerter Belastung bestimmt. Die Tragspannungen werden mit dem Index *ULS* gekennzeichnet. Dabei werden die zwei Verzerrungszustände aus (9-56) vorgegeben und solange gesteigert, bis die Spannungen sich - trotz weiterer Erhöhung der Verzerrungen - nicht mehr ändern.

$$\mathbf{e}_{LF1} = \gamma_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_{13} \overline{\mathbf{e}}_{LF1}, \quad \mathbf{e}_{LF2} = E_{11} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11} \overline{\mathbf{e}}_{LF2} \tag{9-56}$$

Die beiden steuernden Verzerrungskomponenten γ_{13} und E_{11} fungieren als Lastfaktor und werden monoton erhöht. Beide Verzerrungszustände beinhalten keinen volumetrischen Anteil. Das Aufbringen eines solchen Verzerrungsanteils würde bei dem vorgegebenen elastischen Materialgesetz zu stets linear anwachsenden hydrostatischen Spannungen führen. Obwohl die deviatorischen Spannungsanteile ein plastisches Limit erreichen, sind die Normalspannungen in Summe - aufgrund des Anwachsens des hydrostatischen Spannungsanteils - nicht limitiert.

Um die Anzahl der untersuchten Lastsituationen zu erweitern, werden die materiellen Be-

zugsachsen der drei Kristallsysteme verschieden zu den beiden im globalen Koordinatensystem angegebenen Verzerrungszuständen aus (9-56) orientiert. In diesem Beispiel wird einschränkend $\alpha = \beta = \phi$ festgelegt. Die gewählten Winkellorientierungen sind $\{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$. Die Komponenten $S_{ij,uls}$ der Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} in Box 9.7 und Box 9.8 sind bezüglich des globalen Koordinatensystems angegeben. Alle Ergebnisse werden dimensionslos dargestellt. Als Bezugsgrößen für Spannungen wird die Schubspannung τ_Y und für die Verzerrungen die Schubverzerrung $\gamma_Y = G \tau_Y$ verwendet. Zusätzlich ist in den beiden Tabellen das Set \mathcal{A} der im Tragspannungszustand aktiven Schubmechanismen angeführt. Welches geometrisches Schnittgebilde die aktiven Flächen im fünfdimensionalen Subraum bilden, ist mit den Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mathcal{A}} &= [\mathbf{p}_i]_{i \in \mathcal{A}} \\ \dim(\mathbf{G}_{\mathcal{A}}) &= (5, q) & \begin{array}{l} 5 \quad \dots \text{Subraumdimension} \\ q \quad \dots \text{Anzahl der aktiven Mechanismen} \end{array} & (9-57) \\ R_{\mathcal{A}} &= \text{rank}(\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T \mathbf{G}_{\mathcal{A}}) & 1 \leq R_{\mathcal{A}} \leq 5 \end{aligned}$$

beurteilbar (siehe Kap. 3.4). Es gibt folgende drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \text{Eckpunkt:} & \quad q \geq 5, \quad R_{\mathcal{A}} = 5 \\ \text{Punkt auf einer Kante:} & \quad q > 1, \quad 1 < R_{\mathcal{A}} < 5 \\ \text{Berührungspunkt:} & \quad q > 1, \quad R_{\mathcal{A}} = 1 \end{aligned} \quad (9-58)$$

Diese Zusatzinformationen sind in den Betrachtungen von Kap. 9.7.4 von Nutzen. Anzumerken ist, dass eine Ecke im fünfdimensionalen Subraum im sechsdimensionalen Spannungsraum eine Kante ist. Im konkreten Fall hat jede Ecke im deviatorischen Subraum eine Kante mit der Kantenrichtung \mathbf{p}_{vol} .

9.7.3.2 Vorgehensweise zur Berechnung der Tragspannungen

Die mit einem Euler-Rückwärts-Verfahren integrierten Grundgleichungen lassen sich durch eine äquivalente QP-Aufgabe anschreiben, da alle Versagensbedingungen des kristallinen Systems linear in den Spannungen \mathbf{s} sind. Da verzerrungsgesteuert vorgegangen wird, werden die beiden Verzerrungszustände aus (9-56) schrittweise um einen finiten Zusatzbetrag $\Delta \mathbf{e}$, erhöht und die zugehörigen Spannungszuwächse $\Delta \mathbf{s}$ berechnet. Mit der QP-Aufgabe im Hintergrund erfolgt diese Berechnung mit der in Kap. 9.3 beschriebene Active-Set-Methode. Die Verzerrungen werden solange erhöht, bis sich die Spannungen nicht mehr ändern, also $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{0}$ ist; ist das der Fall, sind die plastischen Tragspannungen $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{uls}$ erreicht.

Diese Tragspannungsberechnung kann bei der gegebenen Problemstellung abgekürzt wer-

den. Es ist nicht notwendig den kompletten Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang durch Vorgabe von kleinen Verzerrungssinkrementen zu verfolgen, bis der Tragspannungszustand erreicht ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit des elastischen Bereichs und der linearen Versagensbedingungen gibt es - ab einer genügend groß vorgegebenen Verzerrungsgröße - einen eindeutigen Lösungspunkt \mathbf{s}_{uls} , unabhängig davon, ob exakt oder per Euler-Rückwärts-Verfahren integriert wurde. Kurz: mit einem einzigen genügend großen Verzerrungssinkrement $\Delta \mathbf{e}$ sind die Tragspannungen bei der gegebenen Aufgabenformulierung exakt bestimmbar. Dazu ist eine einzige QP-Aufgabe zu lösen. Die Startwerte im unbelasteten Zustand sind $\mathbf{s}_0 = \mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$; die aufgebrachte Deformation ist $\mathbf{e}_I = \Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}$ und damit $\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C}\mathbf{e}$. Die Spannungen $\mathbf{s}_I = \mathbf{s} = \mathbf{s}_{uls}$ werden gesucht. Die zu lösende QP-Aufgabe ist:

$$\min \{ \mathcal{d} \} = \min \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{s}^{TR} - \mathbf{s}) \right\} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau_y} \mathbf{p}_i^T \mathbf{s} - 1 \leq 0 \quad (9-59)$$

Um zu kontrollieren, ob das Verzerrungssinkrement \mathbf{e} groß genug gewählt wurde, wird folgendermaßen vorgegangen: es werden zwei „große“ Verzerrungen $\mathbf{e}_1 = \|\mathbf{e}_1\| \mathbf{n}_e$ und $\mathbf{e}_2 = \|\mathbf{e}_2\| \mathbf{n}_e$, wobei $\|\mathbf{e}_2\| > \|\mathbf{e}_1\|$ ist, vorgegeben und mit jeder dieser Verzerrungen die QP-Aufgabe (9-59) gelöst. Der Vektor \mathbf{n}_e ist ein Richtungseinheitsvektor. Anschließend wird verglichen, ob sich die berechneten Spannungen \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 unterscheiden. Ist die Differenz zwischen den berechneten Spannungen \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 null, wurden die Verzerrungen groß genug gewählt und die berechneten Spannungen sind die gesuchten Tragspannungen $\mathbf{s}_I = \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_{uls}$.

Durch diese Vorgehensweise erreicht man eine erhebliche Rechensparnis: Statt eine Vielzahl von sehr kleinen Lastschritten bis zum Tragspannungszustand zu berechnen, hat man im optimalen Fall mit zwei Rechenschritten das gesuchte Ergebnis exakt bestimmt.

Will man auch den Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang bei monoton anwachsender Belastung angeben - Lösungen dazu sind exemplarisch in Kap. 9.7.3.4 angeführt -, ist es unumgänglich, eine chronologische Abfolge von kleinen Lastschritten zu berechnen. Weitere Überlegungen zur Tragspannungsberechnung sind in Kap. 9.7.4 angeführt.

9.7.3.3 Lastfall 1 & 2: Tragspannungen \mathbf{s}_{uls}

In Box 9.7 und Box 9.8 sind die Tragspannungen und die zugehörigen aktiven Schubmechanismen für die drei Kristallsysteme bei Lastfall 1 und 2 aus Gleichung (9-56) angegeben. Der Fall $\alpha = \beta = \phi = 90^\circ$ dient zur Kontrolle; aufgrund der vorhandenen Symmetrien müssen sich bei diesem Verzerrungszustand bei allen drei Schubsystemen dieselben Tragspannungen wie bei der Orientierung 0° ergeben.

9.7.3.4 Lastfall 1: Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang

Für die Orientierungen $\alpha = \beta = \phi = 15^\circ$ ist der Verlauf aller sechs Spannungskomponenten S_{ij} in Bild 9.10 (MSS) und Bild 9.11 (FCC & BCC) bei monotoner Steigerung von γ_{13} dargestellt.

Im linearen Bereich wächst aufgrund der gewählten elastischen Eigenschaften nur die Schubspannung S_{13} an, alle übrigen Spannungskomponenten sind null. Bei Überschreiten der elastischen Grenzspannung werden die ersten Schubmechanismen aktiviert. Jeder Wechsel des aktiven Schubmechanismensets ist durch einen Knick im Spannungsverlauf gekennzeichnet. Da verzerrungsgesteuert vorgegangen wird, kann es in einigen Spannungskomponenten bei diesen Wechseln zu einer Umkehr des Spannungszuwachses kommen. Verändern sich die Spannungskomponenten nicht mehr, sind die Tragspannungen erreicht. Die Tragspannungen für die Orientierung mit 15° sind in Box 9.7 angegeben und hellgrau hinterlegt.

a) MSS, $\alpha = \beta = \phi = 15^\circ$

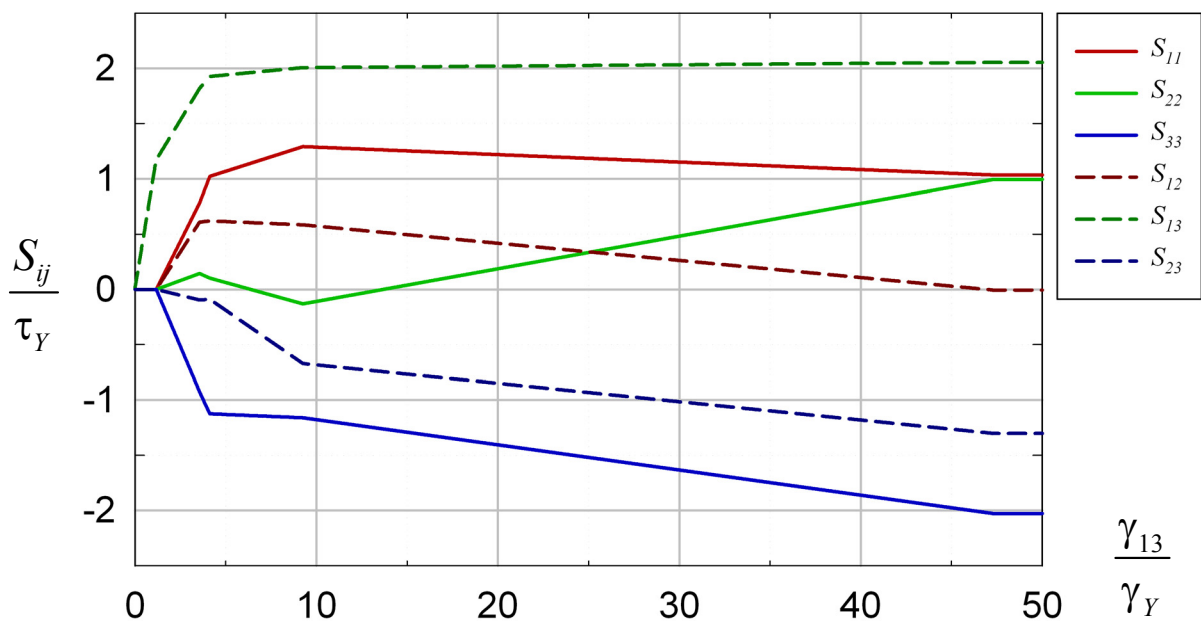
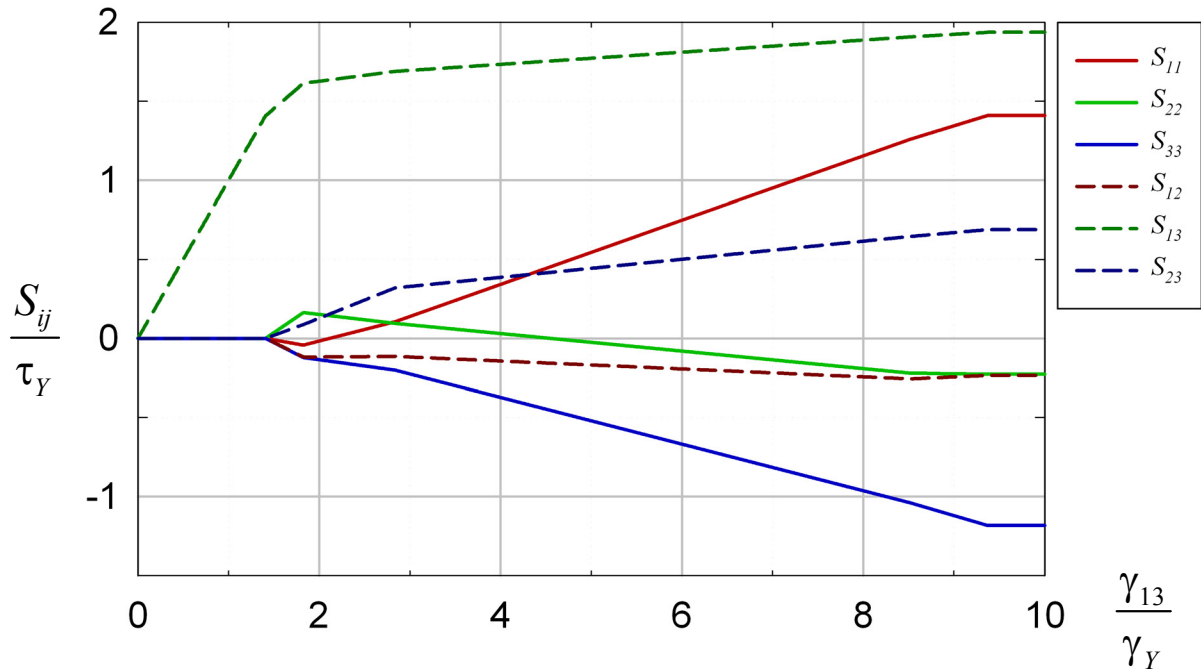


Bild 9.10 Spannungskomponenten S_{ij} des MSS-Kristallsystems bis zum Tragspannungszustand $S_{ij,uls}$ bei monotoner Erhöhung der Schubverzerrung γ_{13}

b) FCC, $\alpha = \beta = \phi = 15^\circ$



c) BCC, $\alpha = \beta = \phi = 15^\circ$

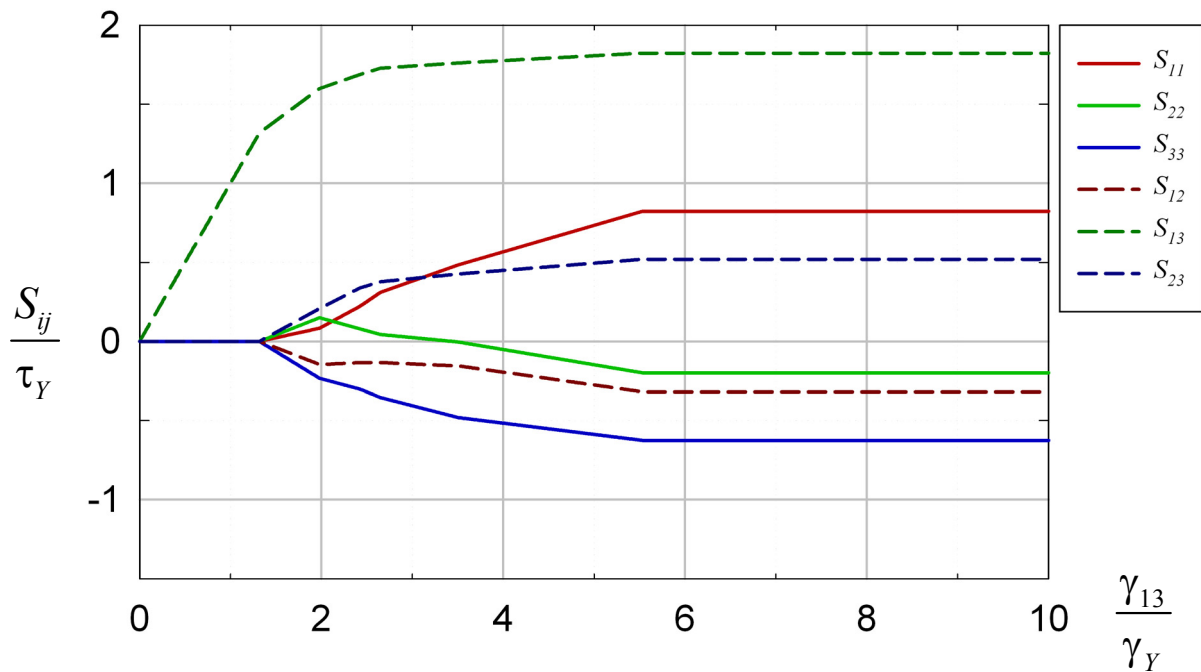


Bild 9.11 Verlauf der Spannungskomponenten S_{ij} des (b) FCC- und (c) BCC-Kristallsystems bis zum Tragspannungszustand bei monotoner Erhöhung der Schubverzerrung γ_{13}

Lastfall 1: $\gamma_{13} > 0, E_{11} = E_{22} = E_{33} = \gamma_{12} = \gamma_{23} = 0$									
	$\alpha =$ $\beta =$ ϕ	$\frac{S_{11,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{22,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{33,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{12,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{13,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{23,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A} aktives Set	$R_{\mathcal{A}}$
MSS	0°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	{6,8}	2
	15°	1.0341	0.9943	-2.0283	-0.0061	2.0541	-1.3018	{1,3,6,8,9}	5
	30°	-0.3775	0.1332	0.2443	0.3654	1.5155	-0.3173	{4,5,8,9}	4
	45°	-0.4540	0.5460	-0.0920	1.2762	1.8772	1.1700	{2,4,5,8,9}	5
	60°	-1.2198	0.6708	0.5490	1.1373	2.5155	-0.5090	{2,4,5,7,9}	5
	75°	-0.3025	0.4596	-0.1572	1.4972	2.4412	-0.7972	{2,4,5,7,9}	5
	90°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	{5,7}	2
FCC	0°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.4495	0.0	{2,5,6,8,15,19,22,23}	5
	15°	1.4100	-0.2269	-1.1830	-0.2346	1.9368	0.6888	{2,5,6,8,15,22,23}	5
	30°	0.9377	-0.4019	-0.5358	-0.4309	1.3396	0.5966	{1,2,4,5,8,9,22}	5
	45°	-0.6124	-0.2537	0.8660	-0.4330	1.3887	-0.0897	{1,3,7,9,11}	4
	60°	-1.1837	0.1231	1.0607	-0.9896	1.8972	-0.3882	{3,7,10,11,14,18}	5
	75°	-0.3274	0.0104	0.3170	-0.6096	2.3496	-0.0612	{3,7,10,11,14,17,18,20}	5
	90°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.4495	0.0	{3,7,10,11,14,17,18,20}	5
BCC	0°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.1213	0.0	{17,18,19,20}	4
	15°	0.8238	-0.1990	-0.6249	-0.3190	1.8233	0.5199	{1,10,29,31,38,40,52,59}	5
	30°	0.7536	-0.3961	-0.3575	-0.2362	1.1725	0.4856	{14,21,26,41,64}	5
	45°	-0.9338	0.1346	0.7991	-0.3996	1.2332	-0.2075	{15,27,46,51}	4
	60°	-0.6407	0.0345	0.6062	-0.5222	1.7771	-0.2248	{51,60,66,78,87}	5
	75°	-0.1678	0.0017	0.1661	-0.5309	2.0502	-0.0248	{65,66,67,68,78,80,85,87}	5
	90°	0.0	0.0	0.0	0.0	2.1213	0.0	{65,66,67,68}	4

Box 9.7 Lastfall 1: Plastische Tragspannungen $S_{ij,uls}$ und zugehöriges aktives Schubmechanismenset \mathcal{A} der drei angegebenen kristallinen Systeme

Lastfall 2: $E_{11} > 0, E_{22} = E_{33} = -0.5 E_{11}, \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$									
	$\alpha =$ $\beta =$ ϕ	$\frac{S_{11,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{22,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{33,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{12,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{13,uls}}{\tau_Y}$	$\frac{S_{23,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A} aktives Set	$R_{\mathcal{A}}$
MSS	0°	2.3094	-2.3094	0.0	0.0	0.0	0.0	{1,4,6,7}	4
	15°	2.2768	-2.4166	0.1398	0.1050	-0.7319	-0.5146	{1,4,6,7,10}	5
	30°	2.8613	-2.1311	-0.7302	0.0915	0.2835	0.2410	{1,4,6,8,10}	5
	45°	2.5738	-2.0592	-0.5147	0.6422	-0.8916	0.0751	{1,4,6,8,10}	5
	60°	1.7575	-1.9783	0.2208	0.7288	-1.6495	0.0090	{1,4,6,8,10}	5
	75°	1.5302	-1.2537	-0.2765	-0.0824	0.1294	0.8714	{1,4,5,8,10}	5
	90°	1.5396	-0.7698	-0.7698	0.0	0.0	0.0	{1,4,5,8}	4
FCC	0°	1.6330	-0.8165	-0.8165	0.0	0.0	0.0	{6,10,13,15,16,20,21,24}	5
	15°	1.7864	-1.0271	-0.7592	-0.8608	0.3282	0.4899	{2,6,15,16,19,21}	5
	30°	2.2964	-0.4593	-1.8371	0.2652	0.6124	1.0607	{2,5,6,15,19,22,23}	5
	45°	2.0908	-0.3587	-1.7321	0.8660	-0.8660	0.8660	{2,5,6,8,15,19,22}	5
	60°	1.6594	-0.2870	-1.3723	0.2936	-0.3875	0.6356	{1,2,4,5,8,9,12,22}	5
	75°	1.6218	-0.8163	-0.8055	-0.0208	0.1637	-0.0014	{1,2,4,5,7,9,11,12}	5
	90°	1.6330	-0.8165	-0.8165	0.0	0.0	0.0	{1,2,4,5,7,9,11,12}	5
BCC	0°	1.4142	-0.7071	-0.7071	0.0	0.0	0.0	{23,24,69,70}	4
	15°	1.6123	-0.5524	-1.0598	-0.3685	0.5626	0.4119	{3,39,48,63,75}	5
	30°	2.0088	-0.3813	-1.6275	0.2834	0.4318	0.9122	{18,19,20,30,32,37,39}	5
	45°	1.9281	-0.3943	-1.5337	0.5499	-0.3741	0.8343	{10,29,31,38,40,52,59}	5
	60°	1.4909	-0.2290	-1.2619	0.5401	-0.9223	0.5480	{10,26,45,59,76,95}	5
	75°	1.4051	-0.8091	-0.5959	-0.0151	0.1345	-0.0577	{14,15,26,61,64,76}	5
	90°	1.4142	-0.7071	-0.7071	0.0	0.0	0.0	{14,15,61,64}	4

Box 9.8 Lastfall 2: Plastische Tragspannungen $S_{ij,uls}$ (Komponenten im globalen Koordinatensystem gegeben) und zugehöriges aktives Schubmechanismenset \mathcal{A} der drei angegebenen kristallinen Systeme

9.7.4 Konsistenter Übergang von elasto-plastischer zu starr-plastischer Traglastberechnung

Bei der Tragspannungsberechnung in Kap. 9.7.3.2 wurden zwei „große“ Verzerrungsinkremente vorgegeben und die zugehörigen Spannungen berechnet. Waren diese Spannungen gleich, hatte man die Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} erreicht. Obwohl zielführend und praktikabel, mangelt es diesem Verfahren an Eleganz, da man die ausreichende Größe des Verzerrungsvektors a priori nicht kennt, sondern mittels des gezeigten Trial-and-Error-Verfahrens bestimmen musste.

Die Tragspannungen werden aber sicherlich erreicht, wenn man $\|\mathbf{e}\|$ gegen unendlich gehen lässt. Ausgehend von dieser Idee wird gezeigt, dass bei dem Grenzübergang $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$, die zu lösende elasto-plastische Tragspannungsberechnung (QP-Aufgabe) aus Gleichung (9-59) in eine starr-plastische Tragspannungsberechnung und damit mathematisch in eine lineare Programmierungsaufgabe (LP-Aufgabe) übergeht.

9.7.4.1 Formulierung der LP-Aufgabe als Grenzfall der QP-Aufgabe

Die zu minimierende Funktion $\tilde{\mathcal{d}}$ aus (9-59) wird mit dem vorgegebenen Wert $\mathbf{s}^{TR} = \mathbf{C}\mathbf{e}$ und $\mathbf{d} = \mathbf{C}^{-1}$ angeschrieben, der konstante Term gestrichen, und der verbleibende Ausdruck durch $\|\mathbf{e}\|$ dividiert. Die sich dadurch ergebende Funktion

$$\tilde{\mathcal{d}} = \frac{1}{2\|\mathbf{e}\|} \mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|} = \frac{1}{2\|\mathbf{e}\|} \mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{n}_e \quad (9-60)$$

ist immer noch quadratisch in \mathbf{s} und ergibt bei Verwendung in der QP-Aufgabe denselben Lösungspunkt, wie die Ausgangsfunktion $\tilde{\mathcal{d}}$. Bildet man den Grenzübergang $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$, verschwindet der quadratische Term in (9-60) und es verbleibt der lineare Term:

$$\mathcal{d}_{lin} = \lim_{\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{d}} = -\mathbf{s}^T \mathbf{n}_e \quad (9-61)$$

Die anfänglich formulierte QP-Aufgabe aus Gleichung (9-59) ergibt somit im Grenzübergang die lineare Programmierungsaufgabe:

$$\min\{\mathcal{d}_{lin}\} = \min\{-\mathbf{n}_e^T \mathbf{s}\} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau_y} \mathbf{p}_i^T \mathbf{s} - 1 \leq 0 \quad (9-62)$$

Die Lösung dieser LP-Aufgabe sind die Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} .

9.7.4.2 Geometrische Interpretation der LP-Aufgabe

Die Minimumsbedingung aus Gleichung (9-62) ist durch Multiplikation von \mathcal{d}_{lin} mit minus eins als Maximalforderung anschreibbar:

$$\min\{\mathcal{d}_{lin}\} = \max\{-\mathcal{d}_{lin}\} = \max\{\mathbf{n}_e^T \mathbf{s}\} = \mathbf{n}_e^T \mathbf{s}_{uls} \quad (9-63)$$

Unter Berücksichtigung der in \mathbf{s} linearen Zwangsungleichungen aus (9-62) lässt sich die folgende geometrische Interpretation der LP-Aufgabe geben: Der gesuchte Lösungspunkt \mathbf{s}_{uls} ist derjenige Punkt des Spannungsraums, der auf der Oberfläche des eben-facettierten und konvexen Gebildes, das von den Zwangsungleichungen, den Versagensbedingungen, begrenzt wird, liegt und dessen Projektion auf den \mathbf{n}_e Vektor maximal ist.

9.7.4.3 Mechanische Interpretation der LP-Aufgabe

Da die Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} einen konstanten Wert haben, sind ebenso die zugehörigen elastischen Verzerrungen $\mathbf{s}_{uls} = \mathbf{C}\mathbf{e}_{el}$ konstant. Damit folgt, dass bei $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$ die Richtungen des plastischen Verzerrungsvektors \mathbf{e}_{pl} und des Verzerrungsvektors \mathbf{e} parallel werden, es gilt:

$$\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_{e_{pl}} \quad (9-64)$$

Ohne das Problem abzuändern, ist der Einheitsvektor \mathbf{n}_e in (9-63) durch

$$d\mathbf{e}_{pl} = dE_{pl} \mathbf{n}_{e_{pl}} \quad (9-65)$$

ersetzbar. Damit ergibt sich die LP-Aufgabe zu:

$$\begin{aligned} \max\{\mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl}\} &= \max\{dw_{pl}\} = \max\{dD\} \\ \text{mit } F_i(\mathbf{s}) &= \frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_i^T \mathbf{s} - 1 \leq 0 \end{aligned} \quad (9-66)$$

Das ist das Postulat der maximalen plastischen Dissipation (Kap. 6.6.1.6), was nicht weiter verwundert, weil es Grundvoraussetzung für die Formulierung der quadratischen Ausgangsaufgabe ist. Gesucht werden die Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} , der bei vorgegebener Verzerrung \mathbf{e} bzw. bei vorgegebenem plastischen Verzerrungen $d\mathbf{e}_{pl}$ alle Versagensbedingungen erfüllt und die plastische Arbeit, die der Dissipation entspricht, maximiert.

9.7.4.4 Lösung der LP-Aufgabe & Vergleich mit den QP-Lösungen

Die Programmpakete Mathematica und Matlab besitzen vorgefertigte Rechenprozeduren, um eine LP-Aufgabe zu lösen. Als Lösungsverfahren wird von diesen beiden Programmen entweder automatisch oder per Vorabdefinition das Simplex-Verfahren, das Interior-Point-Verfahren oder andere verwendet. Mit diesen Funktionen wurden die in Box 9.7 und Box 9.8 berechneten Werte gegenkontrolliert.

In allen Fällen, in denen die mit der QP-Prozedur berechneten Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} in einer Ecke des deviatorischen Raumes ($R_{\mathcal{A}} = 5$) liegen, stimmen die Lösungen der LP-Be-

rechnung - unabhängig davon, welches LP-Lösungsverfahren verwendet wird - mit den Ergebnissen aus Box 9.7 und Box 9.8 überein. Die Lösung des LP-Problems muss etwas nachbehandelt werden, da die Lösung \mathbf{s}_{uls} i.A. einen hydrostatischen Spannungsanteil $\Delta\mathbf{s}_{vol}$ beinhaltet, der abgespalten werden muss. Die Ursache liegt darin, dass die Ecke im deviatorischen Spannungsraum eigentlich eine Kante im allgemeinen Spannungsraum ist und ohne Verletzung der LP-Gleichungen (9-62) ein beliebiger hydrostatischer Spannungszustand $\Delta\mathbf{s}_{vol}$ auf die Lösung \mathbf{s}_{uls} superponiert werden kann.

Liegen die Tragspannungen auf einer Kante im deviatorischen Subraum, es gilt $R_{\mathcal{A}} < 5$, können die Ergebnisse des LP-Verfahrens von den in Box 9.7 und Box 9.8 angegebenen Werten abweichen. Selbst bei Änderung des gewählten LP-Lösungsverfahrens, z.B. in Mathematica die Simplex- statt der Interior-Point-Methode, geben diese speziellen Aufgabenstellungen unterschiedliche Tragspannungen. Trotzdem erfüllen die berechneten Spannungen die gegebenen LP-Gleichungen (9-62). Ein Beispiel hierfür ist das FCC-Schubsystem im Lastfall 1 bei der Orientierung $\alpha = \beta = \phi = 45^\circ$ und $R_{\mathcal{A}} = 4$ mit den folgenden unterschiedlichen Lösungen:

- **QP:**

$$\mathbf{s}_{uls,1} = [-0.6124, -0.2537, 0.8660, -0.4330, 1.3887, -0.0897]^T,$$

$$\mathcal{A}_1 = \{1, 3, 7, 9, 11\}$$

- **LP(Mathematica - Simplex):**

$$\mathbf{s}_{uls,2} = [-0.4593, -0.1006, 0.5598, -0.8923, 1.3887, -0.0897]^T, \quad (9-67)$$

$$\mathcal{A}_2 = \{1, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 18\}$$

- **LP(Mathematica - InteriorPoint):**

$$\mathbf{s}_{uls,3} = [-0.7206, -0.3169, 1.0826, -0.1082, 1.3887, -0.0897]^T,$$

$$\mathcal{A}_3 = \{1, 3, 7, 9, 11\} = \mathcal{A}_1$$

Die Ursache dafür liegt in einem Informationsverlust bei der LP-Aufgabe. Die QP-Aufgabe liefert aufgrund der strikten Konvexität der Zielfunktion und den linearen Zwangsungleichungen immer eindeutige Tragspannungen. Bei der LP-Aufgabe kann es in Sondersituationen zu einer Lösungsvielfalt kommen, wenn alle Punkte einer Kante mögliche Lösungen sind. Der Vektor \mathbf{n}_e ist dabei orthogonal zu allen Punkten dieses Subraums, oder alternativ formuliert, der Vektor \mathbf{n}_e liegt im Raum, der von den Normalenvektoren \mathbf{p}_i der aktiven Flächen aufgespannt wird. Ein Mangel besteht dabei in den vorgefertigten LP-Prozeduren, da diese bei solchen Situationen eine gültige, aber beliebige Lösung der Lösungsvielfalt, die wiederum vom jeweils verwendeten Lösungsverfahren abhängt, und nicht den Subraum (= das Set der aktiven Flächen), in dem die Lösungsvielfalt liegt, ausgeben. Im oben an-

geführten Fallbeispiel (9-67) gibt das Simplex-Verfahren sogar den Schnitt des Sets $\mathcal{A} = \{1,3,7,9,11\}$ mit weiteren Flächen an, wodurch dieses Lösungsset mit der beinhalteten Lösungsvielfalt als Submenge in der Menge \mathcal{A}_2 verborgen ist und, da es in weiterer Folge benötigt wird, rekonstruiert bzw. wieder herausgefiltert werden muss. Um diese unbefriedigende Situation aufzulösen, wird ein Verfahren gesucht, dass

- eindeutig das aktive Set \mathcal{A} , zu welchem \mathbf{n}_e orthogonal ist, mit der oben formulierten LP-Aufgabe bestimmt und
- aus der Lösungsvielfalt der Schnittmenge der Flächen von \mathcal{A} einen eindeutigen Lösungspunkt auswählt, der der Lösung aus der QP-Aufgabe beim Grenzübergang $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$ entspricht.

9.7.4.5 Lösungsverfahren zur eindeutigen Bestimmung der Tragspannungen

Die Lösung der oben formulierten Aufgabe erfolgt in zwei Schritten:

- Im ersten Rechenschritt wird das Set \mathcal{A} der LP-Aufgabe bestimmt. Dazu wird ein Active-Set-Verfahren, das durch Adaption des Verfahrens zur Lösungsberechnung von QP-Aufgaben aus Kap. 9.3 gewonnen wird, verwendet.
- Im zweiten Lösungsschritt werden durch Minimalabstandsberechnung zu diesem aktiven Flächenset die Tragspannungen \mathbf{s}_{uls} berechnet. Diese Subaufgabe ist Bestandteil der QP-Aufgabe.

Es wird angenommen, dass der erste Schritt, die Berechnung des gesuchten Sets \mathcal{A} , zu welchem \mathbf{n}_e orthogonal ist, bereits mit dem Active-Set-Verfahren gelöst wurde. Für den zweiten Rechenschritt wird auf die QP-Minimalabstandsaufgabe aus Kap. 9.3.2.2 zurückgegriffen. Aus dieser Aufgabe ergibt sich der Minimalabstand vom \mathbf{s}^{TR} ($= \mathbf{C}\mathbf{e}$) - Punkt (=Aufpunkt) zu den Flächen des aktiven Sets zu:

$$\mathbf{s}_{uls} = \mathbf{s}^{TR} - \mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}(\mathbf{e} - \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{C}(\mathbf{e} - \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}_e) - \mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}_b \quad (9-68)$$

Dabei werden die Größen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau_y} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_e = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}\mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{C}\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\lambda}_b = -(\mathbf{A}^T \mathbf{C}\mathbf{A})^+ \mathbf{b} \quad (9-69)$$

benötigt. Da die Richtung von \mathbf{e} bzw. \mathbf{n}_e normal auf den Raum, der von den aktiven Versagensbedingungen aufgespannt wird, steht, gilt $\mathbf{e} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}_e$. Der erste Term in (9-68) ist demzufolge null. Die Tragspannungen berechnen sich damit aus (9-68) mit $\boldsymbol{\lambda}_b$ aus (9-69) zu:

$$\mathbf{s}_{uls} = \mathbf{CA}(\mathbf{A}^T \mathbf{CA})^+ \mathbf{b} \quad (9-70)$$

Diese Gleichung ist unabhängig von \mathbf{e} bzw. \mathbf{n}_e . Die Richtung \mathbf{n}_e wird nur im ersten Rechenschritt, der starr-plastischen Traglastaufgabe, benötigt, um das aktive Set \mathcal{A} zu berechnen. Mit dem Set \mathcal{A} aus der LP-Aufgabe und Gleichung (9-70) ist die Tragspannungsberechnung mit der LP-Aufgabenformulierung für jegliche Ausgangssituation als Grenzfall der anfänglichen QP-Aufgaben eindeutig gelöst. Trotz einer sogenannten „starr-plastischen“ Traglastrechnung hat das elastische Verhalten mit der Materialsteifigkeitsmatrix in (9-70) einen Einfluss auf die Tragspannungen!

9.7.4.6 Minimum Shear Principle von Taylor

Die in Gleichung (9-66) angeschriebene LP-Aufgabenstellung zur Suche des aktiven Sets wurde bereits von Taylor 1938 für FCC-Kristalle intuitiv aufgestellt, etwas vertrackt als Minimalbedingung formuliert und als *Minimum Shear Principle* bezeichnet, siehe Aufsatz 27, 28 und 41 in Batchelor ed. (1958). Die mathematische Form des mechanischen Problems als lineare Programmierungsaufgabe, die den Einsatz eines entsprechenden oben angeführten Lösungsverfahrens nahelegt, wurde dabei aber noch nicht erkannt, was aber auch wenig verwundert, da die Methode der linearen Optimierung erst 1939 von Kantorowitsch eingeführt wurde und erstmals 1947 von Dantzig systematisch mit dem Simplex-Verfahren gelöst werden konnte. Um die Kernaufgabe zu lösen und ein aktives Schubmechanismenset (von Taylor als *operatives Set* bezeichnet) zu berechnen, legt Taylor fest, dass von den insgesamt 12 immer fünf Schubmechanismen gleichzeitig aktiv sind. Das entspricht einer Ecke im deviatorischen Subraum. Die konkrete Lösung der Aufgabe erfolgt durch Berechnung aller 792 Kombinationen (durch weitere Überlegungen hat Taylor diese Anzahl fehlerhaft auf 24 reduziert; 1955 mit der korrekten Minimalkombinationsanzahl 96 gegenkorrigiert) von fünf Schubmechanismen, wobei die Schubmechanismenkombination bei der die Summe der Schubverzerrungsbeträge den geringsten Wert (*Minimum Shear Principle*) annimmt. Das rechnerische Lösungsverfahren entspricht somit einem „Abklappern“ aller Ecken, die die Versagensbedingungen im deviatorischen Subraum bilden, wobei diese nicht einmal Bestandteil des elastischen Bereiches sein müssen, sondern auch außerhalb liegen können (wobei diese außerhalb liegenden Punkte niemals ein Minimum der Schubverzerrungsbetragssumme bilden werden). Das dabei berechnete Set an aktiven Mechanismen kann in manchen Fällen uneindeutig sein; es kann auch andere Kombinationen von fünf Mechanismen geben, die denselben Minimalbetrag der Schubverzerrung ergeben. Beispiele sind in Box 9.7 und Box 9.8 alle Tragspannungen, in denen zwar $R_{\mathcal{A}}$ fünf ist, aber die Anzahl der Elemente von \mathcal{A} größer als fünf ist.

Da bei beiden Aufgabenstellungen nur die LP-Aufgabe formuliert und gelöst wird, sind Mehrfachlösungen von \mathbf{s}_{uls} möglich und auch erlaubt. Die eindeutige Tragspannungsberechnung (9-70), die sich durch die hier gezeigte Top-Down-Herleitung der Tragspannungsberechnung als Grenzwert der im Hintergrund stehenden QP-Aufgabe ergibt, ist in

den beiden klassischen Problemformulierungen nicht enthalten.

9.7.5 Gegenvergleich mit Berechnungen aus der Literatur

In der Literatur finden sich verschiedene Prozeduren zur Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs von Kristallen. Es werden hier nur Arbeiten betrachtet, die sich in der mechanischen Modellbildung auf die Annahme kleiner Verzerrungen und Ratenunabhängigkeit beschränken. Eine elegante Darstellung der Basisgleichungen findet sich in den Arbeiten von Kocks (1970) oder Mandel (1965). Einen Überblick über verschiedene Verfahren zur Lösung der Gleichungen von Kristallen bei Verwendung von einer Euler-Rückwärts-Integration geben Miehe/Schröder (2001). Eine erste konsistente Auflösung der implizit gelösten Gleichungen mit dem *Return Mapping Algorithm* nach Simo/Kennedy/Govindjee (1988) geben Borja/Wren (1993) an und vergleichen die Ergebnisse mit dem entwickelten *ultimate* oder *exact algorithm*. Die probleminhärente mathematische Struktur als QP-Aufgabe wurde von keinen der oben genannten Autoren genutzt.

9.7.5.1 Behandlung von redundanten Schubmechanismen - „Pyramidenpunkte“

Im Mittelpunkt des Interesses der Spannungsintegration steht die Auswahl der aktiven Schubmechanismen, besonders in Pyramidenpunkten, in welchen die Spannungen eindeutig berechenbar sind, aber die Kombination der aktiv beteiligten Schubmechanismen aufgrund vorhandener Redundanz nicht eindeutig festgelegt werden kann. Die unterschiedliche Auswahl dieses Sets erfolgt durch das verwendete Rechenverfahren - nicht durch ein physikalisch motiviertes Modell -, wobei in der Rechenprozedur eine singuläre Matrix invertiert werden muss. In dieser Arbeit, und ebenso bei Anande/Kothari (1996) und Schröder/Miehe (1997), wird zur Invertierung der auftretenden singulären Matrix eine generalisierte Inverse (hier: Moor-Penrose-Pseudoinverse) benutzt. Borja/Wren (1993) verwenden im Rahmen des *Return Mapping Algorithm* ein Triangularisierungsverfahren, um die redundanten Mechanismen aus der zu invertierenden singulären Matrix herauszufiltern. Dieses Verfahren übernehmen Sawischlewski/Steinmann/Stein (1996). Miehe/Schröder (2001) formulieren zur Berechnung der singulären Matrix eine alternative *diagonal shift method* und vergleichen diese mit der generalisierten Inversen.

9.7.5.2 Tension Test & Simple Shear Test von Borja/Wren (1993)

In den ersten beiden Testbeispielen von Borja/Wren (1993) wird ein FCC-Kristall mit isotrop-elastischem Materialverhalten und perfekter Plastizität berechnet. Die vorgegebenen elastischen Materialkennwerte sind $E = 1500 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 1/3$; daraus ergibt sich der Schubmodul $G = 562.5 \text{ N/mm}^2$. Die Schubgrenzspannung hat bei allen Schubmechanismen den Wert $\tau_Y = 1 \text{ N/mm}^2$. Die Belastungssituation und der Systemaufbau sind nahezu gleich zu den Tragspannungsberechnungen in Kap. 9.7.3. Zwei Lastsituationen mit eingepprägten Verzerrungen werden untersucht:

$$\begin{aligned}
\text{LF1 - Tension Test:} \quad & E_{11}(t) \quad , \quad E_{22} = E_{33} = -E_{11}/2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \\
\text{LF2 - Simple Shear Test:} \quad & \gamma_{12}(t) = 2E_{12}(t), \quad E_{11} = E_{22} = E_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 = \gamma_{23} = 0
\end{aligned} \tag{9-71}$$

Die Kristalle werden bei diesen vorgegebenen Verzerrungen bei 36 unterschiedlichen Orientierungen mit α und $\beta = (-1)\{0^\circ, 18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ\}$ relativ zu den globalen Koordinatenachsen analysiert. In Borja/Wren (1993) erfolgt die Berechnung in 100 Inkrementen bis zur Maximalverzerrung $E_{11,lim} = 5.625 \gamma_Y = 1\%$ bzw. $\gamma_{12,lim} = 2E_{12} = 11.25 \gamma_Y = 2\%$. Miehe/Schröder (2001) rechnen Lastfall 2 mit derselben Anzahl an Inkrementen nach und gelangen zu denselben Spannungswerten.

Diese beiden Lastsituationen wurden mit der in Kap. 9.7.4 gezeigten Vorgehensweise zur Berechnung von Tragspannungen nachgerechnet. Die 36 Tragspannungskomponenten $S_{11,uls}$ und $S_{12,uls}$ (i.A. treten weitere Spannungskomponenten, die aber nicht angeführt sind, auf) und das zugehörige aktive Set \mathcal{A} sind in Box 9.9 und Box 9.10 angegeben. Bei einigen Orientierungen unterscheiden sich die Tragspannungen von den angegebenen Werten (rot) von Borja/Wren (1993) bzw. Miehe/Schröder (2001). Der Grund liegt in der Vorgabe des Verzerrungswertes $E_{11,lim}$ bzw. $\gamma_{12,lim}$, da in einigen Fällen bei diesen Verzerrungen noch nicht der Maximalwert der Spannungskomponenten S_{11} bzw. S_{12} erreicht ist. Die in Rot angeführten Werte, die den Rechenergebnissen von Borja/Wren (1993) entsprechen, wurden durch Vorgabe eines einzigen Verzerrungsschrittes mit $E_{11,lim}$ bzw. $\gamma_{12,lim}$ durch Lösung der QP-Aufgabe berechnet.

9.7.5.3 Weitere Rechen- und Ergebniskontrollen

Die in diesem Abschnitt und Kap. 9.7.3 angeführten Rechenergebnisse dienen auch als Referenzwerte zur Kontrolle anderer Rechenprozeduren, z.B. lassen sich nichtlineare Lösungsverfahren anhand der hier zugrunde liegenden QP-Aufgabe und den angegebenen Lösungen kontrollieren und abtesten. Alle angeführten Ergebnisse wurden ebenso mit der ALPM berechnet. Im Rahmen einer ALPM muss keine singuläre Matrix invertiert werden. Das rechnerische Lösungsverfahren aus dem Bereich der nichtlinearen Optimierung ähnelt damit den Berechnungsmodellen der Kristallplastizität, bei welchen in den ratenunabhängigen Ausgangsgleichungen artifiziell viskose Effekte inkludiert werden, um bei dem rechnerischen Lösungsverfahren die bei ratenunabhängigen Modellgleichungen erforderliche Invertierung einer singulären Matrix zu umgehen, siehe z.B. Cuitiño/Ortiz (1992).

FCC - Kristallsystem							
Lastfall 1 - Tension Test: $E_{11} > 0$, $E_{22} = E_{33} = -E_{11}/2$, $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$							
$-\beta$	$-\alpha$	$\frac{S_{11,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A}	$-\beta$	$-\alpha$	$\frac{S_{11,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A}
0°	0°	1.63299	{6,10,13,15,16,20,21,24}	54°	0°	2.32960	{3,7,10,11,14,17,18,20}
	18°	1.71073	{5,6,7,10,13,15,20,24}		18°	2.10715 2.07945	{7,11,14,18,20} {7,14,18,20}
	36°	2.32960	{4,5,7,9,13,14,23,24}		36°	2.38937	{4,7,13,14,18,20}
	54°	2.32690	{4,5,7,9,13,14,23,24}		54°	2.02943 2.02297	{4,13,14,18,20} {4,13,14,18}
	72°	1.71073	{3,4,8,9,14,18,22,23}		72°	1.70508 1.68321	{4,13,14,18,22,23} {13,14,18,22,23}
	90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}		90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}
18°	0°	1.71073	{10,13,14,16,17,20,21,24}	72°	0°	1.71073	{1,3,4,7,9,11,12,18}
	18°	1.92956	{7,10,13,14,20,24}		18°	1.92956	{4,7,11,12,18,20}
	36°	2.21558 2.17466	{4,5,7,13,14,23,24} {4,7,13,14}		36°	2.21558 2.17466	{4,12,13,15,18,20,22} {4,13,18,20}
	54°	2.21558 2.21467	{4,7,9,13,14,23,24} {4,13,14,23}		54°	2.21558 2.21467	{4,12,13,18,20,21,22} {4,13,18,22}
	72°	1.68666 1.68366	{3,4,9,14,18,22,23} {4,14,18,22,23}		72°	1.68666 1.68366	{13,14,17,18,21,22,23} {13,14,18,22,23}
	90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}		90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}
36°	0°	2.32960	{3,7,10,11,14,17,18,20}	90°	0°	1.63299	{1,2,4,5,7,9,11,12}
	18°	2.10715 2.07945	{7,10,14,18,20} {7,14,18,20}		18°	1.71073	{2,4,5,7,11,12,15,20}
	36°	2.38937	{4,7,13,14,18,20}		36°	2.32960	{4,12,13,15,18,20,21,22}
	54°	2.02943 2.02297	{4,7,13,14,18} {4,13,14,18}		54°	2.32690	{4,12,13,15,18,20,21,22}
	72°	1.70508 1.68321	{4,13,14,18,22,23} {4,14,18,22,23}		72°	1.71073	{13,14,17,18,19,21,22,23}
	90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}		90°	1.63299	{3,8,14,17,18,19,22,23}

Box 9.9 „Tension Test“ - Lastfall: Tragnormalspannung $S_{11,uls}$ und zugehöriges aktives Set bei eingprägter Verzerrung E_{11} ; rot angegeben sind die von Borja/Wren (1993) berechneten Spannungen bei der maximal vorgegebenen Verzerrung $E_{11} = 5.625 \gamma_Y$, wobei bei dieser Verzerrung noch nicht die Tragspannungen erreicht sind

FCC - Kristallsystem							
Lastfall 2 - Simple Shear Test: $\gamma_{12} > 0$, $E_{11} = E_{22} = E_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$							
$-\beta$	$-\alpha$	$\frac{S_{12,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A}	$-\beta$	$-\alpha$	$\frac{S_{12,uls}}{\tau_Y}$	\mathcal{A}
0°	0°	2.44949	{4,5,7,9,13,14,23,24}	54°	0°	1.98168	{4,13,15,18,20,22}
	18°	1.98168	{4,5,7,9,13,14,23,24}		18°	1.74395 1.74129	{4,13,18,22,23} {4,13,22,23}
	36°	1.54327	{3,4,8,9,14,18,22,23}		36°	1.26977 1.24311	{13,14,18,19,22,23} {19,22,23}
	54°	1.54327	{1,3,8,12,17,18,19,22}		54°	1.26977 1.24311	{3,8,16,17,19,23} {8,19,23}
	72°	1.98168	{1,2,11,12,16,17,19,21}		72°	1.74395 1.74129	{1,3,8,16,19} {1,8,16,19}
	90°	2.44949	{1,2,11,12,16,17,19,21}		90°	1.98168	{1,3,6,8,10,16}
18°	0°	2.32960	{4,5,7,9,13,14,23,24}	72°	0°	2.32960	{4,12,13,15,18,20,21,22}
	18°	1.88469 1.87521	{4,5,9,13,14,23} {4,9,14,23}		18°	1.88469 1.87521	{4,13,15,18,21,22} {13,18,21,22}
	36°	1.46913	{3,4,8,9,14,18,22,23}		36°	1.46913	{13,14,17,18,19,21,22,23}
	54°	1.46913	{1,3,8,12,17,18,19,22}		54°	1.46913	{3,8,14,16,17,19,23,24}
	72°	1.88469 1.87521	{1,2,12,16,17,19} {1,12,17,19}		72°	1.88469 1.87521	{1,3,6,8,16,24} {3,8,16,24}
	90°	2.32960	{1,2,11,12,16,17,19,21}		90°	2.32960	{1,3,6,8,9,10,16,24}
36°	0°	1.98168	{4,5,7,13,14,23}	90°	0°	2.44949	{4,12,13,15,18,20,21,22}
	18°	1.74395 1.74129	{4,13,14,22,23} {4,13,22,23}		18°	1.98168	{4,12,13,15,18,20,21,22}
	36°	1.26977 1.24311	{4,8,14,18,22,23} {8,22,23}		36°	1.54327	{13,14,17,18,19,21,22,23}
	54°	1.26977 1.24311	{1,3,8,17,19,22} {8,19,22}		54°	1.54327	{3,8,14,16,17,19,23,24}
	72°	1.74395 1.74129	{1,8,16,17,19} {1,8,16,19}		72°	1.98168	{1,3,6,8,9,10,16,24}
	90°	1.98168	{1,2,11,16,17,19}		90°	2.44949	{1,3,6,8,9,10,16,24}

Box 9.10 „Simple Shear Test“ - Lastfall: Tragspannung $S_{12,uls}$ und zugehöriges aktives Set bei eingepprägter Verzerrung γ_{12} ; rot angegeben sind die von Borja/Wren (1993) bzw. Miehe/Schröder (2001) berechneten Spannungen bei der maximal vorgegebenen Schubverzerrung $\gamma_{12} = 11.25 \gamma_Y$, wobei bei dieser Verzerrung noch nicht die Tragspannungen erreicht sind

TEIL IV

Einfaches und generelles Mikro- strukturmodell

Inhalt:

10 Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell

11 Beispiele: Mikrostrukturmodell

10

Einfaches und generelles Mikro- strukturmodell

10.1 Einleitung

Bei Mikrostrukturmodellen handelt es sich um Modelle zur Beschreibung des mechanischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs eines Makroelements, das aus einer mehr oder weniger strukturierten Anordnung mehrerer unterschiedlicher Mikroelemente aufgebaut ist. Hauptbestandteile des Modells sind die Kinematik der Mikrostruktur und das Materialverhalten der konstituierenden Mikroelemente. Aus diesen lässt sich das mechanische Verhalten des Makroelements berechnen.

Das nachfolgend vorgestellte Mikrostrukturmodell ist dahingehend als „einfach“ zu bezeichnen, weil es annimmt, dass die Mikroelemente in einem durch die makroskopischen Verzerrungen vorgegebenen affin verzerrten Gitter eingebettet sind (affine Verzerrungen). Das hat zur Folge, dass die räumliche Anordnung der Mikroelemente innerhalb des Makroelements beliebig sein kann, ohne dabei das kumulative makroskopische Verhalten zu ändern. Die Diversität des Modells steckt also nicht in einer komplexen mikrostrukturellen Kinematik, wie sie z.B. bei den FE²-Modellen umgesetzt wird, sondern im materiellen Verhalten der einzelnen Mikroelemente und deren räumlicher Ausrichtung.

Um das mikrostrukturelle Verhalten und damit das makroskopische Verhalten variantenreicher zu gestalten, besteht die Möglichkeit beliebige Spannungsnullbedingungen für die einzelnen Mikroelemente einzuführen. Die systematische Vorgehensweise dazu wurde in (Kap. 7) ausgearbeitet. Das hat zur Folge, dass bei den Mikroelementen mit Spannungsnullbedingungen nur die aktiven mikroskopischen Verzerrungskomponenten den makroskopischen Verzerrungen entsprechen; die zu den Nullspannungskomponenten des Mikroelements arbeitskonjugierten Verzerrungen können sich - trotz des vorgegebenen makroskopischen Verzerrungsgitters - ungehindert ausbilden. Die dabei entstehenden Inkompatibilitäten in der Verformungsgeometrie werden bewusst zugelassen.

Gerade die Einführung der Spannungsnullbedingungen auf Mikroelementlevel eröffnet eine Vielzahl an Möglichkeiten - trotz der einfachen Kinematik - um verschiedenste einfache mikrostrukturelle Arrangements zu beschreiben. Damit lassen sich Querverbindungen zu bereits bestehenden Mikrostrukturmodellen, wie dem Microplane Modell, siehe z.B. Jirásek/Bažant (2002) oder Leukart (2005), dem Microsphere Modell von Miehe/Göktepe/Lulei (2004), dem Fachwerkmitter-Modell von Mohr (2004) oder dem einfachen Voigt'schen Polykristallmodell, aufzeigen.

Aus den oben angeführten Gründen und Modellannahmen wird das Modell als einfaches und generelles Mikrostrukturmodell bezeichnet.

10.1.1 Ziele des Abschnitts

Kernbestandteil des Modells ist die Beschreibung des Materialverhaltens der Mikroelemente. Für diese können beliebige plastische Versagensmechanismen formuliert und

rechnerisch umgesetzt werden. Zusätzlich lassen sich je Mikroelement Spannungsnullbedingungen einführen. Diese Mikroelemente werden in das affin verzerrte makroskopische Verzerrungsgitter eingebettet. Mit diesem kinematischen Zusammenhang lassen sich aus dem mikroskopischen Einzelementverhalten die äquivalenten makroskopischen Größen berechnen. Weiters stellt dieses Kapitel eine elementare Einführung in den Bereich der sogenannten *Mikroplastizität* bzw. in die *Homogenisierung heterogen aufgebauter Verbundkörper mit elasto-plastischem Materialverformungsverhalten* dar. Ausführungen dazu finden sich z.B. in den Vorlesungsunterlagen (Kap 3) von Zaoui (1997).

Die Ziele des Kapitels sind:

- Formulierung des generellen Modells zur Beschreibung einer Klasse von einfachen mikrostrukturellen Arrangements,
- Anwendung der Multi-Mechanismen-Plastizität mit/ohne Spannungsnullbedingungen bei der Beschreibung des Verhaltens der Mikroelemente und
- Darstellung der Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen zufolge des strukturellen Aufbaus.

Der theoretische Rahmen dieses Abschnitts kommt in den Beispielen des nächsten Abschnitts zum Einsatz.

10.1.2 Inhalt von Kapitel 10

10.2 Systembeschreibung & Modellannahmen

10.3 Konstitutive Relationen eines Mikroelements

10.4 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen

10.5 Das Einkornaggregat - eine spezielle Mikrostruktur

10.6 Berechnung des makroskopischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs

10.2 Systembeschreibung & Modellannahmen

10.2.1 Systembeschreibung & Bezeichnungen

Es soll ein das mechanische Verhalten eines heterogen aufgebauten Verbundkörpers durch ein Mikrostrukturmodell beschrieben werden. In Bild 10.1 ist zur vereinfachten Darstellung angenommen, dass das Makroelement würfelförmig mit der Seitenabmessung L ist und die einzelnen Subbestandteile (die Mikroelemente) ebenso würfelförmig und gleich groß sind. Es wird festgelegt, dass sich das in Bild 10.1 eingezeichnete Gitter affin verformt.

10.2.1.1 Makroelement & makroskopische Größen

Alle Größen, die sich auf das Makroelement beziehen, werden mit Großbuchstaben geschrieben und (sofern im Beschreibungskontext notwendig) mit dem Zusatz *makroskopisch* versehen. Die makroskopischen Materialhauptachsensystem werden mit $\{X_1, X_2, X_3\}$ bezeichnet. Die Komponenten der makroskopischen Verzerrungen und Spannungen bezüglich dieses Koordinatensystems sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_{11} \quad E_{22} \quad E_{33} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13} \quad \Gamma_{23}]^T \\ \mathbf{S} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{23}]^T \end{aligned} \quad (10-1)$$

10.2.1.2 Mikroelemente

Das Makroelement setzt sich aus M Mikroelementen zusammen. Die Anzahl M kann dabei beliebig groß sein. Diese haben jeweils ihre eigenes Materialverhalten. Die mikroskopischen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen weichen im Allgemeinen von den makroskopischen Materialhauptachsen ab (Bild 10.1). Alle Größen bezogen auf das Mikroelement werden mit Kleinbuchstaben geschrieben. Die mikroskopischen Verzerrungskomponenten werden bezüglich der mikroskopischen Materialhauptachsen angegeben:

$$\mathbf{e}' = [e_{1'1'} \quad e_{2'2'} \quad e_{3'3'} \quad \gamma_{1'2'} \quad \gamma_{1'3'} \quad \gamma_{2'3'}]^T \quad (10-2)$$

Die zugehörigen Spannungen eines Mikroelements sind:

$$\mathbf{s}' = [s_{1'1'} \quad s_{2'2'} \quad s_{3'3'} \quad s_{1'2'} \quad s_{1'3'} \quad s_{2'3'}]^T \quad (10-3)$$

Die mikroskopischen Spannungen und Verzerrungen im lokalen Materialhauptachsensystem lassen sich über die Transformationsmatrix \mathbf{T} , die eine Funktion z.B. der neun Koeffizienten c_{ij} oder der drei Drehwinkel α, β, ϕ ist (siehe Kap. 9.7 und Box B.13), bezüglich des makroskopischen Materialhauptachsensystems darstellen. Zu beachten ist, dass diese Transformationsmatrix für jedes Mikrovolumenelement i.A. unterschiedlich ist.

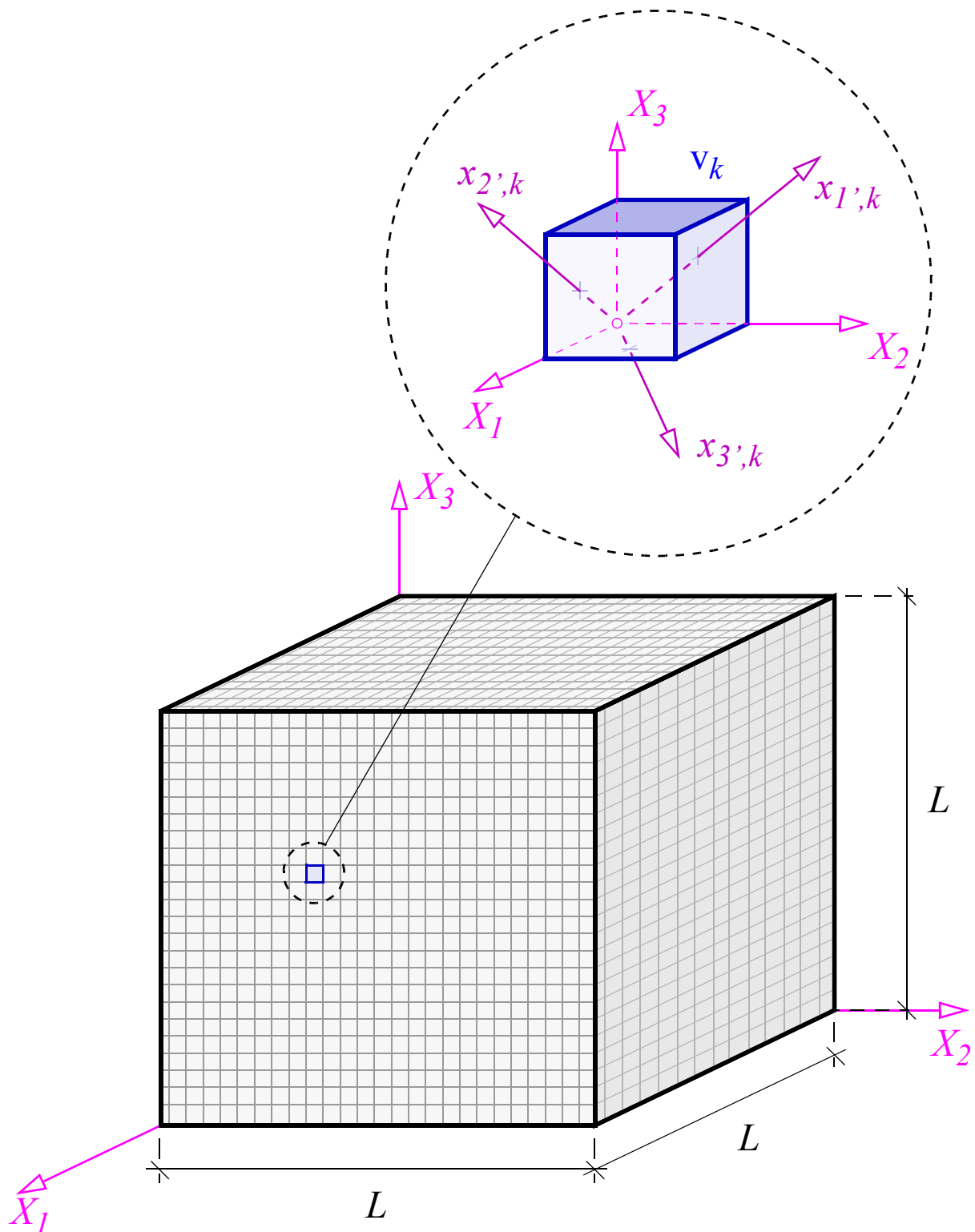


Bild 10.1 Darstellung des heterogen aufgebauten Makroelements: die M Mikroelemente (exemplarisch ist das Element mit dem Index k blau hervorgehoben) haben unterschiedliches Materialverhalten; dieses ist richtungsabhängig und wird bezüglich der $\{x_{1',k}, x_{2',k}, x_{3',k}\}$ -Materialhauptachsen beschrieben

10.2.2 Mikroelement mit Spannungsnullbedingung

Von den sechs im $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsensystem angegebenen Spannungskomponenten des Mikroelements sollen $6-n_a$ Komponenten im Laufe des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs stets null sein, es gilt:

$$\mathbf{s}_b' = \mathbf{0} \quad (10-4)$$

Die verbleibenden n_a Spannungskomponenten \mathbf{s}_a' unterliegen nicht diesem Zwang und können beliebige Werte annehmen. Je nach Annahme der Spannungsnullbedingungen verhält sich das Mikroelement z.B. wie ein Fachwerkstab (*FSZ*), ein konstant abgeschertes und/oder axial verformtes Balkenelement (*BSZ*) oder ein Scheibenelement unter ebenem Spannungszustand (*ESZ*). Durch Rücktransformation in das globale Bezugssystem ergeben sich die globalen Spannungskomponenten zu:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{s}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a' \quad (10-5)$$

10.2.3 Kinematischer Zusammenhang

10.2.3.1 Zusammenhang zwischen mikroskopischen und makroskopischen Verzerrungen

Der makroskopische Verzerrungszustand ist konstant und wird durch \mathbf{E} vorgegeben. Aufgrund der vorgegebenen Nullspannungen (10-4) werden die Verzerrungen \mathbf{e} des Mikroelements in aktive Komponenten \mathbf{e}_a' und begleitende, passive Komponenten \mathbf{e}_b' aufgeteilt. Zur Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs des Mikroelements müssen nur die aktiven Verzerrungskomponenten \mathbf{e}_a' vorgegeben werden. Der Zusammenhang mit den globalen makroskopischen Verzerrungen \mathbf{E} ergibt sich mit der Filtermatrix \mathbf{P}_a zu:

$$\mathbf{e}_a' = \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} \quad (10-6)$$

Mit diesen Verzerrungen werden über das Materialmodell des Mikroelements die Spannungen \mathbf{s}_a' berechnet; zusätzlich gibt die Materialroutine bei Bedarf die begleitenden Verzerrungsanteile \mathbf{e}_b' aus. Diese begleitenden Verzerrungsanteile bilden sich für jedes Mikroelement ungehindert aus, wobei kein Zusammenhang mit den globalen Verzerrungen besteht:

$$\mathbf{e}_b' \neq \mathbf{P}_b \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} \neq \mathbf{T}^T \mathbf{e}' = \mathbf{T}^T (\mathbf{P}_a^T \mathbf{e}_a' + \mathbf{P}_b^T \mathbf{e}_b') \quad (10-7)$$

Das hat zur Folge, dass innerhalb des Makroelements partielle Inkompatibilitäten in der Verformungsgeometrie zwischen den einzelnen Mikroelementen entstehen, die bewusst zugelassen werden.

Werden keine Nullspannungsbedingungen festgelegt, ist $\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{(6,6)}$ und für das betrachtete Mikroelement gilt $\mathbf{e} = \mathbf{E}$. Diese einfachstmögliche Verformungsgeometrieannahme wurde erstmals von Woldemor Voigt (1889) zur Berechnung von Polykristallen formuliert.

10.2.3.2 Implikation der kinematischen Festlegung

Aufgrund des festgelegten kinematischen Zusammenhangs ist die räumliche Anordnung der Mikroelemente innerhalb des Makrovolumens nicht von Relevanz. In Bild 10.1 können die Mikroelemente beliebig vertauscht werden, ohne den resultierenden Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des Makroelements zu ändern. Von Einfluss sind

- das jeweilige mikroskopische Materialverhalten,
- der Anteil des mikroskopischen Volumens am Gesamtvolumen und
- die Ausrichtung der mikroskopischen Materialhauptachsen.

Durch diese festgelegte Verformungsgeometrie wirkt das heterogen zusammengesetzte Makroelement als ein System M parallelgeschalteter Mikroelemente.

10.2.3.3 Einfaches Beispiel zur Illustration der partiellen Inkompatibilität

Für das Mikroelement wird ein FSZ mit den zugehörigen Filtermatrizen aus Gleichung (7-8) festgelegt. Im globalen Koordinatensystem werden die makroskopischen Verzerrungen \mathbf{E} vorgegeben. In das materielle Koordinatensystem transformiert, ergeben sich die Verzerrungskomponenten zu:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} = [E_{1'1'}, E_{2'2'}, E_{3'3'}, \Gamma_{1'2'}, \Gamma_{1'3'}, \Gamma_{2'3'}]^T \neq \mathbf{0} \quad (10-8)$$

Die einzige aktive Verzerrung des Mikroelements ist die axiale Normalverzerrung, die sich aufgrund der affinen Verzerrung aus den makroskopischen Verzerrungen zu

$$\mathbf{e}_a' = \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} = \mathbf{P}_a \mathbf{E}' = [E_{1'1'}] = [e_{1'1'}] \quad (10-9)$$

ergibt. Wird für das Mikroelement isotrop elastisches Materialverhalten angenommen, ergibt sich die aktive, axiale Normalspannungskomponente mit dem E-Modul zu $\mathbf{s}_a' = E \mathbf{e}_a'$. Die begleitenden Verzerrungen des Mikroelements sind:

$$\mathbf{e}_b' = [e_{2'2'}, e_{3'3'}, \gamma_{1'2'}, \gamma_{1'3'}, \gamma_{2'3'}]^T = -\nu e_{1'1'} [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (10-10)$$

Diese begleitenden Verzerrungskomponenten des Mikroelements entsprechen nicht(!) den makroskopisch vorgegebenen Verzerrungskomponenten $\mathbf{P}_b \mathbf{E}'$ (10-7).

10.3 Konstitutive Relationen eines Mikroelements

10.3.1 Elastisches Materialverhalten

Die elastische Verzerrungsenergiedichte eines Mikroelements ist:

$$\Psi_{el} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_a' - \mathbf{e}_{a,pl}')^T \mathbf{c}_a' (\mathbf{e}_a' - \mathbf{e}_{a,pl}') = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} - \mathbf{e}_{a,pl}')^T \mathbf{c}_a' (\mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} - \mathbf{e}_{a,pl}') \quad (10-11)$$

Mit den kinematischen Zusammenhängen (10-6) ist die Verzerrung \mathbf{e}_a durch die Makroverzerrung \mathbf{E} ausdrückbar; \mathbf{c}_a' ist die reduzierte mikroskopische elastische Materialsteifigkeitsmatrix. Durch Ableitung von (10-11) ergibt sich die Spannung im mikroskopischen Materialhauptachsensystem:

$$\mathbf{s}_a' = \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{e}_a'} = \mathbf{c}_a' (\mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E} - \mathbf{e}_{a,pl}') \quad (10-12)$$

10.3.2 Mikroskopische Versagensbedingungen

Das elasto-plastische Materialverhalten des Mikroelements basiert auf dem mechanischen Modell aus Teil I und II dieser Arbeit. Der Versagensbeginn wird durch eine oder mehrere Funktionen beschrieben, denen jeweils ein Versagensmechanismus zugeordnet ist. Je Mikroelement gibt es n voneinander unabhängige Versagensbedingungen $f_i(\mathbf{s})$. Mit diesen Funktionen lassen sich der erlaubte Bereich und die elastische Grenzfläche des Mikroelements im jeweiligen mikroskopischen \mathbf{s} - Spannungsraum definieren:

Erlaubter Bereich des Mikroelements:

$$\mathbf{e} = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^6 \mid f_i(\mathbf{s}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \} \quad (10-13)$$

Elastische Grenzfläche des Mikroelements:

$$\partial \mathbf{e} = \{ \mathbf{s} \in \mathbf{e} \mid f_i(\mathbf{s}) = 0, \text{ für mind. ein } i \in \{1, 2, \dots, n\} \}$$

10.3.3 Dissipation

Die Dissipation entspricht der verrichteten plastischen Arbeit:

$$dD = dw - d\Psi_{el} = \mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl} = dw_{pl} \quad (10-14)$$

Konkrete Materialmodelle, d.h. mit konkret vorgegebenen Materialsteifigkeitsmatrizen und Versagensbedingungen, werden bei den Beispielrechnungen eingeführt.

10.4 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen

10.4.1 Makroskopische Spannungen

Die gesuchten makroskopischen Spannungen \mathbf{S} werden aus den mikroskopischen Spannungen \mathbf{s} mit der Idee der Arbeitsäquivalenz, siehe Zaoui (1997) oder Dormieux/Kondo/Ulm (2006), berechnet:

$$\mathbf{S}^T \delta \mathbf{E} V = \int_V (\mathbf{s}')^T \delta \mathbf{e}' dV = \int_V (\mathbf{s}_a')^T \delta \mathbf{e}_a' dV \quad (10-15)$$

Die zu den makroskopischen Verzerrungen arbeitskonjugierten Spannungen \mathbf{S} ergeben sich mit der kinematischen Festlegung aus (10-6) zu:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{s} dV = \langle \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_a' \rangle \quad (10-16)$$

Für die Berechnung der makroskopischen (oder auch äquivalenten makroskopischen) Größen wird der Operator

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\bullet) dV \quad (10-17)$$

eingeführt. Besteht das makroskopische Element aus Mikroelementen mit bereichsweise konstanten Eigenschaften, kann der Operator durch ein diskretes Summenzeichen ersetzt werden.

10.4.2 Äquivalente konstitutive Relationen des Makroelements

Aus den Materialbeziehungen der Mikroelemente werden die äquivalenten konstitutiven Zusammenhänge des Makroelements hergeleitet.

10.4.2.1 Makroskopische elastische Verzerrungsenergiedichte

Die elastische Verzerrungsenergiedichte Ψ des Makrovolumenelements mal dem Volumen V entspricht der Summe der elastischen Verzerrungsenergiedichte ψ_{el} aller Mikroelemente (jeweils mal dem Volumen dV):

$$\Psi = \langle \psi_{el} \rangle \quad (10-18)$$

10.4.2.2 Äquivalente Größen der makroskopischen elasto-plastischen Materialgleichungen

Der Zusammenhang zwischen den makroskopischen Spannungen \mathbf{S} und den makroskopischen Verzerrungsgrößen ist:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl}) = \mathbf{C}\mathbf{E}_{el} \quad (10-19)$$

Auf zwei vollkommen gleichwertige Arten kommt man auf die obige Gleichung und die zum Teil noch nicht definierten äquivalenten makroskopischen Größen:

- Bei der ersten Möglichkeit wird die konstitutive Beziehung des Mikrovolumens aus (10-12) in die Gleichung (10-16) zur Berechnung der makroskopischen Spannungen eingesetzt.
- Alternativ dazu kann die elastische Verzerrungsenergiedichte des Verbundelementes aus Gleichung (10-18) nach der Verzerrung \mathbf{E} abgeleitet werden und man erhält:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \left\langle \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E}} \right\rangle = \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl}) = \mathbf{C}\mathbf{E}_{el} \quad (10-20)$$

In beiden Fällen lassen sich aus der resultierenden Gleichung die äquivalenten makroskopischen Größen definieren:

Makroskopische elastische Materialsteifigkeitsmatrix :

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{c}_a' \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \rangle$$

Makroskopischer plastischer Verzerrungsanteil :

$$\mathbf{E}_{pl} = \mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{c} \mathbf{e}_{pl} \rangle = \mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{c}_a' \mathbf{e}_{a,pl}' \rangle \quad (10-21)$$

Makroskopischer elastischer Verzerrungsanteil :

$$\mathbf{E}_{el} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl} = \mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{c}_a' \mathbf{e}_{a,el}' \rangle$$

10.4.2.3 Eigenspannungen zufolge der plastischen Verzerrungen

Es ist eine Aufteilung der mikroskopischen Spannungen \mathbf{s} in einen Anteil, der sich aus den makroskopischen Spannungen ergibt, und einem Anteil aus Eigen- bzw. Residualspannungen \mathbf{s}_{re} möglich. Die Definition des Eigenspannungsanteils je Mikroelement ist:

$$\mathbf{s}_{a,re}' = \mathbf{c}_a' (\mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E}_{pl} - \mathbf{e}_{a,pl}') = \mathbf{c}_a' (\mathbf{e}_{a,el}' - \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{E}_{el}) = \mathbf{s}_a' - \mathbf{c}_a' \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \quad (10-22)$$

Mit der Mittelung von (10-22) unter Verwendung von Gleichung (10-5), ergibt sich für die Eigenspannungsanteile aller Mikrovolumenelemente:

$$\langle \mathbf{s}_{re} \rangle = \langle \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{s}_{a,re} \rangle = \mathbf{0} \quad (10-23)$$

10.4.2.4 Aufspaltung der elastischen Verzerrungsenergiedichte

Mit der elastischen Verzerrungsenergiedichte des Mikroelementes (10-11) ergibt sich - physikalisch zwingend - unter Verwendung des Mittelungsoperators die elastische Verzerrungsenergiedichte der Gesamtstruktur zu:

$$\Psi = \langle \Psi_{el} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{el}^T \mathbf{C} \mathbf{E}_{el} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{s}_{a,re} {}^T (\mathbf{c}_a {}^T)^{-1} \mathbf{s}_{a,re} \rangle = \Psi_{el} + \Psi_{re} \quad (10-24)$$

Der erste Term gibt den Anteil Ψ_{el} an, der bei Entlastung des Makroelements auf $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, als mechanische Arbeit wiedergewonnen werden kann. Der zweite Term Ψ_{re} wird als „eingefrorene“ elastische Energiedichte bezeichnet und gibt den Anteil der elastischen Verzerrungsenergiedichte Ψ , der bei Entlastung aufgrund der plastischen Verzerrungen bzw. der Eigenspannungsanteile im Makroelement bzw. in den einzelnen Mikroelementen gespeichert bleibt, aber nicht in Wärme umgewandelt wird, an. Aus der Ableitung von Ψ_{el} nach der Verzerrung \mathbf{E} bzw. \mathbf{E}_{el} ergibt sich die makroskopische Spannung (10-20).

10.4.2.5 Äquivalente makroskopische Dissipation

Die Dissipation pro Makrovolumen ist:

$$dD_{makro} = \langle dD \rangle = \langle \mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl} \rangle \quad (10-25)$$

Mit der zuvor gezeigten Aufteilung (10-24) der elastischen Energiedichte lässt sich die makroskopische Dissipation in alternativer Form mithilfe der makroskopischen plastischen Verzerrung und der Eigenspannungsanteile $\mathbf{s}_{a,re}$ anschreiben:

$$dD_{makro} = dW - d(\Psi_{el} + \Psi_{re}) = dW_{pl} - d\Psi_{re} = \mathbf{S}^T d\mathbf{E}_{pl} - \frac{1}{2} d \langle \mathbf{s}_{a,re} {}^T (\mathbf{c}_a {}^T)^{-1} \mathbf{s}_{a,re} \rangle \quad (10-26)$$

10.4.3 Makroskopische Versagensbedingungen & Versagensbeginn des Makroelements

Zur Vereinfachung der Darstellung soll festgelegt werden, dass das Makroelement aus einer diskreten Anzahl M Mikroelementen, die mit dem Index k versehen werden, aufgebaut ist. Jedes Mikroelement hat n_k Versagensbedingungen $f_i(\mathbf{s}_k)$.

10.4.3.1 Makroskopische Versagensbedingungen

In den Versagensbedingungen jedes Mikroelements werden die mikroskopischen Spannungen \mathbf{s}_k durch den Ausdruck (10-5) mit (10-22) ersetzt. Man erhält die makroskopischen Versagensbedingungen $F_{i,k}$ als Funktionen in den makroskopischen Spannungen:

$$F_{i,k}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k}) = f_i(\mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{P}_{a,k}^T \mathbf{c}_{a,k}' \mathbf{P}_{a,k} \mathbf{T}_k^{-T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{s}_{re,k}) \quad (10-27)$$

Aus den M Mikroelementen mit jeweils n_k Versagensbedingungen ergeben sich für das makroskopische Element in Summe

$$N = \sum_{k=1}^M n_k \quad (10-28)$$

voneinander unabhängige Versagensbedingungen $F_{i,k}$. Da die Materialsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{c}_{a,k}'$ und \mathbf{C} positiv definit sind, sind die Funktionen $F_{i,k}$ (ebenso wie die Ausgangsfunktionen f_i) konvex. Die makroskopischen Versagensbedingungen sind neben den makroskopischen Spannungen \mathbf{S} auch Funktionen der Eigenspannungen $\mathbf{s}_{re,k}$ der einzelnen Mikroelemente. Nach Gleichung (10-22) sind die Eigenspannungen wiederum von den plastischen Verzerrungen abhängig.

Anmerkung: Es wird ein Makroelement betrachtet, das aus mehreren Mikroelementen, wobei jedes Mikroelement nur eine einzige Versagensbedingung und zugehörigen Versagensmechanismus haben soll, aufgebaut ist. Dabei ergeben sich ebensoviele makroskopische Versagensbedingungen, wie Mikroelemente vorhanden sind. Trotzdem handelt es sich dabei nicht um ein Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell, wie es in dieser Arbeit begrifflich festgelegt wurde.

10.4.3.2 Erlaubter Bereich und elastische Grenzfläche des Makroelements

Der erlaubte Bereich und die elastische Grenzfläche des Makroelements sind im sechsdimensionalen makroskopischen Spannungsraum definiert:

Elastischer Bereich des Makroelements :

$$\mathbb{E} = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{R}^6 \mid F_{i,k}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n_k\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, M\} \right\} \quad (10-29)$$

Elastische Grenzfläche des Makroelements :

$$\partial \mathbb{E} = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{E} \mid F_{i,k}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k}) = 0, \text{ für mind. ein } i \in \{1, 2, \dots, n_k\}, k \in \{1, 2, \dots, M\} \right\}$$

Der erlaubte Bereich und die elastische Grenzfläche waren bisher immer fix im jeweiligen Spannungsraum positioniert, z.B. sind die erlaubten Bereiche \mathbf{e}_k der einzelnen Mikroelemente aus Gleichung (10-13) im zugehörigen \mathbf{s}_k -Spannungsraum unverrückbar verankert. Das ist bei \mathbb{E} aus (10-29) nicht mehr der Fall; durch die zusätzliche Abhängigkeit der Versagensbedingungen von $\mathbf{s}_{re,k}$ kann sich, je nach Ausbildung von plastischen Verzerrungen in den einzelnen Mikroelementen, die Lage der Versagensbedingungen $F_{i,k} = 0$ im makroskopischen Spannungsraum ändern. Eine solche Positionsänderung ist aus klassischen Verfestigungsmodellen, wie z.B. der kinematischen Verfestigung, bekannt.

10.4.3.3 Versagensbeginn

Es wird angenommen, dass bei Belastungsbeginn ($t = 0$) alle M Mikroelemente frei von plastischen Verzerrungen sind, d.h. $\mathbf{e}_{pl,k} = \mathbf{0}$, und die M Mikroelemente sind eigenspannungsfrei. Damit ist auch die äquivalente plastische Verzerrung \mathbf{E}_{pl} null. Es wird nun ein Verzerrungszustand \mathbf{E} vorgegeben und solange gesteigert, bis eines der Mikroelemente seine elastische Grenzfläche erreicht, d.h. $F_{i,k} = f_i(\mathbf{s}_k) = 0$ gilt. Bei dieser Verzerrung beginnt das plastische Versagen des Mikroelements und auch des Makroelements. Dieser Versagensbeginn wird im \mathbf{S} -Spannungsraum mit

Elastischer Bereich des Makroelements bei $\mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}$:

$$\mathbb{E}^{t=0} = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{R}^6 \mid F_{i,k}^{t=0}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n_k\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, M\} \right\} \quad (10-30)$$

Elastische Grenzfläche des Makroelements bei $\mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}$:

$$\partial\mathbb{E}^{t=0} = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{E}^{t=0} \mid F_{i,k}^{t=0}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}) = 0, \text{ für mind. ein } i \in \{1, 2, \dots, n_k\}, k \in \{1, 2, \dots, M\} \right\}$$

beschrieben. Zur Unterscheidung bzw. um die Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte hervorzuheben, werden die Versagensbedingungen und der erlaubte Bereich bei $\mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}$ zusätzlich mit hochgestelltem t geschrieben.

10.4.3.4 Plastische Tragspannungen - Ultimate Limit State

Die vollplastische Traglast, der *Ultimate Limit State*, des Makroelements wird erreicht, wenn alle Mikroelemente einen plastischen Tragspannungszustand erreichen. Ein Mikroelement hat den Tragspannungszustand erlangt, wenn sich die Lage der Spannungen \mathbf{s}_k auf der elastischen Grenzfläche $\partial\mathbf{e}_k$ bei weiterer Erhöhung der eingepprägten Verzerrungen nicht mehr ändert; trifft das bei allen(!) Mikroelementen zu, ändern sich auch die makroskopischen Spannungen \mathbf{S} nicht mehr und man hat einen makroskopischen Tragspannungszustand erreicht.

Bleibt ein einziges Mikroelement im Laufe der vorgegebenen Verzerrung durchwegs elastisch, steigt der makroskopische Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang monoton an und das Makroelement erreicht keinen Tragspannungszustand.

10.5 Das Einkornaggregat - eine spezielle Mikrostruktur

10.5.1 Systembeschreibung & spezielle Modellannahmen

10.5.1.1 Begriffsbildung

Ein Einkornaggregat ist eine spezielle einfache Mikrostruktur, bei der sich das Makroelement aus einem einzigen Mikroelementtyp mit gleichen, aber richtungsabhängigen, mechanischen Materialeigenschaften zusammensetzt. Die Orientierungen der Mikroelemente, die als Funktionen der drei Winkel α , β und ϕ (9-52) angegeben werden, ändert sich kontinuierlich. Um alle möglichen räumlichen Orientierungen des materiellen Dreibeins beschreiben zu können, sind die Winkel in den Wertebereichen

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \quad \phi \in [-\pi, \pi] \quad (10-31)$$

definiert. Diese drei Winkel beschreiben den Aufbau der Transformationsmatrix \mathbf{T} (Box B.13). Durch die Orientierungsverteilung der Mikroelemente ergibt sich der strukturelle Aufbau des Makroelements.

10.5.1.2 Volumenfraktionsanteil

Das differentielle Volumenelement dV verhält sich zum makroskopischen Gesamtvolumen V , wie das differentielle Einheitskugelvolumenelement $1/3 \cos\beta \, d\alpha \, d\beta$ mal $d\phi$ zur Integration dieser Größe über den gewählten Definitionsbereich der drei Winkel (= Einheitskugelvolumen mal 2π), siehe Bunge (1969) und Engler/Randle (2010):

$$\frac{dV}{V} = \frac{\cos\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\phi}{\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \cos\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\phi} = \frac{1}{8\pi^2} \cos\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\phi \quad (10-32)$$

Dieser Ausdruck erlaubt eine alternative Interpretation: dV/V verhält sich wie das differentielle Einheitskugelflächelement $\cos\beta \, d\alpha \, d\beta$ mal $d\phi$ durch die Einheitskugelfläche 4π mal 2π .

10.5.1.3 Struktureller Aufbau und Orientierungsverteilungsfunktion

Betrachtet man die Orientierungen der $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen der Mikroelemente, kommt es vor, dass manche Orientierungen mehrfach auftreten bzw. manche Orientierungsbereiche einen größeren Anteil am Makrovolumen einnehmen, während andere Mikroelementorientierungen niemals auftreten. Diese systematische Untersuchung der Orientierungsverteilungen wird z.B. in der Kristallographie Texturanalyse genannt, Engler/Randle (2010), und lässt sich anhand der Zeichnung in Bild 10.1 anschaulich beschreiben:

Das Makrovolumen V wird in sehr viele, gleichgroße Subvolumina ΔV zerteilt. Bei jedem dieser Elemente wird die Ausrichtung der Materialhauptachsen relativ zu den globalen Achsen, die hier parallel zu den Quaderkanten verlaufen, bestimmt und dokumentiert. Nach dieser Abzählprozedur hat man die Information, welche Orientierungsbereiche wieviel Anteil vom Gesamtvolumen einnehmen. Bei einer verschmierten Betrachtung wird diese diskrete Orientierungsverteilung durch eine sogenannte Orientierungsverteilungsfunktion $\Omega(\alpha, \beta, \phi)$ angegeben. Diese Funktion wird mit *ODF* (*O*rientation *D*istribution *F*unction) abgekürzt. Über das Gesamtvolumen integriert, muss die *ODF* eins ergeben:

$$\int_V \Omega dV = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \Omega(\alpha, \beta, \phi) \cos \beta d\alpha d\beta d\phi = 1 \quad (10-33)$$

Spezielle, gewünschte oder wirklich gemessene bzw. vorhandene Symmetrien lassen sich mit dieser Funktion abbilden. Im Sonderfall $\Omega = 1$ hat man eine Gleichverteilung der Mikroelementorientierungen innerhalb des Makrovolumens oder anschaulich und in Anlehnung an die Darstellung in Bild 10.1 formuliert: Jede Orientierung im Winkeldefinitionsbereich (10-31) tritt genau einmal auf. Die Lage des Mikroelements im Makrovolumen wird (wie bereits zuvor) durch dieses Modell nicht erfasst, nur die volumenanteilmäßige Orientierungsverteilung.

10.5.2 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen

10.5.2.1 Mittelungsoperator

Für die Berechnung der äquivalenten Größen (Kap. 10.4) muss in den Operator aus Gleichung (10-17) der Volumenfraktionsanteil aus Gleichung (10-32) eingesetzt werden:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\bullet) dV = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} (\bullet) \Omega(\alpha, \beta, \phi) \cos \beta d\alpha d\beta d\phi \quad (10-34)$$

10.5.2.2 Versagensbedingungen

Das konstituierende Mikroelement des Einkornaggregats hat n Versagensbedingungen f_i . Durch die kontinuierliche Beschreibung mit $M \rightarrow \infty$ Mikroelementen geht die Anzahl der makroskopischen Versagensbedingungen $F_{i,k}$ gegen unendlich.

10.5.3 Numerische Integration - Diskretisierung

10.5.3.1 Allgemein

Bei der Berechnung der äquivalenten Größen muss das Integral (10-34) gelöst werden. Eine analytische Lösung ist nur in wenigen Sonderfällen möglich. Im Allgemeinen wird ein numerisches Verfahren zur approximativen Berechnung verwendet. Dabei wird der Integraloperator durch eine diskrete Summe ersetzt:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} (\bullet) \Omega(\alpha, \beta, \phi) \cos \beta d\alpha d\beta d\phi \approx \frac{1}{8\pi^2} \sum_{r=1}^{M_r} \sum_{s=1}^{M_s} w_r w_s \Omega(\alpha_r, \beta_r, \phi_s) (\bullet) \Big|_{\alpha_r, \beta_r, \phi_s} \quad (10-35)$$

Als Ergebnis der approximativen Integration ergibt sich damit ein Makroelement mit $M = M_r M_s$ Mikroelementen mit jeweils der Orientierung $(\alpha_r, \beta_r, \phi_s)$ und einem zugeordneten Volumengewichtungsanteil, der sich aus dem Produkt der Wichtungsfaktoren w_r, w_s und der Auswertung der *ODF* bei ebendieser Orientierung dividiert durch $8\pi^2$ ergibt.

Der Ausdruck

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (\bullet) \cos \beta d\alpha d\beta \approx \sum_{r=1}^{M_r} w_r (\bullet) \Big|_{\alpha_r, \beta_r} \quad (10-36)$$

des Integrals in Gleichung (10-35) entspricht der Integration über eine Einheitskugelfläche. Für dieses Integral gibt es verschieden Vorschriften zur approximativen Berechnung. Eine Vielzahl dieser Berechnungsvorschriften mit Vorgabe des Gewichtungsterms w_r und den zugehörigen Orientierungen α_r und β_r finden sich in Stroud (1971) auf den Seiten 294 bis 303. Alternative Gewichtungen und Orientierungen zur Berechnung des Integrals (10-36) geben Bažant/Oh (1986) an. Für die zusätzliche Integration nach ϕ werden die Gewichtungen und die zugehörigen Orientierungen aus der Gauss-Quadraturformel (z.B. Zienkiewicz/Taylor (2000), S. 220) verwendet. Aus der Kombination dieser beiden numerischen Integralberechnungsverfahren mit den zugehörigen Winkelorientierungen und Wichtungen ist Gleichung (10-35) aufgebaut.

Die hier verwendeten Wichtungen und die Winkel der Integrationspunkte sind in den beiden anschließenden Abschnitten angeführt.

10.5.3.2 Gauss-Quadratur

Die Wichtungen w_s und zugehörigen Winkel ϕ_s (in Radianten angegeben) im Definitionsbereich $\phi_s \in [-\pi, +\pi]$ der Gauss-Quadratur bei z.B. $M_s = 12$ Integrationspunkten sind in Box 10.1 angegeben.

s	ϕ_s/π [rad]	w_s
1, 12	$\pm 0.981\ 560\ 634\ 246$	0.148 205 690 222
2, 11	$\pm 0.904\ 117\ 256\ 370$	0.335 959 800 926
3, 10	$\pm 0.769\ 902\ 674\ 194$	0.502 900 900 950
4, 9	$\pm 0.587\ 317\ 954\ 286$	0.638 269 295 241
5, 8	$\pm 0.367\ 831\ 498\ 998$	0.733 538 437 456
6, 7	$\pm 0.125\ 233\ 408\ 511$	0.782 718 528 790

Box 10.1 Gauss-Quadratur mit $M_s = 12$ Stützstellen: Winkelkoordinate ϕ_s (bezogen auf π) und zugehörigen Wichtungskoeffizienten w_s

10.5.3.3 McLaren Integrationsregel mit 50 Integrationspunkten

Zur näherungsweisen Lösung des Kugeloberflächenintegrals (10-36) wird das Verfahren von McLaren mit 50 Integrationspunkten verwendet. Die Kugel hat den Radius eins und damit die Oberfläche 4π . Die Integrationspunkte liegen auf der Kugeloberfläche; deren $\{x, y, z\}$ -Koordinaten inkl. der Integrationsgewichte sind in Stroud (1971) auf S. 301 angegeben und lauten:

$$\begin{aligned}
 6 \quad \text{Punkte: } & \begin{cases} \{\pm a & 0 & 0\} \\ \{0 & \pm a & 0\}, \\ \{0 & 0 & \pm a\} \end{cases} & a = 1 & w_{1..6} & = \frac{9216}{725760}(4\pi) \\
 12 \quad \text{Punkte: } & \begin{cases} \{\pm b & \pm b & 0\} \\ \{\pm b & 0 & \pm b\}, \\ \{0 & \pm b & \pm b\} \end{cases} & b = \frac{1}{\sqrt{2}}, & w_{7..18} & = \frac{16384}{725760}(4\pi) \\
 8 \quad \text{Punkte: } & \{\pm c & \pm c & \pm c\}, & c = \frac{1}{\sqrt{3}}, & w_{19..26} & = \frac{15309}{725760}(4\pi) \\
 24 \quad \text{Punkte: } & \begin{cases} \{\pm d & \pm d & \pm e\} \\ \{\pm d & \pm e & \pm d\}, \\ \{\pm e & \pm d & \pm d\} \end{cases} & d = \frac{1}{\sqrt{11}}, e = \frac{3}{\sqrt{11}}, & w_{27..50} & = \frac{14641}{725760}(4\pi)
 \end{aligned} \tag{10-37}$$

Diese 50 Einheitsvektoren werden alternativ durch die 50 Winkelpaare α_r und β_r beschrieben. Diese Winkelpaare sind in Box 10.2 angegeben und werden bei der approximativen Berechnung des Integrals (10-35) mit den zugehörigen Wichtungskoeffizienten benötigt.

10.5.3.4 Anmerkungen zu möglich auftretenden Symmetrien

Mit den beiden oben angeführten Integrationsregeln ergibt sich ein Makroelement mit $M = M_r M_s = 600$ Mikroelementen mit jeweils unterschiedlicher Orientierung. Für die Berechnung des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs muss bei allen 600 Mikroelementen die zugehörige Materialroutine durchlaufen werden.

Besitzt das Materialmodell des Mikroelements symmetrisches Materialverhalten, lassen sich die Anzahl der benötigten Integrationspunkte und der Berechnungsaufwand reduzieren, da manche Integrationspunkte gleiche Orientierungen ergeben. Exemplarisch sei hier der Fall von Mikroelementen mit orthotroper Materialsymmetrie betrachtet. Daraus folgt, dass nur der eingeschränkte Winkeldefinitionsbereich

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \phi \in [0, \pi] \tag{10-38}$$

in dem keine Orientierungen mit gleichem Materialverhalten auftreten, betrachtet werden muss. Die Halbkugeloberfläche ist $A_O = 2\pi$, die Länge des Wertebereiches von ϕ ist π . Das Referenzvolumen $V = A_O \pi$ ergibt sich damit zu $2\pi^2$ und der Operator - sofern auch die

ODF der orthotropen Symmetrie unterliegt - zu:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{\pi} (\bullet) \Omega(\alpha, \beta, \phi) \cos \beta d\alpha d\beta d\phi \approx \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^{M_r/2} \sum_{s=1}^{M_s} w_r w_s \Omega(\alpha_r, \beta_r, \phi_s) (\bullet) \Big|_{\alpha_r, \beta_r, \phi_s} \quad (10-39)$$

Man sieht, das bei der Integration über die Kugeloberfläche nur mehr Integrationspunkte, die auf einer der beiden Hemisphären liegen, betrachtet werden müssen. Damit reduzieren sich die Integrationspunkte der oben angeführten McLaren Integrationsregel auf die Hälfte ($M_r/2 = 25$); die Punkte 26 bis 50 in Box 10.2 brauchen nicht berücksichtigt werden. Die Gauss-Punkte für die Integration nach dem Winkel ϕ müssen nur mehr im Definitionsbereich $\phi_s \in [0, \pi]$ gewählt werden; dabei kann ebenso die Anzahl verringert werden, wobei die Genauigkeit in diesem Integrationsteil aber sogar erhöht wird.

Die Anzahl $M = M_s M_r / 2$ der Mikroelementorientierungen, die berechnet werden sollen, ist bei vorliegender Symmetrie - je nach Wahl von M_s - um mindestens die Hälfte verringerbar. **Achtung:** Zur Berechnung von (10-39) werden die Wichtungen w_r aus Box 10.2 genommen; die Wichtungen w_s und die zugehörigen Winkel ϕ_s müssen neu berechnet werden.

10.5.3.5 Allgemeine Bemerkungen zur Wahl des numerischen Integrationsverfahrens

Wie bereits erwähnt, gibt es unterschiedliche Vorschriften zur näherungsweise Lösung des Kugeloberflächenintegrals. Bažant/Oh (1986) entwickeln im Anwendungsrahmen des sogenannten Microplane Modells eigene Integrationsmethoden und vergleichen diese mit bereits bestehenden Verfahren. Im Fall des Microplane Modells werden die von Bazant und Oh entwickelten Integrationsregeln mit 42 Integrationspunkten (mit bzw. ohne orthogonaler Symmetrie) am häufigsten verwendet, z.B. in der Arbeit von Leukart (2005).

Durch die Wahl des Integrationsverfahrens und der damit verbundenen Anzahl an Integrationspunkten soll ein Mittelmaß zwischen Rechenaufwand (geringstmögliche Zahl an Integrationspunkten), Approximationsgenauigkeit des mechanischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs (größere Anzahl an Integrationspunkten verringert dieses Abweichungen) gefunden werden. Diese Effizienzüberlegungen und Vergleichsuntersuchungen werden in Voraussicht auf eine zig-fache Wiederholung dieser Strukturrechnung in jedem Integrationspunkt eines FE-Netztes gemacht und sind essentiell, um den rechnerischen Aufwand zu reduzieren.

Eine durch Gleichverteilung der Mikroelemente sich ergebende Symmetrie auf Makroebene erhält man nur bei analytisch-exakter Integration. Durch das approximative Integrationsverfahren wird die Symmetrie nur angenähert. Mit der Erhöhung der Integrationsordnung wird diese Annäherung zwar sukzessive verbessert, die exakt mathematische Erfüllung der Symmetriebedingung wird aber erst im Grenzfall mit unendlich vielen Integrationspunkten (was der exakten Integration entspricht) erreicht.

Schränkt man für das Einkornaggregatmodell das mikroskopische Materialmodell und die

ODF auf orthotrope bzw. transversal isotrope Symmetrie oder gar Isotropie ein, ist diese Voraussetzung im numerischen Integrationsverfahren zu berücksichtigen und die Anzahl der Integrationspunkte über die Kugel­fläche um die Hälfte zu reduzieren.

r	α_r/π [rad]	β_r/π [rad]	w_r
1	0.0	0.5	0.159 572 960 182
2	0.0	0.0	
3	0.5		
4, 5	0.0	± 0.25	0.283 685 262 546
6, 7	0.5		
8	0.25	0.0	
9	0.75		
10, 11	0.25	$\pm 0.195 913 276 015$	
12, 13	0.75		
14, 15	0.25	$\pm 0.359 781 100 996$	0.253 505 610 897
16, 17	0.75		
18, 19	0.102 416 382 350	$\pm 0.097 491 114 521$	
20, 21	0.397 583 617 650		
22, 23	0.602 416 382 350		
24, 25	0.897 583 617 650		
26	0.0		
27	1.0	0.0	0.159 572 960 182
28	1.5		
29, 30	1.0	± 0.25	
31, 32	1.5		
33	1.25	0.0	
34	1.75		
35, 36	1.25	$\pm 0.195 913 276 015$	0.265 071 880 147
37, 38	1.75		
39, 40	1.25	$\pm 0.359 781 100 996$	0.253 505 610 897
41, 42	1.75		
43, 44	1.102 416 382 350	$\pm 0.097 491 114 521$	
45, 46	1.397 583 617 650		
47, 48	1.602 416 382 350		
49, 50	1.897 583 617 650		

Box 10.2 Winkel­koordinaten α_r und β_r und zugehörige Wichtungskoeffizienten w_r für Integrationsregel nach McLaren mit $M_r = 50$ (2×25) Stützstellen

10.6 Berechnung des makroskopischen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs

Um den Zusammenhang zwischen den Größen \mathbf{S} und \mathbf{E} des Makroelements zu berechnen, wird verzerrungsgesteuert vorgegangen:

- Die Verzerrung \mathbf{E}_n und die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,k,n}$ aller M Mikroelemente sind zum Belastungszeitpunkt t_n bekannt. Mit diesen Größen lassen sich die Mikrospannungen $\mathbf{s}_{k,n}$, und mit (10-16) die äquivalente Spannung \mathbf{S}_n und die äquivalente plastische Verzerrung $\mathbf{E}_{pl,n}$ (10-21) des Makroelements berechnen.
- Die Verzerrung wird um einen finiten Verzerrungsanteil $\Delta\mathbf{E}$ erhöht bzw. abgemindert, wodurch sich die Verzerrungen zum Zeitpunkt t_{n+1} zu $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}$ ergeben.
- Aufgrund der kinematischen Festlegung (10-6) entspricht die Verzerrungszuwachs $\Delta\mathbf{E}$ dem Zuwachs $\Delta\mathbf{e}_k$ der aktiven Verzerrungskomponenten aller M Mikroelemente.
- Gesucht sind die plastischen Verzerrungen $\mathbf{e}_{pl,k,n+1}$ bzw. die Spannungen $\mathbf{s}_{k,n+1}$ der M Mikroelemente zum Zeitpunkt t_{n+1} . Die Berechnung dieser Größen erfolgt für jedes Element über die in Box 8.7 und Box 8.8 beschriebene Materialsubroutine.
- Mit den berechneten mikroskopischen Größen lassen sich die makroskopische plastische Verzerrung $\mathbf{E}_{pl,n+1}$ (10-21) und die äquivalente Spannung \mathbf{S}_{n+1} (10-16) berechnen.

Dieses Rechenschema ist in Bild 10.2 dargestellt. Durch Vorgabe eines Verzerrungsverlaufs $\mathbf{E}(t)$ und Diskretisierung in gleichgroße Teilbelastungsschritte $\Delta\mathbf{E}$, lässt sich bei mehrfacher Wiederholung der dargestellten Vorgehensweise der zugehörige makroskopische Spannungsverlauf $\mathbf{S}(t)$ berechnen. Wesentlich ist, dass die M plastischen Verzerrungsanteile $\mathbf{e}_{pl,k}$ aller Mikrovolumenelemente bei der Berechnung fortlaufend gespeichert werden müssen.

Das in Bild 10.2 dargestellt Rechenschema wird in einer Rechenroutine verpackt, die mit den steuernden Verzerrungen, den M plastischen mikroskopischen Verzerrungen und den Materialkennwerten der einzelnen Mikroelemente beschickt wird und die Zuwächse der plastischen mikroskopischen Verzerrungen, die äquivalente Spannung, und bei Bedarf die algorithmische elasto-plastische Materialsteifigkeitsmatrix des Makroelements ausgibt. Subbestandteil ist die Materialroutine aus Kap. 8.8, die für alle M Mikroelemente aufgerufen werden muss.

Das Rechenschema und die vorgestellten mechanischen Modelle werden anhand einiger Beispiele in den nächsten beiden Abschnitten umgesetzt.

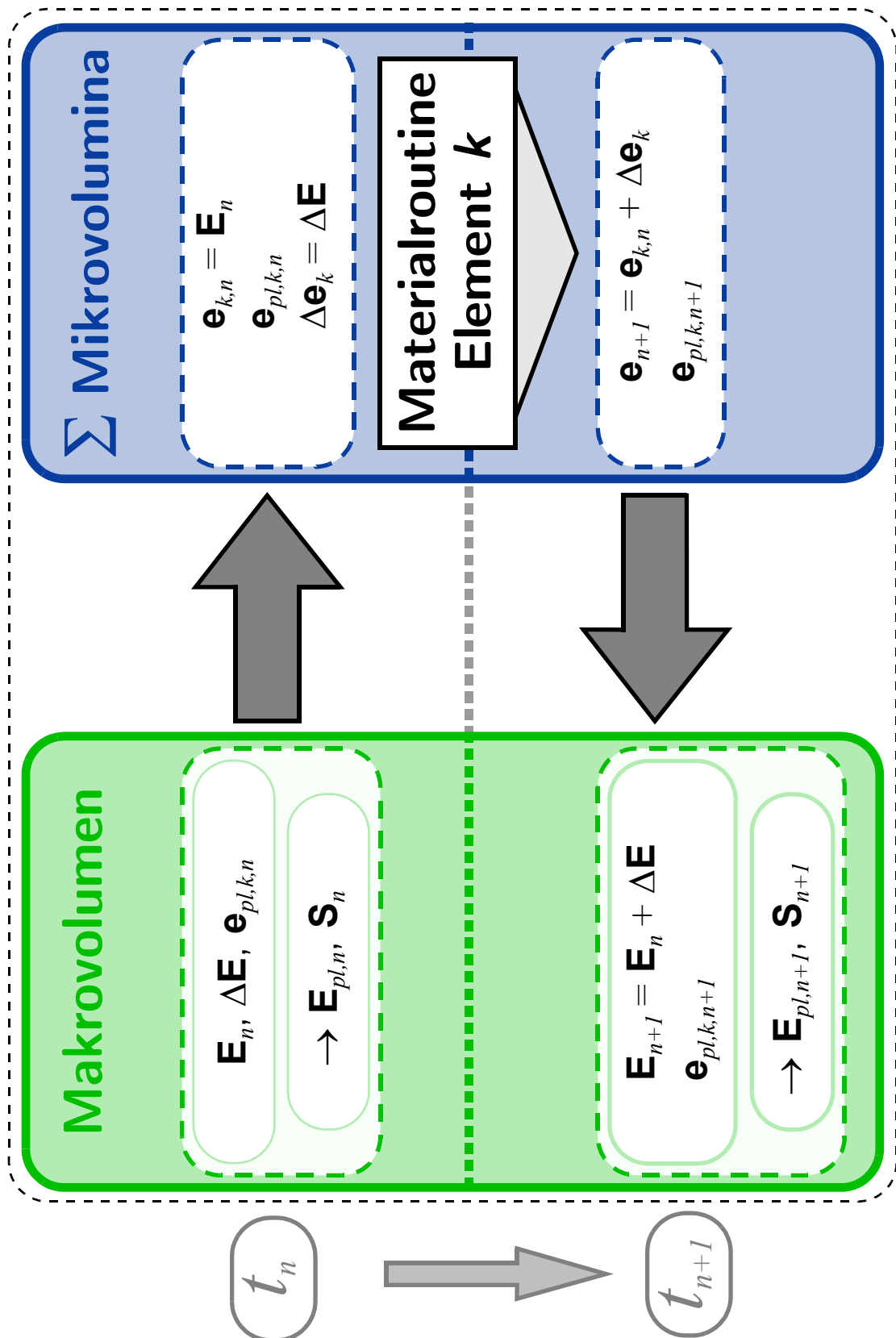


Bild 10.2 Schematische Darstellung der verzerrungsgesteuerten Berechnungsprozedur des Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs des Makroelements

1 1

**Beispiele:
Mikrostruktur-
modell**

11.1 Einleitung und Kapitelaufbau

Anhand der ausgearbeiteten Beispiele soll gezeigt werden, welcher Variantenreichtum im generellen und einfachen Mikrostrukturmodell aus Kap. 10 steckt. Die Beispiele sind so gewählt, dass sie charakteristisches Modellverhalten wiedergeben und die berechneten Ergebnisse - sofern nicht durch einfache Handrechnungen nachvollziehbar - durch verschiedene Zugänge abkontrollierbar sind. Sie sollen den Mehrfachzweck, Lehr-, Demonstrations-, sowie Testbeispiel für die programmierten Rechenprozeduren zu sein, erfüllen. Am Ende des Abschnitts wird das Microplane Modell kritisch untersucht. Anschließend wird gezeigt, dass das *Multilaminat* Modell von Zienkiewicz/Pande (1977) oder das *truss lattice material model* von Mohr (2004) aus dem vorgegebenen Modellrahmen als Submodelle ableiten lassen.

11.1.1 Inhalt von Kapitel 11

- 11.2 Elastische Materialsteifigkeitsmatrix eines Einkornaggregats
 - 11.3 Aus kreuzweise angeordneten Scheibenelementen aufgebautes Makroelement
 - 11.4 „Faserbündel“ Modell
 - 11.5 Schubtragspannung einer einfachen Mikrostruktur
 - 11.6 Tragspannungsberechnung eines Polykristalls
 - 11.7 Microplane Modell - Darstellung, kritische Untersuchung und Vergleich
 - 11.8 Stabbündelmodell
 - 11.9 Einordnung verschiedener mikromechanischer Modelle in das entwickelte Konzept
-

11.2 Elastische Materialsteifigkeitsmatrix eines Einkorn- aggregats

In diesem Beispiel werden zwei Einkornaggregatmodelle (Kap. 10.5) betrachtet; das konstituierende Mikroelement verhält sich linear elastisch, ist aber nicht isotrop. Es gilt die kinematische Festlegung $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ und damit $\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{(6,6)}$. Gesucht wird jeweils die makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix. Diese lässt sich analytisch exakt berechnen. Die makroskopische elastische Materialsteifigkeitsmatrix hat zufolge des speziellen Arrangements der Mikroelemente gewisse Symmetrieeigenschaften.

11.2.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Komponenten der orthotropen Steifigkeitsmatrix \mathbf{c}' des Mikroelements im $\{x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}\}$ -Materialhauptachsensystem sind:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{\perp} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \mathbf{c}'_{\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11'} & C_{12'} & C_{13'} & & & \\ C_{12'} & C_{22'} & C_{23'} & & \mathbf{0}_{(3,3)} & \\ C_{13'} & C_{23'} & C_{33'} & & & \\ & & & C_{44'} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{(3,3)} & & 0 & C_{55'} & 0 \\ & & & 0 & 0 & C_{66'} \end{bmatrix} \quad (11-1)$$

Mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} ergibt sich die elastische Verzerrungsenergie des Mikroelements zu:

$$\psi_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{e}'^T \mathbf{c}' \mathbf{e}' = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{T}^{-1}) \mathbf{c}' (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{e} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{c}(\alpha, \beta, \phi) \mathbf{E} \quad (11-2)$$

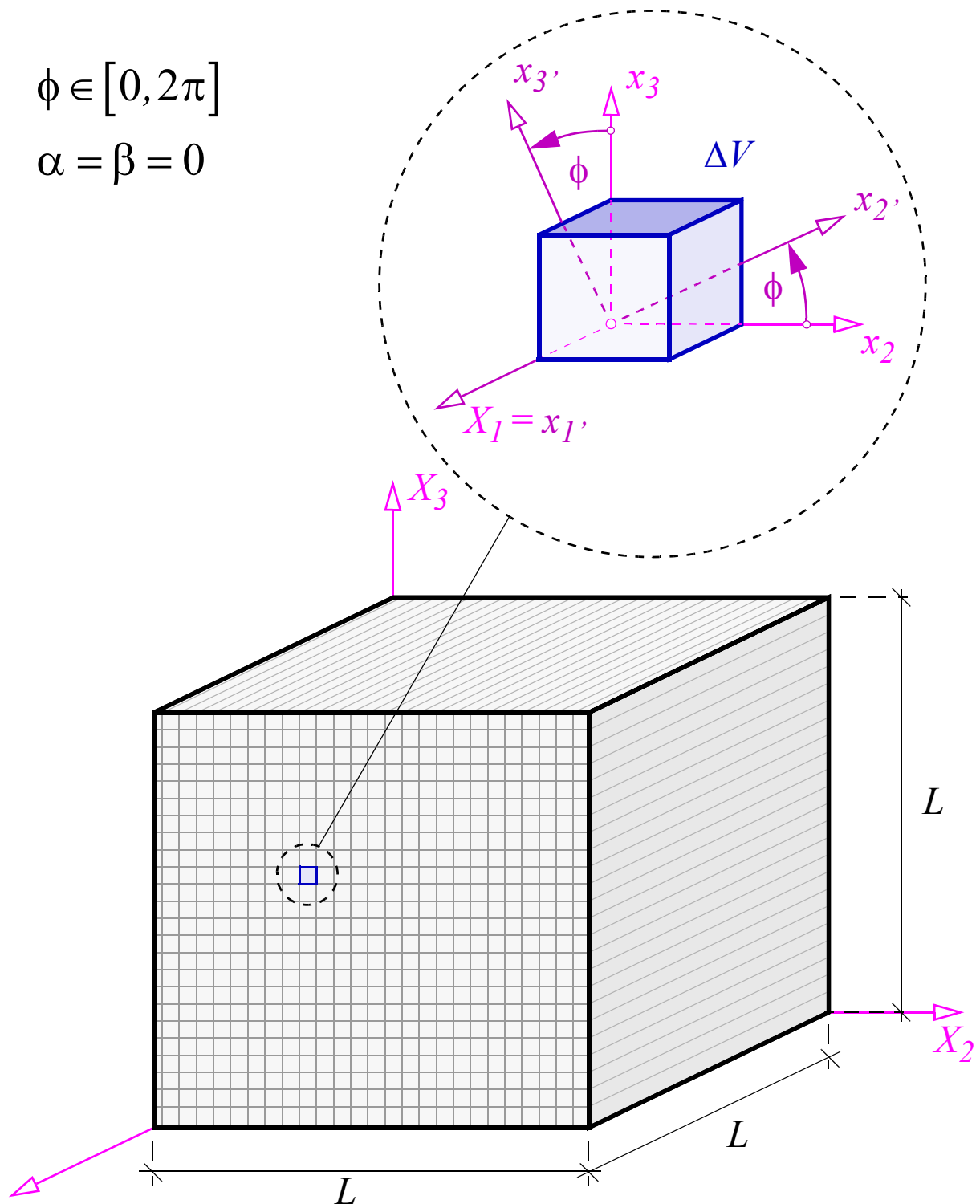
11.2.1.1 Berechnung der makroskopischen Materialsteifigkeitsmatrix

Die makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix wird mit Gleichung (10-21) unter Verwendung des Operators (10-34), wobei $\Omega = 1$ gilt, berechnet. Sind die Materialsteifigkeiten \mathbf{c}' und die *ODF* symmetrisch, kann - oder soll aus Gründen der Effizienz (besonders bei der später auszuführenden numerischen Integration) - diese Symmetrie vorab durch Einschränkung der Integrationsgrenzen in die Integration eingearbeitet werden. Zu beachten ist, dass sich bei der Änderung der Integrationsgrenzen auch das Bezugsvolumen V ändert. Bei der hier verwendeten orthotropen Materialsteifigkeit (11-1) lässt sich diese Orthotropie nutzen. Der Definitionsbereich kann auf

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \phi \in [0, \pi] \quad (11-3)$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$\alpha = \beta = 0$$



X_1 ... Materialhauptachse des Makroelements
(transversale Isotropieachse)

Bild 11.1 Makroelement: Das makroskopische elastische Materialverhalten ist transversal isotrop mit der X_1 -Achse als transversale Isotropieachse. Diese makroskopische Materialsymmetrie ergibt sich aus einer Gleichverteilung von elastisch-orthotropen Mikroelementen, deren x_1 -Achsen stets parallel zur X_1 -Achse liegen und um diese Achse um den Winkel ϕ (gleich verteilt) verdreht sind.

Die makroskopische Materialsteifigkeit hat transversale Isotropie (X_I -Achse = transversale Isotropieachse) und ist aus fünf Materialkennwerten C_{ij} aufgebaut. Diese Koeffizienten bauen sich wiederum aus den neun orthotropen Koeffizienten von \mathbf{c}' auf.

11.2.3 Beispiel 2

In diesem Beispiel wird das makroskopische Element aus Mikroelementen aufgebaut, die wiederum eine orthotrope Materialsteifigkeit besitzen und beliebig orientiert, aber gleichförmig verteilt im Makroelement enthalten sind. Durch diese Gleichverteilung ergibt sich die isotrope makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & & & \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{(3,3)} & & 0 & G & 0 \\ & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (11-7)$$

$$C_{11} = \frac{1}{15} \left[3(C_{11'} + C_{22'} + C_{33'}) + 2(C_{12'} + C_{13'} + C_{23'}) + 4(C_{44'} + C_{55'} + C_{66'}) \right]$$

$$C_{12} = \frac{1}{15} \left[C_{11'} + C_{22'} + C_{33'} + 4(C_{12'} + C_{13'} + C_{23'}) - 2(C_{44'} + C_{55'} + C_{66'}) \right]$$

$$G = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

11.3 Aus kreuzweise angeordneten Scheibenelementen aufgebautes Makroelement

11.3.1 Systembeschreibung

11.3.1.1 Geometrie

Das Makroelement mit dem globalen $\{X_1, X_2, X_3\}$ -Koordinatensystem setzt sich aus drei Scheibenelementen (= Mikroelement mit ebenem Spannungszustand) zusammen. Jedem Scheibenelement ist ein lokales $\{x_{1',k}, x_{2',k}, x_{3',k}\}$ -Koordinatensystem zugeordnet. Die $x_{3',k}$ -Achse weist in Richtung der Scheibendicke. Die Scheibenelemente sind zueinander kreuzweise angeordnet (Bild 11.2). Die Lage der lokalen Koordinatensysteme relativ zum globalen Koordinatensystem (siehe Kap. 9.7.2.2) wird durch die in Box 11.1 angeführten Winkel gegeben.

k	α_k [deg]	β_k [deg]	ϕ_k [deg]
1	0°	0°	0°
2	0°	90°	0°
3	0°	0°	90°

Box 11.1 Orientierungen der drei Scheibenelemente

Das Makrovolumen V ist das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge L . Die Scheibenelemente haben die Seitenabmessungen L und die Dicke $L/7$. Das Einzelscheibenvolumen bezogen auf das Würfelvolumen ist $v_k/V = 127/1029$. Dabei sind die Überschneidungsbereiche der drei Scheiben mit eingerechnet ($v_k < V/7$). Die Summe der drei Scheibenvolumina ist nicht eins, weil die materialfreien Bereiche in den Ecken des Würfels, die jeweils das Volumen $(3L/7)^3$ einnehmen, keine Steifigkeitsanteile liefern.

11.3.1.2 Spannungsnullbedingung der Mikroelemente

Die Seitenflächen der Scheibenelemente normal zur $x_{3',k}$ -Achse sollen spannungsfrei sein; die drei Spannungskomponenten $s_{3'3'}$, $s_{1'3'}$ und $s_{2'3'}$ sind null (Bild 11.2 b). Zur weiteren rechnerischen Behandlung dieses ebenen Spannungszustandes (ESZ) wird die Filtermatrix \mathbf{P}_a aus Gleichung (7-11) benötigt.

11.3.2 Elastische Element- und Systemsteifigkeit

Jedes Scheibenelement besteht aus isotropem linear-elastischem Material mit demselben E-Modul und derselben Querdehnzahl ν . Die reduzierte Steifigkeitsmatrix ist:

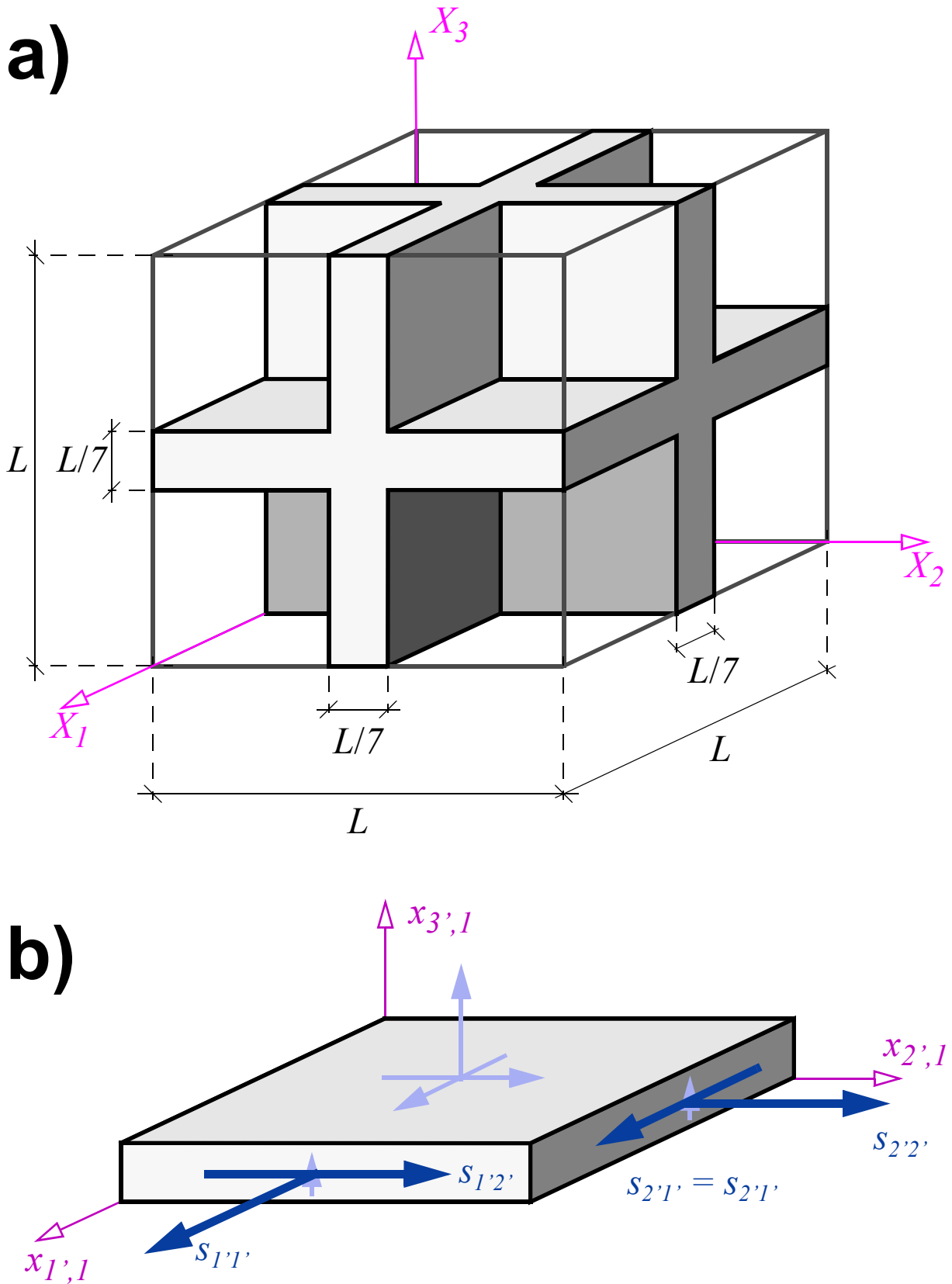


Bild 11.2 a) Kreuzweise Anordnung von drei Scheibenelementen mit jeweils isotropen Materialeigenschaften; b) Scheibenelement $k = 1$ mit der Relativlage $\alpha_1 = \beta_1 = \phi_1 = 0^\circ$ zu den globalen Koordinatenachsen; die (an den positiven Schnittflächen) nicht eingezeichneten Spannungskomponenten sind im ESZ null

$$\mathbf{c}_{a,k}' = \mathbf{c}_a' = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{(2,1)} \\ \mathbf{0}_{(1,2)} & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (11-8)$$

Mit der Filtermatrix \mathbf{P}_a , den drei Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_k(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ mit Gleichung (9-45) und Box B.13, den Volumenfraktionsanteilen ν_k/V und Gleichung (10-21) ergibt sich die makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix zu:

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{c} \rangle = \frac{127}{1029} \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2 & \nu & \nu \\ \nu & 2 & \nu \\ \nu & \nu & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11-9)$$

Das System der drei kreuzweise angeordneten Scheibenelemente weist kubische Symmetrie, eine Unterform der Orthotropie, auf. Die Schubsteifigkeiten des Systems decken sich mit den Einzelscheibenschubsteifigkeiten aus Gleichung (11-8).

11.4 „Faserbündel“ Modell

In diesem Beispiel wird das Makroelement aus Mikroelementen aufgebaut,

- die aus demselben Material aufgebaut sind,
- einen reduzierten Spannungszustand besitzen und
- deren Orientierung im Raum gleichförmig verteilt ist (siehe Einkornaggregat, Kap. 10.5).

Die betrachteten Beispiele sind eine Vorarbeit auf das Beispiel in Kap. 11.7.

11.4.1 Grundmodell I

11.4.1.1 Systembeschreibung

Betrachtet wird ein Makroelement, das sich aus $M \rightarrow \infty$ Mikroelementen mit jeweils differentiellem Volumen dV zusammensetzt (Bild 11.3). Das Materialverhalten der Mikroelemente ist richtungsabhängig und wird bezüglich der lokalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen beschrieben. Es wird einschränkend festgelegt, dass das Materialverhalten bezüglich der x_1 -Achse transversal isotrop ist. Die Richtung dieser Achse ist durch den Einheitsvektor \mathbf{n} , der als Funktion der beiden Winkel α und β mit Gleichung (9-45) beschrieben wird, angegeben (Anmerkung: der Vektor \mathbf{n} gibt in diesem Beispiel keine Versagensebenenorientierung an!). Um alle möglichen materiellen Orientierungen der Mikroelemente zu erfassen, sind die beiden Winkel im Wertebereich $\alpha \in [0, 2\pi]$ und $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ definiert. Es wird angenommen, dass jede materielle Orientierung \mathbf{n} nur ein einziges Mal innerhalb des Makroelements vorkommt, was einer Gleichverteilung der Mikroelementausrichtung $\mathbf{n}(\alpha, \beta)$ innerhalb des Makrokörpers entspricht.

Zusätzlich werden für jedes Mikroelement Spannungsnullrandbedingungen, wie sie in Bild 11.3 b) exemplarisch dargestellt sind, festgelegt: Bis auf die axiale Spannungskomponente s_{11} , bzw. s_{nn} sind alle Spannungskomponenten null (FSZ). Damit verhält sich jedes Mikroelement wie eine kurze Faser, da es nur axiale Spannungen in Richtung des Vektors \mathbf{n} aufnehmen kann. Die dabei auftretenden Verzerrungen des Mikroelements sind - mit Ausnahme der axialen Normalverzerrungskomponente - nicht mit den makroskopisch vorgegebenen Verzerrungen kompatibel (siehe Kap. 10.2.3).

Da eine Gleichverteilung der Mikroelemente festgelegt wurde und deren Position im Makrovolumen aufgrund der affinen Kinematik irrelevant ist, kann man alle Mikroelemente gedanklich so umarrangieren, dass sich das Makroelement als kugelförmiges Faserbündel darstellt, wobei jeder Raumrichtung \mathbf{n} ein einziges Mikroelement zugeordnet wird. Aufgrund dieser Überlegung wurde die im Kapiteltitle angeführte Modellbezeichnung „Faserbündel“ gewählt. Ein in der Grundcharakteristik ähnliches Modell entwickeln Miehe/Göktepe/Lulei (2004) für Gummi bei großen Verzerrungen. Die für die anschließende Be-

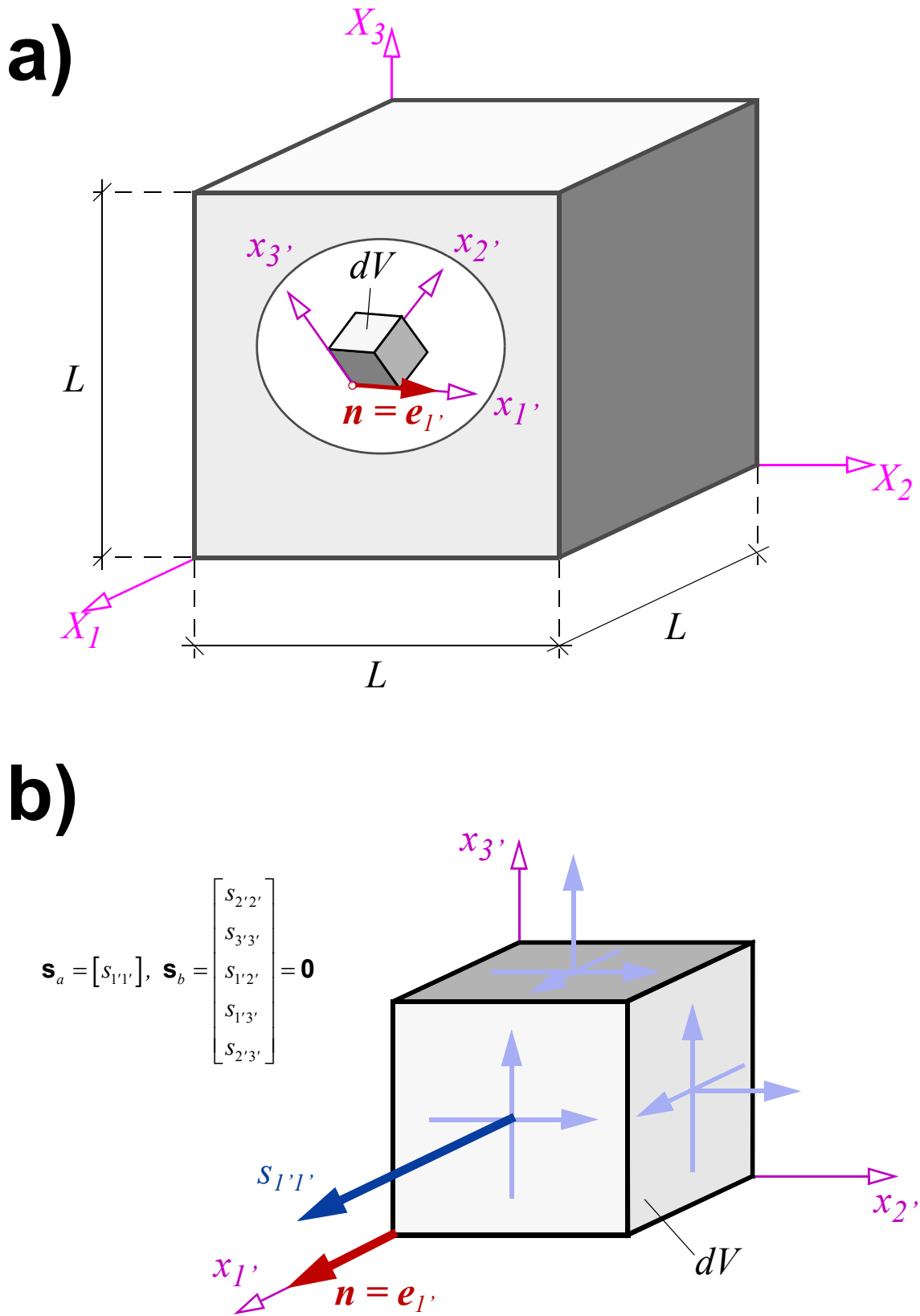


Bild 11.3 a) würfelförmiges Makroelement mit differentiellem Mikroelement mit den lokalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Materialhauptachsen; b) bis auf die axiale Normalspannung $s_{1'1'}$ des differentiellen Mikroelements sind die restlichen Spannungen null (= FSZ)

rechnung benötigten Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b sind in Kap. 7.3.2.1, Gleichung (7-8), angeführt.

11.4.1.2 Elastische Eigenschaften

Die Mikroelemente haben alle dasselbe linear-elastische Materialverhalten und unterscheiden sich nur durch die individuelle räumliche Ausrichtung. Die mit den Filtermatrizen reduzierte elastische Materialsteifigkeitsmatrix der Mikroelemente ist:

$$\mathbf{c}_a' = [E_{mikro}] \quad (11-10)$$

Die makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix ergibt sich durch Integration:

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_a^T \mathbf{c}_a' \mathbf{P}_a \mathbf{T}^{-T} \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \quad (11-11)$$

Bei der gewählten Gleichverteilung und den gleichen Materialeigenschaften der Mikroelemente ergibt sich aus dem Integral die isotrope Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{C} = \frac{E_{mikro}}{15} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ 1 & 1 & 3 & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{(3,3)} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E_{mikro}}{15} (5\mathbf{P}_{vol} + 2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}_{dev}) \quad (11-12)$$

Die Matrix \mathbf{P} ist Box B.9 entnommen; die beiden Matrizen \mathbf{P}_{dev} und \mathbf{P}_{vol} finden sich auf Seite 298. Die beiden makroskopischen isotropen Materialparameter, der Kompressionsmodul K_{makro} und der Schubmodul G_{makro} bzw. der E-Modul E_{makro} und die Querdehnzahl ν_{makro} , ergeben sich als Funktion des einzigen mikroskopischen Materialparameters E_{mikro} zu:

$$K_{makro} = \frac{E_{mikro}}{9}, \quad G_{makro} = \frac{E_{mikro}}{15} \quad \text{bzw.} \quad E_{makro} = \frac{E_{mikro}}{6}, \quad \nu_{makro} = \frac{1}{4} \quad (11-13)$$

Interessant ist, dass die makroskopische Querdehnzahl bei dem beschriebenen Modell unabhängig von der Größe des mikroskopischen E-Modul E_{mikro} den konstanten Wert 0.25 annimmt.

11.4.2 Erweiterung des Grundmodells I: Einbettung der Fasern in ein isotropes Grundmaterial

Die zuvor beschriebenen Fasern bzw. Mikroelemente werden in eine isotrope Materialmatrix eingebettet. Das makroskopische Gesamtvolumen V ergibt sich aus dem Volumen v_1 des Matrixmaterials und dem Faservolumen v_2 . Der Bewehrungsgrad ϖ ist das Verhältnis v_2/V . Mit den isotrop elastischen Eigenschaften des Matrixmaterials, dem Kompressionsmodul $K_I = K_m$ und dem Schubmodul $G_I = G_m$, und dem E-Modul der Fasern $E_f = E_2$ ergibt sich die isotrope Materialsteifigkeitsmatrix des Makroelements durch volumenanteilmäßige Addition der isotropen Matrixsteifigkeit und der Faserbündelsteifigkeitsmatrix aus Gleichung (11-12) zu:

$$\mathbf{C} = \left[3K_m + \frac{\varpi}{3}(E_f - 9K_m) \right] \mathbf{P}_{vol} + \left[2G_m + \frac{\varpi}{15}(2E_f - 30G_m) \right] \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \quad (11-14)$$

Die zwei isotropen makroskopischen Materialkennwerte, E-Modul E_{makro} und Querdehnzahl ν_{makro} , sind:

$$\begin{aligned} E_{makro} &= \frac{(15G_m(1-\varpi) + E_f\varpi)(9K_m(1-\varpi) + E_f\varpi)}{15(G_m + 3K_m)(1-\varpi) + 6E_f\varpi} \\ \nu_{makro} &= \frac{(15K_m - 10G_m)(1-\varpi) + E_f\varpi}{(30K_m + 10G_m)(1-\varpi) + 4E_f\varpi} \end{aligned} \quad (11-15)$$

Wenn alle drei Materialkennwerte G_m , K_m und E_f positiv sind, ist die Querdehnzahl ν_{makro} im gesamten erlaubten Wertebereich von -1 bis 0.5 definiert. Wird eine der drei Materialkennwerte null, kann es zur Beschränkung des Wertebereichs von ν_{makro} kommen. Folgende drei Situationen sind möglich:

$$\begin{aligned} E_f = 0, \quad G_m, K_m > 0 & : \quad -1 \leq \nu_{makro} \leq \frac{1}{2} \\ G_m = 0, \quad E_f, K_m > 0 & : \quad \frac{1}{4} \leq \nu_{makro} \leq \frac{1}{2} \\ K_m = 0, \quad E_f, G_m > 0 & : \quad -1 \leq \nu_{makro} \leq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (11-16)$$

11.4.3 Grundmodell II: Inklusion der Schubsteifigkeit

11.4.3.1 Aufbau des Mikroelements

Ausgangspunkt ist das Grundmodell I. Um die Schubsteifigkeit in das Spannungs-Verzerrungsverhalten des Mikroelements zu inkludieren, werden die Spannungsnullbedingungen des Grundmodells reduziert und damit die Anzahl der aktiven Spannungs- und Verzerr-

rungskomponenten erhöht. Nur die Spannungskomponenten $s_{2'2'}$, $s_{3'3'}$ und $s_{2'3'}$ sollen im Laufe der Deformation null bleiben (= BSZ, Kap. 7.3.2.2). Die verbleibenden drei aktiven Spannungskomponenten sind in Bild 11.4 dargestellt. Neben der axialen Verzerrung $e_{1'1'} = E_{1'1'}$ werden mit Gleichung (10-6) und den Filtermatrizen aus Gleichung (7-9) zusätzlich die Schubverzerrungen $\gamma_{1'2'}$ und $\gamma_{1'3'}$ an die vorgegebenen makroskopischen Verzerrungen \mathbf{E} angebunden. Die reduzierte elastische Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{c}_a' = \begin{bmatrix} E_{mikro} & 0 & 0 \\ 0 & G_{mikro} & 0 \\ 0 & 0 & G_{mikro} \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

ist um den Schubmodul G_{mikro} erweitert und hat weiterhin transversale Isotropie um die x_1 -Achse.

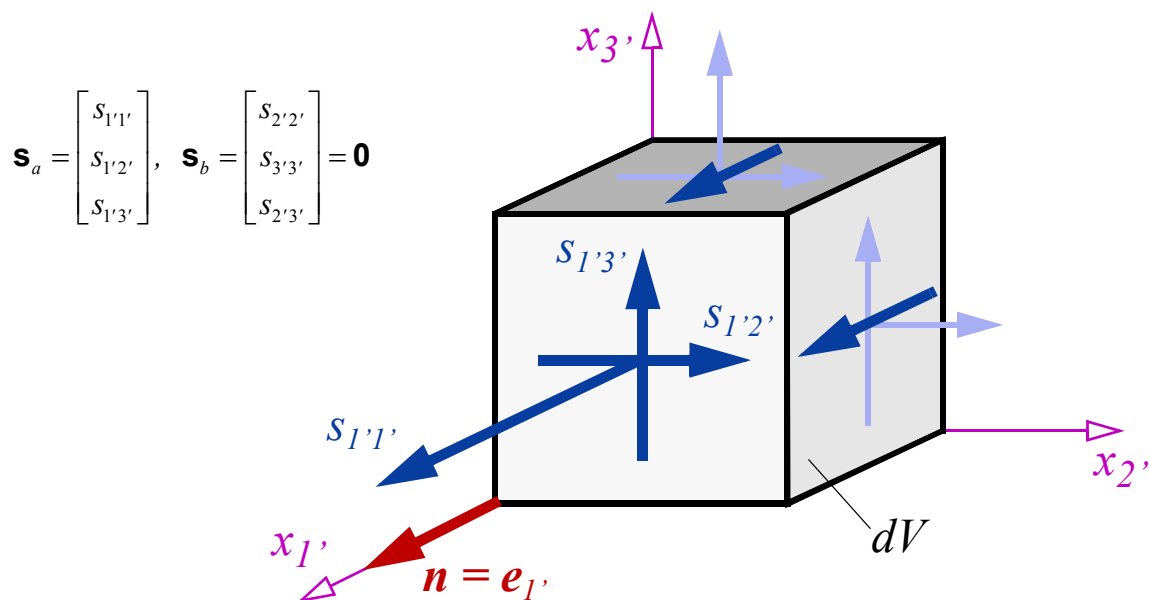


Bild 11.4 Mikroelement mit BSZ: die Spannungskomponenten $s_{2'2'}$, $s_{3'3'}$ und $s_{2'3'}$ sind null

11.4.3.2 Isotrope makroskopische Materialsteifigkeitsmatrix

Mit der Steifigkeitsmatrix (11-17) und der Filtermatrix \mathbf{P}_a wird mit Gleichung (11-11) die makroskopische elastische Steifigkeitsmatrix berechnet:

$$\mathbf{C} = \frac{E_{mikro}}{3} \mathbf{P}_{vol} + \frac{2}{15} (E_{mikro} + 6G_{mikro}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \quad (11-18)$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix des Grundmodells I (11-12) wird um den deviatorischen Term

$$\Delta \mathbf{C} = \frac{4}{5} G_{mikro} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \quad (11-19)$$

erweitert. Die zwei isotropen Materialparameter des Makroelements sind:

$$K_{makro} = \frac{E_{mikro}}{9}, \quad G_{makro} = \frac{1}{15}(E_{mikro} + 6G_{mikro})$$

bzw.

$$E_{makro} = \frac{E_{mikro}(E_{mikro} + 6G_{mikro})}{6(E_{mikro} + G_{mikro})}, \quad \nu_{makro} = \frac{E_{mikro} - 4G_{mikro}}{4(E_{mikro} + G_{mikro})}$$
(11-20)

Die Abhängigkeit der zwei elastischen mikroskopischen Größen von den zwei makroskopischen Parametern E_{makro} und ν_{makro} , ist:

$$E_{mikro} = \frac{3E_{makro}}{1 - 2\nu_{makro}} \quad G_{mikro} = \frac{3E_{makro}(4\nu_{makro} - 1)}{(2\nu_{makro}^2 + \nu_{makro} - 1)}.$$
(11-21)

Aus physikalischen Gründen müssen E_{mikro} und G_{mikro} größer oder gleich null sein. Das schränkt wiederum den möglichen Bereich der makroskopischen Querdehnzahl ν_{makro} ein. Ist G_{mikro} null, wird ν_{makro} 0.25 (siehe Grundfall I), geht G_{mikro} gegen unendlich, wird ν_{makro} minus eins. Den Bereich zwischen 0.25 und 0.5 erreicht die Querdehnzahl ν_{makro} bei dem gegebenen Modell nicht, unabhängig davon, welchen positiven Werte den beiden mikroskopischen Materialkonstanten E_{mikro} und G_{mikro} zugewiesen werden.

Die Querdehnzahl bleibt auf den Wertebereich

$$-1 < \nu_{makro} \leq \frac{1}{4}$$
(11-22)

beschränkt.

11.4.3.3 Sondersituation: isotropes Mikroelement

Wird für das elastische Materialverhalten des Mikroelements statt der transversalen Isotropie angenommen, ist G_{mikro} von E_{mikro} und der Querdehnzahl ν_{mikro} abhängig:

$$G_{mikro} = \frac{E_{mikro}}{2(1 + \nu_{mikro})}$$
(11-23)

Mit diesem Zusammenhang ergeben sich der makroskopische E-Modul und die Querdehnzahl aus Gleichung (11-20) zu:

$$E_{makro} = \frac{E_{mikro}(4 + \nu_{mikro})}{3(3 + 2\nu_{mikro})} \quad \nu_{makro} = \frac{\nu_{mikro} - 1}{2(3 + 2\nu_{mikro})}$$
(11-24)

Mit der Querdehnzahl ν_{mikro} zwischen -1 und 0.5 nimmt die makroskopische Querdehnzahl

folgende Werte an:

$$-1 \leq \nu_{mikro} \leq \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -1 \leq \nu_{makro} \leq -\frac{1}{16} \quad (11-25)$$

Ein positives ν_{makro} wird nicht erreicht!

11.4.4 Einbettung der Fasern aus Grundmodell II in eine isotrope Matrix

Die schubsteifen Fasern des Grundmodells II mit dem E-Modul E_f und dem Schubmodul G_f werden in eine isotrope Matrix mit dem Kompressionsmodul K_m und dem Schubmodul G_m eingebettet. Der Bewehrungsgrad ist ϖ . Die makroskopische Materialmatrix des Verbundkörpers ist:

$$\mathbf{C} = \left[3K_m + \frac{\varpi}{3}(E_f - 9K_m) \right] \mathbf{P}_{vol} + \left[2G_m + \frac{2\varpi}{15}(E_f + 6G_f - 15G_m) \right] \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \quad (11-26)$$

Der makroskopische E-Modul und die Querdehnzahl sind:

$$E_{makro} = \frac{\left[15G_m(1-\varpi) + (E_f + 6G_f)\varpi \right] \left(9K_m(1-\varpi) + E_f\varpi \right)}{15(G_m + 3K_m)(1-\varpi) + 6(E_f + G_f)\varpi} \quad (11-27)$$

$$\nu_{makro} = \frac{(15K_m - 10G_m)(1-\varpi) + (E_f - 4G_f)\varpi}{(30K_m + 10G_m)(1-\varpi) + 4(E_f + G_f)\varpi}$$

Wenn K_m null ist und die verbleibenden drei Materialkonstanten G_m , E_f und G_f größer als null sind, hat die Querdehnzahl stets die Obergrenze 0.25. Nur wenn K_m größer als null ist - dabei kann G_m null sein -, ist eine makroskopische Querdehnzahl bis 0.5 möglich:

$$K_m = 0, \quad E_f, G_f, G_m > 0 \quad : \quad -1 \leq \nu_{makro} \leq \frac{1}{4} \quad (11-28)$$

$$G_m = 0, \quad E_f, G_f, K_m > 0 \quad : \quad -1 \leq \nu_{makro} \leq \frac{1}{2}$$

11.5 Schubtragsspannung einer einfachen Mikrostruktur

11.5.1 Systembeschreibung

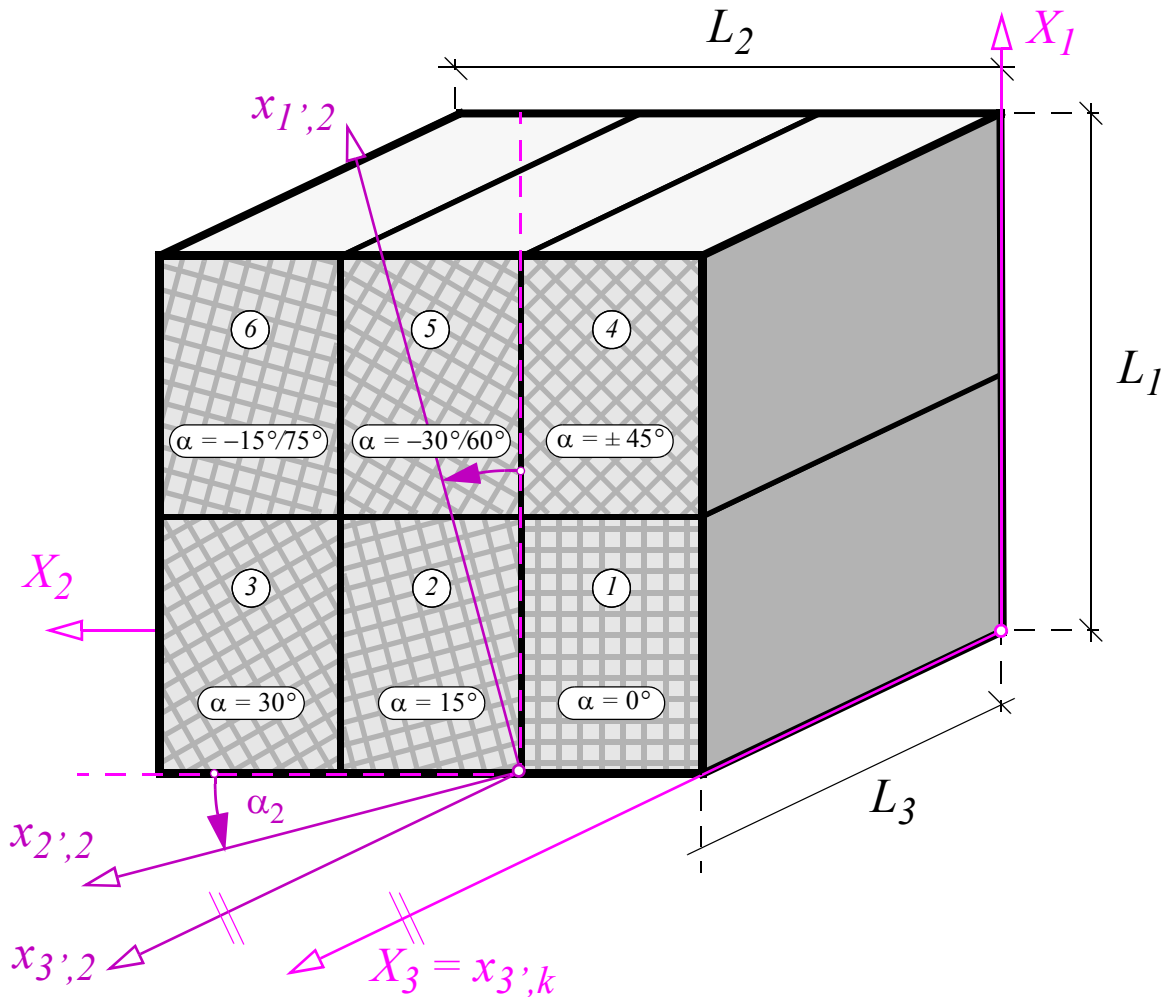


Bild 11.5 Darstellung des makroskopischen Elements mit den sechs Mikroelementen mit jeweils unterschiedlicher Schichtneigung α_k .

Das Makroelement besteht aus $M = 6$ gleich großen Mikroelementen (Bild 11.5). Die mikroskopischen Größen werden, um die Zugehörigkeit zu dem jeweiligen Mikroelement zu kennzeichnen, mit dem Index k versehen. Der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und das Tragverhalten des Mikroelements bei Schubverzerrung wurden in Kap. 9.6 ausgearbeitet. Die elastischen Materialkennwerte und die Schubfließspannung τ_y haben für alle Mikroelemente die gleichen Werte. Alle sechs $x_{3',k}$ -Achsen sind parallel zur makroskopischen X_3 -Achse ausgerichtet. Die sechs unterschiedlichen Neigungen der Gleitschichten sind im Wertebereich $-45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ angegeben:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} = \frac{\pi}{12} \{0, 1, 2, 3, -2, -1\} = \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, -30^\circ, -15^\circ\} \quad (11-29)$$

Das ist aufgrund der zwei Gleitschichten möglich, da eine Neigung α_k ebenso durch eine Neigung $\alpha_k = \alpha_k \pm 90^\circ$ ausgedrückt werden kann. Die mikroskopischen Verzerrungen entsprechen den makroskopischen Verzerrungen; es gilt $\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{(6,6)}$.

11.5.1.1 Symmetriebetrachtungen zum Verbundkörperaufbau

Da die Mikroelemente 5 und 3, sowie 2 und 6 komplementäre Schichtneigungen aufweisen, können alle sechs Elemente um $\pm 180^\circ$ um die X_1 -Achse gedreht eingebaut werden, ohne dass sich der Aufbau des Makroelements (und damit in weiterer Folge das mechanische Verhalten) ändert. Bei jeder Verdrehung des Makroelements um 15° bzw. $\pi/12$ (oder einem Vielfachen von 15°) um die X_3 -Achse bleibt die Systemzusammensetzung ebenso unverändert. Dabei wird die Liste (11-29) mit dem Winkel 15° addiert, das erste Element hat dann die Schubschichtneigung $\alpha_1 = 15^\circ$ und das sechste $\alpha_6 = 0^\circ$.

11.5.1.2 Aufgabenstellung

Untersucht wird der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des makroskopischen Elements bei einer monoton anwachsenden Γ_{13} -Schubverzerrung. Im Anschluss daran wird der plastische Tragspannungszustand bei allgemeiner Γ_{13} - und Γ_{23} -Schubverzerrungskombination, wie sie in Gleichung (11-34) gegeben ist, berechnet.

11.5.2 Spannungs-Verzerrungs-Diagramm bei eingprägter Schubverzerrung

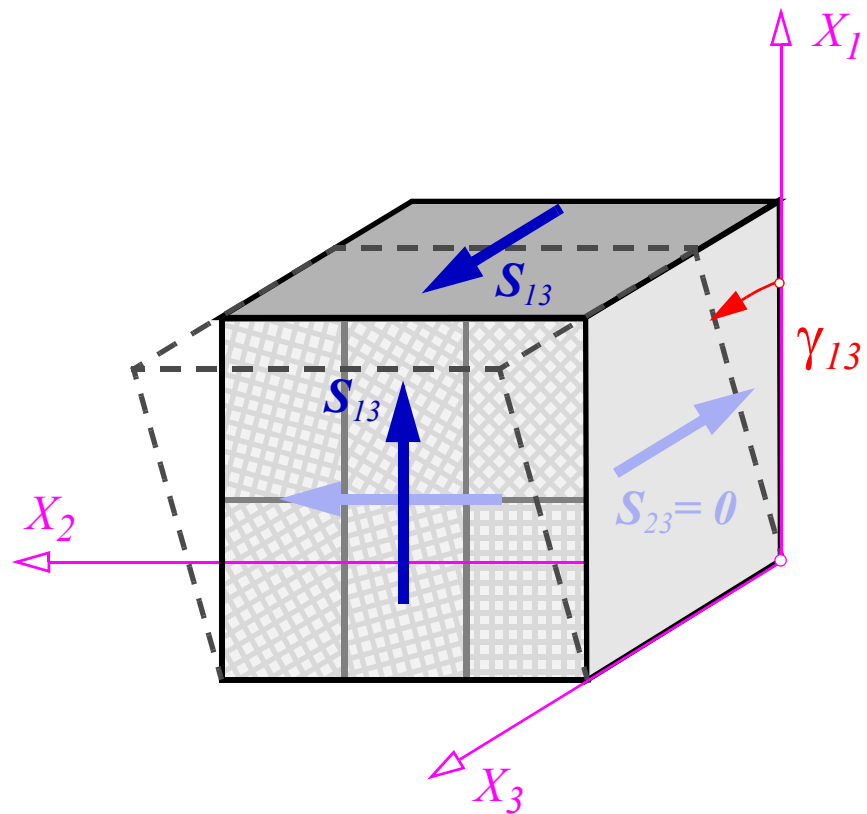
Als makroskopischer Verzerrungszustand \mathbf{E} wird die Abscherung Γ_{13} aufgebracht. Alle übrigen Verzerrungskomponenten sind null. Für die sechs Mikroelemente sind die Grenzverzerrungen $\gamma_{13,Y_i,k}$ und $\gamma_{13,Y_t,k}$ in Box 11.2 angegeben. Das Mikroelement $k = 1$ beginnt bei dem vorgegebenen Verzerrungszustand als Erstes zu versagen und erreicht an diesem Punkt auch bereits seine plastische Schubtragspannung. Als Letztes erreichen die Mikroelemente 2 und 6 die plastische Tragspannung.

k	l	2	3	4	5	6
$\frac{\gamma_{13,Y_i,k}}{\gamma_Y}$	1	$\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = 1.035$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\sqrt{2} = 1.414$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = 1.035$
$\frac{\gamma_{13,Y_t,k}}{\gamma_Y}$	1	$\frac{2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}} = 3.864$	2	$\sqrt{2} = 1.414$	2	$\frac{2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}} = 3.864$

Box 11.2 Grenzverzerrungen bei Aktivierung des plastischen Schubmechanismus und Schubverzerrung im Tragspannungszustand der einzelnen Mikroelemente

In der Darstellung des makroskopischen Schubspannungsverlaufs in Bild 11.6 sind die Grenzverzerrungszustände aus Box 11.2 mit vertikal strichlierten Linien eingezeichnet. Zwischen diesen Punkten verläuft die Funktion der Spannung S_{13} linear; die Schubspan-

a)



b)

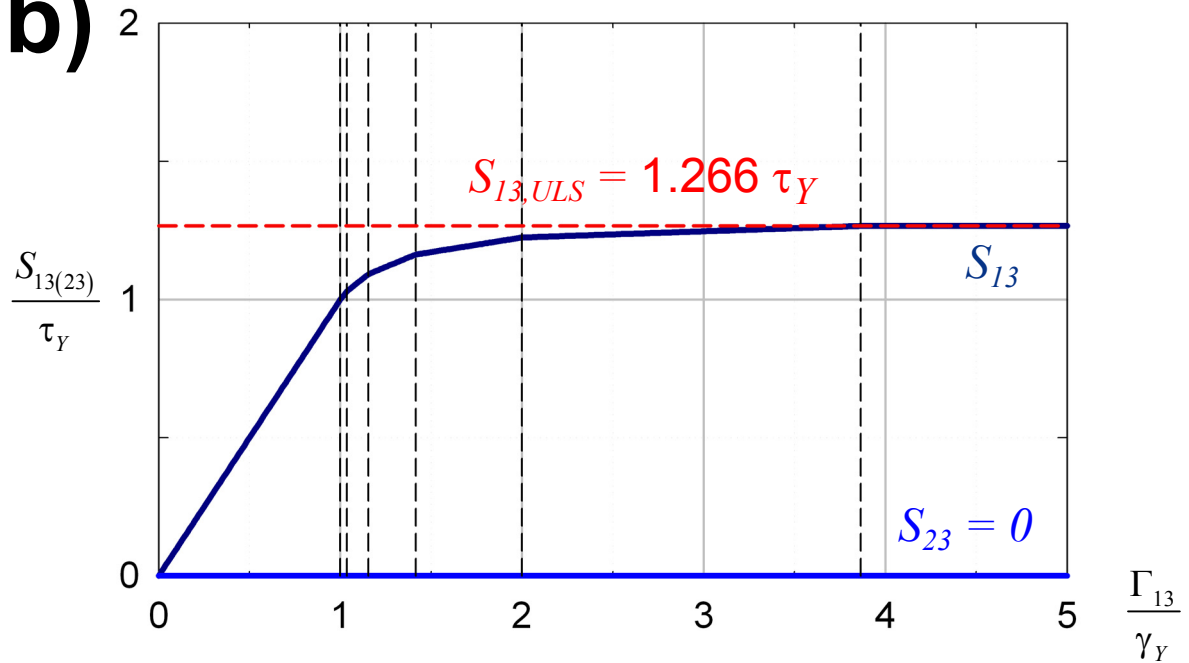


Bild 11.6 a) Vorgegebener Verzerrungszustand mit dem monoton ansteigenden Schubwinkel Γ_{13} und hervorgerufene makroskopische Schubspannungskomponenten S_{13} und S_{23}

nungskomponente S_{23} ist aufgrund des zum Verzerrungszustand symmetrischen Verbundkörperaufbaus null. Überschreitet die vorgegebene Schubverzerrung Γ_{13} den Grenzwert $\gamma_{13,Yt,2} = \gamma_{13,Yt,6} = 3.864 \gamma_Y$, erreicht auch das Makroelement seine plastische Tragspannung. Mit den Grenzspannungszuständen der einzelnen Mikroelemente aus Gleichung (9-41) lassen sich die makroskopischen Schubspannungen $S_{13,ULS}$ und $S_{23,ULS}$ und die makroskopischen elastischen Schubverzerrungen berechnen:

$$\frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13,ULS} \\ S_{23,ULS} \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma_Y} \begin{bmatrix} \Gamma_{13,el} \\ \Gamma_{23,el} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_1 = 1 \\ s_1 = 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=2}^6 \frac{1}{6} \begin{bmatrix} s_k + c_k \\ s_k - c_k \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.266 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11-30)$$

Die elastische makroskopische Verzerrungsenergiedichte Ψ (Bild 11.7) erreicht bei $\gamma_{13,Yt,6}$ den Maximalwert $\Psi_{max} = 11/12 \tau_Y \gamma_Y$. Mit den elastischen Verzerrungen aus (11-30) ergibt sich der zugehörige Maximalwert von $\Psi_{el,max}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{max}}{\tau_Y \gamma_Y} &= \frac{1}{\tau_Y \gamma_Y} \frac{1}{6} (0.5 + 5) = 0.9166 \\ \frac{\Psi_{el,max}}{\tau_Y \gamma_Y} &= \frac{1}{\tau_Y \gamma_Y} \frac{1}{72} (2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = 0.8013 \end{aligned} \quad (11-31)$$

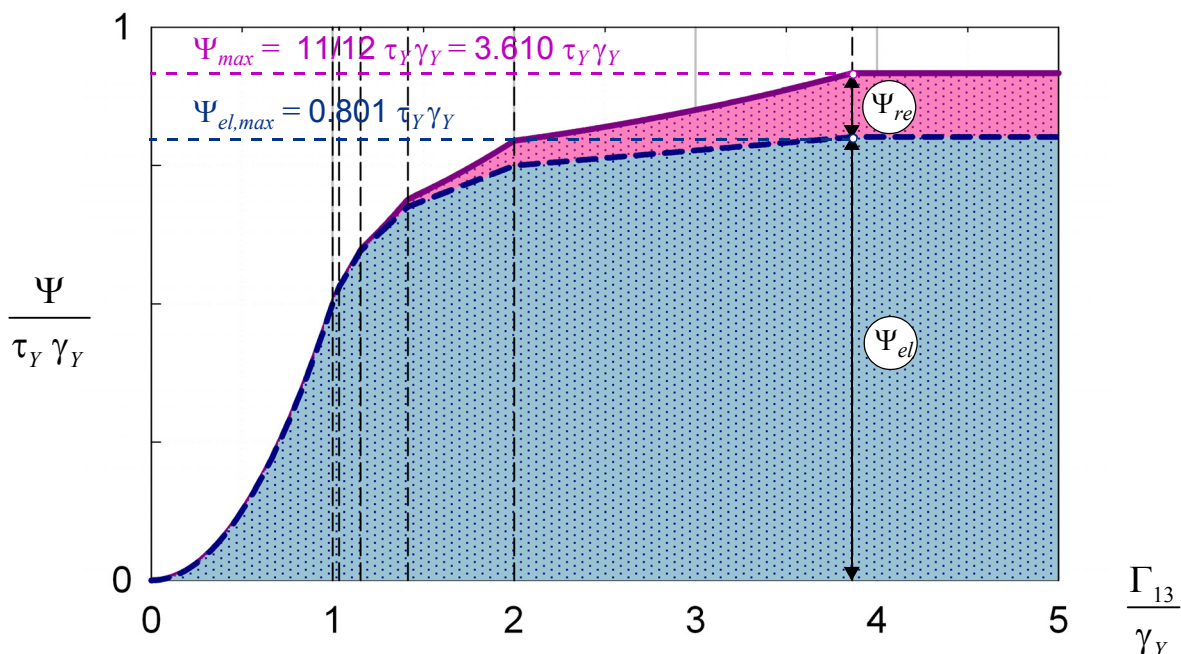


Bild 11.7 Elastische Verzerrungsenergiedichte $\Psi(\Gamma_{13})$ mit Aufteilung in Ψ_{el} (blau) und den „eingefrorenen“ Anteil Ψ_{re} (pink)

11.5.3 Versagensbeginn & graphische Darstellung

11.5.3.1 Makroskopische Versagensbedingungen

Aus den jeweils $n_k = 4$ Versagensbedingungen (9-38) der sechs Mikroelemente ergeben sich in Summe $N = 24$ makroskopische Versagensbedingungen (Kap. 10.4.3). Diese sind bei Versagensbeginn mit $\mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
 F_{1,k}(\mathbf{S}) &= +\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'1',k}^T \mathbf{S} - 1 = +\frac{1}{\tau_Y} (c_k S_{13} + s_k S_{23}) - 1 \\
 F_{2,k}(\mathbf{S}) &= -\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'1',k}^T \mathbf{S} - 1 = -\frac{1}{\tau_Y} (c_k S_{13} + s_k S_{23}) - 1 \\
 F_{3,k}(\mathbf{S}) &= +\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'2',k}^T \mathbf{S} - 1 = \frac{1}{\tau_Y} (-s_k S_{13} + c_k S_{23}) - 1 \\
 F_{4,k}(\mathbf{S}) &= -\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'2',k}^T \mathbf{S} - 1 = \frac{1}{\tau_Y} (+s_k S_{13} - c_k S_{23}) - 1
 \end{aligned}
 \tag{11-32}$$

$k \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Damit ist der elastische Bereich $\mathbb{E}^{t=0}$ des makroskopischen Elements zum Zeitpunkt $t = 0$ (Kap. 10.4.3.3) abgrenzbar. Im normierten $\{S_{12}, S_{13}\}$ -Schubspannungsraum ist dieser Bereich durch ein regelmäßiges 24-Eck, dessen Geradenabschnitte durch die Versagensbedingungen $F_{i,k}$ angegeben sind, begrenzt (Bild 11.8). Der Inkreis des erlaubten Bereichs hat den Radius eins.

11.5.3.2 Symmetrie des mechanischen Verhaltens

Bei jeder Verdrehung des makroskopischen Verbundkörpers um 15° bzw. $\pi/12$ um die x_3 -Achse oder um $\pm 180^\circ$ um die x_1 -Achse und einer gleichbleibenden eingepprägten Schubverzerrung Γ_{13} bleibt die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung aufgrund des symmetrischen Materialaufbaus unverändert. Die Symmetriegruppe von $\mathbb{E}^{t=0}$ ist:

$$S = \left\{ \pm \mathbf{J}, \mathbf{R}_{\mathbf{e}_3}^{\pi/12} \right\}
 \tag{11-33}$$

Aufgrund dieser Symmetrie ist in Bild 11.8 nur ein Viertel des elastischen Bereiches mit den begrenzenden Versagensbedingungen $F_{1,1}$ bis $F_{1,6}$ und $F_{3,1}$ dargestellt. Der Nachweis der Symmetrie ist in Kap. 3.6 dargestellt.

11.5.4 Berechnung der makroskopischen Schubtragsspannungen

Es wird die verzerrungsgesteuerte Belastung

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \Gamma_{13} \\ \Gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \Gamma \quad \Gamma \geq 0
 \tag{11-34}$$

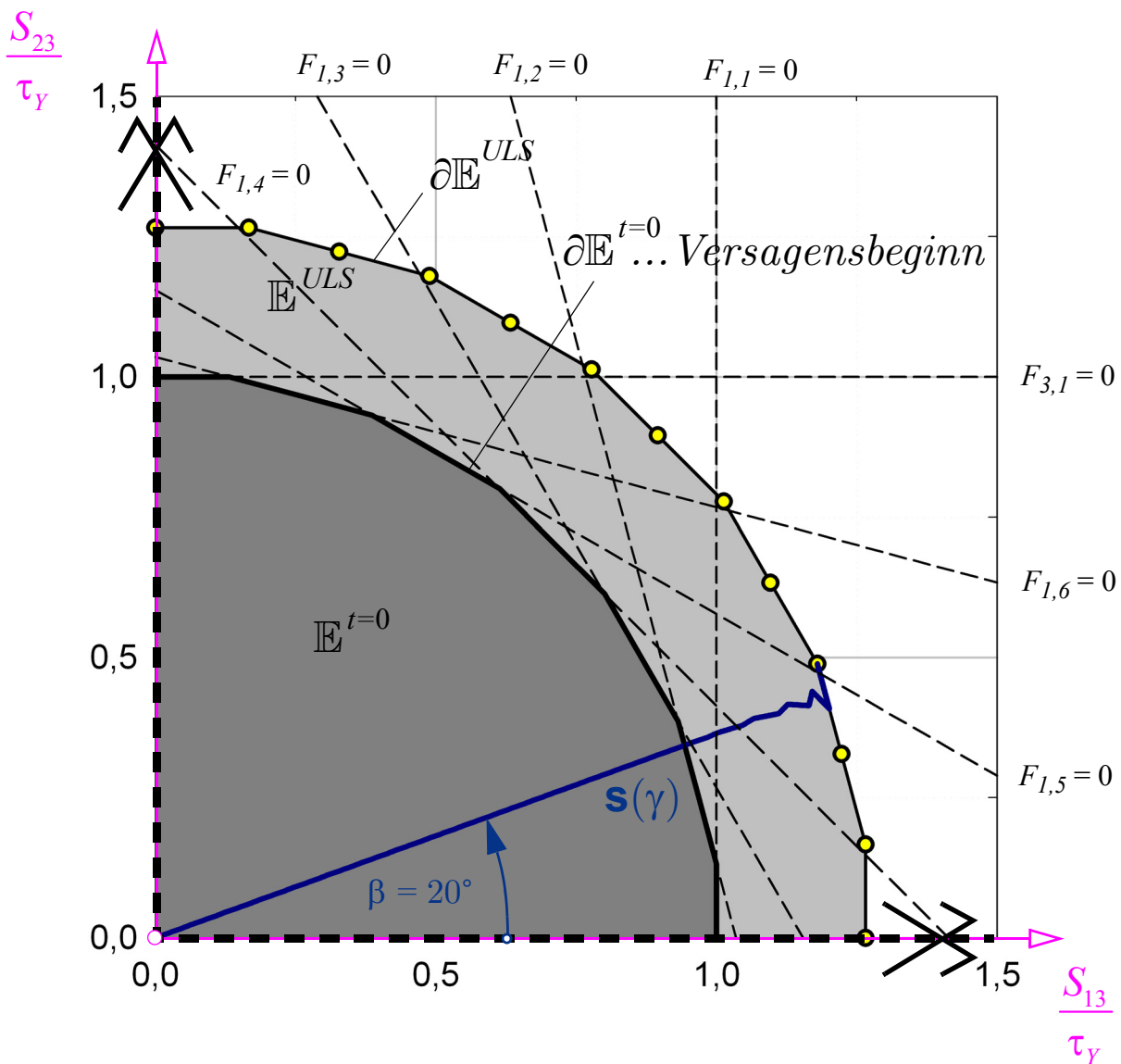


Bild 11.8 Erlaubter Bereich bei Versagensbeginn ($t=0$) und ULS des Makroelements im $\{S_{13}, S_{23}\}$ -Schubspannungsraum; Blau gezeichnet ist der Spannungsverlauf bei $\beta = 20^\circ$ und monoton ansteigender Schubverzerrung $\Gamma > 0$

mit variierendem Winkel β aufgebracht und der Schubwinkel Γ so lange erhöht, bis der makroskopische Limitschubspannungszustand erreicht wird. Interessant ist, dass diese Tragspannungspunkte bei der verzerrungsgesteuerten Belastung für bestimmte Wertebereiche von β ident sind. In Bild 11.8 sind diese 12 Spannungszustände im Bereich $0 \leq \beta < 90^\circ$ mit gelben Punkten gekennzeichnet. Ursache dafür ist das in Kap. 9.6.2.3 beschriebene Tragverhalten des Mikroelements. Mit den drei möglichen Grenzspannungszuständen aus Gleichung (9-41) lassen sich die makroskopischen Limitspannungen mit

$$\frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13,ULS} \\ S_{23,ULS} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_Y} \left(\sum_{\alpha_k < \beta} \frac{v_k}{V} \mathbf{s}_{I,k} + \sum_{\alpha_k = \beta} \frac{v_k}{V} \mathbf{s}_{II,k} + \sum_{\alpha_k > \beta} \frac{v_k}{V} \mathbf{s}_{III,k} \right) \quad (11-35)$$

bestimmen. Die makroskopischen Tragspannungen bei verzerrungsgesteuerter Belastung ergeben sich mit $\Gamma \rightarrow \infty$ zu:

$$\frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13,ULS} \\ S_{23,ULS} \end{bmatrix} = \frac{(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})}{6} \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12}i\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}i\right) \end{bmatrix}, & \beta = \frac{\pi}{12}i \\ \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{24}(2i+1)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{24}(2i+1)\right) \end{bmatrix}, & \frac{\pi}{12}i < \beta < \frac{\pi}{12}(i+1) \end{cases} \quad (11-36)$$

Die Variable i ist Element der ganzen Zahlenmenge. In Bild 11.8 ist exemplarisch der Spannungspfad für $\beta = 20^\circ$ bei monoton anwachsendem Schubgleitwinkel Γ dunkelblau eingezeichnet. Der Grenzspannungszustand zufolge (11-36) ist in diesem Fall (mit $\beta = 20^\circ$ und daher $i = 1$):

$$\frac{1}{\tau_Y} \begin{bmatrix} S_{13,ULS} \\ S_{23,ULS} \end{bmatrix} = \frac{1}{6(-1 + \sqrt{3})} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ -1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1797 \\ 0.4886 \end{bmatrix} \quad (11-37)$$

Der Bereich \mathbb{E}^{ULS} des Makroelements ist durch ein regelmäßiges 24-Eck mit den linearen Funktionen

$$\begin{aligned} F_{1,k,ULS}(\mathbf{s}) &= +\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'1',k}^T \mathbf{s} - R_{ULS} = +\frac{1}{\tau_Y} (c_k S_{13} + s_k S_{23}) - R_{ULS} \\ F_{2,k,ULS}(\mathbf{s}) &= -\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'1',k}^T \mathbf{s} - R_{ULS} = -\frac{1}{\tau_Y} (c_k S_{13} + s_k S_{23}) - R_{ULS} \\ F_{3,k,ULS}(\mathbf{s}) &= +\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'2',k}^T \mathbf{s} - R_{ULS} = \frac{1}{\tau_Y} (-s_k S_{13} + c_k S_{23}) - R_{ULS} \\ F_{4,k,ULS}(\mathbf{s}) &= -\frac{1}{\tau_Y} \mathbf{p}_{3'2',k}^T \mathbf{s} - R_{ULS} = \frac{1}{\tau_Y} (+s_k S_{13} - c_k S_{23}) - R_{ULS} \end{aligned} \quad k \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad (11-38)$$

begrenzt. Der Inkreis hat den Radius:

$$R_{ULS} = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} = 1.266 \quad (11-39)$$

Da alle Mikroelemente bei Schubbeanspruchung einen plastischen Tragspannungszustand erreichen, hat auch das Makroelement eine plastische Tragspannung.

11.6 Tragspannungsberechnung eines Polykristalls

11.6.1 Systembeschreibung

In diesem Abschnitt werden die plastischen Tragspannungen und Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen von drei Polykristallen berechnet und analysiert, die sich jeweils aus MSS-, FCC-, und BCC-Kristallen aufbauen (siehe Beispiel in Kap. 9.7). Der Polykristall wird mittels des Einkornaggregatmodells aus Kap. 10.5 beschrieben. Es gilt die kinematische Festlegung $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ und damit $\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{(6,6)}$ (Voigt'sches Polykristallmodell).

11.6.1.1 Isotropie & Quasiisotropie

Die mechanischen Eigenschaften der Einzelkristalle sind i.A. richtungsabhängig und bezüglich der jeweiligen Materialhauptachsen angegeben. Die Orientierungen dieser Koordinatenachsen sind innerhalb des Polykristalls gleichförmig verteilt oder - nach Reuss (1929) - „ideal ungeordnet“. Die ODF hat den Wert eins. Aufgrund dieser Gleichverteilung ergibt sich für den Polykristall im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ richtungsunabhängiges mechanisches Verhalten, also Isotropie. Durch die zur Berechnung notwendige Diskretisierung wird dieser Grenzfall durch eine diskrete Zahl von Mikroelementen beschrieben. Dadurch wird die Isotropie nur angenähert. Diese Eigenschaft wird als „Quasiisotropie“ bezeichnet.

11.6.1.2 Allgemeine mechanische Eigenschaften des Polykristalls

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Polykristalls wird durch die Eigenschaften der Einzelkristalle bestimmt. Die beiden wesentlichen Eigenschaften, die alle drei Kristalle besitzen, sind die isotrope Elastizität (Kap. 9.7.1) und die Ausbildung von plastischen Verzerrungen durch Aktivierung von Schubmechanismen (Kap. 9.7.2 und Kap. 4.3). Daraus ergibt sich, dass bei Aufbringung eines volumetrischen makroskopischen Verzerrungszustandes \mathbf{E}_{vol} der Polykristall stets linear elastisch reagiert und nur hydrostatische makroskopische Spannungszustände \mathbf{S}_{vol} geweckt werden (Kap. 9.7.2.3). Die nachfolgenden Tragspannungsberechnungen sind daher nur bei Aufbringung von deviatorischen Verzerrungszuständen sinnvoll.

11.6.1.3 Vorgegebene Verzerrungszustände

Ein deviatorischer Verzerrungszustand ist entweder ein beliebiger Schubspannungszustand, bei welchem die Normalverzerrungen null sind, oder ein Normalverzerrungszustand der Form:

$$\mathbf{E}_{dev} = \Lambda \overline{\mathbf{E}}_{dev} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathbf{E}}_{dev} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (11-40)$$

Der Winkel θ ist beliebig vorgebar. Der Referenzverzerrungszustand, gekennzeichnet

durch den Überstrich, wird mit dem Lastfaktor Λ erhöht.

Aufgrund des Aufbaus des Polykristalls müssen alle Verzerrungszustände mit denselben Hauptnormalverzerrungen, dieselben Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge und Tragspannungen liefern. Wie durch die nachfolgenden Rechnungen gezeigt wird, weichen die Ergebnisse aufgrund der Diskretisierung der Raumorientierungen von dieser Isotropieforderung leicht ab (= Quasiisotropie). Die Größenordnung dieser Abweichungen soll durch Vergleich von verschiedenen Verzerrungszuständen mit gleichen Hauptnormalverzerrungen untersucht und aufgezeigt werden.

Als weitere Folge der Isotropie bzw. trotz Quasiisotropie - wie sich zeigen wird, sind die Abweichungen zur Isotropie marginal -, werden die Ergebnisse der Tragspannungsrechnungen in der deviatorischen Ebene des Hauptnormalspannungsraumes (siehe Bild 11.11) dargestellt. Dazu werden die Haigh-Westergaard-Koordinaten (Kap. F.2.3)

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{2J_2} \\ \theta &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)\end{aligned}\quad (11-41)$$

verwendet. Die dritte HW-Koordinate ξ ist aufgrund der Exklusion von hydrostatischen Zuständen stets null.

11.6.1.4 Elastische Materialsteifigkeitsmatrix & elastischer Bereich

Aufgrund der Isotropie der mikroskopischen Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{c} entspricht diese der makroskopischen Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} . Zu Belastungsbeginn sind keine plastischen Verzerrungen und residualen Spannungen vorhanden und daher gilt $\mathbf{S} = \mathbf{s}$. Plastisches Verformungsverhalten des Polykristalls beginnt, sobald im ersten Einzelkristall ein plastischer Schubmechanismus aktiviert wird. Je Einzelkristall gibt es $N = 2N_s$ Versagensbedingungen $F_{i,k}(\mathbf{s} = \mathbf{S})$ des Typs (9-44). Im ideal-isotropen Grenzfall geht die Anzahl M der Mikroelemente bzw. der Einzelkristalle gegen unendlich. Die Definition des erlaubten Bereichs zu Belastungsbeginn ($t=0$) lautet:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{t=0} &= \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{R}^6 \mid F_{i,k}(\mathbf{S}, \mathbf{s}_{re,k} = \mathbf{0}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, \infty\} \right\} \\ \text{MSS: } N &= 10 \quad \text{FCC: } N = 24 \quad \text{BCC: } N = 96\end{aligned}\quad (11-42)$$

Unabhängig, aus welchem Kristalltyp der Polykristall aufgebaut ist, ist im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ in jeder Raumorientierung ein Schubmechanismus vorhanden. Aus diesem Grund wird der Versagensbeginn (*initial yield loci*) des Polykristalls durch eine isotrope Tresca-Versagensbedingung beschrieben:

$$\mathbb{E}^{t=0} = \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{R}^6 \mid F_{Tresca}(\mathbf{S}) \leq 0 \right\}\quad (11-43)$$

In der deviatorischen Ebene des Hauptspannungsraums (Bild 11.11) beschreibt diese Versagensbedingung ein Sechseck.

11.6.2 Tragspannungen & Spannungs-Verzerrungs-Diagramm

11.6.2.1 Diskretisierung

In der Berechnung wird zur Diskretisierung der Raumwinkel das McLaren-Verfahren mit den $M_r = 50$ Orientierungen und die Gauss-Quadratur mit 16 Integrationspunkten verwendet. Die Symmetrie der Mikroelemente wird genutzt, um den Rechenaufwand zu reduzieren; es müssen nur die ersten 25 McLaren-Orientierungen aus Box 10.2 betrachtet und die 16 Gauss-Winkelorientierungen von ϕ müssen nur im Intervall von 0 bis π berechnet werden. Der Polykristall wird somit durch $M = 400$ Einzelkristalle diskretisiert. Der äquivalente makroskopische Spannungszustand ist:

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^{25} \sum_{s=1}^{16} w_r w_s \mathbf{s} |_{\alpha_r, \beta_r, \phi_s} \quad (11-44)$$

11.6.2.2 Tragspannungsberechnung

Ausgangspunkt zur Berechnung der makroskopischen Limitspannung \mathbf{S}_{uls} ist die Anwendung des Prinzips der maximalen plastischen Arbeit (Kap. 9.7.4) auf den Polykristall. Mit der kinematischen Festlegung $d\mathbf{e}_{pl} = d\mathbf{E}_{pl}$ in diesem Grenzfall und dem Wissen, dass die plastische Arbeit bzw. die Dissipation jedes Mikroelements stets größer oder gleich null sein muss, ist der Maximierungsoperator auf jedes Einzelglied innerhalb des Mittelungsoperators anwendbar und es ergibt sich:

$$\mathbf{S}_{uls}^T d\mathbf{E}_{pl} = \max \left\{ \langle \mathbf{s}^T d\mathbf{e}_{pl} \rangle \right\} = \left\langle \max \left\{ \mathbf{s}^T d\mathbf{E}_{pl} \right\} \right\rangle = \left\langle \mathbf{s}_{uls}^T d\mathbf{E}_{pl} \right\rangle = \left\langle \mathbf{s}_{uls}^T \right\rangle d\mathbf{E}_{pl} \quad (11-45)$$

Der Berechnungsablauf ist wie folgt: die Verzerrungen $d\mathbf{E}_{pl}$ bzw. eine Spaltenmatrix in diese Richtung wird vorgegeben und für jedes der M Mikroelemente wird die Tragspannung \mathbf{s}_{uls} berechnet. Mit dem Mittelungsoperator (11-44) wird aus diesen M Tragspannungen die äquivalente Limitspannung \mathbf{S}_{uls} bestimmt.

11.6.2.3 Berechnung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen wird verzerrungsgesteuert berechnet. Die Verzerrungen werden allmählich erhöht und zu jedem Verzerrungszustand die zugehörigen aktiven Versagensmechanismen und Spannungen mit der im Hintergrund stehenden QP-Aufgabenstellung (Kap. 9.7) berechnet.

11.6.2.4 Lastfall 1 - Schublastfall

Es werden die Schubverzerrungs-Zustände

$$\mathbf{E}_{LF1} = \gamma_{ij} \overline{\mathbf{E}}_{LF1} \quad \begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}_{LF1a} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \overline{\mathbf{E}}_{LF1b} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ \overline{\mathbf{E}}_{LF1c} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \quad (11-46)$$

vorgegeben. Der Versagensbeginn des Polykristalls tritt bei der Schubverzerrung $\gamma_{ij} = \gamma_Y = \tau_Y/G$ ein, sobald ein Schubmechanismus eines Einzelkristalls die Limitspannung τ_Y erreicht. Der zugehörige Wert der HW-Koordinate ist:

$$\frac{\rho_{LF1,Yi}}{\tau_Y} = \sqrt{2} = 1.4142 \quad (11-47)$$

Aufgrund der Isotropie sollten sich für alle drei Verzerrungszustände dieselben Tragspannungswerte ergeben, durch die Diskretisierungen kommt es aber zu geringen Abweichungen in den plastischen Schubtragspannungen, wie sich aus den in Box 11.3. angegebenen Werten sehen lässt. Zusätzlich sind die Spannungen in den HW-Größen ausgedrückt. Nimmt man den ρ_{uls} -Wert des Lastfalls 1a als Bezugsgröße, weichen die ρ_{uls} -Werte der Lastfälle 1b und 1c bei allen drei Konglomerattypen um weniger als ein Promille vom gewählten Bezugswert ab. Die Quasiisotropie kann bei diesem Lastfall als erfüllt betrachtet werden.

Man sieht aus den tabellierten Schubtragspannungen, dass deren Wert geringer wird, je größer die Anzahl N_s der Schubmechanismen der Einzelkristalle ist. Der aus BCC-Kristallen aufgebaute Polykristall hat die geringste Schubtragspannung. Hat im Grenzfall bereits der Einzelkristall unendlich viele Schubmechanismen ($N_s \rightarrow \infty$), die alle Raumorientierungen zu potentiellen Gleitorientierungen machen, dann entspricht der Versagensbeginn, der durch die Tresca-Versagensbedingung beschrieben ist, auch dem plastischen Traglimit. In diesem Fall gilt:

$$\frac{\rho_{LF1,Yi}}{\tau_Y} = \frac{\rho_{uls}}{\tau_Y} = \sqrt{2} = 1.4142 \quad (11-48)$$

Aufgrund der zu vernachlässigenden Abweichungen in ρ zwischen den drei untersuchten Lastfällen, d.h. $\rho_{LF1a} \approx \rho_{LF1b} \approx \rho_{LF1c}$, ergibt sich für diese drei Lastfälle dieselbe charakteristische ρ -Schubverzerrungskurve. Diese sind für jeden Polykristalltyp bei vorgegebener und monoton anwachsender Schubverzerrung γ_{ij} in Bild 11.9 dargestellt.

Lastfall 1: Tragzustand bei Schubverzerrung				
Typ	Lastfall	Limitschubspannungen	$\frac{\rho_{uls}}{\tau_Y} = \frac{\sqrt{2J_2}}{\tau_Y}$	θ [deg]
MSS	LF 1a	$S_{12,uls}/\tau_Y = 2.1550$	3.0477	330°
	LF 1b	$S_{13,uls}/\tau_Y = 2.1572$	3.0507	210°
	LF 1c	$S_{23,uls}/\tau_Y = 2.1571$	3.0506	90°
FCC	LF 1a	$S_{12,uls}/\tau_Y = 1.6539$	2.3390	330°
	LF 1b	$S_{13,uls}/\tau_Y = 1.6524$	2.3368	210°
	LF 1c	$S_{23,uls}/\tau_Y = 1.6524$	2.3368	90°
BCC	LF 1a	$S_{12,uls}/\tau_Y = 1.5514$	2.1941	330°
	LF 1b	$S_{13,uls}/\tau_Y = 1.5515$	2.1941	210°
	LF 1c	$S_{23,uls}/\tau_Y = 1.5515$	2.1941	90°

Box 11.3 Plastische Limitspannungen und Haigh-Westergaard-Koordinaten der drei Polykristalle bei vorgegebener Schubverzerrung

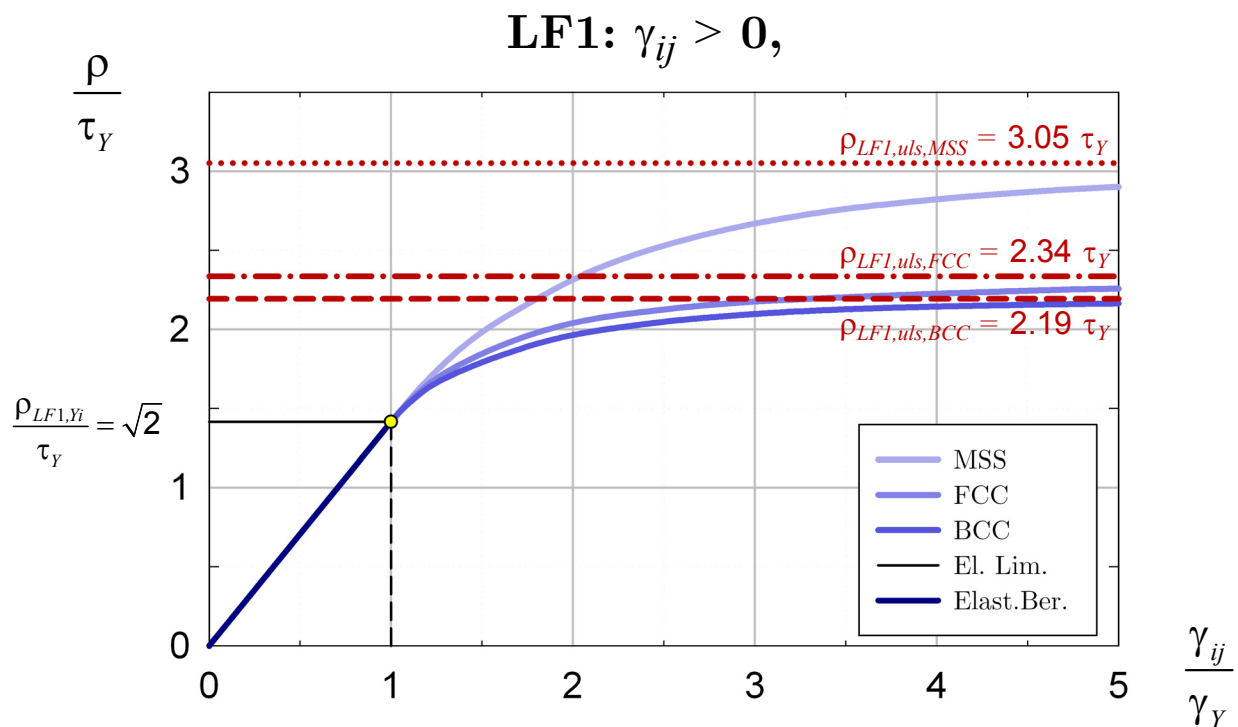


Bild 11.9 Spannungs-Verzerrungs-Verlauf der drei Polykristalle bei vorgegebener, monoton anwachsender Schubverzerrung

11.6.2.5 Lastfall 2 - deviatorischer Normalverzerrungszustand

Als zweite Lastsituation werden die drei deviatorischen Verzerrungszustände

$$\mathbf{E}_{LF2} = E_{ii} \overline{\mathbf{E}}_{LF} \quad \begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}_{LF2a} &= \frac{1}{2} [2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ \overline{\mathbf{E}}_{LF2b} &= \frac{1}{2} [-1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ \overline{\mathbf{E}}_{LF2c} &= \frac{1}{2} [-1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (11-49)$$

untersucht. Die steuernde Größe ist die Normalverzerrung E_{ii} . Bei der Verzerrung $E_{ii} = 2/3\gamma_y$, beginnt der erste Einzelkristall plastisch zu gleiten. Der zu diesem Spannungszustand zugehörige Radius ρ in der deviatorischen Ebene ist:

$$\frac{\rho_{LF2,ii}}{\tau_y} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.6330 \quad (11-50)$$

Aufgrund der Quasiisotropie kommt es wiederum zu geringfügigen Abweichungen von bis zu ca. 1.5 Promille vom jeweiligen Referenzwert $\rho_{LF2a,uls}$ in den Tragspannungen der drei Lastfälle (2a, 2b und 2c) (Box 11.4). Wie bereits bei Lastfall 1 kann $\rho_{LF2a} \approx \rho_{LF2b} \approx \rho_{LF2c}$ angenommen werden.

Lastfall 2: Tragzustand bei deviatorischer Verzerrung				
Typ	Lastfall	Limitnormalspannungen $S_{11,uls}/\tau_y, S_{22,uls}/\tau_y, S_{33,uls}/\tau_y$	$\frac{\rho_{uls}}{\tau_y} = \frac{\sqrt{2J_2}}{\tau_y}$	θ [deg]
MSS	LF 2a	2.5210, -1.2711, -1.2498	3.0876	0°
	LF 2b	-1.2727, 2.5205, -1.2478	3.0870	120°
	LF 2c	-1.2624, -1.2624, 2.5249	3.0923	240°
FCC	LF 2a	2.0473, -1.0514, -0.9960	2.5078	0°
	LF 2b	-1.0514, 2.0473, -0.9960	2.5078	120°
	LF 2c	-1.0230, -1.0230, 2.0461	2.5059	240°
BCC	LF 2a	1.8380, -0.9314, -0.9066	2.2511	0°
	LF 2b	-0.9314, 1.8380, -0.9066	2.2511	120°
	LF 2c	-0.9191, -0.9191, 1.8383	2.2514	240°

Box 11.4 Plastische Limitspannungen und Haigh-Westergaard-Koordinaten der drei Polykristalltypen bei vorgegebener deviatorischer Normalverzerrung

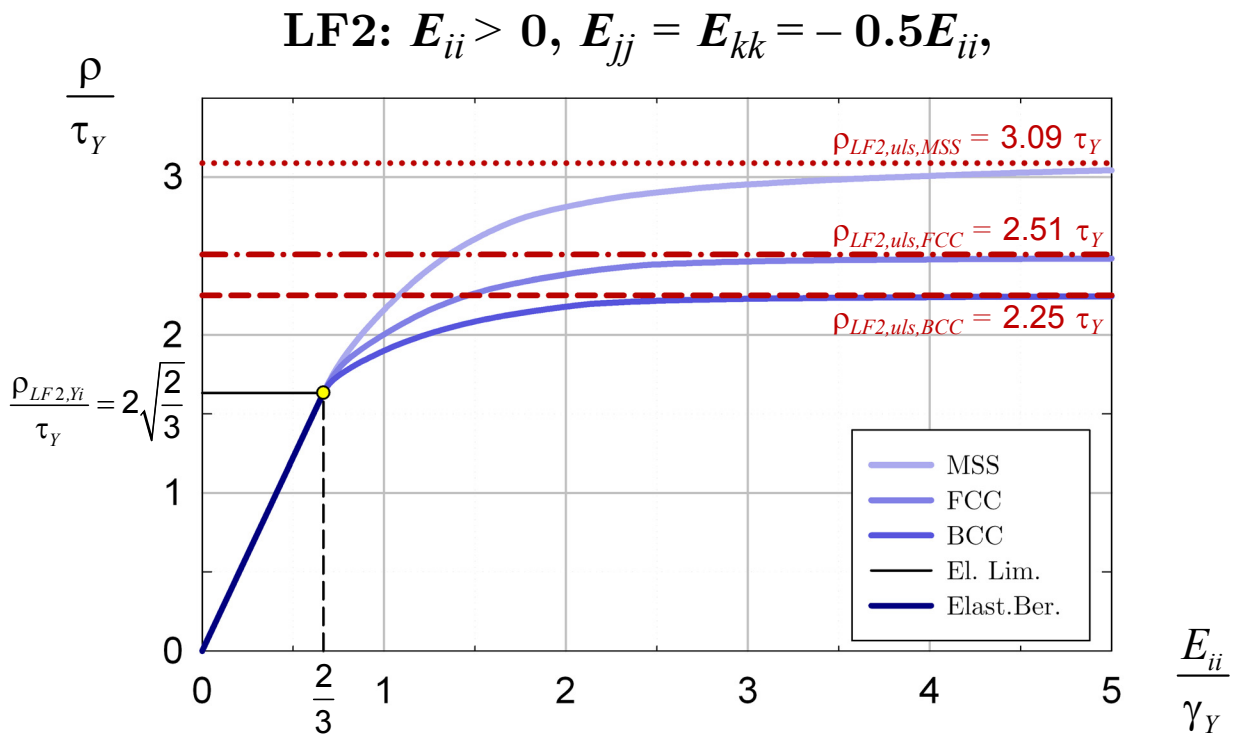


Bild 11.10 Spannungs-Verzerrungs-Verlauf der drei Polykristalltypen bei vorgegebener, monoton anwachsender deviatorischer Normalverzerrung

11.6.3 Berechnung des Tragspannungszustandes

11.6.3.1 Tragspannungsberechnung und Darstellung des ULS im Spannungsraum

Zuvor wurden für zwei eingeprägte deviatorische Verzerrungen die Tragspannungen und das Spannungs-Verzerrungs-Verhalten berechnet. Um sich ein komplettes Bild über die plastischen Tragspannungen der drei Polykristalltypen zu machen, werden für die deviatorischen Verzerrungszustände aus Gleichung (11-40) im Winkelbereich $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ die zugehörigen Limitspannungen berechnet. Aufgrund der Quasiisotropie muss nur dieser eingeschränkte Winkelbereich betrachtet werden. Die sich ergebenden Limitspannungen werden mit Gleichungen (11-41) in die zugehörigen Haigh-Westergaard Koordinaten umgerechnet und in die deviatorische Ebene des Hauptnormalspannungsraums eingetragen (Bild 11.11).

Der plastische Versagensbeginn $\mathbb{E}^{t=0}$ ist durch die Tresca-Versagensbedingung (11-43) beschrieben. In den HW-Koordinaten ergibt sich:

$$\rho_{Yi}(\theta) = \rho_{Tresca}(\theta) = \frac{\sqrt{2}\tau_Y}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (11-51)$$

Die Lastfälle aus Kap. 11.6.2 und die zugehörigen plastischen Spannungslimits sind ebenso in Bild 11.11 einzeichnbar. Die Situation von Lastfall 2 tritt bei den θ -Winkeln 0° (LF2a),

120°(LF2b) und 240°(LF2c) auf. Der Radius im ULS hat den Wert $\rho_{LF2,uls}$ und bei Versagensbeginn den Wert $\rho_{LF2,yi}$ (11-50). Die zuvor untersuchten Schublastfälle entsprechen einem deviatorischen Normalspannungspunkt bei den θ -Winkeln 330°(LF1a), 210°(LF1b) und 90°(LF1c) mit dem Radius $\rho_{LF1,uls}$ im Limitspannungspunkt und dem Wert $\rho_{LF1,yi}$ (11-47) bei Versagensbeginn.

In Bild 11.12 sind die Verläufe $\rho_{uls}(\theta)$ bezogen auf die Radiuswerte ρ_{yi} (11-51) bei Versagensbeginn dargestellt. Anhand dieser Graphen ist die Steigerung vom Versagensbeginn des Polykristalls (der erste Einzelkristall erreicht die Elastizitätsgrenze, *initial yield loci*) bis zum plastischen Grenzzustand (alle Einzelkristalle haben den plastischen Grenzspannungszustand erreicht, *ultimate yield loci*) bzw. die plastische Tragreserve ablesbar.

11.6.3.2 Approximative Beschreibung des ULS & vereinfachtes makroskopisches Materialmodell

Die Angabe einer expliziten Funktion für die Punkte des ULS - wie das zum Teil in den Beispielen der vorangegangenen Kapitel möglich war - ist für den Polykristall nicht möglich. Die in Bild 11.11 bzw. Bild 11.12 dargestellten Kurven sind aber durch die von Bigoni entwickelte Funktion (Kap. F.3.2) sehr gut annäherbar. Die einfachste Approximation für die ULS-Kurven in der deviatorischen Ebene wäre jeweils ein Kreis, also die klassische, isotrope Mises-Versagensbedingung.

11.6.4 Zusammenfassung

Die Eigenschaften der Einzelkristalle (Mikroelemente) manifestieren den Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und das Tragverhalten des Polykristalls. Es werden drei unterschiedliche kristalline Systeme beschrieben und untersucht. Dabei werden nur eingeprägte deviatorische Verzerrungen betrachtet und zugehörige Spannungs-Verzerrungs-Verläufe und plastische Spannungslimits berechnet. Die Berechnung der Limitspannungen der Einzelkristalle erfolgt auf zwei unterschiedliche Methoden, wobei bei dem ersten Verfahren eine QP-Aufgabe zu lösen ist und beim zweiten Verfahren eine LP-Aufgabe. Das zweite Verfahren wird aufgrund der enormen Rechensparnis zur Berechnung der Limitspannungen des Polykristalls verwendet. Die drei Polykristalltypen müssen sich aufgrund des festgelegten Modellaufbaus isotrop verhalten, was durch die Berechnungen, abgesehen von marginalen Abweichungen aufgrund der Diskretisierung, bestätigt wird. Der berechnete Versagensbeginn und der plastische Limitspannungszustand lassen sich in der deviatorischen Ebene des Hauptnormalspannungsraums darstellen.

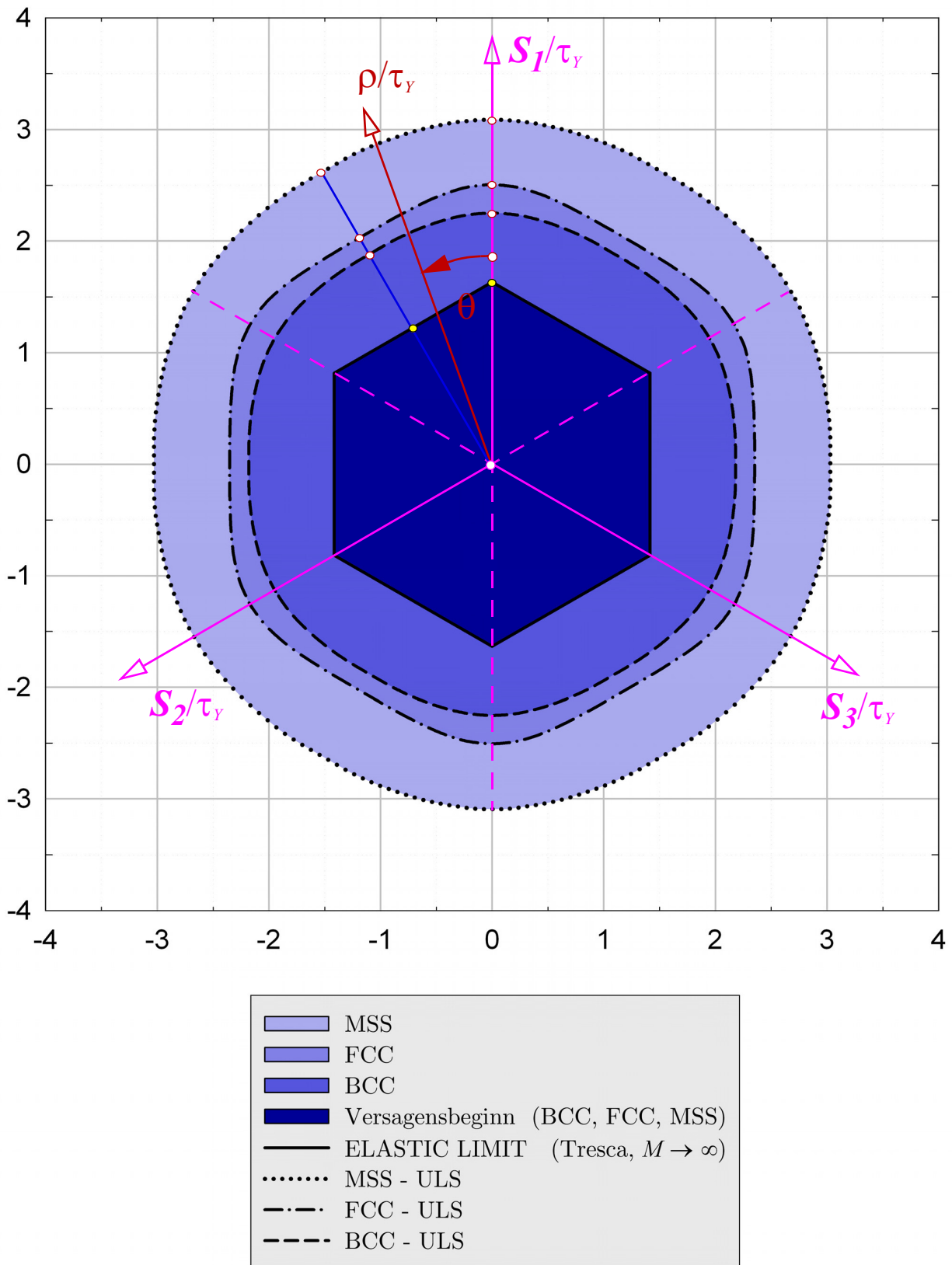


Bild 11.11 Darstellung des elastischen Bereichs und des ULS des MSS-, FCC- und BCC-Polykristalls in der deviatorischen Ebene des Hauptnormalspannungsraumes

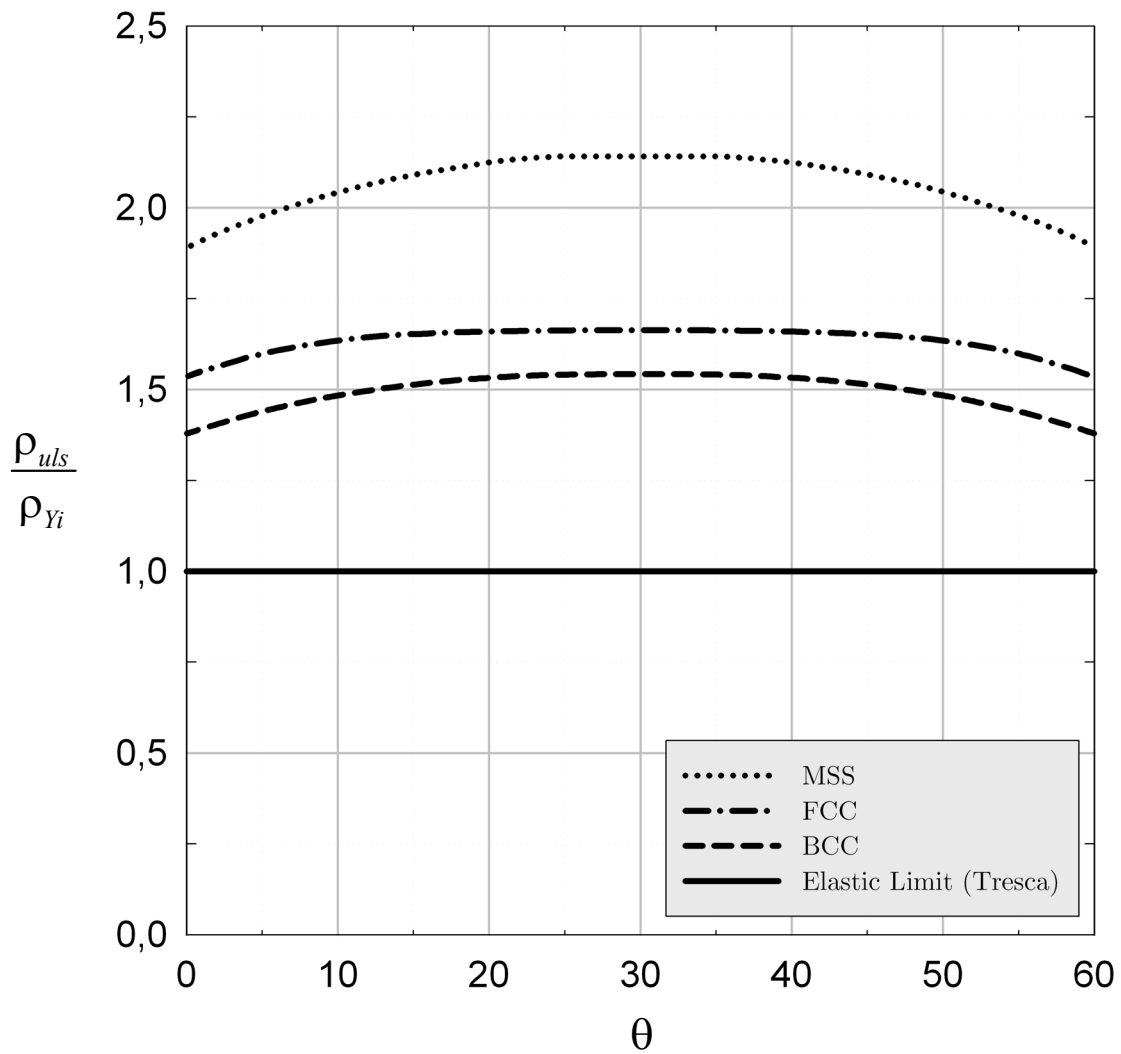


Bild 11.12 Darstellung des Verlaufs von $\rho_{uls}(\theta)$ bezogen auf $\rho_{Yi}(\theta) = \rho_{Tresca}(\theta)$ aus (11-51)

11.7 Microplane Modell - Darstellung, kritische Untersuchung und Vergleich

11.7.1 Einleitung & Kapitelübersicht

Das in diesem Abschnitt dargestellte, als Microplane Modell bezeichnete, Mikrostrukturmodell wurde von Z. D. Bažant und Mitarbeitern 1983 formuliert und wird bis heute weiterentwickelt. Dieses Modell wird überwiegend zur Beschreibung des Spannungs-Verzerrungs-Verhaltens von Beton, aber auch anderer Materialien, wie Fels, Lehm, Kornhaufwerke usw., eingesetzt. Ein Überblick über die verschiedenen Arbeiten zu diesem Modell findet sich in Jirásek/Bažant (2002) und Leukart (2005).

Es werden nachfolgend nur Microplane Modelle betrachtet, die dem sogenannten *kinematic constraint* unterliegen. Damit ist die Übereinstimmung der makroskopischen Verzerrungen mit den Mikroelementverzerrungen gemeint. Diese kinematische Festlegung wurde auch zur Beschreibung des Mikrostrukturmodells in Kap. 10 verwendet, was einen Vergleich der beiden Modelle erlaubt.

Da es unterschiedliche Unterformen des Microplane Modells gibt, wird zur Unterscheidung die Kurzbezeichnungssystematik (Modell M1 bis M5) von Jirásek/Bažant (2002) bzw. Carol/Jirásek/Bažant (2004) und zusätzlich dazu das Bezeichnungsschema von Leukart (2005) verwendet. Von besonderem Interesse sind

- das von Bažant/Gambarova (1984) und Bažant/Oh (1985) entwickelte Modell mit der Kurzbezeichnung M1 bzw. in der Arbeit von Leukart (2005) als Microplane Modell mit N-Split bezeichnete Modell und
- das in Bažant (1984) beschriebene Microplane Modell M1 bzw. von Leukart (2005) als Microplane Modell mit N-T-Split bezeichnete Modell.

Bei diesen zwei Modellen lässt sich eine direkte Querverbindung zu den oben gezeigten einfachen Mikrostrukturmodellen aus Kap. 11.4 herstellen. Die auftretenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden in diesem Kapitel ausgearbeitet. Zur Einschränkung wird nur elastisches Materialverhalten betrachtet.

Um den Bezug zu den Arbeiten zum Microplane Modell unmittelbar einzusehen, wird die symbolische Tensorschreibweise (siehe Anhang A) verwendet.

11.7.1.1 Kapitelübersicht

In den Kap. 11.7.2 bis Kap. 11.7.5 werden die grundsätzlichen Modellvorstellungen und -festlegungen des Microplane Modells herausgearbeitet, kritisch untersucht und dem Mikrostrukturmodell von Kap. 11.4 gegenübergestellt. In den beiden anschließenden Abschnitten (Kap. 11.7.6 und Kap. 11.7.7) wird das elastische Materialverhalten des Microplane Modells mit N- und N-T-Split mit den Beispielen aus Kap. 11.4 verglichen.

Anschließend wird ein kurzer Überblick über weitere Microplane Modelle gegeben und abschließend ein zusammenfassender kritischer Vergleich von dem hier ausgearbeiteten generellen Mikrostrukturmodell zum Microplane Modell durchgeführt.

11.7.2 Microplane Modell: Modellvorstellung & Begriffsbildung

Ausgangspunkt des Microplane Modells ist eine einfache mikrostrukturelle Vorstellung eines Aggregats, z.B. eines Kornhaufwerks wie Beton, bestehend aus Zuschlagstoffen, die durch Kontaktelemente miteinander verbunden sind (Bild 11.13 a). Es wird angenommen, dass die Deformation der Zuschlagstoffe im Vergleich zu den Kontaktschichten gering ist. Vereinfachend wird daher festgelegt, dass die Zuschlagstoffe starr sind und nur die Kontaktkörperchen die makroskopische Spannungs-Verzerrungs-Relation und das Versagensverhalten bestimmen. Diese Kontaktkörper zwischen den Zuschlagstoffen werden von Bažant als *Microplane* bezeichnet; Bažant/Gambarova (1984):

„The microplanes may be imagined to represent mainly these thin contact layers of matrix and the bond planes between adjacent aggregate pieces, ...“

Die räumliche Lage dieser dünnen Kontaktelemente wird durch den Einheitsvektor \mathbf{n} , der normal auf die Kontaktfläche zu den Zuschlagstoffen steht, angegeben (Bild 11.13 a). Dieser Vektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$ legt auch die primäre materielle Bezugsachse des Kontaktelementes fest. Die Spitze des Einheitsvektors $\mathbf{n}(\alpha, \beta)$ im Wertebereich $\alpha \in [0, 2\pi]$ und $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ beschreibt die Oberfläche einer Einheitskugel. Die Verteilung der Kontaktelementorientierungen wird in Bažant/Gambarova (1984) durch eine Funktion beschrieben, die der bereits bekannten Orientierungsverteilungsfunktion $\Omega(\mathbf{n})$ entspricht. Ist die Orientierung gleich verteilt, hat die Funktion den Wert eins.

Mit dieser Modellvorstellung werden von Bažant/Gambarova (1984) zwei Ziele verfolgt:

- die Beschreibung der Ausbildung von Trennbrüchen in den Kontaktschichten bzw. in Bruchebenen mit der Orientierungen \mathbf{n} und
- die Bestimmung der gesamten Spannungs-Verzerrungs-Relation des Aggregats, die sich aus dem Spannungs-Verzerrungs-Verhalten der einzelnen Kontaktelemente ergibt.

11.7.2.1 Kritische Betrachtung der Modellvorstellung und der gewählten Begriffe

Wird die Beschreibung von flächenhaft stattfindendem Bruchversagen in den Vordergrund gestellt, ist die Verwendung des Begriffs Microplane vertretbar, da es im Bruchgeschehen zu allmählicher Trennflächenbildung kommt und diese - der formulierten Modellvorstellung nach - in den Kontaktschichten zwischen den Zuschlagstoffen in Ebenenorientierungen mit dem Normalenvektor \mathbf{n} stattfindet, sofern deren Festigkeit wesentlich geringer als die Bruchfestigkeit der Zuschlagstoffe ist. Das Kontaktelement hat also eine Versagensebenenorientierung \mathbf{n} .

Soll die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Aggregats, die sich summativ aus dem Materialverhalten der Microplanes ergibt, beschrieben werden, ist die Wahl des Begriffes

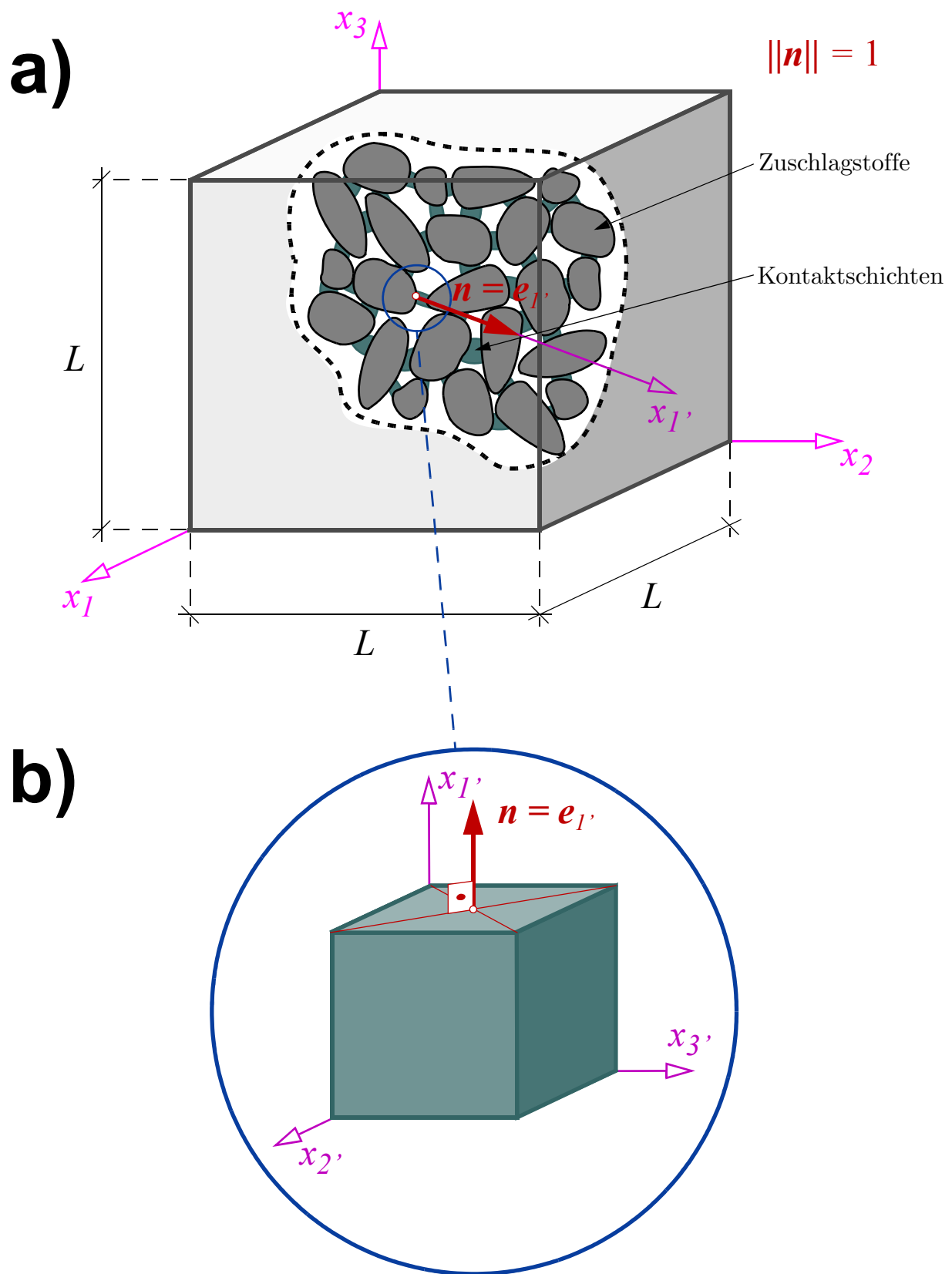


Bild 11.13a) Korngerüst mit Kontaktelementen; die Orientierungen dieser Kontaktschichten werden durch den Einheitsvektor n angegeben; b) Kontaktvolumenelement (= Micro-„Plane“ Element)

„Microplane“ nicht sehr glücklich. Dabei wird die Vorstellung einer „materiellen Ebene“ vermittelt. Dieser Term wird zum Beispiel in der Arbeit von Kuhl/Steinmann/Carol (2001) verwendet:

*„The generic name „microplane theory“ was coined in order to demonstrate that the concept of defining constitutive laws on characteristic **material planes** was not restricted to plasticity but could be applied to any kind of material behavior.“*

Auch die Mikroplane-Elemente sollten, auch wenn angenommen wird, dass sie sehr dünn sind, eine Elementdicke haben. In Bild 11.13 ist das Kontaktelement als Mikroelement mit endlicher Dicke gezeichnet. Die materiellen Bezugsachsen sind durch die drei x_i -Achsen gekennzeichnet, wobei die x_1 -Achse in Richtung des Vektors $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ weist.

Vorsicht: In diesem Fall gibt der Vektor \mathbf{n} keine (!) Versagensebenenorientierung an! Obwohl genau darin oft die Verwechslung mit anderen mikromechanischen Modellen liegt, wird trotzdem die Bezeichnung der Orientierung eines Einzelements mit \mathbf{n} beibehalten.

11.7.3 Kinematische Festlegung

Die makroskopischen Verzerrungen \mathbf{E} werden vorgegeben und die Mikroelementverzerrungen über eine affine Verzerrungsannahme berechnet. Auf dieser Festlegung basiert auch das Mikrostrukturmodell aus Kap. 10. Durch diese kinematische Annahme ist die Position des Mikroelements im makroskopischen Volumen nicht relevant, nur dessen Orientierung, die durch den Einheitsvektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, angegeben ist. Aus den makroskopischen Verzerrungen werden im Microplane Modell die Verzerrungskomponenten bezüglich des lokalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Achsensystems berechnet:

$$\begin{aligned} E_{nn} = E_{1'1'} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbf{E} = \mathbf{N} : \mathbf{E} \\ E_{1'2'} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) : \mathbf{E} = \mathbf{P}_{1'2'} : \mathbf{E} \\ E_{1'3'} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) : \mathbf{E} = \mathbf{P}_{1'3'} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (11-52)$$

Diese drei Komponenten bilden den Verzerrungsvektor der „materiellen Ebene“ mit der Ebenenorientierung \mathbf{n} :

$$\mathbf{E}_n = E_{1'1'}\mathbf{e}_1 + E_{1'2'}\mathbf{e}_2 + E_{1'3'}\mathbf{e}_3 = E_{nn}\mathbf{n} + \mathbf{E}_T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \quad (11-53)$$

Ist nur die Orientierung \mathbf{n} gegeben, lässt sich der Schubverzerrungsvektor \mathbf{E}_T mit dem Tensor \mathcal{T} dritter Stufe in Anteile parallel und normal zu \mathbf{n} zerlegen:

$$\mathbf{E}_T = E_{1'2'}\mathbf{e}_2 + E_{1'3'}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\gamma_{1'2'}\mathbf{e}_2 + \gamma_{1'3'}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n} \cdot \mathbb{P}_{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbf{E} = \mathcal{T} : \mathbf{E} \quad (11-54)$$

11.7.4 Materialbeschreibung & Zusatzannahmen

11.7.4.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Materialbeschreibung verknüpft die drei lokalen Verzerrungskomponenten aus (11-52) der Microplane mit der Orientierung \mathbf{n} mit den drei lokalen Spannungskomponenten $s_{1'1'}$, $= s_{nn}$, $s_{1'2'}$ und $s_{1'3'}$. Diese drei Spannungskomponenten bilden den Spannungsvektor:

$$\mathbf{s}_n = s_{1'1'} \mathbf{e}_{1'} + s_{1'2'} \mathbf{e}_{2'} + s_{1'3'} \mathbf{e}_{3'} = s_{nn} \mathbf{n} + \mathbf{s}_T \quad (11-55)$$

Die restlichen Verzerrungs- und Spannungskomponenten werden per Festlegung ausgeblendet. Jirásek/Bažant (2002) auf S. 496:

„The remaining tensorial strain components ε_{mm} , ε_{ll} and ε_{ml} (Anm.: $E_{2'2'}$, $E_{3'3'}$, $E_{2'3'}$) are assumed to have no influence on the stress vector on the microplane (Anm.: \mathbf{s}_n) with normal \mathbf{n} (this is certainly a simplification), but they are taken into account on microplanes with other normals.“

Diese Festlegung beinhaltet durch Ausblendung der drei Verzerrungs- und Spannungskomponenten, die nicht ein Bestandteil der Orientierung \mathbf{n} sind, eine Reduktion des materiellen Verhaltens. Ein Microplane Materialmodell verknüpft daher den Verzerrungsvektor \mathbf{E}_n (11-53) mit dem Spannungsvektor \mathbf{s}_n (11-54). Einen generellen Rahmen zur Formulierung von Microplane spezifischen Materialmodellen (Elastizität, Elasto-Plastizität und mit Schädigung) ist in Kuhl/Steinmann/Carol (2001) und der Dissertation von Leukart (2005) ausgearbeitet.

11.7.4.2 Linear-elastisches Microplane Materialverhalten

In der anschließenden Untersuchung wird nur linear elastisches Materialverhalten betrachtet. Der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang - bei Verwendung der Materialkonstantenbezeichnung \mathcal{E}_N und \mathcal{E}_T nach Leukart (2005) - lautet dabei:

$$\begin{bmatrix} s_{1'1'} = s_{nn} \\ s_{1'2'} \\ s_{1'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_N & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_T & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1'1'} = E_{nn} \\ E_{1'2'} \\ E_{1'3'} \end{bmatrix} \quad (11-56)$$

Interaktionen zwischen den drei Verzerrungen und Spannungen werden durch Gleichung (11-56) ausgeschlossen. Aufgrund der beiden gleichen Schubkonstanten \mathcal{E}_T wird transversale Isotropie um die $x_{1'}$ -Achse festgelegt.

11.7.4.3 Kritische Betrachtung der Materialbeschreibung im Microplane Modell und Vergleich mit dem generellen Mikrostrukturmodell

Die vereinfachte reduzierte Materialbeschreibung scheint auf den ersten Blick ein Gewinn zu sein, da sie nicht sechs Spannungsgrößen mit sechs Verzerrungsgrößen verbinden, son-

dern nur die drei oben angeschriebenen Verzerrungskomponenten mit den Spannungskomponenten in der Schnittebenenorientierung \mathbf{n} .

Im Gegensatz zu dem in Kap. 10 formulierten Mikrostrukturmodell wird aber im Microplane Modell keine konsistente Reduktion des Materialmodells ausgehend von einer kompletten 3D-Formulierung durchgeführt. Es werden keine allgemeingültigen und bereits vorhandenen 3D-Materialmodelle verwendet, sondern für die „materielle Ebene“ spezifische Materialmodelle, welche die drei Spannungs- und Verzerrungskomponenten in der Schnittorientierung \mathbf{n} miteinander verknüpfen, formuliert; Kuhl/Steinmann/Carol (2001) verwenden hierfür den Begriff *microplane based constitutive models*.

Durch diese Materialmodelle sind in der Modellentwicklungsgeschichte Einschränkungen, Widersprüche bzw. bei Erweiterungen schwer durchschaubare Eigenverhaltenscharakteristika entstanden, was zu weiteren Forschungen, Modifikationen und Korrekturen geführt hat. Als Beispiel seien einige markante Entwicklungsschritte der Modellhistorie stichwortartig umrissen:

- eingeschränktes elastisches Verhalten des Makroelementes; Bažant (1984), Bažant/Oh (1985),
- Behebung dieser Einschränkung durch Erweiterung um einen deviatorisch-volumetrischen Split, Bažant/Prat (1988),
- damit einhergehende Verletzung der Energiebilanz und abschließende Gegenkorrektur durch thermodynamisch konsistente Modelle, Carol/Jirásek/Bažant (2001), Kuhl/Steinmann/Carol (2001).

Durch Einführung des volumetrisch-deviatorischen Splits wird auch die zuvor festgelegte Vereinfachung aufgehoben, dass nur die drei in Gleichung (11-52) angegebenen Verzerrungskomponenten zur Modell- und Materialmodellbeschreibung notwendig sind, da ein volumetrischer Verzerrungszustand alle drei Normalverzerrungskomponenten - und damit auch die Verzerrungskomponenten $E_{2,2}$ und $E_{3,3}$ - beinhaltet.

Weiters wird den Microplane Materialmodellen nur eine beschränkte mechanische Eigenständigkeit zugestanden - was auch an der ad hoc Formulierung ohne zugrunde liegendes 3D-Materialmodell liegt -, da die Materialparameter der Microplane Materialmodelle so kalibriert und justiert werden, um das übergeordnete (makroskopische) in Versuchen beobachtbare Materialverhalten, bestmöglich wiederzugeben. Diese Vorgehensweise hat nicht unberechtigte Kritik aufkommen lassen, dass das Microplane Modell kein vollwertiges mikromechanisches, sondern ein heuristisches Modell ist (siehe Leukart (2005), S. 4, 107, 109).

11.7.5 Berechnung der makroskopischen Spannungen

Der Zusammenhang zwischen dem makroskopischen Verzerrungszustand und den drei Microplane Verzerrungskomponenten wird durch die kinematische Festlegung (*kinematic constraint*) fixiert. Mit diesen drei Verzerrungskomponenten \mathbf{E}_n werden über das lokale Ma-

terialmodell die drei Microplane Spannungskomponenten \mathbf{s}_n berechnet. Offen ist noch die Frage, wie aus den Spannungen \mathbf{s}_n der äquivalente makroskopische Spannungszustand \mathbf{S} berechnet wird. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die von Bažant/Gambarova (1984) angegebene Vorgehensweise zur Berechnung der makroskopischen Spannungen - die auch in allen weiteren Arbeiten zum Microplane Modell verwendet wurde und wird - sich von der Berechnung der äquivalenten Spannungen, Gleichung (10-16) mit dem Mittelungsoperator aus (10-34), im generellen Mikrostrukturmodell unterscheidet.

11.7.5.1 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannungen nach Bažant/Gambarova (1984)

Um den Zusammenhang zwischen den makroskopischen Spannungen und den Microplane Spannungen \mathbf{s}_n zu berechnen, wird von Bažant/Gambarova (1984) die virtuelle Arbeitsgleichung

$$\mathbf{S} : \underbrace{\delta \mathbf{E}}_{V_o} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \int_{A_o} \mathbf{s}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n \Omega(\mathbf{n}) dA_o = \delta \mathbf{E} : \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (s_{1'1'} \mathbf{N} + s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} + s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \Omega(\mathbf{n}) \cos \beta d\alpha d\beta \quad (11-57)$$

angegeben. Die Größe V_o ist das Volumen einer Einheitskugel und A_o deren Oberfläche. In einigen Arbeiten wird der Winkel β nicht (wie in dieser Arbeit) von der, um den Winkel α verschwenkten, x_1 -Achse, sondern von der vertikalen x_3 -Achse gezählt (siehe Bild 11.14). Eine Deutung des Arbeitsausdrucks (11-57) wird in Bažant/Xiang/Prat (1996) und in nahezu gleicher Form in Jirásek/Bažant (2002) S. 497 ausgesprochen:

„... the virtual work of macrostresses within a unit sphere (Anm.: linker Term von Gleichung (11-57)) must be equal to the virtual work of microstresses representing tractions on the surface elements of the sphere (Anm.: rechter Term von Gleichung (11-57)).“

Aus dem Arbeitsausdruck (11-57) ergeben sich die makroskopischen Spannungen \mathbf{S} des Microplane Modells:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{3}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (\mathbf{s}_n \otimes \mathbf{n}) \Omega(\mathbf{n}) \cos \beta d\alpha d\beta \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (s_{1'1'} \mathbf{N} + s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} + s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \Omega(\mathbf{n}) \cos \beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (11-58)$$

Aus den Arbeiten zum Microplane Modell ist nicht leicht herauszuarbeiten, wie der Ausdruck aus Gleichung (11-57) und damit die Berechnung der äquivalenten Spannungen (11-58) zustande kommt. Die meisten Arbeiten verweisen in diesem Punkt auf die originäre Arbeit von Bažant/Gambarova (1984) oder auf den Aufsatz von Bažant/Xiang/Prat

(1996). In erstem Aufsatz ist der Ausdruck (11-57) direkt angeschrieben; im zweiten Aufsatz ist eine etwas ausführlichere Diskussion angeführt, wobei die darin anfänglich formulierten Vorstellungen sich mit denen aus Kap. 10 decken, aber dann durch eine nicht im Detail diskutierte (da vermeintlich offensichtlich) Annahme (Bažant/Xiang/Prat (1996), S.247 zwischen Gleichung 5 und 6), doch der Ausdruck (11-57) resultiert, wobei die bereits oben zitierte Deutung, dass die virtuelle Arbeit der Makrospannungen innerhalb einer Einheitskugel gleich der virtuellen Arbeit der mikroskopischen Oberflächenspannungen seien, angeführt wird.

Es soll in diesem Abschnitt versucht werden, den Ursprung von Gleichung (11-57) ausgehend von dieser sprachlichen Deutung zu rekonstruieren.

11.7.5.2 Virtueller Arbeitsausdruck eines homogen beanspruchten Körpers

Homogen beansprucht bedeutet:

- die Verzerrungen \mathbf{E} im Körper sind konstant
- die Verschiebungen $\mathbf{U} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$ sind linear
- die Spannungen \mathbf{S} im Körper sind konstant; Volumenkräfte \mathbf{b} sind null
- die Spannungen an der Oberfläche sind $\mathbf{t} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}_n$

Der Körper ist im Gleichgewicht und es gilt:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_A \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{U} dA = 0 \quad (11-59)$$

Diese allgemeingültige Gleichung wird für zwei spezielle Geometrien, einen kugelförmigen Körper und einen pyramidenförmigen Körper, angeschrieben.

11.7.5.3 Gleichgewicht und virtueller Arbeitsausdruck eines homogen aufgebauten und beanspruchten kugelförmigen Körpers

Bei einem homogen beanspruchten kugelförmigen Körper mit dem Radius R ergeben sich die virtuellen Verschiebungen an der Kugeloberfläche A_o zu $\delta \mathbf{U} = R \delta \mathbf{E}_n$. Die virtuellen Arbeitsterme aus (11-59) sind:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_{V_o} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_o = - \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \underbrace{\left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}_{V_o} \\ \delta W_{ext} &= \int_{A_o} \mathbf{S}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n R dA_o = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{S}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n R^3 \cos \beta d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (11-60)$$

Damit ergibt sich die Äquivalenz:

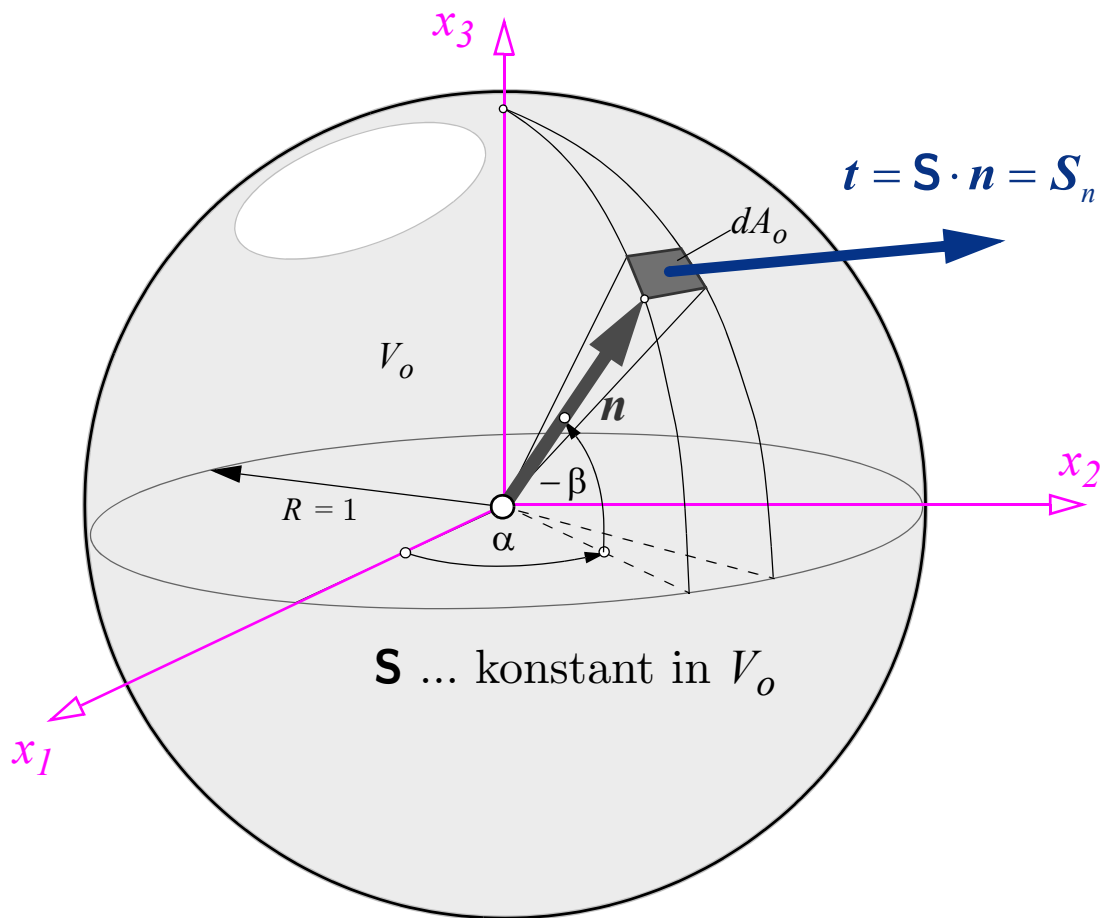


Bild 11.14 Kugelförmiger Volumenkörper mit dem Radius $R = 1$ unter konstanten Spannungen \mathbf{S} und mit den zugehörigen Oberflächenkräften \mathbf{t} . Der Körper ist im Gleichgewicht; es gilt $\mathbf{t} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}_n$. Innerhalb der Kugel greifen keine Volumenkräfte \mathbf{b} an.

$$\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{S}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \quad (11-61)$$

Gleichung (11-61) hat bereits Ähnlichkeiten mit Gleichung (11-57). Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass in (11-61) der Spannungsvektor \mathbf{S}_n sich aus dem konstanten Spannungstensor \mathbf{S} mit $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}_n$ berechnet. Im Gegensatz dazu ist in Gleichung (11-57) der Spannungsvektor \mathbf{s}_n abhängig von der Orientierung \mathbf{n} und es gilt $\mathbf{s}_n \neq \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$.

11.7.5.4 Virtueller Arbeitsausdruck einer geraden Pyramide mit rechteckiger Basisfläche

Gegeben ist ein Körper in der Form einer geraden Pyramide mit rechteckiger Basis- bzw. Grundfläche A_B und der Höhe h (Bild 11.15). Der Einheitsvektor \mathbf{n} kennzeichnet die Richtung der x_1 -Koordinatenachse von der Pyramidenspitze zur Mitte der Basisfläche und steht normal auf die Basisfläche. Der Koordinatenursprung liegt in der Pyramidenspitze. Die vier Einheitsnormalvektoren der Seitenflächen $A_{M,i}$ (der Index i läuft von eins bis vier),

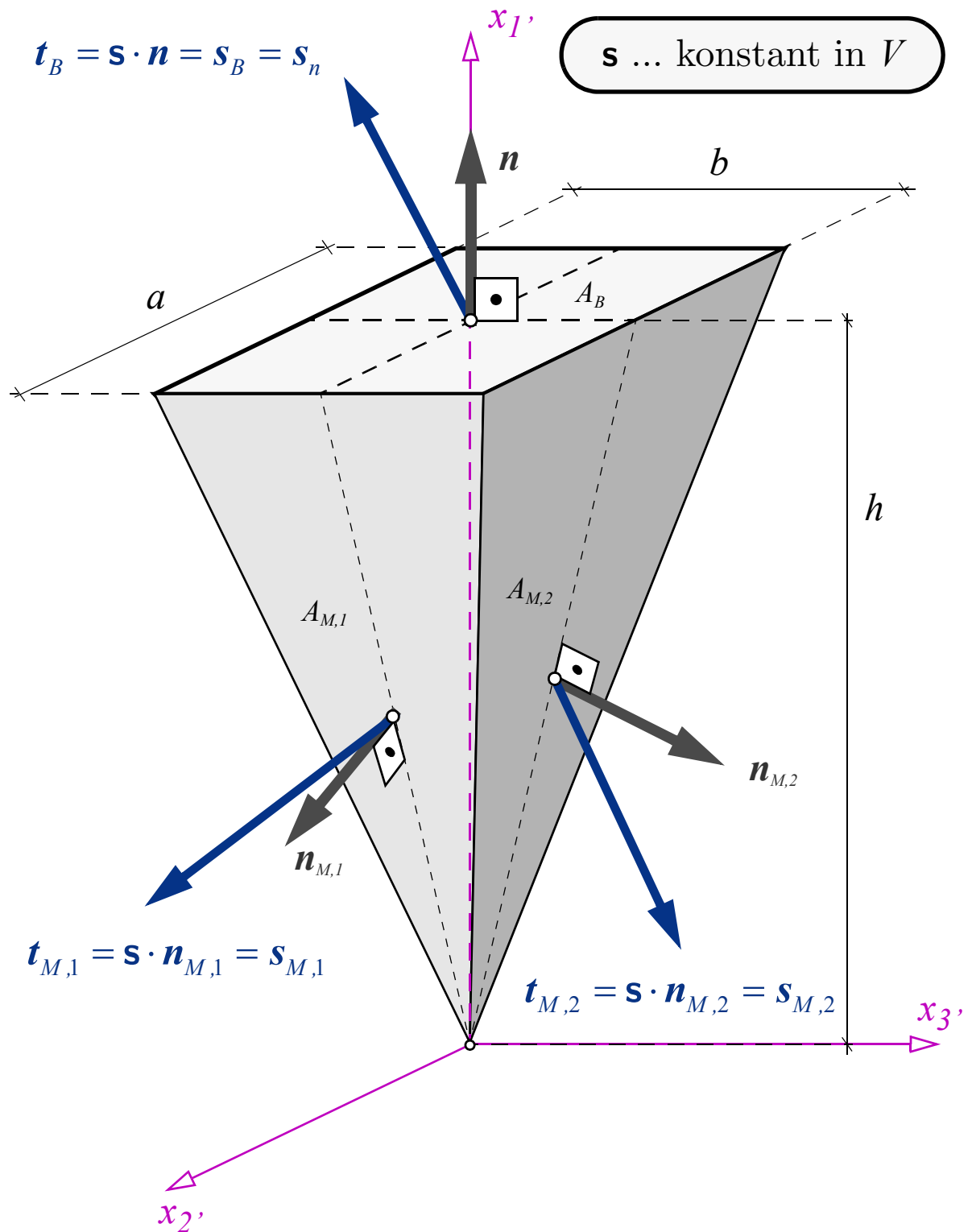


Bild 11.15 Körper in Form einer geraden Pyramide mit rechteckiger Basisfläche. Die Spannungen \mathbf{s} innerhalb der Pyramide sind konstant; die Volumenkräfte \mathbf{b} sind null. Der Körper ist im Gleichgewicht und die Oberflächenspannungen der einzelnen Seitenflächen berechnen sich über das Cauchy'sche Lemma.

die die Mantelfläche A_M der Pyramide bilden, werden mit $\mathbf{n}_{M,i}$ bezeichnet; der Einheitsnormalenvektor auf die Basisfläche ist \mathbf{n} . Die Spannungen \mathbf{s} (diese werden in Voraussicht auf die weitere Darstellung mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet) innerhalb des pyramidalen Körpers sind konstant. Bezüglich des gewählten Koordinatensystems werden die Komponenten des Spannungstensors \mathbf{s} mit s_{ij} bezeichnet. Auf den Seitenflächen und der Basisfläche wirken jeweils über die Fläche konstante Spannungsvektoren:

$$\mathbf{t}_{M,i} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_{M,i} = \mathbf{s}_{M,i} \quad \mathbf{t}_B = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s}_B = \mathbf{s}_n \quad (11-62)$$

Mit den Oberflächenspannungsvektoren und den Spannungen \mathbf{s} , ergeben sich die Terme für die virtuelle innere und äußere Arbeit für diese spezielle Körperform zu:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= -\mathbf{s} : \delta \mathbf{E} \frac{A_B h}{3} \\ \delta W_{ext} &= \sum_{i=1}^4 \left(\int_{A_{M,i}} \mathbf{s}_{M,i} \cdot \delta \mathbf{U} dA_{M,i} \right) + \int_{A_B} \mathbf{s}_n \cdot \delta \mathbf{U} dA_B = \delta W_{ext,M} + \delta W_{ext,B} \end{aligned} \quad (11-63)$$

Die äußere Arbeit setzt sich aus den Arbeiten an den vier Mantelteilflächen $\delta W_{ext,M}$ und der Basisfläche $\delta W_{ext,B}$ zusammen:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext,B} &= \mathbf{s}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n A_B h \\ \delta W_{ext,M} &= \frac{A_B h}{3} (\mathbf{s} : \delta \mathbf{E} - 3 \mathbf{s}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n) \end{aligned} \quad (11-64)$$

Mit den Betrachtungen zu den virtuellen Arbeitstermen eines homogen verformten und unter konstanter Spannung stehenden Kugel- bzw. Pyramidenkörpers hat man die Elementarbausteine um die äquivalente Spannung eines kugelförmigen, heterogen aufgebauten materiellen Körpers zu berechnen.

11.7.5.5 Gleichgewicht und virtueller Arbeitsausdruck eines heterogen aufgebauten kugelförmigen Körpers

Es wird ein kugelförmiger Körper betrachtet, der sich aus differentiellen Volumenelementen

$$dV_o = \frac{dA_o R}{3} = \frac{R^3 \cos \beta d\alpha d\beta}{3} \quad (11-65)$$

die jeweils die Form einer geraden Pyramide mit der Höhe R und einer rechteckigen Basisfläche dA_o haben, zusammensetzt (Bild 11.16). Dieses differentielle Volumenelement entspricht einem Mikroelement, das durch den Einheitsvektor \mathbf{n} gekennzeichnet wird, der normal auf die Basisfläche steht und vom Kugelmittelpunkt radial nach außen weist.

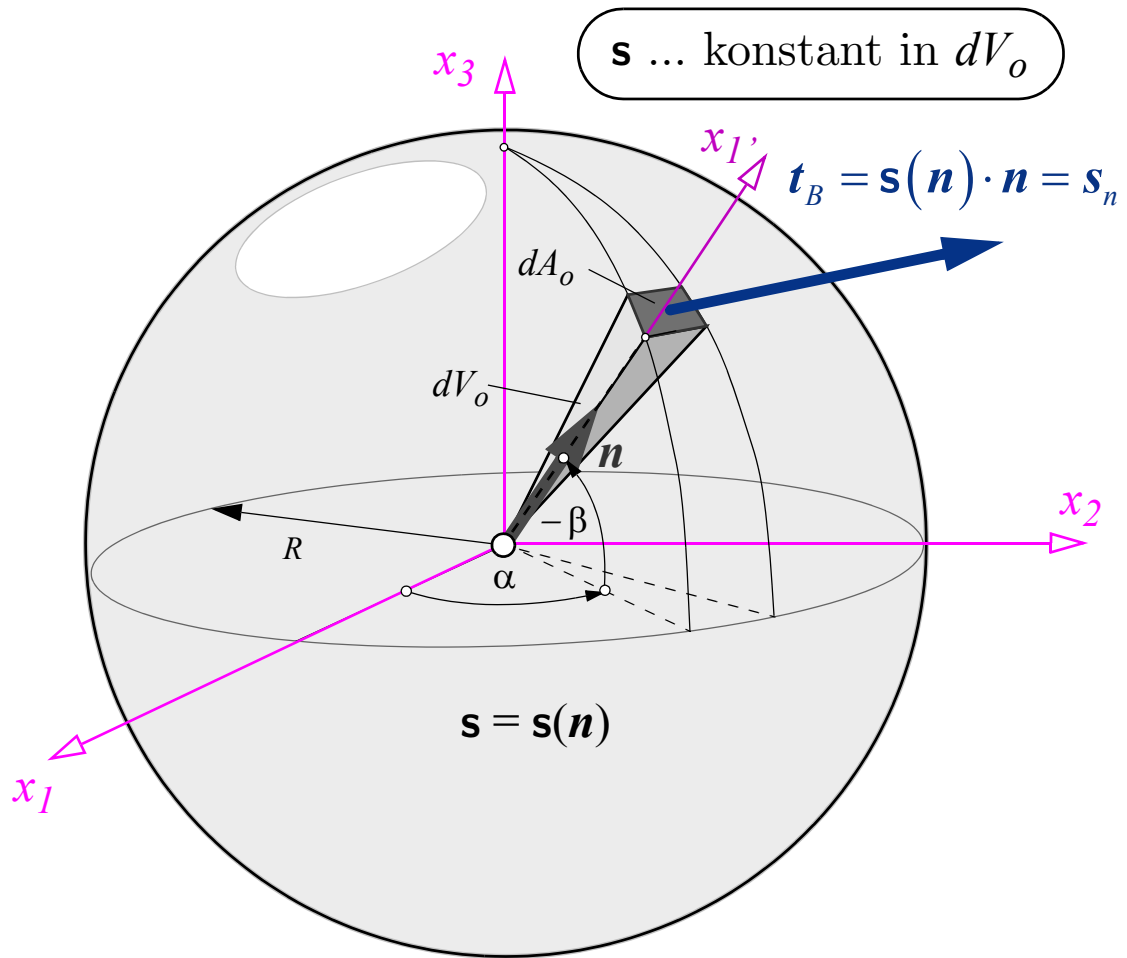


Bild 11.16 Kugelförmiger Körper (Makroelement) mit dem Radius R ; die Spannungen \mathbf{s} innerhalb der Kugel sind eine Funktion der Orientierung \mathbf{n} , es gilt $\mathbf{s}(\mathbf{n})$. In jedem differentiellen Volumenelement dV_o (Mikroelement) mit der Form einer geraden Pyramide mit rechteckiger Basisfläche dA_o und der Höhe R ist die Spannung \mathbf{s} konstant.

Aufgrund des heterogenen Aufbaus der Kugel haben die Mikroelemente jeweils ein eigenes Materialverhalten bzw. eine eigene materielle Orientierung. Die Spannungen $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ innerhalb des makroskopischen Kugelkörpers ändern sich abhängig von der Orientierung \mathbf{n} . Innerhalb von dV_o sind die Spannungen \mathbf{s} konstant, da sie sich in radialer Richtung nicht ändern. An der Basisfläche jedes Volumenelements wirkt der Oberflächenspannungsvektor:

$$\mathbf{t}_B = \mathbf{s}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s}_n \quad (11-66)$$

Mit den Spannungsvektoren $\mathbf{t}_{M,i}$ (11-62) an den vier Seitenmantelflächen ist das Element dV_o im Gleichgewicht und es lassen sich die innere virtuelle Arbeit δw_{int} (11-63), die äußeren Arbeiten auf der Basisfläche $\delta w_{ext,B}$ und den vier Mantelflächen $\delta w_{ext,M}$ (11-64) berechnen. Die Summe der inneren und äußeren Arbeitsterme der Mikroelemente über das Kugelvolumen ergibt die gesamte Arbeitsäquivalenz des heterogen aufgebauten Kugelkör-

pers zu:

$$\int_{V_o} \mathbf{s} : \delta \mathbf{E} dV_o = \underbrace{\int_{V_o} \delta W_{ext,M}}_{\delta W_{ext,M}} + \underbrace{\int_{A_o} \mathbf{s}_n \cdot \delta \mathbf{E}_n R dA_o}_{\delta W_{ext,B} = \delta W_{ext,A_o}} \quad (11-67)$$

Der wesentliche Unterschied in den Arbeitsausdrücken der homogen aufgebauten Kugel (11-61) zur heterogen aufgebauten Kugel (11-67) ist der äußere Arbeitsterm, der sich aus den Arbeitsanteilen der Mantelflächen der Mikroelemente ergibt:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext,M} &= \int_{V_o} \delta W_{ext,M} = \int_{V_o} (\mathbf{s} : \delta \mathbf{E} - 3 \mathbf{s}_n \otimes \mathbf{n} \delta \mathbf{E}_n) dV_o = \delta \mathbf{E} : \int_{A_o} \left(\frac{1}{3} \mathbf{s} - \mathbf{s}_n \otimes \mathbf{n} \right) R dA_o \\ &= \frac{1}{3} \delta \mathbf{E} : \int_{A_o} (-2s_{1'1'} \mathbf{N} - s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} - s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'} + s_{2'2'} \mathbf{P}_{2'2'} + s_{3'3'} \mathbf{P}_{3'3'} + 2s_{2'3'} \mathbf{P}_{2'3'}) R dA_o \end{aligned} \quad (11-68)$$

Ist die Spannung in jedem Mikroelement und damit innerhalb der Kugel konstant, wird der Arbeitsterm $\delta W_{ext,M}$ null, da die Spannungsdifferenzen an der Mantelfläche zwischen den Mikroelementen null werden. Damit gilt $-\delta W_{int} = \delta W_{ext,B}$ und Gleichung (11-67) entspricht dem Ausdruck (11-61) für die Kugel bei einer homogenen Spannungsverteilung im Kugellinneren.

11.7.5.6 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannung für die heterogen aufgebaute Kugel

Zur Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannung \mathbf{S} wird die bereits bekannte Arbeitsäquivalenz angeschrieben, die besagt, dass die innere virtuelle Arbeit der über das Gesamtkugelvolumen konstanten makroskopischen Spannungen (11-61) dem inneren Arbeitsterm aus Gleichung (11-67) entspricht:

$$\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \frac{4\pi R^3}{3} = \int_{V_o} \mathbf{s} : \delta \mathbf{E} dV_o = \frac{R}{3} \int_{A_o} \mathbf{s} : \delta \mathbf{E} dA_o = \frac{R^3}{3} \delta \mathbf{E} : \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{s} \cos \beta d\alpha d\beta \quad (11-69)$$

Damit ergibt sich die bereits in Kap. 10, Gleichung (10-16) mit dem Mittelungsoperator aus (10-34) allgemein angeführte Gleichung zur Berechnung der äquivalenten Spannung, q.e.d.

Im Fall eines konsistent reduzierten Materialmodells, z.B. bei einem BSZ mit $s_{2'2'} = s_{3'3'} = s_{2'3'} = 0$, reduzieren sich die Arbeitsterme in (11-69) und es ergibt sich die äquivalente Spannung zu:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (s_{1'1'} \mathbf{N} + 2s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} + 2s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \cos \beta d\alpha d\beta \quad (11-70)$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich der Arbeitsaussage und der Berechnung der äquivalenten Spannung des Microplane Modells aus Kap. 11.7.5.1 gegenüberstellen.

11.7.5.7 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannungen - allgemeine konsistente Methode vs. Microplane Modell

Im nachfolgenden Vergleich wird die Orientierungsverteilungsfunktion und der Radius R in Gleichung (11-57) eins gesetzt. Stellt man Gleichung (11-70) der Gleichung (11-58) des Microplane Modells zur Berechnung der äquivalenten Spannung gegenüber, fallen sofort folgende Faktorunterschiede auf:

- der Term mit der Normalspannung $s_{1'1'}$ bzw. s_{nn} ist im Fall des Microplane Modells um den Faktor 3 größer als das Pendant in Gleichung (11-70),
- die beiden Schubspannungsterme mit $s_{1'2'}$ und $s_{1'3'}$ dagegen um den Faktor 3/2.

Woher kommen nun diese Unterschiede? Die Differenz im virtuellen Arbeitsausdruck ist der Arbeitsterm aus Gleichung (11-68), wobei im BSZ bzw. beim Microplane Modell die Spannungskomponenten $s_{2'2'} = s_{3'3'} = s_{2'3'}$ null sind:

$$\delta W_{ext,M} = \frac{1}{3} \delta \mathbf{E} : \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (-2s_{1'1'} \mathbf{N} - s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} - s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \cos \beta \, d\alpha \, d\beta \tag{11-71}$$

In der Arbeitsäquivalenz des Microplane Modells wird dieser Term nicht inkludiert; es werden nur die äußere Arbeit $\delta W_{ext,A_0}$ an der Oberfläche der heterogen aufgebauten Kugel betrachtet. Mit den Arbeitstermen aus Gleichung (11-67) und (11-68) ergibt sich der direkte Vergleich der beiden Berechnungsmethoden der äquivalenten makroskopischen Spannung:

$$\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \frac{4\pi}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Allgemein :} \\ \delta W_{ext,A_0} + \delta W_{ext,M} = -\delta W_{int} = \frac{1}{3} \delta \mathbf{E} : \int_{A_0} (s_{1'1'} \mathbf{N} + 2s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} + 2s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \, dA_0 \\ \text{-----} \\ \text{Microplane :} \\ \delta W_{ext,A_0} = -\delta W_{int} - \delta W_{ext,M} = \delta \mathbf{E} : \int_{A_0} (s_{1'1'} \mathbf{N} + s_{1'2'} \mathbf{P}_{1'2'} + s_{1'3'} \mathbf{P}_{1'3'}) \, dA_0 \end{array} \right.$$

mit $s_{2'2'} = s_{3'3'} = s_{2'3'} = 0$

(11-72)

11.7.5.8 Kritik an der Berechnung der äquivalenten Spannungen im Microplane Modell

Die Ursache für den Ausdruck zur Berechnung der äquivalenten Spannungen des Microplane Modells ist bis auf die anfängliche Begriffsbildung zurückführbar: Mit dem gewählten Begriff *Microplane* und der dabei einhergehenden Modellvorstellung einer „materiellen

Ebene“ wird den Mikroelementen in der mechanischen Beschreibung keine räumliche Ausdehnung zudedacht. Diese Vorstellung hat - wie bereits in Kap. 11.7.4 beschrieben - zur Folge, dass zur Formulierung des Microplane Materialverhaltens keine dreidimensionale Materialbeschreibung, d.h. die Verknüpfung von sechs Spannungskomponenten mit sechs Verzerrungskomponenten, stattfindet. Diese Insuffizienz zeigt sich auch bei der Formulierung der Arbeitsäquivalenz. Durch die Negierung der Existenz eines räumlichen Spannungszustandes und Verschiebungs- bzw. Verzerrungszustandes für jedes Mikroelement ist die Formulierung eines inneren Arbeitsterms, wie in Gleichung (11-68) angegeben, vorab ausgeblendet. Es verbleiben nur mehr die drei Spannungskomponenten \mathbf{s}_n auf der Microplane mit der Orientierung \mathbf{n} und damit nur mehr der äußere Arbeitsterm über die Kugeloberfläche $\delta W_{ext, Ao}$ in Gleichung (11-67) bzw. die rechte Seite von Gleichung (11-57) bzw. (11-72). Der zur Komplettierung des äußeren Arbeitsausdrucks notwendige Term $\delta W_{ext, M}$ (11-71), der den Differenzanteil zwischen einem allgemeinen und konsistent aufgebauten mikromechanischen Modell und dem Microplane Modell beschreibt, ist in der Microplane Modellvorstellung nicht präsent.

Aufgrund der kinematischen Annahme ist für die Herleitung der Arbeitsäquivalenz des generellen Mikrostrukturmodells (mit oder ohne Spannungsnullrandbedingungen) die räumliche Anordnung der Mikroelemente und deren Form und die Form des makroskopischen Körpers beliebig. Zur Darstellung der Arbeitsausdrücke kann eine beliebige geometrische Form gewählt werden. So auch eine Kugel, was aber insofern unglücklich ist, da es zu einer Verwechslung zwischen der materiellen Kugel und der Darstellung der Orientierungsverteilung der Mikroelemente in Form einer Einheitskugel kommen kann. In der Darstellung der Arbeitsäquivalenz im Rahmen des Microplane Modells wird wenig klar zwischen der Beschreibung des materiellen Aufbaus des heterogenen Verbundkörpers und der Beschreibung der Orientierungsverteilung der einzelnen Mikroelemente getrennt.

In den beiden anschließenden Kapiteln wird die linear elastische Materialsteifigkeit zweier spezieller Microplane Modelle mit den Beispielen aus Kap. 11.4 und Kap. 11.4.3 verglichen. Die in beiden Fällen durchzuführende Integration über alle Raumorientierungen \mathbf{n} ist in dieser einfachen Situation analytisch möglich. Eine Zusammenfassung zur linearen Elastizität von Microplane Modellen finden sich bei Kuhl/Steinmann/Carol (2001) und in Kapitel 5.1 der Dissertation von Leukart (2005). Die dabei auftretenden Abweichungen zwischen der Steifigkeitsmatrix des Microplane Modells und des generellen Mikrostrukturmodells resultieren aus den verschiedenen Gleichungen (11-72) zur Berechnung der äquivalenten Spannungen.

11.7.6 Microplane Modell M1 mit N-Split

Die nachfolgend untersuchte, spezielle Formulierung des Microplane Modells ist in Bažant/Gambarova (1984) und Bažant/Oh (1985) beschrieben. Das Modell ist mit der Kurzbezeichnung M1 versehen bzw. wird in der Arbeit von Leukart (2005) als Microplane Modell mit N-Split bezeichnet. Die Bezeichnung N-Split bezieht sich auf die aus der makroskopi-

schen Gesamtkinematik abgespaltenen aktiven Verzerrungskomponente je Mikroelement: Im Fall des N-Splits ist das die axiale Normalverzerrung E_{nn} . Zur Beschreibung des Modells werden in Bažant/Gambarova (1984) drei Hypothesen eingeführt, die kinematische und konstitutive Bestandteile des Modells festlegen. In der nachfolgenden Darstellung wird nur das elastische Materialverhalten dieses Modells betrachtet und eine Querverbindung bzw. Unterschiede zu dem Grundmodell I in Beispiel 3 (Kap. 11.4.1) hergestellt.

11.7.6.1 Kinematische Festlegung (Hypothese I)

Die makroskopischen Verzerrungen \mathbf{E} werden vorgegeben und jedes Mikroelement (bzw. jede Microplane) mit der Orientierung $\mathbf{n} = \mathbf{e}_I$ erfährt durch den aufgetragenen Verzerrungszustand in axialer Richtung die Normalverzerrungskomponente E_{nn} (11-52). Das entspricht der Vorgehensweise aus Grundmodell I (Kap. 11.4.1.)

11.7.6.2 Kinetische und konstitutive Vereinfachungen (Hypothese II)

In der Hypothese II von Bažant/Gambarova (1984) wird die konstitutive Beziehung zwischen der Normalspannung s_{nn} jedes Mikrovolumens mit der axialen Normalverzerrungskomponente über den funktionalen Zusammenhang hergestellt. Es wird nur der linear elastische Fall betrachtet:

$$s_{nn} = \mathcal{E}_N E_{nn} \quad (11-73)$$

Obwohl der Zusammenhang gleich dem des Mikroelements (11-10) bei einem FSZ ist, wird die elastische Materialkenngröße nicht mit E_{mikro} bezeichnet, sondern das Symbol \mathcal{E}_N verwendet.

11.7.6.3 Berechnung der elastischen Materialsteifigkeitsmatrix

Mit der Annahme einer Gleichverteilung $\Omega = 1$ und durch Einsetzen der linear elastischen Materialbeziehung (11-73), der Kinematik (11-52) in (11-58) und der Integralbeziehung

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \cos \beta \, d\alpha \, d\beta = \mathbb{P}_{vol} + \frac{2}{5} \mathbb{P}_{dev} \quad (11-74)$$

ergibt sich der isotrope elastische Materialsteifigkeitstensor:

$$\mathbb{C}_N = \mathcal{E}_N \left(\mathbb{P}_{vol} + \frac{2}{5} \mathbb{P}_{dev} \right) \quad (11-75)$$

In Voigt'scher Schreibweise:

$$\mathbf{C}_N = \mathcal{E}_N \left(\mathbf{P}_{vol} + \frac{2}{5} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \right) \quad (11-76)$$

Vergleicht man die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}_N mit \mathbf{C} aus (11-12), ergibt sich - wenn $\mathcal{E}_N = E_{mikro}$ gilt - der Faktorunterschied von 3. Der Faktor 3 resultiert aus den unterschiedlichen Arbeitstermen (11-72) zur Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannungen.

Mit dem reduzierten elastischen Materialverhalten ist das makroskopische elastische Verhalten des Mikroplane Modells - wie bereits zuvor bei Grundmodell I gezeigt - eingeschränkt. Die Querdehnzahl ist ungeachtet des Vorfaktors drei auch bei der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}_N (11-76) stets $1/4$.

11.7.7 Microplane Modell M1⁰ mit N-T-Split

In Bažant (1984) wird das Microplane Modell M1 um die resultierende Schubspannungskomponente in den Schnittebenen mit der Orientierung \mathbf{n} erweitert. Das zugehörige Modell wurde später als Modell M1⁰ oder in der Arbeit von Leukart (2005) als Microplane Modell mit N-T-Split bezeichnet. Die kinematischen und konstitutiven Besonderheiten dieses Microplane Modells werden in Bažant (1984) wiederum durch drei Hypothesen festgelegt. Mit dieser Erweiterung ist eine Querverbindung zu Grundmodell II aus Kap. 11.4.3 herstellbar.

11.7.7.1 Kinematische Festlegung (Hypothese II)

Neben der axialen Normalverzerrung E_{nn} aus dem Modell M1 werden zusätzlich die zwei Schubverzerrungskomponenten des Vektors \mathbf{E}_T in der Schnittebene mit der Orientierung \mathbf{n} betrachtet. Ist nur die Orientierung \mathbf{n} gegeben, lässt sich \mathbf{E}_T durch additive Vektorzerlegung mit dem eingeführte Tensor \mathcal{T} dritter Stufe in Komponenten parallel und normal zu \mathbf{n} berechnen (11-54). Hervorzuheben ist, dass die Komponenten des Vektors \mathbf{E}_T die Schubverzerrungen $E_{ij'}$ und nicht die Schubwinkel $\gamma_{ij'}$ sind.

11.7.7.2 Konstitutive Beziehungen (Hypothese III)

In Bažant (1984) wird festgelegt, dass das linear elastische Materialverhalten für die Normalverzerrungskomponente E_{nn} und die Schubverzerrungsanteile \mathbf{E}_T entkoppelt ist. Zusätzlich wird angenommen, dass der Schubspannungsvektor \mathbf{s}_T kollinear zu \mathbf{E}_T ist, was der Festlegung von transversaler Isotropie um die x_1 -Achse entspricht. Zur bereits bekannten axialen Dehnsteifigkeit \mathcal{E}_N (11-73) wird die elastische Materialkonstante \mathcal{E}_T , die die Schubverzerrungen $E_{ij'}$ mit den Schubspannungen koppelt, eingeführt:

$$\mathbf{s}_T = \begin{bmatrix} s_{1'2'} \\ s_{1'3'} \end{bmatrix} = \mathcal{E}_T \mathbf{E}_T \quad (11-77)$$

Diese beiden Größen werden als elastische Konstanten $C = \mathcal{E}_N$ und $B = \mathcal{E}_T$ bezeichnet. Bei der Materialbeschreibung in Grundmodell II aus Kap. 11.4.3 wurde ebenso transversale Isotropie um die x_1 -Achse angenommen. Der Schubmodul G_{mikro} verknüpft die Schubspannungskomponenten $s_{1'2'}$ und $s_{1'3'}$ mit den Schubwinkeln $\gamma_{1'2'}$ bzw. $\gamma_{1'3'}$. Gleichung (11-17). Durch Vergleich von (11-17) mit (11-77) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den ela-

stischen Materialgrößen:

$$\mathcal{E}_T = 2G_{mikro} \quad (11-78)$$

11.7.7.3 Berechnung der äquivalenten makroskopischen Steifigkeitsmatrix

Zur Berechnung der makroskopisch-äquivalenten Spannung wird Gleichung (11-72) verwendet. Die Orientierungsverteilungsfunktion ist wiederum eins:

$$\mathbf{S}:\delta\mathbf{E} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \int_{A_o} (s_{nn} \delta E_{nn} + \mathbf{s}_T \cdot \delta \mathbf{E}_T) dA_o = \int_{A_o} (s_{nn} \delta E_{nn} + s_{1'2'} \delta E_{1'2'} + s_{1'3'} \delta E_{1'3'}) dA_o \quad (11-79)$$

Mit den elastischen konstitutiven Beziehungen (11-77) und (11-73) und den kinematischen Zusammenhängen (11-52) und (11-54) ergeben sich die makroskopischen Spannungen zu:

$$\mathbf{S} = \left(\frac{3}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} (\mathcal{E}_N \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathcal{E}_T \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}) \cos \beta d\alpha d\beta \right) : \mathbf{E} = (\mathbb{C}_N + \mathbb{C}_T) : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{NT} : \mathbf{E} \quad (11-80)$$

Mit der Integralbeziehung, siehe Leukart (2005), S. 36,

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cos \beta d\alpha d\beta = \frac{3}{5} \mathbb{P}_{dev} \quad (11-81)$$

ergibt sich der Anteil \mathbb{C}_T des Materialsteifigkeitstensors zu:

$$\mathbb{C}_T = \mathcal{E}_T \frac{3}{5} \mathbb{P}_{dev} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}_T = \mathcal{E}_T \frac{3}{5} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} . \quad (11-82)$$

Die komplette Steifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{C}_{NT} = \mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T = \mathcal{E}_N \mathbf{P}_{vol} + \frac{1}{5} (2\mathcal{E}_N + 3\mathcal{E}_T) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}_{dev} \quad (11-83)$$

Wird der Zusammenhang $\mathcal{E}_T = 2G_{mikro}$ (11-78) in die Matrix \mathbf{C}_T eingesetzt und diese Matrix mit $\Delta\mathbf{C}$ aus (11-19) verglichen, ergibt $\mathbf{C}_T = 3/2 \Delta\mathbf{C}$. Auch dieser Vorfaktor resultiert aus der unterschiedlichen Berechnung der äquivalenten Spannungen (11-72). Während in (11-79) der Schubarbeitsterm aus $s_{1'2'} \delta E_{1'2'} + s_{1'3'} \delta E_{1'3'}$ besteht und damit die dualen Schubarbeitsanteile $s_{2'1'} \delta E_{2'1'} + s_{3'1'} \delta E_{3'1'}$ im Microplane Modells exkludiert werden, lautet der komplette Schubarbeitsterm am Mikroelement:

$$s_{1'2'} \delta \gamma_{1'2'} + s_{1'3'} \delta \gamma_{1'3'} = \mathbf{2} (s_{1'2'} \delta E_{1'2'} + s_{1'3'} \delta E_{1'3'}) \quad (11-84)$$

Zusätzlich besteht weiterhin der Unterschied mit dem Faktor 3.

11.7.7.4 Modifikation des elastischen Materialverhaltens (Hypothese I)

Die in Kap. 11.4.1.2 gezeigte Beschränkung des Wertebereichs von v_{mac} (11-22) gilt auch im Microplane Modell mit N-T-Split und bleibt durch die zuvor aufgezeigten Faktorunterschiede ungeändert. Querdehnzahlwerte zwischen 0.25 bis 0.5 können durch das Microplane Modell M1⁰ nicht angenommen werden. Da diese Einschränkung unerwünscht ist, erweitert Bažant (1984) das Modell um eine weitere Modellannahme (Hypothese I).

11.7.8 Weitere Microplane Modelle

Auch im Fall des Microplane Modells mit N-T-Split ist die makroskopische Querdehnzahl mit einem Oberwert von 1/4 begrenzt. Wie aus Grundmodell II in Kap. 11.4.3 ersichtlich, muss eine elastische Matrix mit einem Kompressionsmodul K_m zu den Mikroelementen mit BSZ parallel geschaltet werden, um den makroskopischen Querdehnzahlbereich 0.25 bis 0.5 zu ermöglichen. Um diese Einschränkung, die auch bei dem Microplane Modell M1⁰ existiert, zu beseitigen, wurden die bestehenden Microplane Modelle weiter modifiziert.

11.7.8.1 Microplane Modell mit V-D-T Split

Ausgehend von Microplane Modellformulierung mit N-T-Split führen Bažant/Prat (1988) eine additive Aufteilung der Normalverzerrung E_{nn} in einen volumetrischen Anteil E_V und einen deviatorischen Anteil E_D ein. Der volumetrische Verzerrungsanteil berechnet sich aus

$$E_V = \frac{1}{3} \mathbf{J} : \mathbf{E} = \mathbf{V} : \mathbf{E} = \frac{1}{3} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) = \frac{1}{3} (E_{1'1'} + E_{2'2'} + E_{3'3'}) \quad (11-85)$$

und ist unabhängig von \mathbf{n} stets konstant. Durch Einführung dieser Verzerrungsgröße wird die ursprüngliche Annahme aus Kap. 11.7.4, dass die Verzerrungsgrößen $E_{2'2'}$, $E_{3'3'}$ und $E_{2'3'}$ keinen Einfluss auf die Spannungen in der Schnittorientierung \mathbf{n} haben, aufgehoben. Um den kompletten Wertebereich der Querdehnzahl abdecken zu können, ist die Einführung von volumetrischen Verzerrungen und volumetrischen Spannungsanteilen notwendig. Den deviatorischen Anteil der axialen Verzerrung definieren Bažant/Prat (1988) mit:

$$E_D = E_{nn} - E_V = (\mathbf{N} - \mathbf{V}) : \mathbf{E} = \mathbf{D} : \mathbf{E} \quad (11-86)$$

Analog zu der Aufteilung der Verzerrungen wird die Normalspannungskomponente s_{nn} additiv in einen deviatorischen s_D und volumetrischen Anteil s_V aufgeteilt. Die konstitutive Beschreibung im elastischen Fall lautet:

$$s_V = \mathcal{E}_V E_V, \quad s_D = \mathcal{E}_D E_D, \quad s_T = \mathcal{E}_T E_T \quad (11-87)$$

Der linear-elastische Zusammenhang zwischen volumetrischer Verzerrung und hydrostati-

scher Spannung wird im isotropen Fall durch den Kompressionsmodul beschrieben, durch Vergleich mit (11-87) ergibt sich die Interpretation der volumetrischen Materialkonstante:

$$\mathcal{E}_V = 3K_{mikro} \quad (11-88)$$

Die verbleibenden zwei elastischen Konstanten beeinflussen in Kombination das deviatorisch elastische Geschehen. Eine spezifisch physikalische Bedeutung kann ihnen nicht zugewiesen werden. Mit dem Ausdruck (11-79), den linearen Materialbeziehungen und den Aufteilungen in deviatorische und volumetrische Anteile, ergibt sich der Materialsteifigkeitstensor mit den Integralbeziehungen

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \int_{A_o} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} dA_o &= \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} = \mathbb{P}_{vol} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{A_o} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} dA_o &= \frac{2}{5} \mathbb{P}_{dev} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{A_o} \mathbf{D} \otimes \mathbf{V} dA_o &= \frac{3}{4\pi} \int_{A_o} \mathbf{V} \otimes \mathbf{D} dA_o = \mathbb{0} \end{aligned} \quad (11-89)$$

zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{VDT} &= \frac{3}{4\pi} \int_{A_o} (\mathcal{E}_V \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathcal{E}_V \mathbf{D} \otimes \mathbf{V} + \mathcal{E}_D \mathbf{V} \otimes \mathbf{D} + \mathcal{E}_D \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathcal{E}_T \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T}) dA_o = \\ &= \mathcal{E}_V \mathbb{P}_{vol} + \frac{2}{5} \mathcal{E}_D \mathbb{P}_{dev} + \frac{3}{5} \mathcal{E}_T \mathbb{P}_{dev} = \mathbb{C}_V + \mathbb{C}_D + \mathbb{C}_T \end{aligned} \quad (11-90)$$

Mit diesen drei Materialkonstanten kann der gesamte makroskopische Querdehnzahlbereich beschrieben werden, wobei die isotropen makroskopischen Materialkonstanten sich aus den drei Konstanten in (11-87) zu

$$\begin{aligned} E_{makro} &= \frac{3\mathcal{E}_V (2\mathcal{E}_D + 3\mathcal{E}_T)}{10\mathcal{E}_V + 2\mathcal{E}_D + 3\mathcal{E}_T} \\ \nu_{makro} &= \frac{5\mathcal{E}_V - 2\mathcal{E}_D - 3\mathcal{E}_T}{10\mathcal{E}_V + 2\mathcal{E}_D + 3\mathcal{E}_T} \end{aligned} \quad (11-91)$$

berechnen. Will man die drei Materialkonstanten der Microplane aus den vorgegebenen zwei makroskopischen isotropen Materialkenngrößen rückrechnen, hat man eine Unbestimmtheit, wodurch ein Parameter (vorzugsweise \mathcal{E}_D oder \mathcal{E}_T , da \mathcal{E}_V eine klare physikalische Bedeutung hat) frei gewählt werden muss. Interessant ist, dass der makroskopische Kompressionsmodul K_{makro} im volumetrischen Anteil des Steifigkeitstensors mit dem mikroskopischen $K_{makro} = K_{mikro}$ übereinstimmt. Im Gegensatz zu den beiden zuvor untersuch-

ten Fällen, scheint der Faktorunterschied 3 bezüglich der Normalspannungskomponente aus Gleichung (11-72) keine Auswirkung zu haben. Dem ist nicht so: Der Faktor bewirkt in diesem Fall, dass der vollständige und korrekte volumetrische Arbeitsterm betrachtet wird. Dieser Arbeitsterm lautet mit der volumetrischen Normalspannungskomponente $s_{ii} = s_V$ und der volumetrischen Normalverzerrungskomponente $E_{ii} = E_V$:

$$\frac{1}{V} \int_V (s_{11} \delta E_{11} + s_{22} \delta E_{22} + s_{33} \delta E_{33}) dV = \frac{1}{V} \int_V 3s_V \delta E_V dV = 3s_V \delta E_V. \quad (11-92)$$

Der Microplane Arbeitsterm für den volumetrischen Arbeitsanteil lautet

$$\frac{3}{4\pi} \int_{A_o} s_V \delta E_V dA_o = 3s_V \delta E_V \quad (11-93)$$

und liefert, obwohl nach Gleichung (11-79) nur die Arbeitsanteile der Schnittorientierung \mathbf{n} betrachtet werden, aufgrund des Vorfaktors 3 dasselbe Ergebnis, wie der korrekte Arbeitsterm aus Gleichung (11-92). Eine konsistente Aufspaltung in deviatorische und volumetrische Anteile wurde von Leukart (2005) vorgestellt; auf diese Vorgehensweise wird hier nicht mehr eingegangen.

11.7.9 Zusammenfassung: Microplane Modell vs. generelles Mikrostrukturmodell

Alle Microplane Modelle mit *kinematic constraint* und das generelle Mikrostrukturmodell aus Kap. 10 unterliegen derselben kinematischen Annahme, dass die makroskopischen Verzerrungen den lokalen oder im Fall von Spannungsnullrandbedingungen einzelnen lokalen Verzerrungskomponenten des Mikroelements entsprechen. Diese kinematische Festlegung hat zur Folge, dass sich bei beiden Modellen die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Makrokörpers aus dem Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang der einzelnen Mikroelemente additiv zusammensetzt.

Das Microplane Modell hat Parallelen zum Einkornaggregatmodell aus Kap. 10.5, das eine Unterklasse des generell formulierten Mikrostrukturmodells darstellt. Beim Aufbau des Makroelements wird allen Mikroelementen gleiches Materialverhalten zugewiesen. Dieses ist aber richtungsabhängig und wird bei jedem Mikroelement durch den Orientierungseinheitsvektor \mathbf{n} angegeben (dieser soll nicht mit der Versagensebenenorientierung \mathbf{n} verwechselt werden!).

Obwohl in diesem Abschnitt nur elastisches Materialverhalten untersucht wurde, kann geschlossen werden, dass das Einkornaggregatmodell mit Spannungsnullrandbedingungen dasselbe charakteristische elasto-plastische Spannungs-Verzerrungs-Verhalten zeigt wie das Microplane Modell. Bei der Lösung der Integralgleichungen zur Berechnung der makroskopischen Größen ist bei nichtlinearem Materialverhalten eine Diskretisierung der

Raumrichtungen erforderlich (siehe Kap. 11.6).

Der wesentliche Unterschied zum Einkornaggregatmodell und primäre Mangel des Microplane Modells liegt in der Vorstellung, dass die Microplane als „materielle Ebene“ ohne Dicke verstanden wird, für die aber ein Materialmodell etabliert werden soll. Es kommt also nicht zu einer konsistenten Dimensionsreduktion in der mathematischen Erfassung eines dreidimensional formulierten Materialmodells (durch z.B. Einführung von Spannungsnullrandbedingungen), sondern das Microplane Materialmodell muss für diese Ebene ad hoc formuliert werden. Die flächenhafte Vorstellung greift auch in die Berechnung der äquivalenten makroskopischen Spannungen ein und ergibt Unterschiede.

Das generelle Mikrostrukturmodell ist ein einfaches, aber vollwertiges mikromechanisches Modell, basierend auf einer klaren Modellvorstellung und einer rational mechanischen Umsetzung. Dieser vorgegebene strukturelle Rahmen erlaubt den Einsatz und die uneingeschränkte Inkorporation von beliebigen dreidimensionalen Materialmodellen für die Mikroelemente, deren Materialparameter durch entsprechende Versuche bestimmbar sind. Mit dieser - als selbstverständlich anzusehenden - Voraussetzung wird klar zwischen Materialverhalten der Mikroelemente und Zusammenwirkung im makroskopischen Gefüge unterschieden. Diese Voraussetzung wird im Gegensatz dazu vom Microplane Modell nicht erfüllt, da eine Erfassung der mechanischen Eigenschaften einer Microplane durch Versuche nicht realisierbar ist. Die angeführten „Materialparameter“ des Microplanes werden durch Versuchswerte am Makrokörper rückgerechnet bzw. nach Wunsch adjustiert.

11.8 Stabbündelmodell

11.8.1 Allgemeiner Systemaufbau

11.8.1.1 Aufbau der Mikroelemente

Die M Mikroelemente sind quaderförmig mit der Länge $L = L_k$ und der Querschnittsfläche A_k mit den Seitenabmessungen, b_k und h_k (zur Unterscheidung werden die Elementgrößen mit dem Index k gekennzeichnet). Das materielle $\{x_{1',k}, x_{2',k}, x_{3',k}\}$ -Bezugskordinatensystem liegt parallel zu den Seitenkanten, wobei die Achse $x_{1',k}$ die Stablängsachse kennzeichnet. Für jedes Mikroelement wird ein Fachwerkspannungszustand festgelegt. Das Materialmodell jedes Mikroelements ist gleich und wurde in Kap. 7.8 ausgearbeitet und in reduzierter Form angeschrieben; die vier Materialkenngrößen E , ν , τ_u und α sind i.A. unterschiedlich. Die Mikroelemente werden nachfolgend auch als Stabelement bezeichnet.

11.8.1.2 Makroelement - Anordnung der Einzelstäbe zu einem Stabbündel

Die Materialhauptachsen der Stabelemente liegen alle parallel zu den $\{X_1, X_2, X_3\}$ -Materialhauptachsen des Makroelements. Durch die kinematische Festlegung (10-6) ist die axiale Normalverzerrung E_{11} des Makroelements gleich der axialen Normalverzerrung $e_{1'1',k}$ der Stabelemente. Man kann sich alle Stabelemente am Stabanfang und -ende jeweils auf einer dünnen, aber starren Endplatte befestigt vorstellen. Um Zwängungsspannungen in der Querschnittsfläche an den Stabendbefestigungen auszuschließen, wird jeder Stab so an die starren Platten montiert, dass sich Verformungen in der Querschnittsfläche ungehindert ausbilden können. Die vier verbleibenden, nicht an den Endplatten befestigten Seitenflächen jedes Mikroelements sind im Laufe der Verformung spannungsfrei. Bei auftretenden Querdehnungseffekten zufolge der verbleibenden axialen Spannungen kommt es bei Druck bzw. Zugbeanspruchung zu Überlappungen bzw. zur Ausbildung von Klaffungen zwischen benachbarten Stabelementen; diese Inkompatibilitäten werden bewusst in Kauf genommen. Das Makroelement wird auch als Stabbündel bezeichnet.

11.8.2 Elementares 3-Stabsystem

Ein solches Stabbündel, bestehend aus $M = 3$ Stabelementen, ist in Bild 11.17 dargestellt. Die unterschiedlichen Materialeigenschaften der Stabelemente sind durch unterschiedliche Graustufen gekennzeichnet. Die Stablängen L und die Stabbreiten b sind gleich. Die Querschnittshöhen h_k unterscheiden sich. Jedes Stabelement hat unterschiedliche Materialkennwerte E_k und α_k . Die Schubgrenzspannung τ_Y ist bei allen drei Stäben gleich. Die Querdehnzahl kann beliebig angegeben werden, da sie nur die Querschnittsverformungen des Einzelstabes bestimmt, aber nicht in die axiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Stabbündels einfließt. Die Materialkennwerte und die Querschnittsabmessungen der drei Stabelemente sind in Box 11.5 angegeben.

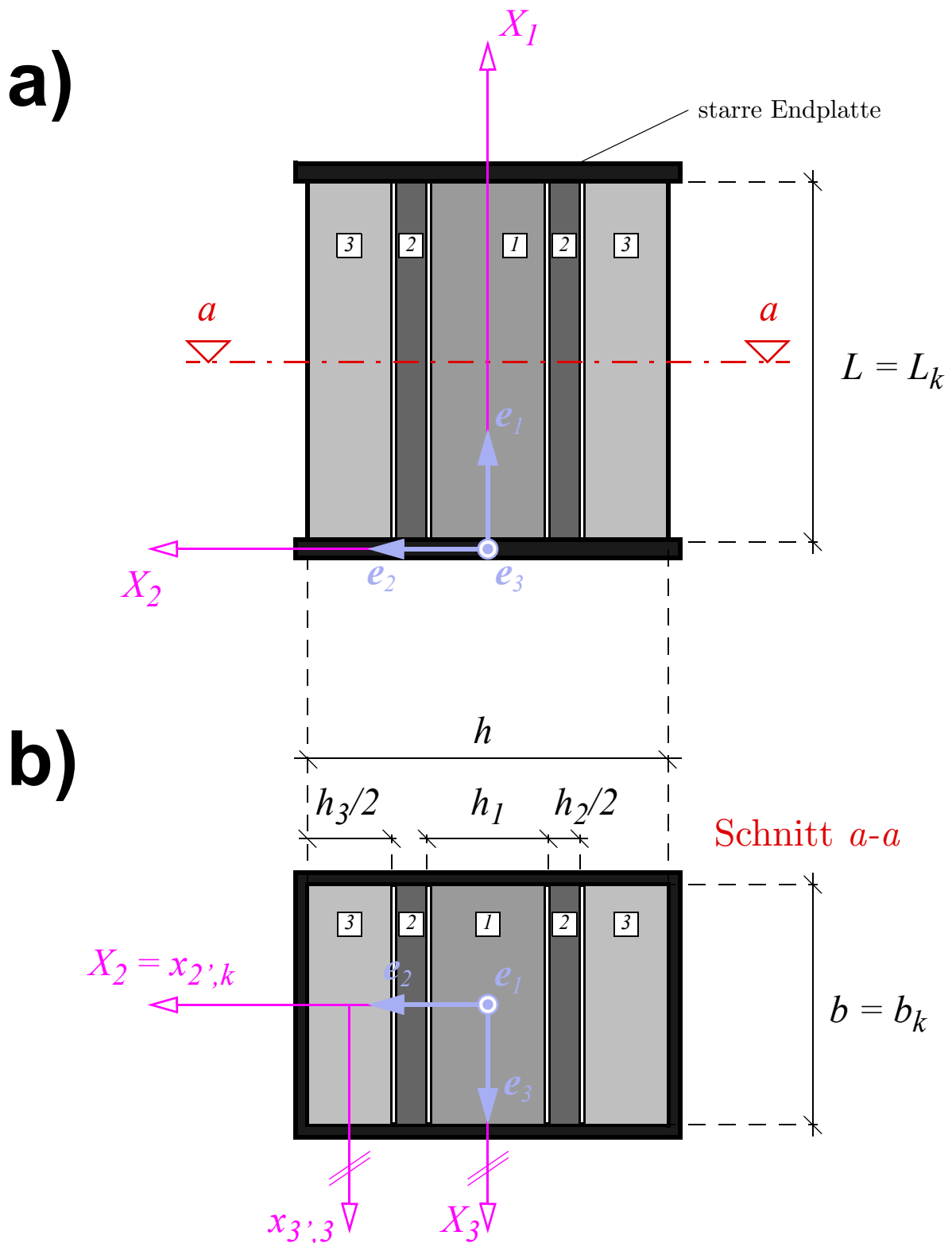


Bild 11.17 Stabbündel bestehend aus $M=3$ Stabelementen: a) Aufriss: die Stabelemente mit jeweils rechteckigem Querschnitt sind parallel angeordnet und an den Stabenden an starren Endplatten befestigt; b) Querschnitt: die Stabelemente sind zentrisch zur X_1 -Achse angeordnet. Die unterschiedlichen Graustufen der Stabelemente kennzeichnen unterschiedliche Materialien.

Stab 1 wird zentrisch positioniert. Um die verbleibenden zwei Stabelemente zentrisch anzuordnen, werden sie halbiert und jeweils links bzw. rechts von Stab 1 hinzugefügt (Bild 11.17). Streng genommen hat man damit ein 5-Stabsystem, die durchgeführte Aufteilung und die Lage der Stäbe beeinflusst aber nicht die axiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Stabbündels.

Stabelement k	1	2	3
$v_k/V = h_k/h$	1/3	1/6	1/2
$\varepsilon_k = E_k/E_0$	1	2	3/5
α_k	30°	45°	45°
$e_{11,Y,k}/E_{11,0} = e_{11,Y,k}E_0/\tau_u =$	$\pm 4/\sqrt{3} = \pm 2.309$	± 2	± 2
$s_{11,Y,k}/S_{11,0} = s_{11,Y,k}/\tau_u =$	$4/\sqrt{3} = 2.309$	1	$10/3 = 3.333$
$\Psi_{el,max,k}/(S_{11,0}E_{11,0}) =$	$8/3 = 2.667$	1	$10/3 = 3.333$

Box 11.5 Materialkenngrößen der Stabelemente: Querschnittsabmessungen, E-Modul und Winkel der beiden Gleitebenenscharen; einaxiale Versagensspannung und zugehörige Verzerrung $e_{11,Y,k}$ und elastische Verzerrungsenergiedichte

Das Makroelement hat nur eine makroskopische Spannung, die einaxiale Normalspannung S_{11} und auch nur in diese Richtung eine Steifigkeit. Der Zusammenhang zwischen der einaxialen makroskopischen Verzerrung E_{11} und der makroskopischen Normalspannung S_{11} wird in den nachfolgenden Beispielen berechnet.

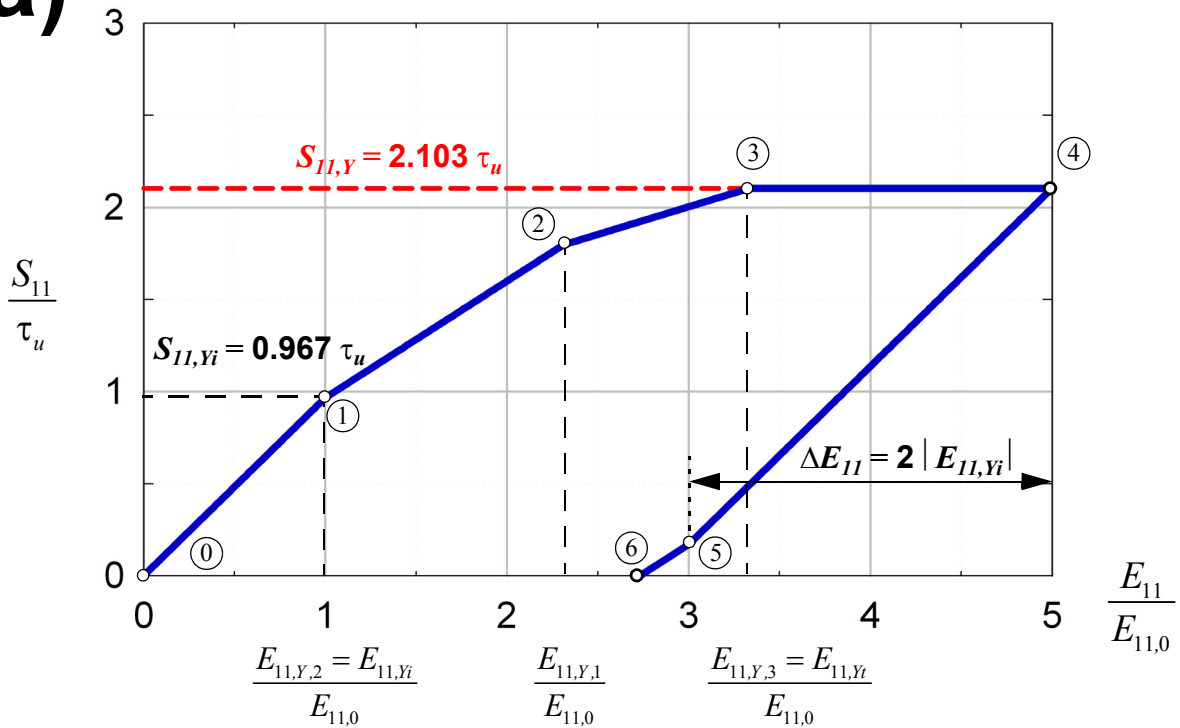
11.8.3 Monoton ansteigende, verzerrungsgesteuerte Belastung

Aus den Materialkenngrößen in Box 11.5 lassen sich die Zug- und Druckversagensspannung jedes Einzelstabes und die zugehörige Verzerrung bei Erstbelastung, d.h. ohne plastische Verzerrungsanteile, berechnen. Als Bezugsspannung $S_{11,0}$ wird τ_u gewählt. Damit ergibt sich die Bezugsverzerrung $E_{11,0} = \tau_u/E_0$. Mit diesen Größen lassen sich der äquivalente E-Modul, die Versagensspannung und die maximal speicherbare elastische Verzerrungsenergiedichte des Stabbündels berechnen:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{29}{30} \quad \frac{S_{11,Y}}{S_{11,0}} = \frac{S_{11,Y}}{\tau_u} = \frac{4}{9}(3 + \sqrt{3}) = 2.103 \quad \frac{\Psi_{max}}{S_{11,0}E_{11,0}} = \frac{49}{18} = 2.722 \quad (11-94)$$

Im unverformten Zustand sind die plastischen Verzerrungen der Einzelstäbe $e_{11,pl,k}$ null. Als Belastung wird die kontinuierlich anwachsende axiale Verzerrung E_{11} bis zu $5E_{11,0}$ gebracht (Punkt 4 in Bild 11.18). Die Spannung S_{11} und die äquivalente plastische Verzerrung $E_{11,pl}$ des Stabbündels sind als Funktion der Verzerrung E_{11} in Bild 11.18 dargestellt.

a)



b)

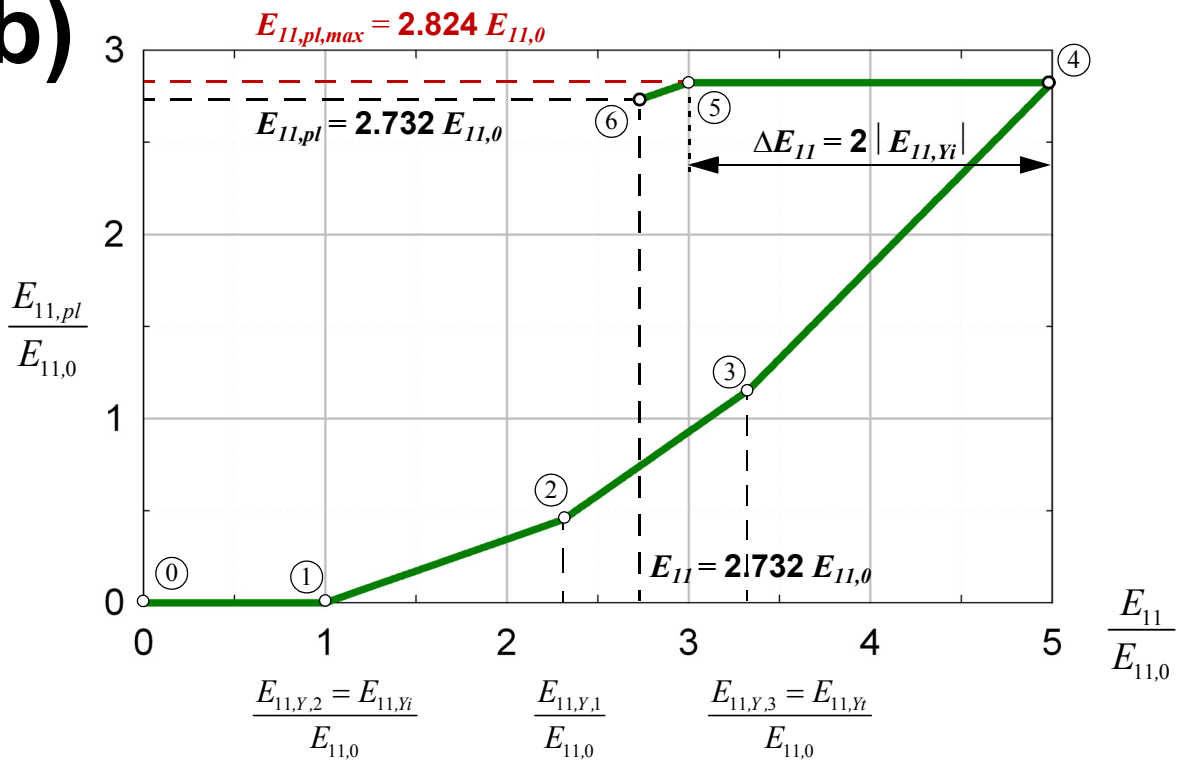


Bild 11.18a) Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und b) kumulative plastische Stabbündelverzerrung $E_{II,pl}$ des Stabbündels bei monotoner, verzerrungsgesteuerter Belastung und anschließender Entlastung auf $S_{II} = 0$

Als Erstes erreicht Stab 2 das elastische Spannungslimit. Bis zu diesem Verzerrungszustand $E_{11,Y_i} = E_{11,Y,2}$ (Punkt 1) ist die Materialsteifigkeit des Stabbündels $\mathbf{C} = [E]$. Ab diesem Punkt bis zu Punkt 2 ist die elasto-plastische Materialsteifigkeit bei weiterer plastischer Belastung $\mathbf{C}_{ep,1-2}$. Dann beginnt Stab 1 zu fließen; die Verzerrung ist dabei $E_{11} = E_{11,Y,1}$. Ab Punkt 3 ist die plastische Versagensspannung $S_{11,Y}$ des Stabbündels erreicht.

Die Verzerrung wird vom Punkt 3 bis zu Punkt 4 weiter erhöht, wodurch die plastische Stabbündelverzerrung $E_{11,pl}$ zunimmt, während die Spannung $S_{11,Y}$ bleibt. Die elastische Verzerrungsenergiedichte des Stabbündels erreicht zwischen den Punkten 3 und 4 den maximalen Wert Ψ_{max} (11-94). Die weiter aufgebrachten Arbeitsinkremente werden dissipiert. Alle wesentlichen Systemgrößen an den markanten Punkten 1-6 sind in Box 11.2 angeführt.

	1	2	3	4	5	6
$\frac{E_{11}}{E_{11,0}}$	1	$\frac{4}{\sqrt{3}} = 2.309$	$\frac{10}{3} = 3.333$	5	3	$\frac{5(45-8\sqrt{3})}{57} = 2.732$
$\frac{E_{11,pl}}{E_{11,0}}$	0	$\frac{10(4\sqrt{3}-3)}{87} = 0.452$	$\frac{10(17-4\sqrt{3})}{87} = 1.158$	$\frac{5(63-8\sqrt{3})}{87} = 2.824$	$\frac{5(63-8\sqrt{3})}{87} = 2.824$	$\frac{5(45-8\sqrt{3})}{57} = 2.732$
$\frac{S_{11}}{S_{11,0}}$	$\frac{29}{30} = 0.967$	$\frac{15+38\sqrt{3}}{45} = 1.796$	$\frac{4(3+\sqrt{3})}{9} = 2.103$	$\frac{4(3+\sqrt{3})}{9} = 2.103$	$\frac{20-9\sqrt{3}}{15\sqrt{3}} = 0.170$	0
$\frac{D}{S_{11,0}E_{11,0}}$	0	$\frac{4\sqrt{3}-3}{9} = 0.436$	$\frac{40-9\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 1.566$	$\frac{11+20\sqrt{3}}{9} = 5.071$	$\frac{11+20\sqrt{3}}{9} = 5.071$	$\frac{5(31+84\sqrt{3})}{171} = 5.161$
$\frac{\Psi}{S_{11,0}E_{11,0}}$	$\frac{29}{60} = 0.483$	$\frac{167}{90} = 1.855$	$\frac{49}{18} = 2.722$	$\frac{49}{18} = 2.722$	$\frac{179-80\sqrt{3}}{90} = 0.449$	$\frac{177-80\sqrt{3}}{114} = 0.337$
$\frac{\Psi_{el}}{S_{11,0}E_{11,0}}$	$\frac{29}{60} = 0.483$	$\frac{1519+380\sqrt{3}}{1305} = 1.668$	$\frac{160(2+\sqrt{3})}{261} = 2.288$	$\frac{160(2+\sqrt{3})}{261} = 2.288$	$\frac{643-8\sqrt{3}}{1305} - \frac{8\sqrt{3}}{29} = 0.015$	0

Box 11.6 Stabbündelgrößen des Dreistabsystems an den markanten Punkten der Deformationsgeschichte

In Bereichen rein elastischen Stabbündelverhaltens (Bereiche 0-1, 4-5) findet kein Zuwachs von plastischen Verzerrungen und damit keine weitere Dissipation statt. Die akkumulierte Dissipation (Bild 11.19) bleibt in diesen Bereichen konstant. Da alle drei Stäbe eine Limitspannung besitzen, ist die Stabbündelspannung auf Zug und Druck mit $S_{11,Y}$ limitiert. Das ist auch der Grund für die Obergrenze Ψ_{max} der elastischen Verzerrungsenergiedichte, die

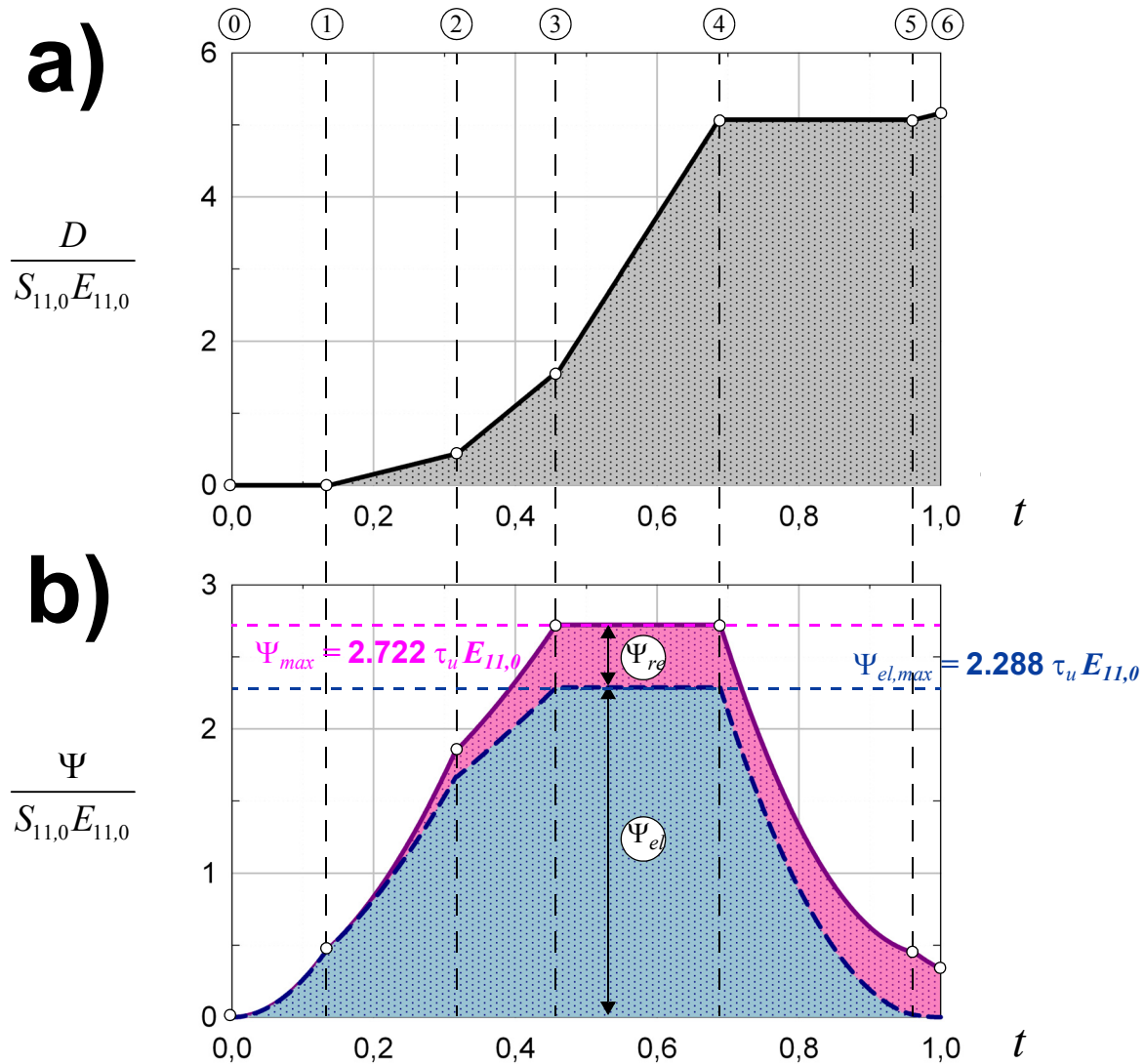


Bild 11.19 a) akkumulierte Dissipation D pro Stabbündelvolumeneinheit, b) elastische Verzerrungsenergiedichte Ψ mit Aufteilung in Ψ_{el} (blau) und den „eingefrorenen“ Anteil Ψ_{re} (pink) als Funktion des Chronologieparameters t

zwischen Punkt 3 und 4 erreicht wird. Nach Entlastung (Punkt 6) ist die Spannung S_{II} null. Die elastische Verzerrungsenergiedichte Ψ (pinke Kurve in Bild 11.19) des Systems ist in Punkt 6 nicht null, da durch den Eigenspannungszustand noch elastische Energie in den Einzelstäben gespeichert bleibt. Die im System gespeicherte (eingefrorene) elastische Verzerrungsenergiedichte Ψ_{re} ist die Differenz (die pinke Fläche) zwischen Ψ_{el} (blau-strichliert) und Ψ . Bei $S_{II} = 0$ hat Ψ_{el} ein Minimum oder umgekehrt: dort wo der Funktionsverlauf von Ψ_{el} ein Minimum hat, ist S_{II} null.

11.8.4 Entlastung & Eigenspannungszustand

Ab Punkt 4 wird das Stabbündel entlastet und die axiale Verzerrung E_{II} verringert. Bis Punkt 5 findet diese Entlastung elastisch mit der Materialsteifigkeit E statt. Die plastische Stabbündelverzerrung nimmt nicht weiter zu. Bei Punkt 5 erreicht Stab 2 die Druckversa-

gensspannung $S_{11,Y,2} = -2$ und hat damit mit der Verzerrungsabnahme $2|E_{11,Yi}|$ den gesamten elastischen Bereich zwischen Versagenszug- und Versagensdruckspannung durchmessen. Die Stabbündelspannung ist in Punkt 5 noch immer positiv und die axiale Verzerrung muss weiter auf Punkt 6 verringert werden. In Punkt 6 ist die Verzerrung E_{11} gleich der verbleibenden plastischen Verzerrung $E_{11,pl}$. Die drei Einzelstäbe haben einen Restspannungszustand (Bild 11.20):

$$S_{11,1} = \frac{4}{19}(3\sqrt{3} - 5) = 0.0413 \quad S_{11,2} = -2 \quad S_{11,3} = \frac{2}{19}(13 - 4\sqrt{3}) = 0.6391 \quad (11-95)$$

$$S_{11} = \sum_{k=1}^3 a_k S_{11,k} = \sum_{k=1}^3 \frac{h_k}{h} S_{11,k} = 0$$

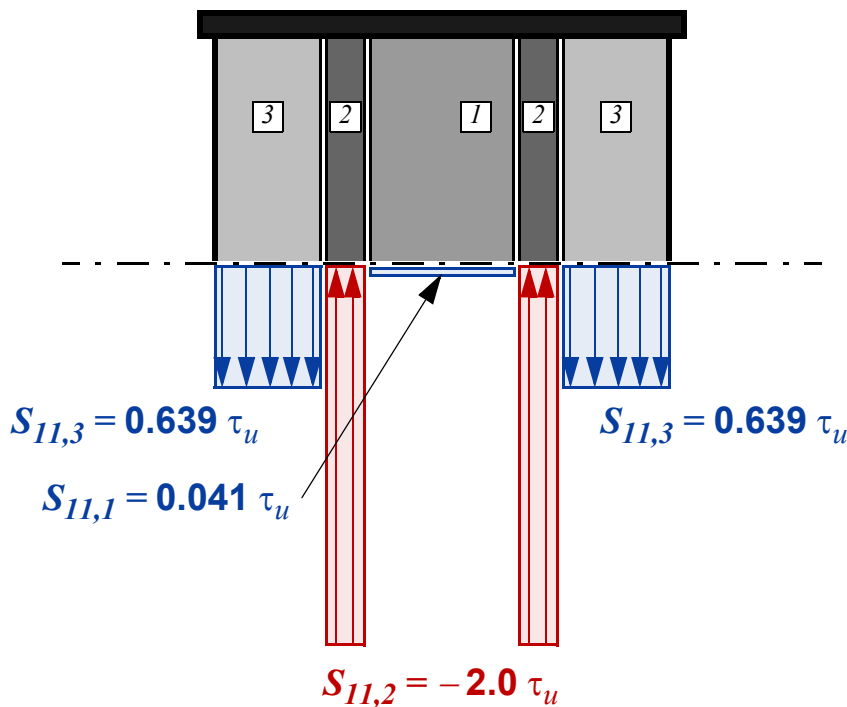


Bild 11.20 Eigenspannungszustand nach Entlastung des Stabbündels; die Stabbündelspannung S_{11} ist null.

11.8.5 Verzerrungsgesteuerter Belastungszyklus

Das Stabbündel wird zyklisch verzerrungsgesteuert belastet. Die axiale Verzerrung E_{11} wird zuerst auf die Amplitude $5E_{11,0}$ erhöht, anschließend wird das Stabbündel in entgegengesetzter Belastungsrichtung auf $-5E_{11,0}$ gestaucht und wieder in die Ausgangsposition mit $E_{11} = 0$ gebracht. Die axiale Normalspannung S_{11} und die plastische Verzerrung $E_{11,pl}$

des Stabbündels bei diesem Deformationsvorgang sind in Bild 11.21 dargestellt. Die maximalen Verzerrungswerte werden bei den Punkten 1 und 2 erreicht. Der Anfangszustand ist mit A, der Endzustand ist mit E gekennzeichnet. Nach dem Belastungszyklus ist das Stabbündel zwar wieder in der unverformten Ausgangsposition mit $E_{II} = 0$, die Spannung und die plastische Verzerrung sind aber nicht null. Um das Stabbündel in der unverformten Endposition E festzuhalten, wird die Zugspannung S_{II} benötigt, die sich aus der negativen plastischen Stabbündelverzerrung $E_{II,pl}$ mal dem äquivalenten E-Modul E ergibt. Die plastische Verzerrung ist im Punkt E negativ. Stab 2 und 1 erreichen im Laufe des Deformationszyklus (A-E) zweimal die plastische Zugspannung und einmal die plastische Druckversagensspannung. Dabei bilden sich jeweils auch alternierend plastische Verzerrungen auf Zug bzw. auf Druck aus. Stab 3 erreicht im letzten Streckungsbereich (Punkt 2 bis E) die Zugversagensspannung nicht mehr. Dazu müsste das Stabbündel abermals bis $5E_{II,0}$ axial verzerrt werden.

Bei weiteren Durchläufen des axialen Verzerrungszyklus wird immer dieselbe Spannungs- und plastische Verzerrungsschleife durchfahren und es kommt zu stets wechselnder Plastizierung aller drei Einzelstäbe. Die speicherbare elastische Verzerrungsenergie ist mit der Obergrenze Ψ_{max} limitiert (Bild 11.22), während die akkumulierte Dissipation unentwegt anwächst. Das Wechselplastizieren der Einzelstäbe mit einhergehender Dissipation führen bei einigen Materialien zu plastischer Ermüdung und in Folge zu Trenn- bzw. Materialversagen (*low cycle fatigue*). Diese Versagensart ist aber in dem bestehenden Modell nicht inkludiert, d.h., die plastischen Zyklen können unbegrenzt oft wiederholt werden.

11.8.5.1 Einspiellast, Ratcheting und zyklische Verfestigung

Gesucht wird der Beanspruchungszyklus, der bei dem gegebenen Dreistabsystem gerade nicht zu alternierenden plastischen Verzerrungen führt. Diese Frage wurde bereits zuvor bei der Diskussion der Entlastung implizit beantwortet.

Überschreitet der steuernde Verzerrungswert E_{II} nach einem anfänglich aufgebrauchten, beliebig großen Wert, wobei es zur Ausbildung einer plastischen axialen Verzerrung kommt, bei weiteren Be- bzw. Entlastungszyklen nicht den Betrag $2|E_{II,yi}|$ bilden sich keine weitere plastische Verzerrung im Stab 2 und damit im Stabbündel aus. Alternierendes Plastizieren und Dissipation sind ausgeschlossen und die weiteren Be- und Entlastungen finden nur im elastischen Bereich statt. Das sogenannte *Ratcheting*-Verhalten - das kumulative Anwachsen der (plastischen) Verzerrungen bei zyklischen Spannungswechseln -, oder zyklische Ver- oder Entfestigungsvorgänge sind durch das verwendete Stabbündel- und Materialmodell nicht darstellbar. Ein einfaches „1D-Think Model“ um das *Ratcheting*-Verhalten unter zyklischer Beanspruchung abzubilden, findet sich in dem Buch von Ulm/Coussy (2003) auf S. 236.

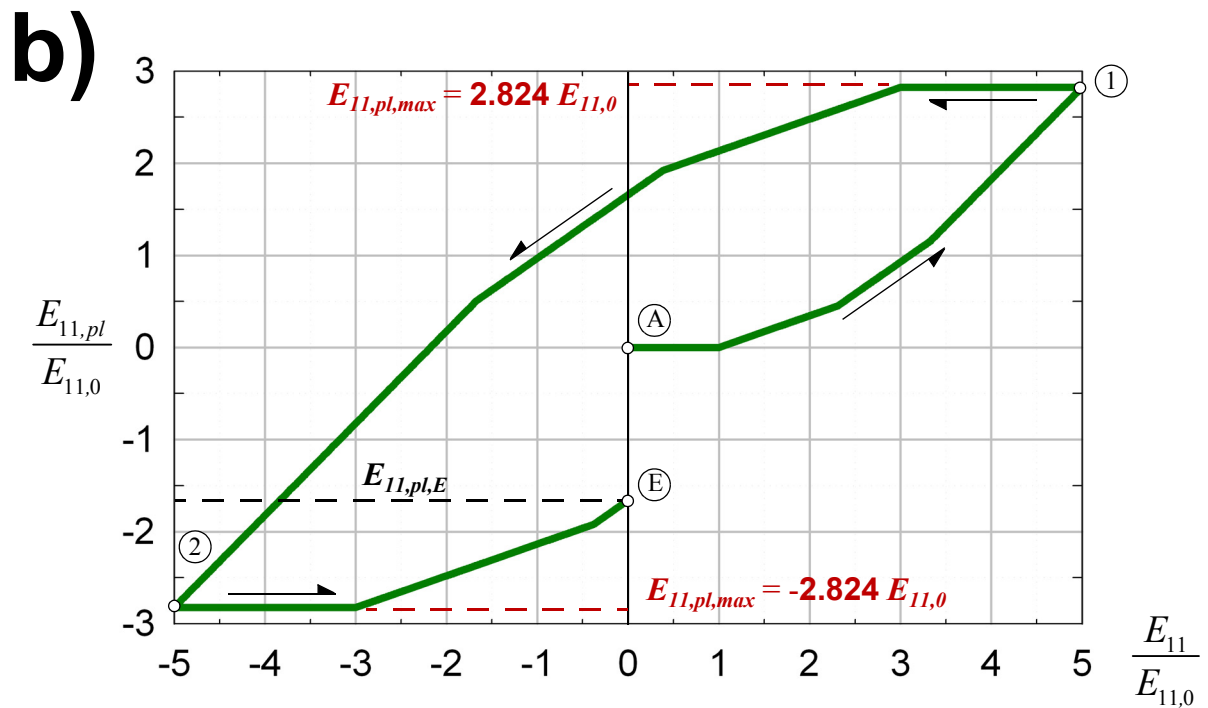
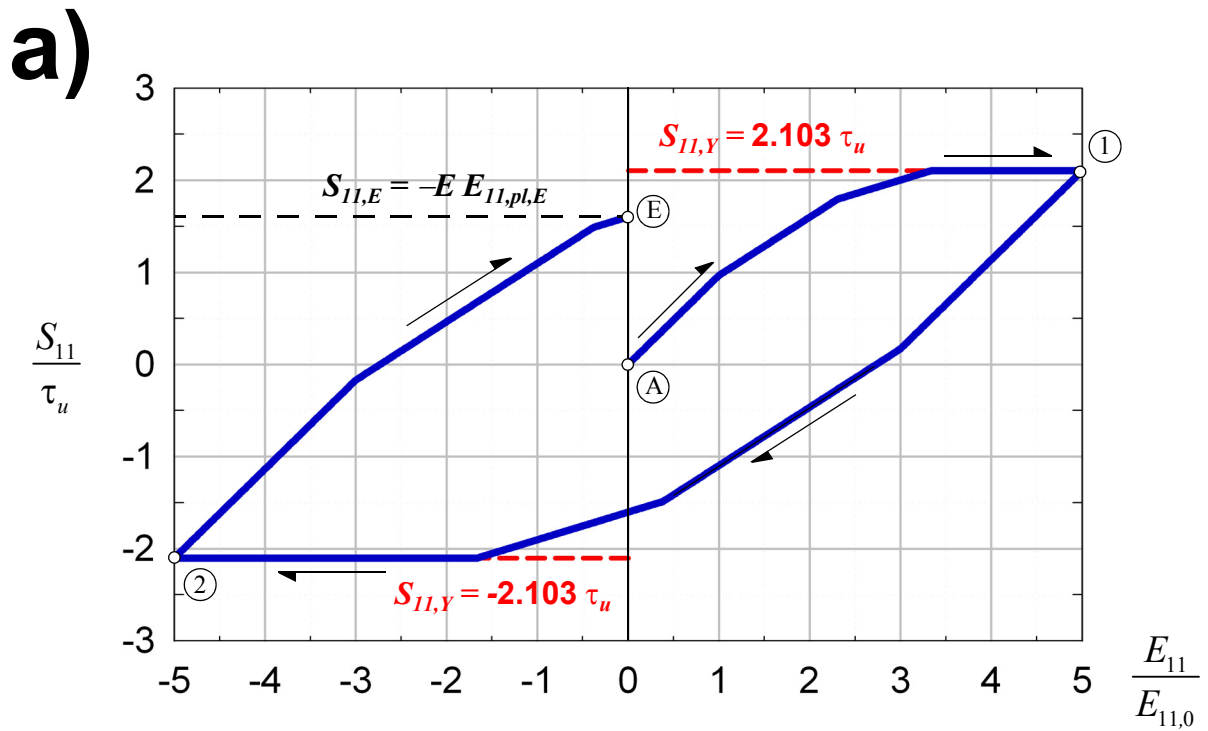


Bild 11.21 a) Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und b) kumulative plastische Stabbündelverzerrung $E_{11,pl}$ des Stabbündels bei einem verzerrungsgesteuerten Be- und Entlastungszyklus

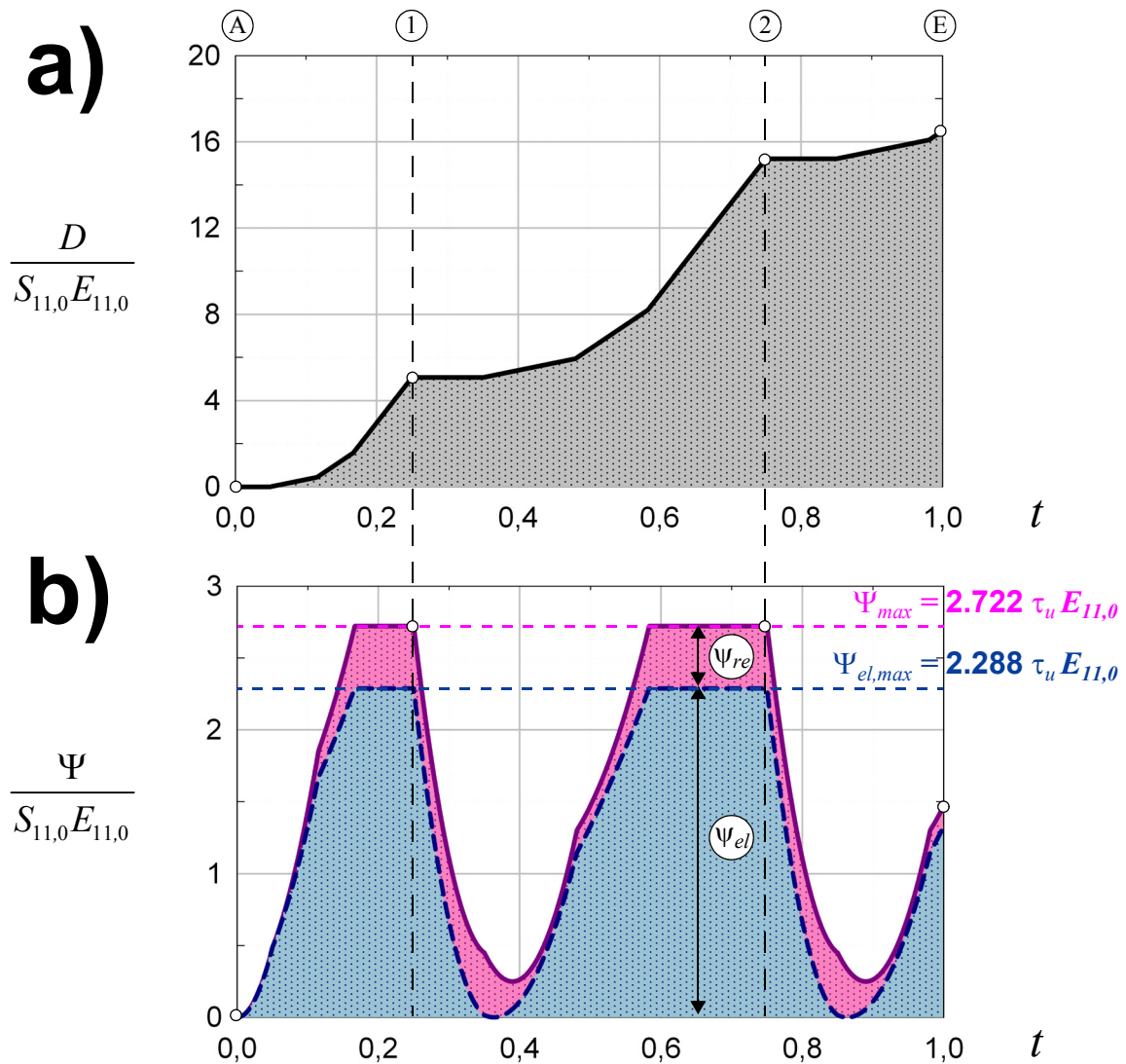


Bild 11.22 a) akkumulierte Dissipation $D(t)$ und b) elastische Verzerrungsenergiedichte $\Psi(t)$ mit Aufteilung in Ψ_{el} (blau) und Ψ_{re} (pink)

11.8.6 Systemvariante

Bei Stab 3 wird der Winkel α_k auf 0° abgeändert. Unter der auftretenden einaxialen Spannung erreicht dieser Stab niemals eine Versagensgrenze, da diese auf $S_{11,Y,3} \rightarrow \infty$ anwächst, und bleibt somit stets elastisch. Es wird der Belastungszyklus aus der vorigen Betrachtung übernommen und auf das Stabbündel aufgebracht. Nachdem Stab 2 und 1 zu fließen begonnen haben, liefert Stab 3 die verbleibende Stabbündelreststeifigkeit $\mathbf{C}_{ep} = 9/30 E_0$. Das Stabbündel erreicht keine plastische Tragspannung $S_{11,Y}$. Aufgrund der Restelastizität steigt die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung linear an und zeigt das charakteristische Bild einer kinematischen Verfestigung (Bild 11.23). Im Vergleich mit dem vorigen Beispiel wächst die akkumulierte Dissipation langsamer an, da Stab 3 keine Anteile mehr liefert; im Gegenzug wird bei gleicher Verzerrung mehr elastische Energie gespeichert. Die speicherbare elastische Verzerrungsenergie des Stabbündels erreicht kein oberes Limit, da Stab 3 - unabhängig von der Verzerrungsgröße - stets weiter elastische Verzerrungsenergie spei-

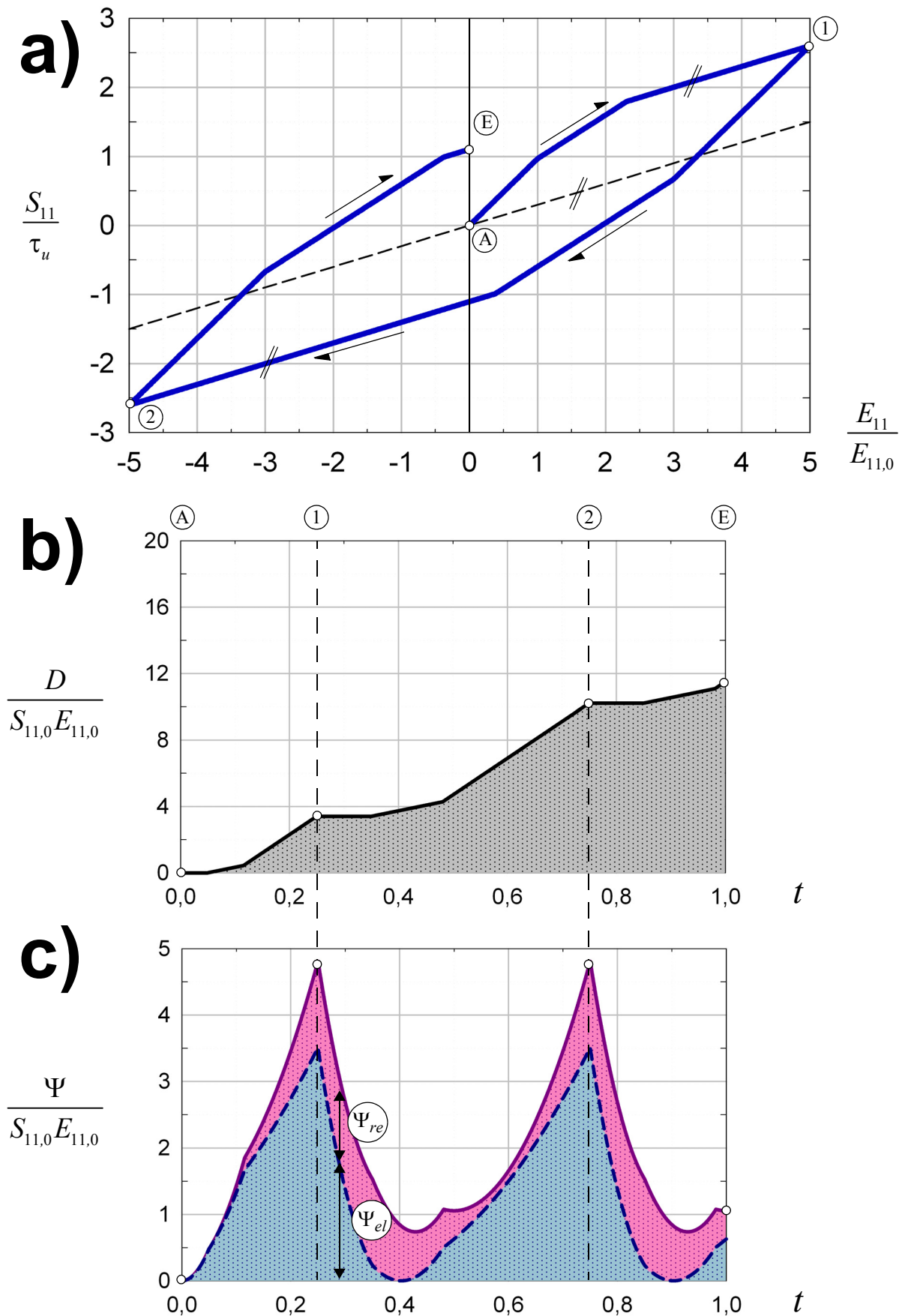


Bild 11.23a) Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des Stabbündels, b) akkumulierte Dissipation $D(t)$ und c) elastische Verzerrungsenergie-dichte $\Psi(t)$

chern kann (Bild 11.23).

11.8.7 Verallgemeinerung

Das anhand dieses einfachen Beispiels gezeigte elasto-plastische Verhalten lässt sich auf das Mikrostrukturmodell übertragen:

- Durch allmähliches Plastizieren der Einzelemente bei monoton ansteigender Belastung kommt es zu einem zunehmenden Steifigkeitsverlust des Makroelements; der zugehörige Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang ist abschnittsweise linear und erweckt bei sehr vielen Mikroelementen den Eindruck einer glatt verlaufenden Kurve.
- Haben alle Mikroelemente eine plastische Traglast, hat auch das Makroelement ein plastisches Limit. In diesem Fall haben alle Mikroelemente ein oberes Limit der elastischen Verzerrungsenergie; damit ist auch die elastische Verzerrungsenergie des Makroelements limitiert.
- Sobald ein(!) Mikroelement keinen plastischen Limitzustand bei der aktuell vorgegebenen Beanspruchung erreicht, wird immer weiter elastische Verzerrungsenergie in diesem Mikroelement und damit auch im Makroelement gespeichert und der makroskopische Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang steigt aufgrund dieser Restelastizität stets an. Es zeigt sich Verhalten wie bei kinematischer Verfestigung.
- Bei Vorgabe von Verzerrungszyklen kommt es zum Durchlaufen der stets selben Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge; ein Ratchening-Effekt ist durch das einfache Mikrostrukturmodell nicht abbildbar.

Das sind die wesentlichen elasto-plastischen Verhaltenscharakteristika des Mikrostrukturlements.

11.9 Einordnung verschiedener mikromechanischer Modelle in das entwickelte Konzept

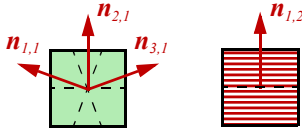
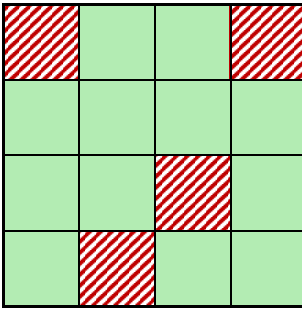
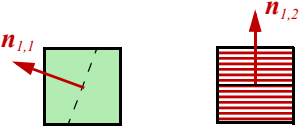
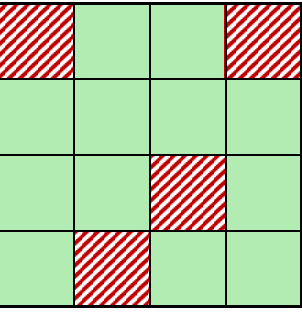
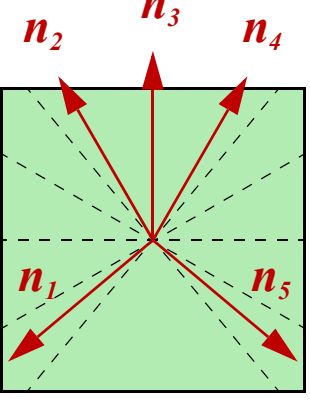
Es wird das Ordnungsschema aus Kap. 1.2.9 übernommen (Box 11.7). Das zuvor besprochene Microplane Modell (mit *kinematic constraint*) erweitert um Plastizität, wurde z.B. von Kuhl/Steinmann/Carol (2001) und Leukart (2005) ausgearbeitet. Je Microplane wird dabei immer nur eine Versagensbedingung (Mises-Typ) mit assoziiertem Versagensmechanismus angegeben. Die Orientierung der Microplane-Elemente wird durch das Integrationschema angegeben; Leukart (2005) wählt z.B. das Integrationsschema nach Bažant/Oh (1985) und erhält damit $M = 42$ Microplane-Elemente. Damit hat man nach dem Ordnungsschema aus Box 11.7 ein Multi-Komponenten & Mono-Mechanismen-Modell.

Zu Verwechslung kommt es in der Literatur öfter mit dem *Multilaminate* Modell von Zienkiewicz/Pande (1977); dem ursprünglichen Aufsatz nach handelt es sich um ein Mono-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell, oder kurz einem Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell. Dieses wird in der Bodenmechanik zur Behandlung von Modellen basierend auf Mohr-Typ-Versagensbedingungen verwendet, Pietruszczak/Pande (2001). Im isotropen Fall sind alle Raumrichtungen potentielle Versagensebenenorientierungen. In der rechnerischen Behandlung werden nicht diese unendlich vielen Raumrichtungen betrachtet, sondern nur eine diskrete Anzahl (siehe Kap. 5.7.3). Die Lage der Versagensebenenorientierungen des Multilaminate Modells wird nach den Integrationspunkten auf einer Kugeloberfläche, siehe z.B. Bažant/Oh (1985), ausgewählt, wodurch es leicht zu einer Verwechslung kommen kann.

Alle Modelle der Kristallplastizität (*Multi-Slip*), Borja/Wren (1993), Miehe/Schröder (2001), Schmidt-Baldassari (2003), sind ebenso den Mono-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modellen zuzuordnen.

Auch alle auf isotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen basierenden Plastizitätsmodelle sind, obwohl in der numerischen Behandlung meistens mit nur einer Versagensbedingung im isotropen Hauptspannungsraum operiert wird, siehe de Souza Neto/Peric/Owen (2008), der Modellvorstellung nach den Mono-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modellen zuzuordnen. Das in Kap. 12.3 ausgearbeitete Holzmaterialmodell ist ebenso ein Mono-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell

Ein Multi-Komponenten & Mono-Mechanismen-Modell ist das *Truss Lattice Material* Modell von Mohr (2004). Dabei sind die Mikroelemente M Fachwerkstäbe, denen jeweils ein einaxiales plastisches Verhalten zugewiesen wird. Mohr (2004) nennt dieses Modell ein *multi-surface plasticity model*. Er meint damit, dass die Versagensbedingungen der M Einzelstäbe in den makroskopischen Spannungen ausgedrückt (siehe Kap. 10.4.3), M Versagensbedingungen im makroskopischen Spannungsraum ergeben.

Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell <i>(Seriell-Parallel-Schaltung)</i>	Multi-Komponenten & Mono-Mechanismen-Modell <i>(Parallel-Schaltung)</i>	Mono-Komponente & Multi-Mechanismen-Modell <i>(Seriell-Schaltung)</i>
M ... Anzahl der Mikroelemente N ... Anzahl der Versagensmechanismen je Mikroelement		
M ≥ 2	M ≥ 2	M = 1
N ≥ 2	N = 1	N ≥ 2
<p style="text-align: center;">Mikroelemente:</p>  <p style="text-align: center;">Makroelement:</p> 	<p style="text-align: center;">Mikroelemente:</p>  <p style="text-align: center;">Makroelement:</p> 	<p style="text-align: center;">Mikroelement = Makroelement</p> 
<p>Polykristallmodell aus Kap. 11.6, Stabbündelmodell aus Kap. 11.8</p>	<p><i>Truss Lattice Material</i> Modell, Mohr (2004), <i>Microplane</i> Modell mit <i>kinematic constrain</i>, Bažant/Gambarova (1984), Kuhl/Steinmann/Carol (2001), Leukart (2005)</p>	<p><i>Multilaminat</i> Modell, Zienkiewicz/Pande (1977), Kristallplastizität, Taylor, Batchelor ed. (1958), Kap. 9.7, Borja/Wren (1993), Miede/Schröder (2001), Schmidt-Baldassari (2003) Tresca-, Mohr-Coulomb, Leon-, Rankine-Versagensbedingungen, Holzmodell aus Kap. 12.3</p>

Box 11.7 Verallgemeinertes Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen Plastizitätsmodell; einige zuordenbare Modelle

TEIL V

**Holzmaterialmodell
& Re-Investigation
des Tragverhaltens
von biaxial
beanspruchten
Holzprobekörpern**

Inhalt:

- 12 Materialmodell für Holz**
 - 13 Versuchsdurchführung & Aufgabenstellung**
 - 14 Untersuchung des elastischen Tragverhaltens des Probekörpers**
 - 15 Traglastuntersuchung und Versagensverhalten des Probekörpers**
-

12

Materialmodell für Holz

12.1 Einleitung und Kapitelaufbau

12.1.1 Problembeschreibung

12.1.1.1 „Fehlerfreies“ Holz

Holz ist - aufgrund des natürlichen Wachstums der Zellstruktur - ein strukturiert aufgebautes Material. Besonders in den astfreien Abschnitten eines Kantholzes ist eine sehr regelmäßige Materialstruktur erkennbar, die sich durch einen klaren Faserlängsverlauf und eine gleichmäßige Abfolge von Früh- und Spätholzschichten auszeichnet. Solche Ausschnitte aus dem Stamm werden als „fehlerfreies“ Holz (*clear soft wood*) bezeichnet.

Für dieses fehlerfreie Holz soll ein Materialmodell bestehend aus einer elastischen Materialsteifigkeitsmatrix und einem Versagensmodell formuliert werden, das in Traglastberechnungen von Holzstrukturen angewendet werden kann.

12.1.1.2 Repräsentatives materielles Element

Um ein astfreies und regelmäßig aufgebautes Holzteilchen aus dem Stamm herauszusägen, müssen die Elementabmessungen groß genug gewählt werden, sodass die Abfolge von Früh- und Spätholz gleichmäßig die Probengröße durchzieht, aber wiederum klein genug, dass der Längsfaserverlauf innerhalb des Elements gleichförmig und geradlinig ist und der Jahringverlauf als äquidistante Abfolge von parallelen Ebenen erscheint. In Bild 12.1 ist ein Schnitt durch die Stammebene eines solchen repräsentativen materiellen Elements dargestellt.

12.1.1.3 Materialhauptrichtungen

Die Wachstumsstruktur des RME, die im Querschnitt visuell durch den Hell-Dunkelwechsel von Früh- und Spätholz auszumachen ist und in deren Längsrichtung die Holzfasern verlaufen, legt nahe diese - zunächst nur optisch ausmachbaren - Richtungen als Materialhauptachsen zu wählen. Die x_1 -Achse wird so gelegt, dass sie parallel zur Faserrichtung verläuft. Normal auf die Früh- und Spätholzzellschichten steht die x_2 -Materialhauptachse. Orthogonal zu diesen beiden Materialhauptrichtungen liegt die dritte Achse.

Im Holzbau werden die Materialhauptrichtungen auch mit x_L , x_R und x_T bezeichnet. Die Indizes bezeichnen die lokalen Wachstumsrichtungen: L steht für Längs-, R für Radial- und T für die Tangential- oder Umfangswachstumsrichtung. An diesem Element werden die elastische Verzerrungsenergiedichte und das Versagensmodell formuliert. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Formulierung des Versagensmodells gelegt. Die Richtung der Holzfasern (x_L -Achse) hat eine ausgezeichnete mechanische Bedeutung: In dieser Materialhauptrichtung sind sowohl die Steifigkeiten als auch die Festigkeiten um ein Vielfaches höher als in allen anderen Materialhauptrichtungen.

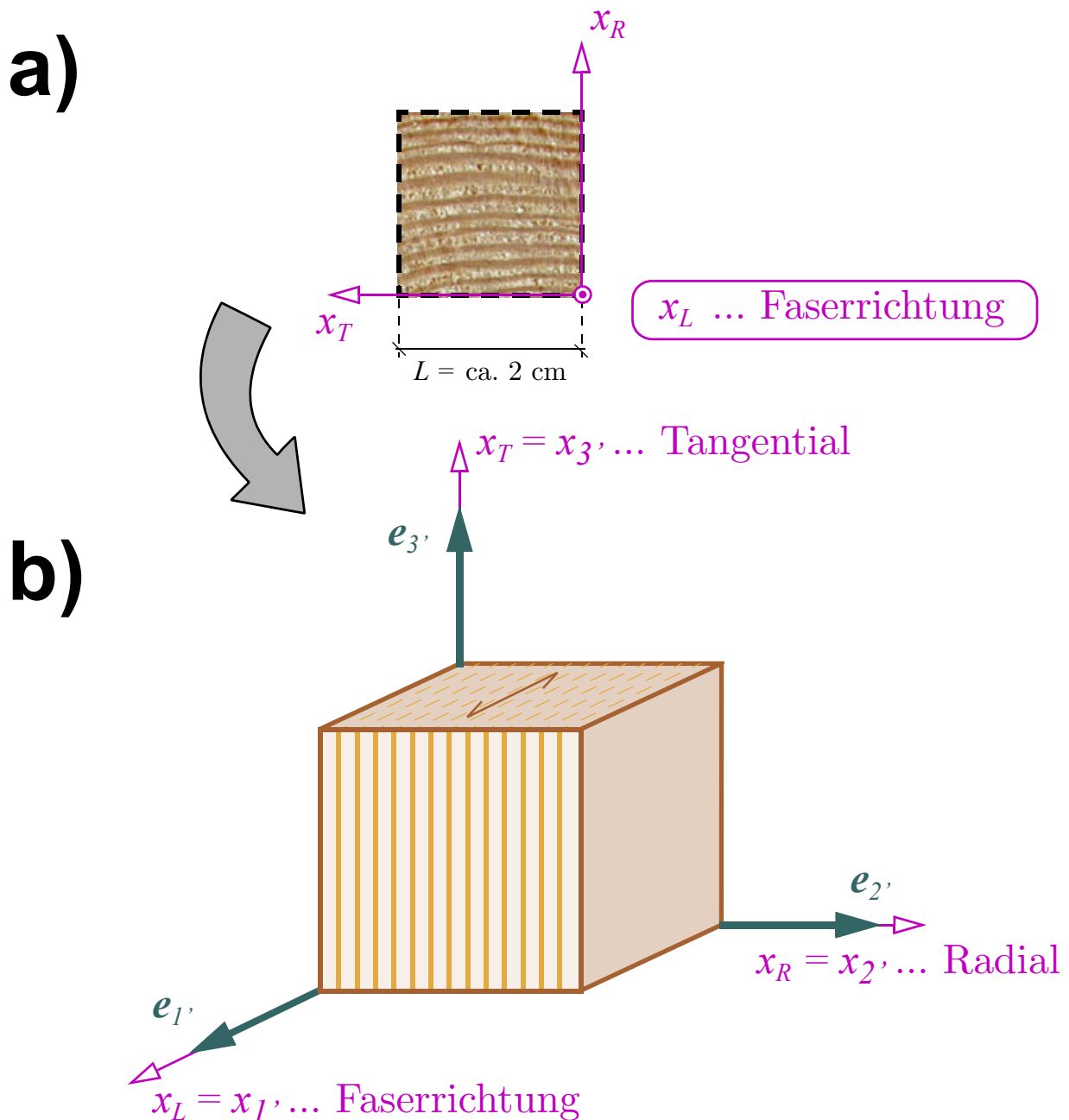


Bild 12.1 a) Querschnitt durch einen Baumstamm mit dem repräsentativen materiellen Element von „fehlerfreiem“ Holz; b) RME mit schematischer Darstellung der Früh- und Spätholzabfolge

12.1.2 Literatur & Stand der Forschung

In Kapitel 10 des Berichts „Report on Materials of Construction used in Aircraft and Aircraft Engines“ von Prof. Jenkins (1920), wobei die Untersuchungen von Major A. Robertson durchgeführt wurden, wird das Festigkeitsverhalten von Holz und Holzbauteilen im Flugzeugbau untersucht. Besonders interessant ist dabei die Untersuchung zur Festigkeit von Holz bei einaxialer Zug- bzw. Druckbeanspruchung schräg zum Holzfaserverlauf (Unterkapitel 4). Dabei werden drei Versagensmechanismen unterschieden:

- Zug/Druck in Faserlängsrichtung,
- Zug/Druck quer zur Faserrichtung und
- faserparalleles Schubversagen.

Je nach Neigung der Faser- zur Beanspruchungsrichtung ist einer dieser drei Versagensmechanismen maßgebend. In vorläufiger Unkenntnis des oben genannten Berichts hat Stüssi (1946) eine Untersuchung mit derselben Idee veröffentlicht. Beide Arbeiten verwenden die Mohr'sche Idee zur Formulierung der Versagensbedingungen.

Für die einaxiale Drucktragspannung $f_{\alpha,c}$ von Holz schräg zur Faserrichtung gibt Hankinson (1921) die Gleichung

$$f_{\alpha,c} = \frac{f_{\parallel,c} f_{\perp,c}}{f_{\parallel,c} \sin^n \alpha + f_{\perp,c} \cos^n \alpha} \quad (12-1)$$

an, wobei für den Exponenten n üblicherweise Werte zwischen 1.5 bis 3 angegeben werden. Der Winkel zwischen Beanspruchungsachse und Faserrichtung ist α . Obwohl die Hankinson Formel oft als empirische Gleichung bezeichnet wird, lässt sie sich in der ursprünglichen Form mit dem Exponenten $n = 2$ aus der linearen Versagensbedingung

$$F' = \frac{S_{1'1'}}{f_{\parallel,c}} + \frac{S_{2'2'}}{f_{\perp,c}} - 1 \quad (12-2)$$

herleiten. Es wird also von einer linearen Interaktion zwischen faserparallelem Versagen und Versagen quer zur Faserrichtung ausgegangen. Die Gleichung von Hankinson beinhaltet nur die einaxialen Festigkeiten bei rein faserparallelem Druck ($f_{\parallel,c}$) und Druck quer zur Faserrichtung ($f_{\perp,c}$); Schubversagen wird nicht betrachtet.

Norris (1962) berücksichtigt Schubinteraktionsterme in der Beschreibung von einaxialem Holzversagen. Er geht zur Formulierung der Versagensbedingungen von einer zellenförmigen Struktur mit würfelförmigen Einschlüssen aus. Die Zellwände stehen normal auf die drei Materialhauptrichtungen. Es werden aufgrund dieses Strukturaufbaus drei quadratische Versagensbedingungen

$$F_i' = \frac{S_{k'k'}^2}{f_k^2} + \frac{S_{l'l'}^2}{f_l^2} - \frac{S_{k'k'} S_{l'l'}}{f_k f_l} + \frac{S_{k'l'}^2}{f_{kl}} - 1 \quad i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}, \quad k, l = \begin{cases} 1, 2 \\ 2, 3 \\ 1, 3 \end{cases} \quad (12-3)$$

bei einem ebenen Spannungszustand in der jeweiligen Scheibenelementebene formuliert. Damit hat man aber noch kein komplettes dreidimensionales Versagensmodell. Es wird z.B. kein Unterschied zwischen Druck- und Zugbeanspruchung gemacht oder zwischen Versagensmechanismen unterschieden.

12.1.2.1 Versagensmodelle basierend auf einer einzelnen Tsai-Wu-Versagensbedingung

Ausgehend von den biaxialen Versuchen, die am Institut für Festigkeitslehre an der TU Wien durchgeführt wurden, wird in Eberhardsteiner (2002) eine Tsai-Wu-Versagensbedingung, siehe Gleichung (4-26), zur Beschreibung von Holzversagen bei ebener Beanspruchung vorgeschlagen. Mit einer einzigen Versagensbedingung wird eine Unterscheidung in unterschiedliche Versagensmechanismen ausgeschlossen. Die benötigten Festigkeitswerte werden aus den gemessenen Bruchpunkten durch eine Ausgleichsrechnung bestimmt. Einen ähnlichen Vorschlag zur Formulierung eines Festigkeitskriteriums basierend auf der quadratischen Tsai-Wu-Funktion macht van der Put (2005). Hemmer (1985) verwendet zur Beschreibung der Versagensspannungen von Weißtanne auch einen Polynomausdruck in den Spannungen mit zusätzlichen kubischen Termen. Einen zusammenfassenden Überblick zur Anwendung von Polynomfunktionen (Mises-Typ) zur Beschreibung des Holzversagensbeginns geben Kasal/Leichti (2005).

Ausgehend von der Tsai-Wu-Versagensbedingung von Eberhardsteiner (2002) werden von Müllner (2003) für den ebenen Spannungszustand die Gleichungen der Plastizität mit assoziierter Fließregel ausgearbeitet. Um die Versagensmechanismen (i) faserparalleles Zug- und Druckversagen und (ii) Druck- und Zugversagen quer zur Faserrichtung zu berücksichtigen, wird das Modell um eine nicht-assozierte Verfestigungsregel erweitert. Diese Ver- und Entfestigungsgleichungen werden aus dem Mehrflächenplastizitätsmodell von Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2003) übernommen. Damit lassen sich die Festigkeitsparameter der verwendeten quadratischen Tsai-Wu-Versagensbedingung individuell ändern. Dieses Modell wird in Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2005) für die Verwendung in einem Schalenelement um die transversalen Schubspannungskomponenten erweitert. Die Motivation dieser beiden Modelle ist es, ein Versagensmodell mit mehreren Versagensbedingungen zu vermeiden, wobei die sich individuell ausbildenden Versagensmechanismen über ein Ver- bzw. Entfestigungsmodell berücksichtigt werden. Fleischmann (2005) implementiert dieses Modell in ein kommerzielles Softwarepaket und wendet es auf einige Beispiele an.

12.1.2.2 Holzmodelle mit mehreren Versagensbedingungen zur Beschreibung der unterschiedlichen Versagensmechanismen

Ausgehend von den Versuchen von Eberhardsteiner (2002) entwickeln Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2003) ein Multi-Mechanismen-Versagensmodell (*multi-surface orthotropic plasticity model*) für fehlerfreies Holz, um die anfänglich vorgeschlagene „Einfächen“-Versagensbedingung von Eberhardsteiner (2002) zu verbessern bzw. zu ersetzen. Dabei wird zwischen den vier Versagensmechanismen

- (i) faserparalleler Sprödbruch,
- (ii) Sprödbruch normal zur Faserrichtung (in radialer Richtung),
- (iii) duktiler Druckverhaltens normal zur Faserrichtung (in radialer Richtung) und

- (iv) Druckversagen in Faserrichtung

unterschieden. Jeder Versagensmechanismus wird durch eine eigene quadratische Tsai-Wu-Versagensbedingung in den drei Spannungskomponenten S_{LL} , S_{RR} und S_{LR} des ebenen Spannungszustandes in der $\{L,R\}$ -Ebene beschrieben. Die Versagensbedingungen der Modi (i), (iii) und (iv) lassen sich als Paraboloidflächen im $\{S_{LL}, S_{RR}, S_{LR}\}$ -Spannungsraum darstellen und sind daher konvex. Für den Versagensmechanismus (ii) beschreibt die zugeordnete quadratische Tsai-Wu-Versagensbedingung eine zweischalige Hyperboloidfläche im $\{S_{LL}, S_{RR}, S_{LR}\}$ -Spannungsraum. Aufgrund der gewählten Darstellung ist diese Funktion nicht konvex, was zu rechnerischem Zusatzaufwand führt, da abkontrolliert werden muss, ob der berechnete Lösungspunkt auf der korrekten Teilfläche des zweischaligen Hyperboloids liegt, siehe Kohlhauser (2005). Das Modell ist nur auf den ebenen Beanspruchungszustand und die oben aufgelisteten vier Versagensmechanismen beschränkt. Dabei wird bei allen Versagensmechanismen eine Interaktion zwischen den drei Spannungskomponenten angenommen. Die Möglichkeit von Versagensmechanismen, die trotz des ebenen Belastungszustands ein Versagensverhalten aus der Scheibenebene heraus aufweisen oder das Versagen bei Schubbeanspruchung quer zur Faserrichtung wird nicht betrachtet. Auch wird zwischen reinem Querkzugversagen und faserparallelem Schubversagen kein Unterschied gemacht; diese beiden Versagensarten sind in Versagensmechanismus (ii) inkludiert.

Schmidt/Kaliske (2006) erweitern das Modell von Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2003) auf den dreidimensionalen Fall. Zusätzlich wird Zug- und Druckversagen in tangentialer Richtung und Schubversagen berücksichtigt. Diese weiteren Versagensmechanismen werden ebenso durch eine quadratische Mises-Typ- bzw. Tsai-Wu-Versagensbedingung beschrieben.

Grosse/Rautenstrauch/Schlegel (2005) formulieren ein komplettes dreidimensionales Materialmodell für Holz, wobei zwischen den Versagensmechanismen

- faserparalleles Zugversagen (Faserruptur),
- faserparalleles Druckversagen (Faserstauchung),
- Druckversagen quer zur Faserrichtung (radiale und tangentiale Kompression) und
- Rissbildung quer zur Faser in der LT- bzw. der LR-Ebene zufolge Querkzug und Schubbeanspruchung

unterschieden wird. Für die ersten drei Versagensmechanismen wird jeweils ein Maximalspannungskriterium formuliert. Da zwischen Druckversagen in radialer und tangentialer Richtung ein Unterschied gemacht wird, erhält man vier Versagensbedingungen. Bei der Rissbildung quer zur Faserrichtung wird das Versagen in der LT- und der LR-Beanspruchungsebene unabhängig voneinander betrachtet. Die in diesen Schnittebenen wirkenden Spannungskomponenten, die Zugnormalspannung und die Schubspannungskomponenten quer und längs zur Faserrichtung, interagieren im formulierten Modell. In der LT-Beanspruchungsebene wird das Versagen durch zwei Funktionen erfasst. In der LR-Beanspruchungsebene ist nur eine Versagensbedingung formuliert. Das Versagensmodell besteht in

Summe aus sieben voneinander unabhängigen Versagensbedingungen. Die Vorgehensweise zur Formulierung der Versagensbedingungen entspricht der Mohr'schen Idee und ähnelt dem in dieser Arbeit formulierten Modell.

Alle Modelle bilden Materialbruch durch ein Entfestigungsmodell in den Plastizitätsgleichungen ab, was zu Lösungs- und Konvergenzschwierigkeiten führen kann, siehe Kohlhauser (2005) und Fleischmann (2005).

12.1.2.3 Holzmodelle mit kohäsiven Elementen zur Beschreibung des Bruchverhaltens

Schmidt/Kaliske (2009) übernehmen zur Modellierung der drei duktilen Druckversagensmechanismen in den drei Materialhaupttrichtungen die quadratischen Versagensbedingungen aus Schmidt/Kaliske (2006). Die verbleibenden spröden Versagensmechanismen, die drei Zugversagensmechanismen und der Schubversagensmechanismus, werden im Unterschied zu Schmidt/Kaliske (2006) nicht im Plastizitätsmodell durch ein entfestigendes Verhalten erfasst, sondern durch kohäsive Elemente modelliert. Die Lage dieser potentiellen Bruchflächen muss vom Nutzer a priori festgelegt werden. Dieser Idee folgt Resch (2011).

12.1.3 Aufgabenstellung & Ziele des Kapitels

Besonderer Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Formulierung eines Versagensmodells für fehlerfreies Holz. Ausgangs- und Anknüpfungspunkt zur Formulierung sind Versuche, die an fehlerfreien Holzproben durchgeführt wurden. Dabei geht es im Besonderen um die ausdrückliche Unterscheidung von unterschiedlichen Versagensmechanismen und von materiellen Orientierungen, denen diese Versagensmechanismen zugeordnet sind. Die Beschreibung des Versagensbeginns erfolgt mit Mohr-Typ-Versagensbedingungen aus Kap. 4.2. Es wird angestrebt, das Material- und Versagensmodell so einfach und verständlich wie möglich zu formulieren.

Den duktilen Versagensmechanismen wird z.B. nach Erreichen der Elastizitätsgrenze perfekt plastisches Verhalten zugewiesen; eventuelle Verfestigungen, die aus der Kompaktierung bzw. der Densifikation der Holzmikrostruktur herrühren, werden nicht betrachtet, da diese erst bei sehr großen Verzerrungen, die außerhalb des angestrebten Anwendungsgebiets des Modells liegen, auftreten.

Bei den spröden Mechanismen ist die Versagensbedingung auch Bruchbedingung. Bei Bruch wird die dem spröden Versagensmechanismus zugeordnete Versagensebenenorientierung spannungsfrei. Das angeführte Versagensmodell ist ein erstes Basismodell und lässt sich bei neuen Kenntnissen hinsichtlich Spannungsinteraktionen oder möglichen weiteren Versagensmechanismen, die sich in Versuchen beobachten lassen, problemlos erweitern.

Das Materialmodell soll in Traglastuntersuchungen von Holzstrukturen, Tragelementen und Bauteilen zur Anwendung kommen.

12.1.4 Inhalt von Kapitel 12

12.2 Elastisches Materialverhalten von Holz

12.3 Versagensmodell für fehlerfreies Holz

12.4 Einaxialer Zug eines Holzstabes schräg zu den Materialhaupttrichtungen

12.5 Elastischer Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und Versagen einer Holzscheibe

12.7 Zusammenfassung & Ausblick

Zur Gewährleistung positiver Definitheit der Materialsteifigkeitsmatrix müssen die Materialkennwerte die nachfolgenden Ungleichungen erfüllen:

$$E_L > 0, \quad E_R > 0, \quad E_T > 0, \quad G_{LR} > 0, \quad G_{LT} > 0, \quad G_{RT} > 0, \\ 1 - \nu_L^2 > 0, \quad 1 - \nu_R^2 > 0, \quad 1 - \nu_T^2 > 0, \quad c_{ort} > 0 \quad (12-6)$$

12.2.2 Elastische Materialkennwerte von Kleinholzproben

Die in Box 12.1 exemplarisch ausgewählten elastischen Materialkenngrößen für sechs Laub- und vier Nadelholzarten sind aus Dinwoodie (2000) übernommen. Alle Versuche wurden 1948 von Hearmon an Kleinholzproben mit regelmäßigem Aufbau bei einer Holzfeuchte von 9 bis 12 % durchgeführt. Die Kennwerte ändern sich von Holzart zu Holzart. Weitere elastische Materialkenngrößen findet man im Wood Handbook des Forest Products Laboratory (1999). Lischke (1984) führt nur elastische Materialkenngrößen von Fichtenholz an. Selbst bei der Einschränkung auf eine einzige Holzart bewegt sich der E-Modul E_L zwischen 17000 und 11000 N/mm². Eberhardsteiner (2002) hat zusätzlich zu den biaxialen Versuchen auch einaxiale Versuche an fehlerfreiem Fichtenholz durchgeführt. Auch in diesen Messungen streuen die elastischen Kenngrößen, z.B. E_L zwischen 7500 und 20000 N/mm² bei Rohdichten zwischen ca. 0.4 und 0.6 g/cm³. Einflüsse für diese breite Streuung liegen in Unregelmäßigkeiten, Wuchscharakteristiken der Kleinstruktur, Rohdichte usw.

Holzart	E-Moduln			Schubmoduln				Querdehnzahlen		
	E_L [N/mm ²]	E_R/E_L [%]	E_T/E_L [%]	G_{LR} [N/mm ²]	G_{LR}/E_L [%]	G_{LT}/G_{LR} [%]	G_{RT}/G_{LR} [%]	ν_L [-]	ν_R [-]	ν_T [-]
Balsa	6300	5	2	312	5	65	11	0.40	0.07	0.06
Mahagoni	10200	11	5	900	9	67	23	0.39	0.14	0.10
Walnuss	11200	11	6	960	9	73	24	0.52	0.15	0.16
Birke	16300	7	4	1180	7	77	16	0.54	0.09	0.13
Esche	15800	10	5	1340	8	66	20	0.51	0.12	0.15
Buche	13700	16	8	1610	12	66	29	0.52	0.15	0.18
Fichte	10700	7	4	500	5	124	5	0.40	0.11	0.11
Sitkafichte	11600	8	4	750	6	96	5	0.33	0.10	0.10
Kiefer	16300	7	3	1160	7	59	6	0.46	0.09	0.13
Douglasie	16400	8	5	1180	7	77	7	0.50	0.09	0.11

Box 12.1 Elastische Materialkennwerte von Laub- und Nadelhölzern durch Versuche an regelmäßig strukturierten Kleinproben, Hearmon (1948), Dinwoodie (2000) S.109; der Feuchtigkeitsgehalt der Proben betrug zwischen 9 und 12 %

Um aber einen qualitativen Einblick und die Größenordnung der einzelnen Steifigkeiten und Querdehnzahlen unabhängig von der jeweiligen Holzart zu erhalten, werden in Box 12.1 die Steifigkeiten auf den faserparallelen E -Modul E_L und die Schubsteifigkeiten auf den Schubmodul G_{LR} bezogen dargestellt. Die angeführten Werte geben ein Bild in welchem Wertebereich und in welchem Verhältnis die einzelnen elastischen Materialkenngrößen der verschiedenen Holzarten zueinanderstehen, ungeachtet von Einflüssen wie z.B. Holzfeuchte, Rohdichte usw.

Besonders markant für alle Holzarten ist der im Vergleich zu allen anderen Steifigkeitsgrößen verhältnismäßig große faserparallele E -Modul E_L . Die beiden E -Moduln quer zur Faserrichtung, E_R und E_T , liegen betragsmäßig zwischen 2 und maximal 16% von E_L . Interessant ist auch die geringe Schubsteifigkeit. Der i.A. größte Schubmodul G_{LR} liegt bei den angeführten Holzarten zwischen 5 und 12 % von E_L . Der Schubmodul G_{LT} ist nahezu gleich oder ungefähr $2/3$ von G_{LR} . Der kleinste Schubmodul G_{RT} ist bei den oben angeführten Nadelhölzern ungefähr 5% von G_{LR} ; bei den Laubhölzern ca. 20% von G_{LR} .

Einige Holzarten weisen Querdehnzahlen auf, die größer als 0.5 sind. Im Fall isotroper linearer Elastizität wären solche Querdehnzahlen bei Aufrechterhaltung der positiven Definitheit nicht erlaubt. Diese Beschränkung gilt aber nicht bei orthotroper linearer Elastizität. In Box 12.2 sind die Größenverhältnisse zwischen den Steifigkeiten und die Querdehnzahlen für die Gruppen Laub- und Nadelholz zusammengefasst und vereinfacht qualitativ angegeben.

	E-Moduln		Schubmoduln		Querdehnzahlen		
	E_R/E_L [%]	E_T/E_L [%]	G_{LT}/G_{LR} [%]	G_{RT}/G_{LR} [%]	ν_L [-]	ν_R [-]	ν_T [-]
Laubholz	10	5	70	20	0.5	0.12	0.12
Nadelholz	8	5	100	5	0.4	0.1	0.1

Box 12.2 Größenverhältnisse der elastischen Materialkennwerte von Laub- und Nadelholz bei regelmäßig strukturierten Kleinproben

Trotz starker Streuung der elastischen Materialkennwerte weisen alle Holzarten in den Steifigkeitsverhältnissen und der Größe der Querdehnzahlen Ähnlichkeiten auf. Besonders charakteristisch ist der vergleichsweise hohe faserparallele E -Modul. Für Strukturberechnungen ist die Angabe der qualitativen Größen- und Steifigkeitsverhältnisse oft ausreichend. Im Zweifelsfall lassen sich Studien über die Auswirkungen von Parametervariationen der elastischen Kenngrößen auf das Last-Verformungs-Verhalten durchführen, um zu beurteilen, ob diese Änderungen wesentliche Auswirkungen haben. Für die Grobannahme der elastischen Materialkenngrößen spricht auch die starke Streuung der Versuchsergebnisse, die eine zu penible Handhabung der Beträge der Kenngrößen nicht sinnvoll erscheinen lässt.

12.3 Versagensmodell für fehlerfreies Holz

12.3.1 Versuchsbeobachtungen von Holzversagen

Die untergeordnete Zellstruktur der Früh- und Spätholzschichten erlaubt durch Betrachtung des gleichmäßigen strukturellen Aufbaus und dessen Versagensverhalten einen vertieften Einblick in das übergeordnete, makroskopisch erkennbare Versagensgeschehen. Das entwickelte Versagensmodell und die zugehörigen Festigkeitsgrößen basieren aber auf Betrachtungen, die am fehlerfreien (makroskopischen) Holzkörperchen gemacht wurden. Das mikrostrukturelle Geschehen wird dabei nur im Mittel erfasst.

In Versuchen ist der einaxiale Beanspruchungszustand (Zug- oder Druckbelastung) besonders einfach zu realisieren. Schwieriger ist es, einen Schubzustand im fehlerfreien Holzprobekörper zu erzeugen. Aus diesem Grund gibt es eine Vielzahl von Versuchsdaten und Fotografien von Bruchbildern des Probekörpers bei einaxialen Beanspruchungssituationen und sehr wenige Versuche (und zugehörige Bruchbilder) bei faserparallelem Schub und Schubbelastung quer zur Faserrichtung. Für die übersichtsartige Beschreibung der einaxialen Versuchsszenarien und das jeweils zugehörige Versagensgeschehen einschließlich der Erklärung des Versagensverhaltens der Zellstruktur wird auf die Arbeiten von Bodig/Jayne (1993), Gibson/Ashby (1999), Easterling/Harrysson/Gibson/Ashby (1982) und Dinwoodie (2000) verwiesen.

Nachfolgend werden elementare Belastungssituationen betrachtet und deren Versagensverhalten mit besonderem Fokus auf qualitative Aspekte, wie Versagensebenenorientierung und sprödes oder duktilen Materialverhalten, beschrieben. Die einaxialen Elementarbelastungen werden in faserparalleler Richtung (x_L -Achse) und normal dazu in Richtung der x_R bzw. x_T -Achse aufgebracht. Richtungen normal zum Faserverlauf werden alternativ auch mit „quer zur Faserrichtung“ bezeichnet. Bei Schubbeanspruchung wird zwischen der Belastung S_{LR} (oder S_{LT}), die als faserparallele Schubbeanspruchung bezeichnet wird, und dem Schub S_{RT} quer zur Faserrichtung unterschieden.

12.3.1.1 Bruch bei faserparalleler Zugbeanspruchung

Bei faserparalleler Zugbeanspruchung verhält sich das Holz linear-elastisch und bricht anschließend schlagartig entzwei. Es tritt ein Splitterbruch auf (Bild 12.2). Die Ursache für diese Bruchflächenausbildung liegt im mikroskopischen Zellenaufbau. Das substrukturelle Bruchgeschehen ist eine Abfolge von Bruchflächen, die normal zur Faserrichtung orientiert sind und Bruchflächen, die parallel zur Faserrichtung liegen und besonders häufig im Übergangsbereich zwischen Früh- und Spätholzzellen auftreten.

12.3.1.2 Spröbruch bei Zugbeanspruchung normal zur Faserrichtung

Bei dieser Beanspruchungsart hat Holz die geringste Festigkeit. Bei Zugbeanspruchung in

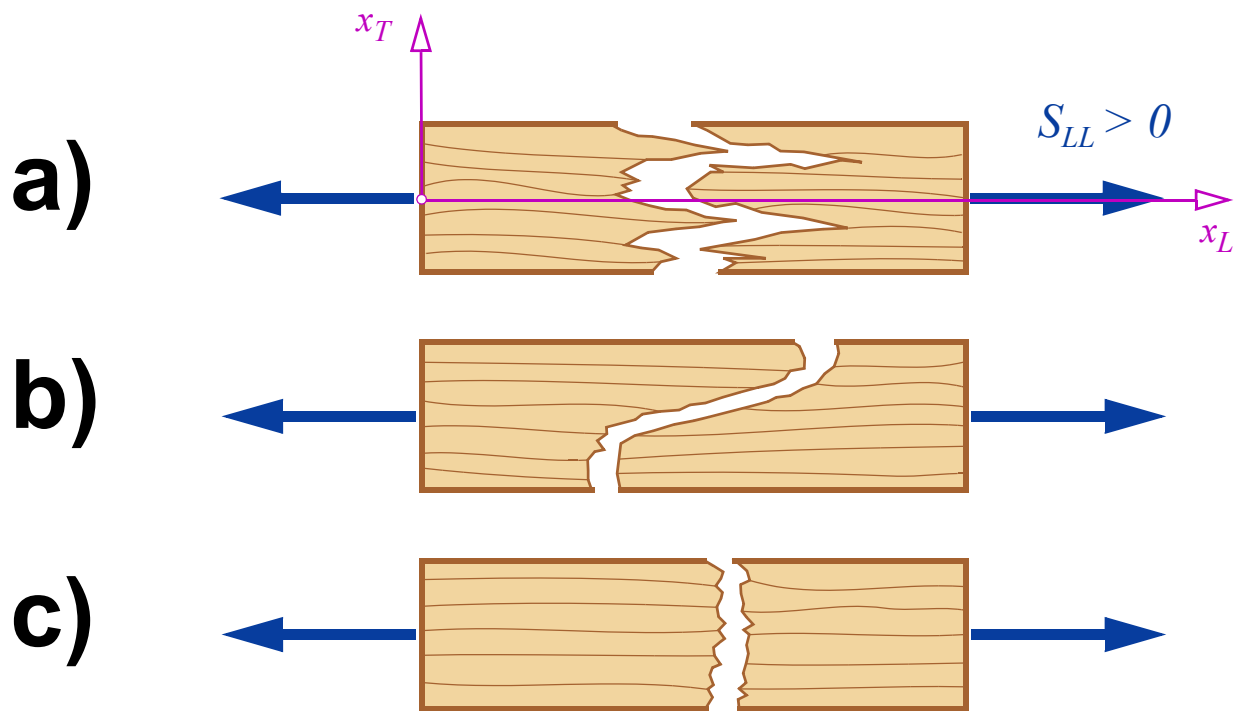


Bild 12.2 Schematische Darstellung von charakteristischen Bruchbildern von astfreien Holzprobekörpern bei faserparalleler Zugbeanspruchung: a) Splitterbruch; b) Bruchausbildung durch eine Spätholzzone und c) durch eine Frühholzzone, Bodig/Jayne (1993)

radialer Richtung ($S_{RR} > 0$) bricht der astfreie Holzkörper meistens entlang des Jahrringverlaufs in den Frühholzonen (die x_R -Achse steht normal auf die Bruchoberfläche). Bei Zug in tangentialer Richtung ($S_{TT} > 0$) liegt die Bruchfläche auch normal zur Beanspruchungsrichtung (Bild 12.3).

In beiden Belastungsfällen wird die Zellstruktur durch Brechen entlang der Zellwände zerstört, wobei sich diese Bruchart rasant durch das Zellgefüge fortpflanzt.

12.3.1.3 Faserparallele Druckbelastung

Bei Druckbeanspruchung in faserparalleler Richtung kommt es zu lokalem Ausknicken und Brechen der Fasern. Entweder bricht die Deckelung zwischen hintereinander angeordneter Zellen und die Zelllängswände schieben sich ineinander oder es kommt zum Stabilitätsversagen durch Ausbeulen der Zellwände. Diese beiden substrukturellen Versagensmechanismen treten gemischt auf. Der makroskopische Holzprobekörper verhält sich zunächst linear-elastisch, am Lastlimit beginnen die ersten Zellen zu versagen und es kommt zu einem Lastabfall. Schließlich wird ein Lastplateau erreicht und erst nach Kompaktierung der Zellstruktur kommt es wieder zu einem starken Anstieg der Spannungen, wobei die Dehnungen kaum zunehmen.

12.3.1.4 Druckbeanspruchung quer zur Faserrichtung

Bei Druck normal zur Faserrichtung - in radialer ($S_{RR} < 0$) oder tangentialer ($S_{TT} < 0$)

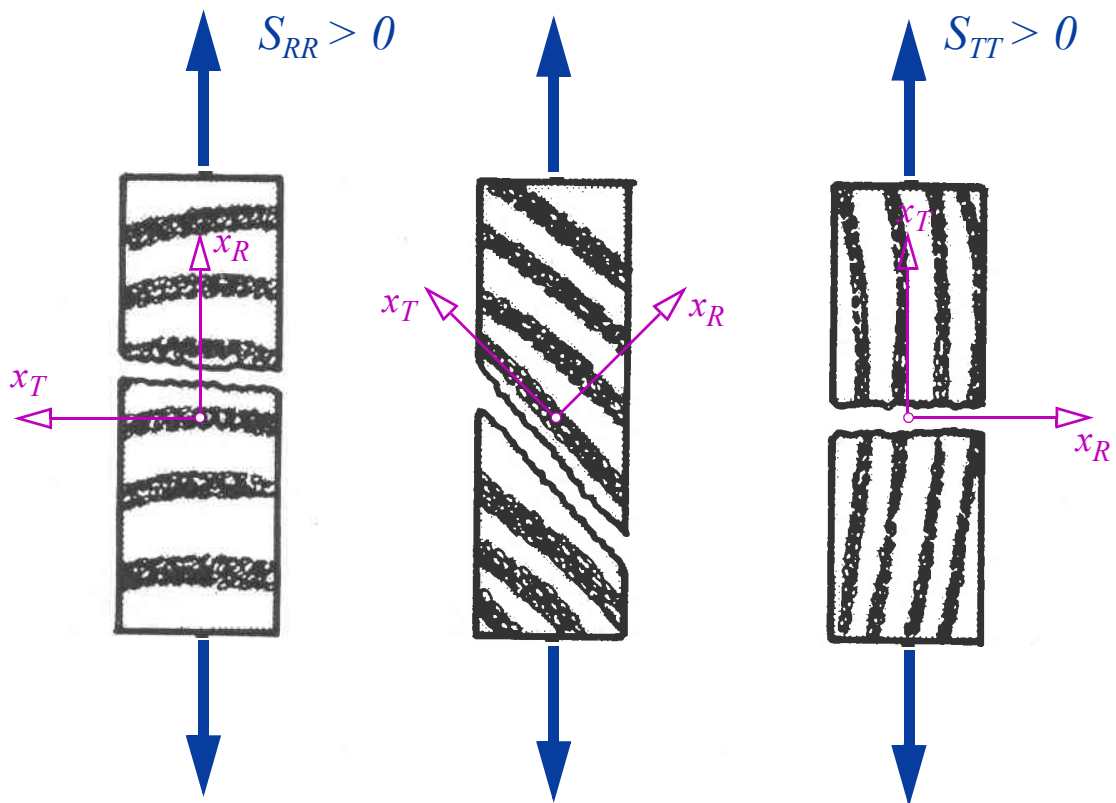


Bild 12.3 Sprödbbruch bei Zugbeanspruchung normal zur Faserrichtung; a) die hypothetisch eingezeichnete, abgetreppte Bruchfläche verläuft entlang der Wachstumsringe und normal dazu, Bodig/Jayne (1993)

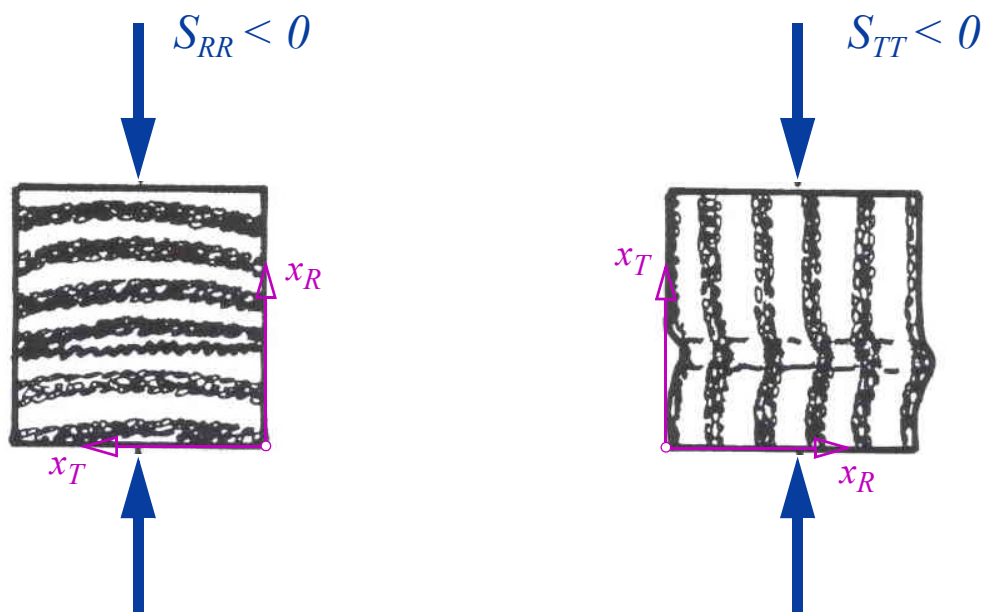


Bild 12.4 Schematische Darstellung möglicher Versagensbilder bei Druck in radialer und tangentialer Richtung, Bodig/Jayne (1993)

Richtung - wird die Zellstruktur stark verformt (Bild 12.4). Die Zellwände verbiegen sich, knicken ein, brechen und treten mit den gegenüberliegenden Zellwänden in Kontakt. Bei Weiterbelastung kollabiert das Zellgefüge, bis es so stark kompaktiert ist, dass es bei weiterer Verformung zu einem rapiden Anstieg in der Belastung kommt. Man beachte, dass diese Verdichtung (*densification*) erst ab sehr großen Verzerrungen beginnt (bei Balsaholz ab ca. 60%, Easterling/Harrysson/Gibson/Ashby (1982)). Auf makroskopischem Beobachtungsniveau tritt dieser Kollaps des Zellgefüges schichtenweise auf (Bild 12.4). Nachdem z.B. eine Frühholzschicht kollabiert ist und zu kompaktieren beginnt, startet der Kollaps in einer weiteren Schicht; das geht bis zur kompletten Kompaktierung aller Schichten des gesamten Holzprobekörpers. In manchen Fällen sind die Verformungen und die einhergehenden strukturellen Zerstörungen in den Einzelschichten so groß, dass es bei einer Belastungsumkehr zu einer nahezu kraftlosen Gefügetrennung kommt.

Dieses komplexe Zellstrukturversagen wird auf makroskopischer Beobachtungsskala als duktiles Versagensverhalten eingestuft. Ab einem gewissen Beanspruchungsniveau kommt es durch die teilweise Zerstörung des Zellgefüges bei Entlastung zu verbleibenden irreversiblen Verformungen. Dieses Deformationsverhalten wird als „plastisches“ Verhalten von Holz bezeichnet und auch in den Modellen als solches behandelt.

12.3.1.5 Faserparallele Schubbeanspruchung

Die Spannungskomponente S_{LR} (oder S_{LT}) wird als faserparallele Schubbeanspruchung bezeichnet, obwohl eine der dualen Schubspannungskomponenten in einer Schnittebene normal zur Faserrichtung wirkt. Versagen bzw. Schubbruch tritt aber nur in faserparallelen Ebenen auf.

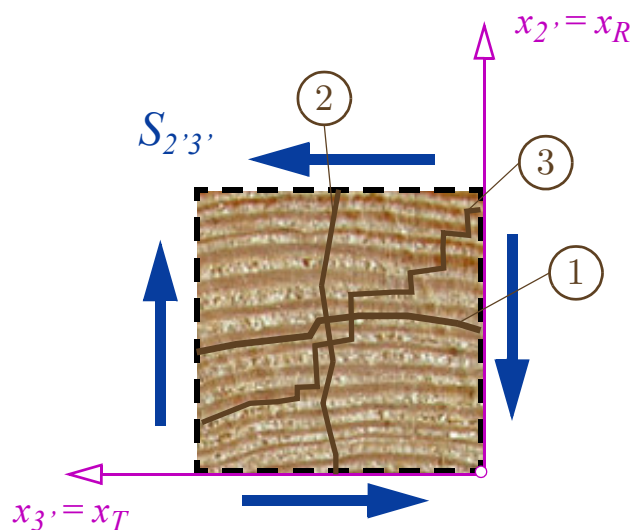


Bild 12.5 Schubbeanspruchung quer zur Faserrichtung; die drei eingezeichneten Bruchflächen sind hypothetisch und verlaufen entweder entlang der Wachstumsringe (1), normal dazu (2) oder setzen sich aus einer treppenartigen und abschnittsweisen Abfolge dieser Bruchflächenorientierungen zusammen (3)

12.3.1.6 Schubbeanspruchung quer zur Faserrichtung

Dieser Fall ist - nach den Kenntnissen des Autors - in der Literatur wenig dokumentiert. Interessant ist die Frage, in welchen Orientierungen bei einem astfreien Holzkörperchen bevorzugt Bruchflächen auftreten. Bilden sich diese in den Frühholzschichten aus oder treten die Versagensebenenorientierungen genau normal zur Tangentialrichtung auf? In beiden Fällen hat man ein ähnliches Szenario wie im Fall des faserparallelen Schubes: Die Schubspannungskomponenten S_{RT} und S_{TR} sind zwar dual, die Versagensebenenorientierung ist aber eindeutig. Eine dritte denkbare Möglichkeit ist eine abwechselnde Abfolge dieser beiden Versagensebenenorientierungen, die eine treppenartige Bruchfläche ergibt (Bild 12.5).

Auf Zellstrukturniveau kommt es zu schichtenweisem Schubknicken. Der Mechanismus wird als teils-duktil angenommen. Nach anfänglich duktilem Verhalten kommt es zum Bruch des Holzkörpers.

12.3.2 Versagensmodell

12.3.2.1 Angenommene Versagensebenenorientierungen

Aufgrund des strukturellen Aufbaus von Holz und basierend auf den obigen Beobachtungen wird angenommen, dass Versagen nur in Ebenen normal zu den drei Materialhauptachsen stattfindet. Zwischen den Versagensmechanismen in den beiden Orientierungen normal zur Faserrichtung wird bei den Mechanismen und den Festigkeiten aus Vereinfachungsgründen kein Unterschied gemacht: Die Zug- und Druckfestigkeiten in radialer und tangentialer Richtung und die faserparallele Schubfestigkeit und die Schubfestigkeit quer zur Faserrichtung in der radialen und tangentialen Versagensebene sollen die gleiche Größe haben.

12.3.2.2 Versagensmechanismen

Im Versagensmodell für Holz werden sechs Versagensmechanismen (Box 12.3) unterschieden. Diese lassen sich in spröde und duktile Versagensmechanismen unterteilen. In den Graphiken werden die duktilen Modi mit blauen Farbtönen dargestellt; spröde Versagensmechanismen mit roten Farbtönen. Bei den spröden Moden entsprechen die Versagensbedingung einer Bruchbedingung. Schubversagen hat teilweise spröde Bereiche, besonders wenn die in derselben Ebene wirkende Normalspannung eine Zugspannung ist. Diesen Versagensmechanismen wird in der Farbgebung orange zugewiesen.

Alle Versagensbedingungen sind linear in den Spannungen des Materialhauptachsensystems

$$F_i' = \mathbf{a}_i^T \mathbf{s}' - 1 \quad (12-7)$$

wobei nach der Mohr'schen Idee nur Spannungskomponenten, die in den oben festgelegten drei Versagensebenenorientierungen wirken, versagensbestimmend sind. Die zugehörigen

sechs Festigkeitswerte sind durch Elementarversuche zu bestimmen.

Modus	Bezeichnung	Versagensbedingung	Zugehörige Festigkeitswerte
(1)	Faserparalleles Zugversagen	$F_1' = \frac{S_{LL}}{f_{\parallel,t}} - 1$ (12-8)	$f_{\parallel,t}$
(2)	Faserparalleles Druckversagen	$F_2' = -\frac{S_{LL}}{f_{\parallel,c}} - 1$ (12-9)	$f_{\parallel,c}$
(3)	Zugversagen normal zur Faserrichtung	$F_3' = \frac{S_{RR}}{f_{\perp,t}} - 1$ (12-10)	$f_{\perp,t}$
(4)	Druckversagen normal zur Faserrichtung	$F_4' = -\frac{S_{RR}}{f_{\perp,c}} - 1$ (12-11)	$f_{\perp,c}$
(5)	Faserparalleles Schubversagen	$F_{5a(b)}' = \pm \frac{S_{LR}}{f_{\parallel,\tau}} + \frac{S_{RR}}{n_1 f_{\perp,t}} - 1$ $F_{5c(d)}' = \pm \frac{S_{LR}}{n_2 f_{\parallel,\tau}} - 1$ (12-12)	$f_{\parallel,\tau}$
(6)	Schubversagen quer zur Faserrichtung	-	$f_{\perp,\tau}$

Box 12.3 Versagensmechanismen von Holz: Nummerierung und Farbzuzuweisung in der graphischen Darstellung, Versagensbedingung und Bezeichnung der zugehörigen Festigkeitswerte

Das Versagen bei faserparalleler Schubbeanspruchung wird durch eine bilineare Funktion (12-12), beschrieben. Dabei werden zwei weitere Parameter n_1 und n_2 benötigt, die größer als null sein sollen. Die bilineare Versagensbedingung (5) ist in Bild 12.6 dargestellt. Für Schubversagen quer zur Faserrichtung ist in Box 12.3 keine Versagensbedingung angegeben. Es wird angenommen, dass diese Versagensbedingung in den angeführten Beispielen nicht aktiv wird. Bei Vorhandensein entsprechender Versuchsdaten (qualitativ und quantitativ) ist die Formulierung einer Versagensbedingung entsprechend der Mohr'schen Idee problemlos möglich.

Essentieller Bestandteil des Versagensmodells ist die Unterscheidung in unterschiedliche Versagensmechanismen mit den zugeordneten Versagensebenenorientierungen. Eventuell nichtlineare (quadratische) Interaktionsgleichungen sind auch denkbar, werden hier aufgrund der starken Streuung der Versuchsergebnisse von Holz nicht formuliert. Bei genaueren Versuchsdaten kann das vorgeschlagene Modell hinsichtlich zusätzlicher Versagensebenenorientierungen oder genauere Darstellung der Interaktionen jederzeit verfeinert werden.

12.4 Einaxialer Zug eines Holzstabes schräg zu den Materialhauptideckrichtungen

12.4.1 Systembeschreibung & Aufgabenstellung

12.4.1.1 Probekörper

Gegeben ist ein quaderförmiger Versuchskörper mit den Kantenabmessungen L_1 , L_2 und L_3 (Bild 12.7). Die Achsen des globalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatensystems verlaufen parallel zu den Seitenkanten des Probekörpers. Die x_1 -Achse ist dabei die Stabachse. Die Faserrichtung weicht um den Winkel α von der x_1 -Richtung ab. Diese Faserneigung α liegt zwischen 0° und 90° .

Die elastische Materialmatrix \mathbf{C}' ist in (12-4) angegeben. Der für dieses Beispiel gewählte Wertebereich der elastischen Materialkenngrößen ist in Box 12.4 angeführt. E_L ist bei Nadelholz in der Größenordnung von 11000 bis 17000 N/mm². Der Referenzschubmodul G_{LR} liegt bei Nadelholz im Bereich 600-700 N/mm², beträgt also nur ein Zwanzigstel des Wertes von E_L . Die Festigkeiten und Parameter für die Versagensbedingungen aus Box 12.3 sind in Gleichung (12-13) angegeben.

E-Moduln		Schubmoduln		Querdehnzahlen		
E_R/E_L	E_T/E_L	G_{LT}/G_{LR}	G_{RT}/G_{LR}	ν_L	ν_R	ν_T
1/20	1/30	1	1/20	0.35	0.1	0.1

Box 12.4 Qualitative Größenverhältnisse der elastischen Materialkennwerte von Holz

12.4.1.2 Belastung

Das System wird in Richtung der Stabachse mit der Normalspannung S_{11} beansprucht. Die Spannungsmatrix im globalen Koordinatensystem ist:

$$\mathbf{s} = S_{11} [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (12-14)$$

Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -cs & cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad c = \cos \alpha, s = \sin \alpha \quad (12-15)$$

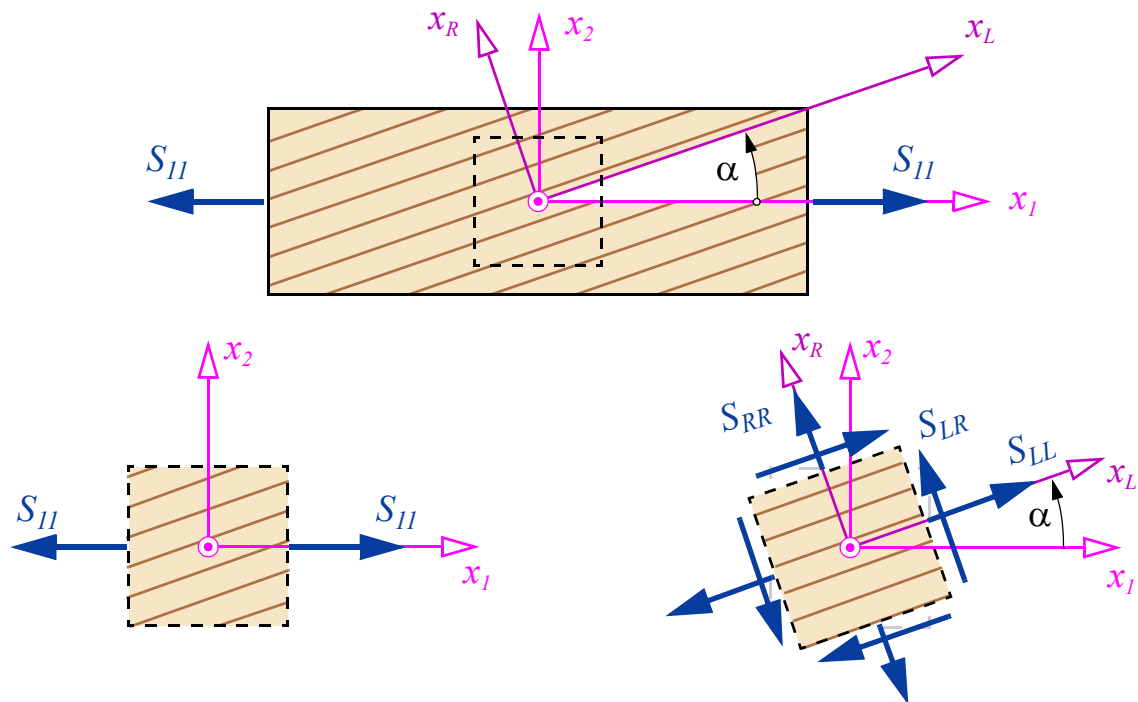


Bild 12.7 Einaxial beanspruchter rechtecksförmiger Körper mit schrägem Faserverlauf; einaxialer Spannungszustand im $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatensystem und zugehöriger ebener Spannungszustand im Materialhauptsachsensystem

werden die Spannungen im Materialhauptsachsensystem berechnet:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{T}\mathbf{s} = \mathbf{p}_{\alpha,1} S_{11} \quad \mathbf{p}_{\alpha,1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -sc & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12-16)$$

Der Vektor $\mathbf{p}_{\alpha,1}$ ist die erste Spalte der Transformationsmatrix (12-15). Im zuvor angeführten Winkelbereich von α liegen die Werte der trigonometrischen Funktionen c und s immer zwischen null und eins. Ist die Normalspannung $S_{11} > 0$ (Zugbeanspruchung) sind auch die Normalspannungskomponenten S_{LL} und S_{RR} im Materialhauptsachsensystem positiv. Das Vorzeichen der Schubspannungskomponente ist in diesem Fall negativ, was aber in der weiteren Betrachtung irrelevant ist. Vice versa gilt Gleiches bei einaxialer Druckbeanspruchung ($S_{11} < 0$).

12.4.1.3 Aufgabenstellung 1

Gesucht werden die elastischen Verzerrungen des Probekörpers unter der einaxialen Spannung abhängig vom Faserneigungswinkel α .

12.4.1.4 Aufgabenstellung 2

Abhängig vom Faserneigungswinkel α werden die Tragspannung $S_{11,t}$ bzw. $S_{11,c}$ bei einaxialer Zug- bzw. Druckbeanspruchung und die aktuell zugehörige aktive Versagensbedingung gesucht. Zusätzlich sollen die Winkel, bei denen es zu einem Wechsel zwischen zwei Versagensmechanismen kommt, angegeben werden.

12.4.2 Elastisches Verhalten

12.4.2.1 Transformation der Materialsteifigkeitsmatrix

Die Materialsteifigkeitsmatrix im materiellen Bezugssystem wird mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{T}^{-T} \quad (12-17)$$

in das globale $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatensystem transformiert.

12.4.2.2 Konsistente Reduktion der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}

Mit den Filtermatrizen für den FSZ aus Gleichung (7-8) und den Größen aus Box 7.2 ergibt sich aus Gleichung (12-17) die reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{C}_{FSZ} mit dem einzigen Eintrag zu:

$$C_{FSZ,11} = \frac{E_R}{\frac{E_R}{E_L} c^4 + s^2 c^2 \left(\frac{E_R}{G_{LR}} - 2 \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} v_T \right) + s^4} \quad (12-18)$$

Die begleitenden Verzerrungen mit der Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{FSZ} lauten:

$$\mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{FSZ} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} H_{FSZ,E_{22}} \\ H_{FSZ,E_{33}} \\ H_{FSZ,\gamma_{12}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [E_{11}] \quad (12-19)$$

12.4.2.3 Änderung der Dehnsteifigkeit abhängig von der Schrägfaserung

Werden in Gleichung (12-18) die elastischen Materialkennwerte aus Box 12.4 eingesetzt, ergibt sich die auf E_L bezogene axiale Dehnsteifigkeit:

$$\frac{E_\alpha}{E_L} = \frac{1}{c^4 + 20s^4 + s^2 c^2 \left(\frac{E_L}{G_{LR}} - \sqrt{0.8} \right)} \quad (12-20)$$

In Bild 12.8 ist das Steifigkeitsverhältnis E_α/E_L bei unterschiedlichen G_{LR}/E_L Verhältnissen als Funktion des Winkels α dargestellt. Markant ist bei den gewählten Verhältniswerten der starke Abfall des Moduls E_α auf die Hälfte oder weniger des faserparallelen E-Moduls E_L bei einer Winkelabweichung von 20° . Bei kleineren Schubmodulwerten G_{LR} ist der Abfall stärker. Im Holzbau wird für die Änderung des Steifigkeitsverhältnisses E_α/E_L die sogenannte Hankinson's Formel

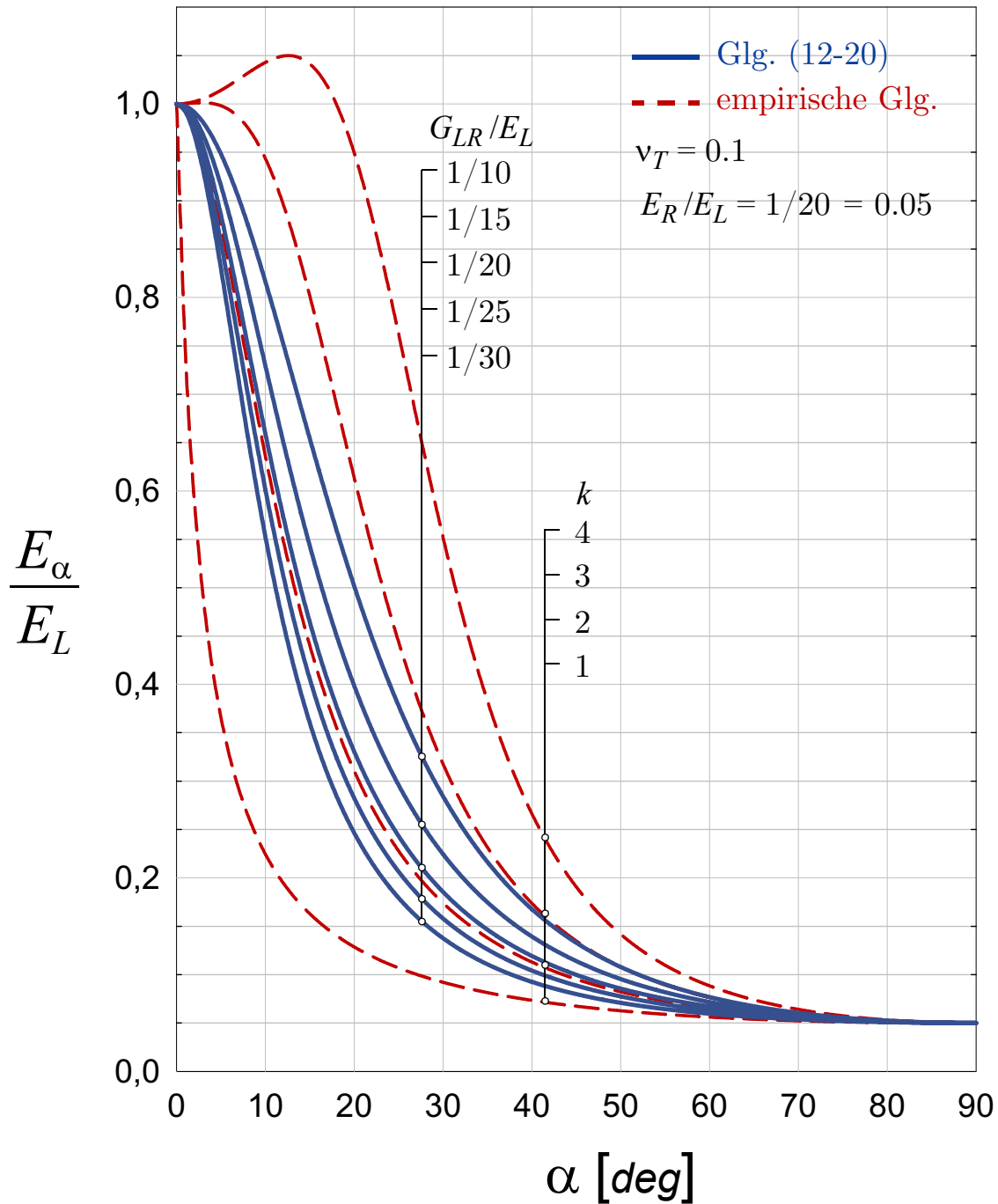


Bild 12.8 Änderung des Dehnsteifigkeitsverhältnisses E_α zu E_L bei einaxialer Beanspruchung abhängig vom Winkel α ; bei $\alpha=0^\circ$ gilt $E_\alpha = E_L$, bei $\alpha=90^\circ$ gilt $E_\alpha = E_R$

$$\frac{E_\alpha}{E_L} = \frac{1}{c^k + \frac{E_L}{E_R} s^k} \quad (12-21)$$

angegeben, die aber aufgrund ihres empirischen Charakters, den Einfluss der Schubsteifigkeit nicht berücksichtigt. Die Anpassung an die Versuchswerte erfolgt über die Potenz k . Diese Funktion ist für vier unterschiedliche k -Werte in Bild 12.8 eingezeichnet. Bei $k = 3$ und 4 kommt es bei Verwendung dieser Funktion sogar zu einer anfänglichen Zunahme des Steifigkeitsverhältnisses E_α/E_L .

12.4.3 Einaxiale Versagensspannungen

12.4.3.1 Einaxiale Zugtragspannung

Da bei Zugbeanspruchung ($S_{II} > 0$) die Normalspannungskomponenten S_{LL} und S_{RR} immer positiv sind und die Schubspannungskomponente S_{LR} negativ ist, sind nur die Versagensmechanismen „faserparalleles Zugversagen“ (1), „Zugversagen normal zur Faserrichtung“ (3) und der Schubversagensmechanismus (5b) aus Box 12.3 relevant. Die Schubversagensbedingung (5d) wird auch nicht aktiviert, da sie erst im Bereich $S_{RR} < 0$ maßgebend wird. Die Zugtragspannung ergibt sich zu:

$$S_{11,t} = \min \left\{ \frac{1}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_{\alpha,1}} \right\} \quad i = 1, 3, 5b \quad (12-22)$$

Der Verlauf der Zugtragspannung $S_{11,t}$ für die gewählten Festigkeitsverhältniswerte aus (12-13) ist in Bild 12.9 dargestellt. Es ergeben sich folgende Gültigkeitsbereiche der drei Versagensmechanismen:

(1) Faserparalleles Zugversagen	0°	$\leq \alpha$	$\leq 5.88^\circ$	
(5b) Schubversagen	5.88°	$\leq \alpha$	$\leq 33.42^\circ$	(12-23)
(3) Zugversagen quer zur Faserrichtung	33.42°	$\leq \alpha$	$\leq 90^\circ$	

12.4.3.2 Einaxiale Drucktragspannung

Bei einaxialem Druck sind für die Berechnung der Tragspannung $S_{II,c} < 0$ nur die Versagensmechanismen (2), (4), (5a) und (5c) aus Box 12.3 maßgebend. Der Verlauf der Drucktragspannung $S_{II,c}$ für die gewählten Festigkeitsverhältniswerte ist in Bild 12.10 dargestellt. Es ergeben sich folgende Gültigkeitsbereiche:

(2) Faserparalleles Druckversagen	0°	$\leq \alpha$	$\leq 8.93^\circ$	
(5c) Schubversagen	8.93°	$\leq \alpha$	$\leq 26.98^\circ$	(12-24)
(4) Druckversagen quer zur Faserrichtung	26.98°	$\leq \alpha$	$\leq 90^\circ$	

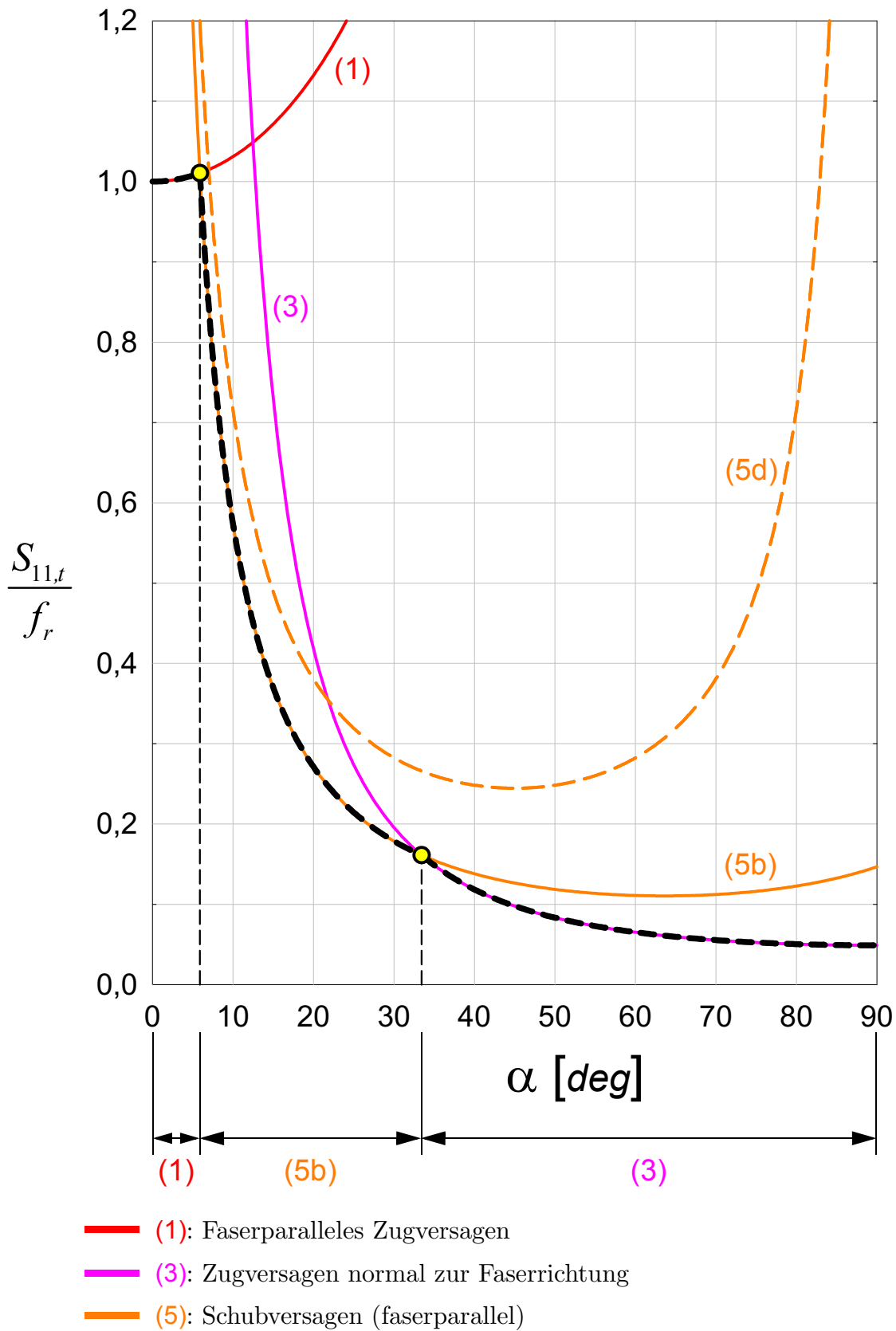
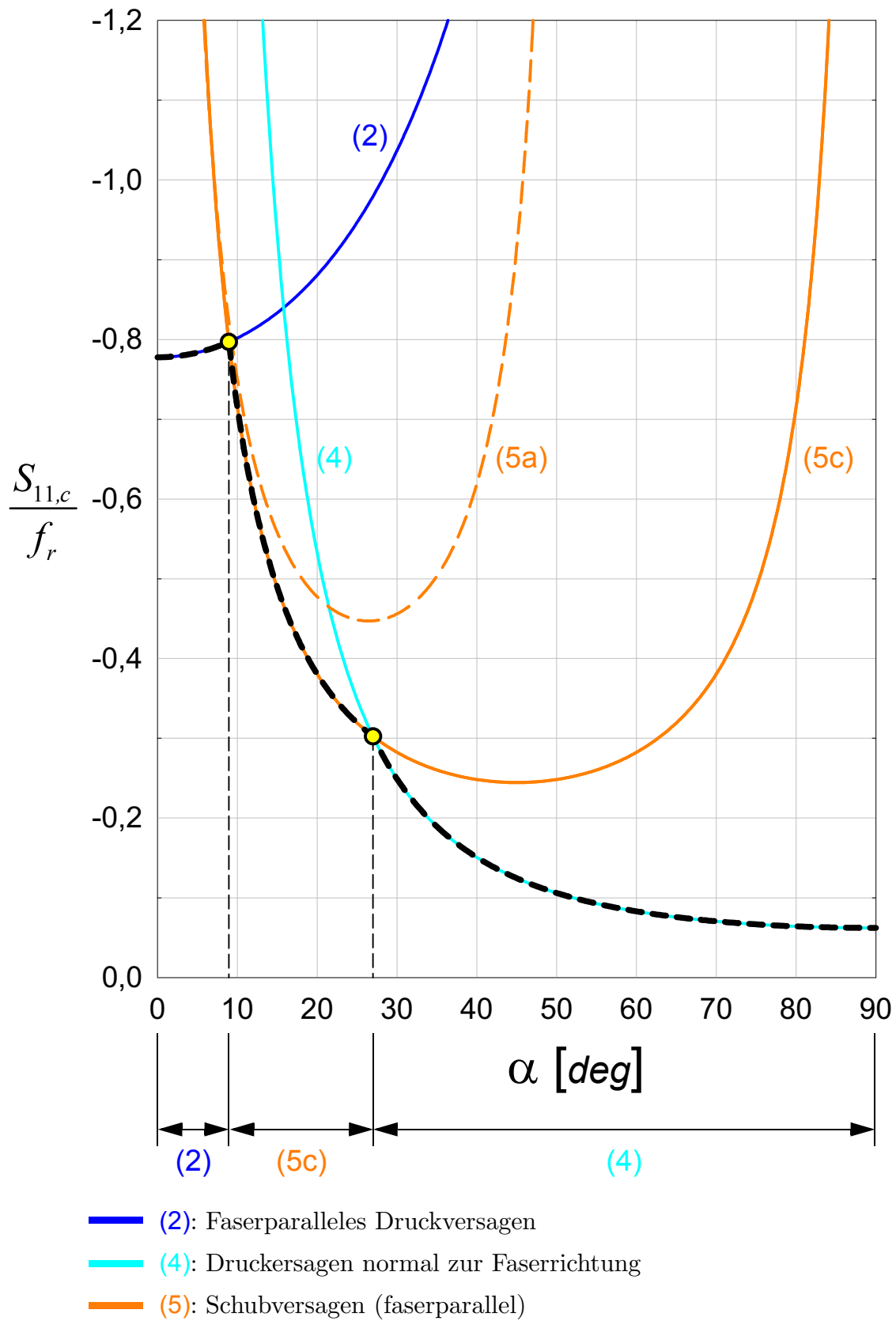


Bild 12.9 Einaxiale Zugtragspannung bei veränderlicher Faserneigung α

Bild 12.10 Einaxiale Drucktragspannung bei veränderlichem Faserneigungswinkel α

12.5 Elastischer Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und Versagen einer Holzscheibe

12.5.1 Systembeschreibung & Aufgabenstellung

12.5.1.1 Holzscheibe

Betrachtet wird ein homogen aufgebautes quadratisches Scheibenelement aus Holz. Die globalen $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatenachsen liegen parallel zu den Scheibenkanten (Bild 12.11). Die x_3 -Achse steht normal auf die Scheibenebene. Die Faserrichtung liegt zur globalen x_1 -Achse um den Winkel α verdreht. Die $x_3 = x_T$ -Achse ist dabei die Drehachse. Es gelten die Materialeigenschaften aus dem vorigen Kapitel.

12.5.1.2 Ebener Beanspruchungszustand

Das Scheibenelement wird nur durch Spannungen in der Scheibenebene belastet. Die Spannungskomponenten S_{13} , S_{23} und S_{33} sind stets null. Nachfolgend wird zwischen drei Belastungssituationen unterschieden:

$$\begin{aligned}
 \text{Ebener Spannungszustand (ESZ): } \mathbf{s} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad 0 \quad S_{12} \quad 0 \quad 0] \\
 \text{Biaxialer Spannungszustand (BiSZ): } \mathbf{s} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
 \text{Balkenspannungszustand (BSZ): } \mathbf{s} &= [S_{11} \quad 0 \quad 0 \quad S_{12} \quad 0 \quad 0]
 \end{aligned} \tag{12-25}$$

Die Spannungskomponenten \mathbf{s}' im materiellen Bezugssystem lassen sich mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} (12-15) berechnen. Im Materialhauptachsensystem herrscht bei allen drei Beanspruchungssituationen ein ebener Spannungszustand, wobei die Schubspannungskomponente S_{LR} im Allgemeinen nicht null ist. Dieser Gleichgewichtszusammenhang gilt unabhängig vom betrachteten Material.

Im Fall des biaxialen Spannungszustandes sind die beiden Normalspannungen S_{11} und S_{22} außerdem zwei Hauptnormalspannungen - die dritte Hauptnormalspannungskomponente S_{33} ist null -, und geben die größte und kleinste Normalspannung in der Scheibenebene an. Demzufolge sind die raumfesten $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatenachsen die Hauptnormalspannungsrichtungen.

12.5.1.3 Aufgabenstellung 1

Gesucht wird für die drei angeführten Belastungssituationen der elastische Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang der Holzscheibe im globalen raumfesten $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatensystem, sowie (je nach Bedarf) die begleitend auftretenden Verzerrungsgrößen bei Änderung der Faserrichtung α .

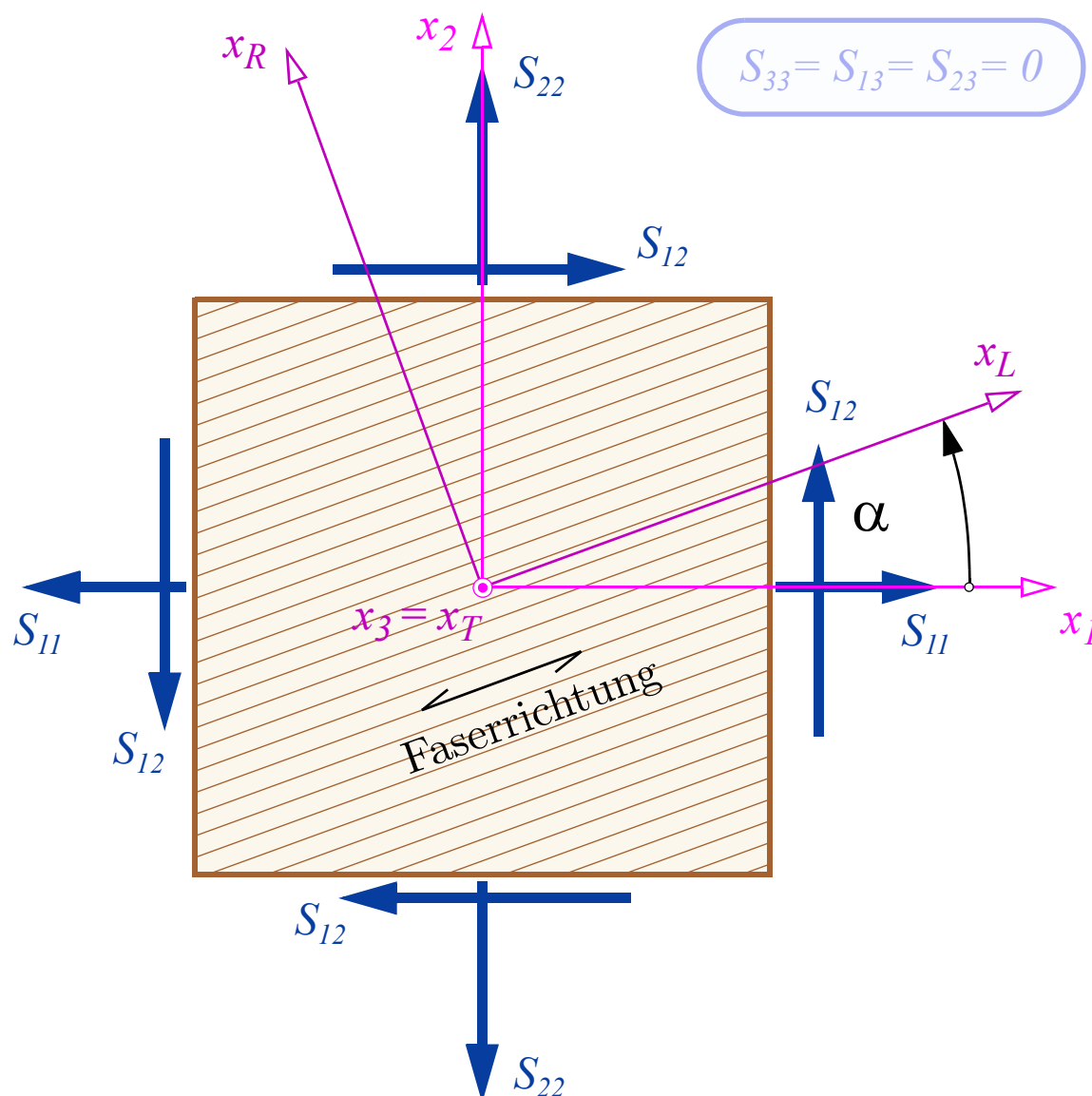


Bild 12.11 Holzscheibe unter ebenem Spannungszustand; die Faserrichtung ist um den Winkel α zur globalen x_I -Achse geneigt

12.5.1.4 Aufgabenstellung 2

Gesucht wird die Versagensbedingung der Holzscheibe bei biaxialem Belastungszustand abhängig vom Winkel $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$.

12.5.1.5 Definition und Kurzbezeichnung von komplementären Funktionen

Folgende Kurzschreibweise einer Spiegelung der Funktion im Intervall $[0^\circ, 90^\circ]$ bei $\alpha = 45^\circ$ wird eingeführt:

$$f(\alpha)^\# = f(\alpha^\#) = f(90^\circ - \alpha) \quad (12-26)$$

Zum Beispiel gilt:

$$\sin(\alpha)^\# = \sin(\alpha^\#) = \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha)^\# = \cos(\alpha^\#) = \sin(\alpha) \quad (12-27)$$

12.5.2 Steifigkeitsmatrizen und begleitende Verzerrungen

12.5.2.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} ist mit Gleichung (12-17) im $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatensystem angegeben. Durch Vorgabe der Filtermatrizen \mathbf{P}_a und \mathbf{P}_b aus Kap. 7.3.2 für die drei angegebenen Belastungssituationen aus (12-25) lassen sich die reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{C}_a und die Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{ba} (Box 7.2) berechnen.

12.5.2.2 Belastungssituation 1: Ebener Spannungszustand

Der gesuchte linear-elastische Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang zwischen den aktiven Spannungskomponenten und den zugehörigen Verzerrungskomponenten wird durch die reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}_{ESZ} angegeben:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{ESZ} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} C_{ESZ,11} & C_{ESZ,12} & C_{ESZ,13} \\ C_{ESZ,12} & C_{ESZ,11}^\# & C_{ESZ,13}^\# \\ C_{ESZ,13} & C_{ESZ,13}^\# & C_{ESZ,33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (12-28)$$

Die begleitenden Verzerrungen sind über die Kopplungsmatrix \mathbf{H}_{ESZ} berechenbar, wobei die Schubverzerrungen γ_{13} und γ_{23} null sind. Die Scheibendickenverzerrung E_{33} ist von untergeordnetem Interesse und wird hier nicht angeführt.

12.5.2.3 Belastungssituation 2: Biaxialer Spannungszustand

Die beiden Normalverzerrungen E_{11} und E_{22} werden für die Scheibe vorgegeben. Gesucht sind die beiden zugehörigen Normalspannungen S_{11} und S_{22} sowie der Schubwinkel γ_{12} , der sich so einstellt, dass die Schubspannungskomponente S_{12} stets null ist (BiSZ). Die reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{BiSZ} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} C_{BiSZ,11} & C_{BiSZ,12} \\ C_{BiSZ,12} & C_{BiSZ,11}^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix} \quad (12-29)$$

Die Schubverzerrungen γ_{13} und γ_{23} sind null, die Dickenverzerrung E_{33} ist wiederum von untergeordnetem Interesse und die gesuchte Schubverzerrung γ_{12} , die sich so einstellt, dass die Schubspannungskomponente S_{12} stets null ist, ergibt sich zu:

$$\gamma_{12} = H_{BiSZ} E_{11} + H_{BiSZ}^\# E_{22} \quad (12-30)$$

12.5.2.4 Belastungssituation 3: Balkenspannungszustand

Beim Balkenspannungszustand sind die Normalspannung S_{11} und die transversale Schub-

spannung S_{12} die einzigen aktiven Spannungskomponenten. Die reduzierte Steifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{BSZ} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} C_{BSZ,11} & C_{BSZ,12} \\ C_{BSZ,12} & C_{BSZ,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (12-31)$$

Die begleitend auftretende Normalverzerrung hängt von zwei Kopplungsfunktionen ab:

$$E_{22} = H_{BSZ,1} E_{11} + H_{BSZ,2} \gamma_{12} \quad (12-32)$$

12.5.2.5 Graphische Darstellung der Abhängigkeiten

Für die Holzscheibe aus Bild 12.11 werden die Steifigkeitsverhältnisse $E_R/E_L = G_{LR}/E_L = 1/20$ und die Querdehnzahl $\nu_T = 0.1$ gewählt. Untersucht werden für die drei oben angeführten Spannungssituationen jeweils zwei Lastfälle:

- Im ersten Lastfall wird eine Einheitsnormalverzerrung $E_{11} = 1$ aufgebracht.
- Im zweiten Lastfall eine Schubverzerrung $\gamma_{12} = 1$.

Gesucht werden die benötigten Festhaltungsspannungen und die begleitenden Verzerrungen in der Scheibenebene. Der Winkel α wird dabei zwischen 0° und 90° variiert. Als Bezugsgröße für die Darstellung wird

$$\widetilde{E}_L = \frac{E_L}{1 - \nu_T^2} = C_{ESZ,11} (\alpha = 0) \quad (12-33)$$

eingeführt. Die zuvor angeführten Komponenten der Materialsteifigkeitsmatrizen und die Kopplungsgrößen sind in Bild 12.12 bis Bild 12.14 dargestellt.

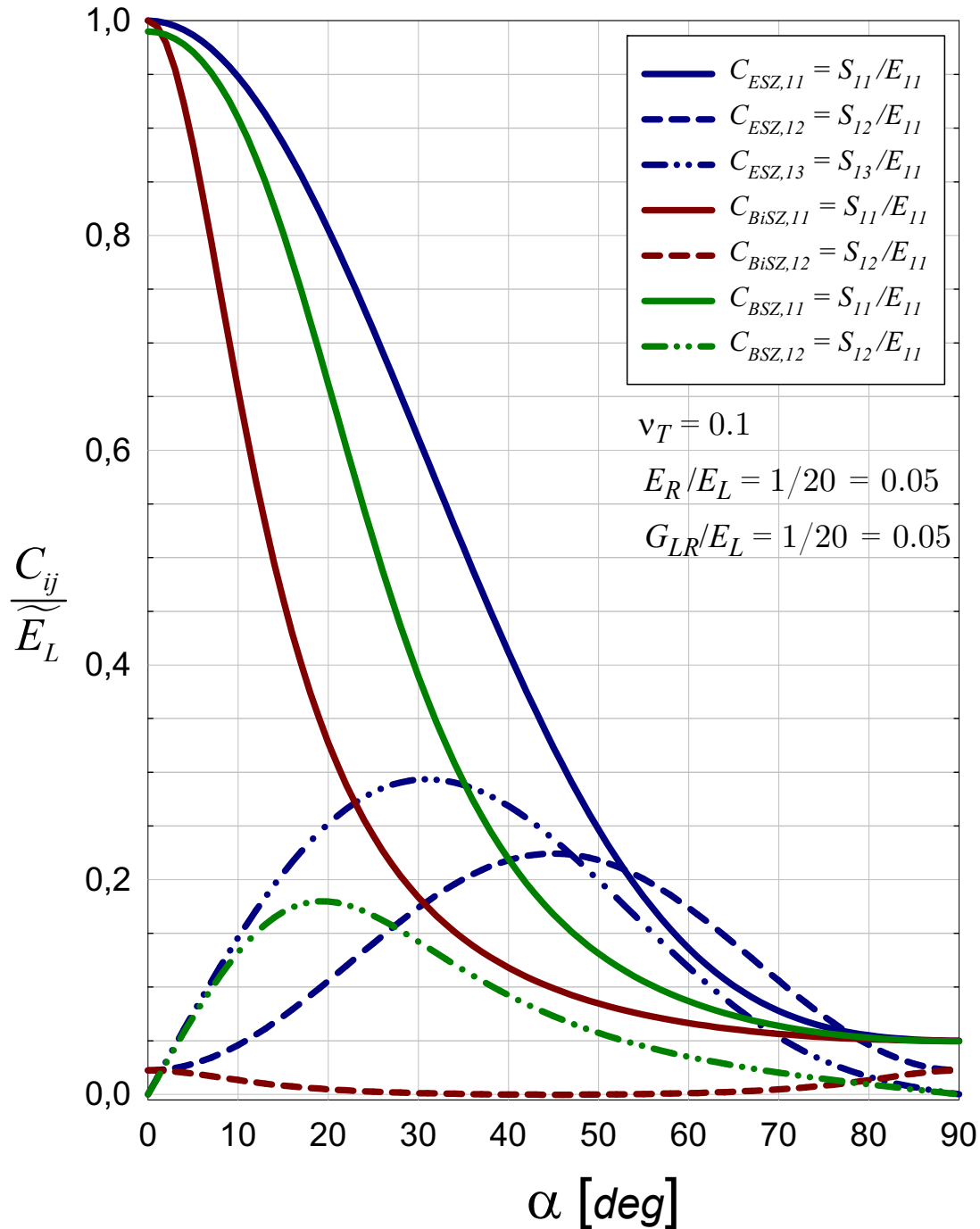


Bild 12.12 Koeffizienten C_{ij} der reduzierten Steifigkeitsmatrix bei ebenem Spannungszustand (ESZ, blau), bei biaxialem Spannungszustand (BiSZ, rot) und bei einem Balkenspannungszustand (BSZ, grün) als Funktion des Faserneigungswinkels α . Die Koeffizienten geben die Festhaltespannungen S_{ij} bei einer vorgegebenen Einheitsverzerrung $E_{11} = 1$ an.

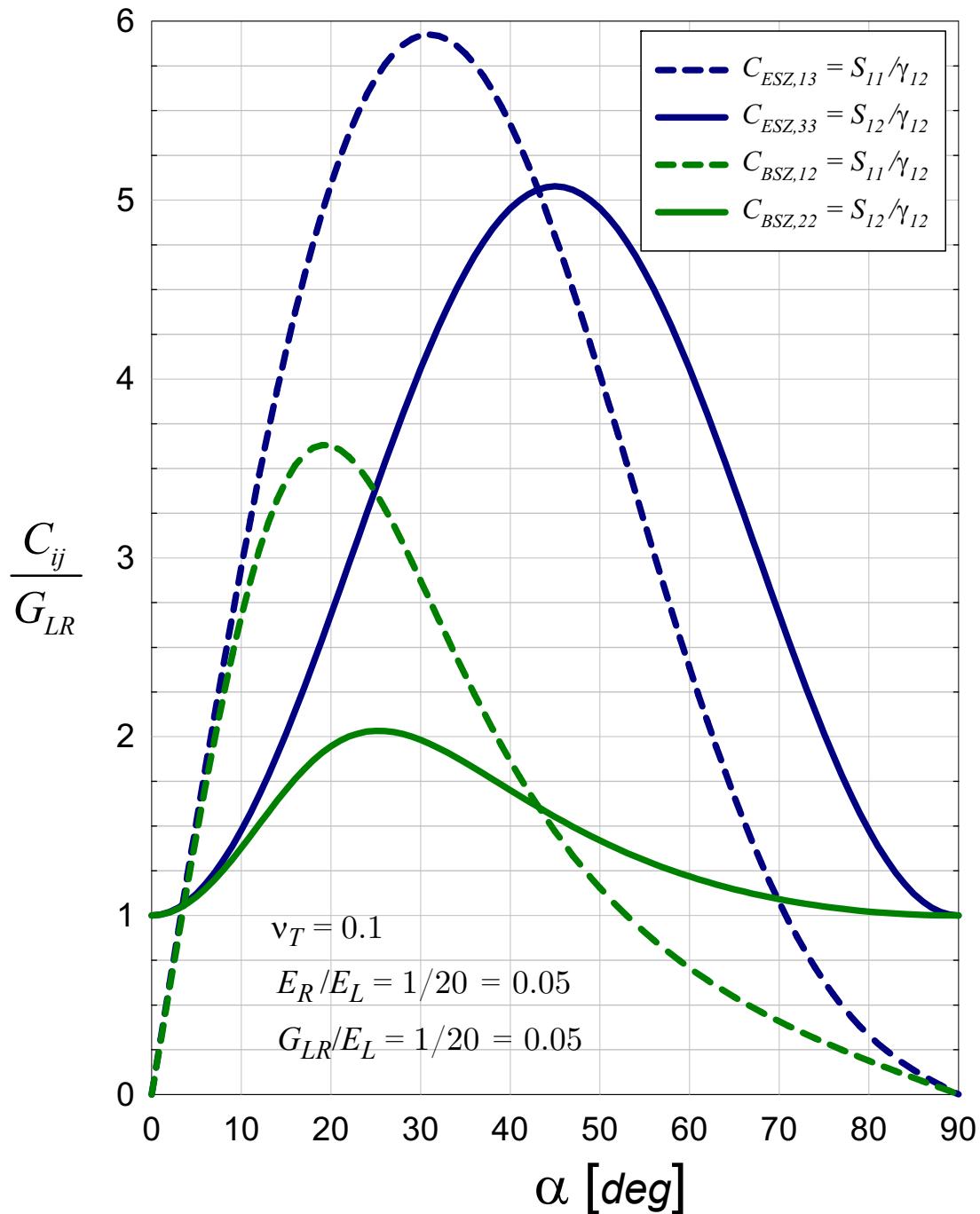


Bild 12.13 Koeffizienten der reduzierten Steifigkeitsmatrix (bezogen auf den Schubmodul G_{LR}) bei ebenem Spannungszustand (ESZ, blau) und bei einem Balkenspannungszustand (BSZ, grün) als Funktion des Faserneigungswinkels α . Die Koeffizienten geben die Festhaltungsspannungen bei einer vorgegebenen Einheitsschubverzerrung $\gamma_{12} = 1$ an.

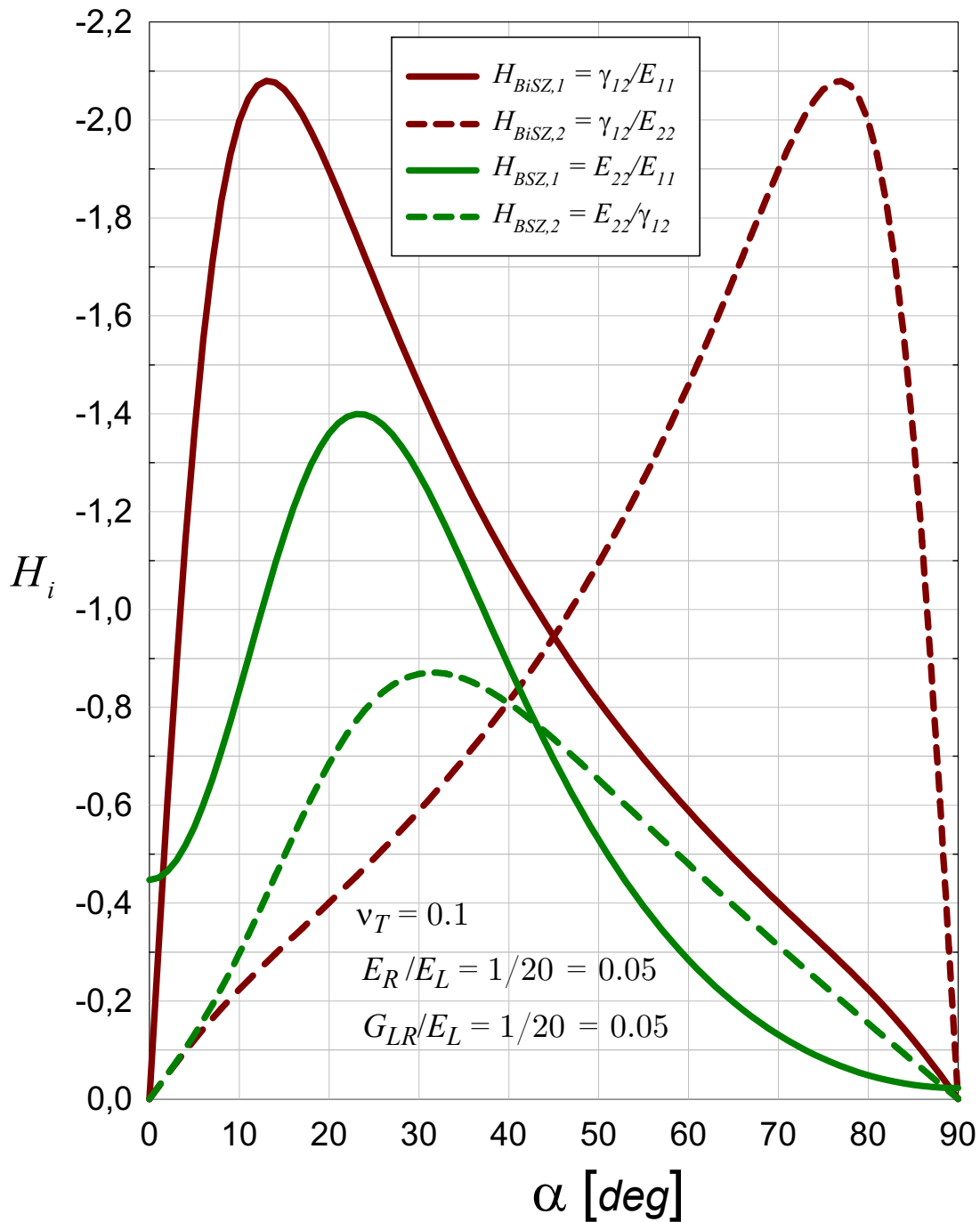


Bild 12.14 Verlauf der Funktion H_i für den BiSZ und den BSZ mit den angegebenen Steifigkeitsverhältnissen und der Querdehnzahl ν_T als Funktion des Faserneigungswinkels α . Die Funktionen H_i geben den Zusammenhang zwischen den aktiven und den begleitenden Verzerrungskomponenten an.

12.5.3 Versagen bei biaxialer Beanspruchung

12.5.3.1 Biaxialer Spannungszustand schräg zur Faserrichtung

Die Spannungskomponenten im materiellen Bezugssystem bei biaxialer Beanspruchung sind:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{p}_{\alpha,1} S_{11} + \mathbf{p}_{\alpha,2} S_{22} \quad (12-34)$$

Der Vektor $\mathbf{p}_{\alpha,2}$ ist die zweite Spalte der Transformationsmatrix (12-15). Gesucht wird die Versagensbedingung der Holzscheibe bei biaxialer Belastung abhängig von der Faserneigung $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$.

12.5.3.2 Traglastdiagramme

Die Transformationsbeziehungen (12-34) werden in die fünf Versagensbedingungen aus Box 12.3 eingesetzt, womit man

$$F_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_{\alpha,1} S_{11} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_{\alpha,2} S_{22} - 1 \quad (12-35)$$

erhält. Die maßgebenden Versagensbedingungen lassen sich im $\{S_{11}, S_{22}\}$ -Koordinatensystem darstellen, wobei zwischen den fünf unterschiedlichen Faserneigungen zu unterscheiden ist.

Aus Kap. 12.4.3.1 werden die einaxialen Zugtragspannungen $S_{11,t}$ und $S_{22,t}$ als Referenzspannungen $S_{11,ref}$ bzw. $S_{22,ref}$ zur dimensionslosen Darstellung verwendet. Zu beachten ist, dass diese Bezugsspannungen von α abhängen. Die Elastizitätsgrenze des Scheibenelements wird aufgrund der linearen Versagensbedingungen durch einen Polygonzug angegeben; die einzelnen Versagensmechanismen sind durch die in Box 12.3 angegebene Kurzbezeichnungen bzw. Farbgebung gekennzeichnet.

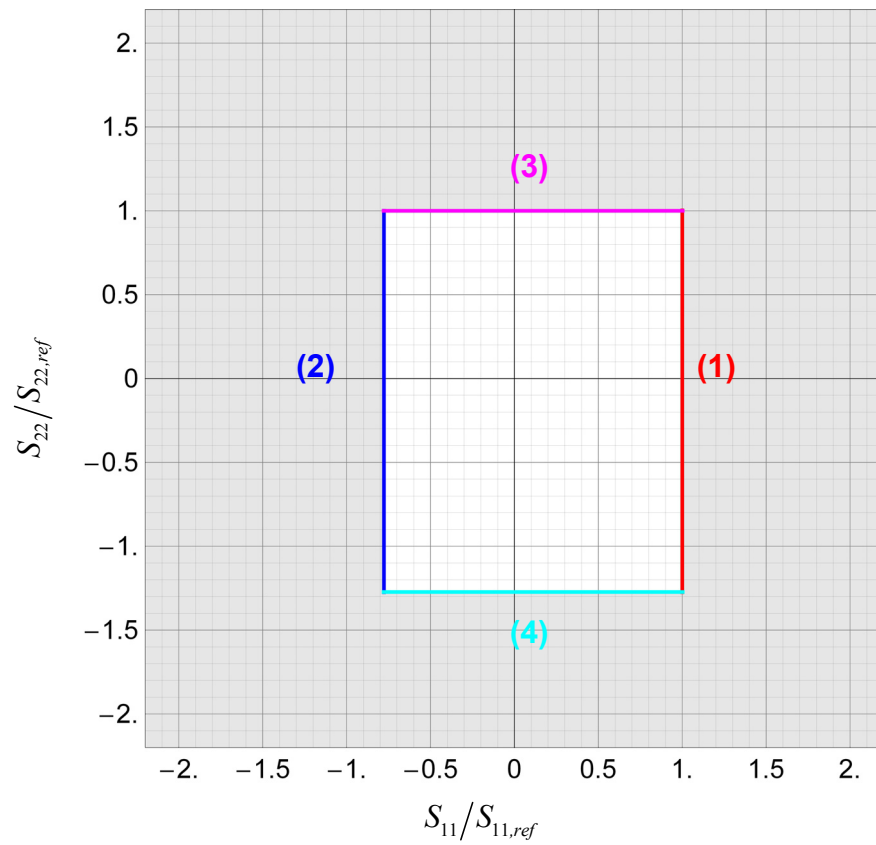
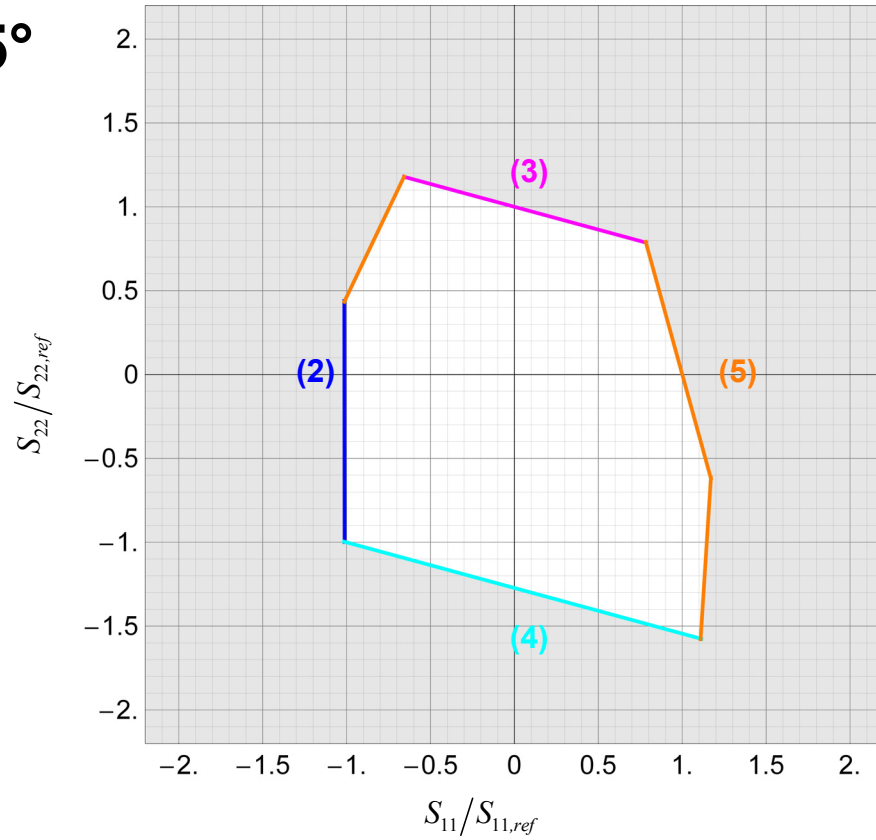
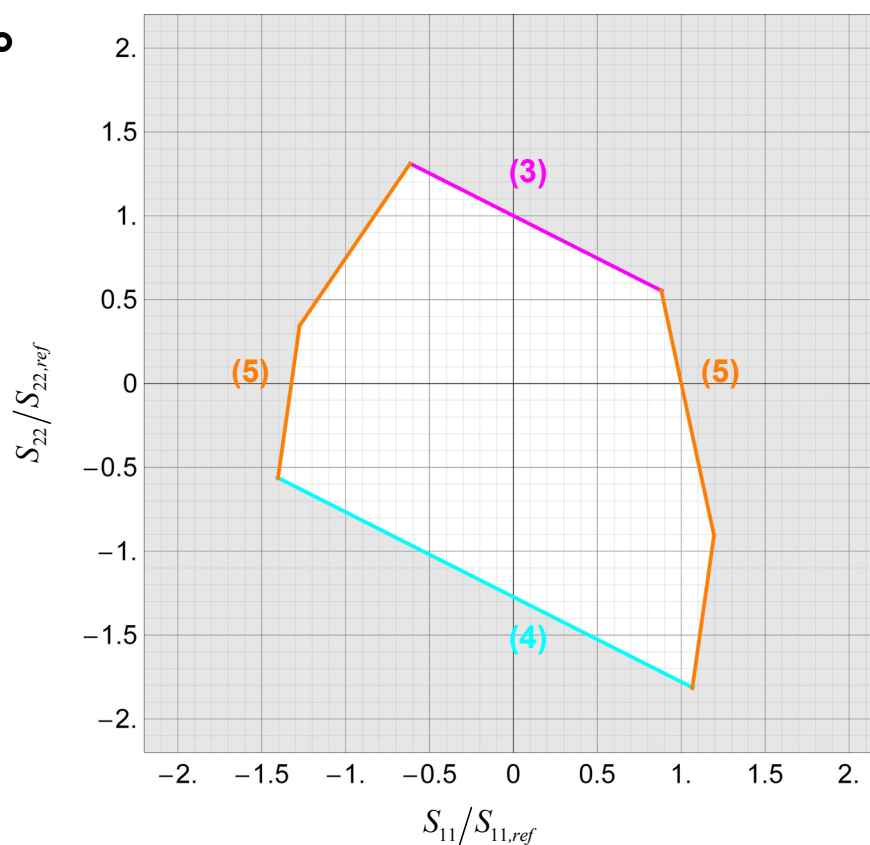
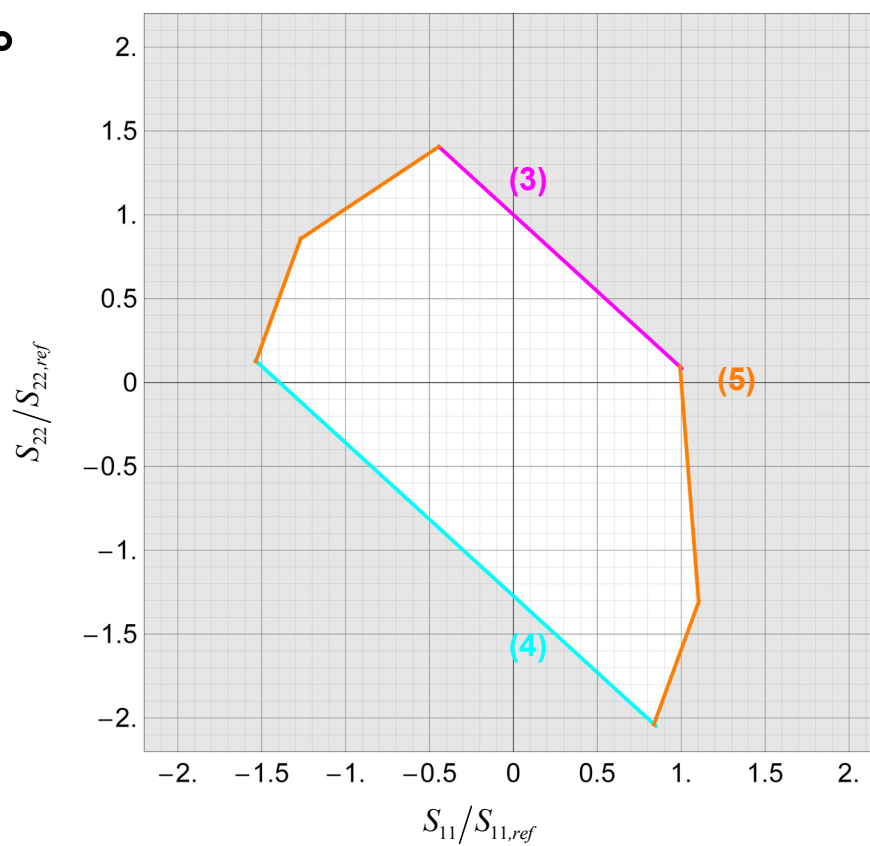
$\alpha = 0^\circ$

 $\alpha = 7.5^\circ$


Bild 12.15 Versagensbeginn der Holzscheibe bei den Faserneigungen $\alpha = 0^\circ$ und 7.5°

$\alpha = 15^\circ$  $\alpha = 30^\circ$ Bild 12.16 Versagensbeginn der Holzscheibe bei den Faserneigungen $\alpha = 15^\circ$ und 30°

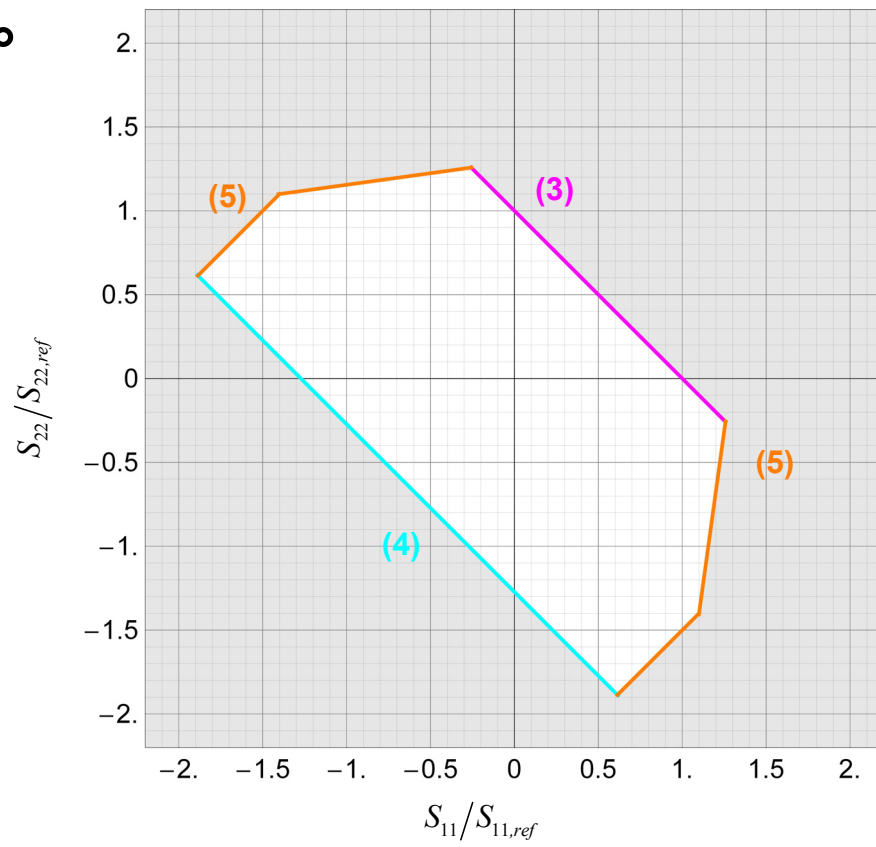
$\alpha = 45^\circ$ 

Bild 12.17 Versagensbeginn der Holzscheibe bei den Faserneigungen $\alpha = 45^\circ$

12.6 Praktische Vorgehensweise bei einer Versagensmodellformulierung von Vollholz

Voll- und Schnittholz ist heterogen aufgebaut (Bild 12.18). Es enthält Astholz und eine unregelmäßige Wachstumsstruktur. Das Bezugssystem zur geometrischen Strukturbeschreibung verläuft parallel zu den Schnittholzkanten.

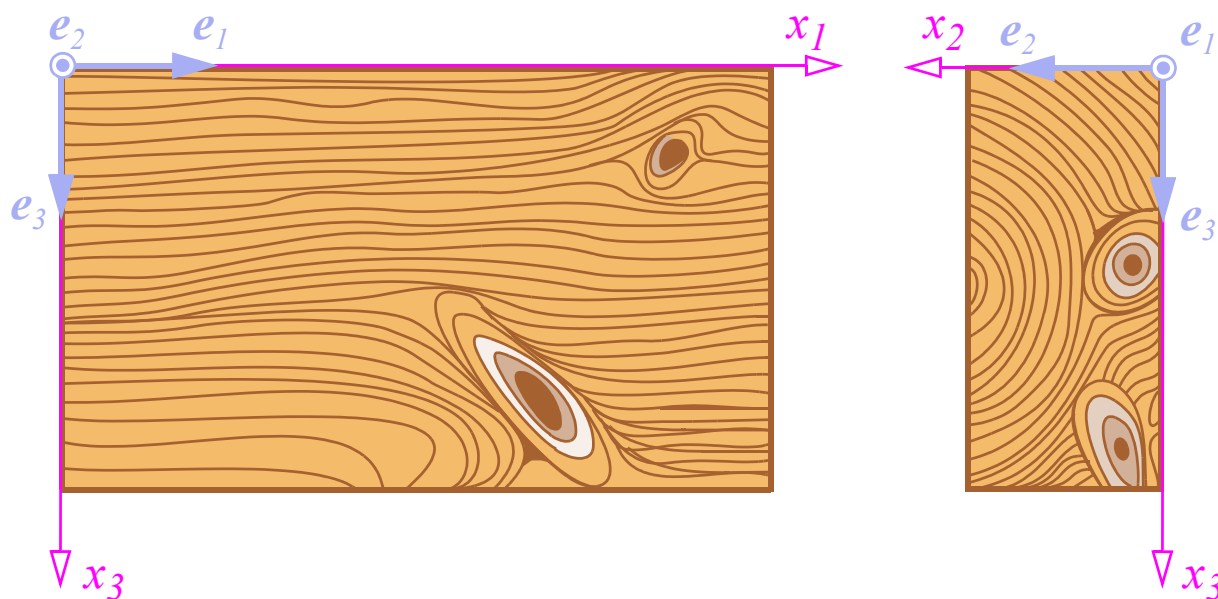


Bild 12.18 Darstellung eines Vollholzelements inklusive Ästen; als Bezugssystem wird das kantenparallele $\{x_1, x_2, x_3\}$ -System gewählt

Der heterogen aufgebaute Körper lässt sich grob in Bereiche mit und ohne Äste einteilen. Die materielle Struktur des astfreien Bereichs wird durch den Längsfaserverlauf und die Früh- und Spätholzschichten bestimmt. Der Verlauf der Wachstumsstruktur innerhalb des Schnittholzes ändert sich von Punkt zu Punkt. Ebenso veränderlich sind die mechanischen Eigenschaften. Der wesentliche Modellierungspunkt ist die Erfassung der Holzstruktur des Vollholzelements: Das beinhaltet die Faserneigung und die Einteilung in Bereiche mit fehlerfreiem Holz und Astbereichen und die Zuordnung von mechanischen Modellkenngrößen. Dazu werden drei Modelle vorgestellt, die sich in den gewählten Vereinfachungen der Modellbeschreibung der Wachstumsstruktur unterscheiden.

12.6.1 Strukturmodell A

Als erste Vereinfachung wird das Vollholzelement in zwei Bereiche eingeteilt: in Astholzbereiche (II) und regelmäßig aufgebautes, astfreies Holz (Bereich I). Weiters wird angenommen, dass beide Holzbereiche überall dieselben (mechanischen) Eigenschaften besitzen. Man erhält somit einen heterogenen, aus zwei Komponenten aufgebauten Modellkörper (Bild 12.19).

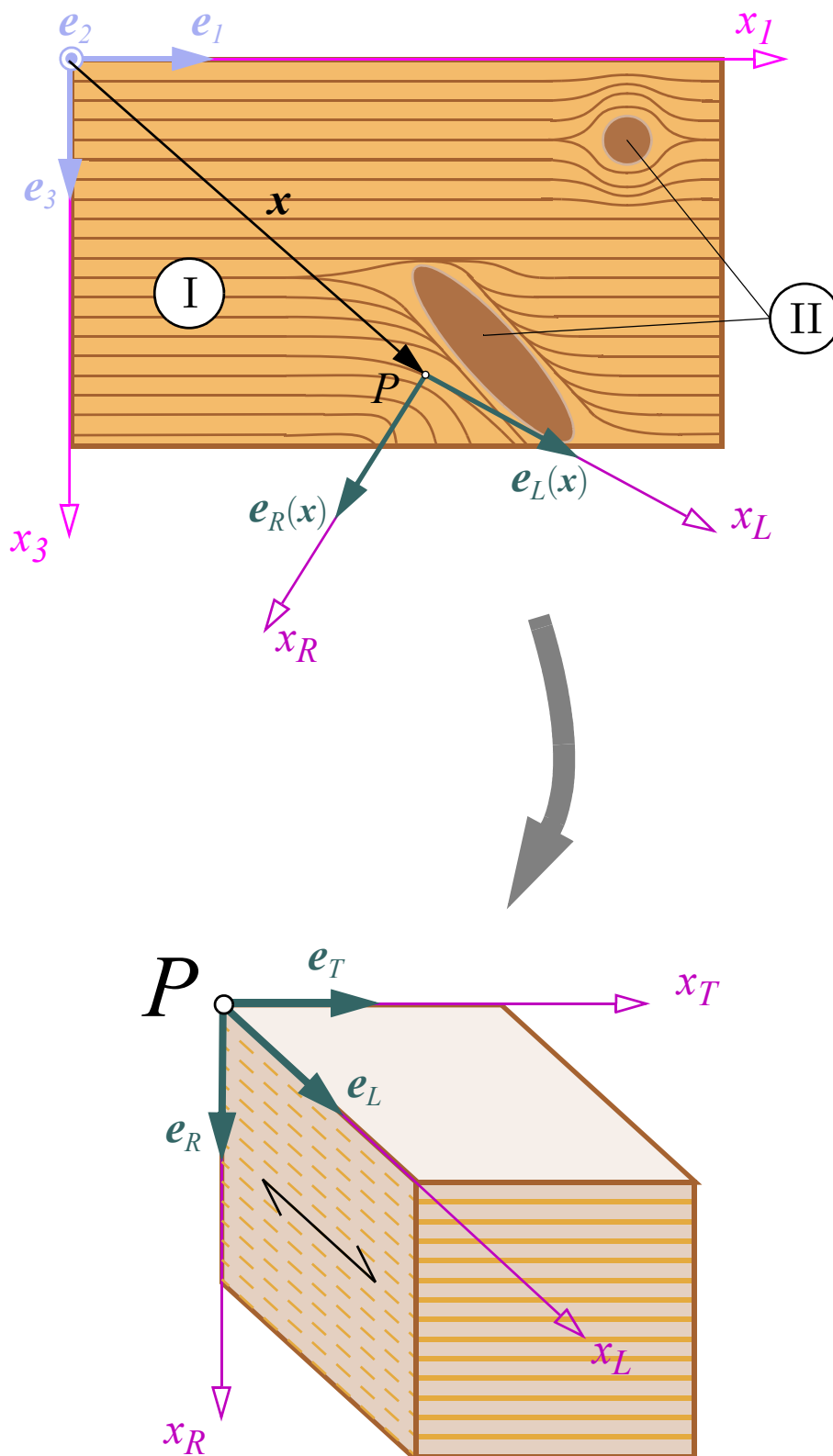


Bild 12.19a) Strukturmodell A von Vollholz mit einer Unterscheidung in Astholz (II) und fehlerfreies Holz (I). Der Längsfaser- und der Früh- und Spätholzverlauf aus Bild 12.18 wird angenähert modelliert; die Orientierung der Materialhauptachsen $\{e_L, e_R, e_T\}$ des fehlerfreien Holzes sind Funktionen der Lage \mathbf{x} im Vollholz.

Der astfreie Bereich besteht aus der gewachsenen Struktur des Holzes mit den Längsfasern und den Schichten, die sich aus der alternierenden Abfolge von Früh- und Spätholz ergeben. Die Orientierung der drei Materialhauptrichtungen mit dem Dreiein $\{\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T\}$ ändert sich von Punkt zu Punkt innerhalb des Vollholzelements, ist damit eine Funktion des Ortsvektors \mathbf{x} und wird durch den Rotationstensor \mathbf{R} angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \mathbf{e}_L = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{2'} &= \mathbf{e}_R = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{3'} &= \mathbf{e}_T = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (12-36)$$

Die funktionale Beschreibung dieses Feldes kann kontinuierlich oder abschnittsweise kontinuierlich erfolgen, je nach Annahme der Wachstumsstruktur. Für dieses Vollholzstrukturmodell werden zwei Materialmodelle benötigt: Eines für den Astbereich und ein Zweites für den fehlerfreien Bereiche wiedergibt. Die Beschreibung des Versagensverhaltens des fehlerfreien Holzes wurde oben angeführt. Offen bleibt die Frage, welches Materialmodell für den Astbereich im Schnittholz verwendet werden soll.

12.6.2 Strukturmodell B

Da sich der Längsfaserverlauf in vielen Bereichen des Schnittholzes weitestgehend mit der globalen Koordinatenachsenrichtung x_1 deckt, wird in Modell B vereinfachend $\mathbf{e}_L // \mathbf{e}_1$ im gesamten Schnittholz angenommen. Die lokale Variation des Früh- und Spätholzverlaufs wird auch geometrisch vereinfacht, indem die lokale Orientierung der x_R und x_T -Achse zwar beliebig um den Winkel ϕ geneigt zu den Querschnittskanten x_2 und x_3 , aber konstant in der Querschnittsfläche verlaufend, modelliert wird. Dieses Strukturgeometriemodell ist in Bild 12.20 dargestellt. Diese beiden Vereinfachungen geben für den astfreien Bereich I einen von der Koordinate \mathbf{x} unabhängigen Materialachsenverlauf. Dieser Simplifizierungsschritt soll mit dem Begriff „Auskämmen“ bezeichnet werden. Der Zusammenhang zwischen der lokalen $\{\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T\}$ -Basis und dem globalen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ -Bezugssystem aus Modell A, vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \cos \phi \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - \sin \phi \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{1'} &= \mathbf{e}_L = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{2'} &= \mathbf{e}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3'} &= \mathbf{e}_T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \phi \mathbf{e}_3 - \sin \phi \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (12-37)$$

Um diese geometrische Vereinfachung etwas zu kompensieren, wird der Bereich I aus Modell A in weitere Subgebiete unterteilt (Bild 12.20). Um die Astbereiche, wo i.A. der Faserverlauf von der vereinfachten Annahme (12-37) besonders stark abweicht, wird ein Bereich abgegrenzt und mit Ia bezeichnet. In diesem Bereich werden andere mechanische

Eigenschaften - z.B. geringere Steifigkeiten und Festigkeiten - festgelegt. Wie diese Eigenschaften zu wählen sind, bleibt offen.

Zusammenfassend: Der Faserverlauf ist in Modell B konstant („ausgekämmt“). Die mechanischen Eigenschaften sind nur bereichsweise homogen. Das Vollholzelement als Ganzes ist heterogen aufgebaut.

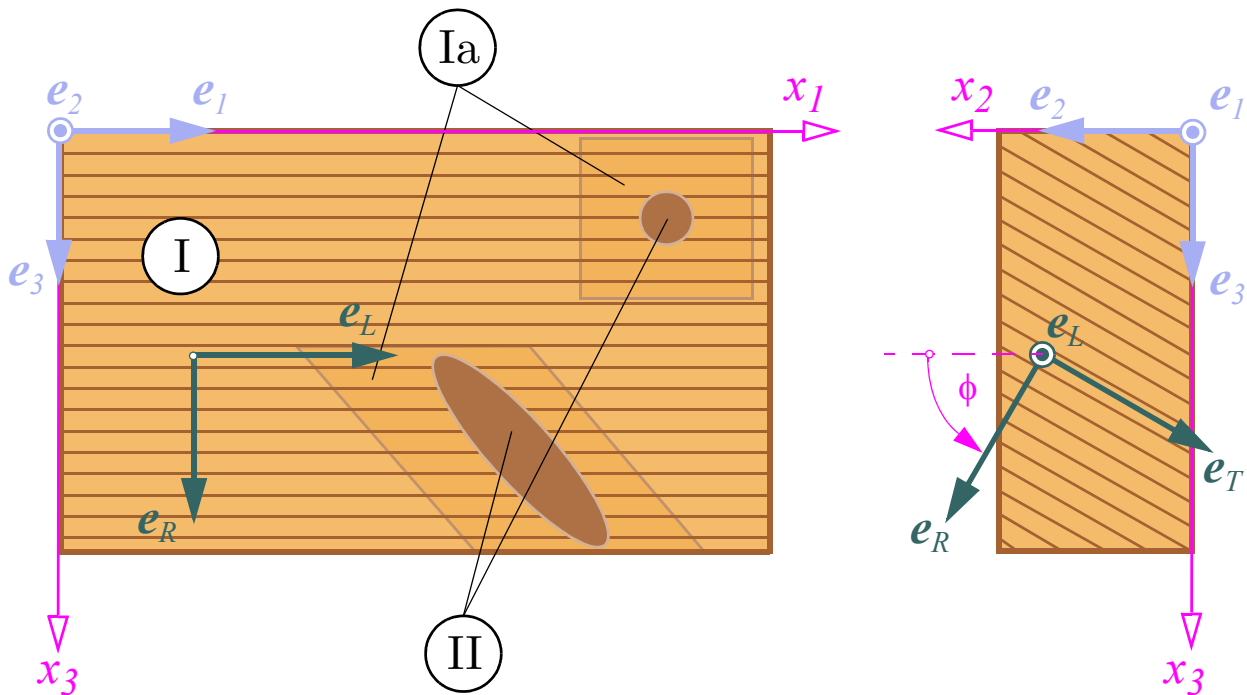


Bild 12.20 Strukturmodell B für Schnittholz mit „ausgekämmt“ Faser-, Früh- und Spätholzverlauf

12.6.3 Strukturmodell C

Im dritten Modell wird auch noch der bereichsweise heterogene Aufbau des Kantholzes aus Einfachheitsgründen vernachlässigt. Es wird kein Unterschied zwischen Astholz, astnahem oder gestörtem Holz und regelmäßig strukturiertem Holz gemacht. Es wird festgelegt, dass die mechanischen Eigenschaften im gesamten Holzkörper gleich sind. Diese mechanischen Eigenschaften bzw. Kenngrößen werden an Vollholzelementen mit Bauteilabmessungen bestimmt. Das Bauteil wird stark vereinfacht als homogen aufgebaut betrachtet, obwohl Unregelmäßigkeiten im geometrischen Aufbau und lokal starke Unterschiede in den Materialeigenschaften vorhanden sind. Aufgrund der aufgezwungenen homogenen Modellierung und damit der „Verschmierung“ des Wachstumsverlaufs und der vorhandenen Äste im Strukturmodell kommt es als logische Folge dieser Herangehensweise zu starken Streuungen bei den Versuchsdaten.

Ist es überhaupt sinnvoll, das mechanische Modell dermaßen grob zu vereinfachen?

Die eingeführten Simplifizierungen lassen sich in Vorausblick auf die angestrebte Anwendung rechtfertigen. Bei Berechnung und Dimensionierung von Brettschichtholz- oder Voll-

holzträgern sind die Strukturmodelle A und B zu detailliert. Eine individuelle Brett- bzw. Schnittholzmodellierung ist bei Verwendung dieser Modelle mit dem einhergehenden Aufwand und der benötigten Menge an Inputdaten für den angestrebten Endzweck wenig praktikabel. Bei der Berechnung des Tragverhaltens einer Brettsperrholzplatte, die aus kreuzweise verleimten oder vernagelten Brettern aufgebaut ist, ist auch die detaillierte Modellierung der einzelnen Bretter wenig sinnvoll, wenn man am Lastabtragungsverhalten der Struktur en gros interessiert ist.

Andererseits - besonders im Versagensfall - bestimmt der lokale Aufbau des Einzelbretts und die aufgebrachte Belastung wesentlich die individuelle Bretttraglast. Bei Annahme von ungünstigen Verhältnissen lassen sich untere Grenzwerte festlegen, wobei aber die Gefahr besteht, dass man sich bei Verwendung dieser Werte in vielen Fällen weitab einer wirtschaftlichen Dimensionierung bewegt. Hervorzuheben ist, dass auch bei diesem Strukturmodell das in Kap. 12.3.2 vorgestellte Versagensmodell zum Einsatz kommt. Die Vereinfachungen in der Erfassung der Vollholzwachstumsstruktur werden durch verringerte Festigkeitswerte kompensiert.

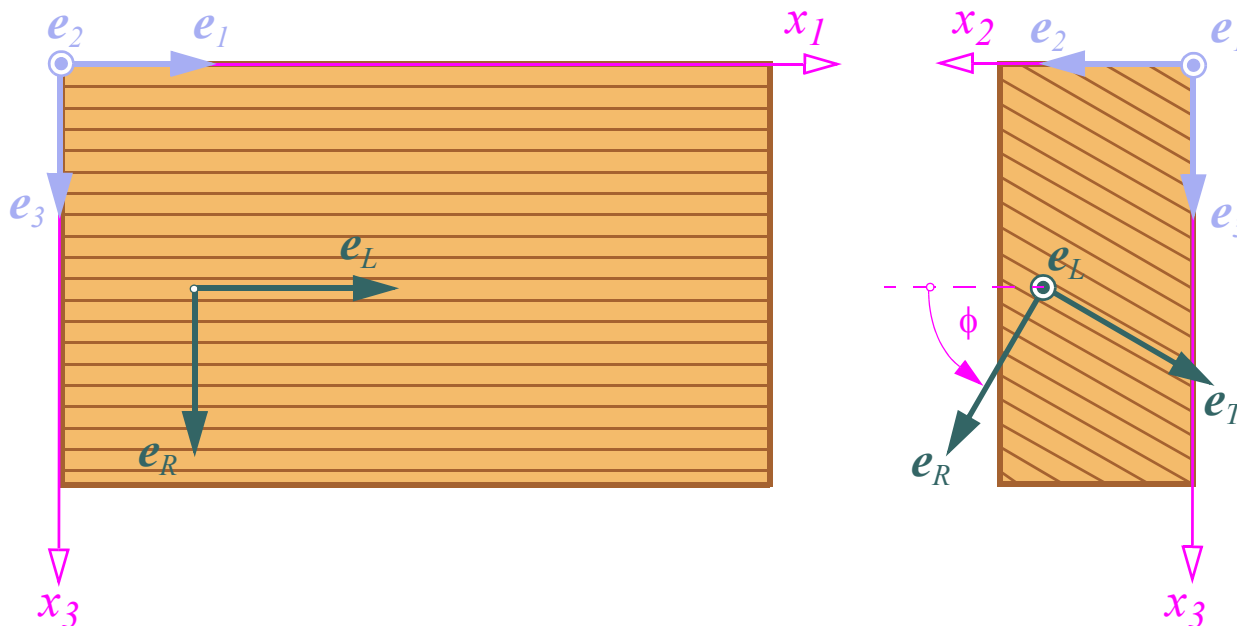


Bild 12.21 Strukturgeometriemodell C: sowohl der innere Materialstrukturverlauf, als auch die mechanischen Eigenschaften werden als homogen über den gesamten Schnittholzbereich angenommen

12.7 Zusammenfassung & Ausblick

Das vorgestellte Versagensmodell für fehlerfreies Holz soll bei Traglastberechnungen von Strukturen eingesetzt werden. Kernbestandteil des Modells ist die Unterscheidung in unterschiedliche Versagensmechanismen. Jedem Versagensmechanismus ist eine Versagenesebenenorientierung zugewiesen (Mohr-Typ-Versagensbedingung). Das Modell wurde bewusst einfach gehalten, kann aber bei Bedarf problemlos erweitert bzw. verfeinert werden.

Weitere Gründe für die einfache Formulierung des Modells sind die starke Streuung der vorhandenen Versuchsdaten und die geringe Anzahl an Versuchen, die das Interaktionsverhalten von z.B. faserparallelem Schubversagen bei zeitgleicher Wirkung von Normalspannungen angeben. Es wurden zwar von Eberhardsteiner (2002) biaxiale Bruchversuche an Fichtenholz durchgeführt, aber die Interaktionsbeziehungen (sofern überhaupt vorhanden) sind nicht einfach und unzweideutig aus den vorhandenen Daten herauszufiltern; mehr dazu in den nachfolgenden Untersuchungen.

Die Beispiele aus Kap. 12.4 und Kap. 12.5 sind Startpunkt für die nachfolgende Untersuchung des Last-Verformungs-Zusammenhangs und des Versagensverhaltens des biaxial beanspruchten Probekörpers.

13

Versuchsdurch- führung & Aufgabenstellung

13.1 Einleitung, Aufgabenstellung & Kapitelaufbau

Das in Kap. 12 formulierte Holzmodell soll auf eine konkrete technische Aufgabenstellung angewandt werden. Anknüpfungspunkt sind dabei die am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (ehemals: Institut für Festigkeitslehre) der TU Wien von Prof. Eberhardsteiner und Mitarbeitern durchgeführten Forschungsarbeiten und experimentellen Untersuchungen an scheibenförmigen Probekörpern aus Fichtenholz (Bild 13.2), die in der Scheibenebene schräg zur Faserrichtung bis zum Bruch belastet wurden. Der zusammenfassende Bericht über die entwickelte Versuchsmaschine einschließlich der notwendigen Mess- und Belastungseinrichtungen, die Probekörperherstellung, die Versuchsdurchführung und die erhaltenen Messdaten findet sich in der Habilitationsschrift von Eberhardsteiner (2002). Dieses Kapitel gibt einen kurzen Abriss dieser Arbeit und fasst die wesentlichen Punkte zusammen, auf die die anschließende Untersuchung aufbaut. Die gemessenen Daten werden mit der in den nachfolgenden Kapiteln durchgeführten Traglastuntersuchung des Holzprobekörpers verglichen.

13.1.1 Inhalt von Kapitel 13

13.2 Versuchsvorrichtung & Probekörpergeometrie

13.3 Versuchsdurchführung

13.4 Gemessene Daten und Aufbereitung der Versuchsergebnisse

13.5 Dokumentation und Darstellung der Versuchsergebnisse

13.6 Aufgabenstellung & Vorgehensweise

13.2 Versuchsvorrichtung & Probekörpergeometrie

13.2.1 Versuchsvorrichtung

Die Prüfmaschine ist in Bild 13.1 dargestellt. Zentral positioniert ist der kreuzförmige Holzprobekörper mit zwölf Bohrungen, je drei pro Probenseite, die als Lasteinleitungspunkte bezeichnet werden. An jeder Bohrung werden über einen Bolzen mit zwei um nahezu 90° zueinander geneigten gabelförmigen Stangen Lasten in den Probekörper eingeleitet. Die benötigten Kräfte werden mithilfe eines Hydraulikzylinders erzeugt. Die Lasteinleitungsgabel, der Hydraulikzylinder mit dem Servoventil, die Kraftmesszelle und das Lagerungselement sind hintereinander auf einer Belastungsachse angeordnet. Die Enden der insgesamt 24 Belastungsachsen sind an den vier Eckkonsolen (jeweils sechs pro Rahmeneck) eines massiven Stahldoppelrahmens verankert.

13.2.2 Probekörper: Geometrie und Herstellung

Der in Bild 13.2 dargestellte Holzprobekörper ist in folgende Bestandteile unterteilbar:

- eine zentrale quadratische Mittelscheibe, deren Oberfläche als Messfeld bezeichnet wird, da in diesem Bereich optische Verformungsmessungen durchgeführt werden und
- vier seitliche Lasteinleitungsbereiche. Diese wiederum teilen sich in einen Bereich, der direkt an die Mittelscheibe anschließt und geschlitzt ist und eine mit Stahlplättchen verstärkte Zone mit drei Bohrungen. In diese Bohrungen werden Bolzen eingesetzt, an welchen die Belastungsachsen angreifen.

13.2.2.1 Abmessungen des Probekörpers

Die zentrale quadratische Mittelscheibe hat eine Seitenabmessung von 140 mm, deren Dicke je nach Probekörpertyp

- $t_m = 4.5$ mm (Typ A),
- $t_m = 7.5$ mm (Typ B) oder
- $t_m = 9.5$ mm (Typ C) beträgt.

Die Dicke des Messfelds wird in der Arbeit von Eberhardsteiner (2002) mit t bezeichnet (siehe auch Bild 13.2), wird aber in weiterer Folge mit dem zusätzlichen Index m versehen. Von den 439 durchgeführten Versuchen tritt Typ A 232 mal, Typ B 230 und Typ C nur 4 mal auf.

Die vier seitlichen Lasteinleitungsbereiche haben die Dicke $t_k = 20$ mm und sind im Abstand von 12 mm mit einer Schlitzbreite von 4 mm und einer Schlitzlänge von 28 mm eingeschlitzt. Um die zwölf Bohrungen (je drei pro Lasteinleitungsbereich) ist der Holzprobekörper an der Vorder- und an der Rückseite mit 3 mm dicken Stahlplättchen verstärkt.

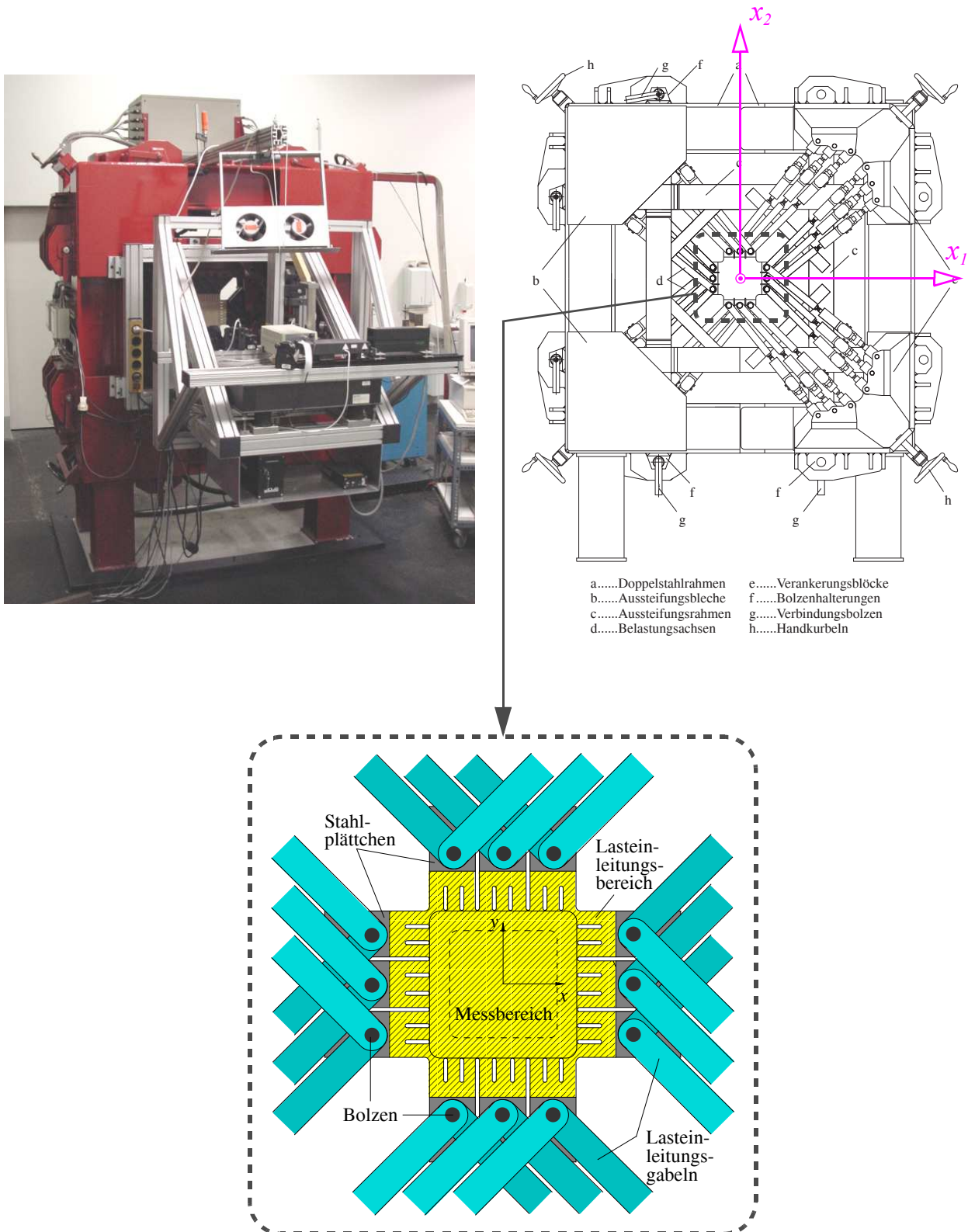


Bild 13.1 Versuchsvorrichtung mit den optischen Verformungsmessgeräten; Zeichnung der wesentlichen Komponenten mit dem raumfesten $\{x_1, x_2, x_3\}$ - Laborkoordinatensystem und Detail des zentral angeordneten Probekörpers mit den Lasteinleitungsgabeln (entnommen aus Fleischmann (2005)); über die Lasteinleitungsgabeln werden die Verschiebungen der zwölf Lasteinleitungspunkte des Probekörpers gesteuert

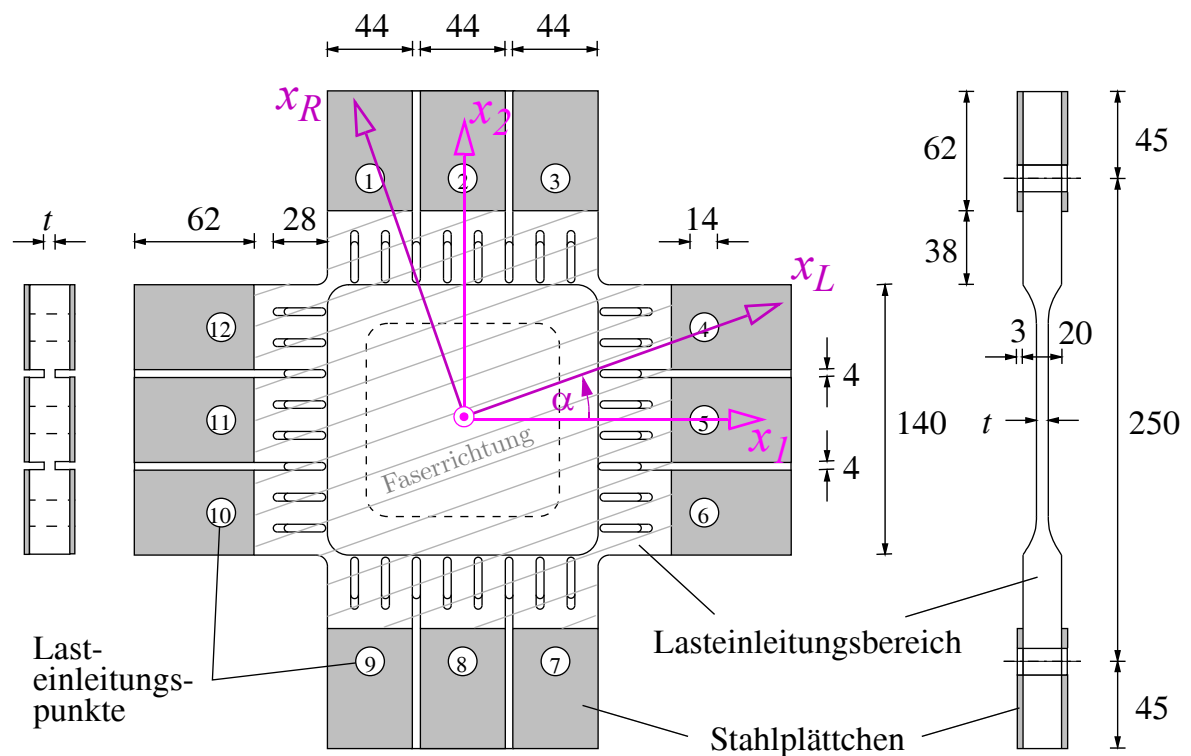
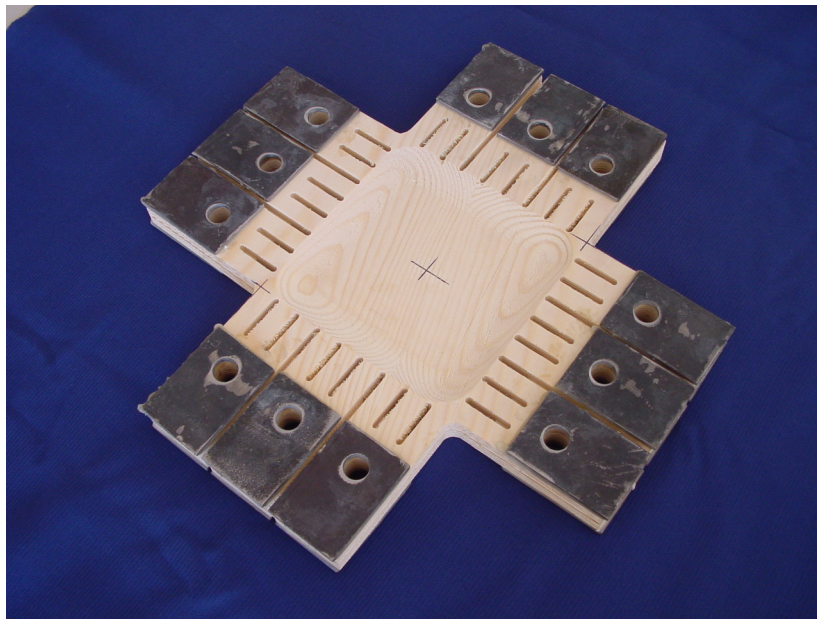


Bild 13.2 Abmessungen [mm] des kreuzförmigen Holzprobekörpers, siehe Eberhardsteiner (2002). Die Dicke t im Messbereich ändert sich nach Probentyp: $t = 4.5$ mm (Typ A), $t = 7.5$ mm (Typ B), $t = 9.5$ mm (Typ C). Die schräge Faserrichtung (L - Materialkoordinatenrichtung) des Holzes tritt im gesamten Probekörper, auch im Lasteinleitungsbereich, auf!

13.2.2.2 Herstellung des Probekörpers

Das Ausgangsmaterial für den Probekörper wurde mit halber Probenbreite und ca. doppelter Dicke (etwa $2t_k$) als Kernbrett in der LR -Ebene aus einem Fichtenstamm geschnitten, anschließend in der Dicke halbiert und die beiden Brettteile wiederum stumpf miteinander verleimt. Dabei wird darauf geachtet, dass der strukturelle Aufbau des Holzbrettes möglichst gleichmäßig und frei von Ästen und sonstigen Störungen ist. Aus dem verleimten Brett wurde mit einer CNC-Maschine die in Bild 13.2 dargestellte Probekörperform gefräst und durch eine Lagerung in der Klimakammer eine konstante Holzfeuchtigkeit von $u = 12\%$ erreicht. Vor den Einbau in die Prüfmaschine werden die 24 Stahlplättchen aufgeklebt. Die Rohdichte variiert zwischen 0.357 g/cm^3 (Versuchsnummer 280) und 0.631 g/cm^3 (Versuchsnummer 140).

13.2.2.3 Material- und Laborkoordinatensystem

Die Materialhauptachsen des Holzes werden - wie bereits in Kap. 12 eingeführt - mit den $\{x_L, x_R, x_T\}$ -Koordinatenachsen gekennzeichnet. Die raumfesten $\{x_1, x_2, x_3\}$ -Koordinatenachsen werden als Laborkoordinatensystem bezeichnet. Deren Lage ist in Bild 13.1 dargestellt. Der Probekörper wird so in die Maschine eingebaut, dass die Probekörper-*randkanten* parallel zu den $\{x_1, x_2\}$ -Laborkoordinatenachsen liegen. Die x_3 -Achse steht normal auf die Mittelscheibenmessfläche (siehe Bild 13.2).

Aufgrund der Probekörperherstellung liegen die $\{x_L, x_R\}$ -Materialrichtungen in der Scheibenebene des Mittelfeldes; die x_T -Achse steht normal auf die Mittelfeldoberfläche und ist damit stets parallel zur x_3 -Laborachse. Die Lage der Faserrichtung (die x_L -Koordinatenachse) im Probekörper wird im Laufe des Versuchsprogramms verändert. Der Winkel zwischen der raumfesten und horizontalen x_1 -Laborachse und der faserparallelen x_L -Achse wird mit α bezeichnet (in der Arbeit von Eberhardsteiner (2002) wird die Faserneigung mit φ bezeichnet). Da der gesamte Probekörper aus einem Brett gefertigt wurde, tritt diese Faserschräge auch in den Lasteinleitungsbereichen auf!

Die Versuche wurden bei den fünf Winkeln $\alpha = 0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ durchgeführt.

13.3 Versuchsdurchführung

13.3.1 Angestrebte Belastungssituation des Probekörpers

13.3.1.1 Ebener Spannungszustand in der Mittelscheibe

In der Mittelscheibe des Probekörpers soll durch die aufgebrachten Lasten bzw. Verformungen in den Lasteinleitungspunkten ein gleichmäßiger ebener Spannungszustand erzeugt werden. Die Spannungskomponenten, S_{13} , S_{23} und S_{33} , auf der freien Probenoberfläche sind stets null. Der Spannungs- und der Verzerrungszustand im Mittelfeld des Probekörpers sind gleichförmig, wenn sich die Schubverzerrung in der Mittelscheibe ungehindert ausbilden kann. In der Mittelscheibe treten somit - bezogen auf das globale $\{x_1, x_2\}$ -Koordinatensystem - nur die Normalspannungskomponenten S_{11} und S_{22} auf. Die Schubspannungskomponente S_{12} ist in diesem Bezugskoordinatensystem null. Diese als *biaxialer Spannungszustand* (kurz: BiSZ) bezeichnete Belastungssituation der Mittelscheibe ist in Bild 13.3 dargestellt. Die Normalspannungen S_{11} und S_{22} (und $S_{33} = 0$) sind in diesem Fall Hauptnormalspannungen und das raumfeste Laborkoordinatensystem gibt die Hauptnormalspannungsrichtungen an. Hervorzuheben ist, dass im Materialhauptachsensystem zwar ein ebener Spannungszustand herrscht, die Schubspannungskomponente S_{LR} aber nicht null ist, da aufgrund der Spannungstransformation

$$\begin{aligned} S_{LL} &= S_{11} \cos^2 \alpha + S_{22} \sin^2 \alpha \\ S_{RR} &= S_{11} \sin^2 \alpha + S_{22} \cos^2 \alpha \\ S_{LR} &= (S_{22} - S_{11}) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (13-1)$$

gilt. Den Spannungszustand der Mittelscheibe als „schubspannungsfrei“ zu bezeichnen, ist nicht richtig; aus Gleichung (13-1) sieht man, dass die Mittelscheibe nur im Sonderfall $S_{11} = S_{22}$ schubspannungsfrei ist.

13.3.1.2 Randkraftgrößen des Probekörpers

Die in Bild 13.3 dargestellte und angestrebte Belastungssituation des Mess- bzw. Mittelfeldes gibt weiteren Aufschluss über das Tragverhalten des Probekörpers. Da an den Rändern des Mittelfeldes nur Normalspannungen wirken, die über die gesamte Seitenfläche konstant sein sollen, werden aus Gleichgewichtsgründen nur resultierende Normalkräfte an die vier Lasteinleitungsbereiche und damit an die Lasteinleitungspunkte weitergegeben. Die an jeder Seite angreifenden drei Bolzenkräfte \mathbf{F}_i (Bild 13.3) dürfen aus diesem Grund in Summe nur eine resultierende Kraftkomponente normal zum Probenrand ergeben. Die Summe der Kraftkomponenten parallel zum Rand des Probekörpers („Schubkräfte“) und mögliche resultierende Momente müssen null sein.

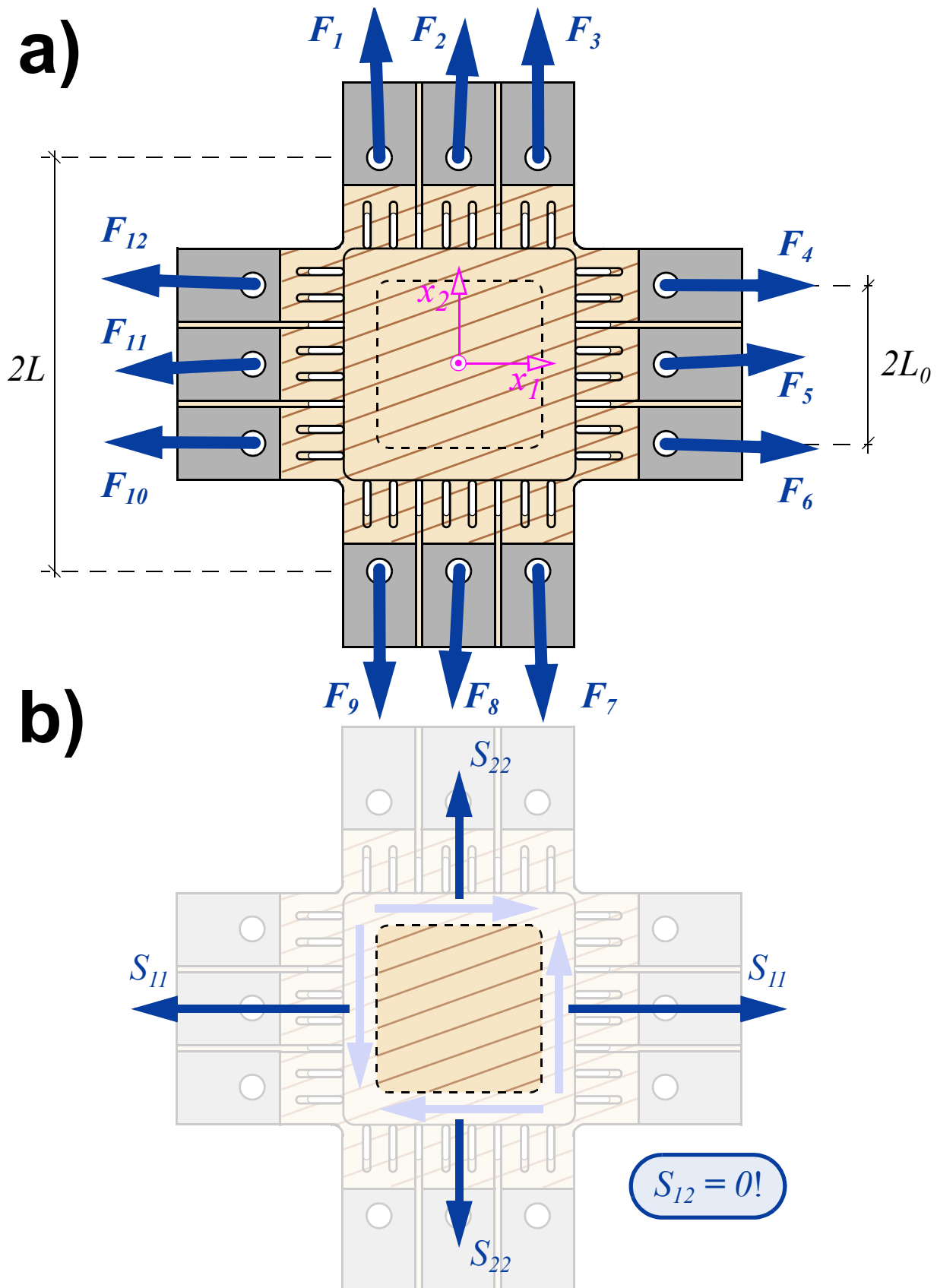


Bild 13.3 a) Bolzen- bzw. Lasteinleitungskräfte F_i (die Nummerierung erfolgt nach der Bezeichnung in Bild 13.2); b) freigeschnittener quadratischer Messbereich unter biaxialem Spannungszustand; die Schubspannungskomponente S_{12} ist null

13.3.2 Verformungskontrollierte Versuchsdurchführung

Der Versuch wird verformungskontrolliert durchgeführt. Die Verformungen an den zwölf Lasteinleitungspunkten werden mittels der Belastungsachsen geführt vorgegeben. Die dazu benötigten Kräfte werden durch Hydraulikzylinder aufgebracht und in den Kraftmessdosen der jeweiligen Achsen gemessen. Das Nummerierungs- und Bezeichnungsschema der zwölf Lasteinleitungspunkte und der zugehörigen 24 Freiheitsgrade ist in Bild 13.2 dargestellt. Die zwei Verschiebungskomponenten u_i und v_i je Lasteinleitungspunkt in Bild 13.3 werden bezüglich des raumfesten $\{x_1, x_2\}$ -Laborkoordinatensystems angegeben.

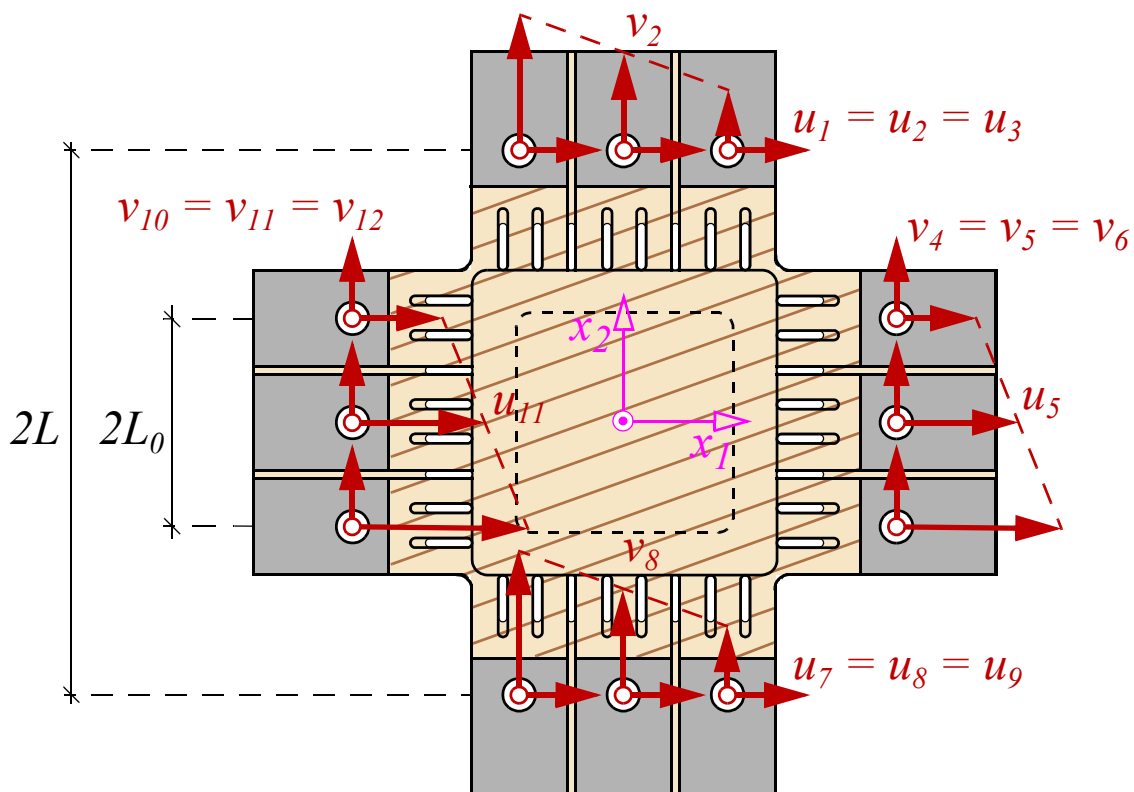


Bild 13.4 Verschiebungen in den Lasteinleitungspunkten; das Nummerierungs- und Bezeichnungsschema der 24 Freiheitsgrade (12 horizontale Fg. u_i , 12 vertikale Fg. v_i) wurde von Eberhardsteiner (2002) übernommen.

13.3.2.1 Einschränkung bzw. Zusammenhänge der Lasteinleitungspunktverschiebungen

In der Vorgabe der Lasteinleitungspunktverschiebungen wird einschränkend festgelegt, dass die drei Komponenten parallel zum Probenrand jedes Lasteinleitungsbereichs gleich sind und die Verschiebungskomponenten normal zum Rand linear verlaufen. Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 u_1 = u_2 = u_3, \quad v_2 - v_1 = v_3 - v_2 & \quad v_4 = v_5 = v_6, \quad u_5 - u_4 = u_6 - u_5 \\
 u_7 = u_8 = u_9, \quad v_8 - v_9 = v_7 - v_8 & \quad v_{10} = v_{11} = v_{12}, \quad u_{11} - u_{12} = u_{10} - u_{11}
 \end{aligned} \tag{13-2}$$

Aufgrund der Zusammenhänge sind die 24 Verschiebungsfreiheitsgrade u_i und v_i auf zwölf unabhängige Verschiebungsfreiheitsgrade reduzierbar. Zusätzlich wird bei den Verschiebungsvorgaben eine Antimetriebedingung, siehe Eberhardsteiner (2002), S.35, festgelegt. Damit verbleiben sechs unabhängige Freiheitsgrade zur Festlegung aller Lasteinleitungspunktverschiebungen.

13.3.2.2 Festlegung der Verschiebungsvorschrift zur Erzeugung der biaxialen Beanspruchungssituation

Wie die verbleibenden sechs unabhängigen Verschiebungen der Lasteinleitungspunkte vorgegeben werden müssen, um die im vorigen Abschnitt beschriebene biaxiale Kraft- bzw. Spannungssituation in der Mittelscheibe des Probekörpers zu erzeugen, wird in Kap. 3.2.3 der Arbeit von Eberhardsteiner (2002) behandelt. Die vorzugebende Steuerung der Lasteinleitungsvorrichtung wird abgekürzt als „Verschiebungsvorschrift“ bezeichnet. Durch Vorgabe der Verschiebungsvorschrift müssen nur mehr zwei Lasteinleitungspunktverschiebungen, die Horizontalverschiebung $\bar{u} = u_5$ und die vertikale Verschiebungskomponente $\bar{v} = v_2$, aktiv vorgegeben werden. Die restlichen Verschiebungsgrößen stellen sich begleitend so ein, dass sich die biaxiale Belastungssituation ergibt.

13.3.2.3 Belastungsverhältnis κ

Unterschiedliche Belastungssituationen bzw. Lastfälle werden durch das Belastungsverhältnis

$$\kappa = \bar{u} : \bar{v} \quad (13-3)$$

angegeben. Alle Lasteinleitungspunktverschiebungen u_i und v_i ergeben sich aus dem Verhältnis κ und der Verschiebungsvorschrift.

13.3.3 Vorspannung des Probekörpers

Bevor der angegebene Randverformungszustand schrittweise bis zum Bruch des Probekörpers gesteigert wird, wird die Probe zuerst eingerichtet und vorgespannt, um die Spiele der 24 Lasteinleitungsachsen zu beseitigen. Die zwölf Lasteinleitungskräfte des Vorspannzustands haben den Betrag

$$|\mathbf{F}_i| = \bar{F} = 0.30 \text{ kN} = 300 \text{ N} \quad i = 1, \dots, 12 \quad (13-4)$$

und sind normal zum Probenrand. Je Probenrand werden ca. 900 N Vorspannkraft eingeleitet. Direkt an den Vorspannvorgang anschließend beginnt die verschiebungsgesteuerte Belastungsphase.

13.4 Gemessene Daten und Aufbereitung der Versuchsergebnisse

13.4.1 Gemessene Rohdaten

In jedem Schritt der Belastungsphase werden

- die absoluten und relativen (bezogen auf den Vorspannzustand) Lasteinleitungskräfte F_i ,
- die Soll- und Ist-Werte der Positionen und Positionsänderungen der Hydraulikzylinder und der Lasteinleitungspunkte,
- die kraftabhängigen Längenänderungen der 24 Belastungsachsen und
- die Daten der optischen Deformationsanalyse des Messfeldbereichs der Mittelscheibe mittels elektronischer Speckle-Interferometrie (Modulo- 2π -Darstellungen aus den ESPI-Messungen)

festgehalten und gespeichert. Aus diesen Rohdaten werden Verzerrungen und Spannungen ermittelt.

13.4.2 Aufbereitung der Messdaten

13.4.2.1 Berechnung der Verzerrungen im Messfeld

Aus den Modulo- 2π -Darstellungen werden die Verschiebungsverteilungen im Messfeld der Mittelscheibe bestimmt. Durch numerische Differentiation ergeben sich die Verläufe der Verzerrungskomponenten im Messfeld. In erster Approximation werden durch Bildung des Mittelwerts die über den Messfeldbereich (siehe Bild 13.1 und Bild 13.2) veränderlich verlaufenden Verzerrungskomponenten auf die drei Verzerrungsgrößen $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$ und $\gamma_{12} = \gamma_{xy}$ reduziert. Die Verformungen werden erst ab der Belastungsphase gemessen. Die drei mittleren Verzerrungskomponenten haben deshalb keine Verformungs- bzw. Verzerrungsanteil aus dem Vorspannzustand.

13.4.2.2 Bestimmung der Spannungen im Messfeld

Die Spannungen im Messfeld können nicht gemessen werden. Zur Berechnung der Spannungen in der Mittelscheibe gibt Eberhardsteiner (2002) die Gleichung

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{2\bar{A}} \left(\sum_{i=4}^6 \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{i=10}^{12} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{F}_i \right) \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{2\bar{A}} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{i=7}^9 \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{F}_i \right)\end{aligned}\tag{13-5}$$

an. Die effektive Querschnittsfläche berechnet sich mit $\bar{A} = \bar{b} t_m$ wobei \bar{b} mit 140 mm (das

entspricht der Kantenlänge der Mittelscheibe in Bild 13.2) angegeben ist und die Messfelddicke t_m sich aus dem jeweiligen Probentyp (Kap. 13.2.2.1) ergibt. Die Kraftkomponenten parallel zum Rand des Probekörpers, die Anzeichen bzw. Ursache für das Auftreten einer Schubspannungskomponente sind, werden bei der Berechnung der Spannungen vernachlässigt.

13.4.2.3 Definition des Bruchpunktes

Der Bruchpunkt gilt als erreicht, wenn eine der beiden Normalspannungskomponenten aus Gleichung (13-5) im Laufe des Belastungsvorgangs als Erstes einen Maximalwert erreicht. Der zugehörige Belastungsschritt wird vermerkt.

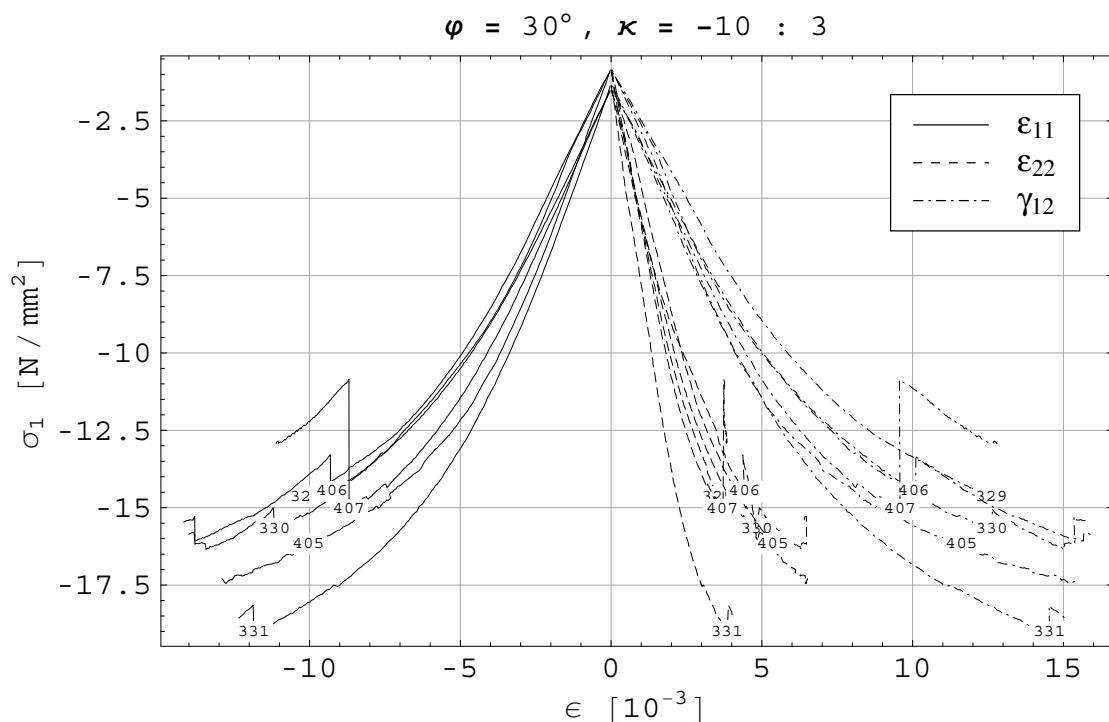


Abbildung 4.36: Spannungs-Dehnungsdiagramme für die für $\kappa = -10:3$ und $\varphi = 30^\circ$ durchgeführten Versuche

Bild 13.5 Spannungs-Dehnungsdiagramm nach Eberhardsteiner (2002)

13.5 Dokumentation und Darstellung der Versuchsergebnisse

Die aus den gemessenen Rohdaten berechneten Versuchsergebnisse - das sind die Spannungen aus Gleichung (13-5) und die Verzerrungen $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$ und $\gamma_{12} = \gamma_{xy}$ des Mittelfeldes sowie die aus dem gemessenen Spannungsverlauf bestimmten Bruchpunkte - der 439 Versuche sind in Eberhardsteiner (2002) in Kap. 4.4. und Anhang B dargestellt. Für die graphische Darstellung der Spannungen und Verzerrungen kommen zwei Darstellungsarten zum Einsatz. Bei beiden Ergebnisdarstellungsarten starten die Spannungen ab dem Vorspannzustand:

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \frac{900}{A} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (13-6)$$

Bei Typ A beträgt die Vorspannung ungefähr 1.43 N/mm²; bei Typ B ca. 0.86 N/mm².

13.5.1 Darstellung der Bruchpunkte im Hauptspannungsraum

Der zum Bruchversagen der Mittelscheibe bzw. des Probekörpers bei einer vorgegebenen Beanspruchung κ und einer festgelegten Faserneigung α zugehörige Spannungspunkt - von Eberhardsteiner als biaxiale Festigkeiten bezeichnet - wird im $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ Spannungsraum eingetragen. Diese Darstellungsart der Versuchsmessdaten, besonders der Bruchspannungen, ist in Bild 13.6 für die Faserneigung $\alpha = \varphi = 0^\circ$ dargestellt.

Zugehörig zu den fünf Bildern mit den Faserneigungswinkeln $\alpha = 0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, in dem nur die biaxialen Festigkeiten für verschiedene Beanspruchungsverhältnisse κ eingetragen sind, wird ein begleitendes Bild angegeben, das neben den Bruchpunkten auch die hinzugefügten Spannungsverläufe bis zum Bruchpunkt angibt. Die Spannungsverläufe starten ausgehend vom Vorspannzustand und nicht im Spannungsnullpunkt, wie aus Abbildung 4.22 in Bild 13.6 zu erkennen ist.

13.5.2 Spannungs-Dehnungsdiagramme

Der Zusammenhang zwischen der betragsmäßig größeren Hauptnormalspannungskomponente und den drei Verzerrungskomponenten ε_1 , ε_2 und γ_{12} ist in Form von Spannungs-Dehnungsdiagrammen angegeben. In Bild 13.5 ist ein solcher Zusammenhang aus Eberhardsteiner (2002) exemplarisch dargestellt. Die Spannungskomponente enthält dabei den Vorspannungszustand. Die Verzerrungen starten bei null und beinhalten keine Verzerrungsanteile, die sich aus der Vorspannung ergeben haben.

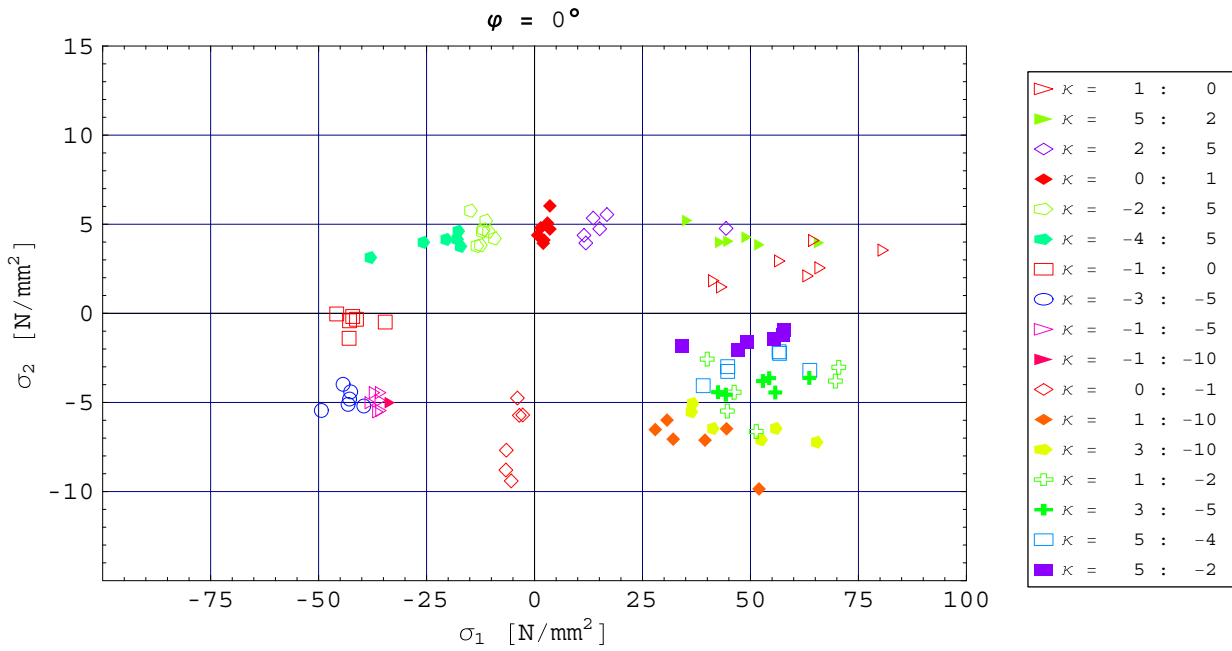


Abbildung 4.21: Biaxiale Festigkeiten für Faserrichtung $\varphi = 0^\circ$

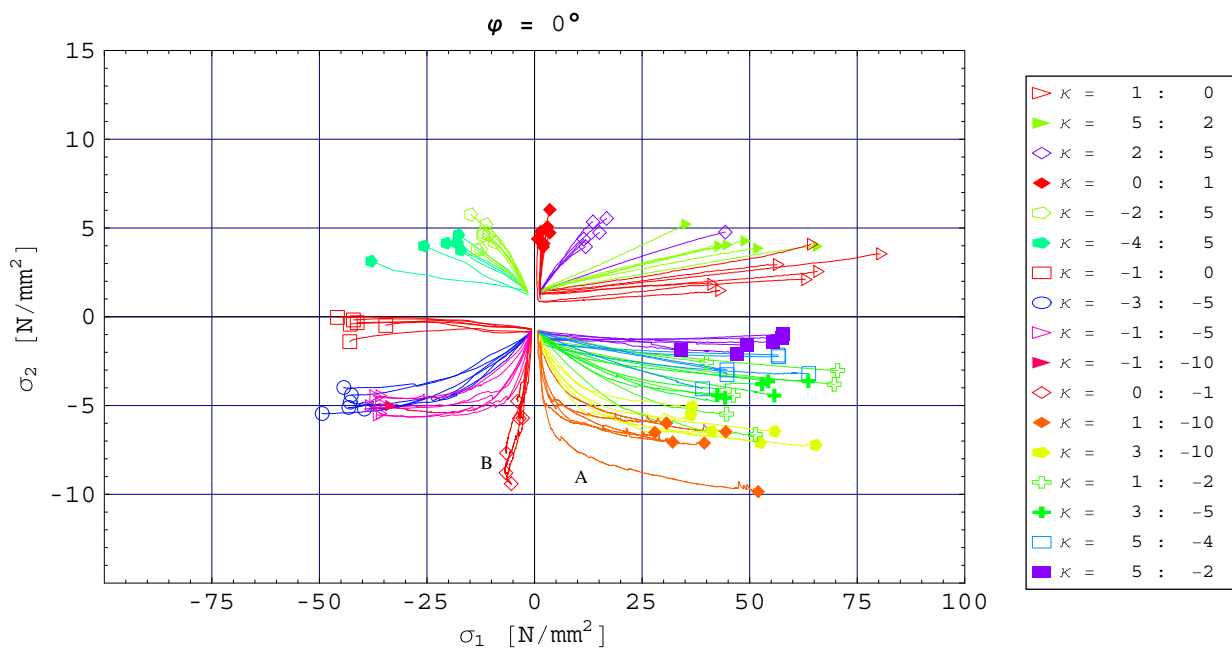


Abbildung 4.22: Verlauf des Spannungsverhältnisses σ_2/σ_1 für $\varphi = 0^\circ$

Bild 13.6 Darstellung der biaxialen Spannungen im Bruchzustand nach Eberhardsteiner (2002)

13.6 Aufgabenstellung & Vorgehensweise

Der Probekörper ist eine Holztragstruktur, bestehend aus einem Scheibenelement und den Lasteinleitungsbereichen. In den Messungen wurde das Trag- und Bruchverhalten des Holzprobekörpers bei variierender Faserneigung dokumentiert.

Ziel der nächsten zwei Kapitel ist es das Last-Verformungs- und das Versagensverhalten des Probekörpers mit einem einfachen Modell nachzuvollziehen und den Messergebnissen und den vorhandenen Bruchbildern gegenüberzustellen. Modellbestandteile sind (i) das in Kap. 12 angegebene Materialmodell für Holz und (ii) ein Strukturmodell, welches aus einem Mittelscheibenelement und vier Lasteinleitungselementen besteht. Das verwendete Strukturmodell soll möglichst einfach gehalten werden, um die wesentlichen Trageffekte herauszuarbeiten. Die in Kap. 12.4 und Kap. 12.5 durchgeführten Untersuchungen zum Verformungsverhalten von Holz bei einaxialer Beanspruchung bzw. Beanspruchung in einer Ebene schräg zur Faserrichtung sind Vorarbeiten, auf die nachfolgend aufgebaut wird.

Die Untersuchung wird in zwei Teilschritten durchgeführt.

- Zuerst wird das elastische Tragverhalten des Probekörpers analysiert. Dabei soll untersucht werden, wie das Mittelscheibenelement, das Messfeld, mit den Lasteinleitungselementen bei veränderlichem Faserwinkel zusammenwirkt. Die berechneten Ergebnisse werden den Messungen aus den Versuchen gegenübergestellt.
- Anschließend werden die Versagenslasten für unterschiedliche Faserneigungen im Probekörper berechnet. Mit dem verwendeten Materialmodell lassen sich die Versagensmodi unterscheiden und durch Vergleich mit den Bruchbildern kontrollieren, ob die in der Modellrechnung prognostizierte Versagensebenenorientierung der in den Versuchen entspricht. Außerdem kann abkontrolliert werden, in welchem Teilelement des Probekörpers, ob im Mittelscheibenelement oder in den Randbereichen, Versagen auftritt. Die in den Berechnungen angegebenen Versagensgrößen und Versagensmodi werden mit den Bruchpunkten der Messungen und den vorhandenen Bildern mit den gebrochenen Probekörpern (sofern vorhanden) gegenübergestellt.

Die Hauptziele der nächsten zwei Kapitel sind:

- Modellbildung des Probekörpers mittels eines einfachen Strukturmodells,
 - elastische Traganalyse des Probekörpermodells,
 - Untersuchung des Versagensverhaltens des Probekörpers und
 - Gegenüberstellung von Modellberechnung und gemessenen Versuchsdaten.
-

14

Untersuchung des elastischen Trag- verhaltens des Probekörpers

14.1 Einleitung und Kapitelaufbau

Ziel der nachfolgenden Untersuchung ist eine systematische Analyse des elastischen Probekörpertragverhaltens mittels eines einfachen Strukturmodells. Von besonderem Interesse ist dabei der Zusammenhang zwischen den am Probekörpertrand aufgebrachten Verformungen und Kräften, die einer Messung direkt zugänglich sind, und den sich ergebenden Spannungen und Verzerrungen in der Mittelscheibe. In der Mittelscheibe soll durch die aufgebrachten Randverformungen bzw. Randkräfte ein ebener Spannungszustand erzeugt werden. Die Faserneigung α des Holzes wird dabei variiert.

Da die Untersuchung auf linear-elastisches Materialverhalten und kleine Verformungen beschränkt ist, sind alle sich ergebenden Zusammenhänge linear, z.B. zwischen den aufgebrachten Randverformungen und den Verzerrungen in der Mittelscheibe oder den Randkräften und den Spannungen in der Mittelscheibe. Einen wesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten der untersuchten Struktur haben die Faserneigung und das verwendete linear-elastische orthotrope Materialmodell mit den markanten Steifigkeitsunterschieden in Faserrichtung und quer dazu.

Kurz zusammengefasst lauten die Ziele dieses Abschnitts:

- die Strukturanalyse des sich per definitionem stets linear-elastisch verhaltenden Probekörpers mittels einfacher Strukturmodelle
- die Darstellung der berechneten Lösungen als analytische Funktionen der systembestimmenden Materialsteifigkeitsverhältnisse und geometrischen Abmessungsrelationen
- der Vergleich des berechneten elastischen Last-Verformungsverhaltens mit den Versuchsergebnissen.

14.1.1 Inhalt von Kapitel 14

14.2 Allgemeine Modellbildung: Bezeichnungen, Vereinfachungen & Aufgabenstellung

14.3 Mittelscheibenelement

14.4 Lasteinleitungselement

14.5 Systemzusammenbau - Konnektivität

14.6 Zusammenwirken von Mittelscheibe und Lasteinleitungselementen

14.7 Vergleich mit den Versuchsergebnissen

14.8 Zusammenfassung & Resümee

14.2 Allgemeine Modellbildung: Bezeichnungen, Vereinfachungen & Aufgabenstellung

Die allgemeine Modellbildung betrifft die Randverformungsmöglichkeiten (= Verschiebungsrandbedingungen), die vorgegebene Belastungssituation (= Krastrandbedingungen), die benötigten linear-elastischen Materialparameter und die geometrischen Abmessungen, kurz, alle zur Strukturberechnung benötigten An- und Vorgaben. Die dabei eingeführten Modellannahmen und Vereinfachungen werden in diesem Kapitel angegeben. Darauf basierend werden einfache Strukturmodelle entwickelt. Die in Kap. 13 benutzten Bezeichnungen werden nur teilweise übernommen.

Der Probekörper (Bild 14.1) ist aus fünf Bestandteilen aufgebaut: dem zentralen Scheibenelement (rot, Index m) und den vier Lasteinleitungselementen, wobei die Faserneigung in den Bereichen 1 und 3 (grün) und den 2 und 4 (blau) bezogen auf ein lokales Koordinatensystem unterschiedlich ist.

14.2.1 Randverformungsgrößen

Durch die in Kap. 13.3.2.1 angegebenen Einschränkungen können sich die drei Bolzen je Probenkörperseite nicht unabhängig voneinander verschieben. Die randparallelen Verschiebungskomponenten der drei Bohrungen sind gleich und die Verschiebungen normal zum Probenrand verlaufen linear. Aus diesem Grund lassen sich die drei Lasteinleitungspunkte durch einen starren Querriegel bzw. eine starre Klammer verbunden vorstellen. In Bild 14.1 sind diese starren Verbindungselemente eingezeichnet.

14.2.1.1 Randverformungsgrößen des Probekörpers

Die vorgegebenen Randverformungen des Probekörpers lassen sich statt durch zwölf unabhängige Verschiebungen durch zwei Verschiebungen und eine Verdrehung je Probenrand beschreiben:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (14-1)$$

Zu beachten ist, dass die Bezeichnung der Verschiebungen in Bild 14.1 von der in Bild 13.4 verwendeten Bezeichnungen von Eberhardsteiner abweicht. Bei Beachtung der Symmetrie- bzw. Antimetriebedingung der Randverschiebungssteuerung ergeben sich die Zusammenhänge:

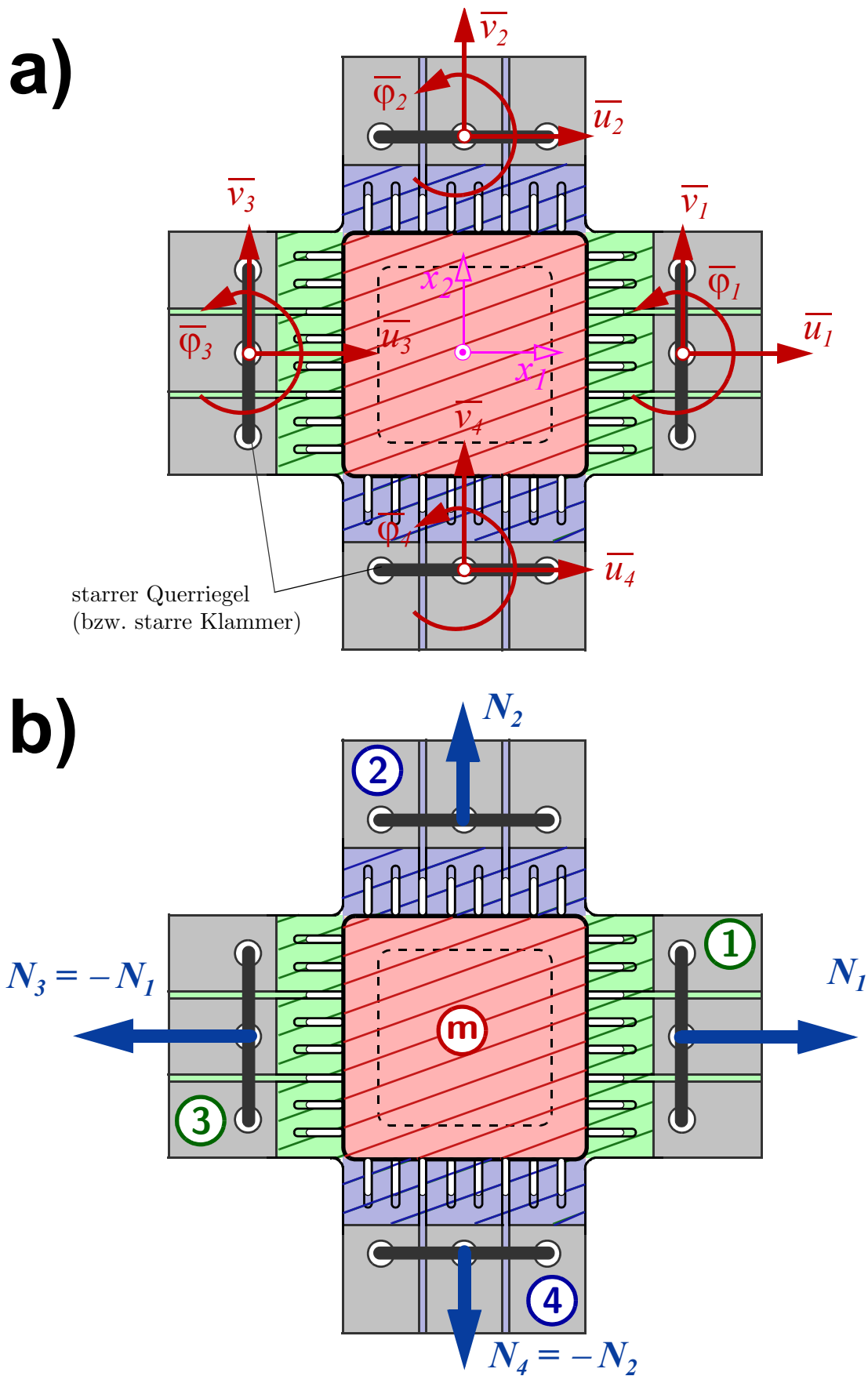


Bild 14.1 a) Randverformungsgrößen des Holzprobekörpers; b) Randkräfte bei biaxialer Beanspruchung

$$\bar{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \quad \bar{\mathbf{u}}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (14-2)$$

Die horizontale Verschiebungskomponente am linken und am rechten Rand bzw. die vertikale Verschiebungskomponente am oberen und unteren Rand sind:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 = -\bar{u}_3 \quad \bar{v} = \bar{v}_2 = -\bar{v}_4 \quad (14-3)$$

14.2.2 Randbelastung

Am Probekörper greifen nur Kräfte normal zum Rand an (Bild 14.1). Durch die zuvor eingeführte Modellvorstellung eines starren Querriegels muss pro Rand nur eine einzige Kraft N_i in der Mitte des Querriegels angebracht werden (Anmerkung: die Kräfte werden mit N_i bezeichnet, um eine Verwechslung mit Versagensbedingungen F_i auszuschließen). Über den Querriegel wird diese Kraft auf die drei Bolzen aufgeteilt und über den Lochleibungsdruck in den Bohrungen in den Holzprobekörper eingeleitet. Es werden dieselben Indizes wie bei den Verschiebungen gewählt. Aus Gleichgewichtsgründen sind die am gegenüberliegenden Probenrand angreifenden Kräfte entgegengesetzt gerichtet und dem Betrag nach gleich groß. Damit wird bei dieser Belastung auch die antimetrische Randverformungssituation erzeugt. Momente und Kräfte parallel zum Rand sind null.

14.2.3 Modell der Probekörpergeometrie

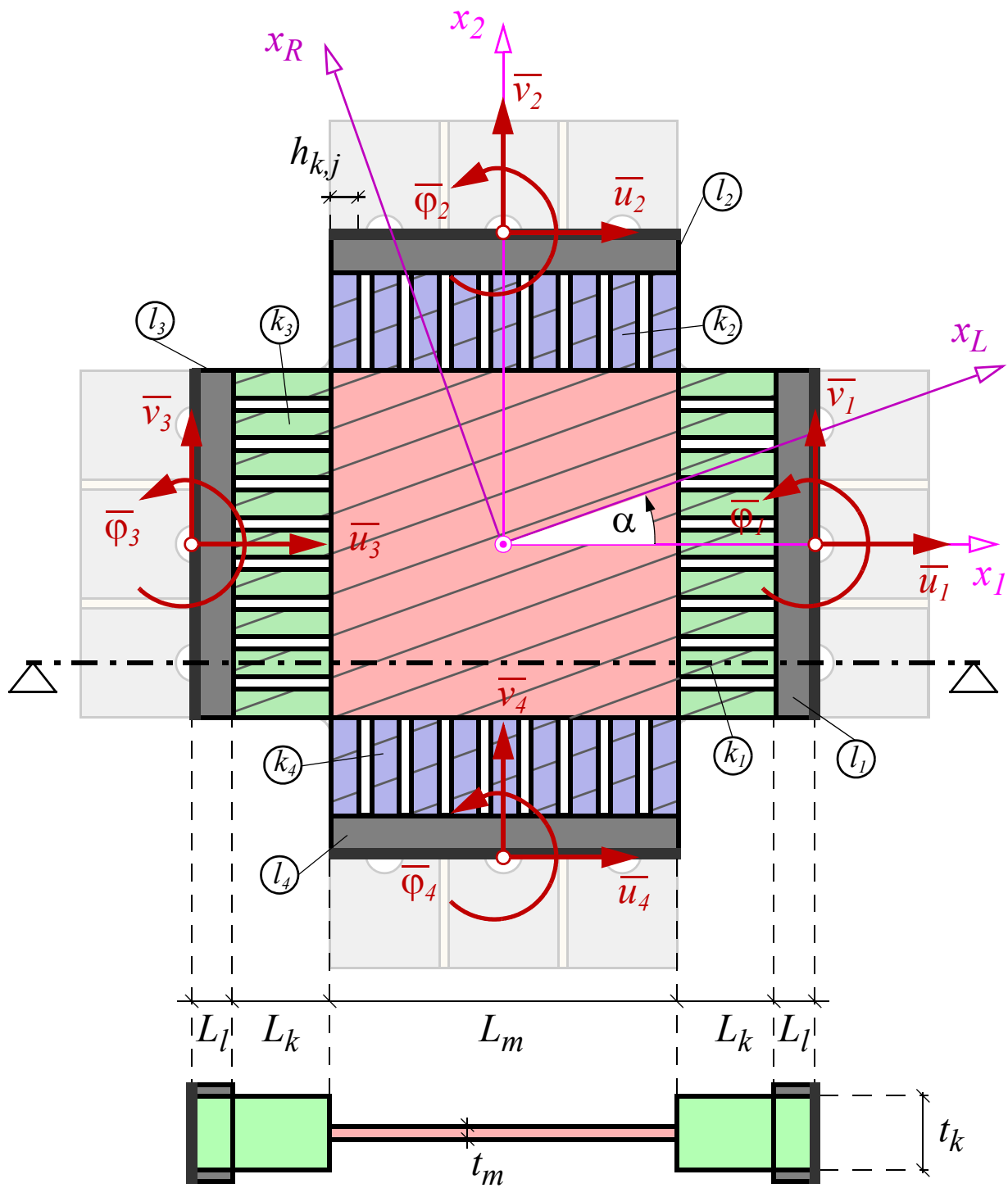
Das Modell des Probekörpers (Bild 14.2) besteht aus dem zentralen quadratischen Mittelscheibenelement und den vier seitlichen Lasteinleitungselementen. Die Lasteinleitungselemente teilen sich wiederum in zwei Teilbereiche: den geschlitzten Bereich, der an das Mittelfeld anschließt und den mit den Stahlplättchen verstärkten Bereich.

14.2.3.1 Mittelscheibenelement

Alle auf das Mittelfeld bezogenen Größen werden zusätzlich mit dem Index m gekennzeichnet. Das Mittelfeld wird als quadratische Scheibe mit der Seitenabmessung $L_m = h_m$ modelliert, wobei der allmähliche Übergang von der Scheibendicke t_m auf die Dicke t_k des Lasteinleitungsbereichs vernachlässigt wird. Die Abmessungen des Probekörpers sind aus Bild 13.2 übernommen und in Bild 14.2 eingetragen. Da die Dicke t_m des Mittelfeldes im Verhältnis zur Randdicke t_k variiert, wird der dimensionslose Parameter

$$\eta = \frac{t_m}{t_k} \quad \eta_A = \frac{4,5}{20} = 0,225 \quad \eta_B = \frac{7,5}{20} = 0,375 \quad \eta_C = \frac{9,5}{20} = 0,475 \quad (14-4)$$

eingeführt.



$$\nu_T = 0.1$$

$$E_R/E_L = 1/20$$

$$G_{LR}/E_L = 1/20$$

$$L_m = h_m = 140, t_m = 4.5/7.5/9.5$$

$$L_k = 38, h_k = 108 = 9h_{k,j}, t_k = 20$$

$$L_l = 17, L_0 = 48, L = 125 \text{ [mm]}$$

Bild 14.2 Modell des Probekörpers mit dem Mittelscheibenelement (rot, Index m , Dicke t_m) und den Lasteinleitungselementen, bestehend aus einer kammartigen Stabreihe (Index k ; k für „kammartig“ oder „Kolonnade“) und vier starren Randbereichselementen (Index l)

14.2.3.2 Lasteinleitungselemente

Die geschlitzten oder kammartigen Lasteinleitungsbereiche werden abgekürzt mit k_1 bis k_4 bezeichnet und als Stabreihen modelliert, die jeweils aus neun äquidistant angeordneten Einzelstabelementen bestehen; k steht dabei für „kammartig“ oder „Kolonnade“ aufgrund der säulenartigen Anordnung der neun Einzelstäbe. Jeder Stab hat die Länge L_k , die Querschnittsbreite $h_{k,j}$ und die Querschnittshöhe t_k . Wichtig ist, dass sich die Faserneigung α des Mittelfeldes in den Lasteinleitungselementen fortsetzt. Die Schlitzlänge wird aus Einfachheitsgründen bis zu den Stahlplättchen durchgezogen. Die mit den Stahlplatten verstärkten Bereiche (l_1 bis l_4) werden aufgrund der zu den Holzbauteilen relativ hohen Steifigkeit der Stahlplatten (der E-Modul von Stahl ist ca. 14 mal größer als der von Holz parallel zur Faserrichtung) und der Vorgabe der Verschiebungen in den Lasteinleitungspunkten als starre Querriegel modelliert. Die 4 mm breite Einschlitzung des Probekörpers zwischen den Stahlplättchen auf die Restdicke t_m (im Querschnitt in Bild 13.2 zu sehen) wird zunächst vernachlässigt. Der mit den Stahlplättchen verstärkte Bereich um die Lasteinleitungspunkte wird nur bis zur Mitte der Bohrungen betrachtet. Der Bereich über die Bohrungsmitte hinausgehend - in Bild 14.2 hell gezeichnet - wird im Modell nicht berücksichtigt.

14.2.4 Linear-elastische Materialkenngrößen

Die Untersuchung ist auf linear-elastisches Materialverhalten beschränkt, wobei die für Fichtenholz charakteristischen Materialsteifigkeitsverhältnisse in Bild 14.2 angeführt sind.

14.2.5 Aufgabenstellung

Für die angegebene Belastungssituation mit den festgelegten Materialkenngrößen und den gegebenen Probekörperabmessungen sind einfache Strukturmodelle zu erstellen, um die Verformungen im Inneren und am Rand der Struktur und die Kräfte bzw. den Kraftfluss innerhalb des Probekörpers bei veränderlicher Faserneigung α zu berechnen. Von besonderem Interesse sind:

- der Zusammenhang zwischen den Randverformungen \bar{u} und \bar{v} und den Verzerrungen in der Mittelscheibe des Probekörpers und
- der Zusammenhang zwischen den Randkräften N_1 und N_2 und den Spannungen in der Mittelscheibe des Probekörpers. Die Schubspannung $S_{12,m}$ muss null sein.

Diese Beziehungen sollen in Form von Übertragungsmatrizen dargestellt werden.

Die in Kap. 12.4 und Kap. 12.5 durchgeführten allgemeinen Voruntersuchungen zum elastischen Tragverhalten von Holz bei einaxialer Beanspruchung bzw. Beanspruchung in einer Ebene schräg zur Faserrichtung liefern die Grundlagen für die nachfolgende Untersuchung.

14.3 Mittelscheibenelement

14.3.1 Kinematik und Elementfreiheitsgrade

Es wird festgelegt, dass die Kanten der Mittelscheibe auch im verformten Zustand stets gerade bleiben. Der Verschiebungsverlauf des Elements lässt sich durch einen bi-linearen Verformungsansatz mit acht unabhängigen Verformungsgrößen beschreiben. Der Mittelscheibenrand verformt sich stets parallelogrammförmig. Damit sind die quadratischen Terme in den Koordinaten x_1 und x_2 aus dem bi-linearen Verformungsansatz ausgeschlossen und es verbleiben nur mehr sechs unabhängigen Verformungsgrößen. Der Verformungsverlauf ist linear und die Verzerrungen innerhalb der Mittelscheibe sind konstant.

14.3.1.1 Verschiebungen

Zur Beschreibung des linearen Verschiebungsverlaufs in der Scheibenebene werden die drei Verzerrungen $E_{11,m}$, $E_{22,m}$ und $\gamma_{12,m}$, sowie die den Starrkörperdrehwinkel Ω_m um die x_3 -Achse (die positive Drehrichtung von Ω_m dreht in der Scheibenebene gegen den Uhrzeigersinn) gewählt:

$$\begin{bmatrix} u(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_2/2 & -x_2 \\ 0 & x_2 & x_1/2 & x_1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \\ \gamma_{12,m} \\ \Omega_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_m} \quad (14-5)$$

Die von den sechs Verformungsfreiheitsgraden hervorgerufenen Verschiebungsmuster des Mittelscheibenelementes sind in Bild 14.3 dargestellt. Zuzufolge der Symmetriebedingungen und der vorgegebenen Randverschiebungen ist der Mittelpunkt der Scheibe bei $x_1 = x_2 = 0$ fixiert und die beiden Starrkörperverschiebungskomponenten $u_0 = v_0$ sind null.

14.3.1.2 Randverformungsgrößen der Mittelscheibe

Für den Zusammenbau des Systems und die Anbindung der Mittelscheibe an die Lastenleitungselemente werden an den Mittelpunkten der vier Mittelscheibenkanten die zwei Verschiebungen $u_{i,m}$ und $v_{i,m}$, die Verdrehung $\phi_{i,m}$ und Kantenverlängerung $s_{i,m}$ benötigt. Mit Gleichung (14-5) lassen sich für jede Kante diese vier Größen abhängig von den vier Elementfreiheitsgrade \mathbf{u}_m berechnen.

Für die Kanten 1 und 2 ergibt sich:

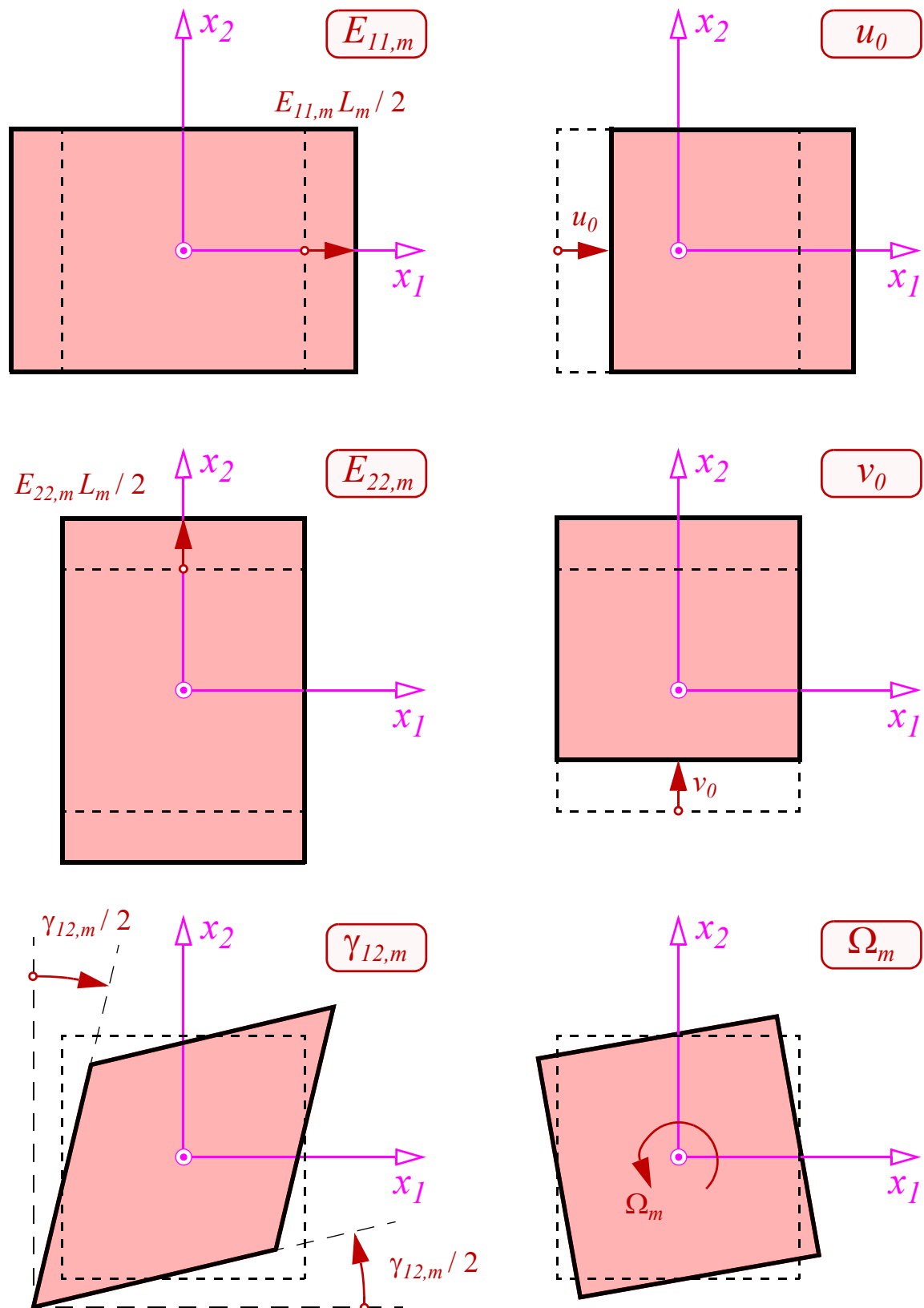


Bild 14.3 Verformungsmuster des Mittelscheibenelementes zufolge der Verformungsfreiheitsgrade \mathbf{u}_m und der beiden Starrkörperverschiebungen u_0 und v_0 ; der Verlauf der Verschiebungen im Element sind linear und die Verzerrungen konstant

$$\mathbf{u}_{m,1} = \begin{bmatrix} u_{1,m} \\ v_{1,m} \\ \varphi_{1,m} \\ s_{1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_m/4 & L_m/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & L_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_m \quad (14-6)$$

$$\mathbf{u}_{m,2} = \begin{bmatrix} u_{2,m} \\ v_{2,m} \\ \varphi_{2,m} \\ s_{2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_m/4 & -L_m/2 \\ 0 & L_m/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ L_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_m$$

Aufgrund der Symmetriebedingung sind bei den Seitenkanten mit den Indizes 3 und 4 die Vorzeichen der Verschiebungen in Gleichung (14-6) zu ändern. Die Verdrehung $\varphi_{i,m}$ und die Kantenverlängerungen $s_{i,m}$ von Kante 1 und 3 bzw. 2 und 4 sind gleich. Wird Ω_m null gesetzt, ist die Starrkörperrotation der Mittelscheibe unterbunden und alle vier Kantenverdrehungen haben denselben Betrag.

14.3.2 Steifigkeit & Spannungen

Gesucht wird die Beziehung zwischen den Normalverzerrungen $E_{11,m}$ und $E_{22,m}$ und den Scheibennormalspannungen $S_{11,m}$ und $S_{22,m}$ und die begleitende Schubverzerrung $\gamma_{12,m}$ bei der vorgegebenen Spannungsnullbedingung $S_{12,m} = 0$ (biaxialer Spannungszustand) sowie die Verschiebungen und Verdrehungen an den vier Mittelpunkten der Scheibenränder.

Die angegebene Belastung der mittleren Scheibe des Versuchskörpers entspricht genau der Belastungssituation 2 aus Kap. 12.5.2.3. Mit der Steifigkeitsmatrix (12-29) ergeben sich die Normalspannungen zu:

$$\begin{bmatrix} S_{11,m} \\ S_{22,m} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{BiSZ} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} \quad (14-7)$$

Die resultierenden Normalkräfte in der Mittelscheibe sind:

$$\begin{bmatrix} N_{1,m} \\ N_{2,m} \end{bmatrix} = L_m t_m \begin{bmatrix} S_{11,m} \\ S_{22,m} \end{bmatrix} \quad (14-8)$$

Mit Gleichung (12-30) wird die begleitende Schubverzerrung bestimmt:

$$\gamma_{12,m} = \begin{bmatrix} H_{BiSZ} & H_{BiSZ}^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} \quad (14-9)$$

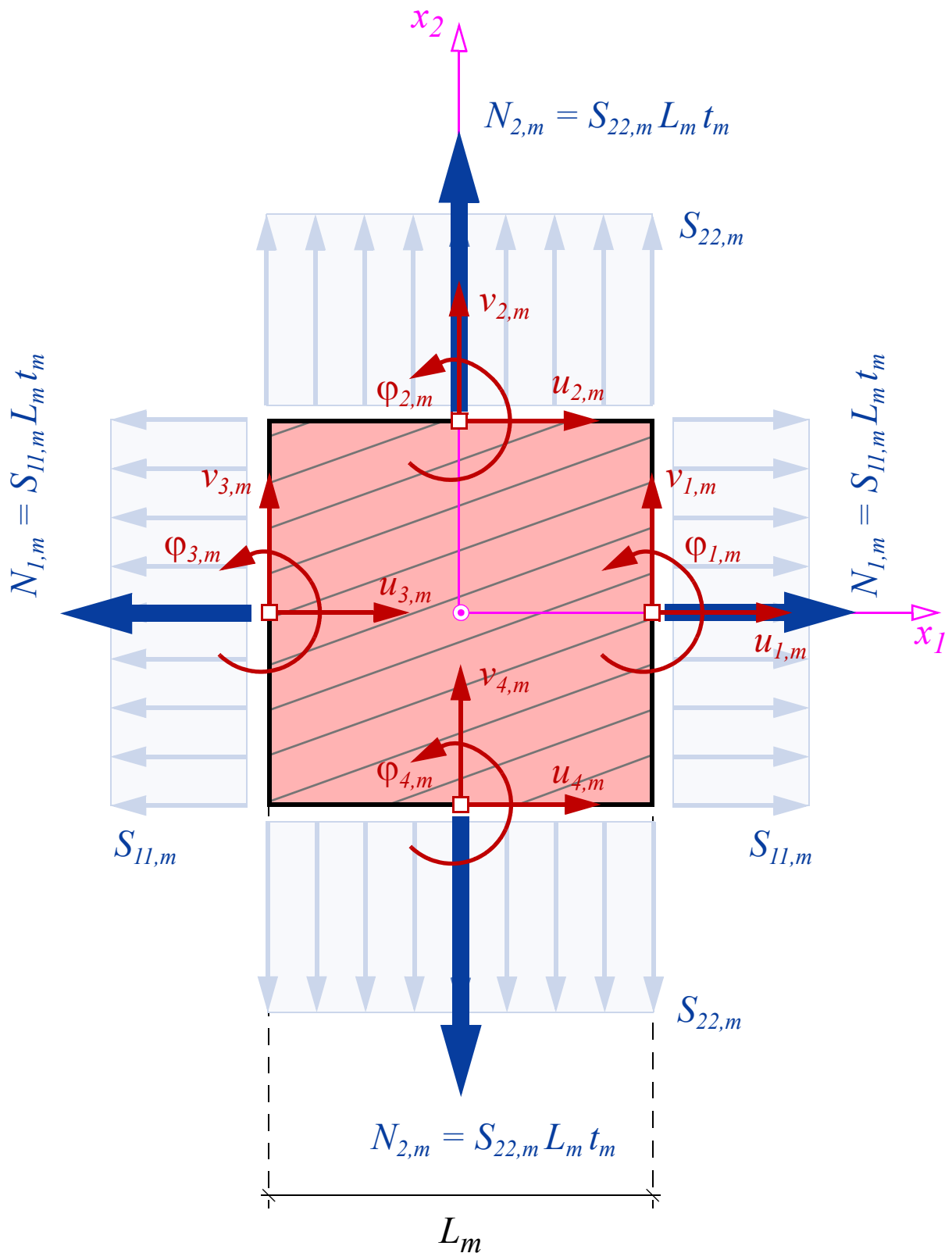


Bild 14.4 Mittelscheibenelement mit den diskreten Verschiebungen und Verdrehungen an den vier Kantenmittelpunkten; der Messbereich ist biaxial beansprucht und die Schubspannung $S_{12,m}$ ist null

14.4 Lasteinleitungselement

Aufgrund der äußeren Beanspruchung wirken in den Lasteinleitungselementen die Normalkräfte N_j .

14.4.1 Modell I des Lasteinleitungsbereichs

In Bild 14.5 ist das Modell des Lasteinleitungsbereichs dargestellt. Das System ist mit einem lokalen $\{x_{1,i}, x_{2,i}\}$ -Koordinatensystem versehen. Es wird angenommen, dass die neun Einzelstäbe jeder Stabreihe mit der Stablänge L_k an beiden Enden gewissen Verformungseinschränkungen unterworfen sind. Die Stäbe sind mit dem Index j gekennzeichnet.

14.4.1.1 Elementrand A

Der an das Mittelfeld anschließende Rand bei $x_{1,i} = 0$ wird mit A (= Anfang) bezeichnet. Die Verformungsmöglichkeiten am Elementanfang sind die beiden Verschiebungen $u_{A,i}$ und $v_{A,i}$ und die Verdrehung $\varphi_{A,i}$. Zusätzlich zu diesen drei Starrkörperverformungen am Rand A wird eine parallel zum Rand und linear verlaufende Verformung (Bild 14.5)

$$v_{s,A} = s_{A,i} \frac{x_{2,i}}{L_m} \quad (14-10)$$

angenommen, deren Größe durch die sogenannte Spreizverformungsamplitude $s_{A,i}$ gesteuert wird. Durch die lineare Verlängerung $s_{i,m}$ der Mittelscheibenkanten und bei Kompatibilität mit den Lasteinleitungselementen ($s_{A,i} = s_{i,m}$) werden die neun Einzelstäbe am Rand A auseinandergezogen. Da die Stabendknotenpunkte am anderen Ende klammerartig zusammengefasst sind, verursacht diese Aufspreizung des Stabreihenansangs an der Anbindekante zum Mittelfeld Biegeverformungen in den Einzelstäben. Je größer der Abstand der Einzelstäbe von der Scheibenmitte ist, umso größer ist die auftretende Einzelstabbiegung. Diese Spreizverformung ist in Bild 14.8 dargestellt.

14.4.1.2 Elementrand E

Der Lasteinleitungsbereich mit den aufgeklebten Stahllaschen soll unverformbar sein. Bei der Verbindung der drei Bolzen am Rand E bei $x_{1,i} = L_k + L_l$ wird ein starrer Querriegel mit den drei Verformungsfreiheitsgraden $u_{E,i}$, $v_{E,i}$ und $\varphi_{E,i}$ angenommen (Bild 14.1).

14.4.1.3 Modellierung des stahlplattenverstärkten Bereichs

Der Probekörper ist nach jedem dritten Einzelstab der Stabreihe und zwischen den drei Bohrungen mit der Stahlplattenverstärkung von der Dicke t_k auf die Mittelfeldstärke t_m eingeschlitzt. Um diese Schlitzte zu berücksichtigen, werden bei $x_{1,i} = L_k$, jeweils drei Einzeltabelemente durch eine starre Endplatte miteinander verbunden. Die drei starren Endplatten jeder Dreierstabgruppe haben jeweils einen eigenen horizontalen und vertikalen

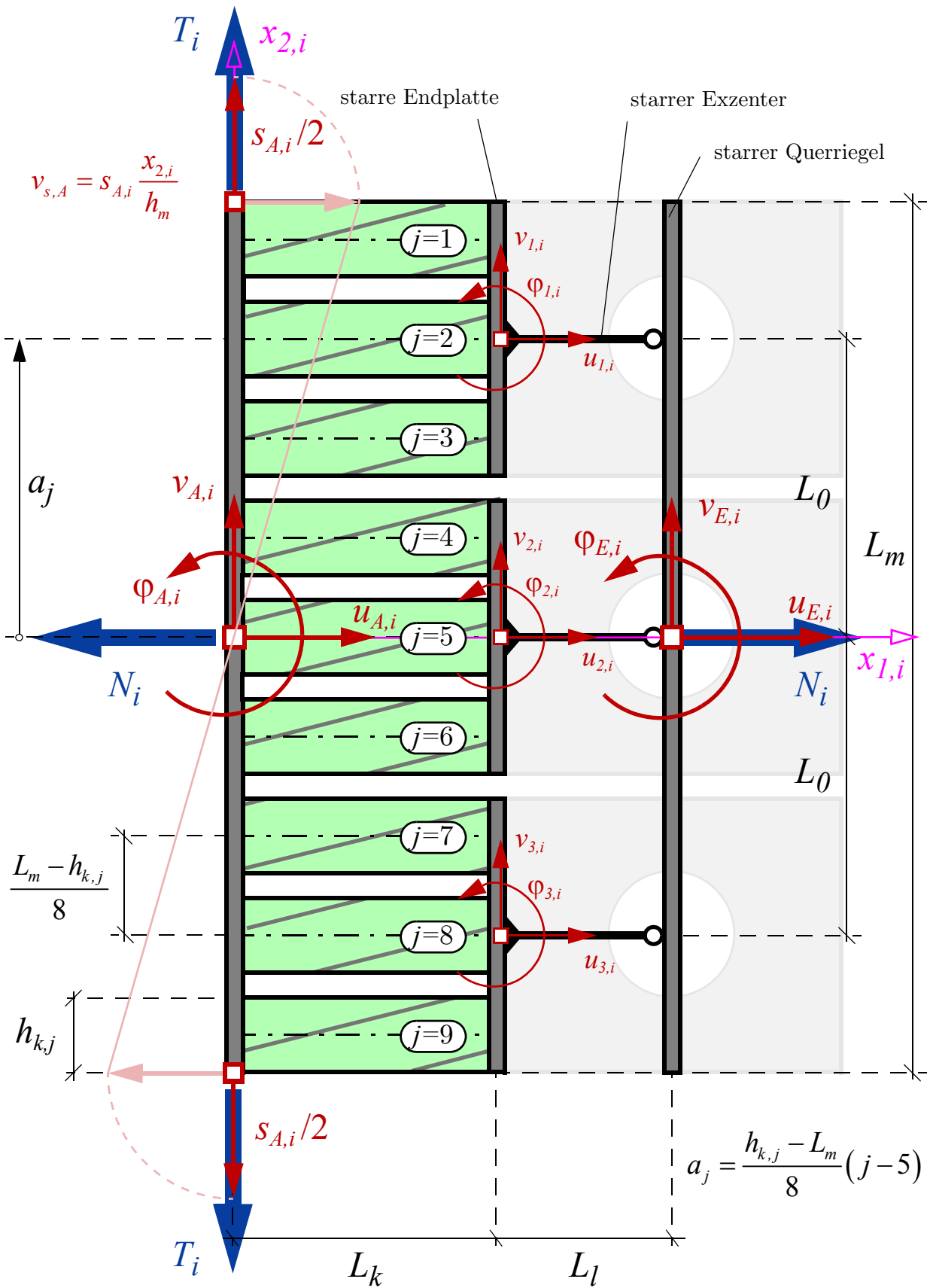


Bild 14.5 Modell I der Lasteinleitungsbereichs

len Verschiebungsfreiheitsgrad und einen Verdrehungsfreiheitsgrad (z.B. $u_{l,i}$, $v_{l,i}$ und $\varphi_{l,i}$). Die an die Stabreihe anschließenden drei Bereiche mit den aufgeklebten Stahlplättchen und jeweils einer Bohrungen werden durch drei starre Exzenterstäbe mit der Länge L_l modelliert. Diese drei starren Stäbe sind am Rand E ($x_{l,i} = L_k + L_l$) des Lasteinleitungselements gelenkig an den starren Querriegel, der die drei Lasteinleitungspunkte verbindet, angeschlossen.

14.4.1.4 Systemfreiheitsgrade

Das Element hat zehn unabhängige Freiheitsgrade, die in den dimensionsgleichen Matrizen zusammengefasst sind:

$$\mathbf{u}_{A,i}^* = \begin{bmatrix} u_{A,i} \\ v_{A,i} \\ \varphi_{A,i} L_k \\ s_{A,i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{E,i}^* = \begin{bmatrix} u_{E,i} \\ v_{E,i} \\ \varphi_{E,i} L_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{M,i}^* = \begin{bmatrix} \varphi_{1,i} L_k \\ \varphi_{2,i} L_k \\ \varphi_{3,i} L_k \end{bmatrix} \quad (14-11)$$

Die drei „inneren“ Drehfreiheitsgrade $\varphi_{1,i}$, $\varphi_{2,i}$ und $\varphi_{3,i}$ werden in der Matrix $\mathbf{u}_{M,i}^*$ mitgeführt. Die sieben äußeren Freiheitsgrade werden in der Matrix $\mathbf{u}_i^* = [\mathbf{u}_{A,i}^*, \mathbf{u}_{E,i}^*]$ zusammengefasst.

14.4.2 Elementsteifigkeitsmatrix

14.4.2.1 Steifigkeitsmatrix des Einzelstabes

Jeder Einzelstab mit dem Index j in Bild 14.5 hat sechs Freiheitsgrade \mathbf{u}_j^* . Der Einzelstab mit der Steifigkeitsbeziehung

$$\mathbf{K}_j^* \mathbf{u}_j^* = \mathbf{F}_j^* \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_j^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{A,j}^* \\ \mathbf{u}_{E,j}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{A,j} \\ v_{A,j} \\ \varphi_{A,j} L_k \\ u_{E,j} \\ v_{E,j} \\ \varphi_{E,j} L_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^* = \begin{bmatrix} F_{x,A,j} \\ F_{y,A,j} \\ F_{M,A,j} / L_k \\ F_{x,E,j} \\ F_{y,E,j} \\ F_{M,E,j} / L_k \end{bmatrix} \quad (14-12)$$

und den zugehörigen Knotenfreiheitsgraden ist in Bild 14.6 dargestellt. Zu beachten ist, dass das Einzelstabende - die Verformungsgrößen sind in Gleichung (14-12) auch mit E indiziert - bei Einbau in die Lasteinleitungsstruktur nicht am Rand E bei $x_{l,i} = L_k + L_l$ liegt, sondern die Stabreihe bei $x_{l,i} = L_k$ endet und die Stäbe an die dort als starr angenommene Endplatte befestigt sind. Der analytisch exakte Steifigkeitszusammenhang des Stabes ist in Anhang H hergeleitet. Die Steifigkeitsmatrizen aller neun Stäbe einer Stabreihe sind gleich. Die benötigten Materialsteifigkeitsgrößen

$$E_\alpha = C_{BSZ,11} \quad C_\alpha = C_{BSZ,12} \quad G_\alpha = C_{BSZ,22} \quad (14-13)$$

ergeben sich aus der Reduktion der orthotropen Materialsteifigkeitsmatrix auf den Balkenspannungszustand (Kap. 12.5.2.4).

Vorsicht: der Winkel α in den Steifigkeitstermen E_α , G_α und C_α wird relativ zur $x_{L,i}$ -Achse angegeben. Bei den gewählten Materialsteifigkeitswerten (Bild 14.2) ist der E-Modul E_α des Stabes bei der Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ mit $E_\alpha = E_L$ um den Faktor 20 größer als bei $\alpha = 90^\circ$ mit $E_\alpha = E_R$.

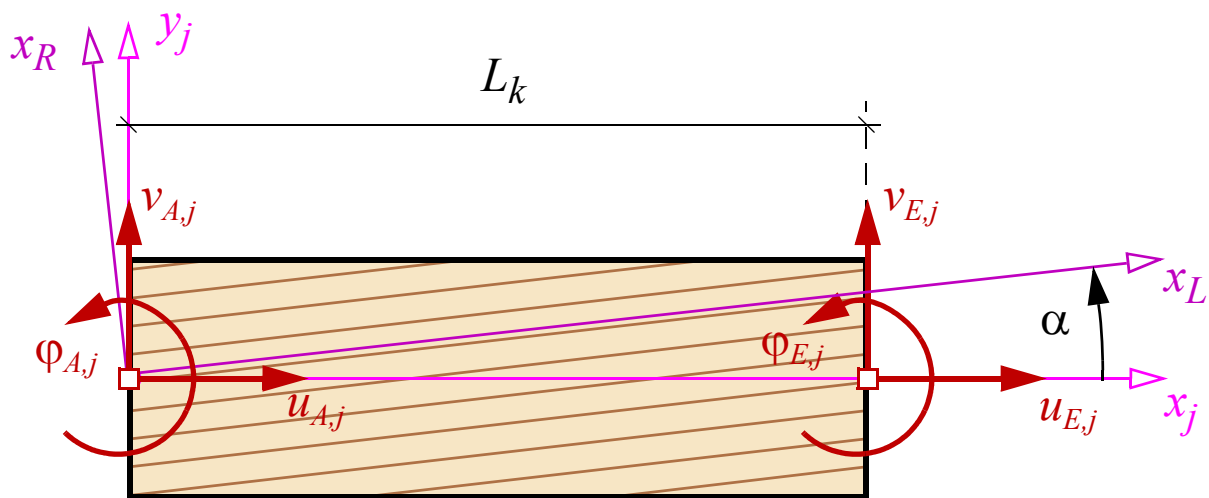


Bild 14.6 Schubweicher Stab j mit Rechteckquerschnitt: die Stabachse ($= x_j$ - Achse) geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Die Materialhauptachsen verlaufen schräg dazu

14.4.2.2 Kinematische Zusammenhänge zwischen Einzelstab- und Systemfreiheitsgraden

Gesucht ist der geometrische Zusammenhang zwischen den zehn Systemfreiheitsgraden aus Gleichung (14-11) und den je sechs Freiheitsgraden der neun Einzelstabelemente. Der Abstand der Stabachse des Stabes j von der $x_{L,i}$ - Achse ist:

$$a_j = \frac{h_{k,j} - L_m}{8} (j - 5) \quad (14-14)$$

Der Zusammenhang zwischen den vier Systemfreiheitsgraden $\mathbf{u}_{A,i}^*$ am Rand A aus Gleichung (14-11) und den Einzelstabfreiheitsgraden $\mathbf{u}_{A,j}^*$ des Stabes j wird durch die Matrix

$$\mathbf{T}_{A,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_j/L_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_j/L_m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14-15)$$

hergestellt. Um die Matrixbeziehung

$$\mathbf{u}_{E,j}^* = \begin{bmatrix} u_{E,j} \\ v_{E,j} \\ \varphi_{E,j} L_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{E,j} & \mathbf{T}_{M,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix} \quad (14-16)$$

zu erhalten, muss zwischen den drei Stabbündeln mit den Einzelstabindizes $j = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$ und $j = 7, 8, 9$ unterschieden werden:

$j = 1, 2, 3$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{E,j} & \mathbf{T}_{M,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_0/L_k & -(a_j - L_0)/L_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_l/L_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$j = 4, 5, 6$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{E,j} & \mathbf{T}_{M,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a_j/L_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -L_l/L_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14-17)$$

$j = 7, 8, 9$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{E,j} & \mathbf{T}_{M,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_0/L_k & 0 & 0 & -(a_j + L_0)/L_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -L_l/L_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Beziehung zwischen den sechs Einzelstabfreiheitsgraden \mathbf{u}_j^* und den zehn Systemfreiheitsgraden lautet:

$$\mathbf{u}_j^* = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A,j} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{T}_{E,j} & \mathbf{T}_{M,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{A,i}^* \\ \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix} = \mathbf{T}_j \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{A,i}^* \\ \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix} \quad (14-18)$$

14.4.2.3 Steifigkeitsmatrix des Lasteinleitungselements

Aus den neun Einzelstabsteifigkeitsmatrizen (14-12) und den kinematischen Zusammenhängen aus Gleichung (14-18) ergibt sich durch Summation der inneren Arbeit

$$\delta W_{int,sys,i} = \sum_{j=1}^9 \delta W_{int,j} = - \sum_{j=1}^9 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_{A,i}^* \\ \delta \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \delta \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix}^T \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_j^* \mathbf{T}_j \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{A,i}^* \\ \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix} \quad (14-19)$$

die Steifigkeitsmatrix des Lasteinleitungselements

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA,i}^* & \mathbf{K}_{AE,i}^* & \mathbf{K}_{AM,i}^* \\ \mathbf{K}_{EA,i}^* & \mathbf{K}_{EE,i}^* & \mathbf{K}_{EM,i}^* \\ \mathbf{K}_{MA,i}^* & \mathbf{K}_{ME,i}^* & \mathbf{K}_{MM,i}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{A,i}^* \\ \mathbf{u}_{E,i}^* \\ \mathbf{u}_{M,i}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A,i}^* \\ \mathbf{F}_{E,i}^* \\ \mathbf{F}_{M,i}^* \end{bmatrix} \quad (14-20)$$

mit den Kraftgrößen

$$\mathbf{F}_{A,i}^* = \begin{bmatrix} F_{x,A,i} \\ F_{y,A,i} \\ F_{M,A,i}/L_k \\ F_{s,A,i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{E,i}^* = \begin{bmatrix} F_{x,E,i} \\ F_{y,E,i} \\ F_{M,E,i}/L_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{M,i}^* = \begin{bmatrix} F_{M,1,i}/L_k \\ F_{M,2,i}/L_k \\ F_{M,3,i}/L_k \end{bmatrix} \quad (14-21)$$

14.4.2.4 Statische Kondensation der Steifigkeitsmatrix

Da die drei Momente $F_{m,1,i}$, $F_{m,2,i}$ und $F_{m,3,i}$ stets null sind, werden diese und die zugehörigen inneren Drehfreiheitsgrade aus dem Gleichungssystem (14-20) kondensiert. Damit ergibt sich die gesuchte (7,7)-Steifigkeitsmatrix für die Randfreiheitsgrade \mathbf{u}_i^* zu:

$$\mathbf{K}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA,i}^* - \mathbf{K}_{AM,i}^* (\mathbf{K}_{MM,i}^*)^{-1} \mathbf{K}_{MA,i}^* & \mathbf{K}_{AE,i}^* - \mathbf{K}_{AM,i}^* (\mathbf{K}_{MM,i}^*)^{-1} \mathbf{K}_{ME,i}^* \\ \mathbf{K}_{EA,i}^* - \mathbf{K}_{EM,i}^* (\mathbf{K}_{MM,i}^*)^{-1} \mathbf{K}_{MA,i}^* & \mathbf{K}_{EE,i}^* - \mathbf{K}_{EM,i}^* (\mathbf{K}_{MM,i}^*)^{-1} \mathbf{K}_{ME,i}^* \end{bmatrix} \quad (14-22)$$

14.4.3 Modellvariante des Lasteinleitungsbereichs - Modell II

Bei Modell I sind die Einzelstäbe der Stabreihe am Rand A biegesteif angeschlossen. Besser modelliert wäre diese Anbindung der Einzelstäbe durch Zulassen einer individuellen Relativverdrehung jedes Stabanfangsquerschnitts zur Kante der Mittelscheibe. Die Verdrehung $\varphi_{A,j}$ des Anfangsquerschnitts der neun Einzelstäbe ist dabei von der Verdrehung $\varphi_{A,i} = \varphi_{i,m}$ der Anschlusskante unabhängig. Das entspricht einem gelenkigen Anschluss des Einzelstabes an die Anschlusskante (Modell II, Bild 14.7). Ein gelenkiger Anschluss ist wiederum zu weich. Am besten wird der Anschluss des Einzelstabes an die Mittelscheibe durch eine nachgiebige Drehverbindung erfasst. Hier wird die Berechnung der Federsteifigkeit nicht durchgeführt. Das Tragverhalten des Probekörpers sollte zwischen diesen beiden Grenzfällen (Modell I - *fixed*, Modell II - *pinned*) liegen.

Die Elementsteifigkeit berechnet sich analog zu Modell I, wobei die zusätzlichen inneren Drehfreiheitsgrade in den Gelenken zu berücksichtigen sind. Diese werden später aus der Steifigkeitsmatrix kondensiert und man erhält wiederum eine (7,7)-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_i^* .

14.4.4 Lastfall 1: Spreizung des Lasteinleitungselements

Gesucht wird der Zusammenhang:

$$F_{s,A,i} = T_i = K_{s,i} s_{A,i} \quad (14-23)$$

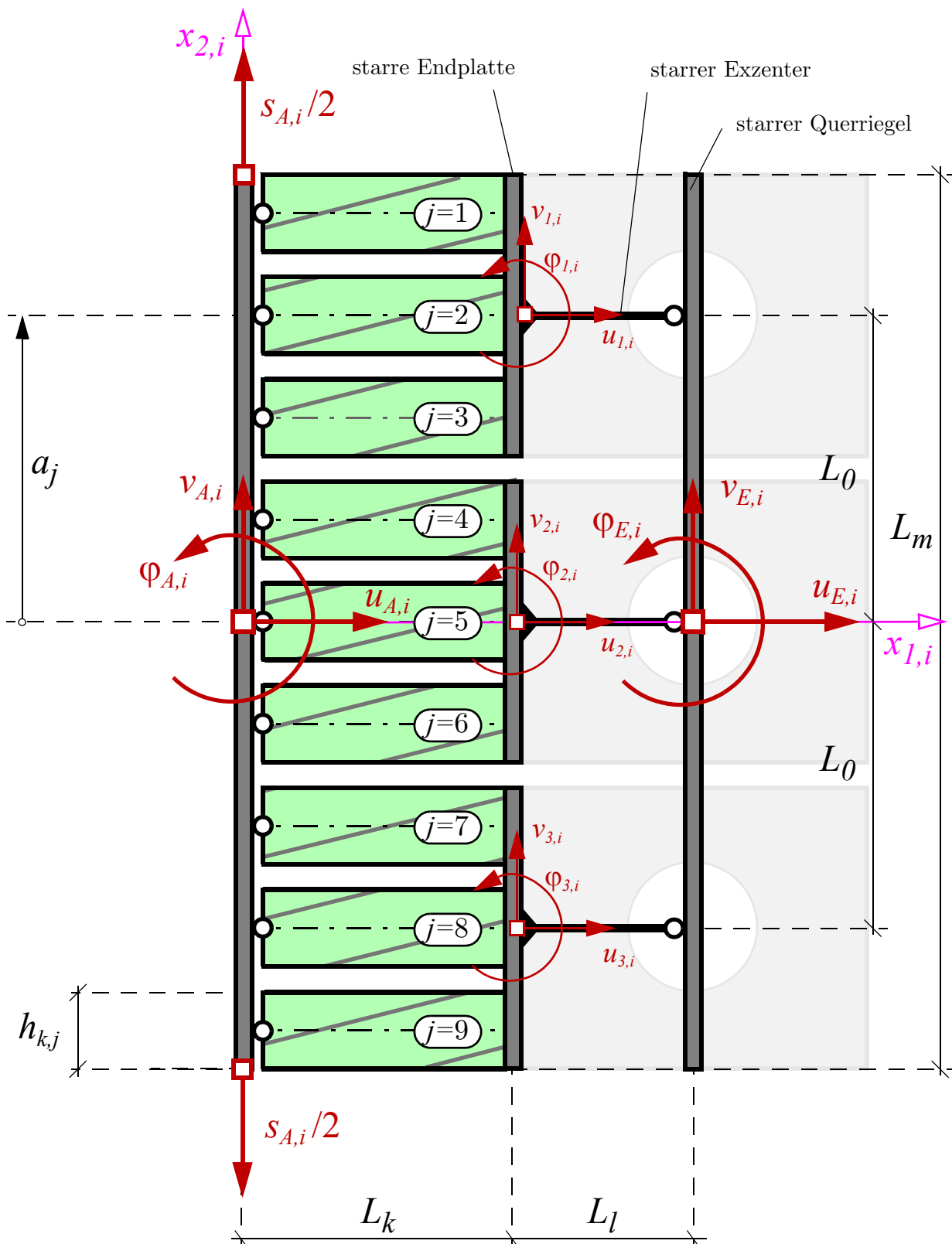


Bild 14.7 Modell II der Lasteinleitungsstruktur; das Modell baut auf Modell I auf, mit dem Unterschied, dass die Einzelstäbe der Stabreihe gelenkig (!) an die Verbindungsplatte (Rand A) an die Mittelscheibe angeschlossen sind und die Stabanfangsquerschnittsverdrehung $\varphi_{A,j}$ nicht der Elementverdrehung $\varphi_{A,i}$ entspricht

Die Steifigkeit $K_{s,i}$ wird als Spreizsteifigkeit bezeichnet. Die Spreizkräfte T_i sind in Bild 14.5 eingezeichnet.

14.4.4.1 Randbedingungen zur Berechnung der Spreizsteifigkeit

Um die Spreizsteifigkeit zu berechnen, werden am Rand A Verschiebungsrandbedingungen und am Rand E Krafrandbedingungen angesetzt:

$$\begin{array}{l} \text{Rand } A: \\ \mathbf{u}_{A,i}^* = \begin{bmatrix} u_{A,i} \\ v_{A,i} \\ \varphi_{A,i} L_k \\ s_{A,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{A,i} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Rand } E: \\ \mathbf{F}_{E,i}^* = \begin{bmatrix} F_{x,E,i} \\ F_{y,E,i} \\ F_{M,E,i}/L_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (14-24)$$

14.4.4.2 Statische Kondensation

Das Gleichungssystem lässt sich durch statische Kondensation reduzieren. Die einzige aktive Verformungsgröße ist die Spreizamplitude $s_{A,i}$. Die zugehörigen Filtermatrizen sind:

$$\mathbf{P}_a = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14-25)$$

Mit diesen Matrizen ergibt sich die Spreizsteifigkeit zu:

$$K_{s,i} = K_{aa,i} - \mathbf{K}_{ab,i} (\mathbf{K}_{bb,i})^{-1} \mathbf{K}_{ab,i}^T \quad \begin{array}{l} K_{aa,i} = \mathbf{P}_a \mathbf{K}_i^* \mathbf{P}_a^T \\ \mathbf{K}_{bb,i} = \mathbf{P}_b \mathbf{K}_i^* \mathbf{P}_b^T \\ \mathbf{K}_{ab,i} = \mathbf{P}_a \mathbf{K}_i^* \mathbf{P}_b^T \end{array} \quad (14-26)$$

Für die Randbereichselemente 1 bis 4 gelten die Definitionen:

$$K_{s,1} = K_{s,3} = K_s \quad K_{s,2} = K_{s,4} = K_s^\# \quad (14-27)$$

Weiters wird die Größe

$$C_s = \frac{K_s}{t_k} \quad (14-28)$$

eingeführt.

14.4.5 Lastfall 2: Normalkraftbeanspruchung der Lasteinleitungselemente

Das Lasteinleitungselement soll nur durch die Normalkraft N_i beansprucht werden. Gesucht ist die sich dabei ergebende axiale Streckung. Auch dieser Lastfall lässt sich analog zu Lastfall 1 durch statische Kondensation berechnen. Hier wird aber - aufgrund der einfachen Belastungssituation - ein direkter Lösungszugang gewählt.

14.4.5.1 Normalspannungen in den Stabreihen

Die von der Mittelscheibe auf die vier Lasteinleitungselemente (oder vice versa) zu übertragenden Kräfte sind die Normalkräfte N_i . Alle Stäbe ($j = 1, \dots, 9$) einer Stabreihe haben dieselben Normalspannungen:

$$S_{11,i} = \frac{N_i}{t_k h_k} \quad (14-29)$$

14.4.5.2 Normalverzerrung einer Stabreihe des Lasteinleitungselements

Da die Faserneigung auch in den Einzelstäben der Lasteinleitungselemente auftritt, beeinflusst diese die axiale Steifigkeit. Bei der Berechnung der Normalverzerrung $E_{11,i}$ muss zwischen den Elementen 1 (bzw. 3) und den Elementen 2 (bzw. 4) unterschieden werden. Zur Berechnung wird die einaxiale Steifigkeit C_{FSZ} des axial schräg zur Faserrichtung beanspruchten Fachwerkstabes aus Gleichung (12-18) verwendet:

$$E_{11,1} = \frac{1}{C_{FSZ}} \frac{N_1}{t_k h_k} \quad E_{11,2} = \frac{1}{C_{FSZ}^{\#}} \frac{N_2}{t_k h_k} \quad (14-30)$$

Aus dem Lastfall 1 (Spreizung) ergibt sich keine axiale Verlängerung des Lasteinleitungselements; eine axiale Verlängerung ergibt sich nur aus Lastfall 2. Durch Multiplikation der Verzerrungen $E_{11,i}$ mit der Stablänge L_k ergibt sich die gesuchte axiale Verlängerung.

14.5 Systemzusammenbau - Konnektivität

14.5.1 Anbindung der Lasteinleitungselemente an das Mittelscheibenelement

Der Elementanfang jedes Lasteinleitungselements mit den Freiheitsgraden $\mathbf{u}_{A,i}$ schließt an eine Kante des Mittelscheibenelements an. Für den Systemzusammenbau gilt:

$$\mathbf{u}_{A,1} = \mathbf{u}_{m,1} = \begin{bmatrix} L_m/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_m/4 & L_m/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & L_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \mathbf{T}_{A,1} \mathbf{u}_m \quad (14-31)$$

$$\mathbf{u}_{A,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{m,2} = \begin{bmatrix} 0 & L_m/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_m/4 & L_m/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ L_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \mathbf{T}_{A,2} \mathbf{u}_m$$

Aus der Symmetrie ergibt sich:

$$\mathbf{u}_{A,3} = \mathbf{T}_{A,1} \mathbf{u}_m \quad \mathbf{u}_{A,4} = \mathbf{T}_{A,2} \mathbf{u}_m \quad (14-32)$$

14.5.2 Zusammenhang Randverformungen und Elementfreiheitsgrade

Die Freiheitsgrade $\mathbf{u}_{E,i}$ der vier Lasteinleitungselemente entsprechen - mit etwaigen Vorzeichenunterschieden - den Randverformungsgrößen $\bar{\mathbf{u}}_i$ der Struktur aus Bild 14.2. Es gelten die Beziehungen:

$$\mathbf{u}_{E,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{E,1} \bar{\mathbf{u}}_1 \quad \mathbf{u}_{E,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{E,2} \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (14-33)$$

Mit der Symmetrie ergibt sich für die Randverschiebungen der Elemente 3 und 4 zu:

$$\mathbf{u}_{E,3} = \mathbf{T}_{E,1} \bar{\mathbf{u}}_1 \quad \mathbf{u}_{E,4} = \mathbf{T}_{E,2} \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (14-34)$$

14.6 Zusammenwirken von Mittelscheibe und Lasteinleitungselementen

Die Kanten des Mittelscheibenelements verdrehen, verschieben und verlängern sich bei Belastung, bleiben dabei aber stets gerade. Zwischen den Lasteinleitungselementen und dem Mittelscheibenelement besteht Kompatibilität. Die Kantenverlängerungen $s_{i,m}$ der Mittelscheibe kann sich nicht ungehindert ausbilden, da die an diese Kante anschließenden Stabreihen der Lasteinleitungselemente (Kante A) gespreizt und dadurch rückhaltende Kräfte geweckt werden. Die Größenordnung und Auswirkung dieses Effekts auf das Strukturtragverhalten und die Schnittkraftverteilung innerhalb des Systems ist Inhalt der Untersuchungen dieses Abschnitts. Das Endprodukt sind einfache Übertragungsbeziehungen, die den Zusammenhang zwischen den Kraft- und Verformungsgrößen am System- bzw. am Probekörpertrand und den Schnittgrößen und Verzerrungen im Mittelscheibenelement angeben.

14.6.1 Einaxiale Streckung der Mittelscheibe

Ausgangssituation ist eine vorgegebene einaxiale Streckung $E_{11,m}$ der Mittelscheibe. Die Normalverzerrung $E_{22,m}$ bleibt null. Da eine biaxiale Beanspruchungssituation vorhanden ist, treten begleitende Schubverzerrungen $\gamma_{12,m}$ auf, die sich mit Gleichung (14-9) berechnen lassen. Mit Gleichung (14-6) lassen sich die auftretenden Kantenverformungen der Mittelscheibe bestimmen.

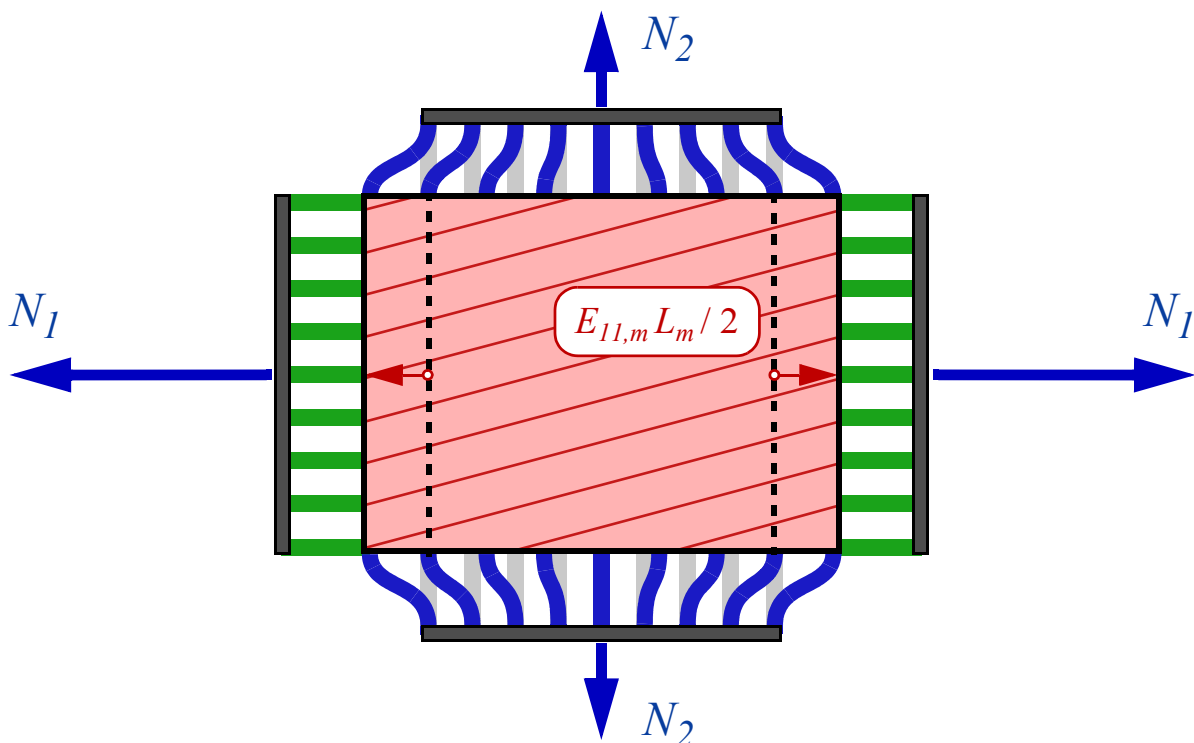


Bild 14.8 Einaxiale Verformung der Mittelscheibe und zugehörige Festhaltekräfte

Die Scheibennormalkräfte $N_{i,m}$ bei der vorgegebenen Verformung ergeben sich aus den Gleichungen (14-7) und (14-8). Die beiden vertikalen Kanten verlängern sich nicht, nur die beiden horizontalen Kanten (Bild 14.8) werden gestreckt. Durch diese Kantenstreckung kommt es in den daran angeschlossenen Lasteinleitungselementen (2 und 4) zu einer Spreizverformung. Diese Verformungssituation mit den äußeren Festhaltekräften am Probenrand ist in Bild 14.8 dargestellt (die begleitende Schubverformung $\gamma_{12,m}$ ist nicht eingezeichnet). Diese Situation lässt sich analog auf den Fall mit einer Einheitsverformung $E_{22,m}$ in vertikaler Richtung und mit $E_{11,m} = 0$ übertragen.

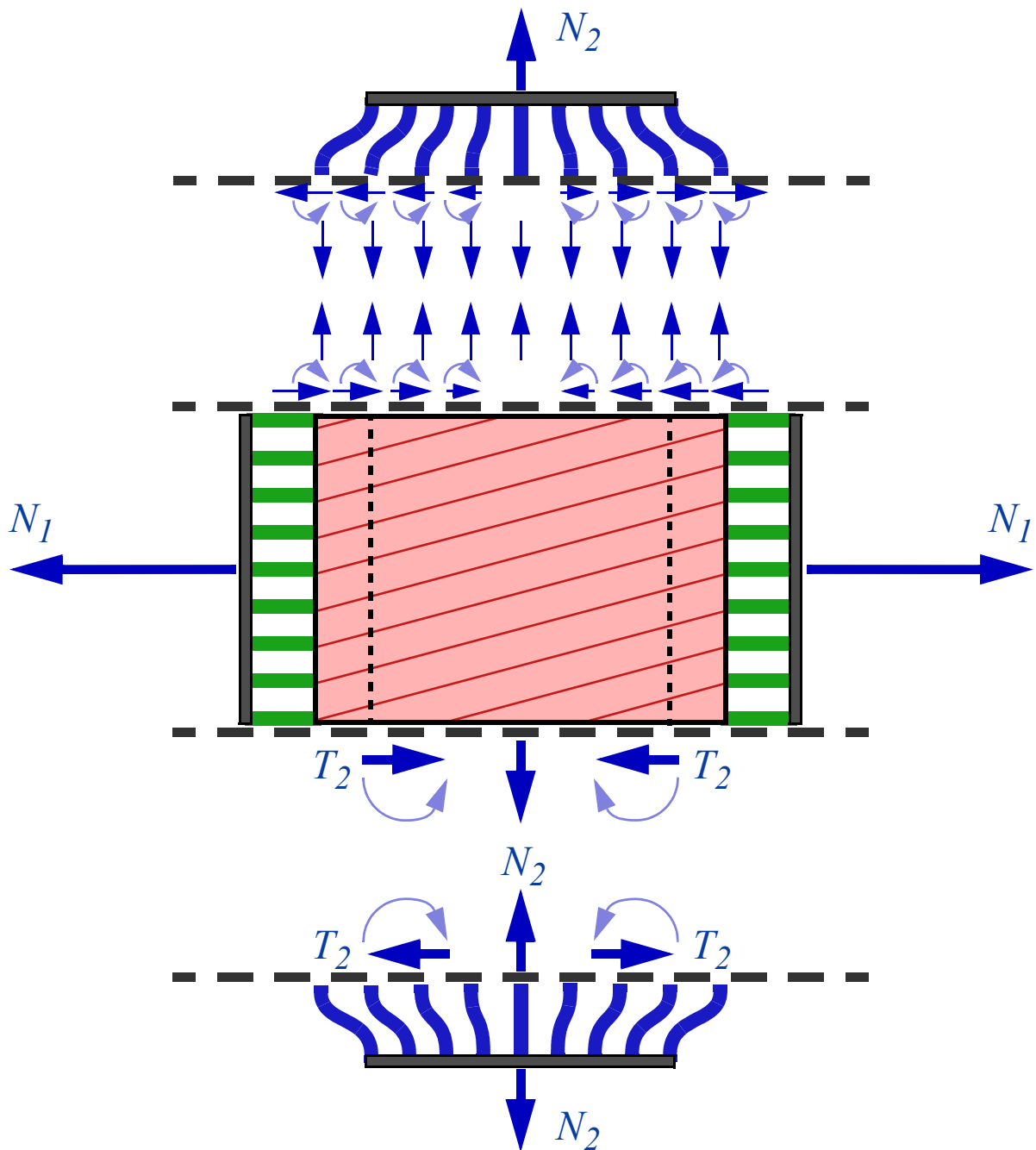


Bild 14.9 Kräfte an den Schnittufern zwischen dem Lasteinleitungselement 2 (bzw. 4) und der Mittelscheibe

14.6.2 Schnittkräfte & Steifigkeitsbeziehungen

Um den Zusammenhang zwischen den inneren Schnittgrößen und den äußeren Kräften zu bestimmen, werden zunächst zwei horizontale Schnitte an den beiden Kanten zwischen den Lasteinleitungselementen 2 und 4 und der Mittelscheibe geführt (Bild 14.9). An beiden Schnittufern sind die benötigten Festhaltekräfte eingezeichnet. Bei Element 2 sind an jedem Einzelstabelement das benötigte Festhaltemoment und die Festhaltenormal- und querkraft eingezeichnet. Dieselben Schnittkräfte wirken an den Schnittufern bei Lasteinleitungselement 4; in Bild 14.9 sind bei diesen Schnittufern aber bereits die resultierenden Kräfte N_2 und T_2 und Momente aus den Einzelstabbkraftgrößen gezeichnet. An den Kanten der Mittelscheibe wirken somit die vier gleich großen Tangentialkräfte T_2 , die Normalkräfte N_1 (in horizontaler Richtung) und die Normalkräfte N_2 (in vertikaler Richtung) und die vier Momente, die sich resultierend aus den Einzelstabbiegemomenten ergeben (nur bei Modell I). Bei der zuvor festgelegten Kinematik des Mittelscheibenelements haben diese Momente keinen Einfluss auf die Verformung der Mittelscheibe.

Um die Schnittkraft $N_{1,m}$ in der Mittelscheibe zu bestimmen, wird ein dritter vertikaler Schnitt durch das Mittelscheibenelement geführt (Bild 14.10). Durch Bildung des Kräftegleichgewichts in horizontaler Richtung ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_2 + N_{1,m} \\ 2T_1 + N_{2,m} \end{bmatrix} \quad (14-35)$$

Die seitlichen kammartigen Lasteinleitungselemente nehmen (abhängig von ihrer Steifigkeit) einen Teil der äußeren Kraft auf. Wie groß dieser Anteil ist, wird später dargestellt. Dieselben Überlegungen lassen sich bei einer vertikalen Streckung $E_{22,m}$ der Mittelscheibe durchführen. Mit der Spreizsteifigkeit aus (14-28) und den kinematischen Zusammenhängen aus (14-31) ergibt sich:

$$\frac{1}{L_m t_m} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} C_s^\# & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} \quad (14-36)$$

Mit der Darstellung der äußeren Kräfte als Spannungen $\bar{\sigma}_i = N_i / (L_m t_m)$, den Gleichgewichtsgleichungen (14-35) und den Steifigkeitsbeziehungen (14-7) und (14-36) ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{BiSZ,11} & C_{BiSZ,12} \\ C_{BiSZ,12} & \hat{C}_{BiSZ,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{C}}_{BiSZ} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} \quad (14-37)$$

Das ist die modifizierte Materialsteifigkeit der Mittelscheibe (gekennzeichnet durch ein Dachsymbol) mit den zusätzlichen Steifigkeiten zufolge der Lasteinleitungselemente in den

Hauptdiagonalgliedern:

$$\begin{aligned}\hat{C}_{BiSZ,11} &= C_{BiSZ,11} \left(1 + \frac{1}{\eta} \frac{2C_s^\#}{C_{BiSZ,11}} \right) = C_{BiSZ,11} \left(1 + \frac{c}{\eta} \right) \\ \hat{C}_{BiSZ,22} &= C_{BiSZ,22} \left(1 + \frac{c^\#}{\eta} \right) = \hat{C}_{BiSZ,11}^\#\end{aligned}\tag{14-38}$$

Die Steifigkeitscharakteristik des Systems (Mittelscheibe inklusive Lasteinleitungselemente) steckt in dem Steifigkeitsverhältnis c .

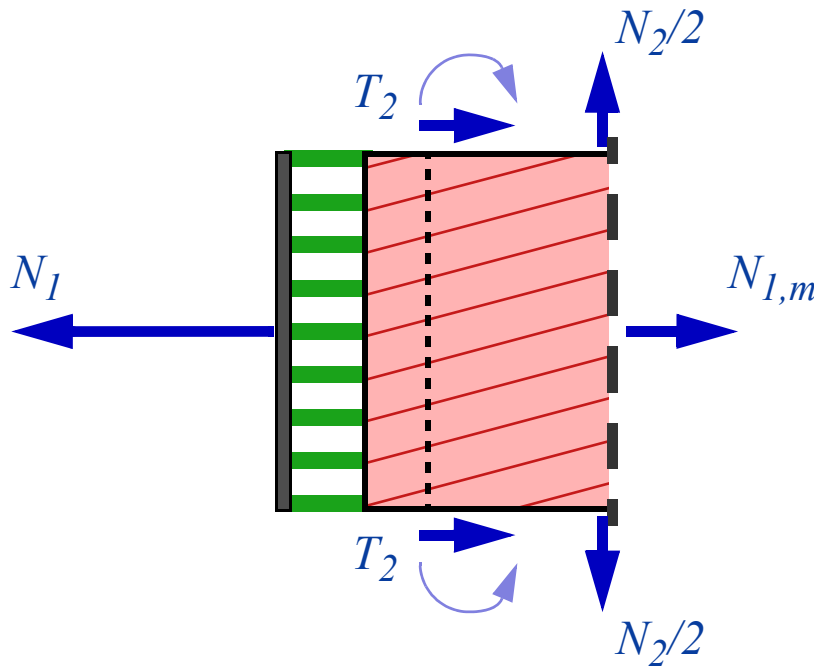


Bild 14.10 Vertikaler Schnitt durch die Mittelscheibe mit der Normalkraft $N_{I,m}$ und den übrigen angreifenden Kraftgrößen

14.6.3 Übertragungsmatrizen

Die Übertragungsmatrizen geben den Zusammenhang zwischen Größen, die am Rand des Probekörpers wirken, und den zugehörigen Größen in der Mittelscheibe an.

14.6.3.1 Spannungstransformation \mathbf{B}_m

Die Matrix \mathbf{B}_m gibt den Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften (in Spannungen ausgedrückt) und den beiden Normalspannungen im Mittelscheibenelement an:

$$\begin{bmatrix} S_{11,m} \\ S_{22,m} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{C}_{BiSZ} \left(\hat{\mathbf{C}}_{BiSZ} \right)^{-1}\tag{14-39}$$

14.6.3.2 Verzerrungstransformation \mathbf{A}_m

Die zu den Kräften N_1 und N_2 arbeitskonjugierten Randverschiebungen ergeben sich durch Integration der Normalverzerrungen der Mittelscheibe und der Randbereiche:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \frac{L_m}{2} \begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} + L_k \begin{bmatrix} E_{11,1} \\ E_{11,2} \end{bmatrix} \quad (14-40)$$

Mit den Normalverzerrungen der Lasteinleitungselemente aus Gleichung (14-30) und Gleichung (14-38) ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} E_{11,m} \\ E_{22,m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m \begin{bmatrix} \bar{u}/L_m \\ \bar{v}/L_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \eta \frac{L_k}{h_k} \frac{\hat{C}_{BiSZ,11}}{C_{FSZ}} & \eta \frac{L_k}{h_k} \frac{C_{BiSZ,12}}{C_{FSZ}} \\ \eta \frac{L_k}{h_k} \frac{C_{BiSZ,12}}{C_{FSZ}^\#} & \frac{1}{2} + \eta \frac{L_k}{h_k} \frac{\hat{C}_{BiSZ,22}}{C_{FSZ}^\#} \end{bmatrix} \quad (14-41)$$

14.6.3.3 Steifigkeitsmatrix

Die Systemsteifigkeit des Probekörpers bei biaxialer Beanspruchung ergibt sich aus den obigen Gleichungen zu:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_m \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_m = t_m \hat{\mathbf{C}}_{BiSZ} \mathbf{A}_m \quad (14-42)$$

14.6.4 Auswirkung der Lasteinleitungselemente - Vergleich von Modell I und II

14.6.4.1 Lastaufteilung

Die Steifigkeiten sowohl der Mittelscheibe als auch der Lasteinleitungselemente hängen von der Faserneigung α , dem Dickenverhältnis η (14-4) und den Steifigkeitsverhältnissen E_R/E_L und G_{LR}/E_L und der Querdehnzahl ν_T ab. Die elastischen Materialkennwerte wurden in Kap. 14.2.4 festgelegt. Die Aufteilung der äußeren Kraft in Anteile, die von den Lasteinleitungselementen durch Spreizung und die vom Mittelfeld aufgenommen werden, hängt von diesen Parametern ab. Bei einer einaxialen Beanspruchung $E_{11,m}$ der Mittelscheibe ($E_{22,m} = 0$), wie sie in Bild 14.8 dargestellt ist, ergibt sich die prozentuale Aufteilung der Schnittkräfte zu:

$$\frac{N_{1,m}}{N_1} = \frac{\eta}{\eta + c} \quad \frac{2T_1}{N_1} = \frac{c}{\eta + c} \quad (14-43)$$

Der Verlauf dieser Aufteilung der Schnittnormalkraft hängt besonders vom Verhältnis η ab und ist für die drei verwendeten Probentypen (Typ A bis C) mit den unterschiedlichen

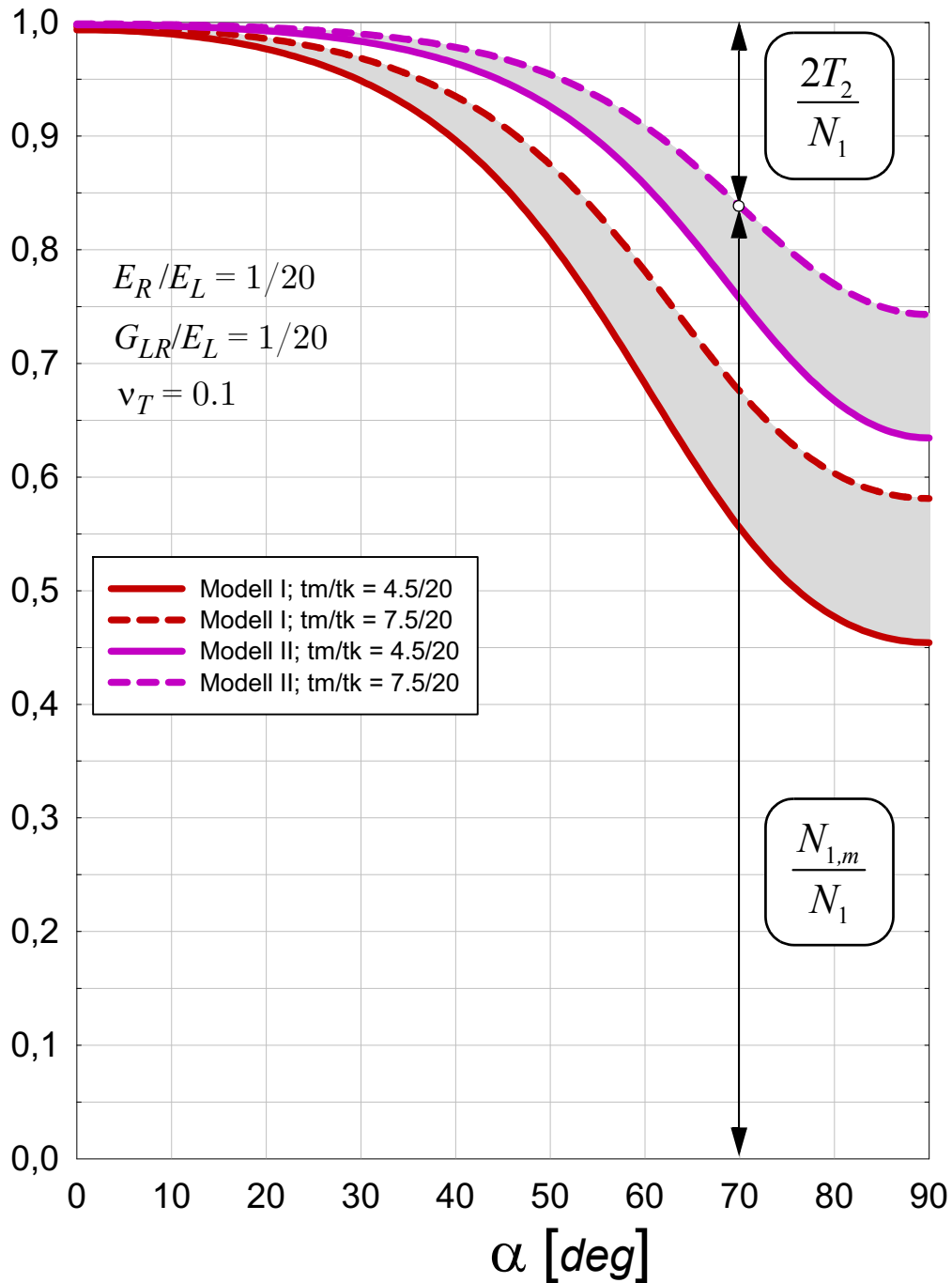


Bild 14.11 Prozentuale Aufteilung der äußeren Kraft N_I in $N_{1,m}$ und $2T_2$ abhängig vom Faserneigungswinkel α und dem Dickenverhältnis $\eta = t_m/t_k$ bei einaxialer Verzerrung der Mittelscheibe, d.h. $E_{11,m} = 1$ und $E_{22,m} = 0$

Mittelfeldstärken aus Gleichung (14-4) als Funktion des Winkels α in Bild 14.11 dargestellt.

Bei $\alpha = 0^\circ$ ist die Steifigkeit des Mittelfeldes wesentlich größer als die der Lasteinleitungselemente, da die Mittelscheibensteifigkeit vom faserparallelen E-Modul E_L bestimmt wird und die Spreizsteifigkeiten der Randbereiche 2 und 4 vom geringeren E-Modul E_R quer zur Faser abhängen. Die Mittelscheibe nimmt daher nahezu die ganze Normalkraft auf. Wird die Faserneigung $\alpha = 90^\circ$ gewählt, erhöht sich die Spreizsteifigkeit der Lasteinleitungselemente (der stabreihenparallele E-Modul der Elemente 2 und 4 ist nun E_L) und das Mittelfeld verliert an Steifigkeit, da E_R der dominante E-Modul in Beanspruchungsrichtung ist. Damit kommt es zu einer Verringerung des Anteils der Normalkraft der Mittelscheibe an der Gesamtnormalkraft und einer einhergehenden Erhöhung der Tangentialkräfte. Trotz der Einschlitzung des Lasteinleitungsbereichs mit der Absicht die zusätzliche Längsversteifung am Rand der Mittelscheibe gering zu halten, kommt es zu einer markanten Kraftverlagerung vom Mittelfeld zu den Mittelscheibenrändern, die ihre Ursache in den Steifigkeitsunterschieden der E-Moduln von Holz parallel und quer zur Faser hat.

14.6.4.2 Modell I vs. Modell II

Modell II ist weniger steif als Modell I. Den Unterschied macht dabei der Anschluss der Lasteinleitungselemente an die Mittelscheibenkante. Das für das System zutreffende Steifigkeitsverhalten wird zwischen diesen beiden Fällen liegen.

Die Normalkraft $N_{l,m}$ in der Mittelscheibe liegt im Extremfall bei einer Faserneigung von $\alpha = 90^\circ$ (Beanspruchung quer zur Faser) und einer Messfeldstärke von $t_m = 4.5$ mm zwischen 45 bis 63 % der aufgetragenen Randkraft N_l . Bei einer Messfeldstärke von $t_m = 7.5$ mm liegt die Verringerung der Randkraft zwischen 58 und 74%.

Diese Untersuchung zeigt, dass die Einschlitzung des Lasteinleitungsbereichs nicht ausreicht, um ungewünschte Kraftflüsse von der am Probekörpertrand aufgetragenen äußeren Last in das Mittelfeld zu verhindern. Weiters besteht eine Abhängigkeit von der Faserneigung innerhalb des Probekörpers und von der jeweils verwendeten Mittelscheibendicke. Die Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ aus Gleichung (13-5) entsprechen i.A. nicht den Spannungen $S_{11,m}$ und $S_{22,m}$ in der Mittelscheibe, sondern drücken nur die am Rand aufgetragenen Kraftgrößen in Spannungen aus, da die Abminderung durch Aktivierung der Steifigkeit der seitlichen, eingeschlitzten Lasteinleitungsbereiche nicht Rechnung getragen wird. Obwohl diese Untersuchung nur auf einer elastischen Berechnung basiert, hat diese Kraftumlagerung wesentliche Auswirkungen auf die Darstellung und Interpretation der Messergebnisse, auch im Versagensfall.

14.7 Vergleich mit den Versuchsergebnissen

14.7.1 Vorgehensweise

In Eberhardsteiner (2002) werden die gemessenen Randkräfte N_i mit Gleichung (13-5) in Spannungen $\bar{\sigma}_i = N_i/(140 t_m)$ ausgedrückt und als die Spannungen in der Mittelscheibe behandelt. Diese Spannungen werden mit den - im Messfeld optisch gemessenen - Verzerrungskomponenten $E_{11,m}$, $E_{22,m}$ und $\gamma_{12,m}$ als Spannungs-Dehnungsdiagramme gezeichnet. Bei der Spannung ist dabei die Vorspannung mitberücksichtigt. Hervorzuheben ist, dass durch diese Funktionsverläufe nicht das materielle Steifigkeitsverhalten der Mittelscheibe beschrieben wird, da die Spannungen dort nicht gemessen wurden und somit nicht bekannt sind.

Da das Steifigkeitsverhalten der Probekörperstruktur und die Kräfteaufteilung zwischen Mittelscheibenelement und Lasteinleitungselementen von der Messfelddicke t_m abhängt (siehe Bild 14.11), werden die von Prof. Eberhardsteiner zur Verfügung gestellten Datenlisten für den Vergleich nach Typ A (t_m ca. 4.5 mm) und B (t_m ca. 7.5 mm) voneinander getrennt betrachtet. Die vier Versuche des Typs C werden nicht betrachtet.

Die gemessenen Kraft-Verformungs-Zusammenhänge werden mit den berechneten linearen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhängen der elastischen Ober- bzw. Untergrenze der Modell I und II verglichen. Vorab lassen sich zwei Vermutungen formulieren, die durch den Vergleich bestätigt oder verworfen werden sollen:

- Der linear-elastische Bereich der Versuchsergebnisse (die anfängliche Steifigkeit) soll zwischen den Rechnungen von Modell I und II liegen. Modell I stellt dabei eine Steifigkeitsobergrenze dar, da ein biegesteifer Anschluss der Einzelstäbe der Stabreihen an das Mittelscheibenelement modelliert wurde. Der in Modell II ausgeführte gelenkige Anschluss führt zu einer Verringerung der Spreizsteifigkeit und damit zu einer Abminderung der Struktursteifigkeit. Der gelenkige Anschluss der Einzelstäbe an die Mittelscheibe stellt den unteren und entgegengesetzten Grenzfall zum biegesteifen Anschluss von Modell I dar.
- Werden diese Vermutungen durch den Vergleich bestätigt, kann weiter geschlossen werden, dass der Spreizsteifigkeitseffekt wirklich vorhanden ist und sich in den Messergebnissen widerspiegelt.

14.7.2 Berücksichtigung der Streuung der elastischen Materialkennwerte

Eberhardsteiner (2002) hat zusätzlich zu den biaxialen Versuchen einaxiale Versuche parallel und quer zur Faserrichtung ausgeführt, um vorab Vergleichs- bzw. Bezugswerte für die elastischen Materialkenngrößen E_L , E_R und ν_{LR} , sowie die faserparallele Zugfestigkeit $f_{t,0}$ und die Zugfestigkeit quer zur Faser $f_{t,90}$ zu bestimmen. Die auf S. 78-79 in Eberhardsteiner

(2002) dargestellten Versuchsdaten zeigen - selbst bei gleicher oder ähnlicher Rohdichte - beträchtliche Differenzen zwischen den maximalen und den minimalen Werten. So liegen bei einer Rohdichte von 0.40 bis 0.50g/cm³ die E-Moduli und die Festigkeiten zwischen ca.:

$$\begin{array}{llll} E_L & \approx 10000 - 19500 & f_{t,0} & \approx 40 - 130 \\ E_R & \approx 450 - 1200 & f_{t,90} & \approx 1.5 - 8 \end{array} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (14-44)$$

Aufgrund dieser starken Streuung werden für die elastischen Materialkennwerte der Rechenmodelle obere und untere Materialsteifigkeitswerte festgelegt. Das zuvor in den Ergebnisdarstellungen des Rechenmodells gewählte Materialsteifigkeitsverhältnis $E_R = G_{LR} = E_L/20$ und der Wert der Querdehnzahl $\nu_T = 0.1$ wird beibehalten. Der maximale und minimale Wert des faserparallelen E-Moduls wird mit

$$E_{L,min} = 10000 \quad E_{L,max} = 15000 \quad [\text{N/mm}^2] \quad (14-45)$$

gewählt. Die berechneten unteren Grenzwerte werden strichliert eingetragen; die oberen Grenzwerte strich-punktiert.

14.7.3 Vergleich der Versuchsdaten mit den linear-elastischen Rechen- ergebnissen

Für den Vergleich zwischen den Messergebnissen und den entwickelten Rechenmodellen werden zuerst die Versuchsergebnisse bei der Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ betrachtet. Die Schubverzerrung $\gamma_{12,m}$ in der Mittelscheibe muss null sein. Für den Vergleich werden auf der Ordinatenachse die gemessenen bzw. gerechneten äußeren Kräfte, in den Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ ausgedrückt, aufgetragen. Auf der Abszissenachse werden die jeweils zugehörigen Normalverzerrungskomponenten $E_{11,m}$ bzw. $E_{22,m}$ eingetragen. Die gemessenen Bruchpunkte der Probe sind mit einem **x** gekennzeichnet. Die gerechneten Werte sind je nach den Farben der einzelnen Modelle (Modell I: rot, Modell II: magenta) eingefärbt gezeichnet. Die Rechnungen mit dem maximalen E-Modul aus Gleichung (14-45) sind strichpunktiert gezeichnet; die mit dem kleinsten E-Modul strichliert. Der Bereich zwischen dem maximalen und minimalen faserparallelen E-Modul ist farblich hinterlegt.

Einige Versuche weichen von dem elastischen Verhalten, das von den Modellen vorgegeben wurde, ab. Die zugehörigen Messkurven werden in Bild 14.12 bis Bild 14.15 punktiert eingetragen.

14.7.3.1 Faserneigung $\alpha = 0^\circ$

Die berechneten linearen Last-Verschiebungs-Zusammenhänge und die zugehörigen Versuchswerte sind exemplarisch für die drei Belastungssituationen

- $\kappa = 2 : 5$, $t_m = 4.5$ mm, Versuchsnummern: 134, 136, 161, 162, 163, (135),
- $\kappa = -2 : 5$, $t_m = 4.5$ mm, Versuchsnummern: 177, 178, 207, 256, 257, (254, 255, 176),

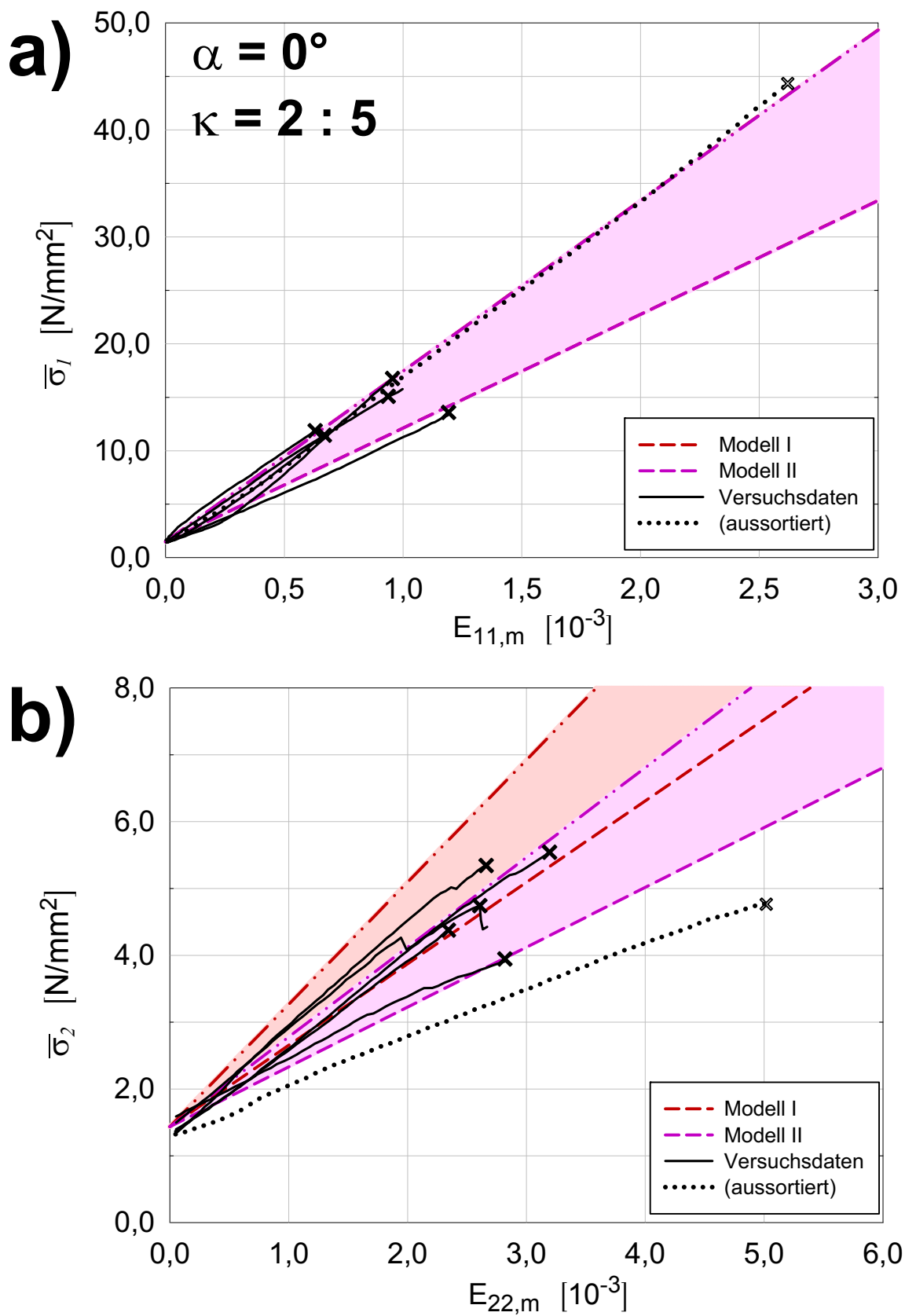


Bild 14.12 Vergleich der linear-elastischen Rechnungen mit $E_{L,min}$ und $E_{L,max}$ aus Gleichung (14-45) mit den Versuchsmessergebnissen bei $\alpha = 0^\circ$, dem Belastungsverhältnis $\kappa = 2 : 5$ und der Messfelddicke $t_m = 4.5$ mm

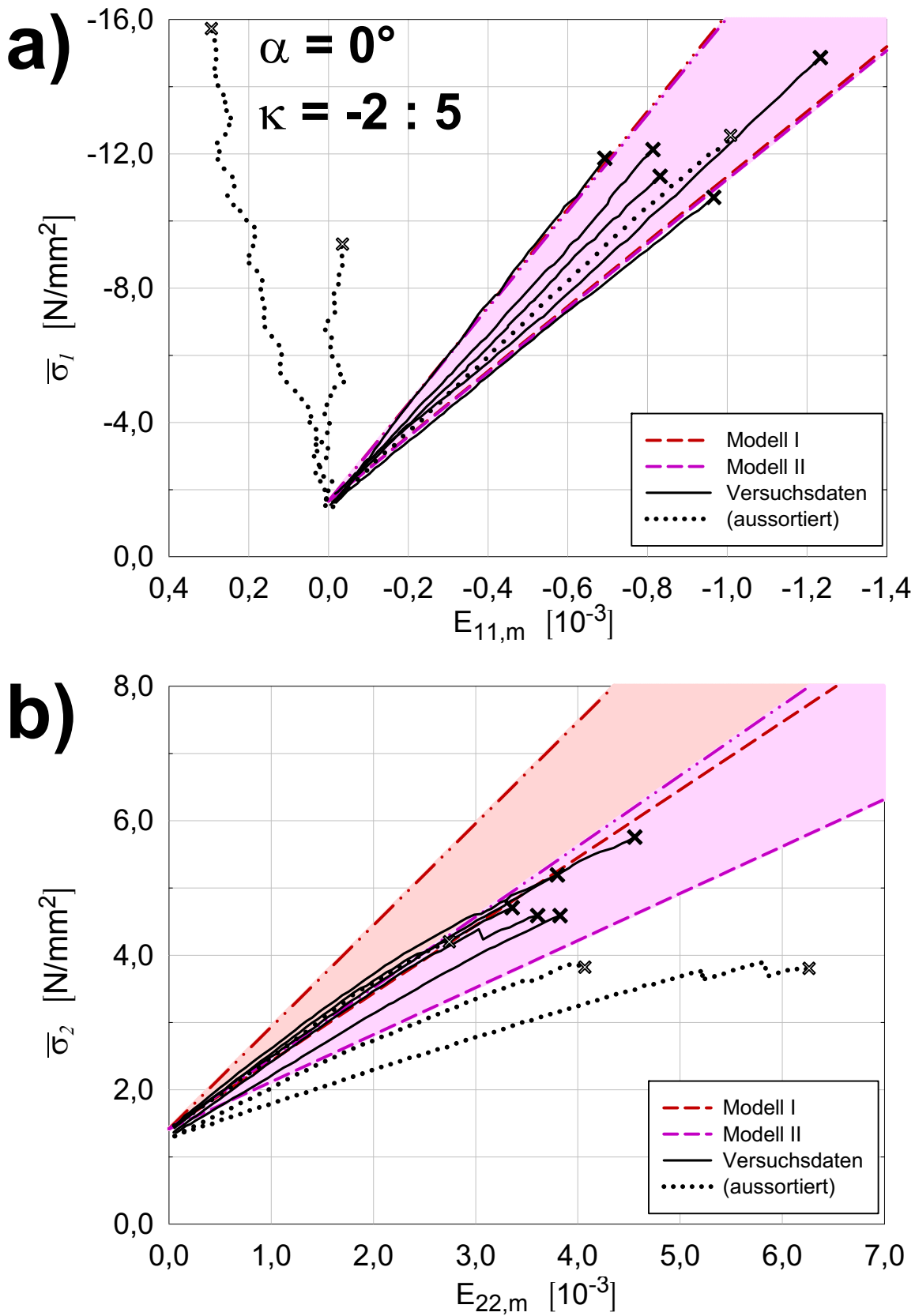


Bild 14.13 Vergleich der linear-elastischen Rechnungen mit $E_{L,min}$ und $E_{L,max}$ aus Gleichung (14-45) mit den Versuchsmessergebnissen bei $\alpha = 0^\circ$, dem Belastungsverhältnis $\kappa = -2 : 5$ und der Messfelddicke $t_m = 4.5$ mm

- $\kappa = 3 : -10$, $t_m = 4.5$ mm, Versuchsnummern: 226, 230, 232, (228)

in den Bildern Bild 14.12 bis Bild 14.14 dargestellt. Die Messdaten zu den in Klammer angeführten Versuchsnummern sind in den Bildern punktiert gezeichnet.

Belastung: $\kappa = 2 : 5$

In Bild 14.12 sind die gemessenen Größen und die berechneten Ergebnisse für das Beanspruchungsverhältnis $\kappa = 2 : 5$ dargestellt. Die Mittelscheibe ist in Faserrichtung und quer zur Faser unter Zug. Faserparallel haben alle drei Rechenmodelle nahezu gleiche Steifigkeiten, da die Spreizsteifigkeit bei einer Faserneigung von $\alpha = 0^\circ$ - unabhängig vom verwendeten Modell - keinen nennenswerten Einfluss hat (siehe Normalkraftaufteilung Bild 14.11 bei $\alpha = 0^\circ$). Die Kräfte quer zur Faserrichtung liegen in den von Modell I und II berechneten Bereichen. Der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang von Versuch Nummer 135 ist in Bild 14.12 punktiert eingetragen. Der Grund dafür ist das auffällige Abweichen dieses Zusammenhangs von den restlichen Versuchen. Die Bruchspannung $\bar{\sigma}_1$ in Bild 14.12 a) ist zwischen 3 bis fast 4 mal größer als bei den restlichen fünf Versuchen. Außerdem ist der $\bar{\sigma}_2$ - $E_{22,m}$ Zusammenhang wesentlich geringer, als bei den anderen Versuchen. Aus diesen Gründen wird dieser Versuch in Bild 14.12 punktiert gezeichnet.

Belastung: $\kappa = -2 : 5$

Bei dem Belastungsverhältnis $\kappa = -2 : 5$ wird faserparallel Druck aufgebracht und quer zur Faserrichtung gezogen. Bevor der faserparallele Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang in Bild 14.13 a) den linear-elastischen Bereich verlässt, kommt es bei dieser Belastungssituation zu Querkzugversagen. Abweichendes Verhalten zeichnen die Versuche mit den Nummern 254, 255 und 176. Die Versuche 254 und 255 liegen in Bild 14.13 a) nicht im berechneten elastischen Bereich und zeigen trotz des gewählten Beanspruchungsverhältnisses mit eindeutiger faserparalleler Druckbeanspruchung kein Anwachsen der Verzerrungskomponente $E_{11,m}$ in negativer Richtung, sondern sogar eine Zunahme in gegenläufig-positiver Richtung. Trotz Druckbeanspruchung sind Zugnormalverzerrungen gemessen worden, was nicht plausibel ist. Versuch 176 zeigt in Richtung quer zur Faser (Bild 14.13 b) eine Steifigkeit, die nur ca. 60% von der Steifigkeit der restlichen Versuche aufweist. Aus diesen Gründen werden die Messergebnisse dieser Versuche in Bild 14.13 punktiert dargestellt. Bei den restlichen Versuchen, die eine geringer gegenseitige Abweichung aufweisen, bestätigt sich die anfänglich ausgesprochene Vermutung, dass das elastische Probekörperverhalten zwischen Modell I und II, mit Tendenzen mehr in Richtung Modell II, liegt.

Belastung: $\kappa = 3 : -10$ (Bild 14.14)

Quer zur Faserrichtung herrscht Druck, wodurch sich im zugehörigen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang das charakteristische nichtlineare Verhalten von Holz zeigt. Die Anfangstangente an die gemessenen Spannungs-Verzerrungs-Diagramme in Bild 14.14 b) liegt wiederum im oberen Bereich von Modell II bzw. im Überschneidungsbereich mit Modell I. Nahezu ungestört davon bildet sich in faserparalleler Richtung lineares Verhalten bis

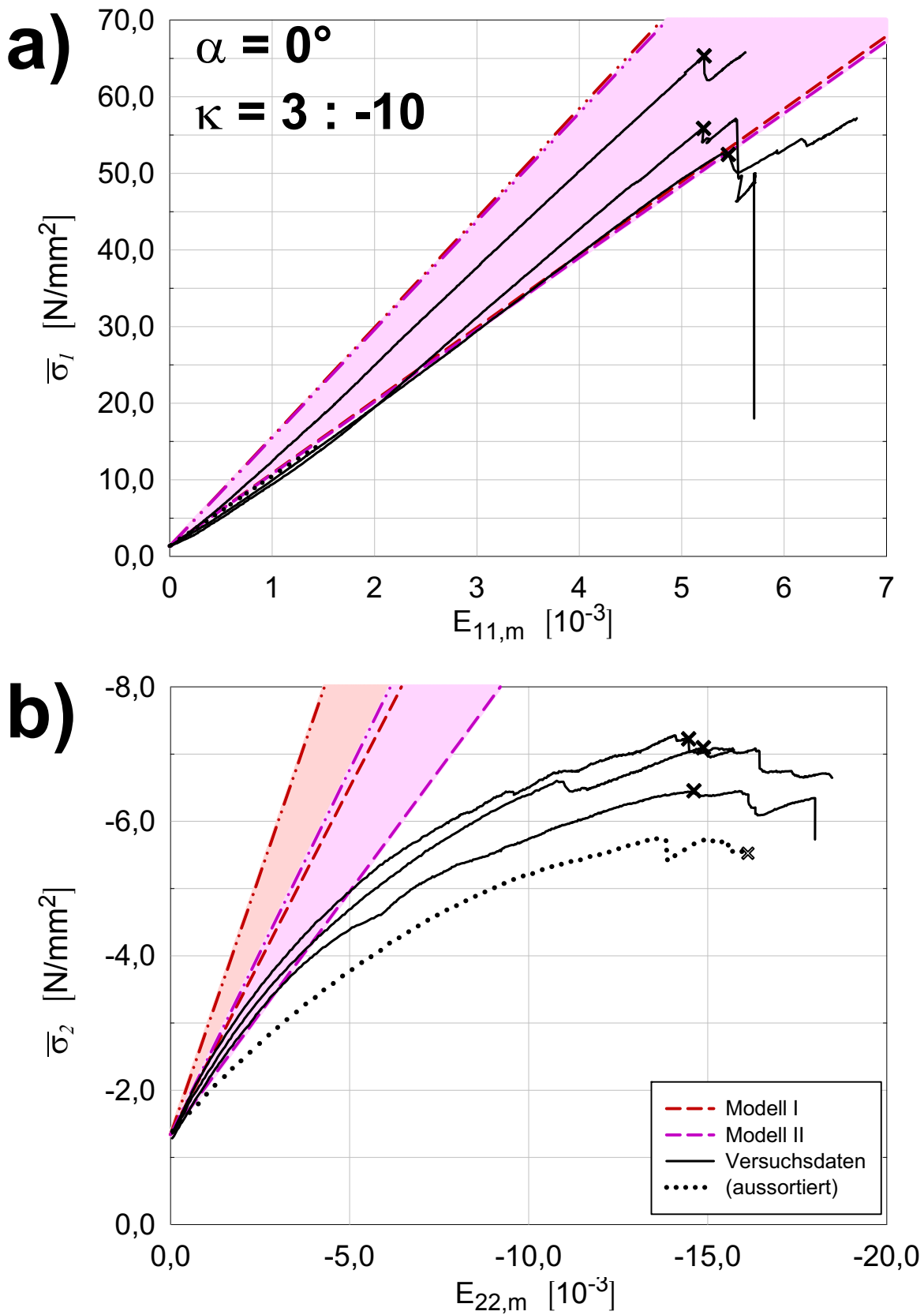


Bild 14.14 Vergleich der linear-elastischen Rechnungen mit $E_{L,min}$ und $E_{L,max}$ aus Gleichung (14-45) mit den Versuchsmessergebnissen bei $\alpha = 0^\circ$, dem Belastungsverhältnis $\kappa = 3 : -10$ und der Messfelddicke $t_m = 4.5$ mm

zum Bruchversagen aus (Bild 14.14 a). Der Probekörper aus Versuch 228 weist sowohl geringere Steifigkeit und Festigkeit quer und parallel zur Faser auf.

14.7.3.2 Faserneigung $\alpha = 45^\circ$

Bei der Faserneigung $\alpha = 45^\circ$ wird exemplarisch das Beanspruchungsverhältnis $\kappa = 1:1$ betrachtet. Bei dieser Belastung sollte das Last-Verformungs-Verhalten des Probekörpers in vertikaler und horizontaler Richtung gleich sein. Es wurden drei Versuche mit der Messfelddicke $t_m = 4.5$ mm (Nummer 414, 415, 416) und drei Versuche mit der Dicke $t_m = 7.5$ mm (Nummer 323, 324, 325) durchgeführt. Die Messergebnisse Letzterer sind in Bild 14.15 dargestellt. Bei der aufgebrachten allseitigen Zugbeanspruchung kommt es zu Versagen quer zur Faserrichtung, davor ist das Verhalten linear. Versuche 323 und 324 liegen in dem von den Modellen prognostizierten Steifigkeitsbereich. Versuch 325 wird aussortiert bzw. vorgemerkt, da die Steifigkeit vergleichsweise gering ist.

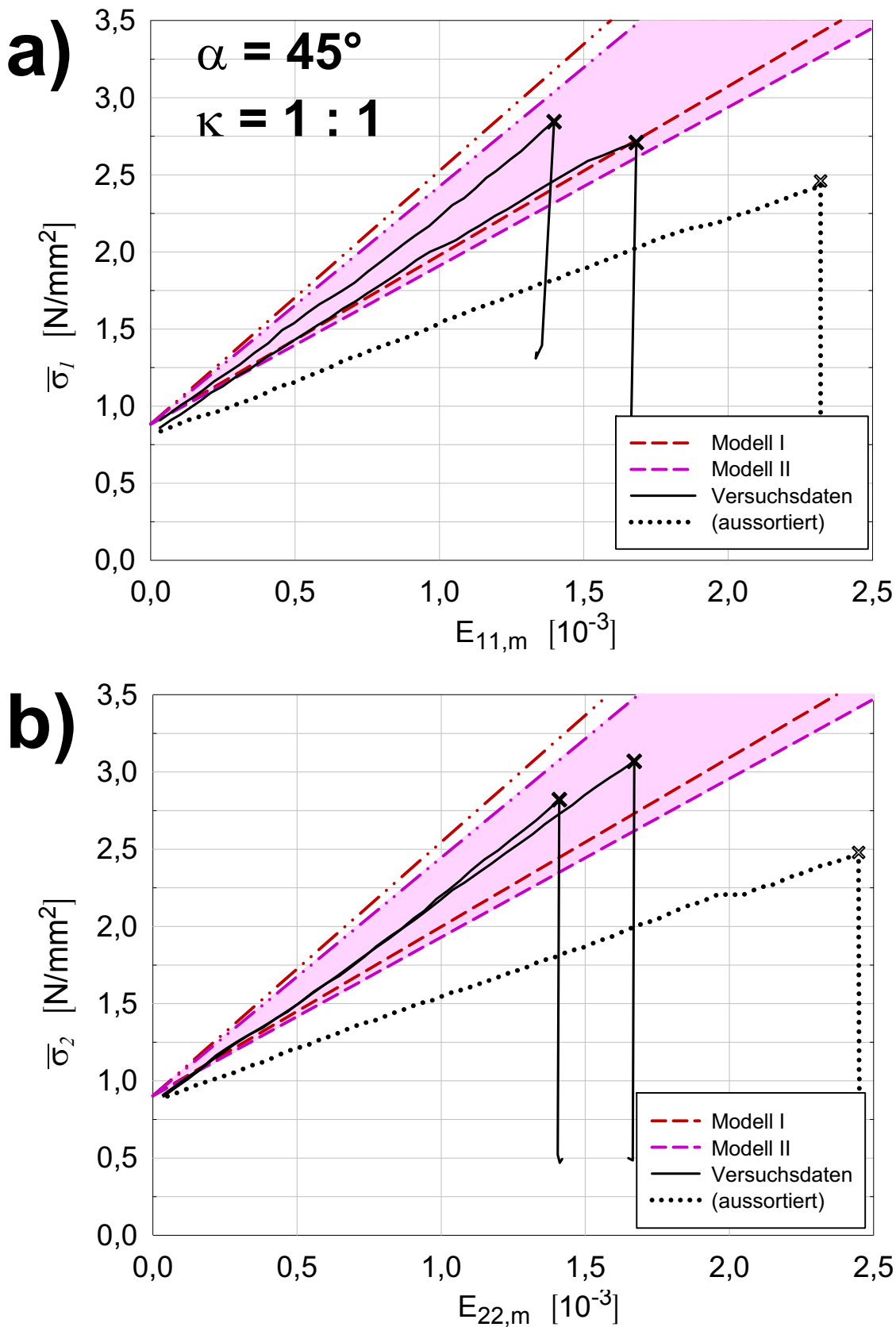


Bild 14.15 Vergleich der linear-elastischen Rechnungen mit den Versuchsmessergebnissen $\alpha = 45^\circ$, dem Belastungsverhältnis $\kappa = 1 : 1$ und der Messfelddicke $t_m = 7.5$ mm

14.8 Zusammenfassung & Resümee

In diesem Kapitel wurde eine erste Untersuchung des elastischen Tragverhaltens des Holzprobekörpers bei biaxialer Beanspruchung durchgeführt. Die Faserneigung α im Probekörper wurde dabei variiert. Zur Strukturanalyse wurde ein einfaches Rechenmodell entwickelt, untersucht und dessen elastisches Last-Verformungs-Verhalten den gemessenen Versuchsdaten gegenübergestellt.

14.8.1 Elastisches Tragverhalten des Probekörpers

Das grundsätzliche linear-elastische Tragverhalten des Probekörpers lässt sich anhand einer einaxialen Deformation, wie sie in Bild 14.8 dargestellt ist, erläutern. Die zwei Lasteinleitungselemente (1 und 3) und das dazwischenliegende Mittelfeld wirken wie ein dreiteiliger Zugstab mit einer seriellen Anordnung dieser drei Elemente. Die aufgebrachte Zugkraft N_I wird von den Lasteinleitungselementen auf die Mittelscheibe übertragen. Diese Schnittkraft teilt sich im Mittelbereich des Probekörpers auf die Normalkraft $N_{I,m}$ in der Mittelscheibe und die beiden Tangentialkräfte $2T_2$, die durch die Spreizverformung der oben und unten an die Mittelscheibe angefügten Lasteinleitungselemente (2 und 4) geweckt wird, auf. Das Mittelscheibenelement und die seitlich angefügten Lasteinleitungselemente 2 und 4 wirken als mechanische Parallelschaltung. Die Spreizsteifigkeit der Lasteinleitungselemente 2 und 4 wirkt dabei wie eine Gurtsteifigkeit und die Mittelscheibe als Steg.

Da der Probekörper aus einem Holzstück gefertigt wird, tritt der schräge Faserverlauf auch in den vier Lasteinleitungselementen auf. Bei Winkeln zwischen 0° und 90° ergeben sich selbst bei einaxialer Beanspruchung im Mittelfeld und den Lasteinleitungselementen mitgehende Schubverzerrungen.

14.8.2 Entwickelte Rechenmodelle

Die zwei entwickelten Strukturmodelle unterscheiden sich in der Modellbildung der Anbindung der Lasteinleitungselemente an die Mittelscheibe. Die Modellierung des Lasteinleitungselements bestimmt die Spreizsteifigkeit und damit den Faktor c in Gleichung (14-38) bzw. (14-43). Der wesentliche Trageffekt der Struktur ist die zuvor dargestellte Aufteilung der Kraft N_I in den Mittelfeldanteil $N_{i,m}$ und die zwei Tangentialkräfte T_2 . Diese wird durch die Spreizsteifigkeit im Term c (Modellabhängigkeit), die Mittelfeldstärke t_m und den Winkel α im Probekörper bestimmt. Bei Modell I und II ergeben sich lt. Bild 14.11 größenordnungsmäßig folgende Aufteilungen der Randkraft N_I auf die Normalkraft $N_{I,m}$ in der Mittelscheibe bei einer Faserneigung von $\alpha = 90^\circ$ (Beanspruchung quer zur Faser):

- $t_m = 4.5 \text{ mm}$: $N_{I,m} = (0.45 - 63) N_I$
- $t_m = 7.5 \text{ mm}$: $N_{I,m} = (0.58 - 74) N_I$

Das linear-elastische Steifigkeitsverhalten des Probekörpers lässt sich für die Modelle durch einfache (2,2)-Matrizen beschreiben. Diese Übertragungsmatrizen geben den Zusammenhang zwischen den am Rand aufgebrachten Verformungen bzw. Kräften und den Verzerrungen und Spannungen in der Mittelscheibe an.

14.8.3 Vergleich der Modellrechnungen mit den Messdaten

Die Modellrechnungen zeigen bei Berücksichtigung der starken Streuung der elastischen Materialeigenschaften von Holz eine sehr gute Übereinstimmung mit den gemessenen Versuchsdaten. Stark abweichende Versuche werden gesondert ausgewiesen.

Anhand der Modelle konnte gezeigt werden, dass die Spreizsteifigkeit und die damit einhergehende Kraftumlagerung in einer Größenordnung sind, die eine Negierung dieses Effekts nicht rechtfertigt. Ausgehend von dieser Erkenntnis stellen die Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ nicht die Spannungen in der Mittelscheibe dar, sondern drücken nur die am Rand aufgebrachten Kraftgrößen in Spannungen aus („Bruttospannungen“). Die Spannungen in der Mittelscheibe („Nettospannungen“) sind zufolge des verwendeten Tragmodells geringer.

Die Spreizsteifigkeit und damit der Kraftfluss wird wesentlich von der Messfelddicke t_m des Probekörpers beeinflusst. Je dicker die Mittelscheibe, umso geringer der Kraftfluss zu den seitlichen Lasteinleitungselementen. Aus diesem Grund werden die Messergebnisse für die Versuche bei $t_m = 4.5$ mm (Typ A) und $t_m = 7.5$ mm (Typ B) getrennt betrachtet.

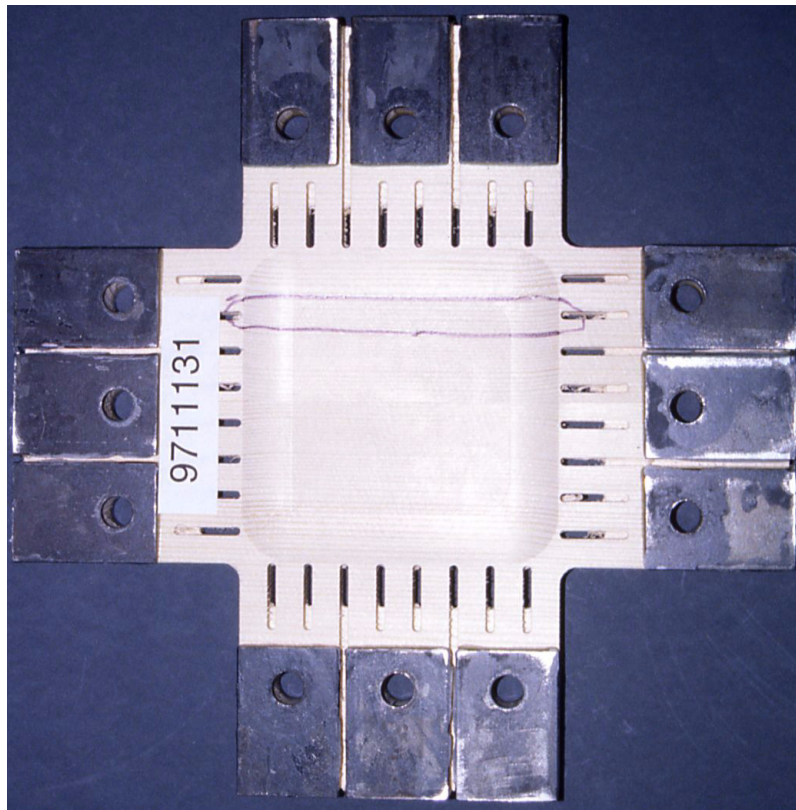
Obwohl diese Untersuchung nur auf einer elastischen Berechnung basiert, hat die gezeigte Kraftumlagerung zwischen Mittelscheibe und Lasteinleitungselementen einen wesentlichen Auswirkung auf die Darstellung der Messergebnisse im Bruchfall. Die angeführten Bruchspannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ sind noch die „Bruttospannungen“ und nicht die geringeren (wirklichen) „Nettospannungen“ in der Mittelscheibe. Werden die Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ als Spannungen in der Mittelscheibe interpretiert, kommt es zu einer Überschätzung der Bruch- bzw. Versagensspannungen. In welcher Größenordnung dieser Effekt ist und ob er durch die Versuchsdaten gestützt wird, soll im nächsten Kapitel untersucht werden.

14.8.4 Kritik & offene Fragen

14.8.4.1 Mängel des verwendeten einfachen Tragmodells

Die markanteste Vereinfachung des elementaren Tragmodells ist die Annahme eines konstanten Verzerrungsverlaufs im Mittelscheibenelement. Damit sind dort auch die Spannungen konstant und die Verschiebungen linear. In den Schnittbildern Bild 14.9 und Bild 14.10 sieht man aber, dass die von den Einzelstabelementen auf das Mittelscheibenelement wirkenden Tangentialkräfte sich erst allmählich aufbauen. Die Normalkraft $N_{l,m}$ wirkt genau genommen nur in Scheibenmitte, vom Rand bis zur Scheibenmitte wird die Scheibennormalkraft allmählich abgebaut, wobei die Stabelemente der kammartigen Lasteinleitungsstruktur diese Kraftanteile übernehmen. Die Schnittnormalkraft $N_{l,m}$ ist damit im Mittelscheibenelement nicht konstant, sondern verringert sich von N_l am Mittelscheiben-

#156:



#163:

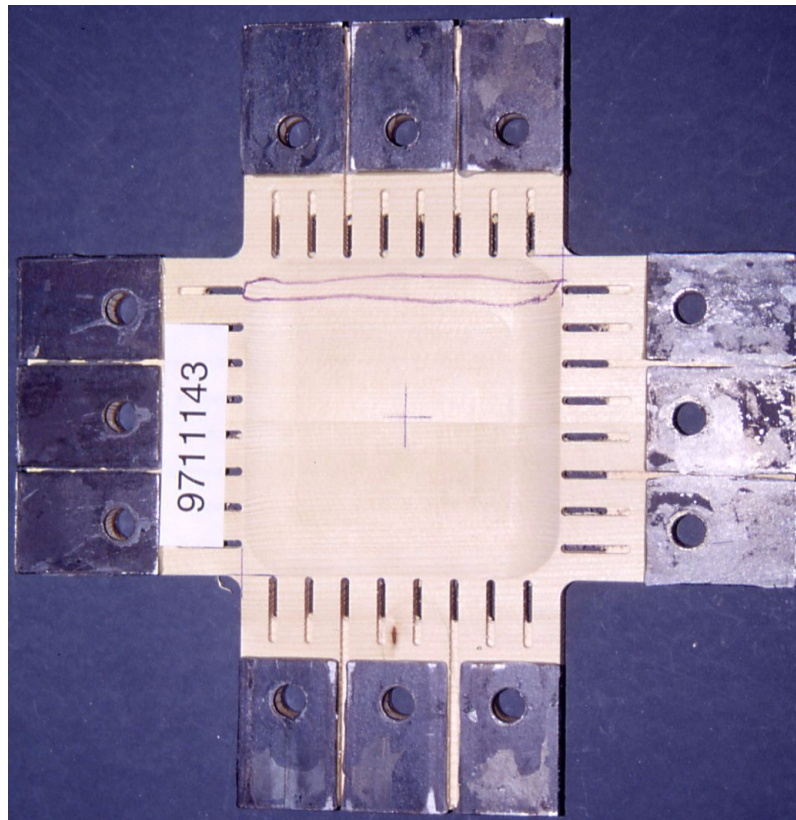


Bild 14.16 Bruchversagen bei Zugbeanspruchung quer zur Faserrichtung im Randbereich der Mittelscheibe; Versuche #156 ($\kappa = 0:1$), #163 ($\kappa = 2:5$)

rand auf $N_{l,m} = N_l - 2T_2$ in Scheibenmitte. Ein Indiz dafür, dass die Schnittnormalkraft am Rand der Mittelscheibe größer ist, als in Feldmitte, geben die Bruchbilder zu den Versuchen bei $\alpha = 0^\circ$ mit Zugbeanspruchungen quer zur Faserrichtung. Der Bruch befindet sich z.B. bei den Versuchsnummern 156 und 157 ($\kappa = 0:1$) und den Versuchen 162 und 163 ($\kappa = 2:5$) immer am Rand des Mittelfeldes (siehe Bild 14.16).

Weiters wird der Einfluss der lokal wirkenden Momente (Bild 14.9) durch die eingeschränkte Kinematik der Mittelscheibe nicht berücksichtigt.

Aus beiden Situationen sieht man, dass der Verlauf der Spannungen und Verzerrungen im Mittelscheibenelement (zumindest an den Rändern) nicht homogen ist. Wie stark das Abklingverhalten dieser lokalen Krafteinleitung ist und damit die auftretenden Abweichungen von der homogenen Verzerrungs- und Spannungsverteilung sind, ist noch zu untersuchen. Dabei muss das vorhandene Modell durch Verfeinerung der Kinematik des Mittelscheibenelements verbessert werden.

Die analytische Studie dieses Abschnitts gibt einen ersten Einblick in das elastische Tragverhalten des Probekörpers und kann als erste Vorstudie zu einer verfeinerten Berechnung angesehen werden.

14.8.4.2 Kritische Beurteilung des gewählten Versuchsaufbaus

Der Probekörper mit der gegebenen Randbelastungssituation ist ein statisch unbestimmtes System und die Lastverteilung im Probekörper hängt von den elastischen Steifigkeitsverhältnissen ab. Bei Holz streuen diese Größen stark, was nicht optimal ist, da auch die Lastverteilungssituation von dieser Streuung abhängt. Die Lastverteilung hängt außerdem von der Messfelddicke t_m des Probekörpers ab. Aus diesem Grund sollen (bzw. müssen) die Messergebnisse für die Versuche bei $t_m = 4.5$ mm (Typ A) und $t_m = 7.5$ mm (Typ B) getrennt voneinander betrachtet werden.

15

Traglastunter- suchung und Versagens- verhalten des Probekörpers

15.1 Einleitung und Kapitelaufbau

Ziel dieses Kapitels ist die Traglastuntersuchung des Probekörpers. Mit den fünf Winkeln $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$ und den jeweils zwei Mittelscheibendicken ($t_m = 4.5$ mm und 7.5 mm) hat man zehn unterschiedliche Probekörperkonfigurationen. Diese werden durch eine Verschiebungskombination κ (13-3) bis zum Bruchpunkt (und teilweise darüber hinaus) belastet. Die im Bruchpunkt gemessenen äußeren Kräfte werden durch Division mit der Fläche $t_m L_m$ in die Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ (13-5) umgerechnet. Diese Spannungspaare werden in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene als Kreuze eingezeichnet. Diese als Spannungen angegebenen Kraftkombinationen beschreiben das Bruchversagen des Probekörpers, also der Gesamtstruktur, und nicht ausschließlich das Versagen in der Mittelscheibe.

Für diese zehn Tragsysteme soll bei der gegebenen biaxialen Beanspruchung und unter Verwendung des vereinfachten Modells das Trag- und Versagensverhalten analysiert werden.

Die Untersuchung erfolgt in zwei Schritten:

- Bestimmung des Versagensbeginns (der Elastizitätsgrenze) des Mittelscheibenelements und der Lasteinleitungselemente und Darstellung in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene
- Elasto-plastische Berechnung des Probekörpers, Unterteilung in verschiedene Versagensszenarien und Darstellung der berechneten Last-Verschiebungs-Zusammenhänge

15.1.1 Schritt 1: Versagensbeginn des Probekörpers

Zur Beschreibung des Versagensbeginns werden die Versagensbedingungen aus Kap. 12.3.2, Box 12.3 mit den Festigkeitswerten aus Gleichung (12-13) genommen. Das gewählte Farb- und Bezeichnungsschema wird beibehalten. Die Versagensbedingungen der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente, die als Funktionen der Spannungskomponenten S_{ij} , der materiellen Hauptachsen angeschrieben sind, müssen durch die $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungskomponenten (die äußeren Lasten) ausgedrückt werden. Diese Funktionen lassen sich als Kurven in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene einzeichnen. Bei dieser Vorgehensweise sind folgende Punkte zu beachten:

- die in den $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungen ausgedrückten Versagensbedingungen sind abhängig vom jeweils verwendeten elastischen Strukturmodell,
- aus der elastischen Untersuchung des vorigen Kapitels hat sich gezeigt, dass das Systemverhalten zwischen Modell I und II liegt,
- die Wahl des jeweiligen Modells beeinflusst die Lage der in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene dargestellten Versagensbedingungen,
- die transformierten Versagensbedingungen sind auch von der Dicke t_m der Mittelscheibe abhängig. Aus diesem Grund werden die Versuche des Typs A ($t_m = 4.5$ mm)

und des Typs B ($t_m = 7.5$ mm) getrennt voneinander betrachtet,

- die aus den Messungen angegebenen Bruchpunkte sind Systemversagenspunkte und nicht unbedingt Versagenspunkte des Mittelscheibenelements.

15.1.2 Schritt 2: Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten des Probekörpers

Die in die $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene transformierten Versagensbedingungen der Mittelscheibe begrenzen den Bereich, in dem sich das Mittelfeld linear-elastisch verhält. Im Fall spröder Versagensmechanismen (z.B. Zugversagen quer zur Faser) deckt sich das Mittelfeldversagen mit dem Systemversagen. Nicht so einfach ist dies bei duktilen Mechanismen im Mittelfeld, da es zu Lastumlagerungen vom Mittelscheibenelement zu den Lasteinleitungselementen kommen kann und die Systemlast weiter gesteigert wird, bis eventuell sogar die Lasteinleitungselemente versagen. Die gemessenen Bruchpunkte bei solchen Belastungssituationen decken sich nicht mit der Elastizitätsgrenze des Mittelscheibenelements.

Mit den gewählten Festigkeitswerten und den festgelegten Versagensbedingungen wird das Last-Verformungs-Verhalten des Probekörpers für angegebene Beanspruchungskombinationen κ berechnet und durch Gegenüberstellung mit den Versuchsdaten kontrolliert, ob es zu größeren Abweichungen in quantitativer oder qualitativer Hinsicht kommt.

Eine zentrale Rolle nehmen die im Holzmodell postulierten Versagensbedingungen und -mechanismen ein. Mit diesen lassen sich die Versagenslasten der Versuchskonfigurationen einer beschränkten Anzahl an bestimmten Versagensszenarien zuordnen. Durch den Vergleich mit den fotografierten Bruchbildern sollen die im Modell durch die Versagensbedingungen prognostizierten Versagensebenenorientierungen bestätigt werden.

15.1.3 Inhalt von Kapitel 15

15.2 Versagensbeginn des Probekörpers

15.3 Einschub: Nichtlineares Rechenmodell

15.4 Versagensszenarien des Probekörpers

15.5 Zusammenfassung, Resümee & offene Punkte

15.2 Versagensbeginn des Probekörpers

Die Lasteinleitungselemente und das Mittelscheibenelement sind aus dem gleichen Material aufgebaut. Für alle Elemente gelten daher in den Materialhaupttrichtungen die Versagensbedingungen aus Box 12.3 mit den Festigkeitswerten (12-13). Um zu zeigen, wann, in welchem Bereich und unter welchem Versagensmechanismus Versagen im Probekörper beginnt, werden die Versagensbedingungen der Lasteinleitungselemente und der Mittelscheibe in den Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ ausgedrückt und in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene eingezeichnet.

15.2.1 Versagensbeginn des Mittelscheibenelements

15.2.1.1 Transformation der Versagensbedingungen

Der Zusammenhang zwischen den $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ Spannungen am Probekörperrand und den Spannungskomponenten S_{ij} im Materialhauptachsensystem der Mittelscheibe ist bei elastischem Systemverhalten über die Spannungstransformationsbeziehung im ebenen Spannungszustand (13-1) und die Übertragungsmatrix \mathbf{B}_m aus Gleichung (14-40) herstellbar (Bild 15.1).

Die Matrix \mathbf{B}_m ist für Modell I und II des vorigen Abschnitts unterschiedlich. Zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt das elastische Systemtragverhalten. Die allgemeine Umrechnung lautet:

$$\begin{bmatrix} S_{LL} \\ S_{RR} \\ S_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ -sc & sc \end{bmatrix} \mathbf{B}_m \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{array} \quad (15-1)$$

Mit dieser Transformation lassen sich die linearen Versagensbedingungen aus Box 12.3 in den Spannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ anschreiben:

$$F_i'(S_{LL}, S_{RR}, S_{LR}) \quad \Rightarrow \quad F_{i,m}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \quad (15-2)$$

15.2.1.2 Graphische Darstellung der Elastizitätsgrenze des Mittelscheibenelements

Die Versagensbedingungen $F_{i,m} = 0$ des Mittelscheibenelements können in die $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene als Geraden eingezeichnet werden. Durch die Transformation der Versagensbedingungen mit den linearen Beziehungen aus Gleichung (15-1) hängen die Funktionen $F_{i,m}$ neben den Festigkeiten auch von der Faserneigung α , der Mittelscheibendicke $\eta = t_m/t_k$, den elastischen Materialsteifigkeitsverhältnissen und dem verwendeten Lasteinleitungselement (Modell I oder Modell II) ab. Für die fünf unterschiedlichen in den Versuchen getesteten Faserneigungen werden die Versagensbedingungen und die Bruchpunkte

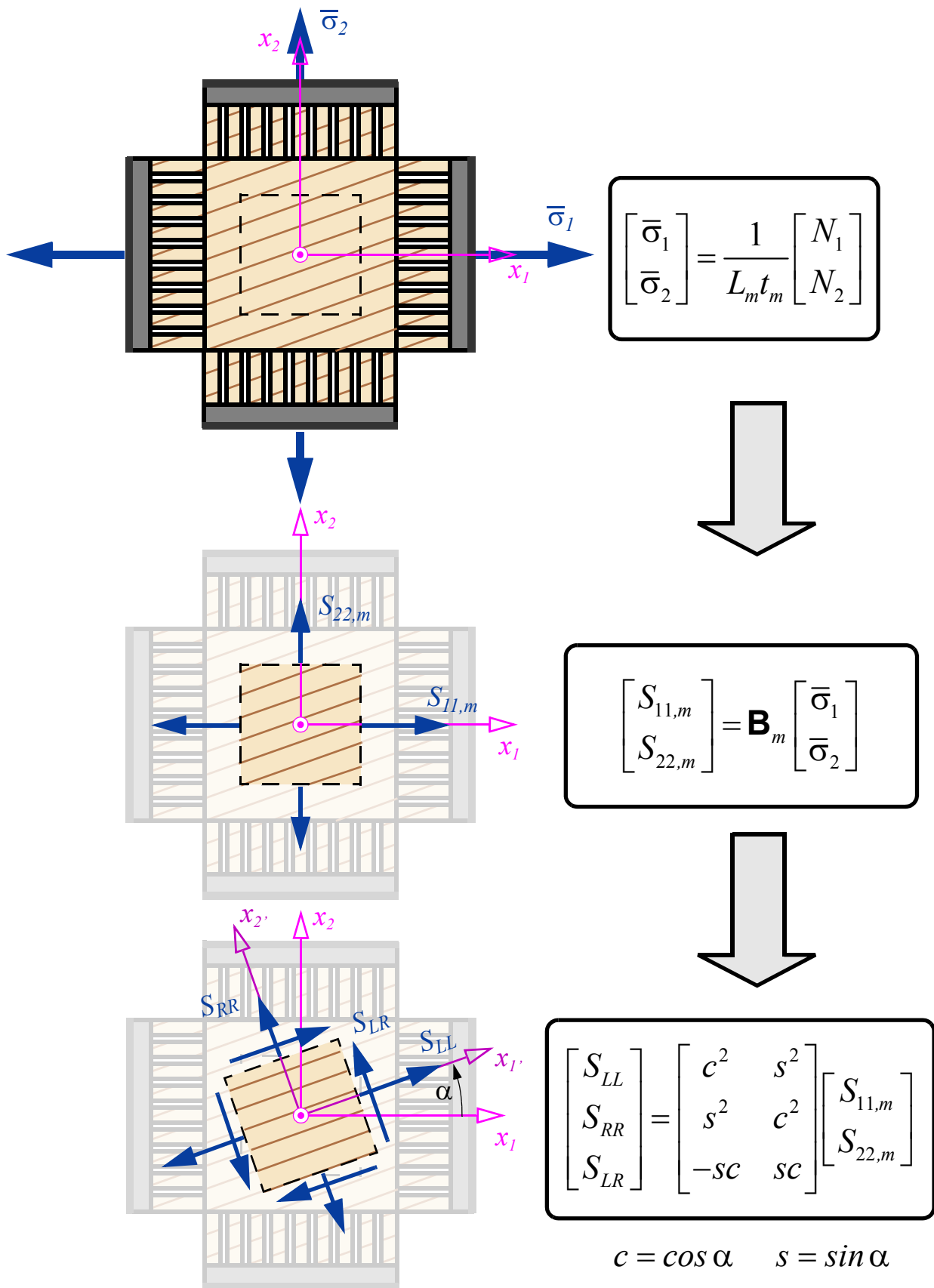


Bild 15.1 Zusammenhang (bei linearer Elastizität) zwischen den äußeren Kräften und den Spannungskomponenten in den Materialhauptachsen in der Mittelscheibe bei biaxialer Belastung

separat dargestellt (siehe Bild 15.2 bis Bild 15.11). Die elastischen Materialsteifigkeitsverhältnisse entsprechen den in Bild 14.2 festgelegten Werten und bleiben bei den weiteren Rechnungen unverändert. Beim graphischen Vergleich wird zwischen den verschiedenen Mittelscheibendicken $t_m = 4.5 \text{ mm}$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$ - die Versuchspunkte und die Versagensbedingungen werden für jede Dicke getrennt gezeichnet - und den Modellen I und II unterschieden.

Achtung: Die Transformationsbeziehung (15-1) zwischen den äußeren Kräften und den Spannungen in der Mittelscheibe ist nur bei linear-elastischem Materialverhalten gültig. Beginnt in der Mittelscheibe nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten ist der Zusammenhang nicht mehr gültig!

15.2.2 Vereinfachte Berechnung des Versagensbeginns der Lasteinleitungselemente

Zur Versagenskontrolle der Lasteinleitungselemente werden aus Vereinfachungsgründen nur die axialen Normalkräfte in den Einzelstäben, die in Summe der am Rand angreifenden Kraft entsprechen, betrachtet. Die sich aus der Spreizverformung ergebenden Querkräfte und Biegemomente werden bei der vereinfachten Versagenskontrolle nicht berücksichtigt.

15.2.2.1 Darstellung des elastischen Limits der Lasteinleitungselemente in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene

Die Normalspannungen in den Einzelstäben der Randbereiche 1 und 2 zufolge der angreifenden Kräfte ergeben sich zu:

$$S_{11,1} = \frac{L_m t_m}{9h_{k,j} t_k} \bar{\sigma}_1 \quad S_{11,2} = \frac{L_m t_m}{9h_{k,j} t_k} \bar{\sigma}_2 \quad (15-3)$$

Mit den Spannungstransformationen

$$\begin{array}{ll} \text{Lasteinleitungselem. 1:} & \text{Lasteinleitungselem. 2:} \\ S_{LL} = S_{11,1} c^2 & S_{LL} = S_{11,2} s^2 \\ S_{RR} = S_{11,1} s^2 & S_{RR} = S_{11,2} c^2 \\ S_{LR} = -S_{11,1} s c & S_{LR} = S_{11,2} s c \end{array} \quad (15-4)$$

lassen sich die Versagensbedingungen für die Lasteinleitungselemente 1 und 2 anschreiben:

$$F_i(S_{LL}, S_{RR}, S_{LR}) \quad \Rightarrow \quad F_{i,1}(\bar{\sigma}_1), \quad F_{i,2}(\bar{\sigma}_2) \quad (15-5)$$

15.2.2.2 Maßgebender Versagensmechanismus und zugehörige Limitspannung in Abhängigkeit von der Faserneigung

Für das Lasteinleitungselement 1 sind die Versagensbedingungen $F_{i,1} = 0$ in der graphischen Darstellung Geraden parallel zur $\bar{\sigma}_2$ -Achse; für das Lasteinleitungselement 2 sind alle Versagensbedingungen $F_{i,2} = 0$ in der graphischen Darstellung Geraden parallel zur $\bar{\sigma}_1$ -Achse.

Durch die Umrechnung der Versagensbedingungen mit den Gleichungen aus (15-3) und (15-4) ergibt sich eine Abhängigkeit von der Faserneigung α und dem Dickenverhältnis $\eta = t_m/t_k$. Welche der fünf Versagensbedingungen bei den fünf Faserneigungen $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$ im Druck- bzw. Zugbelastungsfall maßgebend ist, lässt sich aus den Untersuchungen in Kap. 12.4.3 Gleichung (12-23) und Gleichung (12-24) oder aus Bild 12.9 und Bild 12.10 ablesen.






Im Lasteinleitungselement 2 (und 4) ist, unabhängig von den diskreten Winkeln $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$ und bei den gewählten Festigkeitsverhältnissen, auf Druck nur der Versagensmechanismus (4) „Druckversagen normal zur Faserrichtung“ und auf Zug nur der Versagensmechanismus (2) „Querzugversagen normal zur Faserrichtung“ maßgebend. Der Grund dafür ist aus Bild 12.9 oder Bild 12.10 ablesbar: Für den Randbereich 2 ist die axiale Grenzspannung bei einem Winkel $90^\circ - \alpha$ abzulesen. Bei den fünf Faserneigungen aus den Versuchen liegt die axiale Versagenslast mit dem zugehörigen Versagensmechanismus somit immer im Bereich zwischen 45° und 90° . In diesen Winkelbereichen ist auf Zug nur der Versagensmechanismus (3) und auf Druck nur der Versagensmechanismus (4) relevant.

15.2.3 Graphische Darstellung des elastischen Limits des Probekörpers

Die Probekörper unterscheidet sich durch die Faserneigung α und die Dicke t_m des Mittelscheibenelements. Mit den fünf Winkeln $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$ und den jeweils zwei Messfelddicken ($t_m = 4.5$ mm und 7.5 mm) hat man zehn unterschiedliche Probekörperkonfigurationen. Für jede dieser zehn Konfigurationen sind in den Darstellungen von Bild 15.2 bis Bild 15.11 die gemessenen Bruchbeanspruchungen und die Bereiche eingezeichnet, in denen sich das Mittelscheibenelement und die Lasteinleitungselemente elastisch verhalten und (noch) kein Versagen eintritt.

Bei den dargestellten Versagensbedingungen des Mittelscheibenelements werden bei der Transformation der Spannungen zwei Modelle betrachtet. Im Bereich zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt die Elastizitätsgrenze des Mittelscheibenelements. Der von Modell II begrenzte elastische Bereich ist weiß eingezeichnet. Der Übergangsbereich zu Modell I ist hellgrau schattiert. Der Bereich zwischen der Elastizitätsgrenze des Mittelscheibenelements und den Versagensbedingungen der Lasteinleitungselemente ist in der $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\}$ -Spannungsebene mittelgrau hinterlegt. Die horizontalen (vertikalen) Grenzlinien gehören zu Lasteinleitungselement 2 (1).

Für die Darstellung der Versagensbedingungen und der gemessenen Bruchpunkte werden in Bild 15.2 bis Bild 15.11 folgende Symbole und Linientypen verwendet:

	... Bruchpunktmessdaten	
	... Bruchpunktmessdaten (mit abweichendem elastischen Verhalten)	
	... Mittelscheibe; Modell II (<i>pinned</i>)	(15-6)
	... Mittelscheibe; Modell I (<i>fixed</i>)	
	... Lasteinleitungselement 1 (vertikale Linien) und 2 (horizontale Linien)	

Um eine dimensionslose Darstellung zu erhalten, werden - wie bereits in Kap. 12.5.3 - die einaxialen Zugversagenslasten $S_{11,t}$ und $S_{22,t}$ aus Kap. 12.4.3 des Holzversagensmodells als Referenzspannungen $\bar{\sigma}_{1,ref}$ bzw. $\bar{\sigma}_{2,ref}$ verwendet.

Ohne eine nichtlineare Systemberechnung durchzuführen, lassen sich durch Vergleich der Darstellungen der Elastizitätsgrenzen der Einzelbestandteile des Probekörpers mit den Messdaten der Bruchpunkte erste Aussagen zum Trag- und Versagensverhalten des Probekörpers machen.

15.2.3.1 Elastizitätsgrenze des Probekörpers - Versagensbeginn

Aus Bild 15.2 bis Bild 15.11 erkennt man sofort, dass bei allen untersuchten Faserneigungen bei der aufgebrachtten biaxialen Belastung Versagen planmäßig zuerst im Mittelscheibenelement auftritt. Nur bei den Winkeln $\alpha = 7.5^\circ$ und 15° , einer Messfelddicke von $t_m = 7.5$ mm und bei Verwendung von Modell I (Bild 15.5 und Bild 15.7) sind kleinere Bereiche vorhanden, in denen in den Lasteinleitungselementen 2 bzw. 4 vor der Mittelscheibe Versagen eintritt. Bei den spröden Versagensmechanismen deckt sich das Versagen des Mittelscheibenelements mit dem Versagen des Probekörpers.

Aus der Betrachtung von Bild 15.2 bis Bild 15.11 lässt sich Folgendes feststellen:

- Bei Lasteinleitungselement 1 wechseln je nach Faserwinkel die möglichen Versagensmechanismen, während in den Lasteinleitungselementen 2 und 4 nur Querdruck- oder Zugversagen normal zur Faserrichtung (Versagensmechanismus 3 oder 4) auftreten kann (siehe Kap. 15.2.2).
- Da bei Aktivierung eines spröden Versagensmechanismus des Mittelfeldes auch das Probekörpertraglimit erreicht ist, werden in diesem Fall die Lasteinleitungselemente nie versagen.
- Bei Aktivierung von duktilen Versagensmechanismen in der Mittelscheibe ist aber ein Versagen der Lasteinleitungselemente potentiell möglich. Aus den Darstellungen sieht man, dass in den Fällen mit größerer Mittelscheibendicke ($t_m = 7.5$ mm) ein solcher Versagensfall eher auftritt. Außerdem lässt sich aus der graphischen Darstellung schließen, dass Versagen in den Lasteinleitungselementen 2 bzw. 4 eher auftritt, als in Lasteinleitungselement 1 bzw. 3, was auch später durch die Bruchbilder bestätigt wird. Bei der Messfelddicke $t_m = 4.5$ mm lassen die gemessenen Bruchpunkte duktilen Versagen (Versagensmechanismus 4: „Druckversagen normal zur Faserrichtung“) in den Lasteinleitungselementen 2 und 4 nur bei einer Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und 7.5° und bei

der Beanspruchungskombination $\kappa = 0:-1$ vermuten (Bild 15.2 und Bild 15.4). Bei einer Messfelddicke $t_m = 7.5$ mm und den Faserneigungen $\alpha = \{0^\circ, 7.5^\circ\}$ tritt nach Vergleich der gemessenen Bruchpunkte mit den berechneten Versagensbedingungen bei mehreren Beanspruchungskombinationen Versagen im Lasteinleitungselement 2 (bzw. 4) auf (Bild 15.3 und Bild 15.5). Eventuell ist auch bei $\alpha = 15^\circ$ diese Art des Versagens möglich.

- Sofern die in der Mittelscheibe aktivierten Schubmechanismen etwas Duktilität vor dem Bruch zulassen, tritt bei $\alpha = 15^\circ$ auch Schubversagen in den Lasteinleitungselementen 1 und 3 auf (Bild 15.7). Bei der Faserneigung 45° zeigt ein Bruchpunkt mögliches Querszugversagen in den Lasteinleitungselementen an (bei 45° verhalten sich die Element 1 bis 4 gleich). Das ist nur möglich, wenn der zuvor aktivierte Schubversagensmechanismus in der Mittelscheibe genügend duktiles Verformungspotential besitzt.

In Kap. 15.4 werden die Belastungskombinationen in unterschiedliche Versagensszenarien unterteilt. Dort werden im Detail die Belastungen beschrieben, die potentiell zu Versagen der Lasteinleitungselemente führen. Die Bruchbilder bestätigen dabei die obigen Betrachtungen.

$$\alpha = 0^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}$$

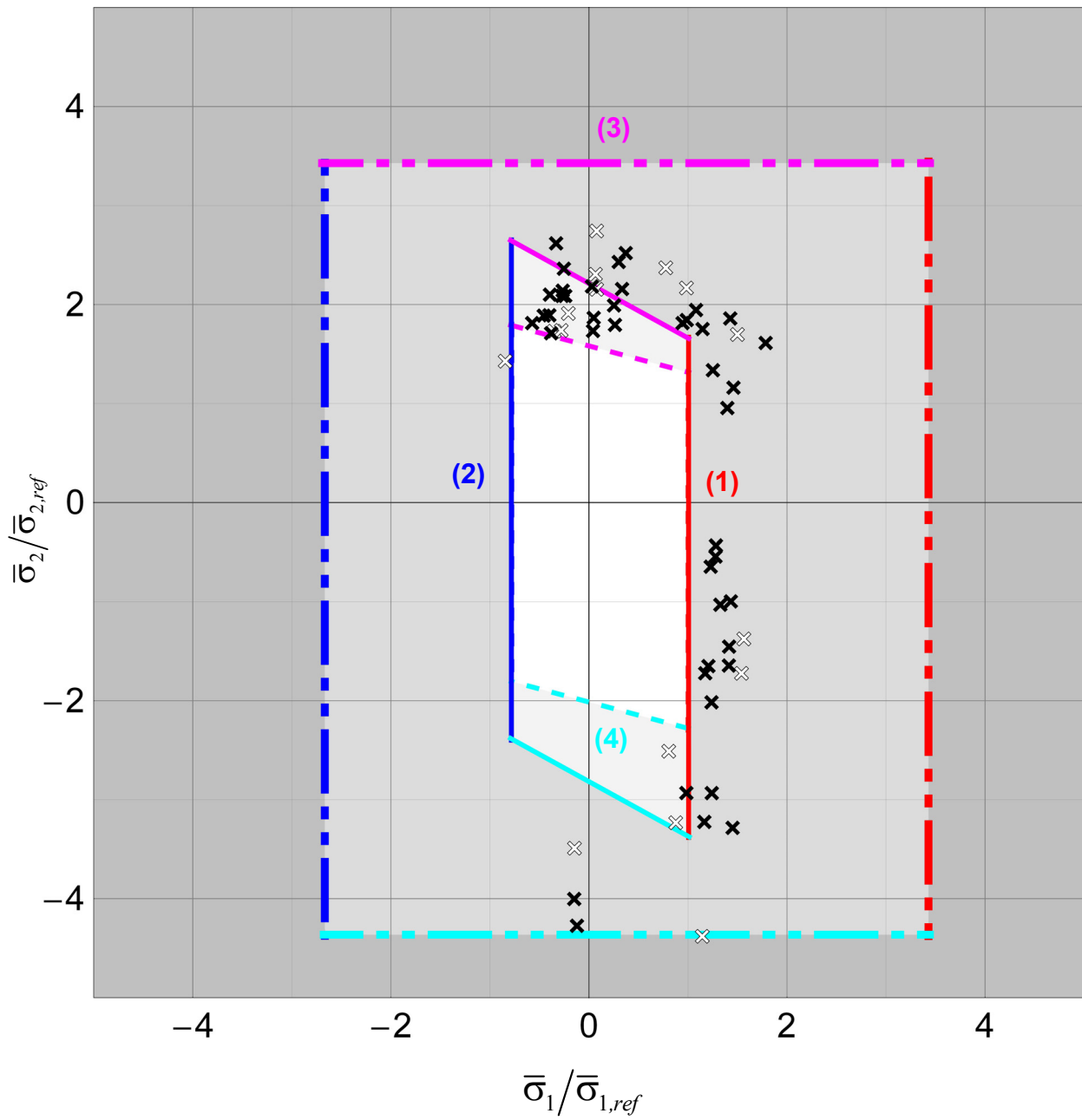


Bild 15.2 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und $t_m = 4.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 0^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

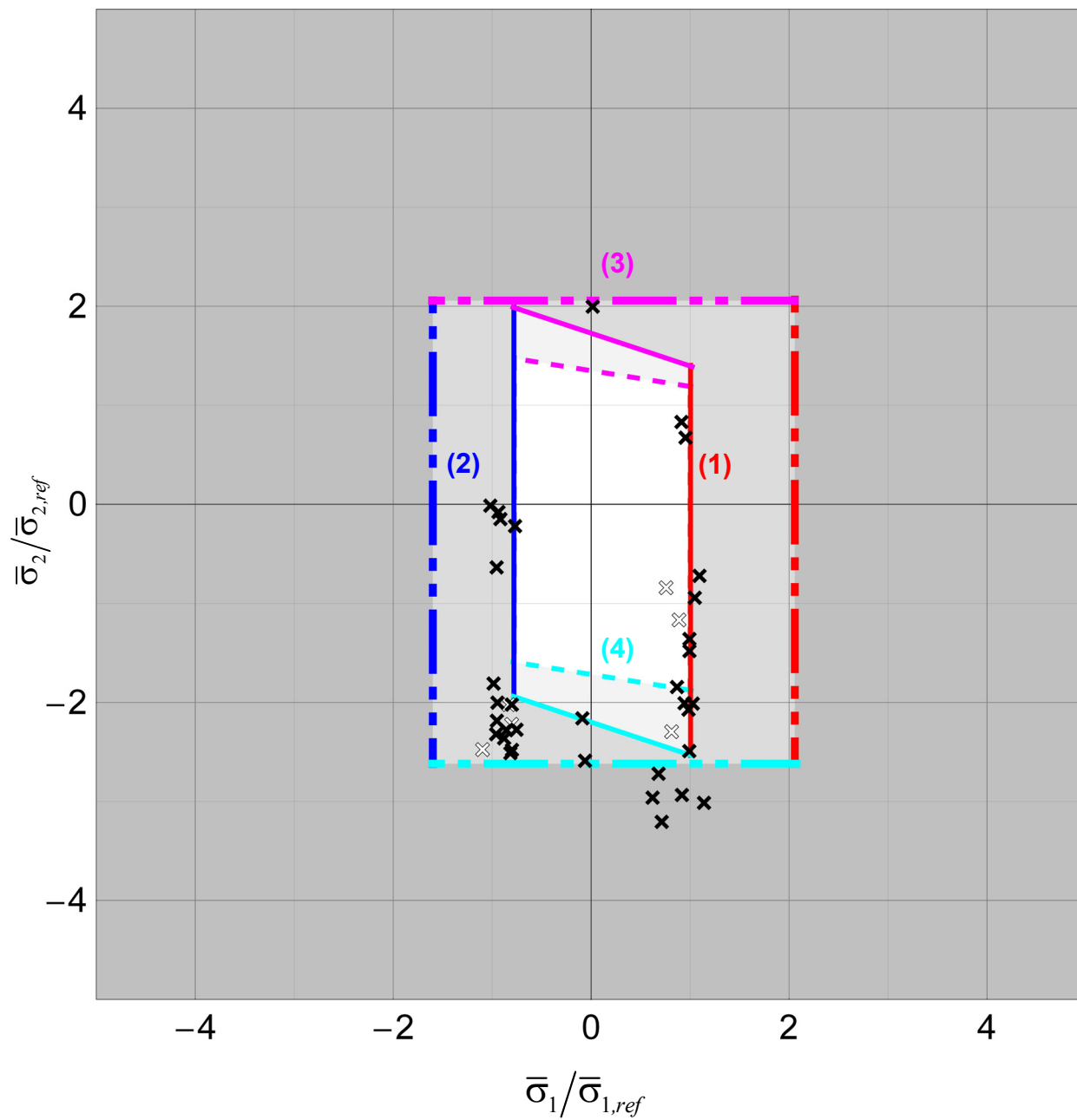


Bild 15.3 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 7.5^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}$$

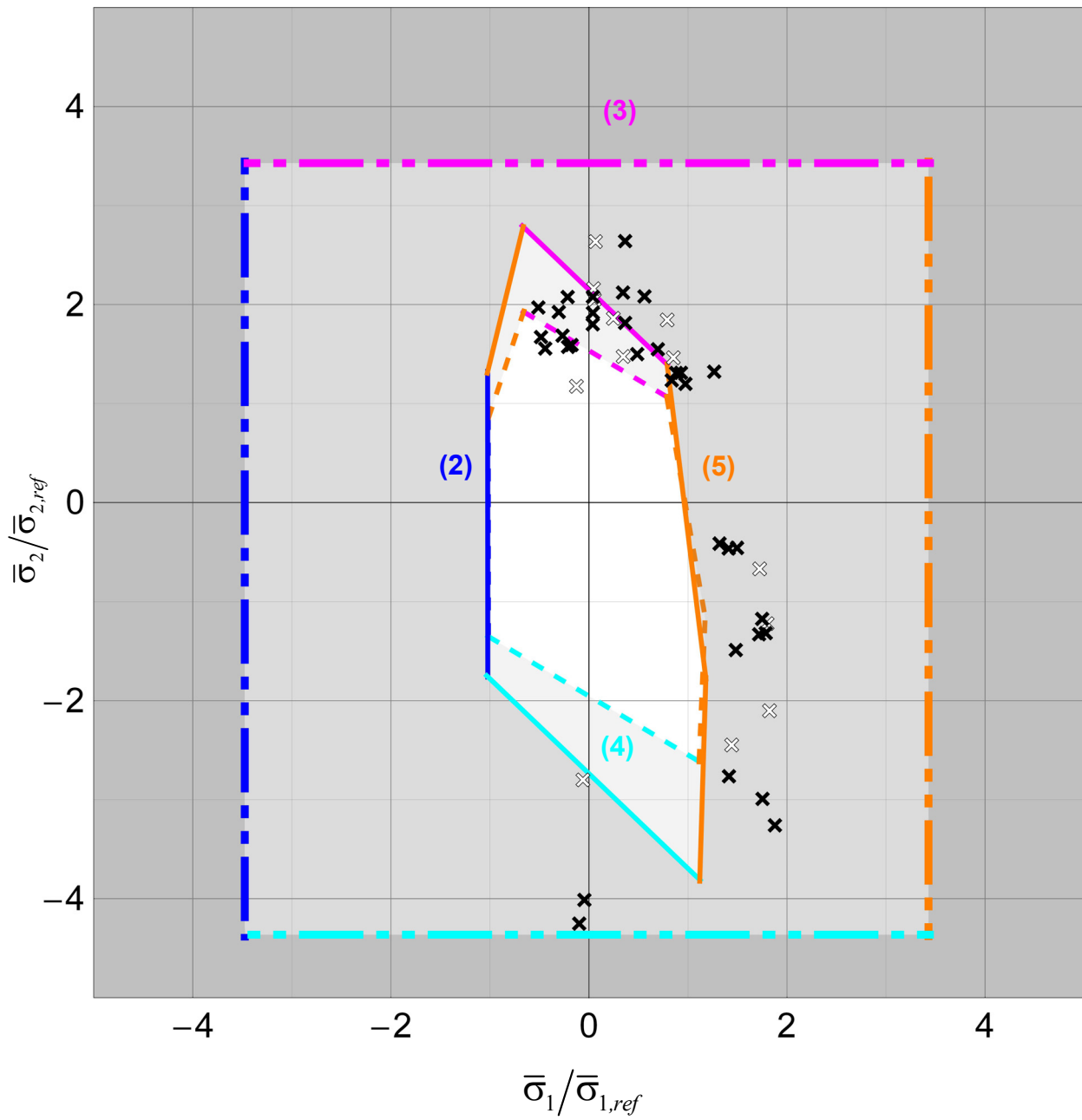


Bild 15.4 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 7.5^\circ$ und $t_m = 4.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 7.5^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

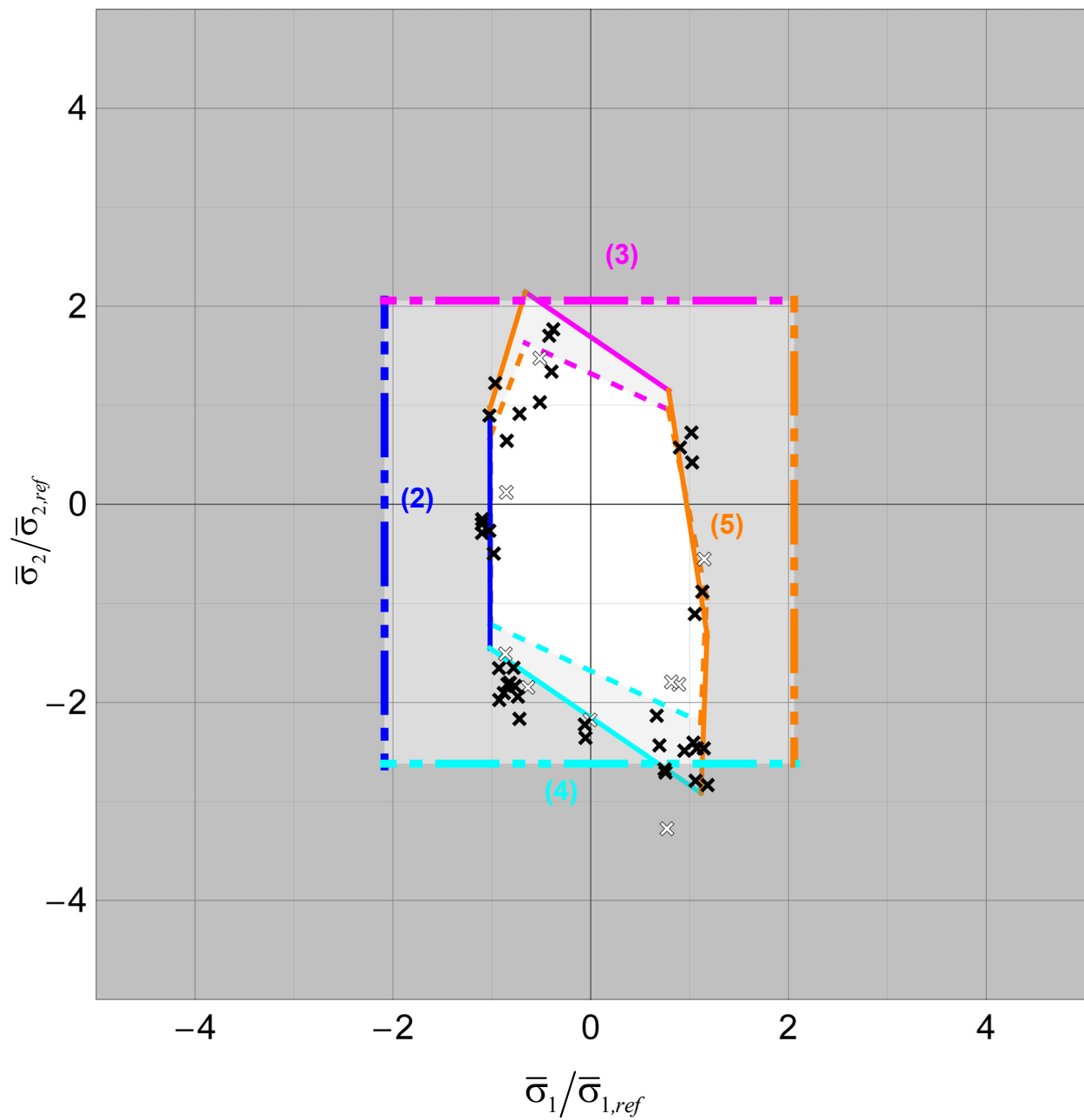


Bild 15.5 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 7.5^\circ$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 15^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}$$

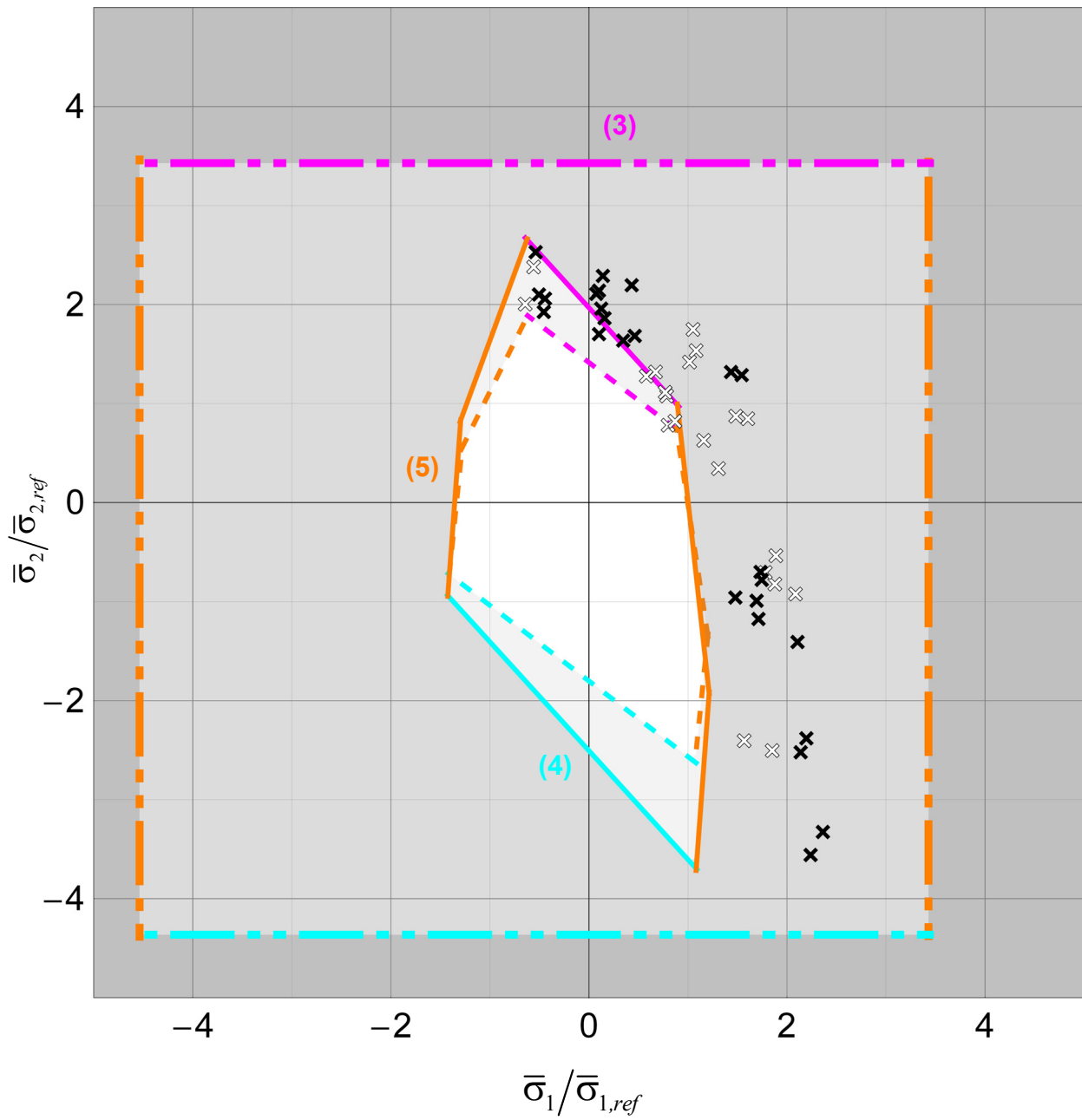


Bild 15.6 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 15^\circ$ und $t_m = 4.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 15^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

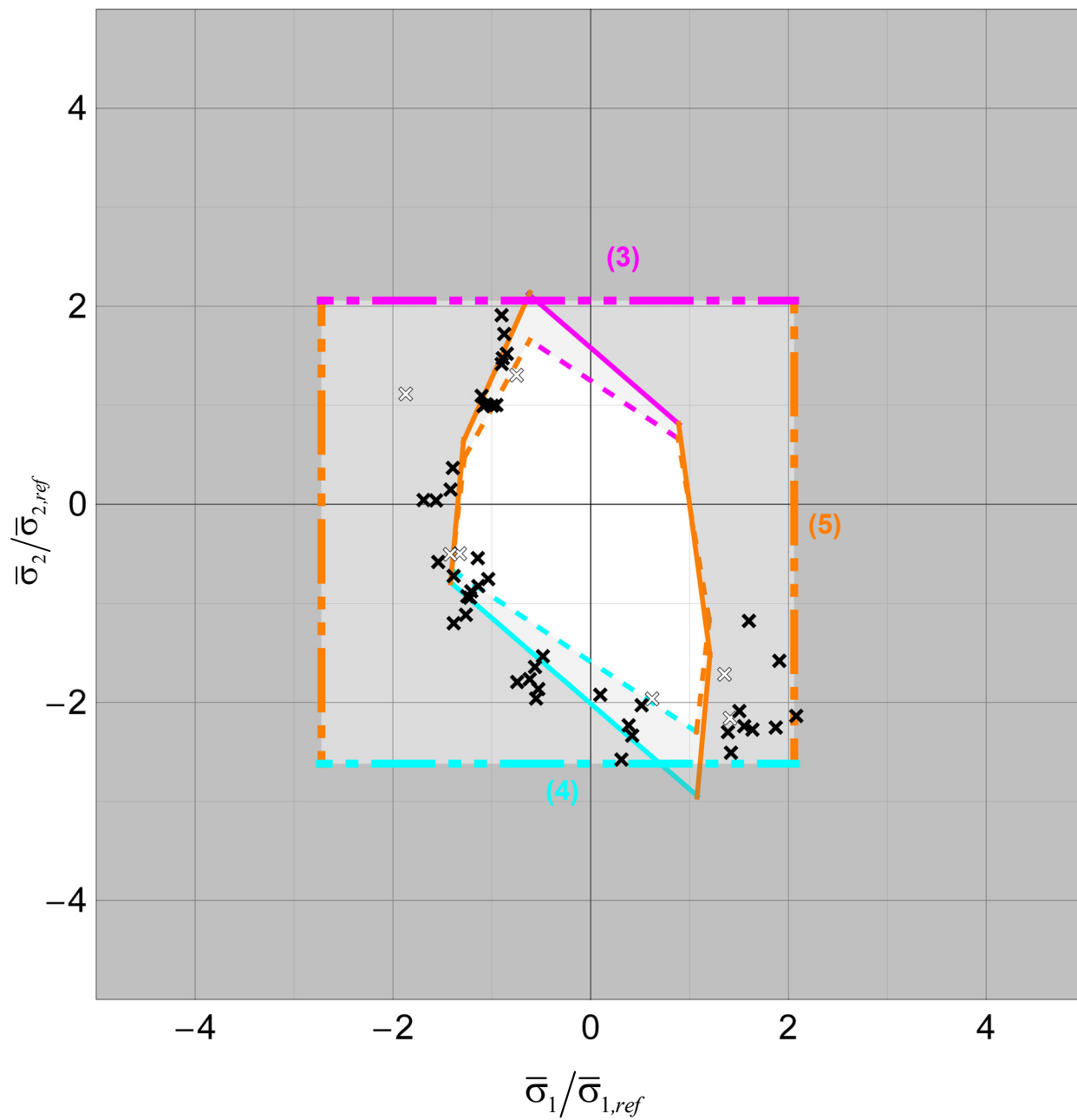


Bild 15.7 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 15^\circ$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$

$\alpha = 30^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}$

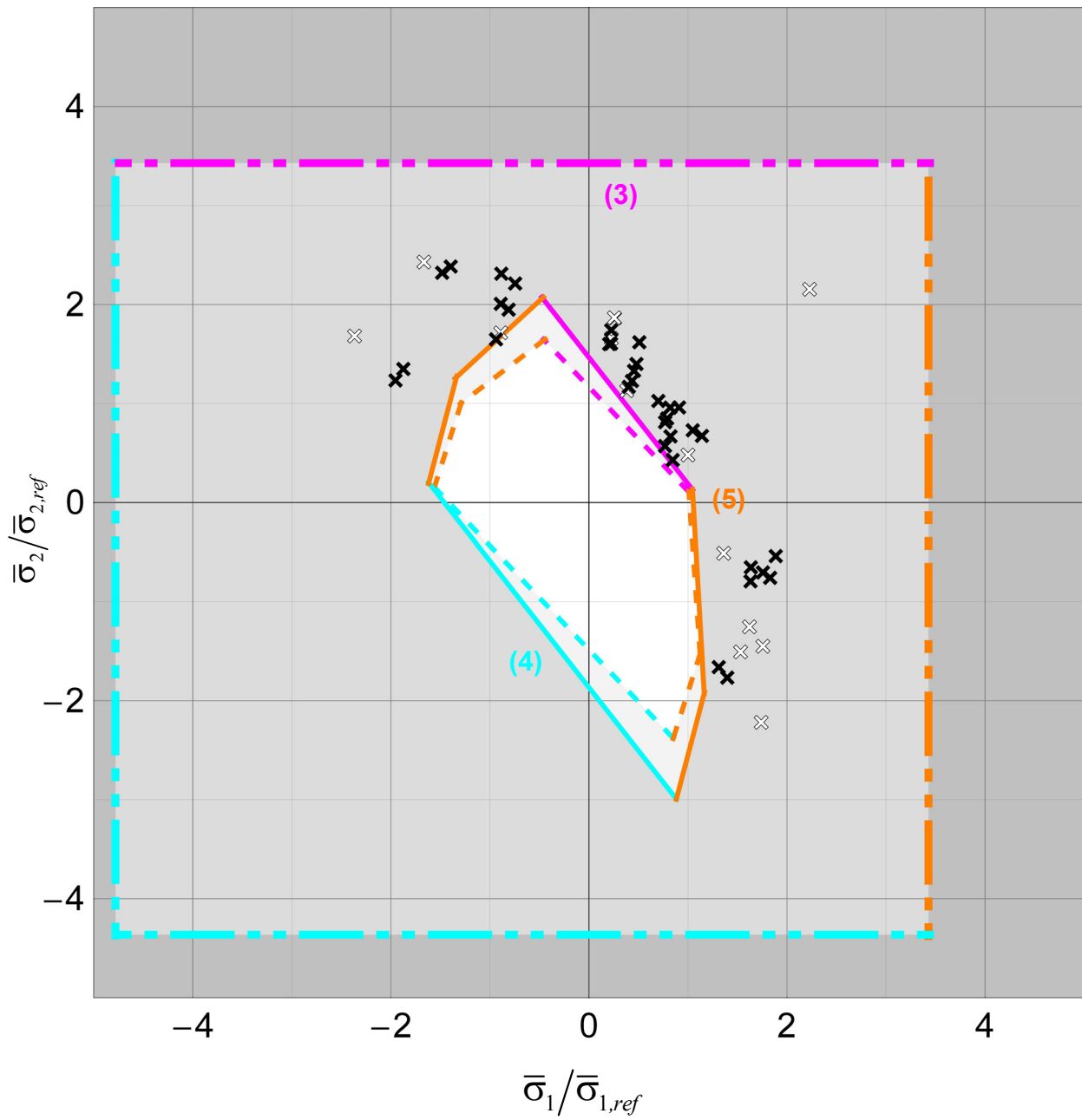


Bild 15.8 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 30^\circ$ und $t_m = 4.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 30^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

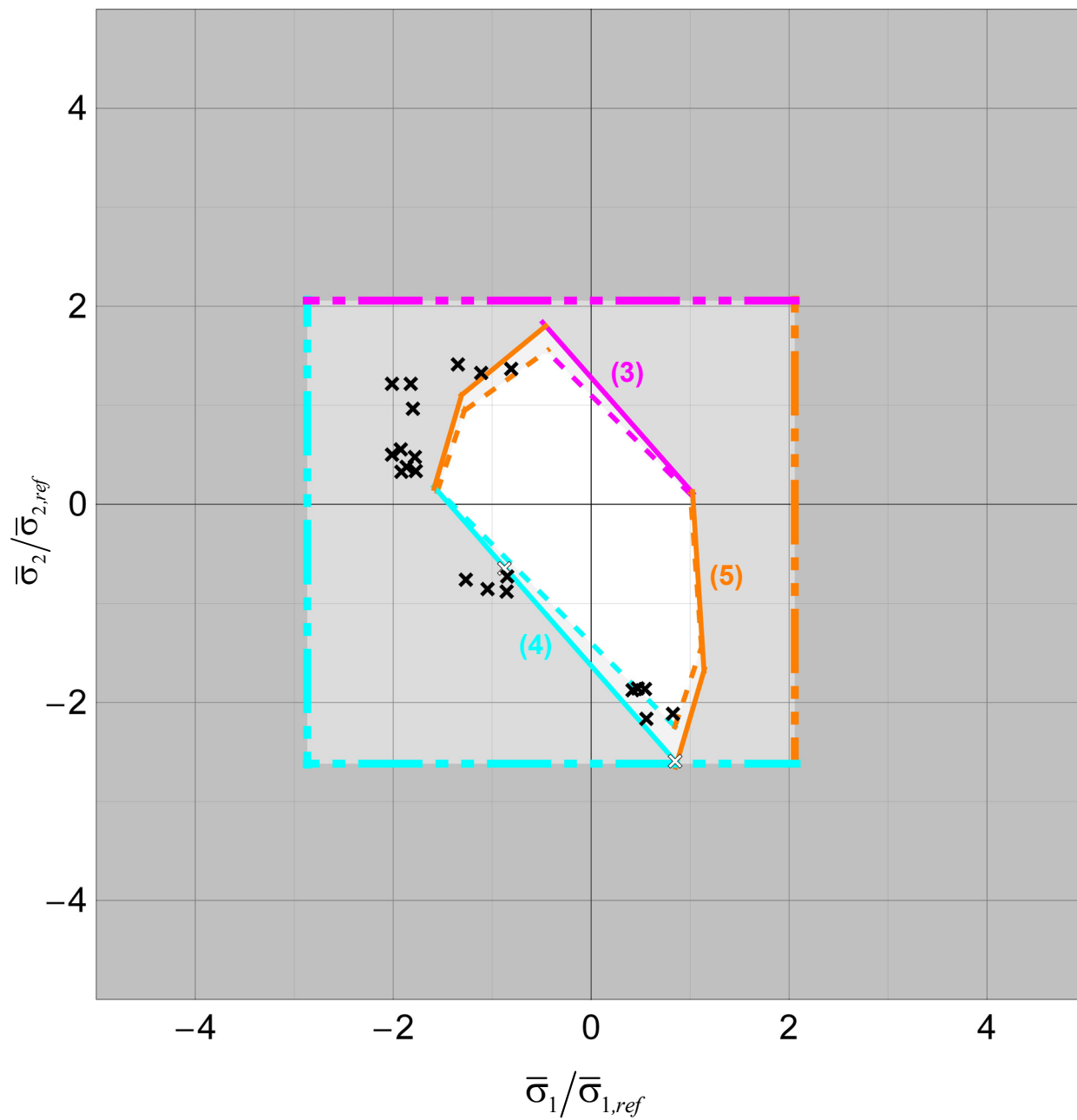


Bild 15.9 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 30^\circ$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$

$\alpha = 45^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}$

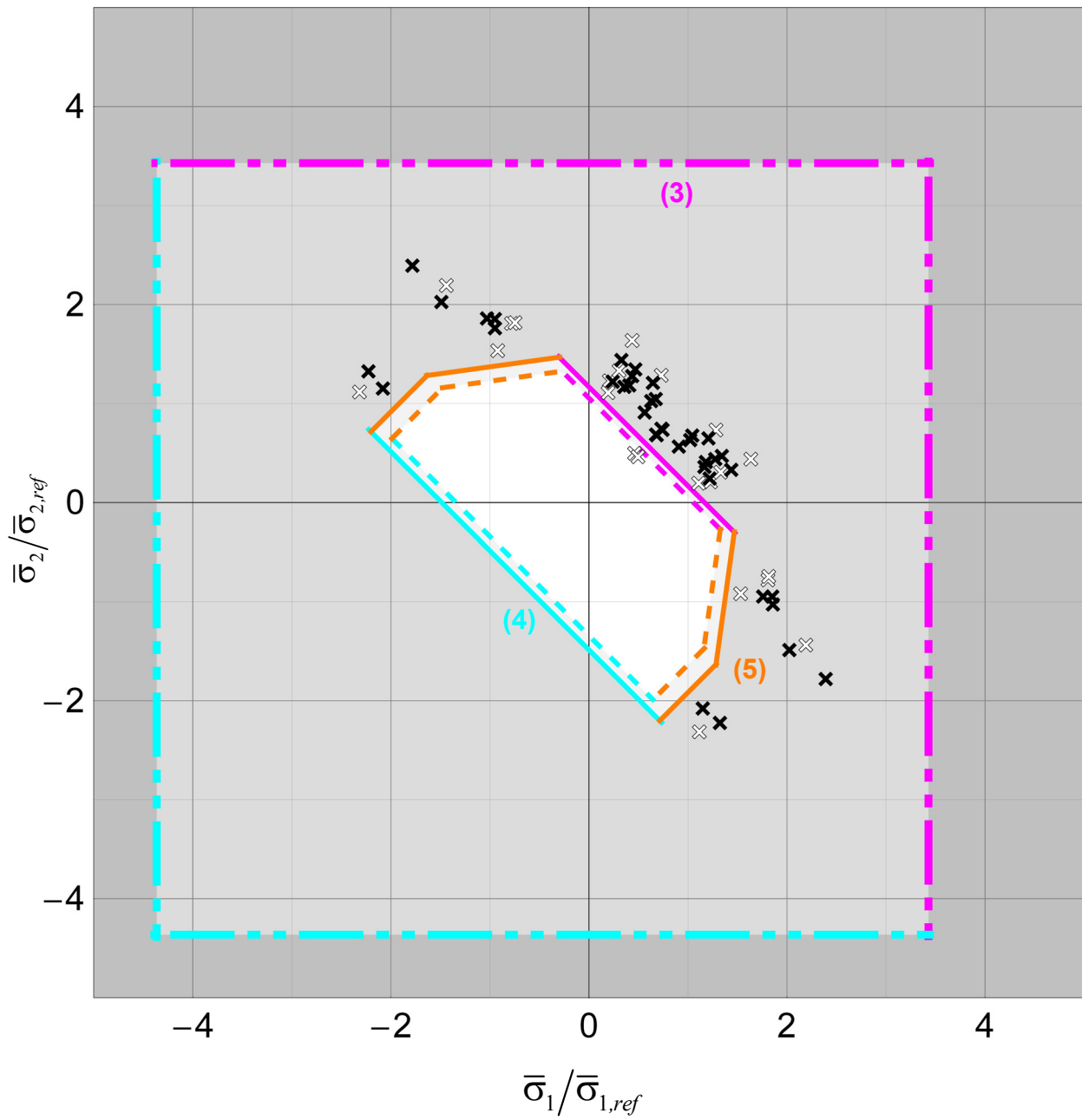


Bild 15.10 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 45^\circ$ und $t_m = 4.5 \text{ mm}$

$$\alpha = 45^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

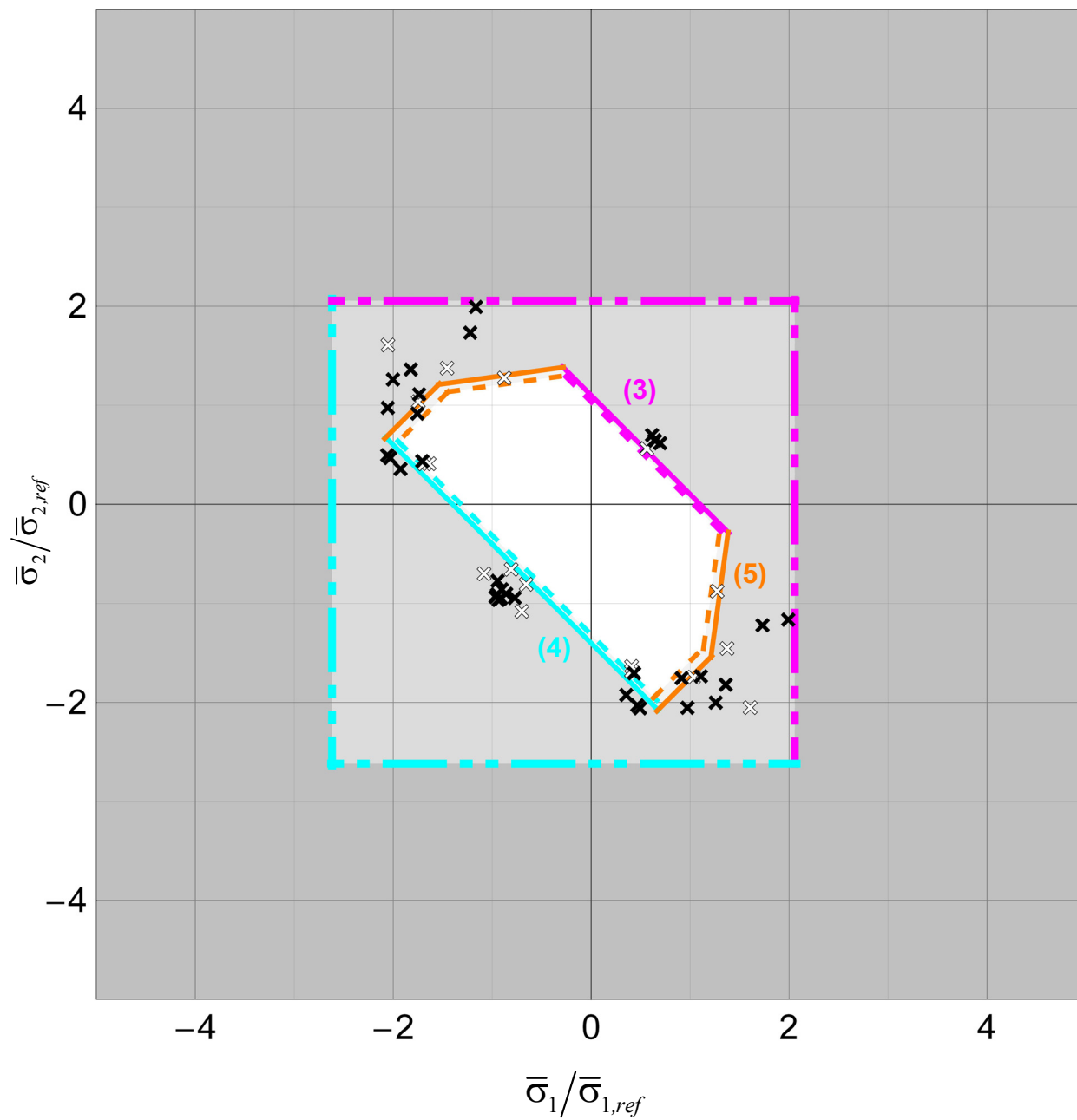


Bild 15.11 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 45^\circ$ und $t_m = 7.5 \text{ mm}$

15.3 Einschub: Nichtlineares Rechenmodell

In Kap. 14 wurde die elastische Systemberechnung basierend auf einfachen Betrachtungen umgesetzt. Für die nichtlineare Systemrechnung muss aufgrund der Verwendung des nichtlinearen Holzmaterialmodells die Vorgehensweise systematisiert werden.

15.3.1 Systemannahmen und Vereinfachungen

Folgende Annahmen und Vereinfachungen liegen der Berechnung zugrunde:

- die Berechnung erfolgt am halben System
- die Belastung in der Berechnung erfolgt verschiebungsgesteuert: Die Randverschiebungen \bar{u} und \bar{v} werden dem Beanspruchungsverhältnis κ entsprechend vorgegeben und über einen Lastfaktor Λ allmählich gesteigert
- durch die Verschiebungssteuerung stellen sich die begleitenden (passiven) Randverformungen so ein, dass selbst im plastischen Zustand stets eine biaxiale Beanspruchungssituation in der Mittelscheibe bzw. am Probenrand vorherrscht. Am Rand wirken dabei immer nur die zu den Randverschiebungsgrößen korrespondierenden Kraftkomponenten N_1 und N_2 . Momente und Kräfte parallel zum Rand sind bei dieser Belastung stets null
- nur das Mittelscheibenelement verhält sich materiell nichtlinear. Es gelten die Versagensbedingungen aus Kap. Box 12.3. Die plastischen Mechanismen sind dazu assoziiert. Die Lasteinleitungselemente verhalten sich linear-elastisch,
- für die Lasteinleitungselemente werden die Steifigkeitsmatrizen von Modell I und Modell II verwendet,
- das Versagen der Lasteinleitungselemente wird vereinfacht abkontrolliert. Dabei werden nur die Normalspannungen, die sich aus den eingeleiteten Normalkräften ergeben, berücksichtigt. Biegemomente und Querkräfte, die sich aus der Spreizverformung ergeben, werden nicht berücksichtigt, siehe auch Kap. 15.2.2.
- als elastische Materialkennwerte werden die Größen aus Gleichung (15-7) gewählt. Das entspricht einem mittleren Wert zwischen den im vorigen Kapitel angegebenen oberen und unteren Grenzwert:

$$E_L = 12000 \text{ N/mm}^2 \quad E_R = G_{LR} = \frac{E_L}{20} = 600 \text{ N/mm}^2 \quad \nu_T = 0.1 \quad (15-7)$$

- die Festigkeitswerte werden aus Gleichung (12-13) übernommen,
- um die Starrkörperrotation des gesamten Systems zu verhindern, wird die Starrkörperrotation Ω_m der Mittelscheibe festgehalten. Das dafür benötigte Auflagermoment muss aber stets null sein.

- Der am Belastungsbeginn eingeleitete Vorspannzustand wird in den Systemgleichungen mitberücksichtigt. Die Vorspannkräfte $N_1 = N_2$ sind jeweils ungefähr 900 N. Der in der Rechnung verwendete Wert wird aus dem Mittelwert der gegebenen Versuchsdaten berechnet und der zugehörige Verformungszustand rückgerechnet.
- Die Lösung der nichtlinearen Gleichungen erfolgt mit einem inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahren inklusive eines automatischen Schrittweitensteuerungsalgorithmus.

15.3.1.1 Berücksichtigung der vereinfachten Kontrolle der Lasteinleitungsbereiche im Rechenmodell

Im später vorgestellten Rechenmodell werden nur die elastischen Steifigkeitsmatrizen der Lasteinleitungselemente berücksichtigt. Die Ausbildung von plastischen Verformungen in den Einzelstäben der Stabreihe wird durch das Rechenmodell nicht wiedergegeben. Diese Vereinfachung lässt sich mit dem Argument rechtfertigen, dass das Versagensverhalten des Probekörpers grundsätzlich vom Mittelscheibenelement bestimmt wird. Erreicht die Normalspannung in den Lasteinleitungselementen zufolge der vereinfachten Kontrolle einen duktilen oder spröden Versagensmechanismus, ist keine weitere Last über den Lasteinleitungsbereich übertragbar und das Traglimit des Probekörpers ist erreicht. Um das Eintreten einer solchen Versagenssituation aufzuzeigen, reicht der oben angeführte vereinfachte Nachweis aus. Die Weiterführung der nichtlinearen Rechnung ist für die Untersuchung des Tragverhaltens des Probekörpers nicht notwendig.

Die Randbereiche sollten eigentlich nie versagen. Die Probekörpergeometrie mit den unterschiedlichen Dicken in der Mittelscheibe wurde so konzipiert, dass Versagen auf die Mittelscheibe beschränkt bleiben sollte. Es wird aber nachfolgend gezeigt, dass in einigen Belastungssituationen auch die Lasteinleitungselemente versagensbestimmend für den Probekörper werden.

15.3.2 Mittelscheibenelement: Innerer Kräftevektor & Steifigkeitsmatrix

15.3.2.1 Innerer Festhaltekräftevektor

Das Mittelscheibenelement hat die vier Systemfreiheitsgrade \mathbf{u}_m (14-5). Der zugehörige innere Kräftevektor ergibt sich aus dem inneren virtuellen Arbeitsausdruck

$$\delta W_{int,m} = - \int_{V_m} \mathbf{s}^T \delta \mathbf{e} dV_m = \delta \mathbf{u}_m^T (-\mathbf{f}_{int,m}) \quad (15-8)$$

zu:

$$\mathbf{f}_{int,m} = t_m L_m^2 \begin{bmatrix} S_{11,m} & S_{22,m} & S_{12,m} & 0 \end{bmatrix}^T = t_m L_m^2 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15-9)$$

Die konsistente Linearisierung des inneren Kräftevektors nach den Verschiebungsgrößen ergibt die Steifigkeitsmatrix des Mittelscheibenelements:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int,m}}{\partial \mathbf{u}_m} = \mathbf{K}_m = t_m L_m^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{alg,ESZ} & \mathbf{0}_{(3,1)} \\ \mathbf{0}_{(1,3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (15-10)$$

15.3.3 Lasteinleitungselement: Innerer Kräftevektor & Steifigkeitsmatrix

Der innere Kräftevektor ergibt sich (aufgrund der Annahme linearer Elastizität) aus der Steifigkeitsmatrix von Modell I oder Modell II aus Kap. 14.4 zu:

$$\delta W_{int,i} = \delta \mathbf{u}_i^T (-\mathbf{f}_{int,i}) = \delta \mathbf{u}_i^T (-\mathbf{K}_i \mathbf{u}_i) \quad (15-11)$$

Die sieben Elementfreiheitsgrade \mathbf{u}_i sind in dimensionsgleicher Form in Gleichung (14-11) angeführt.

15.3.4 Systemfreiheitsgrade & Systemassemblierung

Unter Berücksichtigung der Symmetrie hat das System zehn Freiheitsgrade:

$$\mathbf{u}_{sys} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} \quad (15-12)$$

Das sind die vier Freiheitsgrade \mathbf{u}_m des Mittelscheibenelements aus Gleichung (14-5) und die sechs Randverformungsgrößen Bild 15.12 aus Gleichung (14-1).

15.3.4.1 Zusammenhang zwischen Element- und Systemfreiheitsgraden

Mit

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{T}_m \mathbf{u}_{sys} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{(4,4)} & \mathbf{0}_{(4,6)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{sys} \quad (15-13)$$

und den Matrizen aus Kap. 14.5

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_{sys} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A,1} & \mathbf{0}_{(4,3)} & \mathbf{0}_{(4,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,4)} & \mathbf{T}_{E,1} & \mathbf{0}_{(3,3)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{sys} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{u}_{sys} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A,2} & \mathbf{0}_{(4,3)} & \mathbf{0}_{(4,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,4)} & \mathbf{0}_{(3,3)} & \mathbf{T}_{E,2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{sys} \quad (15-14)$$

ergibt sich der Zusammenhang zwischen den System- und den Elementfreiheitsgraden.

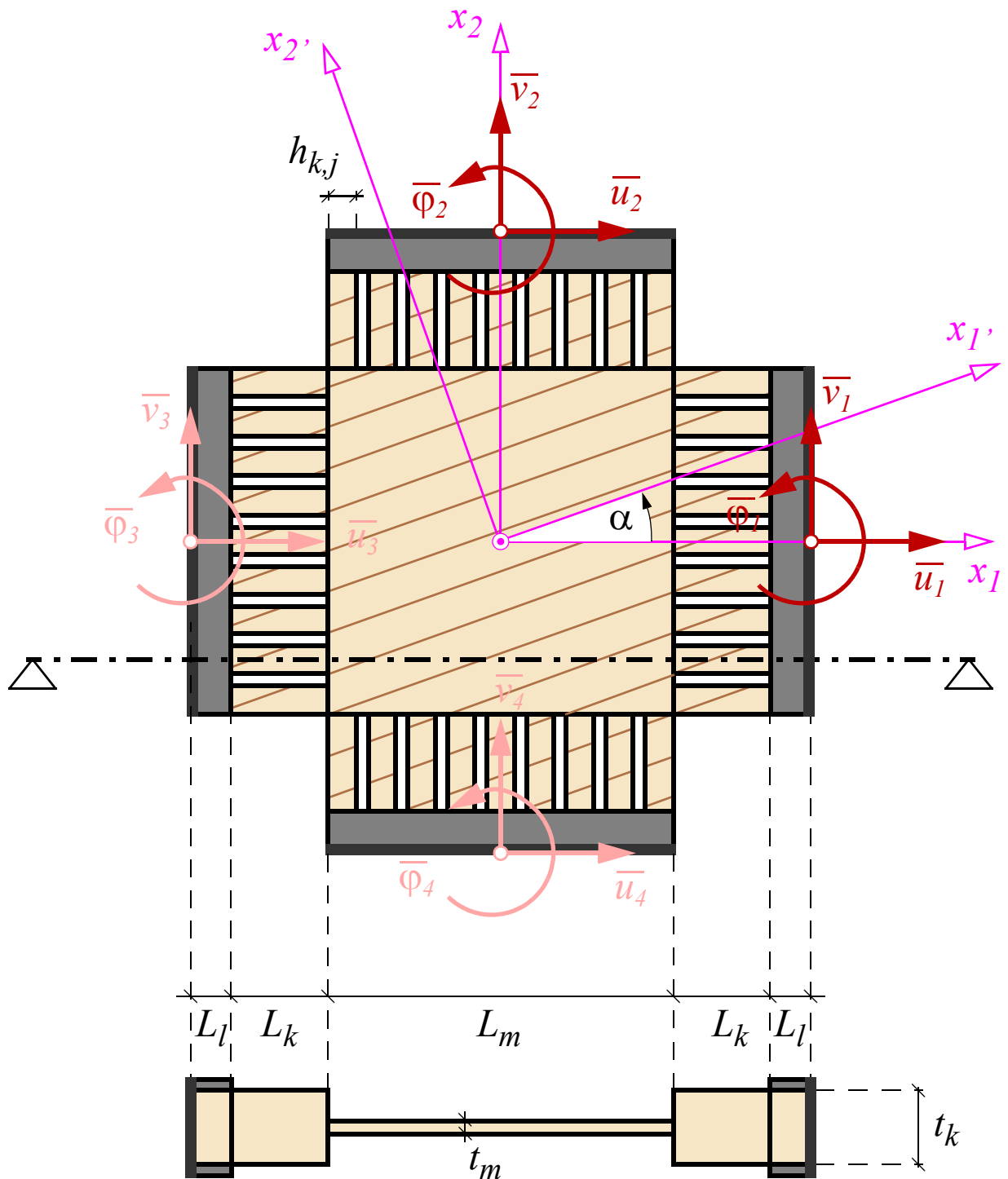


Bild 15.12 Modell des Probekörpers mit dem Messbereich (der zentralen mittleren Scheibe) und den vier Randbereichselementen

15.3.5 Gleichgewichtsgleichungen

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ergeben sich die Gleichgewichtsgleichungen des Systems.

15.3.5.1 Äußerer Belastungsvektor

Nur am Rand des Probekörpers greifen Kräfte an. Der äußere Lastvektor des Referenzlastfalls, der mit dem Lastfaktor Λ gesteigert wird, ist:

$$\mathbf{f}_{ext} = \Lambda \bar{\mathbf{f}}_{ext} = \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(4,1)} \\ \bar{\mathbf{f}}_1 \\ \bar{\mathbf{f}}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} Q_2 \\ N_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (15-15)$$

Die äußere virtuelle Arbeit am halben System - nur die Beiträge aus den Lasteinleitungselementen 1 und 2 werden angeschrieben - ist:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sys}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (15-16)$$

15.3.5.2 Innerer Systemfesthaltekräftevektor

$$\delta W_{int} = \frac{1}{2} \delta W_{int,m} + \delta W_{int,1} + \delta W_{int,2} = -\delta \mathbf{u}_{sys}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{T}_m^T \mathbf{f}_{int,m} + \mathbf{T}_1^T \mathbf{f}_{int,1} + \mathbf{T}_2^T \mathbf{f}_{int,2} \right) = -\delta \mathbf{u}_{sys}^T \mathbf{f}_{int} \quad (15-17)$$

15.3.5.3 Gleichgewichtsgleichungen

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}_{sys}^T \left(-\mathbf{f}_{int} + \Lambda \bar{\mathbf{f}}_{ext} \right) = 0 \quad (15-18)$$

15.3.5.4 Linearisierung nach den Verschiebungsgrößen

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}_{sys}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{T}_m + \mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_2 = \mathbf{K}_{sys} \quad (15-19)$$

15.3.6 Verschiebungsgesteuerter biaxialer Lastfall

Das System wird verschiebungsgesteuert belastet. Die Randverschiebungskomponenten werden vorgegeben. Der Verschiebungsvektor ergibt sich aus dem Referenzverschiebungsvektor mal dem Lastfaktor. Zusätzlich zu den Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich die Zwangsbedingungen:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (15-20)$$

Um Starrkörperrotationen des Systems zu verhindern, wird die Rotation der Mittelscheibe Ω_m null gesetzt. Diese drei geometrischen Zwangsbedingungen lassen sich in den Kompatibilitätsgleichungen zusammenfassen:

$$\mathbf{G}\mathbf{u}_{\text{sys}} - \Lambda\bar{\mathbf{u}}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (15-21)$$

mit

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \quad (15-22)$$

Um den geometrischen Zwang zu realisieren, werden drei zu den vorgegebenen Freiheitsgraden zugehörigen Kraftgrößen benötigt:

$$\mathbf{f}_{zw} = \begin{bmatrix} M_{zw,\Omega} \\ N_{zw,1} \\ N_{zw,2} \end{bmatrix} \quad (15-23)$$

Mit den angegebenen Kraftgrößen ergibt sich der zusätzliche äußere Arbeitsterm

$$\delta W_{\text{ext},zw} = (\mathbf{G} \delta \mathbf{u}_{\text{sys}})^T \mathbf{f}_{zw}, \quad (15-24)$$

der im Systemgleichgewicht mitzuberechnen ist. Da in der Berechnung die Randverschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_{\text{ext}}$ vorgegeben werden, ist der Lastvektor $\bar{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ null.

15.3.7 Systemgleichungen

15.3.7.1 Nichtlineare Systemgleichungen

Die Systemgleichungen setzen sich aus den nichtlinearen Gleichgewichtsgleichungen aus Gleichung (15-18) einschließlich des Zusatzterms aus den aufzubringenden Zwangskräften (15-24) und den Kompatibilitätsbedingungen aus Gleichung (15-21) zusammen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{\text{sys}}, \mathbf{f}_{zw}, \Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{G}^T \mathbf{f}_{zw} \\ -\mathbf{G} \mathbf{u}_{\text{sys}} \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (15-25)$$

Da in der Berechnung die Randverschiebungen vorgegeben werden, ist der Lastvektor und damit der Referenzbelastungsvektor $\bar{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ null. Die Zwangskräfte $N_{zw,1}$ und $N_{zw,2}$ entsprechen den am Rand aufzubringenden Kräften um den vorgegebenen Randverschiebungszustand zu realisieren.

15.3.7.2 Linearisierung der Gleichungen nach den Systemunbekannten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}_{\text{sys}}} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{f}_{\text{zw}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{sys}} & -\mathbf{G}^T \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0}_{(3,3)} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \end{bmatrix}, \quad (15-26)$$

15.3.7.3 Lösung der nichtlinearen Gleichungen

Das Gleichungssystem (15-25) besteht aus 10+3 Gleichungen für 14 Unbekannte. Die Unbekannten sind die Verschiebungsgrößen \mathbf{u}_{sys} , die drei Zwangskraftgrößen \mathbf{f}_{zw} und der Lastfaktor λ . Im Laufe des Newton-Raphson-Lösungsverfahrens wird eine der 14 Unbekannten als steuernde Größe für ein Berechnungssinkrement festgelegt. Je nach aktuellem Systemzustand wird der steuernde Systemfreiheitsgrad ausgewählt.

Der Vorzeichenwechsel in Gleichung (15-25) wurden eingeführt, um in der nachfolgenden Linearisierung der Gleichungen nach den Systemunbekannten ein symmetrisches Gleichungssystem zu erhalten.

15.3.8 Inklusion des Vorspannzustandes

15.3.8.1 Linear-elastische Berechnung des Vorspannzustandes

Aus den gemessenen Anfangsspannungen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ aller Versuche bei einer bestimmten Beanspruchungssituation κ werden durch Mittelwertbildung die beiden Vorspannkräfte (mit den zugehörigen Vorzeichen) $N_{1,0}$ und $N_{2,0}$ rückgerechnet. Da die anfängliche Vorspannung ausnahmslos im linear-elastischen Verhaltensbereich des Probekörpers stattfindet, lassen sich mit den linearen Gleichungen aus dem vorangegangenen Kapitel die zum Vorspannzustand zugehörigen Systemverformungen $\mathbf{u}_{\text{sys},0}$ bestimmen.

Alle Größen dieses Berechnungsanfangszustandes werden mit dem Index 0 gekennzeichnet. Die Starrkörperrotation $\Omega_{m,0}$ der Mittelscheibe ist bei der linear-elastischen Rechnung null gesetzt. Mit der Matrix \mathbf{G} aus Gleichung (15-21) und den Verformungen $\mathbf{u}_{\text{sys},0}$ des Probekörpers bei Vorspannung ergeben sich die Randverformungen:

$$\mathbf{u}_{\text{ext},0} = \begin{bmatrix} \Omega_{m,0} = 0 \\ \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u}_{\text{sys},0} \quad (15-27)$$

15.3.8.2 Einbindung des Vorspannzustandes in die Systemgleichungen

Die nichtlineare verschiebungsgesteuerte Berechnung mit dem vorgegebenen Beanspruchungszustand κ beginnt ab dem Vorspannzustand. Die nichtlinearen Gleichungen (15-25) müssen aufgrund der Vorverformung aus dem Vorspannungszustand leicht modifiziert werden:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{sys}, \mathbf{f}_{zw}, \Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int} - \mathbf{G}^T \mathbf{f}_{zw} \\ -\mathbf{G} \mathbf{u}_{sys} \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{ext} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{ext,0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (15-28)$$

Zu beachten ist, dass die Randverformungen $\mathbf{u}_{ext,0}$ im Laufe der Rechnung konstant bleiben und nicht mittels eines Lastfaktors erhöht werden. Die Systemunbekannten am Berechnungsbeginn sind die Vorspannverformungen $\mathbf{u}_{sys,0}$, der Lastfaktor $\Lambda_0 = 0$ und der Zwangskraftgrößenvektor:

$$\mathbf{f}_{zw,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_{1,0} \\ N_{2,0} \end{bmatrix} \quad (15-29)$$

Diese Größen erfüllen die Gleichungen (15-28). Da der bei der Modifikation hinzugefügte Term konstant ist, bleibt die Linearisierung der nichtlinearen Gleichungen unverändert.

15.4 Versagensszenarien des Probekörpers

Der Probekörper wird bei fünf unterschiedlichen Faserneigungen α mit 71 verschiedenen κ -Beanspruchungskombinationen belegt. Jeder dieser 71 Lastkombinationen sind im Schnitt 5 bis 6 Versuche zugeordnet. Trotz dieser großen Anzahl an Lastkombinationen lassen sich alle Versuche fünf Versagensszenarien zuordnen. Ein Versagensszenarium (kurz: *VS*) beschreibt das Auftreten bzw. eine spezielle Abfolge oder Kombination von Versagensmechanismen in den Bestandteilen des Probekörpers (Mittelscheibe, Lasteinleitungselemente). Versagensbeginn ist - wie zuvor gezeigt - immer im Mittelscheibenelement.

Kombinationen von Versagensmechanismen treten auf, wenn der erste aktivierte Versagensmechanismus der Mittelscheibe duktilen Verhalten besitzt und Kraftumlagerungen zu den Lasteinleitungselementen möglich sind. Dieses Versagensszenarium tritt vorwiegend auf, wenn der erste aktivierte Versagensmechanismus der Mittelscheibe „Druckversagen quer zur Faserrichtung“ ist. Ist der erste Versagensmechanismus, der im Mittelscheibenelement aktiviert wird, ein spröder Mechanismus, kommt es i.A. zu keiner Kraftumlagerung und der zuvor definierte Bruchpunkt des gesamten Probekörpers ist erreicht. In diesem Fall entspricht das Versagensszenarium dem aktivierten Versagensmechanismus. Die Nummerierung der Versagensszenarien des Probekörpers ist an die Nummerierung der Holzversagensmechanismen angelehnt: Die Nummer des Versagensszenariums (in römischen Zahlen angegeben) entspricht der Nummer des zuerst im Mittelscheibenelement aktivierten Versagensmechanismus. Zusätzlich wird angegeben, bei wie vielen der insgesamt 71 κ -Kombinationen das jeweilige Versagensszenarium auftritt.

Für die angeführten Versagensszenarien wird anschließend für ausgewählte κ -Beanspruchungssituationen das Last-Verformungs-Verhalten des Probekörpers berechnet und anhand der Abfolge der Aktivierung der Versagensmechanismen die berechnete Versagensgeschichte des Probekörpers erläutert. Die berechneten Kurven werden den Messdaten gegenübergestellt. Der Vergleich der Messdaten und der fotografierten Bruchbilder des Probekörpers gibt weiters Aufschluss, ob das in Rechnung prognostizierte Versagensverhalten eingetreten ist oder nicht.

15.4.1 Einteilung der Versagensszenarien

Es werden folgende Versagensszenarien des Probekörpers unterschieden:

- **Versagensszenarium (I):**
Faserparalleles Zugversagen in der Mittelscheibe (3 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (II):**
Faserparalleles Druckversagen in der Mittelscheibe (4 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (III):**
Zugversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung (19 κ -Kombinationen)

- **Versagensszenarium (IVa):**
Druckversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung (1 κ -Kombination)
- **Versagensszenarium (IVb):**
Druckversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung mit anschließendem Druckversagen der Lasteinleitungsbereiche (10 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (IVc):**
Druckversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung mit anschließendem Schubversagen (9 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (IVd):**
Druckversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung mit anschließendem Zugversagen der Mittelscheibe in Faserrichtung (3 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (IVe):**
Druckversagen in der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung und daran anschließende Aktivierung von faserparallelem Druckversagen (2 κ -Kombinationen)
- **Versagensszenarium (V):**
Schubversagen in der Mittelscheibe (20 κ -Kombinationen)

Die Versagensszenarien des Probekörpers lassen sich in spröde und duktile Versagenssituationen einteilen. Bei Versagensszenarium I und III handelt es sich um spröde Versagenssituationen des Probekörpers. Sobald im Mittelscheibenelement der Versagensmechanismus 3 (Zugversagen normal zur Faserrichtung) oder 1 (faserparalleles Zugversagen) durch die Belastung aktiviert wird, ist die Limitlast des Probekörpers erreicht.

Versagensszenarium II mit Druckversagen in der Mittelscheibe, d.h. dem bereichsweisen Ausknicken der Holzfasern, ist den duktilen Versagensszenarien zuordenbar. Versagensszenarium IV (und alle Unterformen) beginnen mit dem Druckversagen der Mittelscheibe normal zur Faserrichtung und damit mit einem sehr duktilen Versagensmechanismus, der Kraftumlagerungen im Probekörper erlaubt und bei den Versagensszenarien IVc bis IVe die Aktivierung eines weiteren Versagensmechanismus in der Mittelscheibe, der schlussendlich zum Probekörperversagen führt, ermöglicht.

Bei Versagensszenarium V ist mit dem gewählten Modell keine eindeutige Zuordnung zu duktilem und sprödem Versagen durchführbar. Bei Normalspannungen S_{RR} im Mittelscheibenelement, die größer als null sind, kommt es zu sprödem Versagen, während sehr hohe Drucknormalspannungen, in der Ebenenorientierung, in der Schubversagen eintritt, eventuell durch Reibung zu einer Verzögerung des Versagens führen.

15.4.1.1 Zuordnung der Belastungssituationen zu den Versagensszenarien

Nach der Berechnung einer κ -Lastkombination werden diese einem der oben angeführten Versagensszenarien zugeordnet. In Box 15.1 und Box 15.2 ist diese Zuordnung für alle κ -Kombinationen der Versuchsreihe aufgelistet. Bei den beiden Lastkombinationen des Versagensszenariums V bzw. III, die in Klammer gesetzt sind, ist bei den gewählten Festig-

keitswerten keine eindeutige Zuordnung zum Versagensszenarium III (Querkzugversagen) oder V (Versagen auf Schubbeanspruchung) möglich. Auf jeden Fall handelt es sich um ein Versagensszenarium mit Sprödbbruch. Die sich aus dem Modell und der Berechnung ergebenden Versagensszenarien werden anhand ausgewählter κ -Belastungssituationen in den nachfolgenden Kapiteln dargestellt und mit den Versuchsergebnissen verglichen.

$t_m = 4.5 \text{ mm}$					
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 7.5^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
(I)	1 : 0, 5 : -4, 5 : -2	–	–	–	–
(II)	-4 : 5,	–	–	–	–
(III)	-2 : 5, 0 : 1, 2 : 5, 5 : 2	-2 : 5, 0 : 1, 2 : 5, (5 : 2)	(-2 : 5), 0 : 1, 2 : 5, 5 : 2	0 : 1, 1 : 0, 2 : 5, 5 : 2	1 : 0, 1 : 1, 5 : 2
(IVa)	–	–	–	–	–
(IVb)	0 : -1, 1 : -10	0 : -1	–	–	–
(IVc)	–	1 : -2, 3 : -10	3 : -10	–	–
(IVd)	1 : -2, 3 : -10, 3 : -5	–	–	–	–
(IVe)	–	–	–	–	–
(V)	–	-4 : 5, 1 : 0, 5 : -4, 5 : -2, (5 : 2)	(-2 : 5), 1 : -2, 1 : 0, 5 : -4, 5 : -2	-10 : 3, -4 : 5, -2 : 5, 5 : -4, 5 : -2	3 : -10, 5 : -4, 5 : -2

Box 15.1 Zuordnung der κ - Beanspruchungskombinationen aller Versuche zu den Versagensszenarien I - V

$t_m = 7.5 \text{ mm}$					
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 7.5^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
(I)	1 : 0, 5 : -4, 5 : -2	-	-	-	-
(II)	-1 : 0	-10 : 3, -1 : 0	-	-	-
(III)	0 : 1	-	-	-	1 : 1
(IVa)	-	-	-	-	-1 : -1
(IVb)	-1 : -5, -1 : -10, 0 : -1, 1 : -10	-1 : -5, 0 : -1, 1 : -10	-1 : -5, 0 : -1, 13 : -50	-	-
(IVc)	-	1 : -2, 3 : -10	-4 : -5, -3 : -5, 3 : -10	-3 : -5, -1 : 0, 0 : -1	0 : -1
(IVd)	1 : -2, 3 : -10, 3 : -5	-	-	-	-
(IVe)	-3 : -5	-2 : -5	-	-	-
(V)	-	-4 : 5, 1 : 0, 5 : -2	-10 : 3, -1 : 0, -1 : 1, 1 : -2, 5 : -4	-10 : 3, -4 : 5	3 : -10, 4 : -7, 5 : -4

Box 15.2 Zuordnung der κ - Beanspruchungskombinationen aller Versuche zu den Versagensszenarien I - V

15.4.2 Versagensszenarium (I)

Exemplarisch gewählter Lastfall:

- $\alpha = 0^\circ$,
- $t_m = 4.5 \text{ mm}$,
- $\kappa = 1:0$,
- Versuchsnummern 143, 144, 145, 318, 319.

Bei der Untersuchung waren nur Bruchbilder für die Versuche 318 (9804232) und 319 (9804231) vorhanden. Beide Fotos zeigen keinen Bruch, aber eventuell Schädigung in der Richtung quer zur Faser. Für die ersten drei Versuchsnummern standen keine Bruchbilder zur Verfügung. Die zwei Proben mit der Messfelddicke $t_m = 7.5 \text{ mm}$ (318, 319) zeigen beide

Bruch quer zur Faserrichtung und Abweichungen im Faserverlauf. Daraus folgt, dass das Bild auf Seite 85 in der Habilitationsschrift von Eberhardsteiner (2002) zu einem der drei Versuche 143-145 gehören muss.

Die Rechnung gibt ein Zugversagen in faserparalleler Richtung an (Versagensmechanismus 1). Die berechnete Querkzugspannung zufolge der Unterbindung von Querdehnungseffekten ist dabei so gering, dass die niedrige Querkzugfestigkeit in der Mittelscheibe in der Rechnung nicht erreicht wird. Zwischen Modell I und II ergeben sich kaum Unterschiede zwischen den Spannungs-Dehnungszusammenhängen. Für das $\bar{\sigma}_1$ - $E_{II,m}$ -Diagramm ist nur die Rechnung des Modells I dargestellt.

In Querrichtung wird die vertikale Verschiebung am Probekörperperrand null gehalten. Die Kräfte, die in vertikaler Richtung benötigt werden, ergeben sich einerseits aus dem Vorspannungszustand und zum Teil aus den Festhaltekräften, die die Querkontraktion des Probekörpers unterbinden. Größenordnungsmäßig sind die Kräfte bzw. Spannungen $\bar{\sigma}_2$ viel geringer, als jene in faserparalleler Richtung. Zwischen den einzelnen Versuchswerten und den gerechneten Spannungen ergeben sich markante Unterschiede (siehe Bild 15.13 b). Bei einigen Versuchen sind die Querkzugkräfte so groß, dass Zugversagen quer zur Faserrichtung potentiell möglich ist. Die Versuche 143 und 145 haben eine relativ hohe Rohdichte ($\rho = 0.513 \text{ g/cm}^3$ bzw. 0.490 g/cm^3). Nach der Elastizitätsgrenze aus Bild 15.2 ist es möglich, dass bei den Versuchen 143, 145 und 319 zuerst die Querkzugversagensbedingung (Versagensmechanismus 3) aktiviert wird, bevor es zu faserparallelem Zugversagen kommt. Das Bruchbild 319 (Bild 15.14) untermauert diese Annahme. Bei Versuch 318 kommt es trotz vergleichsweise geringer Querkzugkraft lt. Markierung im Bruchbild zu einem Querkzugversagen. Auffällig ist, dass die Rohdichte mit $\rho = 0.394 \text{ g/cm}^3$ in diesem Fall die geringste aller fünf Versuche dieser Belastungsanordnung ist. Manche der Versagensbilder zeigen auch eine Ablösung der aufgeleimten Stahlplättchen.

Folgende Vermutung wird ausgesprochen: Das in Bild 15.14 a) dargestellte Bruchbild gehört zu Versuch 144; bei diesem ist die Querkzugkraft geringer, als bei den anderen Versuchen, wodurch Querkzugversagen nicht aktiviert wird und ein faserparalleler „Splitterbruch“ eintritt.

Aus den Beobachtungen und dem Vergleich mit der Rechnung lässt sich folgende Schlussfolgerung ziehen: Nur ein kleiner Teil der Versuche versagt wirklich auf faserparallelen Zug. Aufgrund der Verschiebungssteuerung mit $\bar{\nu} = 0$ und der damit verbundenen Verhinderung der zwängungsfreien Ausbildung der Querdehnung des Probekörpers in vertikaler Richtung (x_2 -Achse), kann es zu Querkzugversagen in den Probekörpern kommen. Die Rechnung gibt, aufgrund der niedrig angenommenen faserparallelen Zugfestigkeit, den Versagensmechanismus 1 als aktiven Versagensmechanismus an.

$\alpha = 0^\circ, t_m = 4.5 \text{ mm}, \kappa = 1 : 0$

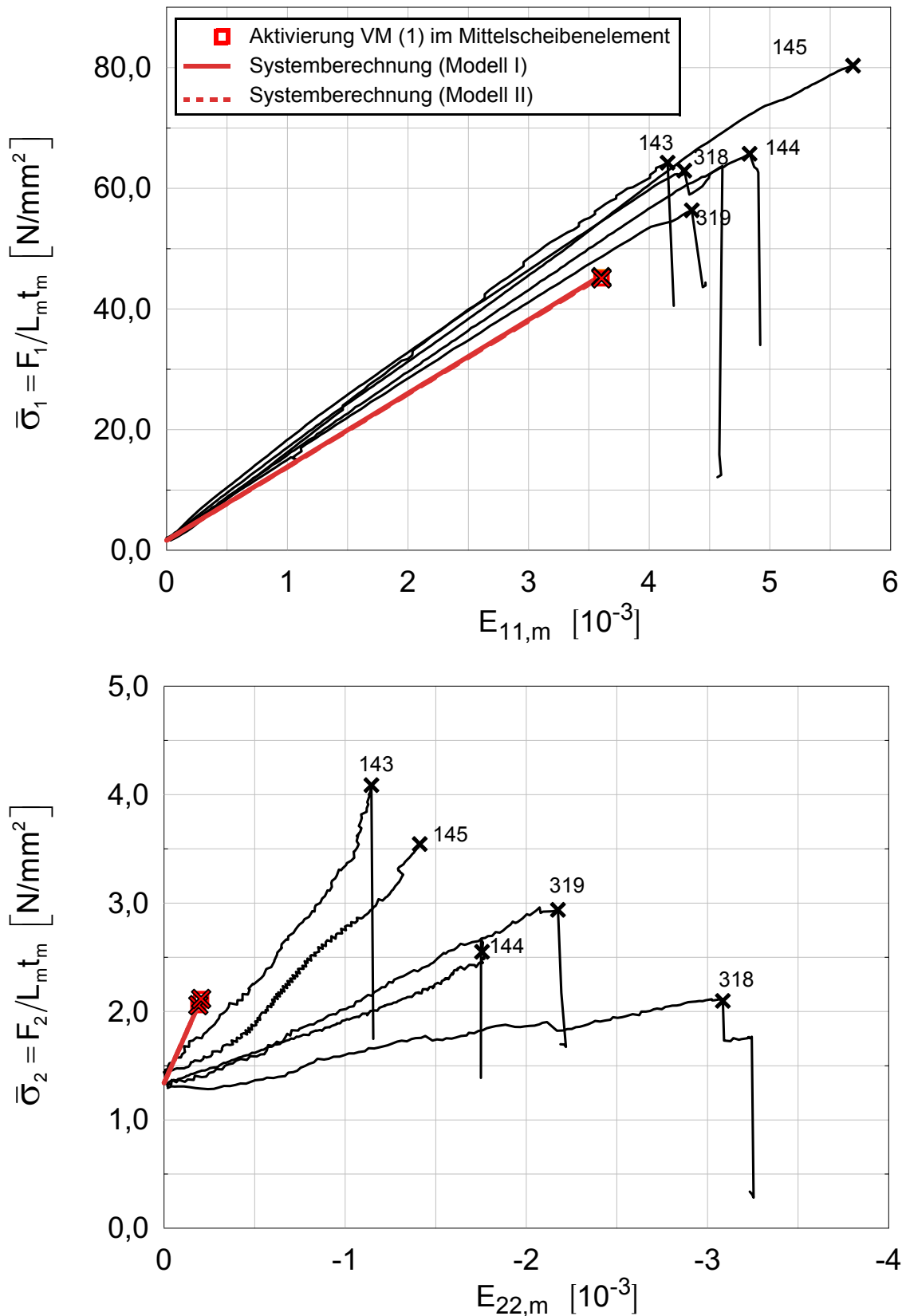
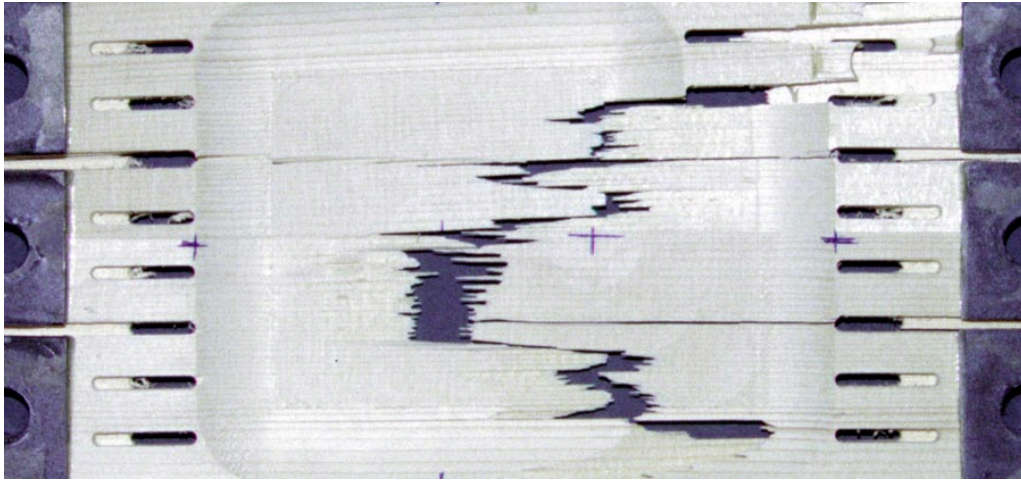


Bild 15.13 Spannungs-Dehnungszusammenhang; Vergleich Systemrechnung und Versuchsergebnisse

#144(?):



#319:

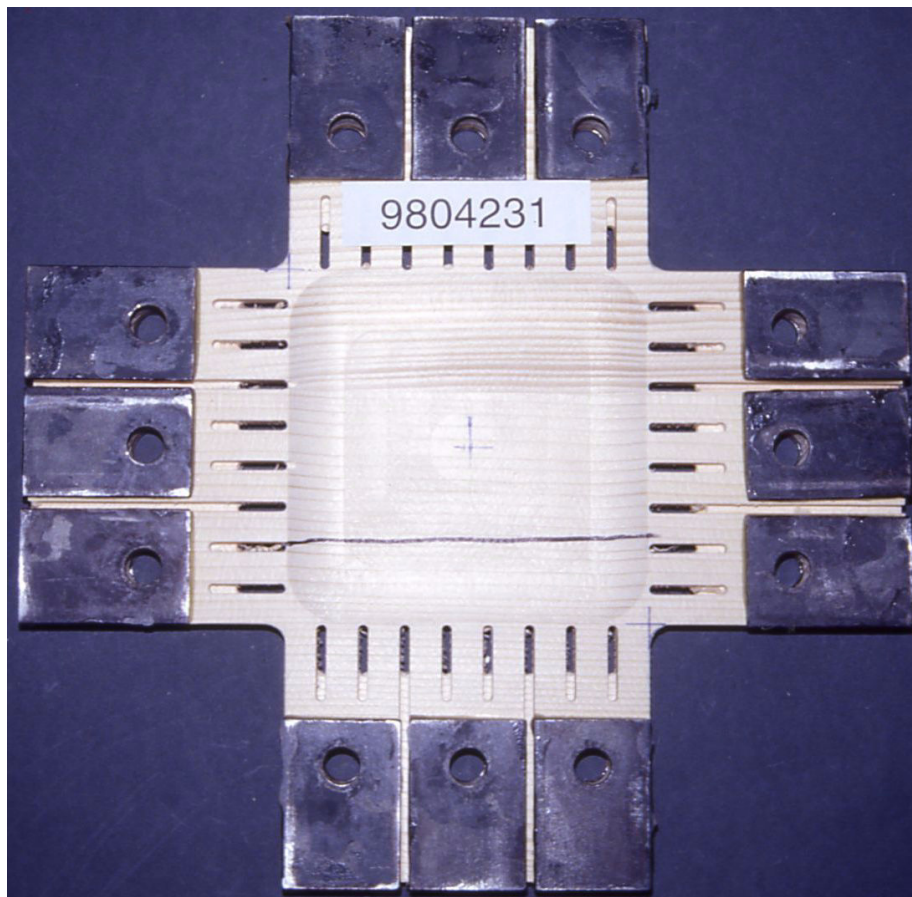


Bild 15.14 Bruchbilder bei Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und der Belastung $\kappa = 1 : 0$

15.4.3 Versagenszenarium (III)

Exemplarisch gewählter Lastfall:

- $\alpha = 45^\circ$,
- $t_m = 7.5 \text{ mm}$,
- $\kappa = 1:1$,
- Versuchsnummern 323, 324, 325.

Bei dieser Faserneigung und dem angegebenen biaxialen Verformungszustand tritt in der Mittelscheibe (unabhängig vom gewählten Bezugskordinatensystem) ein gleichförmiger Zugspannungszustand, $S_{LL} = S_{RR} = S_{11,m} = S_{22,m} > 0$, auf. Es gibt keine Schubspannungskomponente. Die Lasteinleitungselemente 1 und 2 (bzw. 3 und 4) verhalten sich bei der Faserneigung von 45° ident. Es kommt zu sprödem Bruch in der Mittelscheibe bei Zugbeanspruchung normal zur Faserrichtung. Die Bruchbilder der drei Versuche zeigen alle dasselbe und in der Rechnung prognostizierte Bruchbild. In Bild 15.15 ist repräsentativ das Bruchbild von Versuch 325 dargestellt. Bei den Versuchen 323 und 324 ist die Übereinstimmung zwischen der Rechnung und den Versuchsmessdaten im elastischen Bereich sehr gut. Starke Abweichung zeigt Versuch 325. Eine mögliche Erklärung ist die im Vergleich zu den anderen Versuchen geringere Rohdichte ($\rho = 0.403 \text{ kg/cm}^3$). Außerdem befindet sich ein kleiner Ast im Lasteinleitungsbereich 3 (siehe Bild 15.15). Aus diesen Gründen ist in der Darstellung der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge dieser Versuch mit einer punktierten Linie eingezeichnet.

#325:

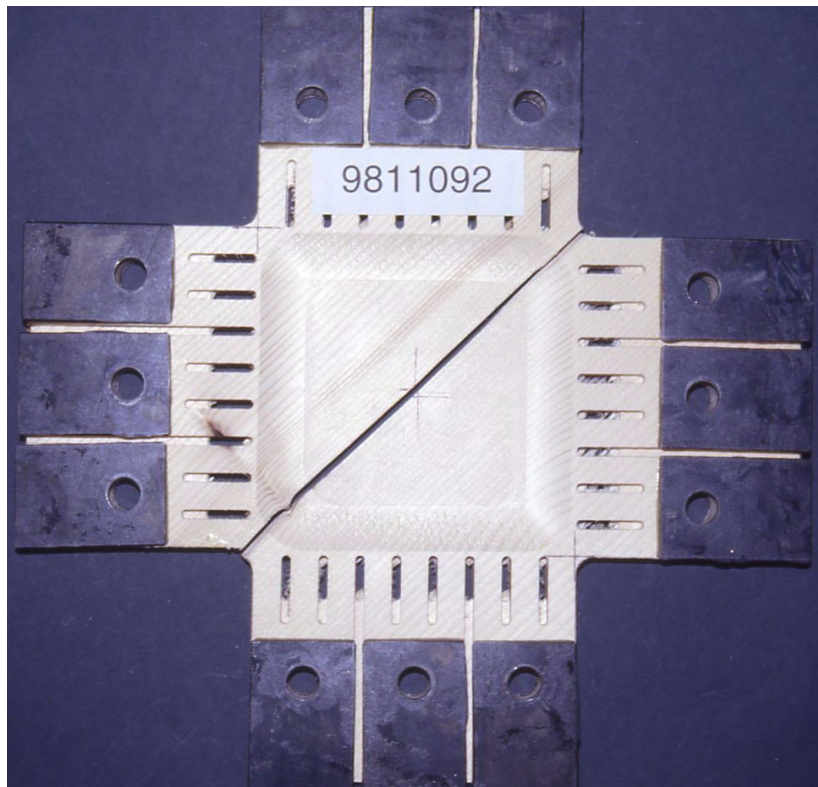


Bild 15.15 Bruchbild Versuch 325; Faserneigung $\alpha = 45^\circ$ und Belastung $\kappa = 1 : 1$

$\alpha = 45^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}, \kappa = 1 : 1$

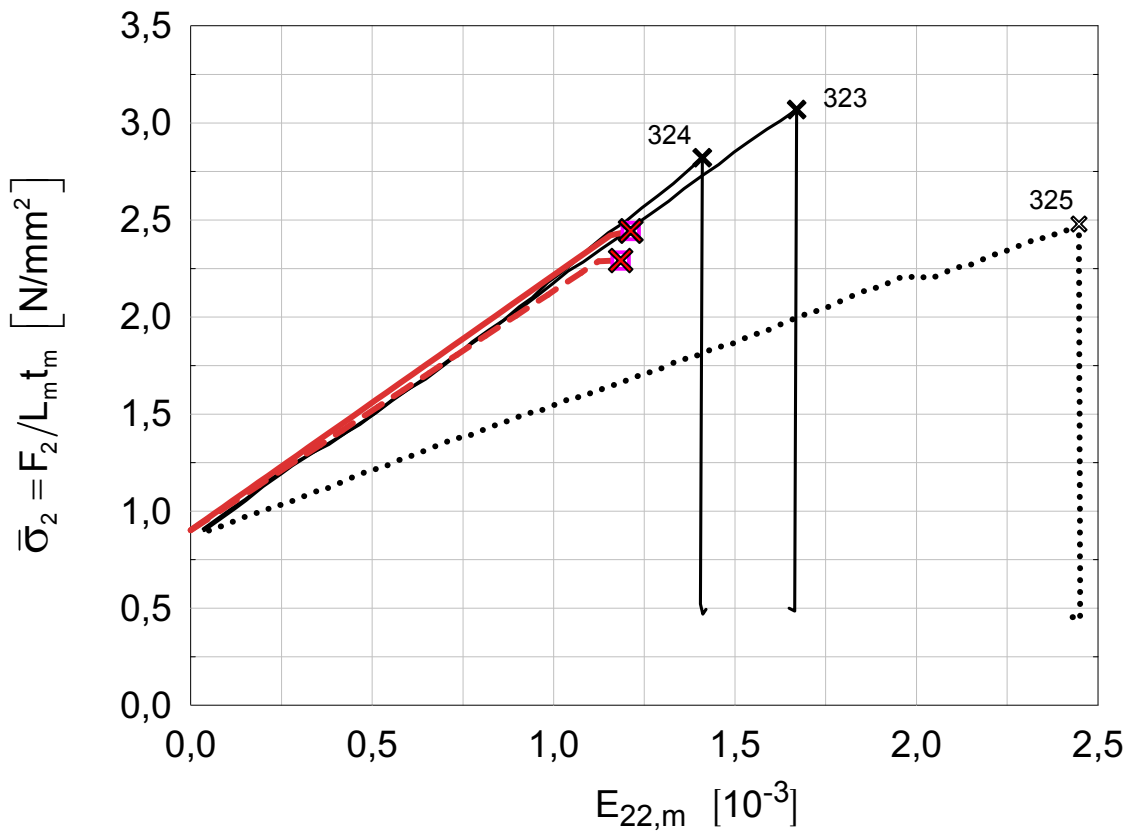
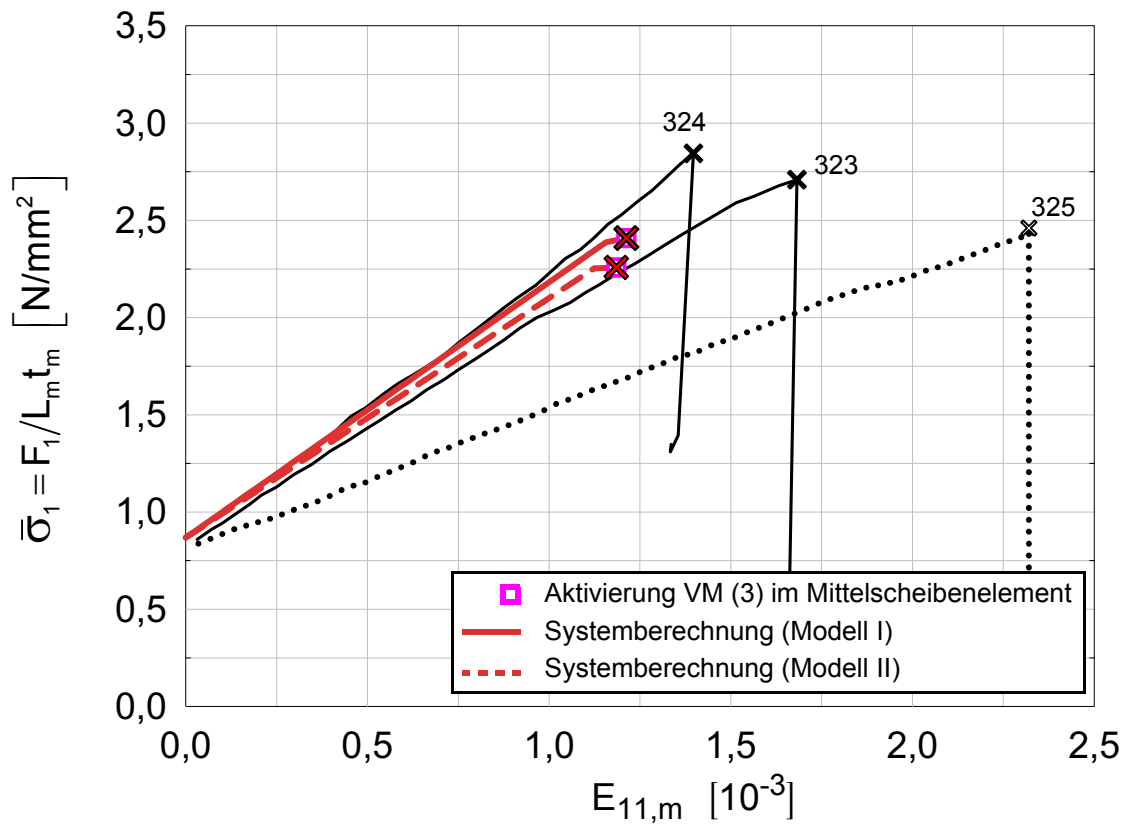


Bild 15.16 Spannungs-Dehnungsdiagramm; Vergleich der Modellrechnung mit den Versuchsergebnissen

15.4.4 Versagensszenarium (IVb)

Bei Versagensszenarium IVb kann es aufgrund von duktiler Ausnutzung der Mittelscheibe zu Kraftumlagerungen in die Lasteinleitungselemente kommen, die in weiterer Folge in einer Überbeanspruchung auf Druck dieser Probenkörperteile resultiert. Diese Druckbeanspruchung kann in einigen Fällen zu einer „Zerarbeitung“ der Mikrostruktur des Holzes in den Stabreihen der Lasteinleitungselemente führen und bei Entlastung eine Gefügetrennung bewirken. Der Limitlastpunkt der Messung entspricht damit keinem Mittelscheibenversagen, sondern repräsentiert Probekörperversagen zufolge des Versagens der Lasteinleitungselemente.

15.4.4.1 Auswertung der fotografierten Bruchbilder

Aus Box 15.1 und Box 15.2 lässt sich Folgendes erkennen:

- Versagen der Lasteinleitungselemente auf Druck tritt häufiger bei einer Messfelddicke von $t_m = 7.5$ mm auf.
- Außerdem tritt dieser Versagenszustand ausschließlich in den Randbereichen 2 und 4 auf, wie sich aus dem Vergleich der Elastizitätsgrenze mit den Bruchpunkten in Bild 15.2 bis Bild 15.11 zeigt.
- Potentiell betroffen von diesem Versagensszenarium sind 52 der 423 Versuche (ca. ein Achtel). In 19 Bruchbildern zeigt sich ein gebrochener Lasteinleitungsbereich. Das sind die Versuche mit den Nummern 223, 248, 249, 252, 288, 299, 300, 301, 358, 359, 360, 374, 382, 384, 386, 387, 432 und 434.

Bei einigen Versuchen sind (bei den zur Verfügung stehenden Daten) keine zugehörigen Bruchbilder vorhanden (40, 41, 42, 43, 44, 45). Der Vergleich der Bruchpunkte mit der Elastizitätsgrenze gibt bereits einen Aufschluss über die Probekörper, die auf Lasteinleitungselementversagen gefährdet sind. In Bild 15.17 ist die Elastizitätsgrenze des Probekörpers für den Fall $t_m = 7.5$ mm und $\alpha = 7.5^\circ$ dargestellt. Die Bruchpunkte und die zugehörigen Versuchsnummern, in denen der Randbereich 2 bzw. 4 gebrochen ist, sind rot eingekreist. Die Versuchsnummer 282 und 283 ($t_m = 7.5$ mm, $\kappa = -3:-5$, $\alpha = 0^\circ$) zeigen zwar auch Bruch des Randbereichs, sind aber dem Rechenmodell nach nicht diesem Versagensszenarium zugeordnet, da bevor es zur möglichen Überbeanspruchung in den Lasteinleitungselementen kommt, zunächst ein weiterer Versagensmechanismus aktiviert wird.

15.4.4.2 Bsp 1: $\alpha = 0^\circ$, $t_m = 7.5$ mm, $\kappa = 1:-10$

Exemplarisch wird der Fall mit

- $\alpha = 0^\circ$,
 - $t_m = 7.5$ mm,
 - $\kappa = 1:-10$,
 - Versuchsnummern 358, 359 und 360
-

$$\alpha = 0^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}$$

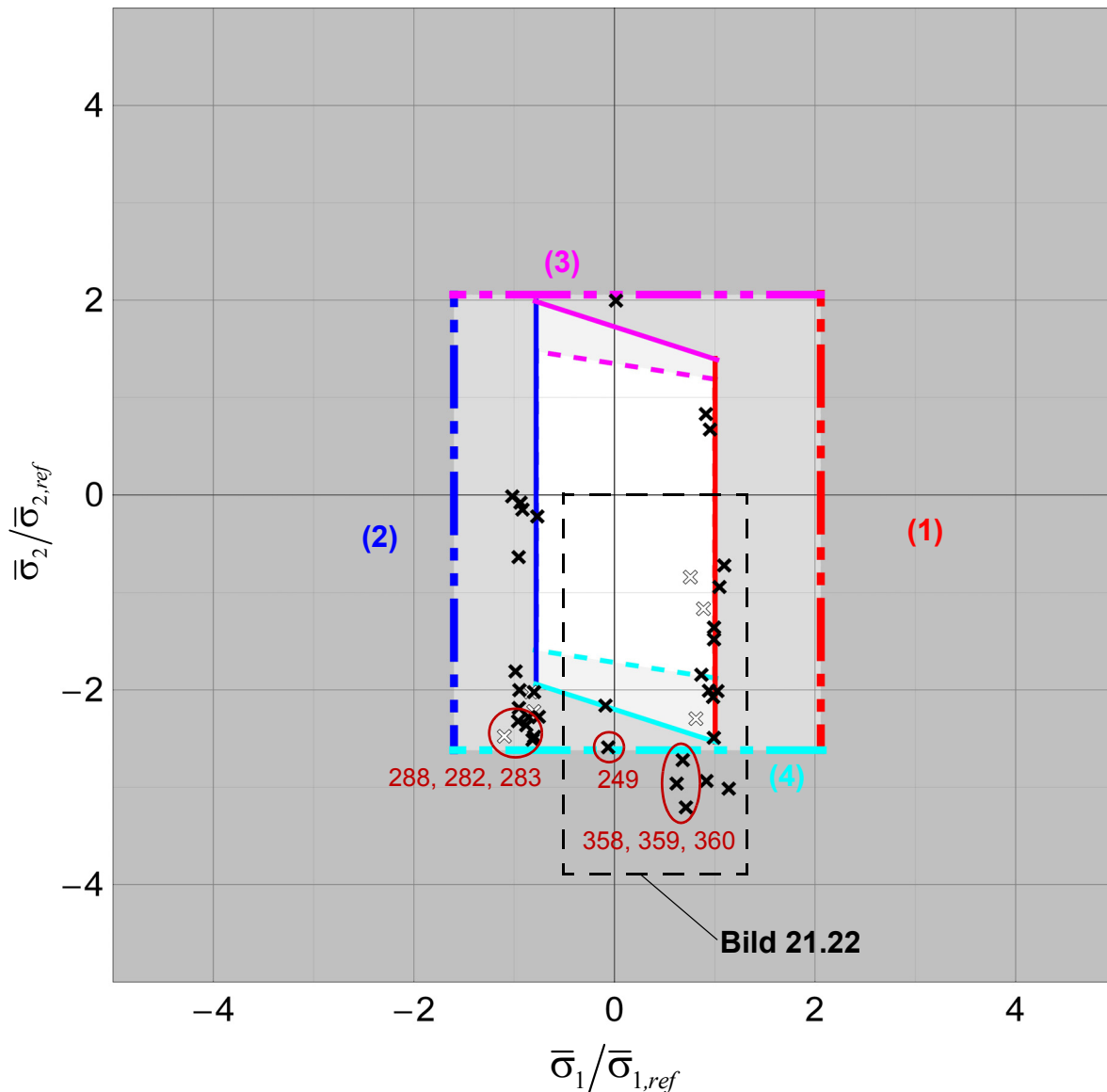


Bild 15.17 Elastizitätsgrenze der Mittelscheibe und der Lasteinleitungselemente; Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und Messfeldstärke $t_m = 7.5 \text{ mm}$; rot gekennzeichnet sind die Versuchspunkte, bei denen die Bruchbilder einen gebrochenen Lasteinleitungsbereich zeigen

diskutiert. Der Verlauf der berechneten Spannungen ist in Bild 15.18 dargestellt. Am Anfang verhält sich der Probekörper linear-elastisch. Zuerst wird der Druckversagensmechanismus 4 in der Mittelscheibe aktiviert. Anschließend kommt es in der Mittelscheibe zu massiven Quetschungen normal zur Faserrichtung. Eine Besonderheit ist, dass dieses duktile Versagen quer zur Faserrichtung in faserparalleler Richtung keine Auswirkung bzw. nur geringe Auswirkung hat. Im $\bar{\sigma}_1 - E_{11,m}$ -Diagramm (Bild 15.19 a) zeigt sich bei Aktivierung des Querdruckversagens nur ein leichter Knick, der auch bei den Versuchsmessdaten auftritt. Sobald das Mittelfeld auf Druck zu Versagen beginnt, zeigen sich im gemessenen $\bar{\sigma}_2 - E_{11,m}$ -Diagramm (Bild 15.19 b) leichte, sägezahnartige Lastabfälle, die sich eventuell

$$\alpha = 0^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}, \kappa = 1 : -10$$

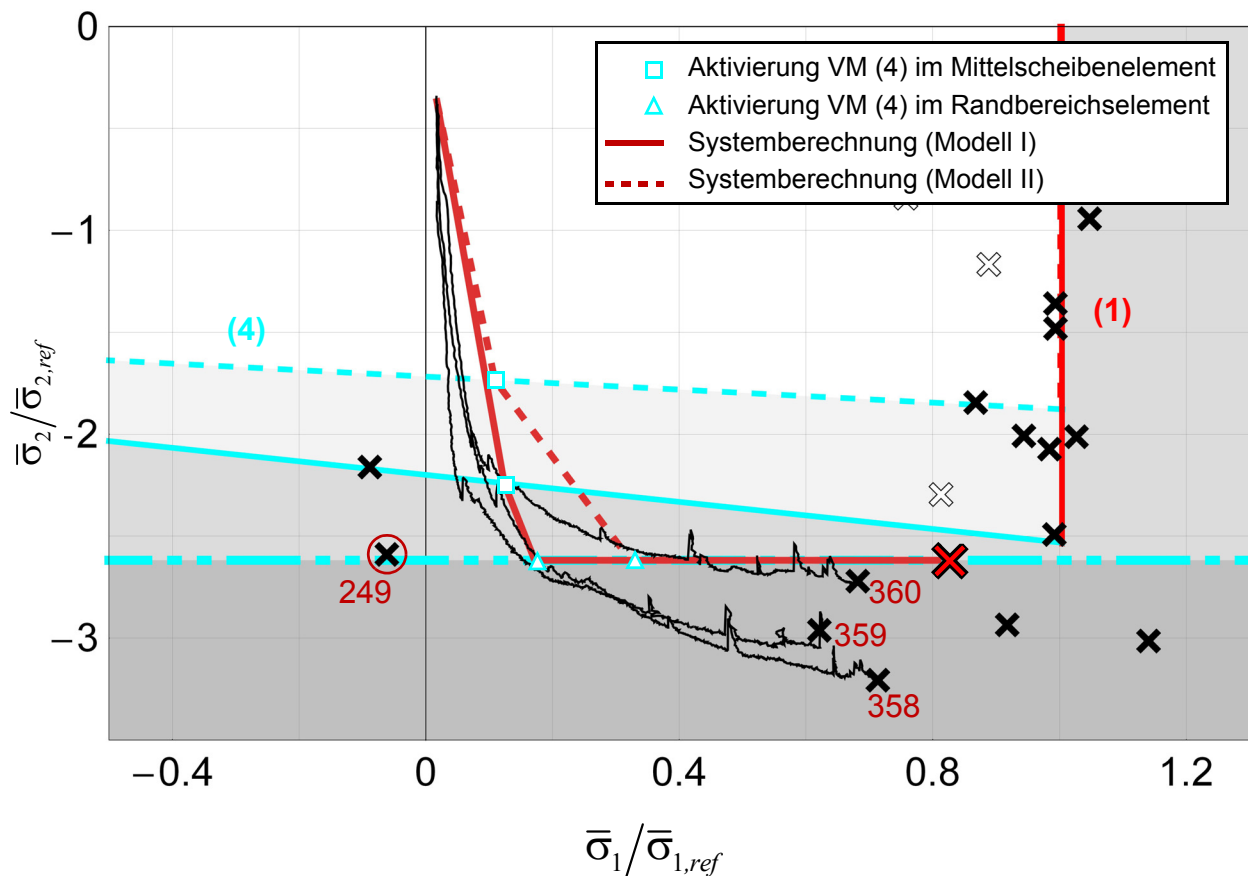


Bild 15.18 Spannungsverlauf bei einer Belastungskombination $\kappa = 1 : -10$

aus dem schichtenweisen Versagen der Frühholzzellen erklären lassen. Durch die Mitwirkung der Lasteinleitungselemente ist eine weitere Steigerung der vertikalen Kraftkomponente möglich, bis die Randbereiche 2 und 4 ebenso die Druckversagensspannung erreichen. In vertikaler Richtung kann die Verformung zwar weiter gesteigert werden, die Kraft im Rechenmodell bleibt aber gleich. In horizontaler faserparalleler Belastungsrichtung lassen sich die Kräfte - unabhängig vom Geschehen quer zur Faser - weiter erhöhen. Das Verhalten ist dabei nahezu linear (siehe Bild 15.19 a, ab Aktivierung von VM 4). Nach einer bestimmten Verformung in Faserquerrichtung wird der Versuch abgebrochen und der Probekörper aus der Maschine ausgebaut. Durch die massive Druckbeanspruchung normal zur Faserrichtung - die Verzerrung $E_{22,m}$ des Messfeldes ist im Bruchzustand zehnmal größer als die faserparallele Verzerrung $E_{11,m}$ - werden die Lasteinleitungselemente und das Mittelscheibenelement stark zusammengedrückt. Es wird vermutet, dass die Mikrostruktur dabei so zerstört wurde, dass der Probekörper nach Entlastung auseinanderbricht.

Dieses rechnerisch prognostizierte Versagensverhalten bestätigen alle drei Bruchbilder der Versuche 358, 359 und 360. Die Bruchbilder der ersten beiden Probekörper nach Ausbau aus der Versuchsmaschine sind in Bild 15.20 dargestellt.

$\alpha = 0^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}, \kappa = 1 : -10$

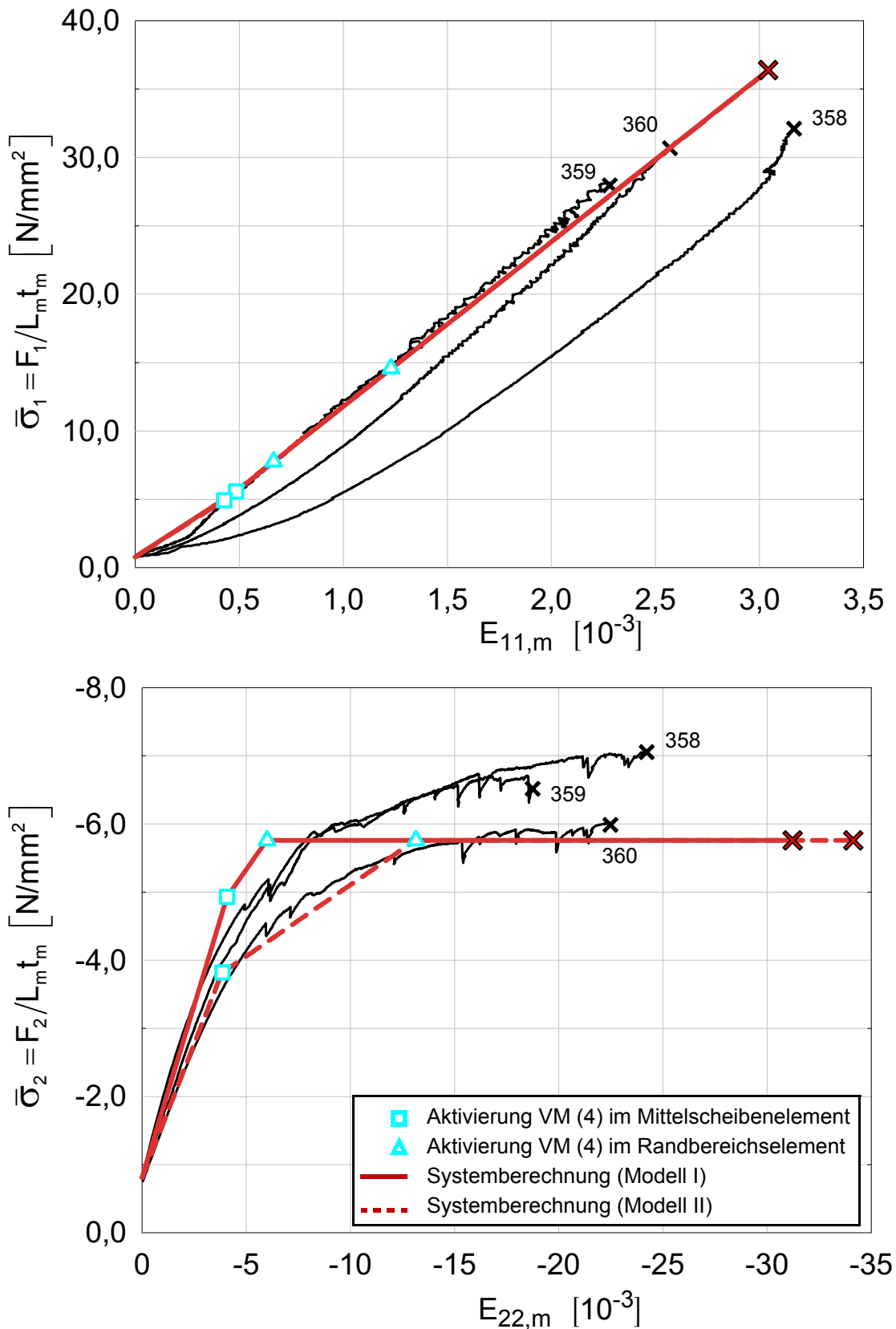
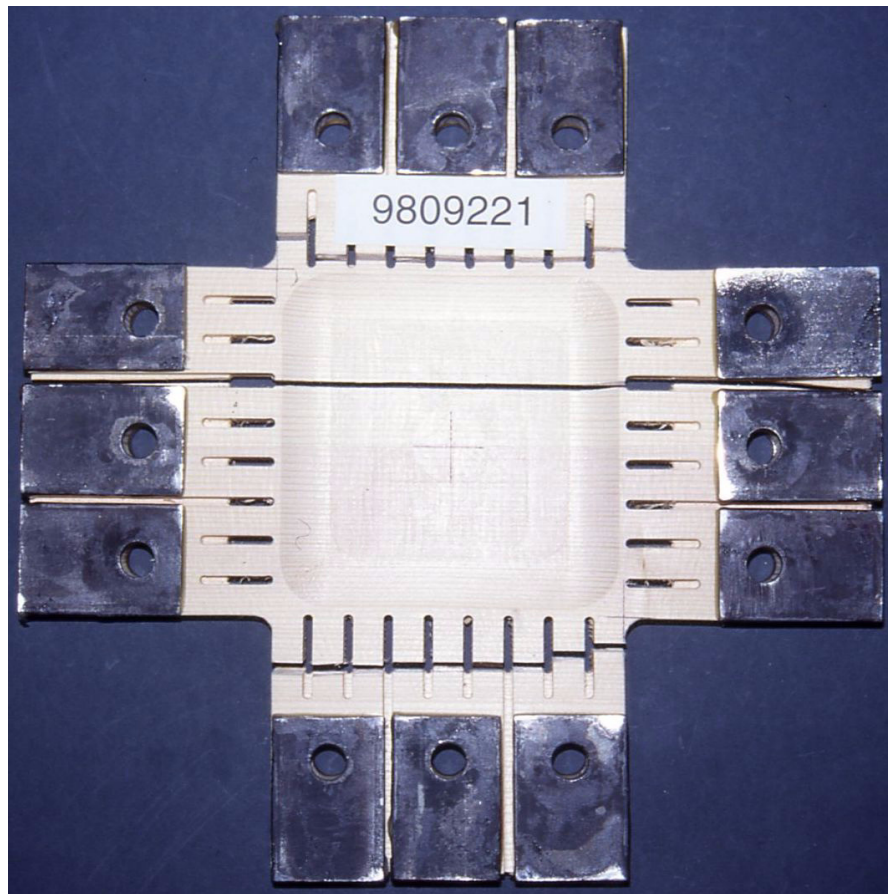


Bild 15.19 Spannungs-Dehnungsdiagramm; Modellrechnung vs. Versuchsergebnisse

#358:



#359:

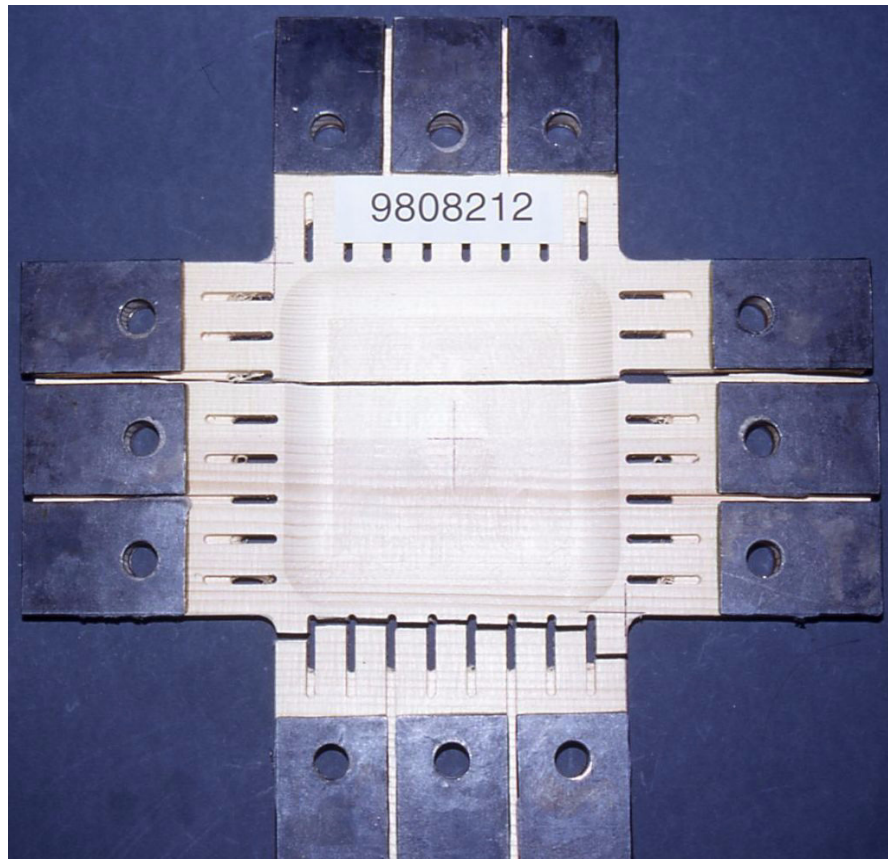


Bild 15.20 Bruchbilder Versuche 358 und 359; Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und Belastung $\kappa = 1 : -10$

15.4.4.3 Bsp2: : $\alpha = 15^\circ$, $t_m = 7.5 \text{ mm}$, $\kappa = 1$: -1

Exemplarischer Lastfall:

- $\alpha = 15^\circ$,
- $t_m = 7.5 \text{ mm}$,
- $\kappa = 0$: -1,
- Versuchsnummern 223, 252, 253, 388, 389, 390.

Gebrochene Lasteinleitungsbereiche sieht man bei den Bruchbildern der Probekörper der Versuche 223, 252 und 389. Der gebrochene Probekörper für Versuch 252 ist in Bild 15.22 abgebildet. Der gerechnete $E_{22,m}$ - $\bar{\sigma}_2$ -Verlauf des Modells ist in Bild 15.21 dargestellt und den Messergebnissen gegenübergestellt.

Die Berechnung zeigt folgenden Ablauf des Probekörperversagens: Zuerst erreicht die Mittelscheibe die Grenze der Drucknormalspannung (zyanfarbenes Quadrat im $E_{22,m}$ - $\bar{\sigma}_2$ -Diagramm in Bild 15.21). Durch das Plastizieren des Mittelscheibenelements quer zur Faserrichtung kommt es zu einer Abflachung im Last-Verformungs-Diagramm bis zu dem Spannungszustand, bei dem der Lasteinleitungsbereich sein Druckversagen erreicht. Die Verformungen können noch weiter erhöht werden, bis eine plastische Grenzdehnung erreicht ist. Die in der jeweiligen Berechnung verwendeten Lasteinleitungselemente (Modell I oder II) zeigen einen signifikanten Einfluss auf das Last-Verschiebungs-Diagramm. Die allmähliche Abflachung im Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang zeigt sich auch bei den Messdaten. Die vermeintliche „Verfestigung“ quer zur Faserrichtung, die sich in den Messdaten zeigt, lässt sich als Struktureffekt interpretieren. Da die Mittelscheibensteifigkeit gegen null geht, verbleibt - nach dem gewählten Rechenmodell - nur mehr die Steifigkeit der seitlich angefügten Lasteinleitungselemente.

15.4.4.4 Nicht prognostiziertes Versagen der Lasteinleitungsbereiche

Aus der Durchsicht der vorhandenen Bruchbilder finden sich elf weitere Versuche, bei welchen der Randbereich 2 oder 4 versagt hat, aber das Rechenmodell kein solches Versagen ausgibt. Das sind die Versuche:

- $\alpha = 0^\circ$: 161($\kappa = 2 : 5$), 165, 166($\kappa = 5 : 2$),
- $\alpha = 7.5^\circ$: 400($\kappa = -4 : 5$), 430($\kappa = -10 : 3$),
- $\alpha = 15^\circ$: 271($\kappa = -1 : 1$), 273, 275($\kappa = -10 : 3$), 276($\kappa = -4 : -5$)
- $\alpha = 30^\circ$: 308($\kappa = -3 : -5$), 403($\kappa = -4 : 5$).

Eine mögliche Erklärung könnte man eventuell durch Verbesserung der Versagenskontrolle der Lasteinleitungselemente erhalten, indem die aus der Spreizverformung sich ergebenden Momente und Querkräfte bei der Betrachtung des Einzelstabversagens mitberücksichtigt werden.

$\alpha = 15^\circ, t_m = 7.5 \text{ mm}, \kappa = 0 : -1$

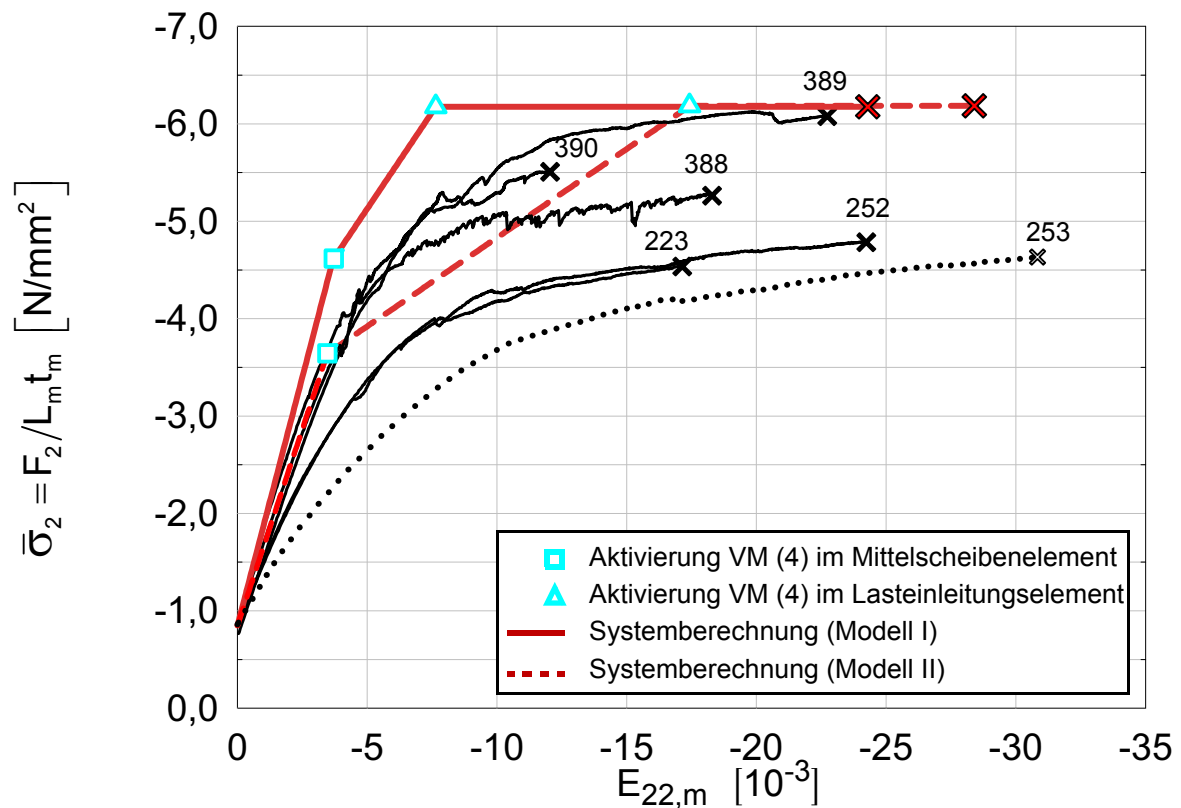


Bild 15.21 Spannungs-Dehnungsdiagramm; Modellrechnung vs. Versuchsergebnisse

#252:

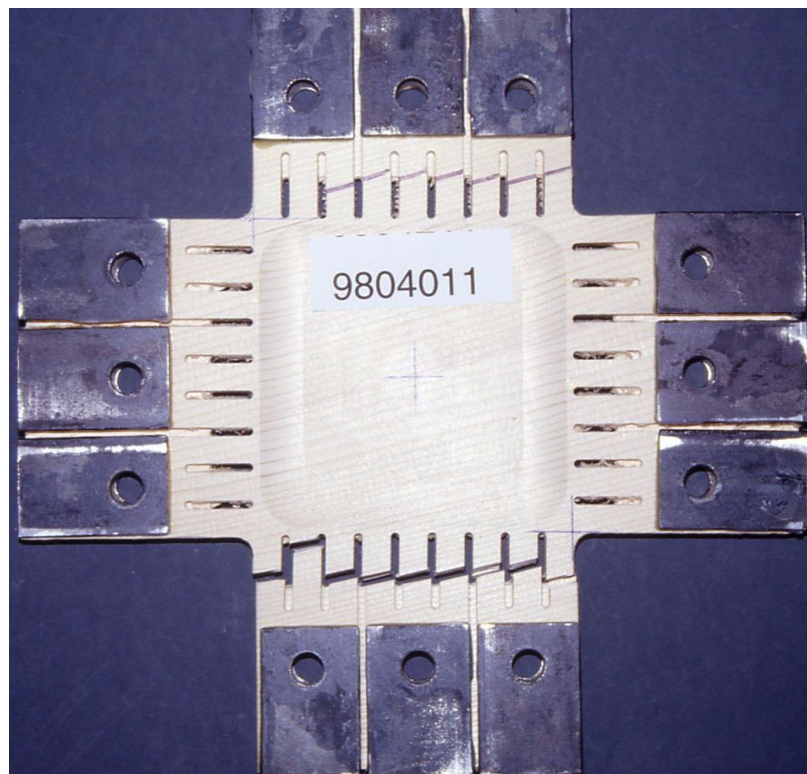


Bild 15.22 Bruchbild Versuch 252; Faserneigung $\alpha = 0^\circ$ und Belastung $\kappa = 1 : -10$

15.5 Zusammenfassung, Resümee & offene Punkte

Der Probekörper ist eine komplex aufgebaute Holztragkonstruktion, bestehend aus einem Mittelscheibenelement und vier Lasteinleitungselementen mit stahlplattenverstärkten Lasteinleitungspunkten. Sowohl Mittelscheibe als auch Lasteinleitungselemente werden aus einem einzigen Brett Fichtenholz gefertigt und es wird angenommen, dass die Materialeigenschaften und der strukturelle Aufbau innerhalb dieses Brettes gleichförmig sind. Da die Dicke t_m der Mittelscheibe variiert, werden Probekörper mit unterschiedlicher Mittelscheibendicke getrennt voneinander betrachtet und untersucht. Eine weitere Struktureigenschaft ist die Faserneigung α , die in den Versuchen die Werte 0° , 7.5° , 15° , 30° und 45° annimmt. Man hat also Tragstrukturen aus Holz, deren äußere Geometrie gleich ist, die sich aber durch die Faserneigung und die Dicke t_m im zentralen Scheibenelement unterscheiden. Damit hat man zehn verschiedene Probekörpergeometrien. Diese werden durch verschiedene Verschiebungskombinationen κ (=Lastfälle) beansprucht, bis die Bruchlast erreicht wird.

Im verwendeten Modell wird das Versagen von Holz in fünf verschiedene Versagensmechanismen unterteilt. Diese lassen sich zwei Gruppen zuordnen:

- die spröden Versagensmechanismen, wie „faserparalleles Zugversagen“ (1), „Zugversagen normal zur Faserrichtung“ (3) und „sprödes Schubversagen parallel zur Faserrichtung“ (5) und
- die duktilen (oder teilweise duktilen) Versagensmechanismen, wie „faserparalleles Druckversagen“ (2), „Druckversagen normal zur Faserrichtung“ (4) und „Schubversagen parallel zur Faserrichtung“ mit duktilen Reserven (5).

15.5.1 Resümee

Die gemessenen Bruchlasten sind keine materiellen Versagens- und Festigkeitsgrößen, sondern geben das Versagen des Probekörpers, also einer komplexen aus verschiedenen Elementen aufgebauten Tragstruktur, an. Die Bestandteile der Tragstruktur (Mittelscheibe und die Lasteinleitungselemente) versagen nach einem der im Versagensmodell festgelegten fünf Moden.

Es konnte gezeigt werden, dass bei allen κ -Beanspruchungssituationen Versagensbeginn immer in der Mittelscheibe ist. Im Fall eines spröden Versagensmechanismus deckt sich das Versagen der Mittelscheibe mit dem Versagen des Probekörpers. In diesen Fällen ist ein direkter Zusammenhang zwischen den Probekörperbruchlasten und den materiellen Festigkeiten von Holz herstellbar, wobei in der Umrechnung der äußeren Kräfte auf die Spannungen im Mittelscheibenelement (siehe Bild 15.1) die Aufteilung der Kräfte zwischen Mittelscheibe und seitlich angefügten Lasteinleitungselementen mitberücksichtigt wurde.

Bei Aktivierung eines duktilen Versagensmechanismus in der Mittelscheibe - besonders bei

Druckversagen quer zur Faserrichtung - kommt es zu Kraftumlagerungen auf die Lasteinleitungselemente, die - trotz plastisch gestauchter Mittelscheibe - eine weitere Erhöhung der am Probenrand aufgebrachtten Kräfte ermöglichen. Dabei kann es zu einem Wechsel des Versagensmechanismus im Mittelscheibenelement kommen, der schließlich zum Versagen der gesamten Probe führt. Ein weiteres mögliches Versagensszenarium ist, dass die Lasteinleitungsbereiche die Druckversagenslast erreichen und das Probekörperversagen bestimmen. Dabei wurde gezeigt, dass das Versagen der Lasteinleitungselemente in den meisten Fällen bei den Proben mit dickerem Mittelscheibenelement (Typ B, $t_m = 7.5$ mm) vorkommt und ausschließlich in den Lasteinleitungselementen 2 bzw. 4 auftritt. Die vorhandenen Fotografien der Probekörperbruchbilder bestätigen die aus der Rechnung sich ergebende Versagensprognose.

15.5.2 Anmerkungen zur Versuchsdurchführung und der Messdatenauswertung

In Eberhardsteiner (2002) wurden die gemessenen Bruchlasten des Probekörpers direkt als materielle Festigkeiten aufgefasst und behandelt. Das hat zur Folge, dass Abweichungen in den Messdaten, die sich aus der unterschiedlichen Probenkörpergeometrie oder aus dem gesamtstrukturellen Tragverhalten ergeben oder erklären lassen, als Streuungen und nicht als Struktureffekte interpretiert werden. Es wurde z.B. in der Darstellung der Messergebnisse keine Unterscheidung zwischen den Probekörpern mit den Messfelddicken $t_m = 4.5$ mm, $t_m = 7.5$ mm und $t_m = 9.5$ mm gemacht.

Ein Ziel der Versuchsreihe war es, experimentelle Daten und Festigkeitswerte als Basis für die Entwicklung eines Holzmaterialmodells zu gewinnen. Aus der Untersuchung des Probekörpers hat sich ergeben, dass die Materialkennwerte und auch das charakteristische Versagen von Holz durch die gemessenen Versuchsdaten nicht direkt zugänglich sind. Als Zwischeninstanz fungiert stets das statische System des Probekörpers. Das mechanische Modell des Probekörpers ist ein statisch unbestimmtes System. Aus diesem Grund beeinflussen die elastischen Materialsteifigkeitsrelationen und die geometrischen Abmessungsverhältnisse die Kraftverteilung und damit das Traglimit des Systems und in weiterer Folge die gemessenen Bruchlasten. Bei Holz tritt weiter die Schwierigkeit auf, dass die zur Rekonstruktion der inneren Kraft- bzw. Spannungsverteilung notwendigen elastischen Materialsteifigkeitsgrößen stark streuen. Die statische Unbestimmtheit des Probekörpers bzw. der Einfluss der Steifigkeit der Lasteinleitungselemente ließe sich durch weitere Einschlitzen oder durch Erhöhung der Länge L_k der Stabreihen reduzieren, auf die Gefahr hin, dass das Versagensrisiko durch Ausknicken etc. in den Lasteinleitungsbereichen erhöht wird.

Bei einfacheren Versuchsanordnungen, wie bei einaxialen Zugversuchen, treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Dort lassen sich aufgrund der statischen Bestimmtheit die Kräfte im Körperinneren und damit die Spannungen, die zu Versagen führen, direkt aus den am Rand aufgebrachtten und gemessenen Kräften berechnen.

15.5.3 Kritische Anmerkungen zum verwendeten Rechenmodell

Die Einteilung der Versuche in unterschiedliche Versagensszenarien und die Interpretation der Versuchsergebnisse basieren auf dem verwendeten Materialversagens- und Strukturmodell. Obwohl einige Aussagen durch den Vergleich mit den Versuchsergebnissen bestätigt werden, muss das verwendete Rechenmodell, besonders das Strukturmodell mit seinen kinematischen Vereinfachungen und Einschränkungen, kritisch hinterfragt werden.

Eine erste kritische Betrachtung wurde bereits am Ende der Untersuchung des elastischen Tragverhaltens (Kap. 14.8.4.1) durchgeführt. Dabei wurde angemerkt, dass die Annahme einer konstanten Verzerrungsverteilung im gesamten Mittelscheibenelement eine starke Vereinfachung ist. Diese kinematische Vereinfachung ist aber auch die Ursache für die Mitwirkung der seitlichen Lasteinleitungselemente bei der Lastabtragung. Eine Frage, die bereits zuvor aufgeworfen wurde, ist, ob der Kraftfluss auf die Einzelstabelemente der Lasteinleitungsbereiche überhaupt so stattfindet oder ob die volle Mitwirkung aller seitlichen Stabelemente auszuschließen ist und der Kraftfluss zu den Lasteinleitungsbereichen sich gar nicht in dem angenommenen Maß ausbildet. Wenn nicht, hätte das wesentliche Auswirkungen auf die Interpretation der Versagensszenarien IV, da sich die angenommene Reststeifigkeit der Lasteinleitungselemente bei duktilem Versagen des Mittelscheibenelements nicht in dem angenommenen Umfang ausbilden würde.

Das betrifft z.B. die Belastungssituationen, die in Kap. 15.4.4.2 und Kap. 15.4.4.3 dargestellt wurden. Das Versagen wurde - basierend auf dem Rechenmodell - so interpretiert, dass es zu einer Umlagerung vom Mittelscheibenelement auf die Lasteinleitungselemente kommt und die äußere Last weiter gesteigert werden kann, bis die Lasteinleitungselemente auf Druck versagen. Die vorhandenen Bruchbilder zeigen Bruch in den Lasteinleitungsbereichen.

Eine andere Interpretation dieses Last-Verformungs- und Versagensverhaltens bei dieser Versuchssituation geben Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2005). Der Anstieg in der Spannungs-Verzerrungskurve (Bild 15.18) wird als Verfestigung interpretiert, also als Material- und nicht als Struktureffekt. Die Mittelscheibe erreicht in diesem Fall die duktile Druckversagenslast, hat aber anschließend kein konstantes Lastplateau, sondern einen im Rechenmodell von Mackenzie-Helnwein/Eberhardsteiner/Mang (2005) modellierten ansteigenden („verfestigenden“) Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang. Die Spannung in der Mittelscheibe und die äußere Kraft können somit weiter erhöht werden, bis es zum Druckversagen in den Lasteinleitungselementen kommt. Eine Mitwirkung der seitlichen Lasteinleitungselemente ist dabei nicht berücksichtigt.

Eine Auflösung dieses Interpretationskonfliktes könnte nur weitere Versuche liefern. Bei diesen müssten Probekörper mit und ohne seitliche Lasteinleitungselemente (1 und 3) auf Druck quer zur Faser belastet werden. Dabei würde abgeprüft, ob die prognostizierte Lastaufnahme durch die seitlichen Lastelemente stattfindet oder doch ein materieller Verfestigungsmechanismus die Ursache für den Anstieg im Spannungs-Dehnungsdiagramm in Bild

15.18 ist.

Grundsätzlich ist die Verwendung eines verbesserten Strukturmodells mit verfeinerter Kinematik im Mittelscheibenelement anzustreben, wobei abgeklärt werden kann, ob sich die von dem vereinfachten Modell berechneten Effekte oder in Folge gezogenen Schlüsse und Interpretationen des Versagensverhaltens bestätigen lassen, modifiziert oder sogar verworfen werden müssen.

15.5.4 Offene Fragen

15.5.4.1 Verfeinerte Versagenskontrolle in den Lasteinleitungselementen

Die Versagenskontrolle der Lasteinleitungselemente erfolgt über ein vereinfachtes Modell, bei welchem nur die Normalkräfte in den Einzelstäben berücksichtigt werden. Durch die Spreizverformung treten zusätzlich Querkräfte und Momente in den Stabelementen auf. In einem verfeinerten Versagensmodell könnten diese zusätzlichen Beanspruchungen mitberücksichtigt werden. Dadurch ließe sich ein noch detaillierterer Einblick in das Versagen der Lasteinleitungsbereiche gewinnen oder eventuell die Frage beantworten, warum der Probekörper bei den in Kap. 15.4.4.4 angegebenen Belastungssituationen in den Lasteinleitungselementen bricht.

15.5.4.2 Verschiebungskotrollierte Versuchsdurchführung

Die vorzugebende Verschiebungsvorschrift der Lasteinleitungspunkte um einen biaxialen Beanspruchungszustand zu realisieren ist von den elastischen Materialsteifigkeitsverhältnissen, der Probekörpergeometrie und - bei Verlassen des elastischen Bereichs - vom nichtlinearen Materialverhalten abhängig. Abweichungen in diesen Einflussgrößen stören den biaxialen Beanspruchungszustand und können zusätzliche Schubspannungskomponenten wecken, die eventuell das Versagen des Probekörpers beeinflussen und damit eine Neuinterpretation der gemessenen Versuchsdaten und auftretenden Versagensszenarien nötig machen. In der Betrachtung der Messdaten und in den verwendeten Rechenmodellen wurde davon ausgegangen, dass keine störenden Schubspannungskomponenten im Mittelscheibenelement auftreten.

15.5.4.3 Gezielte experimentelle Bestimmung von Spannungsinteraktionen

Trotz der Versuche bleiben einige generelle Fragen unbeantwortet bzw. sind schwer zu beantworten, z.B. welche Versagensbedingung bestmöglich die Interaktion von faserparalleler Schubspannung mit der in derselben Schnittorientierung wirkenden Normalspannung beschreibt. In dem hier verwendeten Versagensmodell (Box 12.3) wurde eine bilineare Interaktion angenommen, die einerseits eine mathematisch sehr einfache Gestalt besitzt und i.A. gut zu den Versuchsmessdaten passt. Eine weitere Fragestellung wäre die gezielte Bestimmung von möglichen Spannungsinteraktionen durch einaxiale Versuche schräg zur Faserrichtung bei Beachtung und Unterteilung in verschiedene Versagensmechanismen.

16

Zusammenfassung und Ausblick

16.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein genereller Rahmen um den Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang und das plastische Versagensverhalten von strukturierten Festkörpern zu beschreiben ausgearbeitet. Der materielle Aufbau des betrachteten Materials wird dabei durch eine äquivalente und einfache Mikrostruktur erfasst. Dabei wird ein Verbundkörper (Makroelement) beschrieben, der aus mehreren mikrostrukturellen Komponenten, den sogenannten Mikroelementen, besteht. Die Mikroelemente haben als Folge ihres materiellen Aufbaus eindeutig unterscheidbare plastische Versagensmechanismen, die speziellen Ebenenorientierungen zugeordnet sind und fallweise auch simultan aktiviert werden können. Zur Beschreibung eines solchen Versagensmechanismus werden sogenannte Mohr-Typ-Versagensbedingungen eingeführt. Zusätzlich lassen sich ausgewählte Spannungskomponenten null setzen, wodurch sich ein reduziertes Materialmodell ergibt. Das dabei allgemein formulierte Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodell wird rechnerisch mittels eines nichtlinearen Optimierungsverfahrens, das globale Konvergenz garantiert, umgesetzt. Durch beliebige Kombination mit anderen Mikroelementen im Rahmen des einfachen Mikrostrukturmodells wird der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des Makroelements berechnet. Mit diesen Bestandteilen wird das Multi-Komponenten & Multi-Mechanismen-Modell aufgebaut.

Das vorgestellte Konzept lässt sich zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von strukturierten Materialien wie z.B. Faserverbundwerkstoffen, Kristallen, Polykristallen, geschichteten Fels oder Holz, anwenden. Weiters lassen sich mit dem Modell Querverbindungen zu verschiedenen bereits existierenden einfachen mikromechanischen Modellen, wie dem Microplane Modell oder dem Multilaminat Modell, aufzeigen.

Anhand elementarer Beispiele wird die Wirkungsweise des Modells erklärt. Testbeispiele mit analytisch berechenbaren Lösungen dienen zur Kontrolle der ausgearbeiteten Rechenprozeduren. Die Arbeit wird durch ein Anwendungsbeispiel abgeschlossen; dabei wird das Trag- und Versagensverhalten eines biaxial beanspruchten Holzprobekörpers untersucht und das aus dem Rechenmodell prognostizierte Versagens- und Tragverhalten den gemessenen Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Das entwickelte Materialmodell und die durchgeführten Rechnungen eröffnen die Möglichkeit die dokumentierten Versuchsergebnisse im Detail zu untersuchen, zu interpretieren und das Versagensverhalten des Probekörpers - besonders hinsichtlich qualitativer Aspekte - umfassend zu verstehen.

Die einzelnen Teilarbeiten, die schlussendlich zum generellen Konzept zusammengefügt werden, sind in fünf Hauptteilen ausgearbeitet:

- **Teil I - Versagensbedingungen strukturierter Materialien**
- **Teil II - Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen**

- **Teil III - Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität**
- **Teil IV - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell**
- **Teil V - Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern**

16.1.1 Teil I - Versagensbedingungen strukturierter Materialien

Im ersten Teil der Arbeit werden Funktionen $F(\mathbf{s})$ zur Beschreibung des Versagensbeginns angegeben. Die angeführten Versagensbedingungen werden in Mohr- und Mises-Typ-Versagensbedingungen eingeteilt (Kap. 4) und sollen konvex und zweimal stetig differenzierbar sein (Kap. 3). Besonderes Augenmerk wird auf die Mohr-Typ-Versagensbedingungen gelegt, da diese neben dem Grenzspannungszustand, auch eine Versagensebenenorientierung, wo Versagen im betrachteten RME stattfindet, angeben. Aus diesem Grund ist dieser Versagensbedingungstyp zur Beschreibung strukturierter Materialien geradezu prädestiniert. Je nach betrachteter Materialstruktur lassen sich uneingeschränkt viele solcher Orientierungen mit jeweils einer oder mehreren Versagensbedingungen formulieren.

Zum Beispiel lässt sich die Elastizitätsgrenze von Kristallen, die abhängig vom Kristallgittertyp unterschiedlich viele Versagensebenenorientierungen und zugeordnete Gleitrichtungen haben, mit Mohr-Typ-Versagensbedingungen beschreiben (Kap. 4).

Ein weiteres Beispiel sind unidirektional faserverstärkte Kunststoffe, die einen transversal isotropen Materialaufbau besitzen und daher unendlich viele Versagensebenenorientierungen (normal zur Faserrichtung) aufweisen, in denen gleichgeartetes Versagen stattfindet.

In Kap. 5 werden verschiedene Möglichkeiten gezeigt, wie bei der Umsetzung der Mohr'schen Idee im Fall von transversaler Isotropie bzw. Isotropie vorzugehen ist und welche Schwierigkeiten, z.B. der Verlust der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit, sich ergeben können und wie diese zu beheben sind.

Die Ergebnisse von Teil I kurz zusammengefasst:

- **Einführung und Etablierung der Unterscheidung in Mohr- und Mises-Typ-Versagensbedingungen**
- **Anwendung und Kombination von beliebig vielen Mohr-Typ-Versagensbedingungen bei der Beschreibung des Versagensbeginns von strukturierten Materialien**
- **Umsetzung der Mohr'schen Idee bei Materialien mit symmetrischem Materialaufbau**

Ein weiteres Ziel des ersten Teils war es, die in der Standardliteratur vorhandene Fixierung auf den Fall der Isotropie bei Formulierung von Versagensbedingungen zu überwinden. Wie die zu diesen Versagensbedingungen zugehörigen Versagensmechanismen aussehen, ist Inhalt des zweiten Teils.

16.1.2 Teil II - Multi-Mechanismen-Plastizität ohne/mit Spannungsnullbedingungen

Jeder Versagensbedingung $F_i(\mathbf{s}) = 0$ wird ein plastischer Versagensmechanismus $d\mathbf{e}_{pl,i}$ zugeordnet. Einschränkend wird festgelegt, dass dieser plastische Mechanismus zur jeweiligen Versagensbedingung assoziiert ist, d.h., $d\mathbf{e}_{pl,i}$ weist in Richtung des Gradienten $\mathbf{g}_i = \partial F_i / \partial \mathbf{s}$. Da in Teil I bei der Beschreibung des Versagensbeginns von strukturierten Materialien die Anzahl der verwendeten Versagensbedingungen nicht limitiert war, ergeben sich demzufolge auch uneingeschränkt viele plastische Versagensmechanismen. In Spannungspunkten, wo mehrere Versagensbedingungen $F_i(\mathbf{s}) = 0$ erfüllt sind, können die plastischen Versagensmechanismen simultan aktiviert werden. Jeder aktive Mechanismus liefert einen Beitrag zum differentiellen Zuwachs der plastischen Gesamtverzerrung. In Kap. 6 werden die Gleichungen zur Beschreibung von plastischem Materialverhalten bei beliebig vielen, simultan aktivierbaren plastischen Versagensmechanismen, kurz: Multi-Mechanismen-Plastizität, ausgearbeitet.

Bei konvexen Versagensbedingungen und assoziierten plastischen Mechanismen lässt sich zeigen, dass die Lösung der Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität dem Minimumpunkt einer konvexen Optimierungsaufgabe entspricht.

Eine Sondersituation tritt auf, wenn die simultan aktiven Versagensmechanismen nicht voneinander unabhängig sind. Diese Unbestimmtheit lässt sich im Fall assoziierter Versagensmechanismen durch die geometrische Gestalt der elastischen Grenzfläche, mithilfe der Normalenvektoren auf die einzelnen Versagensbedingungen im aktuellen Spannungspunkt, beurteilen. Punkte, in denen die Normalenvektoren voneinander linear abhängig sind und zu dieser Unbestimmtheit führen, werden als Pyramidenpunkte bezeichnet. In den Pyramidenpunkten lässt sich nicht eindeutig bestimmen, wie viel die einzelnen Versagensmechanismen zum differentiellen Zuwachs der plastischen Gesamtverzerrung beitragen. Um eine mögliche und gültige Aufteilung der plastischen Versagensmechanismen zu berechnen, wird die Moore-Penrose-Pseudoinverse eingeführt.

In Kap. 7 werden die Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität unter Berücksichtigung von Nullspannungsbedingungen betrachtet. Dabei sind im Laufe des gesamten Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhangs ausgewählte Spannungskomponenten \mathbf{s}_b null. Zwischen den verbleibenden aktiven Spannungskomponenten \mathbf{s}_a , die einen reduzierten Spannungszustand, z.B. einen ebenen oder einen einaxialen Spannungszustand, determinieren, und den zugehörigen arbeitskonjugierten Verzerrungen \mathbf{e}_a ergibt sich das sogenannte „reduzierte“ Materialmodell, wobei aber auch die zu den Nullspannungen arbeitskonjugierten Verzerrungskomponenten \mathbf{e}_b , die sich begleitend zu den aktiven Verzerrungen ergeben, berechnet werden.

Mit der in Kap. 7 vorgestellten Systematik können beliebige, dreidimensional formulierte elasto-plastische Materialmodelle mit einer uneingeschränkten Anzahl von plastischen Versagensmechanismen durch Berücksichtigung von Nullspannungskomponenten so umge-

wandelt werden, um diese bei der Berechnung von Platten-, Schalen-, Balken- oder Fachwerkstabmodellen einzusetzen.

Exemplarisch wird diese Reduktionsprozedur in Kap. 7 an zwei Beispielen demonstriert. Auch im später vorgestellten Mikrostrukturmodell kommen die Spannungsnullrandbedingungen zum Einsatz.

Die Ergebnisse von Teil II kurz zusammengefasst:

- **Ausarbeitung der Plastizitätsgleichungen mit beliebig vielen, simultan aktivierbaren plastischen Versagensmechanismen**
- **Nachweis der Äquivalenz der Plastizitätsgleichungen mit den Minimalbedingungen einer konvexen Optimierungsaufgabe**
- **Darstellung von Situationen mit uneindeutiger Aufteilung der plastischen Gesamtverzerrung in die beteiligten plastischen Versagensmechanismen („Pyramidenpunkt“)**
- **eindeutige Lösung von Pyramidenpunkten mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen**
- **Formulierung der Plastizitätsgleichungen bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen**

16.1.3 Teil III - Rechnerische Umsetzung der Multi-Mechanismen-Plastizität

Bei den Gleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität handelt es sich um ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zugehörigen Zwangsungleichungen (Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen). Diese Gleichungen sollen bei bekanntem Anfangszustand und bei Vorgabe eines finiten Verzerrungssinkrements $\Delta \mathbf{e}$ gelöst und die plastischen Verzerrungszuwächse $\Delta \mathbf{e}_{pl}$ und die einhergehenden Spannungsänderungen $\Delta \mathbf{S}$ bestimmt werden (Kap. 8). Bei der formulierten Aufgabe handelt es sich um ein Anfangswertproblem. Die i.A. vorhandene Nichtlinearität erlaubt nur in einigen Sonderfällen eine geschlossene analytische Lösung, ansonsten muss eine approximativ-numerische Integrationsmethode gewählt werden. Mit dem hier verwendeten Euler-Rückwärts-Verfahren werden die anfänglichen Differentialgleichungen in ein System nichtlinearer algebraischer Gleichungen mit Zwangsungleichungen umgewandelt.

Für den Einbau des Materialmodells in eine übergeordnete nichtlineare Strukturrechnung, die mit einem Newton-Raphson-Verfahren gelöst wird, ist zusätzlich die algorithmisch konsistente Materialsteifigkeitsmatrix zu berechnen.

Es kann - analog zu der differentiellen Aufgabenformulierung - gezeigt werden, dass die Lösung der gegebenen Gleichungen dem Minimumpunkt einer konvexen Optimierungsaufgabe entspricht. Für diese mathematische Standardaufgabe existiert eine große Menge an möglichen Lösungsverfahren. In Kap. 9 werden eine Active-Set-Methode zur Lösung

von QP-Aufgaben und das SQP-Verfahren vorgestellt und umgesetzt. Um globale Konvergenz zu garantieren, wird das SQP-Verfahren um eine Merit-Funktion inklusive eines Line-Search-Verfahrens erweitert.

In Kap. 9 sind zusätzlich Beispiele angeführt, die als Test für die entwickelten Rechenprozeduren verwendet werden. In einem Beispiel werden die Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge und die Tragspannungen eines FCC- und eines BCC-Kristalls bestimmt und den Berechnungen aus der Literatur, siehe Borja/Wren (1993) und Schröder/Miehe (1997), gegenübergestellt. Aufgrund der zuvor formulierten Einschränkung auf perfekte Plastizität und assoziierte Versagensmechanismen lassen sich zur Bestimmung der Tragspannung, anstatt einer inkrementellen Verzerrungssteigerung, starr-plastische Analysen durchführen.

Die Ergebnisse von Teil III kurz zusammengefasst:

- **Integration der Differentialgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität mittels eines Euler-Rückwärts-Verfahren und Darstellung der nichtlinearen algebraischen Gleichungen**
- **Nachweis der Äquivalenz der algebraischen Gleichungen mit den Minimalbedingungen einer konvexen Optimierungsaufgabe**
- **Ausarbeitung verschiedener Verfahren zur Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe**
- **Berechnung der algorithmisch konsistenten Materialsteifigkeitsmatrix**
- **Ausarbeitung der zuvor angeführten vier Punkte bei Berücksichtigung von Spannungsnullbedingungen**
- **Spannungs-Verzerrungs-Berechnung und starr-plastische Tragspannungsanalyse eines einfachen Beispiels sowie von FCC- und BCC-Monokristallen**

16.1.4 Teil IV - Einfaches und generelles Mikrostrukturmodell

In Kap. 10 wird die Theorie des generellen und einfachen Mikrostrukturmodells ausgearbeitet. Das Mikrostrukturmodell wird mit dem Zusatz „einfach“ versehen, weil es annimmt, dass die Mikroelemente in einem durch die makroskopischen Verzerrungen vorgegebenen affin verzerrten Gitter eingebettet sind. Das hat zur Folge, dass die Lage der Mikroelemente innerhalb des Makroelements beliebig sein kann. Das Material der Mikroelemente wird mit dem in den Teilen I bis III ausgearbeitetem Modell beschrieben. Es sind je Mikroelement beliebig viele plastische Versagensmechanismen möglich und es können zusätzlich für jedes Mikroelement beliebige Spannungsnullbedingungen festgelegt werden. Die Annahme der Spannungsnullbedingung führt zu Inkompatibilitäten zwischen der makroskopischen Verzerrung und den sich ausbildenden begleitenden Verzerrungskomponenten des Mikroelements. Die dabei entstehenden Klaffungen und Überlappungen werden bewusst zugelassen. Mit der vorgegebenen kinematischen Annahme lassen sich aus den Materialeigenschaften der einzelnen Mikroelemente die resultierenden makroskopischen

Größen berechnen.

Anhand der Beispiele in Kap. 11 lässt sich die Diversität des einfachen Mikrostrukturmodells zeigen. Ein Beispiel in Kap. 11 beschreibt die Tragspannungsberechnung eines Polykristalls. Obwohl die konstituierenden Monokristalle richtungsabhängiges Materialverhalten besitzen, ergibt sich durch eine gleichförmige Orientierungsverteilung der Mikroelemente auf makroskopischer Betrachtungsskala isotropes Verhalten. Bei einigen Beispielen aus Kap. 11 werden bei den Mikroelementen Spannungsnullbedingungen eingeführt. Mit dieser Zusatzmöglichkeit lassen sich Querverbindungen zu bereits bestehenden einfachen mikromechanischen Strukturmodellen, wie dem Microplane Modell, herstellen.

Die Ergebnisse von Teil IV kurz zusammengefasst:

- **Formulierung des einfachen Mikrostrukturmodells und Berechnung der äquivalenten makroskopischen Größen**
- **Darstellung der Diversität und der Einschränkungen des Modells anhand mehrerer elementarer Beispiele**
- **Kritische Untersuchung und Vergleich mit dem Microplane Modell**
- **Vergleich mit anderen einfachen Mikrostrukturmodellen**

16.1.5 Teil V - Holzmaterialmodell & Re-Investigation des Tragverhaltens von biaxial beanspruchten Holzprobekörpern

Der letzte Teil der Arbeit beinhaltet die Formulierung eines Materialmodells für Holz mit besonderem Augenmerk auf die modellhafte Beschreibung der für Holz charakteristischen Versagensmechanismen (Kap. 12). Das Modell wurde dabei bewusst einfach formuliert; die Versagensbedingungen sind ausnahmslos lineare Funktionen in den Spannungen; die linear-elastische Materialsteifigkeitsmatrix ist orthotrop. Nach einigen kleinen theoretischen Voruntersuchungen zum elastischen Spannungs-Verzerrungs-Verhalten und zum Versagen des formulierten Modells bei einaxialer bzw. biaxialer Belastung wird das Holzmodell zur Re-Investigation des Trag- und Versagensverhaltens eines biaxial beanspruchten Probekörpers eingesetzt.

In Kap. 13 wird die Versuchsanordnung und die Versuchsdurchführung erläutert und die Aufgabenstellung formuliert. Der Probekörper ist eine Holzstruktur, die aus einem Mittelscheibenelement und vier seitlichen Lasteinleitungselementen besteht. In Kap. 14 wird für den Probekörper ein einfaches statisches Modell entwickelt und das elastische Tragverhalten untersucht. Es kann gezeigt werden, dass die Lasteinleitungselemente eine Abminderung der Beanspruchung der Mittelscheibe, die wiederum von der Dicke des Mittelscheibenelements und der Neigung der Holzfaserrichtung abhängt, bewirken. Die Gegenüberstellung der elastischen Last-Verformungs-Berechnungen mit den gemessenen Werten zeigt eine gute Übereinstimmung.

Die elastische Untersuchung ist Ausgangspunkt der Traglastuntersuchung in Kap. 15, wobei das Strukturmodell mit dem Materialmodell aus Kap. 14 kombiniert wird. Bei den spröden Versagensmechanismen, wie Zug quer zur Faserrichtung, deckt sich das Versagen des Probekörpers mit dem Versagen in der Mittelscheibe. Bei Aktivierung von duktilen Versagensmechanismen, wie z.B. Druck quer zur Faserrichtung, zeigt das Rechenmodell Umlagerungsmöglichkeiten, wodurch es auch in den Lasteinleitungselementen zu Druckversagen kommen kann. Die Fotos der Bruchbilder des Probekörpers bestätigen dieses in den einfachen Berechnungen prognostizierte potentiell mögliche Versagensszenarium. Dieses tritt vornehmlich in den Lasteinleitungselementen 2 und 4 auf, wobei Probekörpern mit zunehmender Mittelscheibendicke ($t_m = 7.5$ mm oder $t_m = 9.5$ mm) stärker gefährdet sind.

Die gemessenen Bruchlasten sind keine materiellen Versagens- und Festigkeitsgrößen, sondern geben das Versagen des Probekörpers - also einer komplexen aus verschiedenen Elementen aufgebauten Tragstruktur - an. Aus der Untersuchung des Probekörpers hat sich ergeben, dass die Materialkennwerte durch die gemessenen Versuchsdaten nicht direkt zugänglich sind; als Zwischeninstanz dient das statisch-unbestimmte System des Probekörpers, mit dem die inneren Kraft- und Spannungsverteilungen in der Mittelscheibe und in den Lasteinleitungselementen berechnet werden. Die elastischen Materialsteifigkeits- und die geometrischen Abmessungsverhältnisse beeinflussen diese Verteilung und damit das Traglimit des Systems und in weiterer Folge die gemessenen Bruchlasten. Bei Holz tritt weiter die Schwierigkeit auf, dass die benötigten elastischen Materialsteifigkeitsgrößen stark streuen.

Das verwendete statische Modell wurde bewusst einfach gehalten; mögliche weiterführende Untersuchungen mit verfeinerten Modellen sollten noch durchgeführt werden, um die obigen ersten Schlussfolgerungen weiter zu bestätigen oder eventuell nachzukorrigieren.

16.2 Offene Punkte & Ausblick

16.2.1 Erweiterung des Multi-Mechanismen-Plastizitätsmodells

16.2.1.1 Inklusion von Verfestigung

Bei den Modellgleichungen der Multi-Mechanismen-Plastizität wurden Verfestigungsterme bewusst (noch) nicht inkludiert. Bei Materialmodellen mit mehreren plastischen Versagensmechanismen ergibt sich die interessante Frage, ob die jeweils zugehörigen Verfestigungsmechanismen miteinander interagieren oder jeder Verfestigungsmechanismus sich unabhängig von allen anderen ausbildet. In der Plastizität von Monokristallen ist diese Frage seit Anbeginn der Forschung präsent. Ein Überblick über verschiedenen Verfestigungsmodelle und mögliche Interaktionen bei Monokristallen findet sich in Kap. 10.4 von Khan/Huang (1995). Eine allgemeine Formulierung und einer Diskussion unterschiedlicher Interaktionen und Kopplungen der Verfestigungsmechanismen bei mehreren linearen Versagensbedingungen hat Maier (1970) untersucht.

Wie die Gleichungen um diesen Zusatzeffekt zu erweitern sind und welche Gestalt die Verfestigung einschränkend haben muss, um die Möglichkeit aufrechtzuerhalten eine äquivalente Optimierungsaufgabe, die weiterhin konvex ist, zu formulieren, ist noch auszuarbeiten.

16.2.1.2 Verwendung nicht-assoziierter plastischer Versagensmechanismen

Die Modellgleichungen wurden auf den Fall mit assoziiertem Versagensmechanismus eingeschränkt, was mehrere Vorteile mit sich bringt: (i) die Formulierung ist in Kombination mit konvexen Versagensbedingungen stets thermodynamisch konsistent und (ii) die Lösung der Grundgleichungen lässt sich durch ein äquivalentes konvexes Optimierungsproblem berechnen.

Grundsätzliche Arbeiten zu nicht-assozierten plastischen Versagensmechanismen finden sich z.B. bei Bigoni (2012). Beiträge zu Multimechanismen Plastizität mit nicht-assozierten Versagensmechanismen liefern Ottosen/Ristinmaa (1996) und Klisinski (1998). Eine umfassende Darstellung dieser Situation und die zugehörige rechnerische Umsetzung scheinen - nach Ansicht und Kenntnisstand des Autors - noch auszustehen und sind ein Gebiet mit Forschungsbedarf.

16.2.1.3 Erweiterung auf große Verzerrungen

Es ist zu überlegen, wie die hier formulierten Mohr-Typ-Versagensbedingungen und die zugehörigen Plastizitätsgleichungen auf die Situation mit großen Verzerrungen übertragen werden können.

16.2.2 Starr-plastische Traglastanalyse

Die dargestellten Modellgleichungen mit den angegebenen Beschränkungen, d.h. keine Verfestigung, assoziierter Versagensmechanismus und konvexe Versagensbedingungen, sind Ausgangspunkt und Grundvoraussetzung für starr-plastische Traglastanalysen. Die zu lösende Optimierungsaufgabe wurde bereits in Kap. 9.7.4 hergeleitet und für einen Fall mit linearen Versagensbedingungen (FCC- und BCC-Kristalle) gelöst. Die Aufgabe ist aber für beliebige nichtlineare und konvexe Versagensbedingungen anschreibbar:

$$\max\{\mathbf{s}^T \mathbf{n}_e\} \quad \text{mit} \quad F_i(\mathbf{s}) \leq 0 \quad (16-1)$$

Der Vektor \mathbf{n}_e ist parallel zum plastischen Verzerrungszuwachs $d\mathbf{e}_{pl}$ und wird vorgegeben; gesucht ist der Spannungszustand \mathbf{s}^* , der im erlaubten Bereich liegt und den Arbeitsterm $\mathbf{s}^T \mathbf{n}_e$ maximiert. Die Zielfunktion im starr-plastischen Fall (16-1) ist linear in den Spannungen \mathbf{s} ; im elasto-plastischen Fall enthält die Zielfunktion einen quadratischen Zusatzterm in \mathbf{s} mit der Materialnachgiebigkeitsmatrix \mathbf{D} . Zur Lösung der Optimierungsaufgabe aus Gleichung (16-1) lassen sich die nichtlinearen Optimierungsmethoden aus Kap. 9 oder Anhang J anwenden.

16.2.3 Rechenprozeduren

Die Methoden die linearen und nichtlinearen, aber stets konvexen Optimierungsaufgaben zu lösen sind in prototypartigen Matlab-Programmen ausgearbeitet worden. Die Implementierung der Rechenprozeduren in ein kommerzielles Softwarepaket steht noch aus. Dabei treten weiter Fragen und Aufgabenstellungen in den Vordergrund, die in dieser Arbeit nicht behandelt wurden. Da sich die vorgestellten Berechnungsabläufe bei einer nichtlinearen Strukturberechnung vielfach wiederholen (in jedem Iterationsschritt des Newton-Raphson-Verfahrens und dabei wiederum in jedem Gausspunkt jedes Elementes), ist bei einer kommerziellen Umsetzung der Aspekt der Zeitoptimierung der Berechnungsroutine - Robustheit und Konvergenz vorausgesetzt - das primäre Ziel. Eventuell sind auch alternative Lösungsverfahren vorhanden, die zeitsparendere Berechnungen ermöglichen.

16.2.4 Modell zur Beschreibung des Verhaltens eines RME bei Bruch

Ein Modell zur Beschreibung des Bruchverhaltens eines RME wurde in dieser Arbeit nicht umgesetzt. In diesem Abschnitt werden einige Ideen skizziert, wie das Bruchversagen beschrieben werden könnte. Diese Überlegungen können als Startpunkt für eine Umsetzung in naher Zukunft dienen.

Kernidee dabei ist, dass sich im Fall von Bruch in einer Ebenenorientierung im RME aufgrund des schlagartigen Kontaktverlusts bei Gefügetrennung eine spannungsfreie Oberfläche bildet. Es wird angenommen, dass die bei Bruch frei werdende elastische Verzerrungsenergie nicht in kinetische Energie umwandelt, sondern dissipiert wird. Das

RME gilt als gerissen und kann nur mehr einen ebenen Spannungszustand aufnehmen. Die kumulative Rissbreite berechnet sich aus der Differenz zwischen dem intakten und dem gerissenen Material. Für die Beschreibung des verbleibenden Materialverhaltens mit der spannungsfreien Oberfläche wird die Reduktionsprozedur aus Kap. 7 verwendet. Diese Idee soll zunächst an einem einaxial beanspruchten Stab dargestellt werden.

16.2.4.1 Stabförmiges, einaxial beanspruchtes RME

Betrachtet wird ein stabförmiges RME mit der Querschnittsfläche A und der Länge L (Bild 16.1). Das Material ist strukturiert und weist eine Ebenenschar normal zur Stabachse (x_I -Achse) auf, in der zuerst ein plastischer Versagensmechanismus aktiviert wird und anschließend Bruch stattfindet. Obwohl das RME sich räumlich deformiert, wird nur die axiale Verschiebung und die zugehörige Normalverzerrung E_{II} betrachtet. Das RME ist bei $x_I = 0$ (Punkt A ; nicht zu verwechseln mit der Querschnittsfläche, die gleich bezeichnet wird) axial unverschieblich gelagert; am Stabende, bei Punkt E ($x_I = L$), wird die Verschiebungskomponente $U_{I,E}$ aufgebracht. Der Verschiebungsverlauf im RME ist linear und die axiale Normalverzerrung lautet:

$$E_{11} = \frac{U_{I,E}}{L} \quad (16-2)$$

Die Stabendverschiebungskomponente wird vorgegeben. Ist $U_{I,E}$ positiv, wird der Stab gestreckt; ist $U_{I,E}$ negativ, kommt es zu einer Stauchung. Aus der zugehörigen Kraft F am Stabende lässt sich die Normalspannung $S_{II} = F/A$ im Stab berechnen. Es wird für Druck- und Zugbeanspruchung dieselbe plastische Grenzspannung f_Y angenommen.

1D-Analogiemodell

Um das Verformungsverhalten des RME bei einaxialer Beanspruchung zu beschreiben, wird das Analogiemodell aus Bild 16.1 verwendet, das aus einem Reibungsblock (rot), einem Bruchelement (grün) und einem linear-elastischen Federelement (blau) besteht. Das Bruchelement wird aktiviert, sobald der Reibungsblock bei positiver Normalverzerrung den Verzerrungsgrenzwert $E_{II,pl,lim}$ erreicht bzw. überschreitet. Die Bewegung im Reibungsblock beginnt, wenn die Spannung den Grenzbetrag f_Y erreicht.

Lastfall 1: monoton anwachsende Verzerrung

Im ersten Lastfall wird die Randverschiebung $U_{I,E}$ so lange erhöht, bis das RME auf Zug bricht. In Bild 16.2 ist das Spannungs-Dehnungsdiagramm dargestellt; die markanten Punkte in der Belastungshistorie sind durch eingekreiste Nummern gekennzeichnet. Zu diesen Belastungspunkten ist in Bild 16.2 das verformte 1D-Analogiemodell gezeichnet.

Der unverformte Stab (Punkt 0) wird zuerst gestreckt, bis das elastische Limit erreicht ist (Punkt 1). Die Spannung im Punkt 1 ist f_Y und die Verlängerung des Stabes ist $E_{II,el,Y}$. Die aufgebrauchte Arbeit wird als elastische Verzerrungsenergie in der Feder gespeichert. Dieser

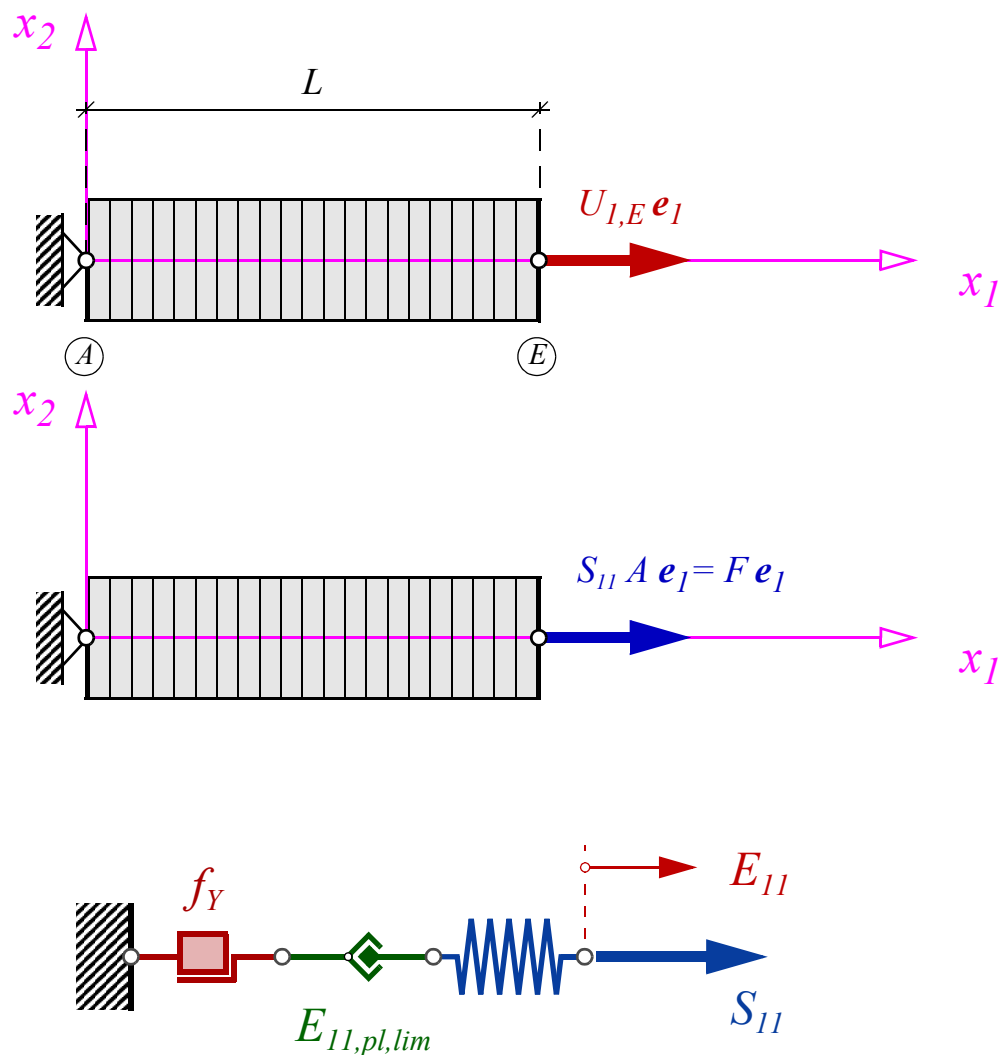


Bild 16.1 Einaxial beanspruchtes stabförmiges RME und zugehöriges 1D-Analogiemodell

Verzerrungsenergieanteil ist der dreiecksförmige zyanschattierte Bereich unter der Spannungs-Dehnungskurve in Bild 16.2. Bei weiterer Streckung behält die Kraft den Wert $f_Y A$ bei und die Verlängerung verursacht nur plastische Verformungsanteile. Die vom Punkt 1 zu Punkt 2 aufgebrauchte äußere Arbeit wird nicht gespeichert, sondern durch den plastischen Mechanismus dissipiert. Die dissipierte Energie entspricht dem dunkelblau schattierten Parallelogramm unter der Spannungs-Dehnungskurve in Bild 16.2. Anschließend erreicht die plastische Verzerrung einen festgelegten Grenzwert $E_{11,pl,lim}$ (Punkt 2). Bei weiterer Verformungserhöhung bricht der Stab. Aus Gleichgewichtsgründen fällt die äußere Belastung schlagartig auf null ab (Punkt 3). Aufgrund der Verformungssteuerung bleiben Stabanfang und -ende bei $x_I = 0$ und $x_I = (1 + E_{11,el,Y} + E_{11,pl,lim})L$ fixiert. Im Analogiemodell öffnet sich im Bruchfall die Klammer des Bruchelements; es kann keine Kraft mehr übertragen werden und das Federelement federt auf die ungedehnte Ausgangslänge zurück. Durch Verlust der zusammenhaltenden Schnittkraft im Stabinneren wird die gespeicherte elastische Verzerrungsenergie schlagartig frei. Normalerweise würde sich diese in eine ungedämpfte Längsschwingung der Feder umwandeln. Hier wird aber angenommen, dass eine

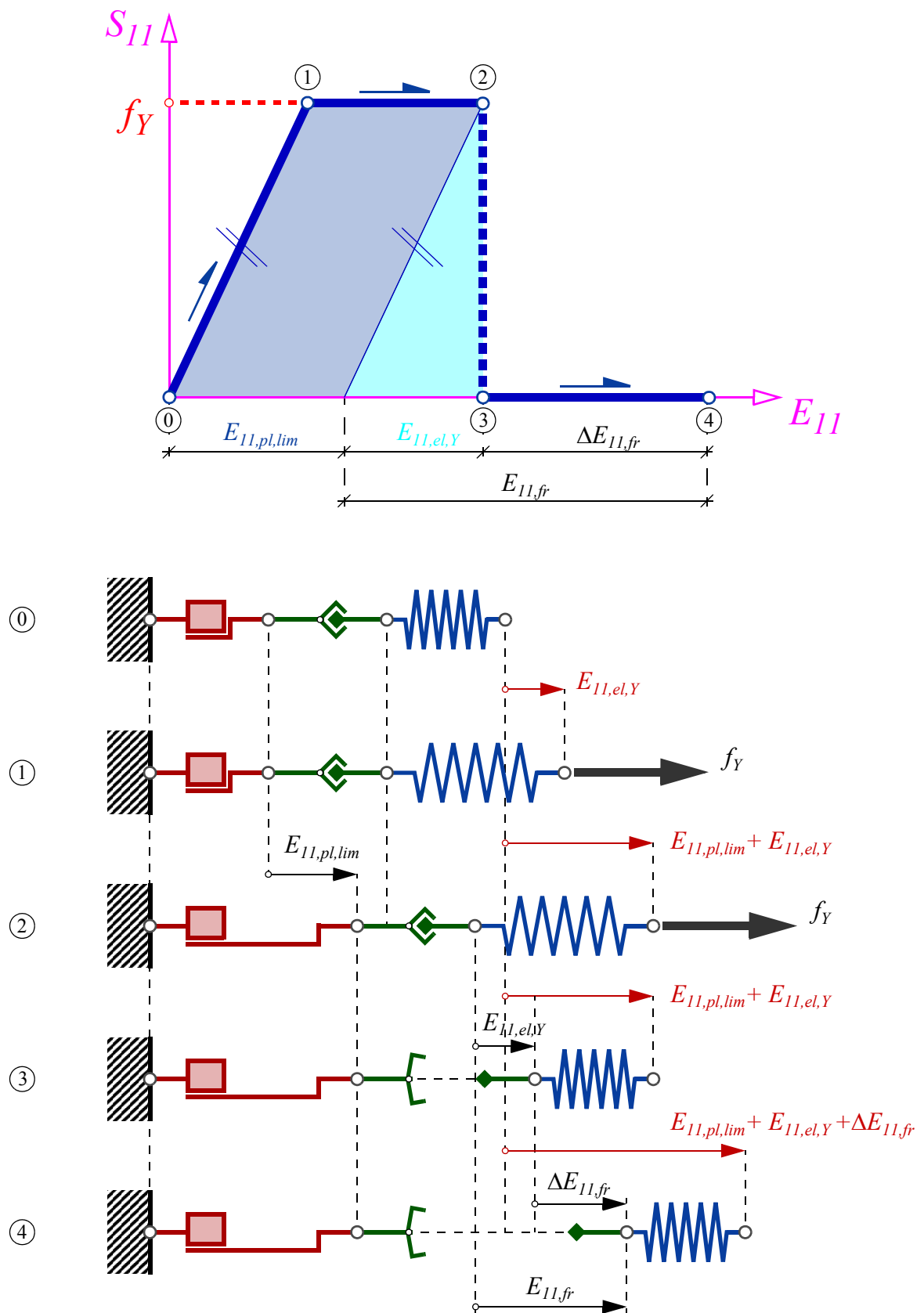


Bild 16.2 1D-Analogiemodell bei monoton ansteigender axialer Verformung; Spannungs-Dehnungsdiagramm und zugehörige Verformungszustände

innere Dämpfung besteht und dieser Schwingvorgang so rasch abklingt, dass er vernachlässigt werden kann und angenommen wird, dass die durch Bruch frei gewordene elastische Verzerrungsenergie dissipiert wird. Die über die Stablängsrichtung verteilte und aufsummierte Rissbreite $E_{11,fr}L$ entspricht der zuvor entstandenen elastischen Stabverlängerung $E_{11,el,Y}L$, die durch Zurückfedern nach dem Bruch entstanden ist. Zu beachten ist, dass die plastischen Verformungsanteile unverändert bleiben. Eine weitere Erhöhung der Stabendverschiebung (Punkt 4) ist ohne Kraftaufwand möglich und bewirkt eine weitere Aufweitung der Risse um den Betrag $\Delta E_{11,fr}L$.

Im Analogiemodell sind die elastischen und plastischen Verformungsbereiche sowie die entstandene Rissaufweitung elementweise konzentriert dargestellt. Durch die Homogenisierung ist dieses bereichsweise Einzelverhalten über das gesamte RME gleichmäßig verteilt zu betrachten („verschmierter Rissverteilungszustand“).

Lastfall 2: Verformungszyklus am gebrochenen REM

Der einmal gerissene Stab kann in Stablängsrichtung keine Zugkraft mehr aufnehmen, dadurch sind weitere elastische oder plastische Verlängerungen in x_I -Richtung nicht möglich. Um das Verhalten bei Stauchung zu studieren, wird ein Verformungszyklus am gebrochenen Stab betrachtet. Ausgangspunkt ist der aufgerissene Stab aus der vorigen Lastsituation (Punkt 4). Die Verformung $U_{I,E}$ ist $(E_{11,fr,4} + E_{11,pl,4})L$. Die Stabendverformung wird diesmal nicht erhöht, sondern zuerst bis auf die anfänglich Nullstellung $U_{I,E} = 0$ reduziert. Der Stab hat dabei wieder die Anfangslänge L . Anschließend wird der Endpunkt E wieder auf die Ausgangsposition bei $U_{I,E} = (E_{11,fr,4} + E_{11,pl,4})L$ in positiver x_I -Richtung verschoben.

In Bild 16.3 ist dieser verformungsgesteuerte Belastungszyklus im Spannungs-Dehnungsdiagramm dargestellt. Die an den markanten Punkten zugehörigen Verformungsbilder des Analogiemodells sind in Bild 16.4 dargestellt.

Ausgangspunkt ist der aufgerissene Stab (Punkt 4). Die Stabendverformung wird um den Betrag $E_{11,fr,4}L$ reduziert, bis sich die Rissfuge schließt und die beiden Schnittufer (bzw. alle Bruchflächen) wieder berühren (Punkt 5). Für diesen Bewegungsvorgang ist kein Kraftaufwand notwendig. Sobald die Schnittufer in Kontakt sind, ist eine Druckkraft notwendig um den Stab weiter zu stauchen. Bis der Stab das plastische Druckversagenslimit bei der Druckspannung $-f_Y$ (Punkt 6) erreicht, wird er zunächst um die Länge $E_{11,el,Y}L$ elastisch zusammengedrückt. Im Analogiemodell wird nur das Federelement gestaucht, bis die Versagensdruckspannung erreicht wird.

Zwischen Punkt 6 und 7 bleibt die aufgebrachte Druckkraft konstant $-f_Y A$. Dabei werden plastische Druckverzerrungsanteile geweckt, die die anfänglichen plastischen Verzerrungen reduzieren, bis die anfänglich Stablänge L erreicht ist (Punkt 7). Im Analogiemodell wird eine Bewegung im Reibungsblock initiiert (Punkt 7, Bild 16.4).

Wird nun die aufgebrachte Drucklast auf null reduziert (Punkt 8), entspannt sich der Stab (die Feder) elastisch und verlängert sich dabei um den Betrag $E_{11,el,Y}L$. Eine weitere Ver-

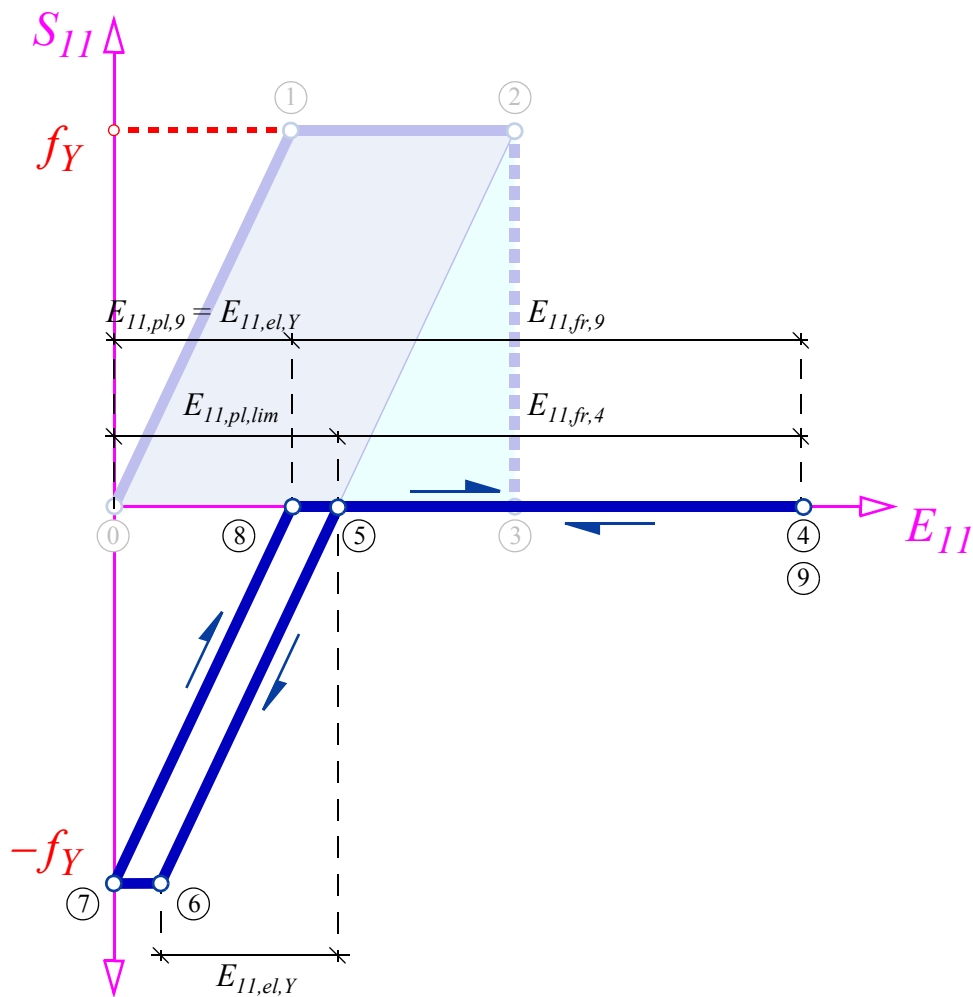


Bild 16.3 Spannungs-Dehnungsdiagramm des bereits gebrochenen RME mit aufgebrachtem Verformungszyklus von Punkt 4 bis Punkt 9

längerung des Stabes auf die Ausgangslänge (Punkt 4 bzw. 9) ist ohne Kraft möglich, da der Stab bereits gerissen ist und keine Zuglast mehr aufnehmen kann. Trotzdem ergibt sich ein Unterschied zur Ausgangssituation, da die akkumulierte Rissbreite $E_{11,fr,9}$ größer ist als $E_{11,fr,4}$ am Ausgangszustand. Der Grund liegt in der Reduktion des plastischen Verformungsanteils, die bei der plastischen Stauchung zwischen den Punkten 6 und 7 stattgefunden hat.

16.2.4.2 Erweiterung auf eine allgemeine dreidimensionale Beanspruchungssituation

Es soll nun kurz skizziert werden, wie die anhand einer einaxialen Belastungssituation dargestellten Überlegungen, auf eine allgemeine dreidimensionale Beanspruchungssituation erweitert werden. Das Modell soll folgende Bestandteile beinhalten:

- eine Bruchebenenorientierung,
- eine Bruchinitiierungsbedingung oder Bruchfunktion,

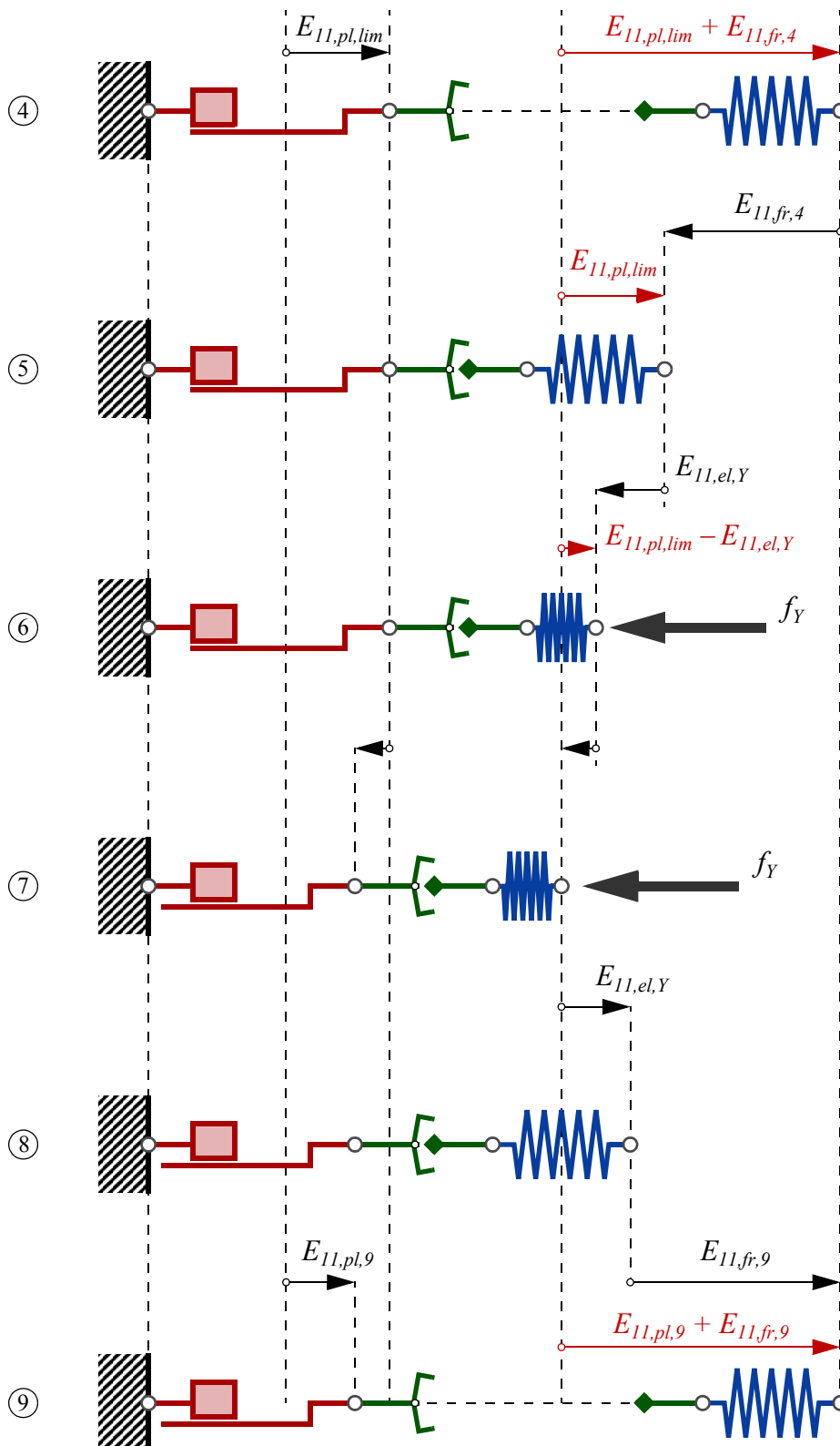


Bild 16.4 1D Analogiemodell: Verformungszyklus des einaxial beanspruchten RME nach Bruch

- die Einarbeitung der Bedingung einer spannungsfreien Oberfläche in das uneingeschränkt dreidimensional formulierte (elasto-plastische) Materialmodell, um eine „verschmierte“ Rissbildung und einen damit einhergehenden Kontaktverlust in den Bruchebenenorientierungen modellhaft zu beschreiben und
- eine Bedingung, wann es zum Schließen der Rissfugen kommt.

Alle vier Bestandteile sind in der zuvor angestellten einaxialen Belastungssituation enthalten: Die Bruchebenenorientierung wurde in Richtung der x_I - bzw. der Stabachse gewählt. Bruchbeginn wurde durch Erreichen der plastischen Grenzverzerrung $E_{11,pl,lim}$ angezeigt. Bei Bruch wurde die Bruchebenenorientierung spannungsfrei, d.h., die axiale Normalspannung wurde null gesetzt (alle übrigen Spannungskomponenten waren bei der einaxialen Beanspruchung bereits null). Nach Bruch können sich keine Zugspannungen im RME aufbauen, aber bei Schließen der Rissfuge können noch Druckspannungen auftreten.

Bereits im Fall der Multi-Mechanismen-Plastizität wurden beliebig viele Ebenenorientierung \mathbf{n}_i vorgegeben, in denen Versagen potentiell stattfindet. Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verformungsverhalten wird durch jeweils eine Versagensbedingung $F_i(\mathbf{s})$ angegeben. Zugeordnet zu jedem Versagensmechanismus ist eine Bruchfunktion, die den Übergang zur Bildung einer spannungsfreien Oberfläche in der jeweiligen Ebenenorientierung \mathbf{n}_i angibt. Diese Bruchfunktion soll mit G_i bezeichnet werden. Offen ist dabei, welche Größe in die Bruchfunktion G als Maß eingeführt wird, um Bruch zu kennzeichnen. Eine einzuhaltende Randbedingung sollte dabei sein, dass Bruch in der Belastungshistorie stets nach (oder zeitgleich mit) der Versagensbedingung $F_i(\mathbf{s})$ stattfindet. Die Spannungen als Funktionswerte sind nur bei sprödem Verhalten sinnvoll, weil sich dort Elastizitätsgrenze und Bruchbeginn decken; wird aber vor Brucheintritt per-plastisches Verformungsverhalten zugelassen, sind die Spannungen kein geeignetes Maß mehr, da sie niemals den elastischen Bereich verlassen, d.h., es gilt niemals $F_i(\mathbf{s}) > 0$. Eine adäquate Wahl scheint die plastische Verzerrung $\mathbf{e}_{pl,i}$ zu sein. Die Bruchfunktion ist damit eine Funktion der Form $G_i(\mathbf{e}_{pl,i})$. Wie genau diese Funktion gestaltet sein muss, ist noch zu überlegen.

Wird an einer Ebenenorientierung die Bruchbedingung erfüllt, wird dort die Spannungsnullbedingung aktiviert, die eine verschmierte Rissverteilung repräsentiert. Das anfänglich dreidimensionale Materialmodell muss durch Nullsetzen von den drei Spannungskomponenten in der Versagensebenenorientierung konsistent reduziert werden. Dieser Vorgang wird über die Verformungen (respektive die Verzerrungen) des RME gesteuert, d.h., die Verformungen vor und nach Bruch sind gleich, aber die zu den Spannungsnullbedingungen zugehörigen elastischen Verzerrungsanteile wandeln sich in eine Rissaufweitung bzw. im Fall von Schubverzerrungen zu einer Rissflächenversetzung um. Die Verformungen können aber weiter erhöht werden, was zu einer Erhöhung der Rissweite bzw. der Rissflächenversetzung führt. Normal zu dieser gebrochenen Ebenenorientierung kann das RME noch immer einen ebenen Spannungszustand aufnehmen. Wird eine weitere Bruchebene aktiviert, trägt das RME nur mehr eine einaxiale Normalspannung, deren Richtung normal zu den

beiden Ebenenorientierungen, in denen Bruchversagen stattgefunden hat, liegt. Sind drei oder mehr Versagensebenen aktiviert, gilt das RME als komplett zerstört und kann keine Spannungen mehr aufnehmen, da in diesem Fall alle Spannungskomponenten null sein müssen. Kommt es zum Schließen von Rissfugen, ist am RME ein Kontaktproblem zu formulieren. Dabei ist zu überlegen, ob in der Kontaktfläche mit der zuvor aufgerissenen Ebenenorientierung Reibungsverhalten berücksichtigt werden soll oder ob nur Drucknormalspannungen übertragbar sind. In diesem Kontext stellt die Bruchinitiierung eine „Anti“-Kontaktbedingung dar.

Wie diese qualitativen Überlegungen in Gleichungen anzuschreiben sind und wie dieses lokale Kontaktverlust- bzw. Kontaktproblem rechnerisch umzusetzen ist, ist noch offen.

16.2.4.3 Einbettung brechender Mikroelemente in das Mikrostrukturmodell

Anhand eines einfachen Modells lässt sich qualitativ die Auswirkung des allmählichen Versagens von Mikroelementen auf die makroskopische Spannungs-Verzerrungs-Beziehung darstellen.

Systembeschreibung

Ein Stabbündel besteht aus $M = 300$ Einzelstäben. Die E-Moduli der Stäbe sind zwischen E_0 und $2E_0$ gleich verteilt. Der äquivalente E-Modul geht also bei $M \rightarrow \infty$ gegen $1.5 E_0$. Zur Zufallsbestimmung der Bruchverzerrung $E_{11,pl,lim,k}$ jedes Einzelstabes wird eine Weibullverteilungsfunktion in Matlab verwendet, die zusätzlich die Vorgabe des Kennwerts T , die charakteristische Lebensdauer - hier mit 0.632 festgelegt - und den Formparameter k benötigt. Je größer k ist, umso geringer ist die Streuung. Bei der gewählten Verteilungsfunktion wurde $k = 5$ gewählt. Die mithilfe dieser Funktion zufällig ausgewählten 300 Bruchverzerrungen, ihrer Größe nach geordnet, sind in Bild 16.5 als diskrete Punktfolge der Stabzahl dargestellt.

Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang des Stabbündels

Die Belastung erfolgt verformungsgesteuert. Bis zu E_{11,Y_i} verhält sich das Stabbündel linear-elastisch (Bereich I in Bild 16.6). Ab dieser Verzerrungsgröße beginnen die Einzelstäbe zu fließen und nähern sich der plastischen Traglastspannung $S_{11,Y}$ des Stabbündels an (Bereich II). Bevor diese Spannung endgültig erreicht wird, beginnen jedoch bereits die ersten Einzelstäbe zu brechen und die Stabbündelspannung fällt wieder ab (Bereich III).

Je nach der gewählten Verteilung der Bruchverzerrung $E_{11,pl,lim,k}$ der Einzelstäbe bildet sich der abfallende Spannungs-Verzerrungs-Ast aus. Bei der gewählten Weibullverteilung ist aufgrund des großen Formfaktors k die Streuung geringer. Man kann das an dem stärkeren Abfall des Spannungs-Verzerrungs-Diagramms in Bild 16.6 zwischen ca. $3E_{11,0}$ und $4.5E_{11,0}$ in Bild 16.6 erkennen.

Zusätzlich ist ein Entlastungspfad im Bereich III des Spannungs-Verzerrungs-Diagramms eingezeichnet. Aufgrund der bereits eingetretenen Einzelstabbrüche hat sich der E-Modul

bei Entlastung im Vergleich zum anfänglichen E-Modul des Stabbündels im Bereich I verringert. Das Einzelstabbruchverhalten des Stabbündels ist Ursache für Phänomene, die als „Entfestigung“ und „Schädigung“ bezeichnet werden.

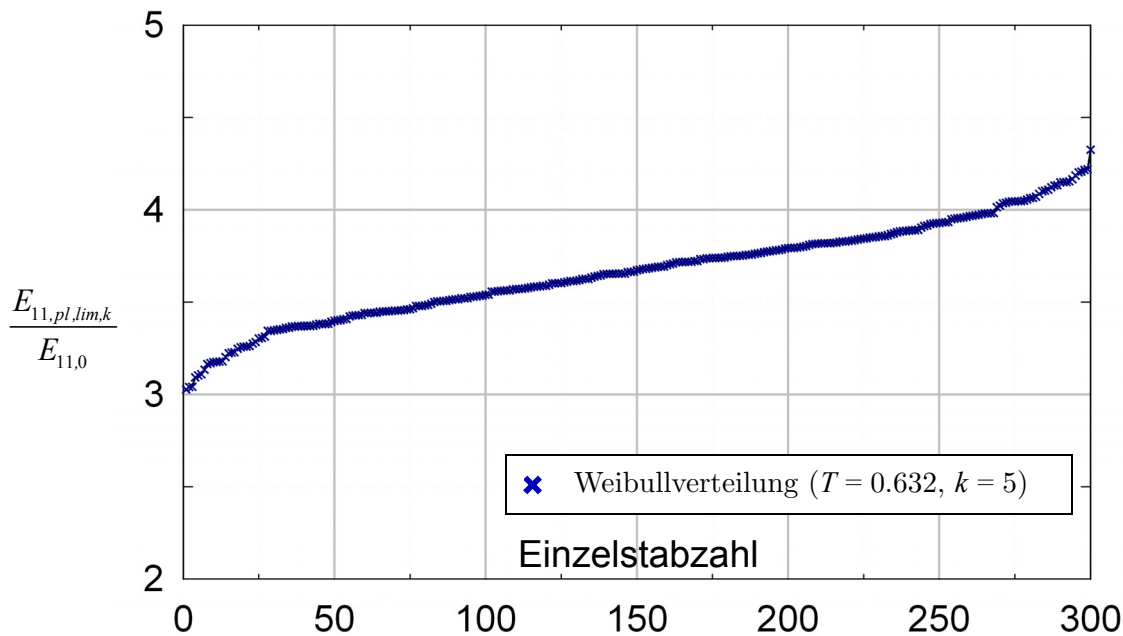


Bild 16.5 Weibullverteilung der axialen Bruchverzerrungen $E_{11,pl,lim,k}$ von $M = 300$ Einzelstäben der Größe nach geordnet mit charakteristischer Lebensdauer von 63,2% und Formparameter $k = 5$

Erweiterte Betrachtung auf ein 3-D-Mikrostrukturmodell

Mit der Einarbeitung von Bruchversagen in das Verhalten der einzelnen Mikroelemente lässt sich im makroskopischen Verbundelement das allmähliche Ausbilden von Mikrorissen abbilden. Damit sind die sogenannte „Entfestigung“ und die „Schädigung“ auf eine Akkumulation dieser mikrostrukturellen Elementarmechanismen rückführbar. Mit der zusätzlichen Berücksichtigung von Riss- bzw. Porenschließbedingungen (Kontaktbedingungen) ließe sich allmähliches Kompaktierungsverhalten durch das Mikrostrukturmodell abbilden. Durch diese Erweiterungen wäre eine enorme Palette an Materialverhaltenscharakteristika beschreibbar, die sich aus wenigen einfachen Materialverhaltenstypen auf Mikroebene zusammensetzen lassen.

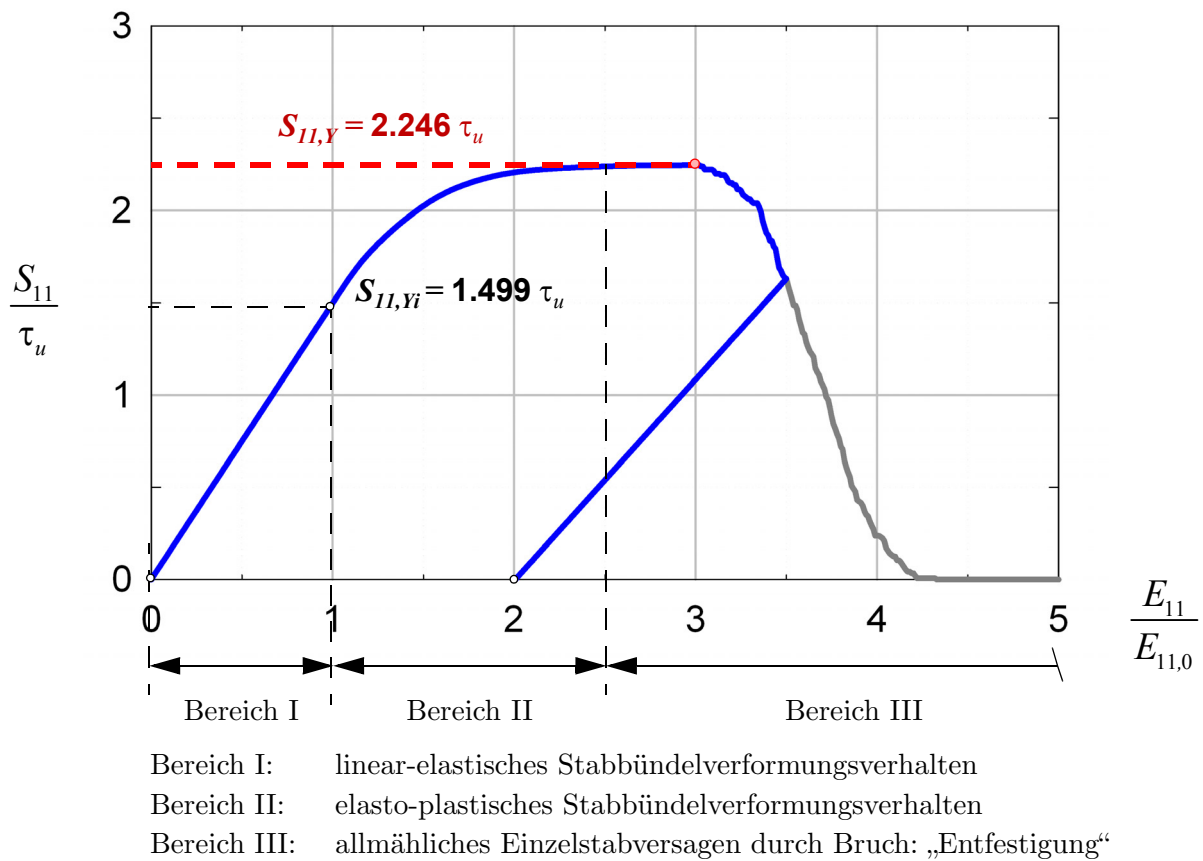


Bild 16.6 Spannungs-Verzerrungs-Diagramm eines Stabbündels bestehend aus $M = 300$ Einzelstäben mit elasto-plastischem Einzelstabmaterialverhalten inkl. Bruchversagen; die Entlastung ist linear mit verringertem E-Modul.

ANHANG

Inhalt:

- A Tensoralgebra und Tensoranalysis**
 - B Kartesische Tensoren und Matrixschreibweise**
 - C Invarianten, isotrope und anisotrope Tensorfunktionen**
 - D Linear-elastisches Materialverhalten**
 - E Mises-Typ-Versagensbedingungen**
 - F Modifizierte isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen**
 - G Moore-Penrose-Pseudoinverse**
 - H Ebener Stab mit schrägem Materialfaserverlauf**
 - I Eine nützliche Matrixidentität**
 - J Nichtlineare Programmierung - Penalty-Verfahren**
-

A

**Tensoralgebra und
Tensoranalysis**

A.1 Einleitung und Kapitelübersicht

Dieser Abschnitt ist ein kurzer Abriss zur Tensoralgebra und -analysis. Dabei ist die Darstellung auf Tensoren und Tensoroperationen beschränkt, die in dieser Arbeit vorkommen. Es wird also nur der dreidimensionale euklidische Raum betrachtet und darin nur Tensoren bis zur vierten Stufe. In der Fachliteratur werden besonders für Produkte zwischen Tensoren unterschiedlichste Bezeichnungen eingeführt oder ein und demselben Symbol werden je nach Lehrbuch unterschiedliche Rechenregeln zugewiesen. Die nachfolgend gewählte Bezeichnungskonvention und die zugehörigen Rechenregeln folgen - bis auf die Definition des „circle-dot“ Produkts - den Festlegungen in Holzapfel (2000).

Neben der symbolischen Bezeichnung der verwendeten Tensoren werden speziell definierte Produkte und Operatoren mit zugehörigen Symbolen und Rechenregeln eingeführt, die in weiterer Folge eine leicht handhabbare Manipulation von tensoriellen Produkten und Funktionen erlauben.

Die sogenannte symbolische Schreibweise stellt einen Tensor n -ter Stufe unabhängig von jeglichem Koordinatenbezugssystem durch einen einzigen Buchstaben, einen symbolischen Platzhalter, dar. Obwohl Tensoren beliebig hoher Stufe existieren, kommen neben skalaren Größen in der Kontinuumsmechanik fester Körper überwiegend Vektoren (Tensoren erster Stufe), Tensoren zweiter (Spannungs- und Verzerrungstensor) und vierter Stufe (Materialsteifigkeitstensor) vor. Weniger häufig werden Tensoren dritter Stufe verwendet.

Für diese Größen wird folgende Bezeichnungskonvention vereinbart:

- a ...skalare Größe - kursive Buchstaben,
- \mathbf{a} ...Vektor, Tensor 1. Stufe - fettgedruckte kursive Buchstaben,
- \mathbf{A} ...Tensor 2. Stufe - fettgedruckte Buchstaben,
- \mathcal{A} ...Tensor 3. Stufe - kalligraphische Buchstaben,
- \mathbb{A} ...Tensor 4. Stufe - fettgedruckte Kontur von Buchstaben.

A.2 Tensorprodukte

Die Definition von Produkten zwischen Tensoren ist der zweite essentielle Bestandteil der symbolischen Kurzschreibweise. Basisprodukte sind das Skalarprodukt, das Kreuzprodukt und das dyadische Produkt. Alle weiteren Produkte ersetzen eine speziell definierte Kombination dieser drei Fundamentalprodukte, die vorwiegend dazu dient, die Schreibweise kompakt zu gestalten. Man hat somit die Freiheit für immer wiederkehrende Produktformulierungen neue Symbole einzuführen und zu definieren. Ein Beispiel dazu ist das unten eingeführte „circle-dot“ Produkt, welches den Schreibaufwand, z.B. bei Ableitungen von Tensoren, erheblich verringert. Zu den jeweiligen Produkten sind Rechenregeln und Identitäten angegeben.

A.2.1 Skalar-, Kreuz- und dyadisches Produkt

Die fundamentale Grösse und Ausgangspunkt für alle weiteren Tensorproduktdefinitionen ist das Skalarprodukt (A-1) zwischen zwei Vektoren. Es gibt - geometrisch gedeutet - die Projektion des Vektors \mathbf{b} auf den Vektor \mathbf{a} , mal dem Betrag von \mathbf{a} an. Das Kreuzprodukt (A-2) zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ergibt einen dritten Vektor \mathbf{c} . Dieser steht normal auf \mathbf{a} und \mathbf{b} (A-3). Sein Betrag (A-3) entspricht der von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Fläche. Das dyadische Produkt - bezeichnet durch das Symbol \otimes - verbindet einen Tensor der Stufe n mit einem Tensor der Stufe m zu einem Tensor mit $(n+m)$ -ter Stufe, siehe (A-4). Damit lässt sich jeder Tensor n -ter Stufe durch ein n -faches dyadisches Produkt von n Vektoren ausdrücken.

A.2.2 „Circle-dot“ Produkt

Das hier speziell definierte „circle-dot“ Produkt (A-5) ändert durch Austauschung die Reihenfolge von dyadischen Mehrfachprodukten.

A.2.3 Kontraktionen zwischen Tensoren beliebiger Stufe

Aufbauend auf den oben definierten Fundamentalprodukten wird die r -fache Kontraktion zwischen zwei Tensoren der Stufen n und m eingeführt. Diese reduziert die Tensorstufe des Produkts auf $(n+m-2r)$. Die Rechenregel für die einfache ($r = 1$) und doppelte ($r = 2$) Kontraktion sind in (A-6) und (A-7) angeführt. Kontraktionen höherer Ordnung kommen in dieser Arbeit nicht vor.

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{A-1})$$

Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (\text{A-2})$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Dyadisches Produkt

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{A} \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{c} = \mathcal{A}$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbb{A}$$

„Circle-Dot“ Produkt

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \quad (\text{A-5})$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \odot \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}$$

Box A.1 Fundamentalprodukte der Tensorrechnung

Einfache Kontraktion

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (\text{A-6})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$$

Zweifache Kontraktion

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad (\text{A-7})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) : (\mathbf{d} \otimes \mathbf{e}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) : (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

Box A.2 Produkte der Tensorrechnung

A.3 Spezielle Tensoren

Die angeführten speziellen Tensoren definieren ihre Eigenschaften bei der Produktbildung mit anderen Tensoren.

A.3.1 Einheitstensoren und Transpositionstensor

Der Einheitstensor \mathbf{J} bildet bei einfacher Kontraktion einen beliebigen Tensor in sich selbst ab (A-8). Der Einheitstensor vierter Stufe \mathbb{J} entsteht durch das circle-dot Produkt zweier Einheitstensoren zweiter Stufe (A-9) und bildet bei doppelter Kontraktion einen Tensor zweiter Stufe bzw. vierter Stufe in sich selbst ab (A-10), wobei von links oder rechts multipliziert werden kann. Wird ein Tensor \mathbf{A} zweiter Stufe durch doppelte Kontraktion von rechts oder links mit dem Tensor 4. Stufe $\bar{\mathbb{J}}$ multipliziert, ergibt sich der transponierte Tensor \mathbf{A}^T .

Einheitstensor 2. Stufe

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathbf{J} = \mathcal{A}$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{J} = \mathbb{A}$$

(A-8)

Einheitstensor 4. Stufe

$$\mathbb{J} = \mathbf{J} \odot \mathbf{J}$$

(A-9)

$$\mathbb{J} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{J} = \mathbf{A}$$

$$\mathbb{J} : \mathcal{A} = \mathcal{A} : \mathbb{J} = \mathcal{A}$$

(A-10)

$$\mathbb{J} : \mathbb{A} = \mathbb{A} : \mathbb{J} = \mathbb{A}$$

Transpositionstensor 4. Stufe

$$\bar{\mathbb{J}} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \bar{\mathbb{J}} = \mathbf{A}^T$$

(A-11)

$$\bar{\mathbb{J}} : \bar{\mathbb{J}} = \mathbf{J}$$

(A-12)

Box A.3 Einheitstensoren zweiter und vierter Stufe und Transpositionstensor

A.3.2 Transponierter Tensor, inverser Tensor 2. Stufe und der Spur-Operator

In Box A.4 sind die Transposition, die Inversion und die Spur eines Tensors zweiter Stufe definiert.

Transponierter Tensor

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (\text{A-13})$$

Inverser Tensor

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (\text{A-14})$$

Spur eines Tensors

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbf{J} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) &= \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = \\ &= \mathbf{B} : \mathbf{A} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{J} \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

Box A.4 Transponierter und inverser Tensor und Spur eines Tensors 2.Stufe

A.3.3 Projektionstensoren

A.3.3.1 Symmetrischer und antimetrischer Anteil eines Tensors

Ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe entspricht seiner Transponierten (A-19). Wird dieser symmetrische Anteil von einem allgemeinen Tensor \mathbf{A} abgezogen (A-17), verbleibt der sogenannte antimetrische Anteil. Durch Herausheben von \mathbf{A} aus der Definition in (A-19), ergeben sich die \mathbb{P} -Tensoren 4. Stufe (A-18), die durch Multiplikation den symmetrischen bzw. den antimetrischen Anteil des Tensors \mathbf{A} abspalten.

A.3.3.2 Volumetrischer und deviatorischer Anteil eines Tensors

Ein Tensor zweiter Stufe kann additiv in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil entsprechend (A-20) zerlegt werden. Ausgangspunkt dieser summativen Aufspaltung ist die Definition des sogenannten volumetrischen Tensors aus (A-21). Die Spur des deviatorischen Anteils ist null. Durch Multiplikation mit $\mathbb{P}_{vol(dev)}$ lässt sich der volumetrische Anteil bzw. der deviatorische Anteil aus dem Tensor \mathbf{A} abspalten.

Die Eigenschaften (A-22) von $\mathbb{P}_{sym(vol)}$ und $\mathbb{P}_{asy(dev)}$ bei gegenseitiger Produktbildung ergeben sich aus der zuvor getroffenen Definition. Aus diesen Eigenschaften ergeben sich weiter die in (A-23) angegebenen Produkte zwischen symmetrischen und antimetrischen Tensoren 2. Stufe.

Aufspaltung in symmetrischen und antimetrischen Anteil

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{sym} + \mathbf{A}_{asy} \quad (\text{A-17})$$

$$\mathbf{A}_{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \bar{\mathbf{J}}): \mathbf{A} = \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{sym} \quad (\text{A-18})$$

$$\mathbf{A}_{asy} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \bar{\mathbf{J}}): \mathbf{A} = \mathbb{P}_{asy} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{asy}$$

$$\mathbf{A}_{sym}^T = \mathbf{A}_{sym} \quad \mathbf{A}_{asy}^T = -\mathbf{A}_{asy} \quad (\text{A-19})$$

Aufspaltung in volumetrischen und deviatorischen Anteil

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{vol} + \mathbf{A}_{dev} \quad (\text{A-20})$$

$$\mathbf{A}_{vol} = \frac{tr(\mathbf{A})}{3} \mathbf{J} = \frac{1}{3}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}): \mathbf{A} = \mathbb{P}_{vol} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{vol} \quad (\text{A-21})$$

$$\mathbf{A}_{dev} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{vol} = \left(\mathbf{J} - \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \right): \mathbf{A} = \mathbb{P}_{dev} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{dev}$$

Eigenschaften der \mathbb{P} -Tensoren: $\mathbb{P}_{\bullet} = \mathbb{P}_{sym} / \mathbb{P}_{vol}$, $\mathbb{P}_{\square} = \mathbb{P}_{asy} / \mathbb{P}_{dev}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\bullet} : \mathbb{P}_{\bullet} &= \mathbb{P}_{\bullet} \\ \mathbb{P}_{\bullet} + \mathbb{P}_{\square} &= \mathbf{J} & \mathbb{P}_{\square} : \mathbb{P}_{\square} &= \mathbb{P}_{\square} \\ & & \mathbb{P}_{\bullet} : \mathbb{P}_{\square} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

Produkte

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\bullet} : \mathbf{B} &= \mathbf{A} : \mathbb{P}_{\bullet} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}_{sym} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{\bullet} : \mathbb{P}_{\bullet} : \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\bullet} : \mathbf{B}_{\bullet} \\ \mathbf{A}_{\square} : \mathbf{B} &= \mathbf{A} : \mathbb{P}_{\square} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}_{asy} = \mathbf{A} : \mathbb{P}_{\square} : \mathbb{P}_{\square} : \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\square} : \mathbf{B}_{\square} \\ \mathbf{A}_{\bullet} : \mathbf{B}_{\square} &= 0 \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{\bullet} : \mathbf{B}_{\bullet} + \mathbf{A}_{\square} : \mathbf{B}_{\square} \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

Box A.5 Symmetrischer/volumetrischer und antimetrischer/deviatorischer Anteil eines Tensors 2.Stufe

A.4 Ableitungen von speziellen Tensoren 2. Stufe

Bei der Ableitung von speziellen Tensoren zweiter Stufe (Box A.6) zeigt sich der Vorteil der eingeführten symbolischen Notation, die eine kompakte Darstellung der Ableitung und der gewonnenen Endprodukte erlaubt.

Ableitung spezieller Tensoren 2.Stufe

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{J} \quad (\text{A-24})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} = \bar{\mathbb{J}} \quad (\text{A-25})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{sym}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{P}_{sym} \quad \frac{\partial \mathbf{A}_{asy}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{P}_{asy} \quad (\text{A-26})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} = -(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-T}) \quad (\text{A-27})$$

Ableitungen von $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^k}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \odot (\mathbf{A}^T)^{k-i-1} \quad (\text{A-28})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{B} : \mathbf{A}^k)}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B} : \frac{\partial \mathbf{A}^k}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^T)^i \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^T)^{k-i-1} \quad (\text{A-29})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A}^k : \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}^k}{\partial \mathbf{A}} : \mathbf{B} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{k-i-1} \quad (\text{A-30})$$

$$\frac{\partial (\text{tr}(\mathbf{A}^k))}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{J} : \frac{\partial \mathbf{A}^k}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^T)^i \cdot (\mathbf{A}^T)^{k-i-1} = k (\mathbf{A}^T)^{k-1} \quad (\text{A-31})$$

Box A.6 Ableitungen spezieller Tensoren 2.Stufe

B

Kartesische Tensoren und Matrixschreibweise

B.1 Einleitung und Kapitelübersicht

Die in Anhang A vorgestellte symbolische Notation ist eine übersichtliche und elegante Kurzschreibweise ohne speziellen Koordinatenbezug und erlaubt eine kompakte und leicht lesbare qualitative Darstellung des zugrunde liegenden Sachverhalts. Um konkrete Rechenoperationen ausführen zu können, muss ein Bezugskordinatensystem eingeführt werden. Dieses besteht aus drei unabhängigen Basisvektoren. Bezüglich dieses Systems besteht ein Tensor n -ter Stufe als Summe der 3^n -Basistensoren - diese werden durch die Basisvektoren aufgespannt - mit den jeweils zugehörigen Koeffizienten. Die Summation wird durch Indizes gekennzeichnet.

Die Betrachtungen in diesem Kapitel sind auf kartesische Koordinatensysteme mit orthonormierten Basisvektoren beschränkt. Die gewählte Notation ist aber so gewählt, dass eine Erweiterung auf beliebig krummlinige Systeme mit geringem Mehraufwand möglich ist.

Die indizierte Komponentendarstellung ist etwas unübersichtlich und unhandlich bei der Berechnung von Produkten zwischen Tensoren. In vielen Fällen ist das in den indizierten Komponenten dargestellte Tensorprodukt durch ein äquivalentes algebraisches Matrixprodukt anschreibbar. Dadurch gewinnt die Darstellung an Übersichtlichkeit und erlaubt eine einfache Umsetzung in Computerprogrammen, die vorzugsweise mit Matrizen bzw. Listen operieren.

In Kap. B.2 wird die Koordinatenbasis und die zugehörige Komponentendarstellung von Tensoren erster bis vierter Stufe eingeführt. In Kap. B.3 wird eine weitere kartesische Basis eingeführt und die Koeffizienten der Tensoren bezüglich dieses Systems dargestellt bzw. in dieses System umgerechnet. Die Koeffizienten der Tensoren werden in Kap. B.4 in Matrizen angeschrieben; die neun Koeffizienten eines Tensors zweiter Stufe in einer neunzeiligen Spaltenmatrix; die 81 Koeffizienten eines Tensors vierter Stufe in einer neunzeiligen und neunspaltigen Matrix. Damit sind Produkte zwischen Tensoren in einem ausgewählten kartesischen Koordinatensystem durch einfach programmierbare Matrixprodukte ersetzbar. Symmetrische Tensoren zweiter Stufe haben nur sechs unabhängige Koeffizienten. Deshalb kann die neunzeilige Spaltenmatrix auf eine sechszeilige Matrix komprimiert werden. Eine systematische Reduktionsprozedur ist in Kap. B.5 angegeben.

B.2 Komponentendarstellung von Tensoren in kartesischen Koordinaten

Durch Einführung eines Bezugssystems, welches durch drei voneinander unabhängige Vektoren aufgespannt wird, können die Tensoren in Komponentendarstellung angeschrieben werden. Die Angabe dieser Komponenten erlaubt eine konkrete Berechnung aller im vorangegangenen Kapitel symbolisch angeschriebener Tensorprodukte und Ableitungen.

Die anschließende Darstellung beschränkt sich auf ein orthonormiertes Bezugskordinatensystem. Das kartesische Bezugssystem wird durch die drei Basiseinheitsvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ aufgespannt; es gilt $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Jeder Tensor ist durch eine Summe aus Komponenten darstellbar, wobei jede Komponente aus einem Koeffizienten ($a_i, A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl}$, usw.) und einer von den Basisvektoren aufgespannten Basisdyade ($\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \dots$) besteht:

$$\underbrace{A_{1231}}_{\text{Koeffizient}} \underbrace{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1}_{\text{Basisdyade}} \quad (\text{B-1})$$

Jeder Tensor n-ter Stufe besteht somit aus 3^n Koeffizienten und Dyaden. Diese Summe lässt sich kompakt durch die Einführung von Indizes anschreiben, die die Zahlen eins bis drei durchlaufen. Das Summenzeichen wird aus Gründen der Schreibökonomie später nicht mehr angeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i & \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbb{A} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

B.2.1 Produktbildung von kartesischen Tensoren

Die in Anhang A angeführten Produktregeln werden auf die Basisdyaden angewandt, wobei das Skalarprodukt zwischen zwei Basisvektoren durch das Kroneckerdelta δ_{ij} (B-4) gegeben ist. Für das Kreuzprodukt wird das Permutationssymbol ε_{ijk} (B-8) eingeführt.

B.2.2 Spezielle Tensoren in Komponentenschreibweise

Die Koeffizienten der Einheitstensoren und des Transpositionsvektors (Box A.3) nehmen im Fall einer kartesischen Basis entweder den Wert eins oder null an. Das wird durch das Kroneckerdelta ausgedrückt.

Dyadisches Produkt

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{B-3})$$

Kontraktion

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (B_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = A_{ij} B_{mn} \underbrace{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m)}_{\delta_{jm}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_n = A_{ij} B_{jn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_n \quad (\text{B-4})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = (A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (B_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = A_{ij} B_{mn} \underbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m)}_{\delta_{im}} \underbrace{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n)}_{\delta_{jn}} = A_{ij} B_{ij} \quad (\text{B-5})$$

„Circel-dot“ Produkt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = A_{ij} B_{mn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \odot (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = A_{ij} B_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n \quad (\text{B-6})$$

Kreuzprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (\text{B-7})$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \{123, 231, 312\} \\ -1 & \{132, 321, 213\} \\ 0 & \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

Box B.1 Produkte von kartesischen Tensoren

Einheitstensor 2. Stufe

$$\mathbf{J} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (\text{B-9})$$

Einheitstensoren 4. Stufe

$$\mathbb{J} = \mathbf{J} \odot \mathbf{J} = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{B-10})$$

$$\bar{\mathbb{J}} = \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (\text{B-11})$$

$$\mathbf{J} \otimes \mathbf{J} = \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \quad (\text{B-12})$$

Box B.2 Komponentendarstellung spezieller Tensoren

B.3 Koordinatentransformation

Neben den drei anfänglich gewählten Basisvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (Bezugssystem 1) kann jederzeit eine weitere orthonormierte Basis mit den Basisvektoren $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ (System 2) eingeführt werden. Die Basisvektoren des Systems 2 schließen mit jeweils einem Basisvektor des Systems 1 den Winkel α_{ij} ein, der durch das Skalarprodukt (B-13) zwischen den beiden Einheitsvektoren bestimmt wird. Damit sind auch die Koeffizienten c_{ij} bzw. $c_{j'i}$ eines Basisvektors bezüglich der jeweils anderen Basis gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_j &= \cos(\alpha_{ij}) = c_{ij} & \alpha_{ij} &= \sphericalangle(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_j) \\ \mathbf{e}_{i'} &= (\mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j = c_{ij} \mathbf{e}_j & & \text{(B-13)} \\ \mathbf{e}_i &= (\mathbf{e}_{j'} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_{j'} = c_{j'i} \mathbf{e}_{j'} \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \delta_{ij} = c_{ki} c_{kj} \end{aligned}$$

Der bereits erwähnte Vorteil der symbolischen Schreibweise besteht darin, dass die Symbole \mathbf{a} , \mathbf{A} , \mathcal{A} oder \mathbb{A} die Tensoren der jeweiligen Stufe ohne Bezug auf ein konkretes Basissystem darstellen. Werden nun die Koeffizienten der Tensoren bezüglich der Basisvektoren $\mathbf{e}_{i'}$ dargestellt (B-16) bis (B-19), bleibt der jeweilige Tensor für sich unverändert, nur die Koeffizienten ändern ihren Betrag bei dem gewechselten Basisbezug.

Die Einheitstensoren werden in den beiden Bezugssystemen dargestellt, wobei von den Eigenschaften (B-13) Gebrauch gemacht wird. Die Einheitstensoren sind in (B-14) bzw. (B-15) auch auf sogenannte gemischte Basen bezogen dargestellt, das heißt, dass die einzelnen Basisdyaden aus Basisvektoren von unterschiedlichen Bezugssystemen gebildet werden. Dabei ändern sich auch die Koeffizienten vom Kroneckersymbol auf Größen, die den Skalarprodukten c_{ij} bzw. $c_{j'i}$ aus (B-13) entsprechen. Durch Kontraktion mit diesen Einheitstensoren, (B-16) bis (B-19), - oder einfach durch Ersetzen der Basisvektoren in den Dyaden durch (B-13) - werden die Koeffizienten des Tensors bezüglich der beiden Systeme in Zusammenhang gebracht. Die Kontraktion mit den Einheitstensoren mit gemischten Basen scheint auf den ersten Blick etwas umständlich zu sein, ist aber hier aus mehreren Gründen angeführt: Einerseits wird durch das Produkt in der symbolischen Schreibweise nochmals unterstrichen, dass der Tensor per se unverändert bleibt; andererseits kann dieses Schema der Koordinatentransformation ohne weiteren Zusatz auch auf beliebig schiefwinkelige Koordinatensysteme übertragen werden. Außerdem kann in weiterer Folge der Einheitstensor in gemischten Basen in Matrixschreibweise als Transformationsmatrix zwischen den unterschiedlichen Koordinatensystemen angeschrieben werden. Die sich ergebende Systematik der Koeffiziententransformation zwischen zwei orthonormierten Basissystemen ist in (B-20) zusammengefasst.

Einheitstensoren in unterschiedlichen Basen dargestellt

$$\mathbf{J} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = c_{ij} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}_j = c_{j'i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_j \quad (\text{B-14})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l \\ &= c_{i'k} c_{j'l} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l = c_{k'i} c_{l'j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

Tensoren in unterschiedlichen Basen dargestellt

$$\mathbf{a} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_i \mathbf{e}_i = c_{m'i} a_m \mathbf{e}'_m \\ &= a_{m'} \mathbf{e}'_{m'} = c_{m'i} a_m \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \mathbb{J} : \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = c_{m'i} c_{n'j} A_{ij} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \\ &= A_{m'n'} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n = c_{m'i} c_{n'j} A_{m'n'} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

$$\mathcal{A} = \mathbf{J} \cdot \mathcal{A} : \mathbb{J} = \mathbb{J} : \mathcal{A} \cdot \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} A_{ijk} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_r \\ &= A_{m'n'r'} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_r = c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} A_{m'n'r'} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{J} : \mathbb{A} : \mathbb{J}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} c_{s'l} A_{ijkl} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_r \otimes \mathbf{e}'_s \\ &= A_{m'n'r's'} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_r \otimes \mathbf{e}'_s = c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} c_{s'l} A_{m'n'r's'} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

Transformation der Koeffizienten eines Tensors

$$\begin{aligned} a_{i'} &= c_{i'm} a_m & a_i &= c_{m'i} a_{m'} \\ A_{i'j'} &= c_{i'm} c_{j'n} A_{mn} & A_{ij} &= c_{m'i} c_{n'j} A_{m'n'} \\ A_{i'j'k'} &= c_{i'm} c_{j'n} c_{k'r} A_{mnr} & A_{ijk} &= c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} A_{m'n'r'} \\ A_{i'j'k'l'} &= c_{i'm} c_{j'n} c_{k'r} c_{l's} A_{mnrs} & A_{ijkl} &= c_{m'i} c_{n'j} c_{r'k} c_{s'l} A_{m'n'r's'} \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

Box B.3 Komponentendarstellung spezieller Tensoren im Koordinatensystem 1 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und 2 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$

B.4 Matrixschreibweise

Die in der Komponentendarstellung verwendete indizierte Darstellung der Koeffizienten tensorieller Größen ist bei der Berechnung von Produkten zwischen Tensoren unübersichtlich und etwas unhandlich. Auf ebensolche Produkte soll in diesem Abschnitt das Hauptaugenmerk gelegt werden, wobei durch eine systematische Ein- und Umordnung der Koeffizienten der Tensoren in Matrizen die tensoriellen Produkte durch einfach handhabbare und allgemein bekannte Matrizenmultiplikationen ersetzt werden. Zu unterstreichen ist, dass trotz der Einsortierung in eine Matrix die Koeffizienten den tensoriellen Charakter - also die zugehörigen Transformationseigenschaften - nicht verlieren. Da in den Matrizen nur die Koeffizienten der Tensoren eingeordnet werden und die Information der Bezugsbasis in der Matrixschreibweise verloren geht, ist weiters darauf zu achten, dass die Multiplikationen immer zwischen Matrizen mit demselben Basisbezug gebildet werden. Bei Wechsel der Basis sind entsprechende Transformationsmatrizen in die Berechnung zu inkludieren.

B.4.1 Tensorkomponenten als Matrix angeschrieben

Die neun Koeffizienten A_{ij} eines Tensors zweiter Stufe bzw. die 81 Koeffizienten B_{ijkl} eines Tensors vierter Stufe werden in eine (9,1)-Spaltenmatrix (B-21) bzw. eine (9,9)-Matrix (B-22) eingeordnet. Diese systematische Einordnung erfolgt entsprechend Tabelle B.4 durch Ersetzen der zwei Tensorkoeffizientenindizes i und j bzw. k und l , die jeweils die Werte von eins bis drei durchlaufen, durch jeweils einen einzigen Index m bzw. n der Matrix, der von eins bis neun läuft.

Tabelle B.4 Systematische Ersetzung von zwei Tensorkoeffizientenindizes durch einen Matrixindex

Tensorkoeffizientenindizes	$ij (kl)$	11	22	33	12	21	13	31	23	32
Matrixindex	$m (n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Als Kurzschreibweise für diese Einsortierung der Tensorkoeffizienten in eine Matrix wird eine eckige Klammer (B-21) und (B-22) eingeführt. Um anzuzeigen, auf welches Koordinatensystem sich die Koeffizienten beziehen, werden die entsprechenden Indizes hinzugefügt. Diese Indizierung scheint auf den ersten Blick überflüssig zu sein, erlaubt aber eine Anwendung dieser Schreibweise ohne weiteren Zusatz auf beliebige schiefwinkelige Basen mit ko-, kontra- und gemischtvariantem Basisbezug. Allgemein ist die Transformation der Koeffizienten bei Wechsel des Bezugssystems durch diesen Zusatz eindeutig und konsistent mit der oben angeführten Komponentenschreibweise durchführbar. Es wird vereinbart, dass alle nachfolgenden angegebenen Tensoren auf ein und dasselbe orthonormierte Basissystem bezogen werden. Damit kann die zusätzliche Angabe des Basisbezugssystems als Subindex bei den eckigen Klammern weggelassen werden.

Tensor 2. Stufe

$$[\mathbf{B}]_{ij} = [B_{ij}] = \mathbf{b} = [B_{11} \ B_{22} \ B_{33} \ B_{12} \ B_{21} \ B_{13} \ B_{31} \ B_{23} \ B_{32}]^T \quad (\text{B-21})$$

Tensor 4. Stufe

$$[\mathbb{D}]_{ijkl} = [D_{ijkl}] = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1121} & D_{1113} & D_{1131} & D_{1123} & D_{1132} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2221} & D_{2213} & D_{2231} & D_{2223} & D_{2232} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3321} & D_{3313} & D_{3331} & D_{3323} & D_{3332} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1221} & D_{1213} & D_{1231} & D_{1223} & D_{1232} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2112} & D_{2121} & D_{2113} & D_{2131} & D_{2123} & D_{2132} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1321} & D_{1313} & D_{1331} & D_{1323} & D_{1332} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3121} & D_{3113} & D_{3131} & D_{3123} & D_{3132} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2321} & D_{2313} & D_{2331} & D_{2323} & D_{2332} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3212} & D_{3221} & D_{3213} & D_{3231} & D_{3223} & D_{3232} \end{bmatrix} \quad (\text{B-22})$$

Box B.5 Einordnung der Koeffizienten von Tensoren in eine Matrix

B.4.2 Produkte von Tensoren in Matrixschreibweise

Mit den in Box B.5 dargestellten Matrizen lassen sich einige Tensorprodukte (Box B.6) direkt in Matrixprodukte umschreiben.

Einfache Kontraktion

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = [a_i b_i] = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{B-23})$$

Doppelte Kontraktion

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}] = [A_{ij} B_{ij}] = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{B-24})$$

$$[\mathbb{D} : \mathbf{B}] = [D_{ijkl} B_{kl}] = \mathbf{D} \mathbf{b} \quad [\mathbf{B} : \mathbb{D}] = [B_{ij} D_{ijkl}] = \mathbf{D}^T \mathbf{b} \quad (\text{B-25})$$

$$[\mathbb{C} : \mathbb{D}] = [C_{ijkl} D_{klrs}] = \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (\text{B-26})$$

Dyadisches Produkt

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = [A_{ij} B_{kl}] = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{B-27})$$

Box B.6 Tensorprodukte und das Pendant in Matrixschreibweise

Das „circle-dot“ Produkt zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe ist in Matrixschreibweise:

$$[\mathbf{A} \odot \mathbf{B}] = [A_{ik} B_{jl}] = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12}B_{12} & A_{13}B_{13} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{11}B_{13} & A_{13}B_{11} & A_{12}B_{13} & A_{13}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} & A_{23}B_{23} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{21}B_{23} & A_{23}B_{21} & A_{22}B_{23} & A_{23}B_{22} \\ A_{31}B_{31} & A_{32}B_{32} & A_{33}B_{33} & A_{31}B_{32} & A_{32}B_{31} & A_{31}B_{33} & A_{33}B_{31} & A_{32}B_{33} & A_{33}B_{32} \\ A_{11}B_{21} & A_{12}B_{22} & A_{13}B_{23} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{11}B_{23} & A_{13}B_{21} & A_{12}B_{23} & A_{13}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{22}B_{12} & A_{23}B_{13} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{21}B_{13} & A_{23}B_{11} & A_{22}B_{13} & A_{23}B_{12} \\ A_{11}B_{31} & A_{12}B_{32} & A_{13}B_{33} & A_{11}B_{32} & A_{12}B_{31} & A_{11}B_{33} & A_{13}B_{31} & A_{12}B_{33} & A_{13}B_{32} \\ A_{31}B_{11} & A_{32}B_{12} & A_{33}B_{13} & A_{31}B_{12} & A_{32}B_{11} & A_{31}B_{13} & A_{33}B_{11} & A_{32}B_{13} & A_{33}B_{12} \\ A_{21}B_{31} & A_{22}B_{32} & A_{23}B_{33} & A_{21}B_{32} & A_{22}B_{31} & A_{21}B_{33} & A_{23}B_{31} & A_{22}B_{33} & A_{23}B_{32} \\ A_{31}B_{21} & A_{32}B_{22} & A_{33}B_{23} & A_{31}B_{22} & A_{32}B_{21} & A_{31}B_{23} & A_{33}B_{21} & A_{32}B_{23} & A_{33}B_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B-28})$$

B.4.3 Einheitstensoren & Transpositionstensor

Die Koeffizienten der Tensoren aus Kap. B.2.2 sind in Matrixschreibweise in Box B.7 dargestellt.

Einheitstensor 2. Stufe

$$[\mathbf{J}] = \mathbf{j} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \quad (\text{B-29})$$

Einheitstensor 4. Stufe

$$[\mathbb{J}] = [\delta_{ik} \delta_{jl}] = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-30})$$

Box B.7 Matrixdarstellung spezieller Tensoren

Transpositionstensor 4. Stufe und dyadisches Produkt aus den Einheitstensoren

$$[\bar{\mathbf{J}}] = [\delta_{il}\delta_{jk}] = \bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-31})$$

$$[\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}] = [\delta_{ij}\delta_{kl}] = \mathbf{J}\mathbf{J}^T \quad (\text{B-32})$$

Box B.7 Matrixdarstellung spezieller Tensoren

B.4.4 Projektionsmatrixen

B.4.4.1 Symmetrischer und antimetrischer Anteil

Die beiden Tensoren aus Box A.5 zur Aufteilung eines Tensors zweiter Stufe in seinen symmetrischen bzw. antimetrischen Anteil in Matrixform sind:

$$[\mathbf{P}_{sym}] = \mathbf{P}_{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \bar{\mathbf{J}}) \quad [\mathbf{P}_{asy}] = \mathbf{P}_{asy} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \bar{\mathbf{J}}) \quad (\text{B-33})$$

B.4.4.2 Volumetrische und deviatorische Anteil

Die beiden Tensoren aus Box A.5 zur Aufteilung eines Tensors zweiter Stufe in seinen volumetrischen bzw. deviatorischen Anteil in Matrixform sind:

$$[\mathbf{P}_{vol}] = \mathbf{P}_{vol} = \frac{1}{3}\mathbf{J}\mathbf{J}^T \quad [\mathbf{P}_{dev}] = \mathbf{P}_{dev} = \mathbf{J} - \frac{1}{3}\mathbf{J}\mathbf{J}^T \quad (\text{B-34})$$

Die in (A-22) angeführten Eigenschaften der Projektionstensoren, bleiben in Matrizenform erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{sym(vol)} \mathbf{P}_{sym(vol)} &= \mathbf{P}_{sym(vol)} \\ \mathbf{P}_{asy(dev)} \mathbf{P}_{asy(dev)} &= \mathbf{P}_{asy(dev)} \\ \mathbf{P}_{sym(vol)} + \mathbf{P}_{asy(dev)} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{P}_{sym(vol)} \mathbf{P}_{asy(dev)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B-35})$$

B.4.5 Koordinatentransformation in Matrixschreibweise

Wie bereits gezeigt (Kap. B.3), besitzt ein Tensor unterschiedliche Koeffizienten in unterschiedlichen Koordinatensystemen, die über die Koordinatentransformation miteinander in Bezug stehen. Der Einheitstensor vierter Stufe mit den Koeffizienten in einer gemischten Basis (B-36) dargestellt, liefert die gesuchte (9,9)-Transformationsmatrix \mathbf{T} um den Wechsel zwischen den beiden Koeffizientendarstellungen herzustellen. Die Inverse der Transformationsmatrix entspricht im Fall orthonormierter Systeme der transponierten Transformationsmatrix (B-37). Mit dieser Größe ist die Koordinatentransformation von Tensoren zweiter (B-38) und vierter Stufe (B-39) in Matrixschreibweise angebar.

Einheitstensor in gemischter Basis - Transformationsmatrix

$$[\mathbb{J}]_{i'j'kl} = [c_{i'k}c_{j'l}] = \mathbf{T}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{1'1}c_{1'1} & c_{1'2}c_{1'2} & c_{1'3}c_{1'3} & c_{1'1}c_{1'2} & c_{1'2}c_{1'1} & c_{1'1}c_{1'3} & c_{1'3}c_{1'1} & c_{1'2}c_{1'3} & c_{1'3}c_{1'2} \\ c_{2'1}c_{2'1} & c_{2'2}c_{2'2} & c_{2'3}c_{2'3} & c_{2'1}c_{2'2} & c_{2'2}c_{2'1} & c_{2'1}c_{2'3} & c_{2'3}c_{2'1} & c_{2'2}c_{2'3} & c_{2'3}c_{2'2} \\ c_{3'1}c_{3'1} & c_{3'2}c_{3'2} & c_{3'3}c_{3'3} & c_{3'1}c_{3'2} & c_{3'2}c_{3'1} & c_{3'1}c_{3'3} & c_{3'3}c_{3'1} & c_{3'2}c_{3'3} & c_{3'3}c_{3'2} \\ c_{1'1}c_{2'1} & c_{1'2}c_{2'2} & c_{1'3}c_{2'3} & c_{1'1}c_{2'2} & c_{1'2}c_{2'1} & c_{1'1}c_{2'3} & c_{1'3}c_{2'1} & c_{1'2}c_{2'3} & c_{1'3}c_{2'2} \\ c_{2'1}c_{1'1} & c_{2'2}c_{1'2} & c_{2'3}c_{1'3} & c_{2'1}c_{1'2} & c_{2'2}c_{1'1} & c_{2'1}c_{1'3} & c_{2'3}c_{1'1} & c_{2'2}c_{1'3} & c_{2'3}c_{1'2} \\ c_{1'1}c_{3'1} & c_{1'2}c_{3'2} & c_{1'3}c_{3'3} & c_{1'1}c_{3'2} & c_{1'2}c_{3'1} & c_{1'1}c_{3'3} & c_{1'3}c_{3'1} & c_{1'2}c_{3'3} & c_{1'3}c_{3'2} \\ c_{3'1}c_{1'1} & c_{3'2}c_{1'2} & c_{3'3}c_{1'3} & c_{3'1}c_{1'2} & c_{3'2}c_{1'1} & c_{3'1}c_{1'3} & c_{3'3}c_{1'1} & c_{3'2}c_{1'3} & c_{3'3}c_{1'2} \\ c_{2'1}c_{3'1} & c_{2'2}c_{3'2} & c_{2'3}c_{3'3} & c_{2'1}c_{3'2} & c_{2'2}c_{3'1} & c_{2'1}c_{3'3} & c_{2'3}c_{3'1} & c_{2'2}c_{3'3} & c_{2'3}c_{3'2} \\ c_{3'1}c_{2'1} & c_{3'2}c_{2'2} & c_{3'3}c_{2'3} & c_{3'1}c_{2'2} & c_{3'2}c_{2'1} & c_{3'1}c_{2'3} & c_{3'3}c_{2'1} & c_{3'2}c_{2'3} & c_{3'3}c_{2'2} \end{bmatrix} \quad (\text{B-36})$$

$$[\mathbb{J}]_{ijk'l'} = [c_{k'i}c_{l'j}] = \mathbf{T}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (\text{B-37})$$

Transformationsbeziehungen von Tensoren 2. und 4. Stufe

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}\mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}^T\mathbf{a}' = \mathbf{T}^T\mathbf{a}' \quad (\text{B-38})$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T \quad \mathbf{A} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}'\mathbf{T} \quad (\text{B-39})$$

Box B.8 Transformationsmatrix und Tensortransformation in Matrixschreibweise

B.5 Kompaktierung der Matrixschreibweise bei symmetrischen Tensoren 2. Stufe

Bei symmetrischen Tensoren $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ - wie dem Verzerrungs- und Spannungstensor - reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten aufgrund der Bedingung $A_{ij} = A_{ji}$ von neun auf sechs. Für diese Tensoren ist eine weitere Kompaktierung der oben eingeführten Matrixschreibweise von einer neunzeiligen Spaltenmatrix \mathbf{a} auf eine sechszeilige Spaltenmatrix $\underline{\mathbf{a}}$ (gekennzeichnet durch einen Unterstrich) möglich.

B.5.1 Allgemeines Vorgehen

Die Komprimierung von neun auf sechs Koeffizienten bzw. die inverse Prozedur, d.h. die Rekonstruktion der neunzeiligen Spaltenmatrix aus der sechszeiligen Spaltenmatrix, erfolgt mithilfe der in (B-44) definierten Matrizen \mathbf{P} und $\tilde{\mathbf{P}}$, wobei zusätzlich der Zusammenhang (B-45) besteht. Diese Matrixnotation ergibt die kompakte Schreibweise von symmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Überflüssige Rechenoperationen werden durch diese Kompaktierung vermieden. Nachteil dieser Schreibweise ist, dass der zwischen symbolischer Tensornotation und neunzeiliger Matrixschreibweise direkt bestehende Zusammenhang bei der Produktbildung von Tensoren (siehe Anhang) durch die Kompaktierung gestört wird. Als Beispiel ist die doppelte Kontraktion zwischen zwei symmetrischen Tensoren angeführt:

$$[\mathbf{A}:\mathbf{B}] = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \underline{\mathbf{a}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{b}} \quad (\text{B-40})$$

Durch die Kompaktierung bleibt im Matrixprodukt die Umskalierungsmatrix \mathbf{P} erhalten. Diese Umskalierung stellt bei Unachtsamkeit eine ständige Fehlerquelle, sowohl bei theoretischen Herleitungen als auch bei konkreten Berechnungen, dar.

B.5.2 Kompaktierung der 1. und 2. Ableitung skalarer Funktionen nach \mathbf{A}

Die erste und die zweite Ableitung einer skalaren Funktion f mit dem symmetrischen Tensor zweiter Stufe \mathbf{A} als Argument ergibt einen Tensor zweiter Stufe $\mathbf{f}_{\mathbf{A}}$ und einen Tensor vierter Stufe $\mathbf{F}_{\mathbf{AA}}$. Die in den totalen Differentialen (B-41) vorkommenden Tensorprodukte werden mit den Gleichungen (B-24) und (B-25) in äquivalente Matrixprodukte (B-41) umgeschrieben. Die erste Ableitung von f nach \mathbf{A} ergibt eine neunzeilige Matrix $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$; die zweite Ableitung die (9,9)-Matrix $\mathbf{F}_{\mathbf{aa}}$. Das Differential $d\mathbf{A}$ ist - ebenso wie \mathbf{A} - ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Damit kann der neunzeilige Vektor $d\mathbf{a}$ nach der in (B-43) festgelegten Kompaktierungsvorschrift als sechszeilige Matrix $d\underline{\mathbf{a}}$ angeschrieben werden. Damit ergibt sich die Kompaktierung der Matrizen $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{F}_{\mathbf{aa}}$.

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A} \right] = [\mathbf{f}_A : d\mathbf{A}] = d\mathbf{a}^T \mathbf{f}_a = d\mathbf{a}^T \underbrace{\mathbf{P}\tilde{\mathbf{P}}}_{\mathbf{f}_a} \mathbf{f}_a \quad (\text{B-41})$$

$$d^2 f = \left[d\mathbf{A} : \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{A}^2} : d\mathbf{A} \right] = [d\mathbf{A} : \mathbb{F}_{AA} : d\mathbf{A}] = d\mathbf{a}^T \mathbf{F}_{aa} d\mathbf{a} = d\mathbf{a}^T \underbrace{\mathbf{P}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{F}_{aa}\tilde{\mathbf{P}}^T\mathbf{P}}_{\mathbf{F}_{aa}} d\mathbf{a}$$

Kompaktierung von symmetrischen Tensoren 2. Stufe

$$[\mathbf{A} = \mathbf{A}^T] = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{21} = A_{12} \\ A_{13} \\ A_{31} = A_{13} \\ A_{23} \\ A_{32} = A_{23} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{B-42})$$

$$\underline{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{P}}^T \underline{\mathbf{a}} \quad (\text{B-43})$$

Kompaktierungsmatrizen und Eigenschaften

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-44})$$

$$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-45})$$

Box B.9 Kompaktierung der Matrixschreibweise bei symmetrischen Tensoren zweiter Stufe

B.5.3 Voigt'sche Schreibweise

B.5.3.1 Spannungs- und Verzerrungstensor

Der Spannungs- und Verzerrungstensor bei kleinen Verzerrungen sind symmetrische Tensoren zweiter Stufe. In der sogenannten Voigt'schen Schreibweise werden die Koeffizienten dieser Tensoren als sechszeilige Spaltenmatrizen $\underline{\mathbf{s}}$ (B-46) bzw. $\underline{\mathbf{e}}$ (B-47) angeschrieben. Die Koeffizienten der Schubverzerrungen werden zusätzlich mit dem Faktor zwei multipliziert und entsprechen somit den Schubwinkeln $\gamma_{ij} = 2E_{ij}$. Die Kompaktierung der Spannungs- bzw. der Verzerrungsmatrix werden mithilfe der Matrizen aus Box B.9 durchgeführt, wobei \mathbf{P} zusätzlich zur Umskalierung der Schubverzerrungen dient. Damit unterscheidet sich die Kompaktierung der Verzerrungen von der in (B-42) allgemein angeführten Kompaktierungsregel. Das wird durch eine Wellenlinie unter dem Verzerrungsvektor anstatt des Unterstrichs angezeigt. Zu beachten ist, dass die Spannungen und Verzerrungen unterschiedlich auf sechszeilige Spaltenmatrizen komprimiert bzw. auf neunzeilige Spaltenmatrizen rückgeführt werden. Neben der Umnormierung des Verzerrungstensors ist die oben gezeigte notwendige Umskalierung von Tensoren (B-40) bei der Produktbildung zu beachten. Obwohl diese Matrixnotation die kompaktestmögliche und daher auf den ersten Blick die am besten geeignete Schreibweise bei der Behandlung von Rechenoperationen mit Spannungen und Verzerrungen scheint, stellen die eingeführten Umskalierungen eine ständige Fehlerquelle dar.

Voigt'sche Schreibweise: Spannungstensor

$$\underline{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{s} \qquad \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{s}} \qquad (\text{B-46})$$

Voigt'sche Schreibweise: Verzerrungstensor

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} = 2E_{12} \\ \gamma_{13} = 2E_{13} \\ \gamma_{23} = 2E_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}} \qquad \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{P}}^T \underline{\mathbf{e}} \qquad (\text{B-47})$$

Box B.10 Spannungs- und Verzerrungstensor in Voigt'scher Schreibweise

B.5.3.2 Materialsteifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix

Mit den angegebenen Vorschriften der Voigt'schen Schreibweise werden die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen kompaktiert. Dabei ist darauf zu achten, dass der äquivalente Aufbau von \mathbf{C} und \mathbf{D} , der im Fall der (9,9)-Matrizen existiert, im Fall der Voigt'schen Schreibweise verloren geht (Box B.11).

Voigt'sche Schreibweise: Steifigkeitsmatrix

$\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{e}}$

$$\underline{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \quad (\text{B-48})$$

sym.

Voigt'sche Schreibweise: Nachgiebigkeitsmatrix

$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{s}}$

$$\underline{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 2D_{1112} & 2D_{1113} & 2D_{1123} \\ & D_{2222} & D_{2233} & 2D_{2212} & 2D_{2213} & 2D_{2223} \\ & & D_{3333} & 2D_{3312} & 2D_{3313} & 2D_{3323} \\ & & & 4D_{1212} & 4D_{1213} & 4D_{1223} \\ & & & & 4D_{1313} & 4D_{1323} \\ & & & & & 4D_{2323} \end{bmatrix} \quad (\text{B-49})$$

sym.

Box B.11 Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix in Voigt'scher Schreibweise

B.5.3.3 1. und 2. Ableitung von skalaren Funktionen

Vorsicht ist auch bei der Kompaktierung von ersten und zweiten Ableitungen nach den Spannungen bzw. Verzerrungen geboten. Es wird wiederum folgendes Vorgehen empfohlen: Zunächst werden die Ableitungen symbolisch unter Verwendung der im Anhang A angegebenen Rechenregeln angeschrieben. Dann werden die entsprechenden neunzeiligen Matrizen aufgestellt. Als letzter Schritt folgt die Kompaktierung auf sechszeilige Matrizen. Die Ableitungen skalarer Funktionen nach den Spannungen (B-50), wie z.B. die erste und zweite Ableitung von Versagensbedingungen, werden wie in (B-41) kompaktiert.

Vorsicht: Aufgrund der speziellen Kompaktierungsvorschrift in der Voigt'schen Schreibweise für die Verzerrungen (B-47) ergeben sich auch bei der Kompaktierung der Ableitung

skalärer Funktion nach dem Verzerrungstensor - z.B. erste und zweite Ableitung der Verzerrungsenergiedichtefunktion - zu (B-41) abweichende Regeln. Die Ableitungen nach den Schubverzerrungen (B-51) erfolgt dabei nach γ_{ij} und nicht nach E_{ij} .

Voigt'sche Schreibweise: 1. und 2. Ableitung von f nach $\underline{\mathbf{s}}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{S}}} \right] &= \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{s}}} & \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{s}}} &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{s}}} \\ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\mathbf{S}}^2} \right] &= \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ss}}} & \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ss}}} &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ss}}} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{B-50})$$

Voigt'sche Schreibweise: 1. und 2. Ableitung von f nach $\underline{\mathbf{e}}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{E}}} \right] &= \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{e}}} \\ \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{e}}} &= \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{e}}} = \left[\frac{\partial f}{\partial E_{11}} \quad \frac{\partial f}{\partial E_{22}} \quad \frac{\partial f}{\partial E_{33}} \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma_{12}} \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma_{13}} \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma_{23}} \right]^T \\ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\mathbf{E}}^2} \right] &= \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ee}}} \\ \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ee}}} &= \tilde{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{ee}}} \tilde{\mathbf{P}}^T = \frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\mathbf{e}} \partial \underline{\mathbf{e}}} \end{aligned} \quad (\text{B-51})$$

Box B.12 Voigt'scher Schreibweise der 1. und 2. Ableitung einer skalaren Funktion f nach der Spannungsmatrix $\underline{\mathbf{s}}$ bzw. der Verzerrungsmatrix $\underline{\mathbf{e}}$

B.5.3.4 Koordinatentransformationen in Voigt'scher Schreibweise

Durch die Voigt'sche Schreibweise geht die Eigenschaft der (9,9)-Transformationsmatrix, dass die inverse Transformationsmatrix der transponierten Transformationsmatrix (B-37) entspricht, verloren. Außerdem werden die Spannungen und Verzerrungen unterschiedlich transformiert (B-53) und somit auch die Materialsteifigkeits- und die Materialnachgiebigkeitsmatrix (B-54).

Transformationsmatrizen in Voigt'scher Schreibweise

$$\mathbf{T}_{\underline{s}} = \left(\mathbf{T}_{\underline{e}}^{-1} \right)^T = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}_{1 \rightarrow 2} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1'1}^2 & c_{1'2}^2 & c_{1'3}^2 & 2c_{1'1}c_{1'2} & 2c_{1'1}c_{1'3} & 2c_{1'2}c_{1'3} \\ c_{2'1}^2 & c_{2'2}^2 & c_{2'3}^2 & 2c_{2'1}c_{2'2} & 2c_{2'1}c_{2'3} & 2c_{2'2}c_{2'3} \\ c_{3'1}^2 & c_{3'2}^2 & c_{3'3}^2 & 2c_{3'1}c_{3'2} & 2c_{3'1}c_{3'3} & 2c_{3'2}c_{3'3} \\ c_{1'1}c_{2'1} & c_{1'2}c_{2'2} & c_{1'3}c_{2'3} & c_{1'1}c_{2'2} + c_{1'2}c_{2'1} & c_{1'1}c_{2'3} + c_{1'3}c_{2'1} & c_{1'2}c_{2'3} + c_{1'3}c_{2'2} \\ c_{1'1}c_{3'1} & c_{1'2}c_{3'2} & c_{1'3}c_{3'3} & c_{1'1}c_{3'2} + c_{1'2}c_{3'1} & c_{1'1}c_{3'3} + c_{1'3}c_{3'1} & c_{1'2}c_{3'3} + c_{1'3}c_{3'2} \\ c_{2'1}c_{3'1} & c_{2'2}c_{3'2} & c_{2'3}c_{3'3} & c_{2'1}c_{3'2} + c_{2'2}c_{3'1} & c_{2'1}c_{3'3} + c_{2'3}c_{3'1} & c_{2'2}c_{3'3} + c_{2'3}c_{3'2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} = \left(\mathbf{T}_{\underline{e}} \right)^T = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}_{2 \rightarrow 1} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}_{1 \rightarrow 2}^T \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1'1}^2 & c_{2'1}^2 & c_{3'1}^2 & 2c_{1'1}c_{2'1} & 2c_{1'1}c_{3'1} & 2c_{2'1}c_{3'1} \\ c_{1'2}^2 & c_{2'2}^2 & c_{3'2}^2 & 2c_{1'2}c_{2'2} & 2c_{1'2}c_{3'2} & 2c_{2'2}c_{3'2} \\ c_{1'3}^2 & c_{2'3}^2 & c_{3'3}^2 & 2c_{1'3}c_{2'3} & 2c_{1'3}c_{3'3} & 2c_{2'3}c_{3'3} \\ c_{1'1}c_{1'2} & c_{2'1}c_{2'2} & c_{3'1}c_{3'2} & c_{1'1}c_{2'2} + c_{1'2}c_{2'1} & c_{1'1}c_{3'2} + c_{3'1}c_{1'2} & c_{2'1}c_{3'2} + c_{3'1}c_{2'2} \\ c_{1'1}c_{1'3} & c_{2'1}c_{2'3} & c_{3'1}c_{3'3} & c_{1'1}c_{2'3} + c_{2'1}c_{1'3} & c_{1'1}c_{3'3} + c_{3'1}c_{1'3} & c_{2'1}c_{3'3} + c_{3'1}c_{2'3} \\ c_{1'2}c_{1'3} & c_{2'2}c_{2'3} & c_{3'2}c_{3'3} & c_{1'2}c_{2'3} + c_{2'2}c_{1'3} & c_{1'2}c_{3'3} + c_{3'2}c_{1'3} & c_{2'2}c_{3'3} + c_{2'3}c_{3'2} \end{bmatrix}$$

(B-52)

Transformation der Spannungen/Verzerrungen

$$\underline{\mathbf{s}}' = \mathbf{T}_{\underline{s}} \underline{\mathbf{s}} \qquad \underline{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \underline{\mathbf{s}}'$$

$$\underline{\mathbf{e}}' = \mathbf{T}_{\underline{e}} \underline{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \right)^T \underline{\mathbf{e}} \qquad \underline{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{T}_{\underline{e}} \right)^{-1} \underline{\mathbf{e}}' = \left(\mathbf{T}_{\underline{s}} \right)^T \underline{\mathbf{e}}'$$

(B-53)

Transformation der Steifigkeits-/Nachgiebigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{C}}' = \mathbf{T}_{\underline{s}} \underline{\mathbf{C}} \left(\mathbf{T}_{\underline{s}} \right)^T \qquad \underline{\mathbf{C}} = \mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \underline{\mathbf{C}}' \left(\mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \right)^T$$

$$\underline{\mathbf{D}}' = \left(\mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \right)^T \underline{\mathbf{D}} \mathbf{T}_{\underline{s}}^{-1} \qquad \underline{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{T}_{\underline{s}} \right)^T \underline{\mathbf{D}}' \mathbf{T}_{\underline{s}}$$

(B-54)

Box B.13 Transformation der Spannungen/Verzerrungen und der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix in Voigt'scher Schreibweise

C

**Invarianten,
isotrope und
anisotrope Tensor-
funktionen**

C.1 Einleitung und Kapitelübersicht

In diesem Anhangskapitel sind Tensorfunktionen und Invarianten von symmetrischen Tensoren \mathbf{A} zweiter Stufe dargestellt. Mit den angegebenen Größen hat man das mathematische Repertoire griffbereit, das zur Beschreibung isotroper, transversal isotroper und orthotroper Funktion, wie z.B. die Mises-Typ-Versagensbedingungen oder die Verzerungsenergiedichtefunktion, benötigt wird. Die Notation, die angegebenen Tensorprodukte und die benötigten Ableitungsregeln finden sich in Anhang A. Arbeiten zu diesem Thema wurden von R.S. Rivlin und seinen Mitarbeitern, siehe Barenblatt/Joseph, eds. (1997), durchgeführt. Eine kurze Zusammenfassung findet sich in Truesdell/Noll (1965). Einen schön strukturierten Einblick zu Tensorfunktionen und ihre Anwendung in der Festkörpermechanik geben auch die Beiträge von Boehler in Boehler, ed. (1987).

In Kap. C.2 ist der Begriff der isotropen skalarwertigen Tensorfunktion in \mathbf{A} definiert. Ein Sonderfall hiervon sind die sogenannten Invarianten (Kap. C.3). Wird die Isotropiebedingung verletzt, spricht man von Anisotropie. In Kap. C.4 sind spezielle anisotrope Tensorfunktionen zusammengefasst. Ein häufig in der Festkörpermechanik verwendeter Sonderfall einer Tensorfunktion in \mathbf{A} sind quadratische Polynomfunktionen (Kap. C.5).

C.2 Isotrope Tensorfunktionen

C.2.1 Tensorfunktionen

Alle Funktionen, deren Argumente Tensoren beliebiger Stufe sind, werden als Tensorfunktionen bezeichnet. In der nachfolgenden Darstellung werden nur reelle symmetrische Tensoren \mathbf{A}_i zweiter Stufe als Funktionsargumente betrachtet:

$$\begin{aligned} f &= f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) & \mathbf{A}_i &= \mathbf{A}_i^T \\ \mathbb{F} &= \mathbb{F}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

C.2.2 Orthogonale Tensoren

Alle orthogonalen Tensoren \mathbf{Q} sind in der Gruppe $O(3)$ zusammengefasst:

$$\mathbf{Q} \in O(3) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{J}, \quad \det(\mathbf{Q}) = \pm 1 \quad (\text{C-2})$$

Geometrisch entsprechen Tensoren \mathbf{Q} mit $\det(\mathbf{Q}) = 1$ einer Drehung; mit negativer Determinante Ebenen- und Drehspiegelungen. Damit beinhaltet die Gruppe $O(3)$ alle Rotationstensoren \mathbf{R} , den Einheitstensor \mathbf{J} und den negativen Einheitstensor $-\mathbf{J}$, sowie alle Produkte zwischen diesen Größen:

$$O(3) = \{\pm \mathbf{J}, \mathbf{R}\} \quad (\text{C-3})$$

C.2.3 Isotropie

Tensorfunktion sind isotrop, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) &= f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}^T) \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{F}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}^T) & \forall \mathbf{Q} \in O(3) \\ (\mathbf{Q} \odot \mathbf{Q}) : \mathbb{F}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) : (\mathbf{Q}^T \odot \mathbf{Q}^T) &= \mathbb{F}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}^T) \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

für alle Tensoren \mathbf{Q} aus $O(3)$ erfüllt sind. Sobald ein Tensor ungerader Stufe (z.B. ein Vektor oder ein Tensor dritter Stufe) als Argument für die Tensorfunktionen herangezogen wird, bleibt die Isotropie nur erhalten, sofern $\mathbf{Q} \in SO(3)$ ist.

C.3 Isotrope Invarianten eines symmetrischen Tensors

C.3.1 Allgemein

Invarianten sind isotrope skalarwertige Tensorfunktionen in \mathbf{A} . Hier wird der Begriff (isotrope) Invariante für spezielle lineare, quadratische und kubische Polynome in den Koeffizienten des Tensors \mathbf{A} , für die

$$I(\mathbf{A}) = I(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in O(3) \quad (\text{C-5})$$

gilt, verwendet. Die erste (lineare) Invariante ist durch die Spur des Tensors eindeutig definiert, während unterschiedliche quadratische und kubische invariante Polynomfunktionen des Tensors existieren. Damit erfüllt der Spuroperator (Box A.4) unter Verwendung von (A-16) die in (C-4) formulierte Anforderung:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T) \quad (\text{C-6})$$

Aufbauend auf diese invariante Basisfunktion lassen sich alle weiteren invarianten Größen formulieren:

- Die sogenannten *Momenteninvarianten* heben sich durch ihr besonders einfaches Bildungsgesetz hervor. Dieses erleichtert die Ableitung nach dem Tensor \mathbf{A} .
- Die *prinzipiellen Invarianten* sind die Koeffizienten der kubischen charakteristischen Gleichung des Eigenwertproblems.
- Bei den *prinzipiellen Invarianten eines deviatorischen Tensors* ist die Spur, also die erste Invariante des Tensors, per definitionem null.

Alle Invarianten können ineinander umgerechnet werden. Zusätzlich zur Invariantendefinition sind die erste und die zweite Ableitung der Invarianten nach \mathbf{A} angegeben. Aufgrund der Symmetrie von \mathbf{A} gilt:

$$d(\) = \frac{\partial(\)}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A} = \frac{\partial(\)}{\partial \mathbf{A}} : \mathbb{P}_{sym} : d\mathbf{A} \quad (\text{C-7})$$

C.3.2 Momenteninvarianten

Die Momenteninvarianten heben sich durch ihr einfaches Bildungsgesetz hervor. Aus diesem lassen sich die Ableitungen (Box A.6) bestimmen.

Die Momenteninvarianten werden mit einem Überstrich versehen, um sie von den prinzipiellen Invarianten zu unterscheiden. Der Tensor \mathbb{A} in (C-10) ist durch Gleichung (C-12) definiert. Die erste Momenteninvariante und deren Ableitungen entsprechen der ersten prinzipiellen Invariante und deren Ableitungen nach \mathbf{A} .

Momenteninvarianten und Ableitungen - Allgemein

$$\overline{I}_n(\mathbf{A}) = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{A}^n) \quad (\text{C-8})$$

$$\frac{\partial \overline{I}_n}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^{n-1} \quad \frac{\partial^2 \overline{I}_n}{\partial \mathbf{A}^2} = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{A}^i \odot \mathbf{A}^{n-i-2} \quad (\text{C-9})$$

Momenteninvarianten

$$\overline{I}_1(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = I_1(\mathbf{A})$$

$$\overline{I}_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} : \mathbf{A} \quad (\text{C-10})$$

$$\overline{I}_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{3} \mathbf{A} : (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{6} \mathbf{A} : \mathbb{A} : \mathbf{A}$$

Erste Ableitung der Momenteninvarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{I}_2}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{A} \\ \frac{\partial \overline{I}_3}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{C-11})$$

Zweite Ableitung der Momenteninvarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{I}_2}{\partial \mathbf{A}^2} &= \mathbb{P}_{sym} \\ \frac{\partial^2 \overline{I}_3}{\partial \mathbf{A}^2} &= (\mathbf{J} \odot \mathbf{A} + \mathbf{A} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} = \mathbb{A} : \mathbb{P}_{sym} \end{aligned} \quad (\text{C-12})$$

Box C.1 Momenteninvarianten des Tensors \mathbf{A} und zugehörige erste und zweite Ableitung

C.3.3 Prinzipiellen Invarianten

Die prinzipiellen Invarianten (C-14) - oft auch als „die“ Invarianten bezeichnet - sind die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung (C-13) des Eigenwertproblems. Alle drei Invarianten lassen sich als Kombination von Spurprodukten des Tensors \mathbf{A} darstellen, womit die Ableitungen nach \mathbf{A} einfach durchzuführen sind.

Charakteristische Gleichung und prinzipielle Invarianten

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J}) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{C-13})$$

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \right] \quad (\text{C-14})$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \left[\text{tr}(\mathbf{A})^3 - 3 \text{tr}(\mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + 2 \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \right]$$

Erste Ableitung der prinzipiellen Invarianten

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{J}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1 \mathbf{J} - \mathbf{A} \quad (\text{C-15})$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = I_2 \mathbf{J} - I_1 \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

Zweite Ableitung der prinzipiellen Invarianten

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial \mathbf{A}^2} = \mathbb{0}$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial \mathbf{A}^2} = \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} - \mathbb{P}_{sym} \quad (\text{C-16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \mathbf{A}^2} &= I_1 (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J} - \mathbb{P}_{sym}) - (\mathbf{J} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{J}) + \mathbb{A} : \mathbb{P}_{sym} \\ &= I_3 (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A}^{-1}) : \mathbb{P}_{sym}) \end{aligned}$$

Box C.2 Prinzipielle Invarianten des Tensors \mathbf{A} und zugehörige erste und zweite Ableitung

C.3.4 Prinzipielle Invarianten eines deviatorischen Tensors

Die Spur eines deviatorischen Tensors \mathbf{A}_{dev} (Box A.5) ist per definitionem null. Deshalb decken sich die prinzipiellen Invarianten eines solchen Tensors - bis auf ein Vorzeichen bei I_2 - mit den Momenteninvarianten desselben Tensors. Die Invarianten des deviatorischen Tensors \mathbf{A}_{dev} werden mit J_2 und J_3 bezeichnet. Die zweite und die dritte Invariante des deviatorischen Tensors \mathbf{A}_{dev} sind Funktionen (C-18) ebendieses Tensors. Gesucht sind aber die Ableitungen (C-19) und (C-20) nach dem Tensor \mathbf{A} . Mithilfe der Kettenregel wird zunächst nach dem deviatorischen Tensor abgeleitet und mit der Ableitung von \mathbf{A}_{dev} nach \mathbf{A} multipliziert.

$$\frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{A}} : \mathbb{P}_{sym} = \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{A}_{dev}} : \frac{\partial \mathbf{A}_{dev}}{\partial \mathbf{A}} : \mathbb{P}_{sym} = \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{A}_{dev}} : \mathbb{P}_{dev} : \mathbb{P}_{sym} \quad (\text{C-17})$$

Prinzipielle Invarianten von $\mathbf{A}_{dev} = \mathbb{P}_{dev} : \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}_{dev}) &= \bar{I}_1(\mathbf{A}_{dev}) = tr(\mathbf{A}_{dev}) = 0 \\ I_2(\mathbf{A}_{dev}) &= -\bar{I}_2(\mathbf{A}_{dev}) = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_{dev} : \mathbf{A}_{dev} = -J_2 \\ I_3(\mathbf{A}_{dev}) &= \bar{I}_3(\mathbf{A}_{dev}) = \frac{1}{6} \mathbf{A}_{dev} : \mathbb{A}_{dev} : \mathbf{A}_{dev} = J_3 \end{aligned} \quad (\text{C-18})$$

Erste Ableitung der Invarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{dev} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{A}_{dev}^2 - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{J} = \frac{1}{2} \mathbb{A}_{dev} : \mathbf{A}_{dev} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (\text{C-19})$$

Zweite Ableitung der Invarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{A}^2} &= \mathbb{P}_{dev} : \mathbb{P}_{sym} \\ \frac{\partial^2 J_3}{\partial \mathbf{A}^2} &= \mathbb{A}_{dev} : \mathbb{P}_{sym} - \frac{2}{3} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{A}_{dev} + \mathbf{A}_{dev} \otimes \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

Box C.3 Prinzipielle Invarianten des deviatorischen Anteils des Tensors \mathbf{A} und zugehörige erste und zweite Ableitung

C.3.5 Herleitung der Zusammenhänge zwischen den Invarianten

Als Fundamentalgleichung für die Beweisführung aller algebraischen Zusammenhänge und Querverbindungen zwischen den zuvor angeführten Invarianten dient das Cayley-Hamilton-Theorem:

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (\text{C-21})$$

C.3.5.1 Zusammenhang I: prinzipielle Invarianten von \mathbf{A} und \mathbf{A}^{-1}

Um den Zusammenhang zwischen den prinzipiellen Invarianten und den Momenteninvarianten zu zeigen, wird zunächst über die Cayley-Hamilton-Gleichung der Zusammenhang zwischen den prinzipiellen Invarianten von \mathbf{A}^{-1} und \mathbf{A} hergestellt. Die Eigenwerte des inversen Tensors sind dabei die Kehrwerte der Eigenwerte von \mathbf{A} . Durch Koeffizientenvergleich der charakteristischen Gleichung für \mathbf{A}^{-1} mit der charakteristischen Gleichung von \mathbf{A} gilt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{A}^{-1}) &= \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})} \\ I_2(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{I_1(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \\ I_1(\mathbf{A}^{-1}) &= \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \end{aligned} \quad (\text{C-22})$$

C.3.5.2 Zusammenhang II: prinzipielle Invarianten und Momenteninvarianten

Abermalige Verwendung von (C-21) multipliziert mit \mathbf{A}^{-1} und durch Spurbildung dieser Gleichungen, ergibt den Zusammenhang zwischen den Momenteninvarianten und den prinzipiellen Invarianten:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1 & I_1 &= \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 & I_2 &= \frac{1}{2} \bar{I}_1^2 - \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 &= \frac{1}{3} I_1^3 - I_1 I_2 + I_3 & I_3 &= \frac{1}{6} \bar{I}_1^3 - \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \end{aligned} \quad (\text{C-23})$$

C.4 Anisotrope Tensorfunktionen

C.4.1 Anisotropie

Die Funktion f ist anisotrop, sobald nicht mehr alle Tensoren \mathbf{Q} der orthogonalen Gruppe $O(3)$, sondern nur eine Untergruppe S , Gleichung

$$f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in S \quad (\text{C-24})$$

erfüllen. Die Gruppe S wird als Symmetriegruppe bezeichnet. Durch diese ist die spezielle Art der Anisotropie definiert.

In Box C.4 sind die Tensoren der Symmetriegruppen für Isotropie, transversale Isotropie und Orthotropie dargestellt. Der Tensor \mathbf{R}_n^φ bezeichnet dabei eine um den Winkel $\varphi \in (0, 2\pi)$ rechtsdrehende Rotation um eine Raumachse mit dem Richtungseinheitsvektor \mathbf{n} .

Isotropie:	$\mathbf{Q} \in S_{iso}$	$S_{iso} = O(3) = \{\pm \mathbf{J}, \mathbf{R}\}$	(C-25)
Transversale Isotropie:	$\mathbf{Q} \in S_{tra}$	$S_{tra} = \{\pm \mathbf{J}, \mathbf{R}_{e_1}^\varphi, (0 < \varphi < 2\pi)\}$	(C-26)
Orthotropie:	$\mathbf{Q} \in S_{ort}$	$S_{ort} = \{\pm \mathbf{J}, \mathbf{R}_{e_1}^\pi, \mathbf{R}_{e_2}^\pi, \mathbf{R}_{e_3}^\pi\}$	(C-27)

Box C.4 Symmetriegruppen

C.4.1.1 Transversale Isotropie

Im Fall der transversalen Isotropie bezüglich einer Achse mit dem Richtungseinheitsvektor \mathbf{e}_1 , erfüllen alle Rotationen $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{e_1}^\varphi$ um diese Achse die Bedingung (C-24). Zusammen mit dem positiven und den negativen Einheitstensor bilden diese Tensoren die Gruppe S_{tra} . Wird durch die Funktion f eine Materialeigenschaft beschrieben, kennzeichnet der Vektor \mathbf{e}_1 die materielle Achse der transversalen Isotropie.

C.4.1.2 Orthotropie

Bei der Orthotropie beinhaltet die Symmetriegruppe die Spiegelungen $-\mathbf{R}^\pi$ um drei zueinander orthogonal stehende Ebenen, gekennzeichnet durch die orthonormierten Normalenvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , und \mathbf{e}_3 . Außerdem gilt $\mathbf{R}_{e_i}^\varphi \cdot \mathbf{R}_{e_j}^\varphi = \mathbf{R}_{e_k}^\varphi$ bei zyklischer Vertauschung der Indizes. In orthotropen Materialien gibt es somit zwei normal zueinanderstehende Materialhauptrichtungen \mathbf{e}_1 , und \mathbf{e}_2 . Der dritte Vektor \mathbf{e}_3 , ergibt sich aus der Orthonormalitätsforderung.

C.4.2 Transversal isotrope und orthotrope Invarianten

Der Invariantenbegriff wird dahingehend erweitert, dass auch lineare und quadratische Polynomfunktionen, die nur Invarianzeigenschaften bezüglich einer Subgruppe S von $O(3)$ aufweisen, als *Invarianten relativ zu S* bezeichnet werden. Da hier nur die Gruppen aus Box C.4 betrachtet werden, werden die Invarianten transversal isotrope bzw. orthotrope Invarianten genannt. Diese werden ebenso mit I_i geschrieben, wobei der Index i ab 4 aufwärts gezählt wird.

Für die transversal isotrope Gruppe (C-26) ergibt sich eine lineare und eine quadratische Invariante (mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_1 , der Achse bezüglich der Isotropie gilt) zu (C-28). Aus dem Vektor \mathbf{e}_1 wird der Projektions- bzw. Strukturtenor $\mathbf{P}_{1'1'}$ gebildet, der zur Beschreibung der transversal isotropen Invarianten verwendet wird.

Um die Richtung der Orthotropie zu kennzeichnen, sind zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 notwendig. Für die orthotrope Gruppe (C-27) ergeben sich die Invarianten (C-29).

Transversale Isotropie - Invarianten

$$\begin{aligned} I_4 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) : \mathbf{A} = \mathbf{P}_{1'1'} : \mathbf{A} \\ I_5 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{A} : \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{1'1'} \odot \mathbf{J} + \mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'}) : \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{C-28})$$

Orthotropie - Invarianten

$$\begin{aligned} I_4 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) : \mathbf{A} = \mathbf{P}_{1'1'} : \mathbf{A} \\ I_5 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{A} : \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{1'1'} \odot \mathbf{J} + \mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'}) : \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{A} \\ I_6 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) : \mathbf{A} = \mathbf{P}_{2'2'} : \mathbf{A} \\ I_7 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{A} : \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{2'2'} \odot \mathbf{J} + \mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{2'2'}) : \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{C-29})$$

1. Ableitung der Invarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{4(6)}}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{P}_{1'1'(2'2')} \\ \frac{\partial I_{5(7)}}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{P}_{1'1'(2'2')} \odot \mathbf{J} + \mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'(2'2')}) : \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{C-30})$$

Box C.5 Transversal isotrope und orthotrope Invarianten

C.5 Spezialfall: quadratische Polynomfunktion in \mathbf{A}

In der Festkörpermechanik werden häufig quadratische skalarwertige Polynomtensorfunktionen (Verzierungsenergiegedichte, Mises-Typ-Versagensbedingungen) verwendet.

C.5.1 Darstellung durch Invarianten

Ausgehend von den vorangegangenen Darstellungen werden die quadratischen Polynomfunktionen für den isotropen f_{iso} , den transversal isotropen f_{tra} und den orthotropen f_{ort} Fall durch die Invarianten ausgedrückt. Die konstanten Koeffizienten der linearen (quadratischen) Terme in \mathbf{A} sind mit c_i (c_{ij}) bezeichnet. Die isotrope Funktion hat drei, die transversal isotrope sieben und die orthotrope zwölf konstante Koeffizienten:

$$\begin{aligned} f_{iso}(\mathbf{A}) &= c_0 I_1 + c_{01} I_1^2 + c_{02} \overline{I_2} \\ f_{tra}(\mathbf{A}) &= f_{iso}(\mathbf{A}) + c_1 I_4 + c_{11} I_4^2 + c_{12} I_5 + c_{13} I_1 I_4 \\ f_{ort}(\mathbf{A}) &= f_{tra}(\mathbf{A}) + c_2 I_6 + c_{21} I_6^2 + c_{22} I_7 + c_{23} I_1 I_6 + c_{24} I_4 I_6 \end{aligned} \quad (\text{C-31})$$

C.5.2 Darstellung als Tensorpolynom

Durch Umformung ist der skalare Ausdruck in den Invarianten in Form eines Tensorpolynoms anschreibbar:

Tensorpolynom in \mathbf{A}

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{K}:\mathbf{A} + \mathbf{A}:\mathbf{K}:\mathbf{A} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{K} + 2\mathbf{K}:\mathbf{A} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{A} \partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{K} \quad (\text{C-32})$$

Koeffiziententensor \mathbf{K} und \mathbf{K}

$$\mathbf{K}_{iso} = c_0 \mathbf{J} \quad \mathbf{K}_{tra} = \mathbf{K}_{iso} + c_1 \mathbf{P}_{1'1'} \quad \mathbf{K}_{ort} = \mathbf{K}_{tra} + c_2 \mathbf{P}_{2'2'} \quad (\text{C-33})$$

$$\mathbf{K}_{iso} = c_{01} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} + \frac{c_{02}}{2} \mathbb{P}_{sym}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tra} &= \mathbf{K}_{iso} + c_{11} \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{P}_{1'1'} + \frac{c_{12}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \\ &\quad + \frac{c_{13}}{2} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (\text{C-34})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ort} &= \mathbf{K}_{tra} + c_{21} \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \frac{c_{22}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \\ &\quad + \frac{c_{23}}{2} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{J}) + \frac{c_{24}}{2} (\mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{1'1'}) \end{aligned}$$

Box C.6 Isotropes, transversal isotropes und orthotropes quadratisches Tensorpolynom in \mathbf{A}

D

**Linear-elastisches
Materialverhalten**

D.1 Allgemeines

Im Fall perfekt-elastischen oder hyperelastischen Materialverhaltens ist die zur Verzerrung benötigte Arbeit zur Gänze - unabhängig von der vorgegebenen Belastungsgeschichte - wiedergewinnbar. Man hat also perfekte mechanische Energieerhaltung. Die aufgebrauchte Arbeit wird in Form von Verzerrungsenergie im Materialgefüge des Körpers gespeichert.

D.1.1 Lineare Elastizität

Bei Versuchen an Festkörpern lässt sich bei genügend kleinen Verzerrungen ein linearer Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang beobachten:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (\text{D-1})$$

Der Materialsteifigkeitstensor \mathbb{C} ist konstant. Der lineare Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang ergibt sich aus einer Verzerrungsenergiedichte, die quadratisch in den Koeffizienten der Verzerrungen ist:

$$\Psi_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (\text{D-2})$$

Durch Angabe aller Koeffizienten von \mathbb{C} ist das linear-elastische Materialgesetz komplett beschrieben. Um stabiles Materialverhalten zu gewährleisten, muss die quadratische Verzerrungsenergiedichte strikt konvex sein:

$$\mathbf{E} : \frac{\partial^2 \Psi_{el}}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} = \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} > 0 \quad \forall \mathbf{E} = \mathbf{E}^T, \mathbf{E} \neq \mathbf{0} \quad (\text{D-3})$$

Aus diesem Grund müssen die Koeffizienten von \mathbb{C} gewisse Relationen untereinander erfüllen, um die positive Definitheit von \mathbb{C} und damit die strikte Konvexität von Ψ_{el} sicherzustellen.

Aufgrund der Symmetrie der Verzerrungen $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T = \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{E}$ und der Spannungen $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \mathbb{P}_{sym} : \mathbf{S}$ hat der Materialsteifigkeitstensor die Symmetrieeigenschaften:

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}_{sym} : \mathbb{C} : \mathbb{P}_{sym} \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (\text{D-4})$$

Damit reduzieren sich die im Allgemeinen 81 Koeffizienten eines Tensors 4. Stufe im Fall von \mathbb{C} auf 36 unabhängige Koeffizienten. Aufgrund der Wegunabhängigkeit und der zugehörigen Existenz einer Verzerrungsenergiedichte kann die Ableitungsreihenfolge vertauscht werden. Damit ergibt sich die weitere Symmetrie:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (\text{D-5})$$

Die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten C_{ijkl} reduziert sich damit auf 21. Zu beachten ist, dass i.A. diese Koeffizienten Funktionen in \mathbf{E} sind und nur im Sonderfall eines linear-elastischen Materials konstante Größen sind.

D.1.2 Isotrope, transversal isotrope und orthotrope quadratische Verzerrungsenergiedichtefunktion

Quadratische Verzerrungsenergiedichtefunktionen lassen sich für Isotropie, transversal isotrope und orthotrope Symmetrie aus den drei isotropen Invarianten aus Anhang C und den transversal isotropen und orthotropen Invarianten aus Box C.5 aufbauen. Die Invarianten I_1 , I_4 und I_6 sind lineare, die Invarianten I_2 , I_5 und I_7 quadratische Funktionen in den Verzerrungskomponenten. Die isotrope Funktion I_3 ist kubisch in \mathbf{E} und hat für den Aufbau einer quadratischen Verzerrungsenergiedichtefunktion eine zu hohe Polynomordnung.

Die linearen Terme sind null und somit lassen sich aus den Invarianten zwei (isotrop), fünf (transversal isotrop) und neun (orthotrope) quadratische Glieder in \mathbf{E} aufbauen. Die konstanten Faktoren c_i vor den einzelnen quadratischen Gliedern sind die zur Materialbeschreibung notwendigen Materialparameter:

$$\begin{aligned} \Psi_{el,iso} &= c_1 I_1^2 + c_2 I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_{iso} : \mathbf{E} \\ \Psi_{el,tra} &= \Psi_{el,iso} + c_3 I_4^2 + c_4 I_5 + c_5 I_1 I_4 = \Psi_{el,iso} + \frac{1}{2} \mathbf{E} : \Delta \mathbb{C}_{tra} : \mathbf{E} \\ \Psi_{el,ort} &= \Psi_{el,tra} + c_6 I_6^2 + c_7 I_7 + c_8 I_1 I_6 + c_9 I_4 I_6 = \Psi_{el,tra} + \frac{1}{2} \mathbf{E} : \Delta \mathbb{C}_{ort} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{iso} &= 2c_1 \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} + c_2 \mathbb{P}_{sym} \\ \Delta \mathbb{C}_{tra} &= 2c_3 \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{M}_1 + c_4 (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \\ &\quad + c_5 (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{J}) \\ \Delta \mathbb{C}_{ort} &= 2c_6 \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + c_7 (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \\ &\quad + c_8 (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{J}) + c_9 (\mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{1'1'}) \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

Die Steifigkeitstensoren für transversal isotropes und orthotropes Material mit den fünf bzw. neun Konstanten ergeben sich aus den Tensoren in (D-7) zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{tra} &= \mathbb{C}_{iso} + \Delta \mathbb{C}_{tra} \\ \mathbb{C}_{ort} &= \mathbb{C}_{tra} + \Delta \mathbb{C}_{ort} = \mathbb{C}_{iso} + \Delta \mathbb{C}_{tra} + \Delta \mathbb{C}_{ort} \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

Die Bedingungen zwischen den Konstanten c_i , damit \mathbb{C} positiv definit ist, werden im nächsten Abschnitt angeführt.

D.1.3 Voigt'sche Matrixdarstellung der Steifigkeitstensoren

Bei Wahl eines speziellen Koordinatensystems - hier wird das Materialhauptachsensystem mit der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ gewählt - lassen sich die Koeffizienten C_{ijkl} des Steifigkeitstensors $\mathbb{C} = C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ kompaktiert in einer (6,6)-Matrix darstellen:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & \mathbf{sym.} & C_{1213} & C_{1223} \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \quad (\text{D-9})$$

Aus schreibökonomischen Gründen werden bei der vierfach indizierten Größe C_{ijkl} kein Hochkomma geschrieben. Die Rechenregeln und systematisierten Kompaktierungsvorschriften von Tensoren 4. Stufe in der Voigt'schen Schreibweise sind in Anhang B dargestellt. Die Verzerrungsenergiedichte ist:

$$\Psi_{el} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}')^T \mathbf{C}' \mathbf{e}' \quad (\text{D-10})$$

D.2.2 Zusammenhang zwischen Materialkonstanten c_i und den Koeffizienten C_{ijkl}

Der Tensor \mathbb{C}_{ort} (D-8) hat neun Materialkonstanten c_i . Zwischen diesen neun Materialkonstanten c_i und den Koeffizienten C_{ijkl} aus (D-11) besteht der lineare Zusammenhang (D-13).

D.2.3 Ingenieurkonstanten

Die Ingenieurkonstanten sind die sechs Querdehnzahlen ν_{ij} , die drei E -Moduli E_i und die drei Schubmoduli G_{ij} . Die Elastizitätsmoduli werden, um eine Verwechslung mit den Verzerrungen auszuschließen, nur mit einem Index versehen. Aufgrund der Symmetrie

$$\frac{\nu_{1'2'}}{E_{2'}} = \frac{\nu_{2'1'}}{E_{1'}} \quad \frac{\nu_{1'3'}}{E_{3'}} = \frac{\nu_{3'1'}}{E_{1'}} \quad \frac{\nu_{2'3'}}{E_{3'}} = \frac{\nu_{3'2'}}{E_{2'}} \quad (\text{D-14})$$

reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Materialparameter auf neun. Durch Einführung des geometrischen Mittels der E -Moduli $\sqrt{E_i E_j}$ und der Querdehnzahlen $\nu_{ij} = \sqrt{\nu_{j'k'} \nu_{k'j'}}$ nach Guggenberger (2008) wird der sich aus der Symmetrie ergebende Zusammenhang elegant-kompakt darstellbar:

Orthotrope Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}'_{\perp} = \frac{1}{c_{ort}} \begin{bmatrix} E_{1'}(1 - \nu_{1'}^2) & \sqrt{E_{1'} E_{2'}}(\nu_{1'} \nu_{2'} + \nu_{3'}) & \sqrt{E_{1'} E_{3'}}(\nu_{1'} \nu_{3'} + \nu_{2'}) \\ \sqrt{E_{1'} E_{2'}}(\nu_{1'} \nu_{2'} + \nu_{3'}) & E_{2'}(1 - \nu_{2'}^2) & \sqrt{E_{2'} E_{3'}}(\nu_{2'} \nu_{3'} + \nu_{1'}) \\ \sqrt{E_{1'} E_{3'}}(\nu_{1'} \nu_{3'} + \nu_{2'}) & \sqrt{E_{2'} E_{3'}}(\nu_{2'} \nu_{3'} + \nu_{1'}) & E_{3'}(1 - \nu_{3'}^2) \end{bmatrix}$$

$$c_{ort} = 1 - \nu_{1'}^2 - \nu_{2'}^2 - \nu_{3'}^2 - 2\nu_{1'} \nu_{2'} \nu_{3'} \quad (\text{D-15})$$

$$\mathbf{C}'_{\parallel} = \begin{bmatrix} G_{1'2'} & 0 & 0 \\ 0 & G_{1'3'} & 0 \\ 0 & 0 & G_{2'3'} \end{bmatrix} \quad (\text{D-16})$$

Bedingungen für positiv-definites \mathbf{C}'_{ort}

$$\begin{aligned} E_{1'} > 0, \quad E_{2'} > 0, \quad E_{3'} > 0, \quad G_{1'2'} > 0, \quad G_{1'3'} > 0, \quad G_{2'3'} > 0, \\ 1 - \nu_{1'}^2 > 0, \quad 1 - \nu_{2'}^2 > 0, \quad 1 - \nu_{3'}^2 > 0, \\ c_{ort} = 1 - \nu_{1'}^2 - \nu_{2'}^2 - \nu_{3'}^2 - 2\nu_{1'} \nu_{2'} \nu_{3'} > 0 \end{aligned} \quad (\text{D-17})$$

Box D.1 Orthotrope Materialsteifigkeitsmatrix

D.3.3 Angabe der Materialparameter durch Ingenieurkonstanten

Die für die Orthotropie geltenden Beziehungen (D-14) - (D-17) lassen sich im Fall der transversalen Isotropie mit

- $E_{2'} = E_{3'}$
 - $\nu_{1'2'} = \nu_{1'3'}, \nu_{2'1'} = \nu_{3'1'}$
 - $\nu_{2'3'} = \nu_{3'2'}$
 - $G_{1'2'} = G_{1'3'}$
 - $G_{2'3'} = \frac{E_{2'}}{2(1+\nu_{1'})}$
- (D-21)

reduzieren. Damit ergibt sich die Materialsteifigkeitsmatrix aus den verbleibenden fünf Materialkonstanten. Die Bedingung der positiven Definitheit reduziert sich von zehn auf sechs Ungleichungen.

Transversal-isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}'_{\perp} = \frac{1}{c_{tra}} \begin{bmatrix} E_{1'}(1-\nu_{1'}^2) & \sqrt{E_{1'}E_{2'}} \nu_{2'}(\nu_{1'}+1) & \sqrt{E_{1'}E_{2'}} \nu_{2'}(\nu_{1'}+1) \\ \sqrt{E_{1'}E_{2'}} \nu_{2'}(\nu_{1'}+1) & E_{2'}(1-\nu_{2'}^2) & E_{2'}(\nu_{2'}^2+\nu_{1'}) \\ \sqrt{E_{1'}E_{2'}} \nu_{2'}(\nu_{1'}+1) & E_{2'}(\nu_{2'}^2+\nu_{1'}) & E_{2'}(1-\nu_{2'}^2) \end{bmatrix} \quad \text{D-22}$$

$$c_{tra} = (1-\nu_{1'}-2\nu_{2'}^2)(1+\nu_{1'})$$

$$\mathbf{C}'_{\parallel} = \begin{bmatrix} G_{1'2'} & 0 & 0 \\ 0 & G_{1'2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{2'}}{2(1+\nu_{1'})} \end{bmatrix} \quad \text{D-23}$$

Bedingungen für positiv-definites \mathbf{C}'_{tra}

$$E_{1'} > 0, \quad E_{2'} > 0, \quad G_{1'2'} > 0, \quad 1-\nu_{2'}^2 > 0, \quad -1 < \nu_{1'} < 1-2\nu_{2'}^2 \quad \text{D-24}$$

Box D.2 Transversal isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

D.4 Isotropes linear-elastisches Material

Isotropes Material und der isotrope Steifigkeitstensor sind per definitionem richtungsunabhängig. Folgende Relationen herrschen zwischen den Materialparametern c_i , C_{ijkl} , den Lamé-Parametern und den Ingenieurkonstanten μ und E :

$$c_1 = C_{1122} = \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$c_2 = C_{1111} - C_{1122} = 2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}$$
(D-25)

Isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{D-26})$$

Bedingungen für positiv-definites \mathbf{C}_{iso}

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (\text{D-27})$$

Box D.3 Isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

E

**Mises-Typ-
Versagens-
bedingungen**

E.1 Allgemeines

E.1.1 Katalog der Mises-Typ-Versagensbedingungen

In Box E.1 sind gängige Mises-Typ-Versagensbedingungen angegeben. Der spezielle Aufbau dieser Koeffiziententensoren aus den zuvor angegebenen Invarianten findet sich in diesem Abschnitt.

Bezeichnung	Formelaufbau	Parameter
Orthotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
Tsai-Wu (1971):	$F_{TW,ort}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}_{ort} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbb{A}_{ort} : \mathbf{S} - 1$	(E-1) 3+9=12
Hoffmann (1967):	$F_{Hm,ort}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}_{ort} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbb{A}_{ort,dev} : \mathbf{S} - 1$	(E-2) 3+6=9
Hill (1948):	$F_{Hi,ort}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbb{A}_{ort,dev} : \mathbf{S} - 1$	(E-3) 6
Transversal isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
Tsai-Wu (1971):	$F_{TW,tra}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}_{tra} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbb{A}_{tra} : \mathbf{S} - 1$	(E-4) 2+5=7
Hoffmann (1967):	$F_{Hm,tra}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}_{tra} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbb{A}_{tra,dev} : \mathbf{S} - 1$	(E-5) 2+3=5
Hill (1948):	$F_{Hi,tra}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbb{A}_{tra,dev} : \mathbf{S} - 1$	(E-6) 3
Isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen:		
v. Burzynski (1929):	$F_{Bu}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}_{iso} : \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbb{A}_{iso} : \mathbf{S} - 1$	(E-7) 3
Schleicher (1926):	$F_{Sc}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbb{A}_{iso} : \mathbf{S} - 1$	(E-8) 2
v. Mises (1913):	$F_{Mi}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbb{A}_{iso,dev} : \mathbf{S} - 1$	(E-9) 1
Drucker-Prager (1952):	$F_{DP} = \mathbf{A}_{iso} : \mathbf{S} + \sqrt{\mathbf{S} : \mathbb{A}_{iso,dev} : \mathbf{S}} - 1$	(E-10) 2

Box E.1 Katalog: Mises-Typ-Versagensbedingungen

In der rechten Spalte von Box E.1 ist die Anzahl der benötigten Parameter angegeben, um die Funktionen an die Versuchsergebnisse anzupassen. Diese Parameter sind in den Tensoren \mathbf{A} des linearen Terms und \mathbb{A} des quadratischen Terms enthalten. Die zusätzliche Indexbezeichnung *dev* kennzeichnet Tensoren \mathbb{A}_{dev} , die nur einen Beitrag bei der Multiplikation mit einem deviatorischen Spannungszustand liefern, d.h., bei Multiplikation mit einem hydrostatischen Spannungszustand $p\mathbf{J}$ ist das Produkt stets null:

$$\mathbf{S}_{vol} : \mathbb{A}_{dev} : \mathbf{S}_{vol} = p^2 \mathbf{J} : \mathbb{A}_{dev} : \mathbf{J} = 0 \quad (\text{E-11})$$

E.1.2 Tensoren \mathbf{A} , \mathbb{A} und \mathbb{A}_{dev}

Die systematische Herleitung der Tensoren \mathbf{A} und \mathbb{A} aus einem quadratischen Polynom in einem beliebigen symmetrischen Tensor für den orthotropen, transversal isotropen und isotropen Fall ist bereits in Box C.6 angegeben worden. Die orthotropen materiellen Bezugachsen sind durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{1'}$ und $\mathbf{e}_{2'}$ gegeben. Für die Kennzeichnung der transversalen Isotropieachse ist ein Vektor $\mathbf{e}_{1'}$ ausreichend. Aus dem dyadischen Produkt dieser Einheitsvektoren sind die Strukturtenoren $\mathbf{P}_{1'1'}$ und $\mathbf{P}_{2'2'}$ aufgebaut.

Die Tensoren \mathbf{A} und \mathbb{A} sind von Parametern a_i bzw. a_{ij} abhängig. Mit dieser Parameterwahl lassen sich die Tensoren für die jeweilige Materialsymmetrie durch einfaches Hinzufügen von neuen Termen mal einem Parameter a_i bzw. a_{ij} zu den Termen des isotropen Ausgangsfalls angeben:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{iso} &= a_1 \mathbf{J} & \mathbf{A}_{tra} &= \mathbf{A}_{iso} + a_2 \mathbf{P}_{1'1'} & \mathbf{A}_{ort} &= \mathbf{A}_{tra} + a_3 \mathbf{P}_{2'2'} \\
 \mathbb{A}_{iso} &= a_{11} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} + \frac{a_{12}}{2} \mathbb{P}_{sym} \\
 \mathbb{A}_{tra} &= \mathbb{A}_{iso} + a_{21} \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{P}_{1'1'} + \frac{a_{22}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \frac{a_{23}}{2} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{1'1'} + \mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{J}) \\
 \mathbb{A}_{ort} &= \mathbb{A}_{tra} + a_{31} \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \frac{a_{32}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \frac{a_{33}}{2} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{J}) \\
 &+ \frac{a_{34}}{2} (\mathbf{P}_{1'1'} \otimes \mathbf{P}_{2'2'} + \mathbf{P}_{2'2'} \otimes \mathbf{P}_{1'1'})
 \end{aligned} \tag{E-12}$$

Um die Tensoren \mathbb{A}_{dev} für orthotrope und transversal isotrope Materialsymmetrie zu erhalten, werden die Tensoren (E-12) links und rechts mit dem Tensor \mathbb{P}_{dev} multipliziert:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{iso,dev} &= \frac{a_{12}}{2} \mathbb{P}_{sym} : \mathbb{P}_{dev} \\
 \mathbb{A}_{tra,dev} &= \mathbb{A}_{iso,dev} + a_{21} \mathbf{P}_{1'1',dev} \otimes \mathbf{P}_{1'1',dev} + \frac{a_{22}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{1'1',dev} + \mathbf{P}_{1'1',dev} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} \\
 \mathbb{A}_{ort,dev} &= \mathbb{A}_{tra,dev} + a_{31} \mathbf{P}_{2'2',dev} \otimes \mathbf{P}_{2'2',dev} + \frac{a_{32}}{2} (\mathbf{J} \odot \mathbf{P}_{2'2',dev} + \mathbf{P}_{2'2',dev} \odot \mathbf{J}) : \mathbb{P}_{sym} + \\
 &+ \frac{a_{34}}{2} (\mathbf{P}_{1'1',dev} \otimes \mathbf{P}_{2'2',dev} + \mathbf{P}_{2'2',dev} \otimes \mathbf{P}_{1'1',dev})
 \end{aligned} \tag{E-13}$$

E.1.3 Voigt'sche Matrixdarstellung

Der sechszeilige Vektor \mathbf{a}' und die Matrix \mathbf{A}' haben aufgrund der Symmetrie der Spannungen \mathbf{s}' sechs $A_{i'}$ und 21 $A_{i'j'}$ unabhängige Koeffizienten im materiellen Hauptachsensystem:

$$F' = (\mathbf{a}')^T \mathbf{s}' + (\mathbf{s}')^T \mathbf{A}' \mathbf{s}' - 1 \tag{E-14}$$

E.2.1 Zusammenhang zwischen den Koeffizienten

Der lineare Zusammenhang zwischen den Parametern $A_{i'}$ und $A_{ij'}$ der Matrizen \mathbf{a}'_{ort} und \mathbf{A}'_{ort} und den Parametern a_i und a_{ij} der Tensoren \mathbf{A}_{ort} und \mathbb{A}_{ort} (E-12) ist:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'} \\ A_{2'} \\ A_{3'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'1'} \\ A_{2'2'} \\ A_{3'3'} \\ A_{1'2'} \\ A_{1'3'} \\ A_{2'3'} \\ A_{4'4'} \\ A_{5'5'} \\ A_{6'6'} \end{bmatrix} \quad (\text{E-20})$$

Zusammenhang zwischen $A_{ij'}$ der Matrizen $\mathbf{A}'_{ort,dev}$ und a_{ij} des Tensors $\mathbb{A}_{ort,dev}$ (E-13):

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'2'} \\ A_{1'3'} \\ A_{2'3'} \\ A_{4'4'} \\ A_{5'5'} \\ A_{6'6'} \end{bmatrix} \quad (\text{E-21})$$

E.2.2 Bestimmung der Festigkeitsparameter

Die Versuche zur Bestimmung der Festigkeitsparameter werden in Richtung der drei Materialhauptachsen durchgeführt und man erhält im allgemeinsten Fall sechs einaxiale Zug- und Druckfestigkeiten und drei Schubfestigkeiten. Damit lassen sich in der Tsai-Wu-Versagensbedingung (E-1) die neun Koeffizienten

$$A_{i'} = \frac{f_{i',c} - f_{i',t}}{f_{i',t} f_{i',c}}, \quad A_{i'i'} = \frac{1}{f_{i',t} f_{i',c}}, \quad A_{4'4'} = \frac{1}{f_{1'2'}^2}, \quad A_{5'5'} = \frac{1}{f_{1'3'}^2}, \quad A_{6'6'} = \frac{1}{f_{2'3'}^2} \quad (\text{E-22})$$

bestimmen; offen bleiben die drei Unbekannten $A_{1'2'}$, $A_{1'3'}$ und $A_{2'3'}$. Es sind also drei weitere Versuche notwendig.

E.3 Transversal isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen

In Box E.3 sind die Matrizen der transversal isotropen Mises-Typ-Versagensbedingungen angeschrieben. Die materielle Bezugsachse \mathbf{e}_1 , entspricht der transversalen Isotropieachse; die zwei verbleibenden materiellen Hauptrichtungen \mathbf{e}_2 , und \mathbf{e}_3 , des orthonormierten Dreibeins sind frei wählbar, ohne das sich der Aufbau der Koeffizientenmatrizen in Box E.3 ändert.

Transversal isotrope Koeffizientenmatrix \mathbf{a}'_{tra}

$$\mathbf{a}'_{tra} = [A_{1'} \quad A_{2'} \quad A_{2'} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{E-23})$$

Transversal isotrope Koeffizientenmatrix \mathbf{A}'_{tra}

$$\mathbf{A}'_{tra} = \begin{bmatrix} A_{1'1'} & A_{1'2'} & A_{1'2'} & & & \\ A_{1'2'} & A_{2'2'} & A_{2'3'} & & & \\ A_{1'2'} & A_{2'3'} & A_{2'2'} & & & \\ & & & A_{4'4'} & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_{4'4'} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(A_{2'2'} - A_{2'3'}) \end{bmatrix} \quad (\text{E-24})$$

Bedingungen für positiv-semidefinites \mathbf{A}'_{tra}

$$\begin{aligned} A_{1'1'} &\geq 0, \quad A_{2'2'} \geq 0, \quad A_{4'4'} \geq 0 \\ A_{1'1'}A_{2'2'} - A_{1'2'}^2 &\geq 0, \quad A_{2'2'} - A_{2'3'} \geq 0, \\ A_{1'1'}(A_{2'2'} + A_{2'3'}) - 2A_{1'2'}^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{E-25})$$

Transversal isotrop deviatorische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}'_{tra,dev}$

$$\mathbf{A}'_{tra,dev} = \begin{bmatrix} -2A_{1'2'} & A_{1'2'} & A_{1'2'} & & & \\ A_{1'2'} & -A_{1'2'} - A_{2'3'} & A_{2'3'} & & & \\ A_{1'2'} & A_{2'3'} & -A_{1'2'} - A_{2'3'} & & & \\ & & & A_{4'4'} & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_{4'4'} & 0 \\ & & & 0 & 0 & -2A_{1'2'} - 4A_{2'3'} \end{bmatrix} \quad (\text{E-26})$$

Bedingungen für positiv-semidefinites $\mathbf{A}'_{tra,dev}$

$$A_{1'2'} \leq 0, \quad A_{4'4'} \geq 0, \quad A_{1'2'} + 2A_{2'3'} \leq 0 \quad (\text{E-27})$$

Box E.3 Transversal isotrope Koeffizientenmatrizen

E.3.1 Zusammenhang zwischen den Koeffizienten

Der Zusammenhang zwischen $A_{i'}$ und $A_{ij'}$, der Matrizen \mathbf{a}'_{tra} und \mathbf{A}'_{tra} und a_i von \mathbf{A}_{tra} bzw. a_{ij} von \mathbb{A}_{tra} ist:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'} \\ A_{2'} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'1'} \\ A_{2'2'} \\ A_{1'2'} \\ A_{2'3'} \\ A_{4'4'} \end{bmatrix} \quad (\text{E-28})$$

Der Zusammenhang zwischen $A_{ij'}$, der Matrizen $\mathbf{A}'_{tra,dev}$ und a_{ij} des Tensors $\mathbb{A}_{tra,dev}$ lautet:

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1'2'} \\ A_{2'3'} \\ A_{4'4'} \end{bmatrix} \quad (\text{E-29})$$

E.3.2 Bestimmung der Festigkeitswerte

Die einaxialen Versuche und die Schubversuche zur Bestimmung der Festigkeiten werden in Richtung der transversalen Isotropieachse ($x_{1'}$ -Achse) und quer dazu ausgeführt. Damit erhält man vier einaxiale Festigkeiten, $f_{1't}$, $f_{1'c}$, $f_{2'c}$ und $f_{2't}$, und zwei Schubfestigkeiten, $f_{1'2'}$ und $f_{2'3'}$.

$$\begin{aligned} A_{1'} &= \frac{f_{1'c} - f_{1't}}{f_{1't}f_{1'c}}, & A_{2'} &= \frac{f_{2'c} - f_{2't}}{f_{2't}f_{2'c}}, & A_{2'3'} &= A_{2'2'} - \frac{1}{2f_{2'3'}^2} \\ A_{1'1'} &= \frac{1}{f_{1't}f_{1'c}}, & A_{2'2'} &= \frac{1}{f_{2't}f_{2'c}}, & A_{4'4'} &= \frac{1}{f_{1'2'}^2} \end{aligned} \quad (\text{E-30})$$

Bei der transversal isotropen Tsai-Wu-Versagensbedingung (E-4) fehlt aber noch ein siebter Festigkeitswert, der eventuell durch eine biaxiale Belastungsanordnung bestimmt werden kann und einen Zusammenhang mit dem noch unbestimmten Koeffizienten $A_{1'2'}$ angibt.

Die Hoffman-Versagensbedingung (E-5) benötigt wiederum nur fünf Versuchswerte; die Schubfestigkeit quer zur Faser $f_{2'3'}$ lässt sich durch die Zug- und Druckfestigkeiten rückrechnen, ansonsten besteht der selbe Zusammenhang (E-30) zwischen den Festigkeiten und den Koeffizienten, wie bei der Tsai-Wu-Bedingung.

$$A_{1'2'} = \frac{-1}{2f_{1't}f_{1'c}}, \quad A_{2'3'} = \frac{f_{2't}f_{2'c} - 2f_{1't}f_{1'c}}{2f_{1't}f_{1'c}f_{2't}f_{2'c}} \quad (\text{E-31})$$

E.4 Isotrope Mises-Typ-Versagensbedingungen

E.4.1 Koeffizientenmatrizen

In Box E.4 sind die Matrizen, die für die isotropen Mises-Typ-Versagensbedingungen (E-7) bis (E-9) benötigt werden.

Isotrope Koeffizientenmatrix \mathbf{a}_{iso}

$$\mathbf{a}_{iso} = [a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = a_1 \mathbf{j} \quad (\text{E-32})$$

Isotrope Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_{iso}

$$\mathbf{A}_{iso} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & & & \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & & & \\ & & & 2(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 2(A_{11} - A_{12}) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(A_{11} - A_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{E-33})$$

Bedingungen für positiv-semidefinites \mathbf{A}_{iso}

$$A_{11} - A_{12} \geq 0, \quad A_{11} + 2A_{12} \geq 0 \quad (\text{E-34})$$

Isotrop-deviatorische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}_{iso,dev}$

$$\mathbf{A}_{iso,dev} = \frac{a_{12}}{2} \mathbf{P}_{J_2} \quad \mathbf{P}_{J_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 6 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{E-35})$$

Bedingungen für positiv-semidefinites $\mathbf{A}_{iso,dev}$

$$a_{12} > 0 \quad (\text{E-36})$$

Box E.4 Isotrope Koeffizientenmatrizen

E.4.2 Bestimmung der Festigkeitsparameter

Die Funktion von Burzynski (E-7) hat drei Parameter a_1 , A_{11} und A_{12} , und benötigt daher ebenso viele unabhängige Versuchssituationen. Hier werden einaxialer Druck- und Zugver-

such und ein reiner Schubversuch gewählt. Damit ergibt sich der Zusammenhang der Limitspannungen f_t , f_c und τ_u mit den Koeffizienten. Die drei Festigkeiten sind alle positiv anzugeben, auch die Druckfestigkeit f_c . Bei der Versagensbedingung nach Schleicher (E-8) verschwindet der Druck/Zug Unterschied; es verbleiben zwei Festigkeiten und zwei Koeffizienten. Die isotrope Mises-Versagensbedingung (E-9) hängt nur von einem Koeffizienten bzw. einer Festigkeit f_u ab, während die Funktion nach Drucker/Prager wiederum zwei Festigkeiten benötigt.

$$\begin{aligned}
 \text{Burzynski: } & A_{11} = \frac{1}{f_t f_c}, \quad A_{12} = A_{11} - \frac{1}{2\tau_u^2}, \quad a_1 = \frac{f_c - f_t}{f_t f_c} \\
 \text{Schleicher: } & A_{11} = \frac{1}{f_u^2}, \quad A_{12} = A_{11} - \frac{1}{2\tau_u^2} \\
 \text{Mises: } & a_{12} = \frac{3}{f_u^2}
 \end{aligned} \tag{E-37}$$

E.4.3 Modifizierte Drucker-Prager-Versagensbedingung

In Box E.1 sticht die Drucker-Prager-Versagensbedingung (E-10) heraus, da diese als Einzige nicht die quadratische Funktionsgestalt hat. Trotzdem wird diese Versagensbedingung zu den Mises-Typ-Funktionen gezählt, da derselbe formale Zugang über Invarianten gewählt ist, wie bei allen anderen Funktionen in Box E.1. Die Beschreibung beruht auf der linearen Invarianten I_1 und der quadratischen Invarianten J_2 :

$$I_1 = \frac{1}{a_1} (\mathbf{a}_{iso})^T \mathbf{s} = \mathbf{j}^T \mathbf{s}, \quad J_2 = \frac{1}{a_{12}} \mathbf{s}^T \mathbf{A}_{iso,dev} \mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P}_{J_2} \mathbf{s}. \tag{E-38}$$

Damit ergibt sich die Drucker-Prager-Versagensbedingung zu:

$$F_{DP} = a_1 I_1 + \sqrt{a_{12} J_2} - 1. \tag{E-39}$$

Im Hauptnormalspannungsraum beschreibt diese Funktion mit $F_{DP} = 0$ eine einschalige Kegelfläche bzw. bei der Darstellung in der I_1 - J_2 Ebenendarstellung eine Hyperbel. In der Kegelspitze, bei $J_2 = 0$, hat die Versagensbedingung keine stetige Ableitung, sondern eine „funktionsinhärente“ Ecke. Damit ist die anfänglich geforderte Funktionseigenschaft der stetigen Differenzierbarkeit verletzt. Um die oben erwähnte ungewünschte Funktionseigenschaft zu beheben, kann die Funktion an der Kegelspitze „abgerundet“ werden. Dabei wird die Funktion (E-39) durch die Funktion

$$F_{DP} = (1 - \omega^2) a_1 I_1 + \sqrt{(1 - \omega^2) a_{12} J_2 + \omega^2} - 1 \quad 0 < \omega < 1 \tag{E-40}$$

angenähert. Diese wird als modifizierte Drucker-Prager-Versagensbedingung bezeichnet.

F

Modifizierte isotrope Mohr- Typ-Versagens- bedingungen

F.1 Klassische isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

F.1.1 Lokale Versagensbedingungen

Die lokale Versagensbedingung F' ist im Fall der Rankine-, Tresca- und Mohr-Coulomb-Bedingungen linear in den Spannungskomponenten S_{nn} und S_{tn} . Nach Leon ist die lokale Versagensbedingung eine quadratische Parabel in der $\{S_{nn}, S_{tn}\}$ -Ebene. Die Parameter oder Festigkeiten f_{nn} und f_{tn} geben den Abstand zwischen Schnittpunkt der Kurve $F'(S_{nn}, S_{tn})=0$ mit der S_{nn} - bzw. S_{tn} -Spannungsachse und dem Koordinatenursprung an.

F.1.2 Formulierung in Hauptnormalspannungen

Mit dem Mohr'schen Kreis lassen sich die obigen Versagensbedingungen - angeschrieben in den die lokalen Spannungskomponenten S_{nn} und S_{tn} - in der maximalen und minimalen Normalspannung quer zur Faserrichtung, $S_{nn,min}$ und $S_{nn,mix}$, ausdrücken.

Rankine (Zug/Druck):

$$F = \frac{S_{max}}{f_{nn,t}} - 1 \qquad F = -\frac{S_{min}}{f_{m,c}} - 1 \qquad (F-1)$$

Tresca:

$$F = \left(\frac{S_{max} - S_{min}}{2f_{tn}} \right)^2 - 1 \qquad (F-2)$$

Mohr - Coulomb:

$$F = \frac{S_{max}}{2} \frac{\sin \varphi + 1}{f_{tn} \cos \varphi} - \frac{S_{min}}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{f_{tn} \cos \varphi} - 1 \qquad (F-3)$$

Leon:

$$\begin{aligned} S_{min} < \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}}: & \quad F_1 = \frac{S_{max} + S_{min}}{2f_{nn,t}} + \frac{(S_{max} - S_{min})^2}{4f_{tn}^2} - \frac{4f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{4f_{nn,t}^2} \\ S_{min} \geq \frac{f_{nn,t}^2 - f_{tn}^2}{f_{nn,t}}: & \quad F_2 = \frac{S_{max}}{f_{nn,t}} - 1 \end{aligned} \qquad (F-4)$$

Box F.1 Klassische isotrope Mohr-Typ-Versagensbedingungen

F.2 Spannungsinvarianten & isotrope Versagensbedingungen

F.2.1 Darstellung der isotropen Versagensbedingung

Jeder Spannungszustand lässt sich durch drei Hauptnormalspannungen S_1 , S_2 und S_3 und die zugehörigen Hauptnormalspannungsrichtungen angeben. Da ein isotroper Körper keine ausgezeichneten Materialrichtungen besitzt, beeinflusst nur die Größe der drei Hauptnormalspannungen den Versagenseintritt. Alle isotropen Versagensbedingungen $F(\mathbf{s})$ sind deshalb immer als Funktionen S_1 , S_2 und S_3 , in den Invarianten I_1 , J_2 und J_3 (bzw. in anderen Invarianten, die in Anhang C angeführt sind) oder in den Haigh-Westergaard-Koordinaten ξ , ρ und θ darstellbar. Mit den nachfolgend Zusammenhängen kann zwischen den drei unterschiedlichen Darstellungs- bzw. Parametrisierungsarten je nach Wunsch oder Bedarf gewechselt werden. Die angeführten Ableitungen nach den Spannungskomponenten \mathbf{s} werden später bei der Ableitung der Versagensbedingung benötigt.

F.2.2 Invarianten I_1 , J_2 und J_3

Die drei Invarianten sind lineare, quadratische und kubische Funktionen in den Spannungskomponenten \mathbf{s} . Zur Darstellung der quadratischen Invariante J_2 in Matrixschreibweise wurde die Matrix \mathbf{P}_{J_2} verwendet. Diese ergibt sich als Produkt der Skalierungsmatrix \mathbf{P} (Box B.9) und der Matrix:

$$\mathbf{P}_{dev} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \mathbf{0} & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 3 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{F-5})$$

Zur Berechnung der kubischen Invarianten J_3 und den Ableitungen nach den Spannungen \mathbf{s} wird die Matrix

$$\mathbf{M} = 2 \begin{bmatrix} S_{1,dev} & 0 & 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ 0 & S_{2,dev} & 0 & S_{12} & 0 & S_{23} \\ 0 & 0 & S_{3,dev} & 0 & S_{13} & S_{23} \\ S_{12} & S_{12} & 0 & -S_{3,dev} & S_{23} & S_{13} \\ S_{13} & 0 & S_{13} & S_{23} & -S_{2,dev} & S_{12} \\ 0 & S_{23} & S_{23} & S_{13} & S_{12} & -S_{1,dev} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S_{1,dev} &= \frac{1}{3}(2S_{11} - S_{22} - S_{33}) \\ S_{2,dev} &= \frac{1}{3}(2S_{22} - S_{11} - S_{33}) \\ S_{3,dev} &= \frac{1}{3}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}) \end{aligned} \quad (\text{F-6})$$

eingeführt. Die Invarianten und ihre Ableitungen nach den Spannungen \mathbf{s} sind in Box F.2

angegeben.

Invarianten

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \mathbf{j}^T \mathbf{s} \\
 J_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P}_{J_2} \mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{P}_{dev} \mathbf{s} \\
 J_3 &= \frac{1}{6} \mathbf{s}^T \mathbf{P}_{dev} \mathbf{M} \mathbf{P}_{dev} \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{F-7}$$

1. Ableitung nach \mathbf{s}

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{s}} &= \mathbf{j} \\
 \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} &= \mathbf{P}_{J_2} \mathbf{s} \\
 \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{P}_{dev} \mathbf{s} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{F-8}$$

2. Ableitung nach \mathbf{s}

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_1}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= \mathbf{0}_{(6,6)} \\
 \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= \mathbf{P}_{J_2} \\
 \frac{\partial^2 J_3}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= \mathbf{M} - \frac{2}{3} [\mathbf{j} \otimes (\mathbf{P}_{J_2} \mathbf{s}) + (\mathbf{P}_{J_2} \mathbf{s}) \otimes \mathbf{j}]
 \end{aligned} \tag{F-9}$$

Box F.2 Definition der drei Invarianten I_1 , J_2 und J_3 und die erste und zweite Ableitung nach den Spannungen \mathbf{s}

F.2.3 Haigh-Westergaard-Koordinaten

Die Haigh-Westergaard-Koordinaten ξ , ρ und θ sind Zylinderkoordinaten im Hauptnormalspannungsraum (Bild F.1). Auf der ξ -Achse liegen alle hydrostatischen Spannungszustände $S_1 + S_2 + S_3$; aus diesem Grund ist ξ nur eine Funktion von I_1 (F-7). Die Ebene normal zu dieser Achse ist die deviatorische Ebene; Spannungspunkte in dieser Ebene werden durch die Polarkoordinaten ρ und θ angegeben. Anstatt des Winkels θ kann auch die Koordinate t eingeführt werden. Der Zusammenhang zu den sechs Spannungskomponenten \mathbf{s} wird über die Invarianten J_2 und J_3 aus Gleichung (F-7) hergestellt. Mit den Größen aus Box F.2 lassen sich die erste und die zweite Ableitung der Haigh-Westergaard-Koordinaten

nach den Spannungen \mathbf{s} bestimmen.

Haigh-Westergaard-Koordinaten

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \\ \rho &= \sqrt{2J_2} \\ \theta &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad \text{bzw.} \quad t = \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}\end{aligned}\tag{F-10}$$

1. Ableitung nach \mathbf{s}

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} &= \left(\frac{-3t}{\rho^2} \right) \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} + \frac{3\sqrt{6}}{\rho^3} \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}}\end{aligned}\tag{F-11}$$

2. Ableitung nach \mathbf{s}

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= -\frac{1}{\rho^3} \left(\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= \frac{15t}{\rho^4} \left(\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \right) - \frac{9\sqrt{6}}{\rho^5} \left(\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{s}} \right) + \\ &\quad + \left(-\frac{3t}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2 J_2}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} + \frac{3\sqrt{6}}{\rho^3} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}}\end{aligned}\tag{F-12}$$

Box F.3 Definition der drei Haigh-Westergaard-Koordinaten und die zugehörige erste und zweite Ableitung nach den Spannungskomponenten \mathbf{s}

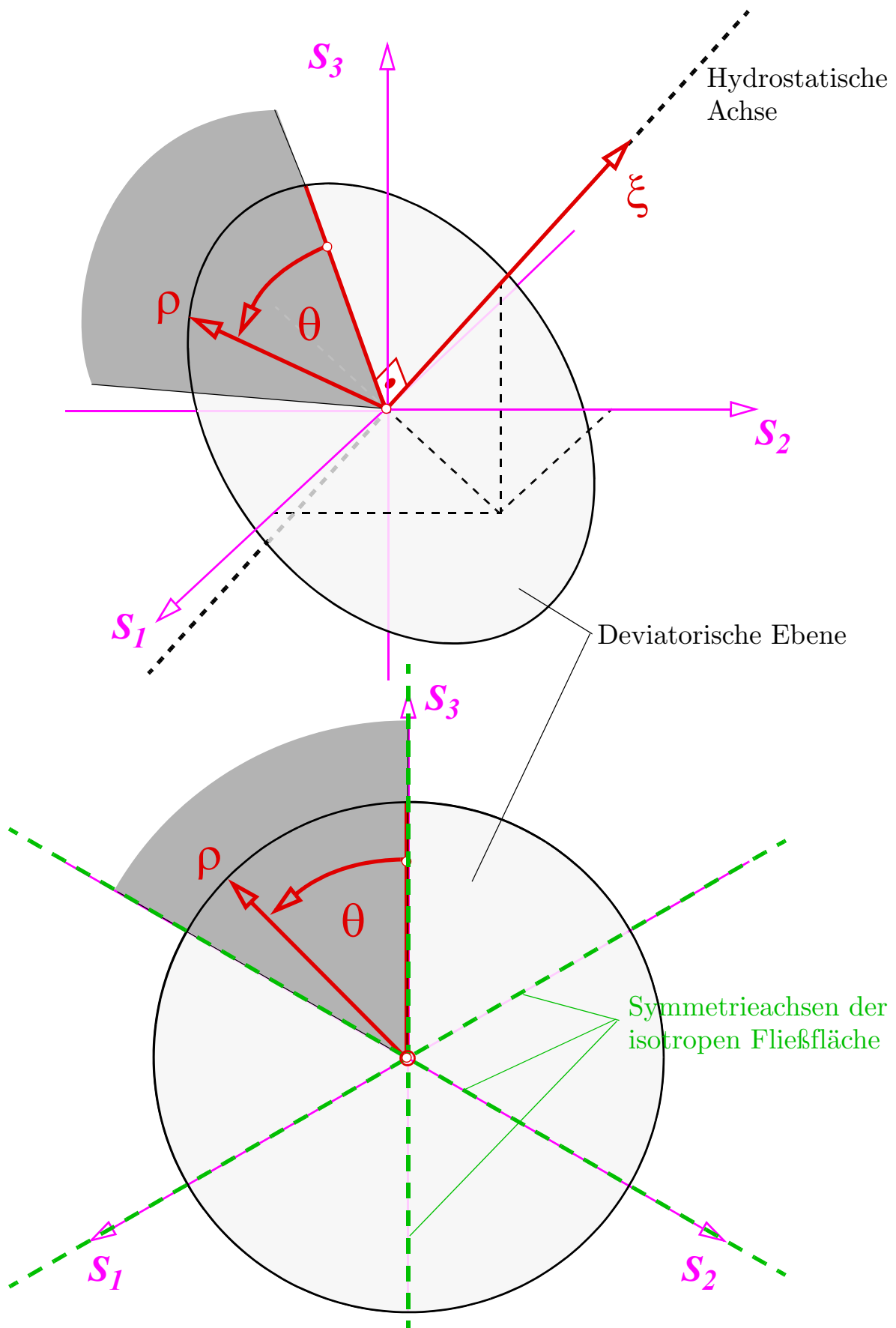


Bild F.1 Haigh-Westergaard-Koordinaten ξ , ρ und θ im Hauptnormalspannungsraum

F.3 Modifizierte Mohr'sche Versagensbedingungen

F.3.1 Allgemeine Vorgehensweise

Der Schnitt parallel zur deviatorischen Ebene durch eine Flächendarstellung $F(S_1, S_2, S_3) = 0$ einer klassischen, isotropen Mohr-Typ-Versagensbedingung aus Box F.1 ergibt den deviatorischen Kurvenverlauf dieser Versagensbedingung. Dabei werden von diesen ebenen Kurven die Symmetrien bezüglich der drei Achsen aus Bild F.1 (grün, strichliert) eingehalten. In Bild F.2 und Bild F.3 sind diese Kurvenverläufe in der deviatorischen Ebene für die Tresca-, die Mohr-Coulomb-, und die Rankine-Versagensbedingung dargestellt. Dabei sticht ins Auge, dass alle Schnittkurven bei den Symmetrieachsen Ecken aufweisen, die bei der Komplettdarstellung der Fläche $F = 0$ im Hauptnormalspannungsraum Kanten ergeben.

Alle Schnitte durch die Flächendarstellung längs der hydrostatischen Achse ergeben zwei, um die hydrostatische Achse spiegelbare, Kurven, die sich - außer bei der Tresca-Versagensbedingung - in einem Punkt der hydrostatischen Achse treffen. In der räumlichen Darstellung im Hauptnormalspannungsraum entspricht dieser Punkt einem „Spitz“ in der Fläche $F = 0$.

Die isotropen Versagensbedingungen lassen sich somit durch eine ebene Kurve in der deviatorischen Ebene (unter Einhaltung der nötigen Symmetrien) und einer von der hydrostatischen Achskoordinate ξ abhängigen Skalierung darstellen. Die Näherungsfunktionen an die klassischen, isotropen Versagensbedingungen (Tresca, Mohr-Coulomb, Rankine) greifen genau diese Zweiteilung der Funktionsdarstellung in den HW-Koordinaten auf.

In der deviatorischen Ebene werden die exakten Versagensbedingungen durch Näherungsfunktion beliebig genau angepasst, wobei die Ecken - und damit die Sprünge in den Gradienten $\partial F/\partial \mathbf{s}$ - durch den Funktionsverlauf der Näherungsfunktionen „abgerundet“ werden, womit die Unstetigkeit im Gradientenfunktionsverlauf beseitigt wird. Grundlage für die modifizierte Funktionsdarstellung der isotropen Mohr-Typ-Versagensbedingungen ist von Bigoni/Piccolroaz (2004) entwickelte Näherungsfunktion.

In der hydrostatischen Koordinatenrichtung verlaufen alle klassischen Mohr-Typ-Versagensbedingungen aus Box F.1 - außer die Leon-Versagensbedingung - linear. Um den Spitz der Fläche im Schnittpunkt mit der hydrostatischen Achse abzurunden, wird die bereits bekannte Hyperbelfunktion aus Kap. 3.5.2 als Näherungsfunktion verwendet.

Mit diesen beiden Bestandteilen lassen sich die klassischen isotropen Mohr-Typ-Funktionen so modifizieren, dass sie an jeder Stelle einen stetigen Funktionsverlauf im Gradienten $\partial F/\partial \mathbf{s}$ besitzen.

F.3.2 Funktion von Bigoni

Die „deviatorische“ Funktion g (F-13) von Bigoni/Piccolroaz (2004) ist eine Funktion in der Haigh-Westergaard-Koordinate θ bzw. t und besitzt die geforderten Symmetrieeigenschaften. Die Gestalt der Kurve wird durch die zwei Parameter δ und γ gesteuert. Der Parameter δ ist im Wertebereich null bis zwei definiert; γ kann Werte von Null bis kleiner als eins annehmen.

Diese Funktion wird so normiert, dass sie bei $\theta = 0$ und $\gamma = 1$ den Wert eins hat. Als spätere Schreiberleichterung wird der Kehrwert von g mit b (F-14) bezeichnet.

Funktion nach Bigoni

$$g(\theta, \delta, \gamma) = \frac{\cos\left(\delta \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left\{\delta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1}[\gamma \cos(3\theta)]\right\}} = \frac{\cos\left(\delta \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left[\delta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(\gamma t)\right]} \quad (\text{F-13})$$

$$b(t, \delta, \gamma) = \frac{1}{g(t, \delta, \gamma)} = b(t) = \frac{1}{\cos\left(\delta \frac{\pi}{6}\right)} \cos\left[\delta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(\gamma t)\right] \quad (\text{F-14})$$

$$0 \leq \delta \leq 2, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (\text{F-15})$$

1. Ableitung nach t

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{-1}{\cos\left(\delta \frac{\pi}{6}\right)} \left(\frac{\gamma}{3\sqrt{1-\gamma^2 t^2}} \right) \sin\left[\delta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(\gamma t)\right] \quad (\text{F-16})$$

2. Ableitung nach t

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \left(\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2 t^2} \right) \left(t \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{b}{9} \right) \quad (\text{F-17})$$

Box F.4 Funktion von Bigoni

Mit dem Grenzwert $\gamma = 1$ können die Schnittkurven in der deviatorischen Ebene der Versagensbedingungen nach Tresca ($\delta = 1$), Rankine (Zug: $\delta = 0$, Druck: $\delta = 2$) und Mohr-Coulomb ($\delta < 1$) mit (F-13) beschrieben werden. Die Ableitung von g nach θ ist aber bei $\gamma = 1$, $\theta = 0$ und/oder bei $\theta = \pi/3$ nicht mehr kontinuierlich, was sich graphisch durch funk-

tionsinhärente Ecken in der Kurve der deviatorischen Ebene darstellt. Damit ist die Bedingung von stetiger Differenzierbarkeit nicht erfüllt. Mit einem γ -Wert, der gegen eins geht, können aber die oben erwähnten Mohr-Typ-Funktionen durch stetig differenzierbare Funktionen angenähert und die Ecken „ausgerundet“ werden.

Für die spätere Anpassung wird der Radius ρ bei $\theta = 0$, $\gamma = 1$ und $\xi = 0$ vorgegeben und mit der normierten Funktion g multipliziert.

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 g \quad \bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\theta = 0, \delta, \gamma = 1) \quad (\text{F-18})$$

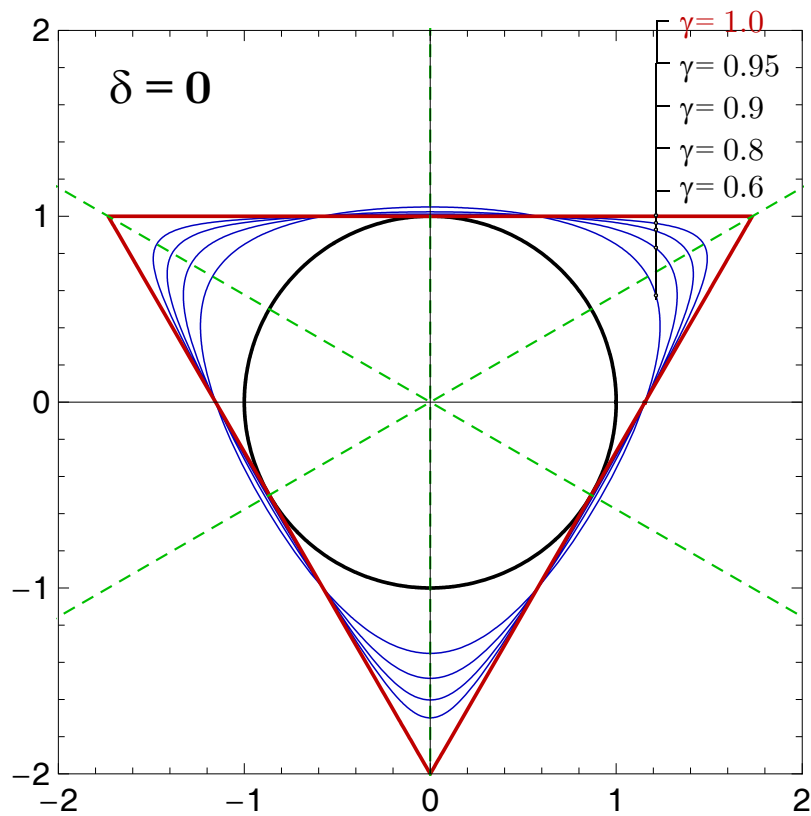


Bild F.2 Annäherung der Rankine-Zugversagensbedingung ($\delta = 0$) in der deviatorischen Ebene durch die Funktion von Bigoni

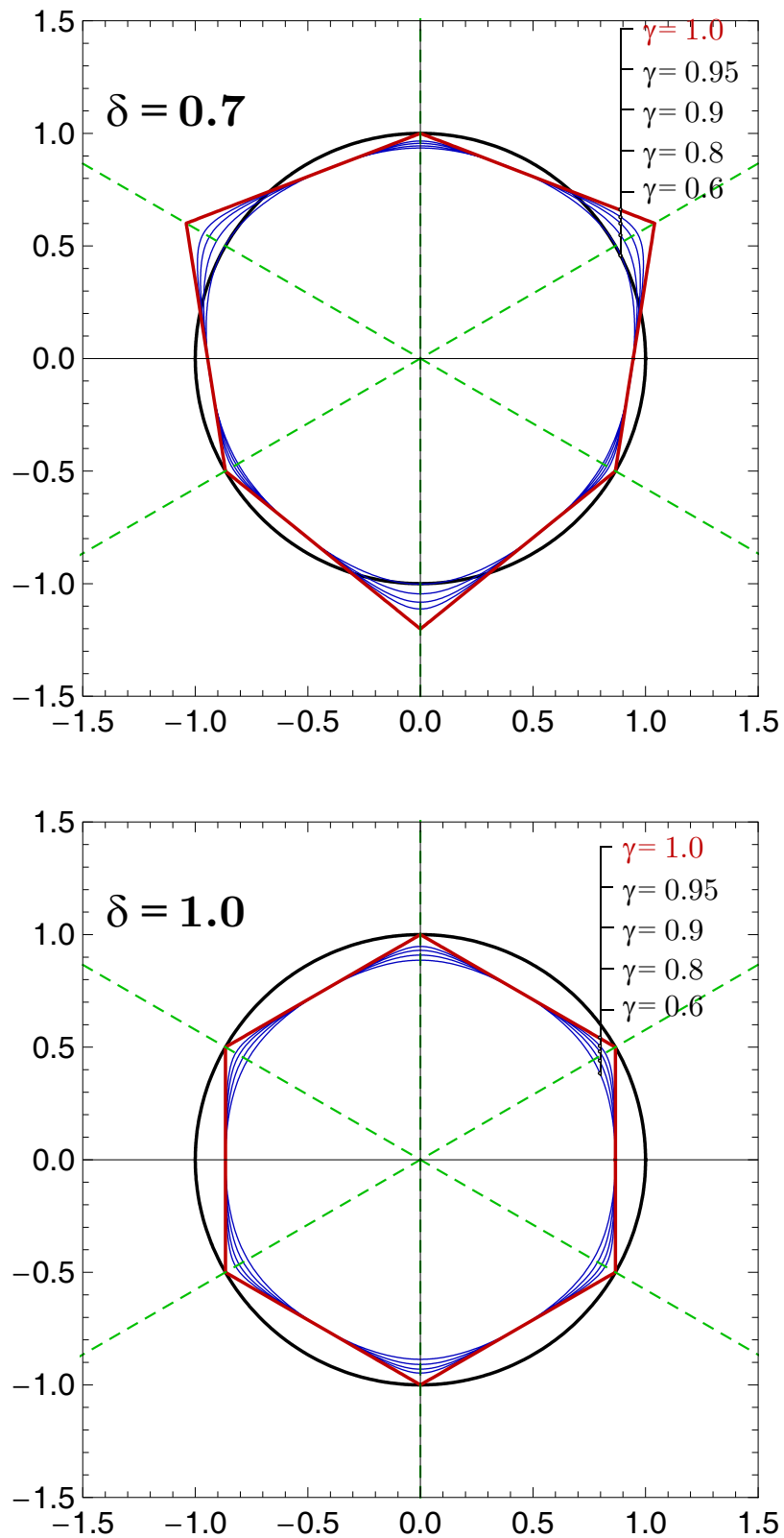


Bild F.3 Annäherung der Mohr-Coulomb (hier exemplarisch mit $\delta = 0.7$) und der Tresca- ($\delta = 1.0$) Funktion in der deviatorischen Ebene durch die Funktion von Bigoni

F.3.3 Modifizierter Konus im HW-Koordinatensystem

Die Rankine- und die Mohr-Coulomb-Versagensbedingung bilden einen Konus mit der hydrostatischen Achse als Konusachse. Querschnitte durch diese Fläche im Hauptnormalspannungsraum mit einer Schnittebene durch die hydrostatische Achse ergeben einen ebenen Konus. Dieser Konus wird durch eine angenäherte, „abgerundete“ Hyperbel ersetzt, an deren Schnittpunkt mit der hydrostatischen Achse die Ableitung nach \mathbf{s} möglich ist:

$$F(\xi, \rho, \theta, \delta, \gamma, \omega) = \left(\frac{1-\omega^2}{\bar{\xi}} \right) \xi + \sqrt{(1-\omega^2) \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^2 + \omega^2 - 1} \quad 0 < \omega < 1 \quad (\text{F-19})$$

Als Ausrundungsfaktor wird der Parameter ω eingeführt. Bei $\omega = 0$ erhält man die ursprüngliche Funktion. Der Abstand des Schnittpunktes der Versagensbedingung mit der hydrostatischen Achse vom Koordinatenursprung aus gemessen ist mit $\bar{\xi}$ angegeben. Der Abstand der Versagensbedingung von der hydrostatischen Achse in der deviatorischen Ebene bei $\xi = 0$ ist mit $\bar{\rho}$ angegeben, wobei dieser Abstand sich i.A. abhängig vom Winkel θ ändert.

F.3.4 Katalog modifizierter isotroper Mohr-Typ-Funktionen

Mit Gleichung (F-18) und (F-19) hat man alle Bestandteile um klassische isotrope Versagensbedingungen nach Tresca, Rankine und Mohr-Coulomb durch konvexe und stetig differenzierbare Näherungsfunktionen zu beschreiben.

Die Gestalt der Funktion hängt von den beiden Abrundungsparametern γ und ω und den drei Parametern $\bar{\xi}$, $\bar{\rho}_0$ und δ ab. Der Kurvenparameter δ ist für die Tresca und die Rankine Versagensbedingung fix vorgegeben. Die Parameter $\bar{\xi}$ und $\bar{\rho}_0$ sind aus einfachen Beanspruchungssituationen mit einaxialen Zug/Druckfestigkeit f_t und f_c in Zusammenhang zu bringen. Dabei werden zuerst die beiden Abrundungsparameter γ und ω zu eins bzw. zu null gesetzt; der exakte Fall soll als Bezugssituation dienen. Über (F-10) werden aus elementaren Beanspruchungssituationen die zugehörigen Haigh-Westergaard-Koordinaten berechnet und in Gleichung (F-19) eingesetzt, um schlussendlich die Größen $\bar{\xi}$ und $\bar{\rho}_0$ in Abhängigkeit von f_t und f_c zu bestimmen. Sind diese beiden Parameter festgelegt, werden die beiden Abrundungsparameter beliebig vorgegeben, wobei γ gegen eins und ω gegen null gehen soll, um eine zunehmend besser werdende Annäherung an die exakte Ausgangssituation zu erhalten.

Die nachfolgend angegebenen klassischen isotropen Versagensbedingungen sind in den Haigh-Westergaard-Koordinaten angegeben. Zusätzlich werden die erste und die zweite Ableitung nach den Spannungen \mathbf{s} benötigt. Für die Ableitung der Versagensbedingungen nach den Spannungen wird die Kettenregel verwendet:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \quad (\text{F-20})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \xi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \xi} \left(\frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial t}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{s}} \right) \end{aligned} \quad (\text{F-21})$$

F.3.4.1 Tresca-Versagensbedingung

Bei der Tresca-Versagensbedingung ist δ eins. Diese Versagensbedingung ist keine Funktion in ξ , also ist der Versagenseintritt unabhängig von aufgebrachtene hydrostatische Spannungszuständen. Die einzige benötigte Festigkeitsgröße ist die Fließspannung f_y . Der Zusammenhang zu $\bar{\rho}_0$ in den Haigh-Westergaard-Koordinaten ist:

$$\bar{\rho}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} f_y \quad (\text{F-22})$$

Mit $\gamma = 1$ erhält man die exakte Tresca-Versagensbedingung. Um die erste und zweite Ableitung nach \mathbf{s} zu berechnen, werden die Ableitungen aus Box F.3, die Kettenregel und die Ableitungen aus Box F.4 benötigt.

Modifizierte Tresca-Versagensbedingung

$$F(\rho, t, \gamma) = \frac{\rho}{\rho_0} b - 1 = \frac{\sqrt{2}\rho}{f_y} \cos \left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(\gamma t) \right] - 1 \quad (\text{F-23})$$

1. Ableitung nach den HW-Koordinaten

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{b}{\rho_0} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (\text{F-24})$$

2. Ableitung nach den HW-Koordinaten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (\text{F-25})$$

Box F.5 Modifizierte Tresca-Versagensbedingung

F.3.4.2 Rankine-Versagensbedingung

Bei der modifizierten Rankine-Versagensbedingung (F-28) sind der Zug- und der Druckversagensfall zu unterscheiden. Abhängig vom jeweiligen Versagensmodus ist $\delta = 0$ (Zug) oder $\delta = 2$ (Druck). Mit diesen unterschiedlichen Parametern der Bigoni-Funktion ergeben sich die Größen $\bar{\xi}$ und $\bar{\rho}_0$ abhängig von den einaxialen Festigkeiten f_t und f_c zu:

$$\begin{aligned} \text{Zug:} \quad \delta = 0, \quad \bar{\xi} &= \sqrt{3}f_t, \quad \bar{\rho}_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}f_t, \\ \text{Druck:} \quad \delta = 2, \quad \bar{\xi} &= -\sqrt{3}f_c, \quad \bar{\rho}_0 = \sqrt{6}f_c. \end{aligned} \quad (\text{F-26})$$

Die Festigkeitswerte f_t und f_c liegen im Wertebereich $(0, +\infty)$. Zu beachten ist, dass auch Druckfestigkeiten positiv anzugeben sind.

Bei $J_2 = 0$ bzw. $\rho = 0$ - dem hydrostatischen Zustand - ergibt sich eine unbestimmte Situation, da sich t bzw. θ aus (F-10) nicht berechnen lässt. Die Versagensbedingung (F-28) reduziert sich in dieser Sondersituation auf (F-31); die zugehörigen Ableitungen sind ebenso in Gleichung (F-31) angegeben. Bei der Berechnung ist bei $J_2 = 0$ auf diesen Sonderfall umzuschalten.

F.3.4.3 Mohr-Coulomb-Versagensbedingung

Die modifizierte Mohr-Coulomb-Funktion denselben formalen Aufbau wie die Rankine-Versagensbedingung; der Unterschied liegt nur in verschiedenen δ -Werten. Mit den einaxialen Festigkeiten lassen sich die Parameter $\bar{\xi}$, $\bar{\rho}_0$ und δ berechnen.

$$\bar{\xi} = \frac{\sqrt{3}f_c f_t}{f_c - f_t}, \quad \bar{\rho}_0 = \frac{\sqrt{6}f_c f_t}{2f_c + f_t}, \quad \delta = \frac{6}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}f_t}{2f_c + f_t} \right) \quad (\text{F-27})$$

Modifizierte Rankine-/Mohr-Coulomb-Versagensbedingung

$$F(\xi, \rho, t, \delta, \gamma, \omega) = \frac{\xi}{\xi} + sq - 1 \quad (F-28)$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1 - \omega^2}{\xi}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\rho_0}, \quad sq = \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 b^2 + \omega^2}$$

1. Ableitung nach den HW-Koordinaten

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\rho}{sq} \left(\frac{b}{\rho_0}\right)^2 \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{b}{sq} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{\partial b}{\partial t} \quad (F-29)$$

2. Ableitung nach den HW-Koordinaten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \frac{\partial F}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{sq} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{sq} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)^2 + b \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{1}{sq} \frac{\partial F}{\partial t} \left(b \frac{\partial b}{\partial t}\right) \right] \quad (F-30)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{sq} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)$$

Sondersituation: $J_2 = 0$ bzw. $\rho = 0$

$$F(\xi, \rho = 0, \omega) = \frac{\xi}{\xi} + \omega - 1 \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{3}\xi} \mathbf{j} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}_{(6,6)} \quad (F-31)$$

Box F.6 Modifizierte Rankine- bzw. Mohr-Coulomb-Versagensbedingung

G

**Moore-Penrose-
Pseudoinverse**

G.1 Allgemeine Eigenschaften

Die Moore-Penrose-Pseudoinverse ist nach dem amerikanischen Mathematiker E.H. Moore und dem britischen Wissenschaftler Roger Penrose (1955) benannt. Eine kompakte und leicht lesbare Darstellung dieser algebraischen Größe mit der praktischen Anwendung in der Robotik findet sich auf der Internetseite von Prof. Joel Burdick (<http://robotics.caltech.edu/~jwb/courses/ME115/handouts/pseudo.pdf>).

Die Moore-Penrose-Pseudoinverse \mathbf{A}^+ einer Rechteckmatrix \mathbf{A} ist eindeutig bestimmbar

$$\mathbf{A}_{(m,n)} \mathbf{x}_{(n,1)} = \mathbf{b}_{(m,1)} \quad \mathbf{x}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,m)}^+ \mathbf{b}_{(m,1)}, \quad (\text{G-1})$$

und hat die folgenden vier Eigenschaften:

$$(i) \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (ii) \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \quad (iii) \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \right)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \quad (iv) \left(\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \right)^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \quad (\text{G-2})$$

Für die rechteckige Diagonalmatrix $\Sigma_{(m,n)}$ ergibt Σ^+ durch Invertierung der Diagonalelemente, die nicht null sind; alle Nullterme bleiben null:

$$\Sigma_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{(r,r)} & \mathbf{0}_{(r,n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r,r)} & \mathbf{0}_{(m-r,n-r)} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_{(r,r)} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{bmatrix} \quad (\text{G-3})$$

$$\Sigma_{(n,m)}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{(r,r)}^{-1} & \mathbf{0}_{(r,m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r,r)} & \mathbf{0}_{(n-r,m-r)} \end{bmatrix}$$

Die Berechnung der Moore-Penrose-Pseudoinversen einer generellen Matrix \mathbf{A} erfolgt über die spektrale Zerlegung. Dabei kann \mathbf{A} immer in ein Produkt der orthogonalen Matrizen $\mathbf{U}_{(m,m)}$ und $\mathbf{V}_{(n,n)}$ und der rechteckigen Diagonalmatrix $\Sigma_{(m,n)}$ zerlegt werden. Die Moore-Penrose-Pseudoinverse der Diagonalmatrix wird mit (G-3) berechnet. Anschließend wird diese wieder mit den transponierten orthogonalen Matrizen vor- bzw. nachmultipliziert und man erhält \mathbf{A}^+ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{(m,m)} \Sigma_{(m,n)} \mathbf{V}_{(n,n)}^T \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_{(n,n)} \Sigma_{(n,m)}^+ \mathbf{U}_{(m,m)}^T \quad (\text{G-4})$$

Ist die Matrix \mathbf{A} quadratisch, hat aber Nulleigenwerte, kann mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen eine eindeutige Lösung angegeben werden. Hat \mathbf{A} keine Nulleigenwerte reduziert sich (G-4) auf die normale Inverse der quadratischen Matrix.

G.2 Geometrische Interpretation

G.2.1 Fall 1: $n > m$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$

Gegeben sind n Vektoren \mathbf{a}_i in \mathbb{R}^m . Die Anzahl n der Vektoren ist größer als die Raumdimension m ; weiters sind die Vektoren linear abhängig. Es gibt aber keinen Vektor - abgesehen vom Nullvektor - der in \mathbb{R}^m normal auf alle \mathbf{a}_i steht. Oder anders formuliert: Der Rang der Matrix \mathbf{A} ist gleich der Raumdimension.

Gesucht ist die Darstellung des Vektors \mathbf{b} in \mathbb{R}^m als Kombination der Vektoren \mathbf{a}_i . Die Länge der Komponenten in Richtung jedes \mathbf{a}_i sind die Koeffizienten x^i . Diese Ausgangssituation lässt sich in Matrixform - entsprechend (G-1) - anschreiben:

$$\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{a}_i = \mathbf{b} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad n > m \quad (\text{G-5})$$

Es gibt unendlich viele Kombinationen an Koeffizienten x^i , die obige Gleichung erfüllen. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, ist eine Zusatzbedingung notwendig. Dabei wird verlangt, dass die Summe aller Koeffizienten x^i zum Quadrat ein Minimum ergibt. Das entspricht der Minimierung des Betrags von \mathbf{x} :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \right\} \quad (\text{G-6})$$

Geometrisch interpretiert wird mit Gleichung (G-6) der kürzeste Weg zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt des Vektors \mathbf{b} gesucht. Dieser Weg setzt sich aus geradlinigen Teilwegstrecken in Richtung der Vektoren \mathbf{a}_i (G-5) zusammen.

Diese Extremwertaufgabe wird in Form einer Lagrange'schen Funktion angeschrieben. Durch Ableitung nach den Unbekannten \mathbf{x} und den Lagrange'schen Multiplikatoren ergeben sich die linearen Gleichungen (G-7) und durch Auflösung dieser Gleichungen der Vektor \mathbf{x} mit den n Koeffizienten x^i :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (\text{G-7})$$

Das sich dabei ergebende Matrixprodukt erfüllt alle Bedingungen (G-2) und ist somit die Moore-Penrose-Pseudoinverse. Damit der Term $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ invertiert werden kann, müssen die Zeilenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig sein. Das ist durch die Bedingung $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ gewährleistet. Eine Zerlegung eines Vektors \mathbf{b} in \mathbb{R}^2 in drei Richtungen \mathbf{a}_i entsprechend der Bedingungen (G-6) und (G-5) ist in Bild G.1 dargestellt.

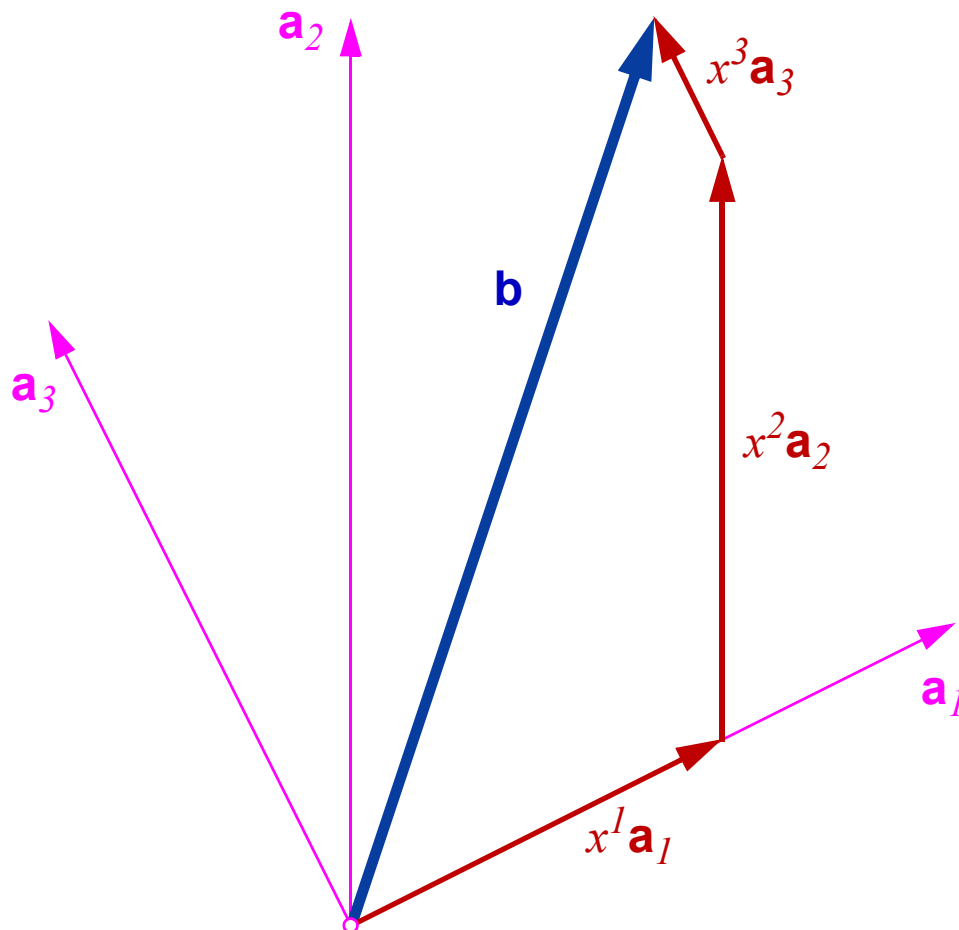


Bild G.1 Geometrische Interpretation der Moore-Penrose-Pseudoinversen; Fall 1 - Aufteilung eines Vektors \mathbf{b} in \mathbb{R}^m in $n > m$ Richtungen; hier z.B. $m = 2$, $n = 3$

G.2.2 Fall 2: $n < m$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$

Ausgangspunkt ist wiederum das Gleichungssystem (G-5). Diesmal soll aber die Anzahl n der Vektoren \mathbf{a}_i in \mathbb{R}^m kleiner als die Raumdimension m sein. Die Vektoren \mathbf{a}_i spannen also einen Unterraum in \mathbb{R}^m auf. Sofern \mathbf{b} nicht auch in diesem Subraum liegt, ist durch die Komponenten $x^i\mathbf{a}_i$ im Subraum nur eine Annäherung an \mathbf{b} möglich. Um eine eindeutige Näherungslösung anzugeben, wird die Zusatzbedingung eingeführt, dass der Differenzvek-

tor $\Delta \mathbf{b}$ zwischen \mathbf{b} und \mathbf{Ax} minimiert werden soll:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{b}^T \Delta \mathbf{b} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \right\} \quad (\text{G-8})$$

Die Ableitung der Minimalforderung nach \mathbf{x} ergibt die gesuchte Gleichung für \mathbf{x} . Auch dieses Matrizenprodukt erfüllt alle Bedingungen (G-2) und ist somit die Moore-Penrose-Pseudoinverse. Damit der Term $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ invertiert werden kann, müssen die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear unabhängig sein. Das ist durch die Bedingung $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ gewährleistet.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (\text{G-9})$$

Der minimierte Differenzvektor $\Delta \mathbf{b}$ steht aufgrund der obigen Minimierungsbedingung normal auf den von den \mathbf{a}_i Vektoren aufgespannten Subraum. Die Größen x^i sind die Koeffizienten des im Subraum liegenden Vektors \mathbf{b}_{\parallel} bezüglich der i.A. schiefwinkligen Basis \mathbf{a}_i .

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\perp} = \Delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} &= \left[\mathbf{J} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \right] \mathbf{b} = \mathbf{P}_{\perp} \mathbf{b} = (\mathbf{J} - \mathbf{AA}^+) \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_{\parallel} &= \left[\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \right] \mathbf{b} = \mathbf{P}_{\parallel} \mathbf{b} = \mathbf{AA}^+ \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{G-10})$$

Aufgrund dieser Orthogonalitätsbedingung sieht man sofort, dass sich die \mathbf{x} in (G-9) nicht ändern, wenn zu \mathbf{b} ein beliebiger Vektor in Richtung \mathbf{b}_{\perp} dazuaddiert wird:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ (\mathbf{b} + c \mathbf{b}_{\perp}) \quad (\text{G-11})$$

G.2.3 Allgemeiner Fall

Was ist in einem Fall zu tun, wenn keine der beiden obigen Sonderfälle auftritt? Dabei empfiehlt es sich, auf die spektrale Zerlegung aus Kap. G.1 zurückzugreifen. Die Eigenvektoren mit zugehörigen Nulleigenvektoren können so systematisch aussortiert werden. In den Subräumen, die von den Eigenvektoren mit nicht Nulleigenwerten aufgespannt werden, lassen sich entweder (G-7) oder (G-9) anwenden. Oder man verwendet gleich den allgemeinsten Zugang über die spektrale Zerlegung und invertiert alle Komponenten der Diagonalmatrix, die nicht null sind (G-3).

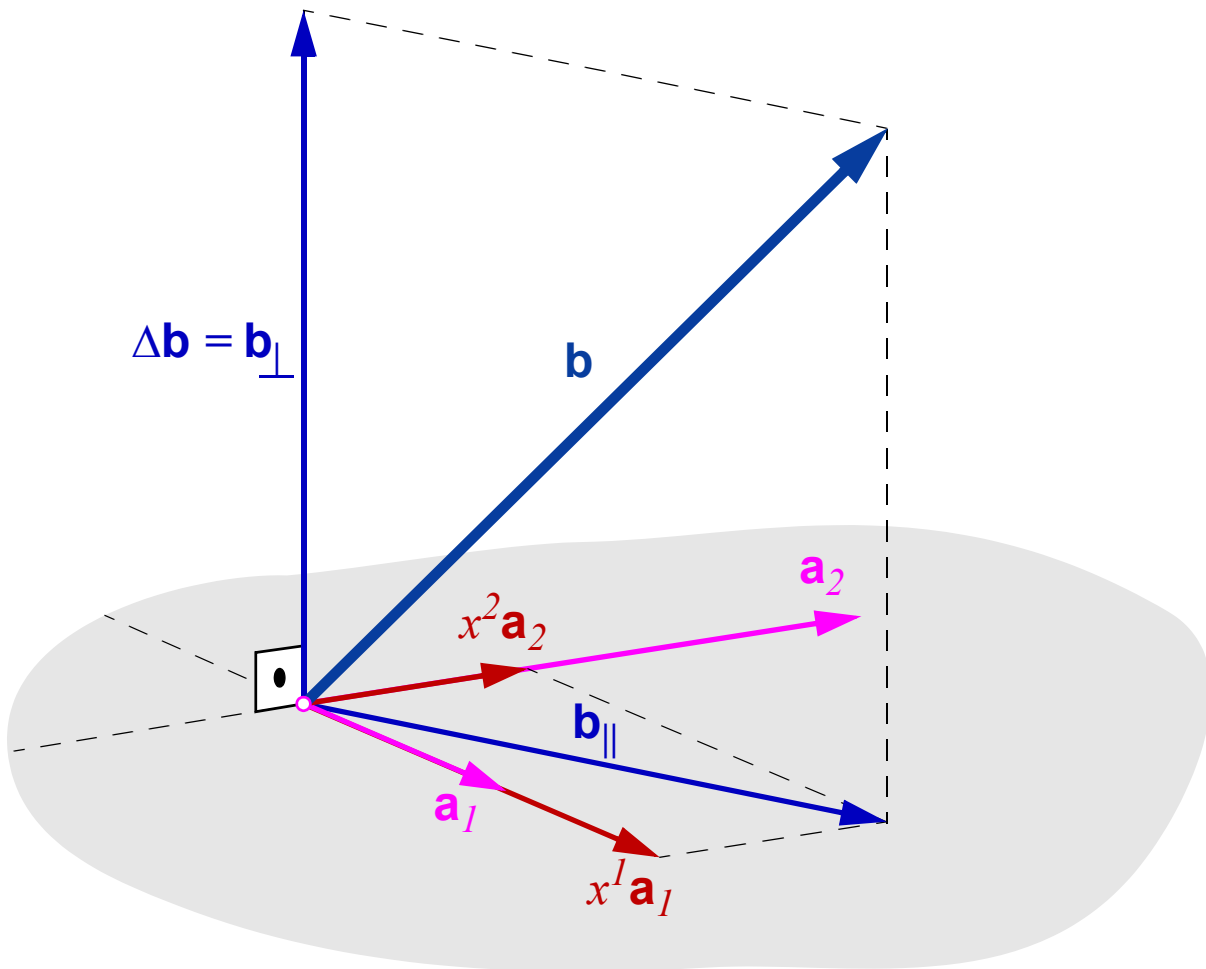
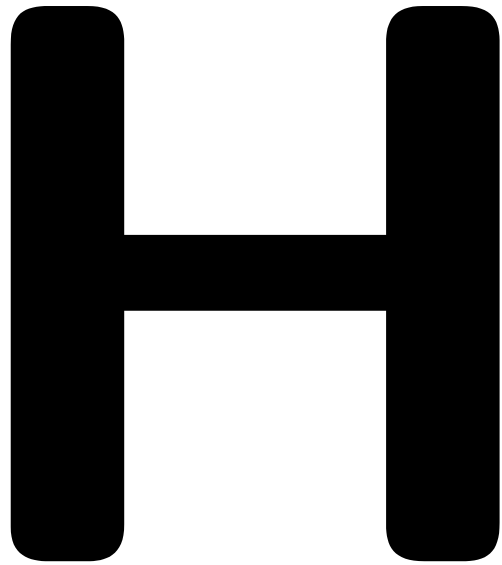


Bild G.2 Geometrische Interpretation der Moore-Penrose-Pseudoinversen; Fall 2 - Aufteilung eines Vektors \mathbf{y} in \mathbb{R}^m in $n < m$ Richtungen; hier z.B. $m = 3, n = 2$



**Ebener Stab mit
schrägem
Materialfaser-
verlauf**

H.2 Kinematik

H.2.1 Verschiebungsfeld

Die Verformungsgeometrie des Stabes wird durch die Stabachsverschiebungen u_0 und v_0 und die Querschnittsrotation β (=Verschiebungsparameter) beschrieben (Bild H.1).

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0(x) - y\beta(x) \\ v(x, y) &= v_0(x) \end{aligned} \quad (\text{H-1})$$

H.2.2 Verzerrungen

Die Normalverzerrung und die Schubverzerrung des Stabes sind:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} = u' = u_0' - y\beta' \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta + v_0' \end{aligned} \quad (\text{H-2})$$

Der Zusammenhang mit den drei Stabverzerrungsparametern $E_{11,0}$ (Normalverzerrung der Stabachse), κ (Krümmung) und der Stabschubverzerrung γ lauten in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \mathbf{A}(y)^T \mathbf{e}(x) \quad (\text{H-3})$$

Die Querschnittsinterpolationsmatrix \mathbf{A} ist von der Querschnittskoordinate y abhängig; die Stabverzerrungsparametermatrix \mathbf{e} ist eine Funktion in der Stablängskoordinate x . Mit der Differentialoperatormatrix \mathbb{B} wird der Zusammenhang zwischen den drei Verschiebungs- und den drei Stabverzerrungsparametern angegeben:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} ()' & 0 & 0 \\ 0 & ()' & -1 \\ 0 & 0 & -()' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbb{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{H-4})$$

$$\mathbb{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 ()' \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{H-5})$$

Der dicke Punkt in Gleichung (H-4) bedeutet „angewandt auf“.

H.3 Kinetik - Gleichgewicht

Für das vorgegebene Verschiebungsfeld mit den drei Verschiebungsparametern \mathbf{u} werden über das Prinzip der virtuellen Arbeit

- die zu den Stabverzerrungsparametern \mathbf{e} arbeitskonjugierten Schnittgrößen \mathbf{n} und
- die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen zusammen mit den Krafttrandbedingungen bestimmt.

H.3.1 Virtuelle innere Arbeit

H.3.1.1 Schnittgrößendefinition

Die innere virtuelle Arbeit ist

$$\delta W_{int} = -\int_V \mathbf{s}^T \delta \mathbf{e}_{3D} dV = -\int_{AL} \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{e} dA dx = -\int_L \mathbf{n}^T \delta \mathbf{e} dx \quad (\text{H-6})$$

mit dem Schnittgrößenvektor

$$\mathbf{n} = \int_A \mathbf{A} \mathbf{s} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{H-7})$$

Die Richtung der Normalkraft, der Querkraft und die Drehrichtung des Momentes (siehe Bild H.2) ergeben sich aus der Vozeichenkonvention der Spannungen S_{11} und S_{12} .

H.3.1.2 Partielle Integration des virtuellen Arbeitsausdruckes

Durch partielle Integration des Arbeitsausdruckes nach x ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= -\int_L \mathbf{n}^T \delta \mathbf{e} dx = -\int_L \mathbf{n}^T (\mathbb{B} \cdot \delta \mathbf{u}) dx = -\mathbf{n}^T \mathbf{B}_1 \delta \mathbf{u} \Big|_A^E + \int_L \delta \mathbf{u}^T (\tilde{\mathbb{B}}^T \cdot \mathbf{n}) dx = \\ &= -\delta \mathbf{u}_E^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_E + \delta \mathbf{u}_A^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_A + \int_L \delta \mathbf{u}^T (\tilde{\mathbb{B}}^T \cdot \mathbf{n}) dx \end{aligned} \quad (\text{H-8})$$

Der Gleichgewichtsdifferentialoperator ist

$$\tilde{\mathbb{B}}^T = -\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T ()' = \begin{bmatrix} ()' & 0 & 0 \\ 0 & ()' & 0 \\ 0 & 1 & -()' \end{bmatrix} \quad (\text{H-9})$$

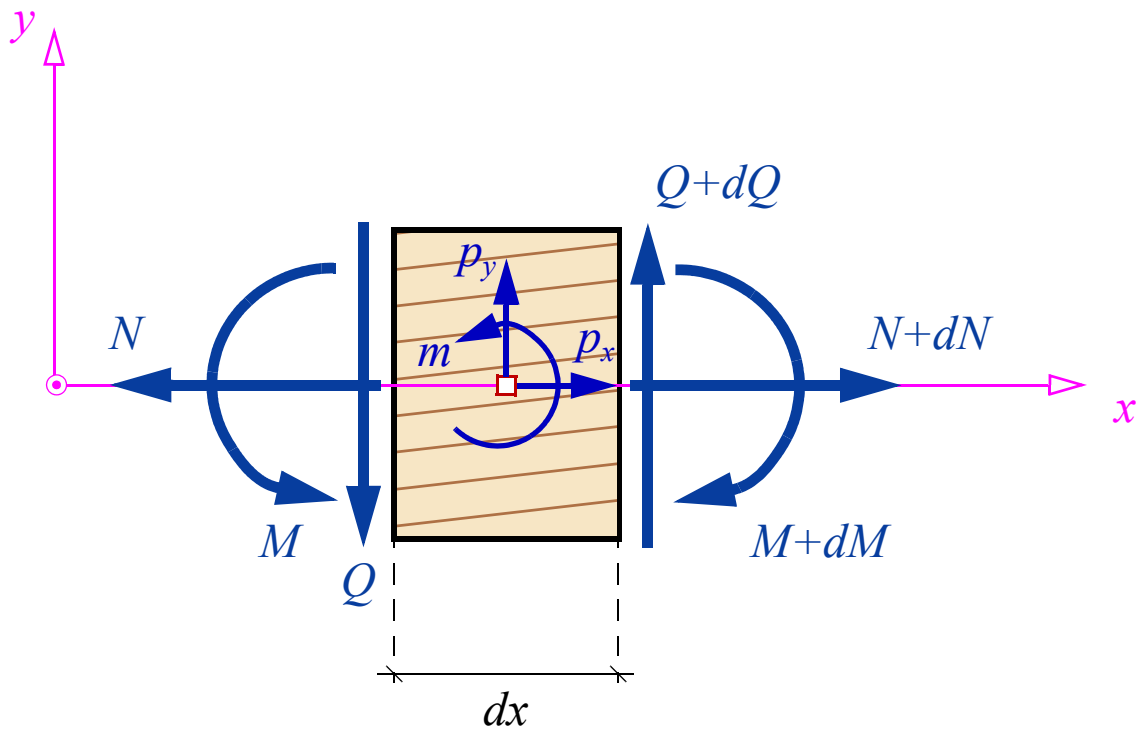


Bild H.2 Schnittgrößen am differentiellen Stabelement

H.3.2 Äußere virtuelle Arbeit

An den Stabrändern greifen die Kraftgrößen \mathbf{F}_A und \mathbf{F}_E an.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} F_{x,A} \\ F_{y,A} \\ F_{m,A} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_E = \begin{bmatrix} F_{x,E} \\ F_{y,E} \\ F_{m,E} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ m \end{bmatrix} \quad (\text{H-10})$$

Die positive Richtung der Kräfte F_x und F_y wird durch die positive Richtung der x - bzw. y -Koordinatenachse angegeben. Die positive Drehrichtung des Momentes F_m ist gegen den Uhrzeigersinn (Bild H.3). Zusätzlich greifen die Gleichlasten p_x , p_y und das Moment je Längeneinheit m an. Die äußere Arbeit ist:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{u}_A^T \mathbf{F}_A + \delta \mathbf{u}_E^T \mathbf{F}_E + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx \quad (\text{H-11})$$

H.3.3 Differentialgleichung des Gleichgewichts

Mit den Arbeitsausdrücken (H-8) und (H-11) ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = \int_L \delta \mathbf{u}^T (\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p}) dx + \delta \mathbf{u}_A^T (\mathbf{F}_A + \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_A) + \delta \mathbf{u}_E^T (\mathbf{F}_E - \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_E) = 0 \quad (\text{H-12})$$

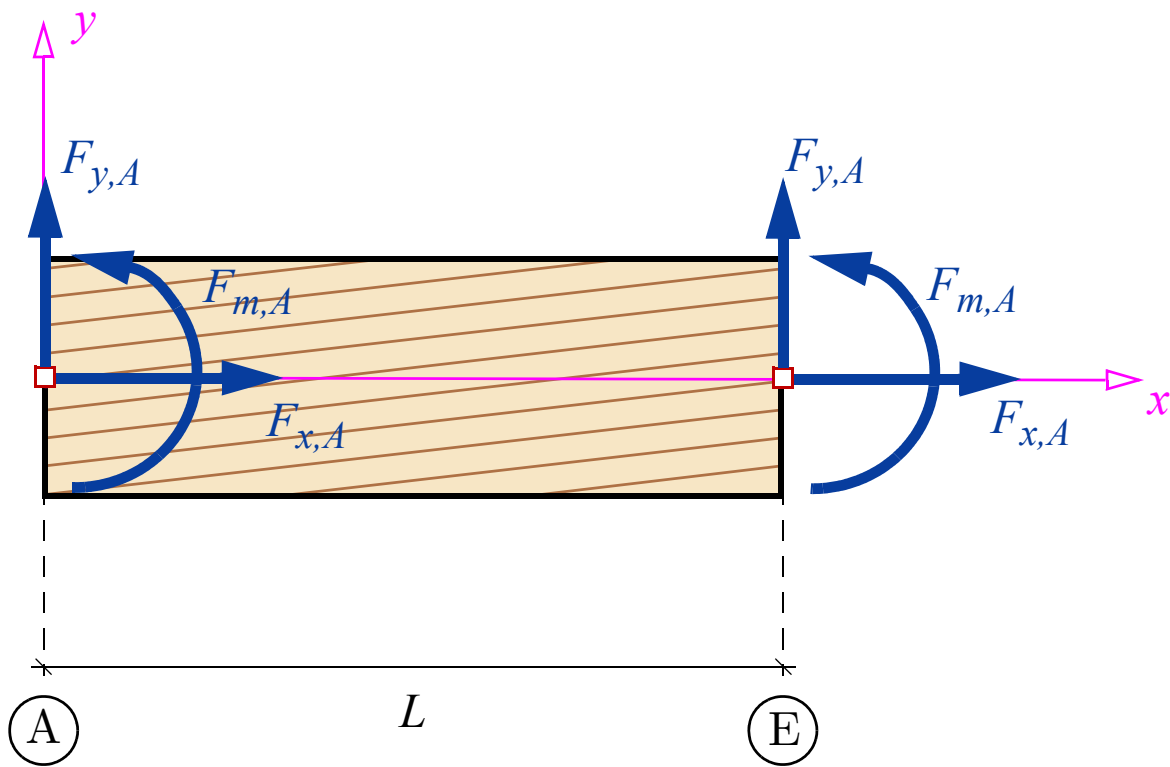


Bild H.3 äußeren Kraftgrößen am Stabanfang- und ende

und damit die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen einschließlich der Randbedingungen:

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \begin{cases} N' + p_x = 0 \\ Q' + p_y = 0 \\ Q - M' + m = 0 \end{cases}$$

(H-13)

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_A = \mathbf{0} \quad \begin{cases} F_{x,A} = -N_A \\ F_{y,A} = -Q_A \\ F_{m,A} = M_A \end{cases} \quad \mathbf{F}_E - \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_E = \mathbf{0} \quad \begin{cases} F_{x,E} = N_E \\ F_{y,E} = Q_E \\ F_{m,E} = -M_E \end{cases}$$

H.4 Konstitution

Das Material des Stabes ist linear-elastisch und orthotrop. Die Materialhauptachsen werden durch das orthonormierte $\{x_1', x_2', x_3'\}$ - Achsensystem gekennzeichnet. Die x_3 -Achse deckt sich mit der z -Achse. Als Besonderheit ist die x_1 -Materialhauptachse zur Stabachse geneigt; diese Schrägstellung wird durch den Winkel α angegeben. Nachfolgend wird die orthotrope 3D-Materialsteifigkeitsmatrix systematisch auf den Balkenspannungszustand reduziert.

H.4.1 Ebener Balkenspannungszustand

In der Querschnittsfläche wirken die Normalspannung S_{11} und die transversale Schubspannungskomponente S_{12} . Die verbleibenden Spannungskomponenten werden null gesetzt (= ebener Balkenspannungszustand). Die reduzierte Steifigkeitsmatrix lautet in diesem Fall

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{BSZ} \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} C_{BSZ,11} & C_{BSZ,12} \\ C_{BSZ,12} & C_{BSZ,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_\alpha & C \\ C & G_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{H-14})$$

mit den Steifigkeitskoeffizienten

$$\begin{aligned} \frac{E_\alpha}{E_L} &= \frac{1}{N_{BSZ}} \left(\frac{E_R}{E_L} (c^4 + s^4) + 2s^2 c^2 \left(-\frac{E_R}{E_L} + 2 \frac{G_{LR}}{E_L} \left(1 + \frac{E_R}{E_L} + 2 \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \nu_T \right) \right) \right) \\ \frac{G_\alpha}{E_L} &= \frac{1}{N_{BSZ}} \left(\frac{G_{LR}}{E_L} \left(\frac{E_R}{E_L} c^4 + s^4 \right) + s^2 c^2 \left(\frac{E_R}{E_L} - 2 \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \frac{G_{LR}}{E_L} \nu_T \right) \right) \\ \frac{C}{E_L} &= \frac{sc}{N_{BSZ}} \left(c^2 \left(\frac{E_R}{E_L} - 2 \frac{G_{LR}}{E_L} \left(\frac{E_R}{E_L} + \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \nu_T \right) \right) + s^2 \left(-\frac{E_R}{E_L} + 2 \frac{G_{LR}}{E_L} \left(1 + \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \nu_T \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{H-15})$$

dem Nennerterm

$$N_{BSZ} = \frac{E_R}{E_L} c^4 + 2s^2 c^2 \left(\sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \nu_T + 2 \frac{G_{LR} (1 - \nu_T^2)}{E_L} \right) + s^4 \quad (\text{H-16})$$

und den Abkürzungen $s = \sin(\alpha)$ und $c = \cos(\alpha)$.

H.4.2 Balkensteifigkeitsmatrix

Mit der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C}_{BSZ} (H-14), der Schnittgrößendefinition aus Gleichung (H-7) und dem Zusammenhang zwischen \mathbf{e}_{3D} und \mathbf{e} ergibt sich die Balkenmaterialsteifigkeitsmatrix \mathbf{C} , die die Stabverzerrungsparameter \mathbf{e} mit den Schnittgrößen \mathbf{n} verknüpft, zu:

$$\mathbf{n} = \int_A \mathbf{A} \mathbf{s} dA = \int_A \mathbf{A} \mathbf{C}_{BSZ} \mathbf{e}_{3D} dA = \left(\int_A \mathbf{A} \mathbf{C}_{BSZ} \mathbf{A}^T dA \right) \mathbf{e} = \mathbf{C} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{C} = \int_A \mathbf{A} \mathbf{C}_{BSZ} \mathbf{A}^T dA = \int_A \begin{bmatrix} E_\alpha & C & E_\alpha y \\ C & G_\alpha & C y \\ E_\alpha y & C y & E_\alpha y^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} E_\alpha A & CA & 0 \\ CA & G_\alpha A & 0 \\ 0 & 0 & E_\alpha J \end{bmatrix} \quad (\text{H-17})$$

Aufgrund des homogenen Querschnittsaufbaus und der Wahl der Stabachse durch den Schwerpunkt werden die Integrale mit y null.

H.5 Differentialgleichungen und Lösung

H.5.1 Zusammenfassung der Grundgleichungen und Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix

Die problembeschreibenden Differentialgleichungen sind die Gleichgewichtsgleichung (H-13), die Balkenmaterialsteifigkeitsmatrix (H-17) und kinematische Beziehung aus Gleichung (H-4):

$$\begin{aligned} \text{Diff. - Gl. :} \quad & \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{n} = \mathbf{C} \mathbf{e} \\ & \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{H-18})$$

$$\text{Randbedingungen :} \quad \mathbf{F}_A + \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_A = \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_E - \mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_E = \mathbf{0}$$

Das sind neun Gleichungen mit neun Unbekannten (Schnittgrößen \mathbf{n} , Verzerrungsparameter \mathbf{e} und Verschiebungsparameter \mathbf{u}). Durch Elimination von \mathbf{n} und \mathbf{e} verbleiben die Verschiebungsparameter \mathbf{u} als einzige Unbekannte des Differentialgleichungssystems:

$$\mathbb{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{K} = \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} E_\alpha A()'' & CA()'' & -CA()' \\ CA()'' & G_\alpha A()'' & -G_\alpha A()' \\ CA()' & G_\alpha A()' & E_\alpha J()'' - G_\alpha A() \end{bmatrix} \quad (\text{H-19})$$

Die Differentialoperatormatrix \mathbb{K} wird als Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix bezeichnet.

H.5.2 Homogene Lösung des Differentialgleichungssystems

Die homogene Lösung des Differentialgleichungssystems mit den sechs Integrationskonstanten ist:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ \frac{G_\alpha A}{6E_\alpha J} x^3 & \frac{x^2}{2} & 0 & -\frac{CA}{6E_\alpha J} x^3 & 1 & \left(x - \frac{G_\alpha A}{6E_\alpha J} x^3 \right) \\ 1 + \frac{G_\alpha A}{2E_\alpha J} x^2 & x & 0 & -\frac{CA}{2E_\alpha J} x^2 & 0 & -\frac{G_\alpha A}{2E_\alpha J} x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_{hom} \mathbf{c} \quad (\text{H-20})$$

Die Verzerrungsparameter \mathbf{e} sind:

$$\mathbf{e}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{G_\alpha A}{E_\alpha J} x & -1 & 0 & \frac{CA}{E_\alpha J} x & 0 & \frac{G_\alpha A}{E_\alpha J} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{hom} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} E_{11,0}(x) \\ \gamma(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} \quad (\text{H-21})$$

Die Schnittgrößenverläufe als Funktionen von x und der Integrationskonstanten lauten:

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{C} \mathbf{E}_{hom} \mathbf{c} = \mathbf{S}_{hom} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -CA & 0 & 0 & E_\alpha A & 0 & CA \\ -G_\alpha A & 0 & 0 & CA & 0 & G_\alpha A \\ -G_\alpha A x & -E_\alpha J & 0 & CA x & 0 & G_\alpha A x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} \quad (\text{H-22})$$

H.6 Berechnung der Steifigkeitsmatrix

H.6.1 Zusammenhang Randverschiebungen - Integrationskonstanten

Mit Gleichung (H-20) lässt sich der Zusammenhang zwischen den Verformungsgrößen am Stabanfang ($x = 0$) bzw. Stabende ($x = L$) und den Integrationskonstanten herstellen:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ \frac{G_\alpha AL^3}{6E_\alpha J} & \frac{L^2}{2} & 0 & -\frac{CAL^3}{6E_\alpha J} & 1 & \left(L - \frac{G_\alpha AL^3}{6E_\alpha J}\right) \\ 1 + \frac{G_\alpha AL^2}{2E_\alpha J} & L & 0 & -\frac{CAL^2}{2E_\alpha J} & 0 & -\frac{G_\alpha AL^2}{2E_\alpha J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}_{hom} \mathbf{c} \quad (\text{H-23})$$

H.6.2 Zusammenhang Randkräfte - Integrationskonstanten

Mit den Kräfte- und Momentenrandbedingungen aus Gleichung (H-18) und dem Schnittgrößenverlauf (H-22) folgt die Beziehung:

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA & 0 & 0 & -E_\alpha A & 0 & -CA \\ G_\alpha A & 0 & 0 & -CA & 0 & -G_\alpha A \\ 0 & -E_\alpha J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -CA & 0 & 0 & E_\alpha A & 0 & CA \\ -G_\alpha A & 0 & 0 & CA & 0 & G_\alpha A \\ G_\alpha AL & E_\alpha J & 0 & -CAL & 0 & -G_\alpha AL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}}_{hom} \mathbf{c} \quad (\text{H-24})$$

H.6.3 Steifigkeitsmatrix (dimensionsgleiche Form)

Mit den Gleichungen (H-23) und (H-24) ist der Zusammenhang zwischen den sechs Randverschiebungsgrößen und den sechs Randkraftgrößen, die Steifigkeitsmatrix, berechenbar:

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{S}}_{hom} \left(\hat{\mathbf{U}}_{hom} \right)^{-1} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{H-25})$$

In dimensionsgleicher Form (mit einem Sternchen gekennzeichnet) werden alle Verformungsgrößen auf die Dimension „Länge“ und alle Kraftgrößen auf die Dimension „Kraft“ gebracht. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* (Box H.1) wird additiv in einen Grundanteil \mathbf{K}_0^* und einen Zusatzanteil $\Delta\mathbf{K}^*$, der sich zufolge der Kopplungsgröße C ergibt, aufgespalten.

Steifigkeitsmatrix (in dimensionsgleicher Form)

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u}^* = (\mathbf{K}_0^* + \Delta \mathbf{K}^*) \mathbf{u}^* = \mathbf{F}^* \quad (\text{H-26})$$

$$\mathbf{u}^* = [u_A \quad v_A \quad \beta_A L \quad u_E \quad v_E \quad \beta_E L]^T \quad (\text{H-27})$$

$$\mathbf{F}^* = [F_{x,A} \quad F_{y,A} \quad F_{M,A}/L \quad F_{x,E} \quad F_{y,E} \quad F_{M,E}/L]^T$$

$$\mathbf{K}_0^* = \frac{E_\alpha J}{L^3} \frac{1}{(1+\mu)} \begin{bmatrix} \frac{1+\mu}{\lambda^2} & 0 & 0 & -\frac{1+\mu}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4+\mu & 0 & -6 & 2-\mu \\ -\frac{1+\mu}{\lambda^2} & 0 & 0 & \frac{1+\mu}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2-\mu & 0 & -6 & 4+\mu \end{bmatrix} \quad (\text{H-28})$$

$$\Delta \mathbf{K}^* = \frac{E_\alpha J}{L^3} \frac{\delta}{(1+\mu)} \begin{bmatrix} -\frac{C}{E_\alpha \lambda^2} & 12 & 6 & \frac{C}{E_\alpha \lambda^2} & -12 & 6 \\ 12 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ \frac{C}{E_\alpha \lambda^2} & -12 & -6 & -\frac{C}{E_\alpha \lambda^2} & 12 & -6 \\ -12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{i}{L} \quad \dots \text{Schlankheit mit} \quad i = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

$$\mu = \frac{12E_\alpha J}{G_\alpha A L^2} = 12\lambda^2 \frac{E_\alpha}{G_\alpha} \quad (\text{H-29})$$

$$\delta = \frac{C}{G_\alpha}$$

Box H.1 Steifigkeitsmatrix des ebenen schubweichen Stabes



Eine nützliche Matrixidentität

I.1 Gleichungssystem und Aufgabenstellung

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{A} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (\text{I-1})$$

Dabei ist \mathbf{A} eine invertierbare, quadratische (n,n) -Matrix. \mathbf{U} und \mathbf{V} sind rechteckige (n, m) -Matrizen. Die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{n} haben die Grösse $(n,1)$ und \mathbf{y} bzw. \mathbf{m} sind $(m,1)$ -Vektoren. Die (n,n) -Einheitsmatrix und die (m,m) -Nullmatrix sind durch \mathbf{J} bzw. $\mathbf{0}$ gekennzeichnet. Die linke Gleichungsseite wird abgekürzt mit \mathbf{A}^* bezeichnet. Das Gleichungssystem ist bei gegebenem \mathbf{n} und \mathbf{m} nach \mathbf{x} und \mathbf{y} aufzulösen und die Inverse von \mathbf{A}^* ist zu berechnen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (\text{I-2})$$

Die symbolische Auflösung des Gleichungssystems ist auf zwei Arten möglich. Dabei ergeben sich unterschiedliche Darstellungen für die Inverse von \mathbf{A}^* . Für die nachfolgende Darstellung der beiden Schreibvarianten ist zu beachten, dass die beiden Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} nicht quadratisch und somit für sich alleine nicht invertierbar sind.

I.2 Berechnung der Inversen - Darstellungsvariante 1

Durch Herausheben von \mathbf{x} in der ersten Zeile des Gleichungssystems (I-1) und anschließendes Einsetzen in die zweite Zeile, wird

$$\mathbf{y} = (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{n} - \mathbf{m}) \quad (\text{I-3})$$

bestimmt. Durch Rückeinsetzen dieses Ausdruckes in die erste Zeile von (I-1) ergibt den Ausdruck für

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left[\mathbf{n} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{m} \right] \quad (\text{I-4})$$

abhängig von den Vektoren \mathbf{n} und \mathbf{m} (I-4). Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Inverse von \mathbf{A}^* :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} & \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \\ (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} & -(\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \end{bmatrix}}_{(\mathbf{A}^*)^{-1}} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (\text{I-5})$$

1.3 Berechnung der Inversen - Darstellungsvariante 2

Wird die erste Zeile in (I-1) von links mit \mathbf{V}^T multipliziert und anschließend der Ausdruck $\mathbf{V}^T \mathbf{x}$ durch \mathbf{m} ersetzt, ergibt sich:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{V}^T \mathbf{n} - \mathbf{m} - \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \quad (\text{I-6})$$

Setzt man diesen Ausdruck für \mathbf{y} wiederum in die erste Zeile von (I-1) ein, kann diese Gleichung nach \mathbf{x} aufgelöst werden:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left(\mathbf{J} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \right) \mathbf{n} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{m} \quad (\text{I-7})$$

Die Abhängigkeit von \mathbf{y} von \mathbf{n} und \mathbf{m} , wird durch Rückeinsetzen von (I-7) in (I-6) erreicht. Damit ergibt sich die Inverse von \mathbf{A}^* in einer alternativen Darstellung zu (I-5):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left(\mathbf{J} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \right) & \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \\ (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \left(\mathbf{J} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left(\mathbf{J} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \right) \right) & -(\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \left(\mathbf{J} + \mathbf{V}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \right) \end{bmatrix}}_{(\mathbf{A}^*)^{-1}} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (\text{I-8})$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J} + \left(\mathbf{J} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \right) \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{A} \quad (\text{I-9})$$

I.4 Vergleich der Varianten und Identitätsnachweis

I.4.1 Vergleich: Variante 1 und 2

Die inversen Matrizen (I-5) und (I-8) müssen übereinstimmen. Damit ergeben sich durch Vergleich der einzelnen Komponenten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(-\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\left(\mathbf{J}-\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\right) \\
 \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1} \\
 (\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1} &= (\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\left(\mathbf{J}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\left(\mathbf{J}-\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\right)\right) \\
 (\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1} &= (\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\left(\mathbf{J}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\right)
 \end{aligned} \tag{I-10}$$

I.4.2 Nachweis der Identität

Mit der Gleichung (I-11) und der Anwendung der Sherman-Morrison-Woodbury-Identität auf (I-9) ergibt sich Gleichung (I-12). Durch abermalige Anwendung von (I-11) folgt aus (I-12) Gleichung (I-13). Mit diesen Gleichungen kann die vollständige Übereinstimmung der obigen Identitäten gezeigt werden.

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J} + \mathbf{A})(\mathbf{J} + \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{J} + \mathbf{A})\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{J} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{J} - \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tag{I-11}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \left[\tilde{\mathbf{A}} + (-\mathbf{U})(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A} \right]^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1} \left[\mathbf{J} - \mathbf{V}^T\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})^{-1} \right]^{-1} \mathbf{V}^T\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tag{I-12}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T - \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tag{I-13}$$

Wird (I-13) von rechts mit \mathbf{U} multipliziert, ergibt sich (I-14), womit auch die zweite Gleichung in (I-10) bewiesen ist. Einsetzen dieser Gleichung in den zweiten Term der rechten Gleichungsseite von (I-10) ergibt die linke Gleichungsseite, womit die Identität nachgewiesen ist. Setzt man die erste Gleichung (I-10) in die rechte Seite der dritten Gleichung in (I-10) ein und verwendet (I-11), ergibt sich die linke Seite der dritten Gleichung in (I-10). Durch Einsetzen von (I-14) und (I-11) in die linke Seite der vierten Gleichung in (I-10), ist auch die Richtigkeit dieser Identität nachgewiesen.

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{U} \tag{I-14}$$

I.5 Kompakte Darstellung - Zusammenfassung

Eine kompakte elegante Darstellung der Invarianten ergibt sich durch Kombination der Ausdrücke (I-8) und (I-5).

Ausgangssituation - Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{A} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (\text{I-15})$$

Inverse von \mathbf{A}^*

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{*-1})_{11} & (\mathbf{A}^{*-1})_{12} \\ (\mathbf{A}^{*-1})_{21} & (\mathbf{A}^{*-1})_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{I-16})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{*-1})_{11} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1} (\mathbf{J} - \mathbf{U}(\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (-\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{*-1})_{12} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I-17})$$

$$(\mathbf{A}^{*-1})_{21} = (\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T (\mathbf{J} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{*-1})_{11}) = (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{*-1})_{22} = -(\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{J} + \mathbf{V}^T \mathbf{A}(\mathbf{A}^{*-1})_{12}) = -(\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{U})^{-1}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{U}(\mathbf{V}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{A} \quad (\text{I-18})$$

Box I.1 Symbolische Invertierung des Gleichungssystems

J

Nichtlineare Programmierung - Penalty-Verfahren

J.1 Einleitung

Neben dem SQP-Verfahren (Kap. 9) gibt es eine Vielzahl an weiteren Berechnungsmethoden, um das anfänglich formulierte konvexe Optimierungsproblem (Kap. 9) unter Berücksichtigung vorgegebener nichtlinearer Zwangsgleichungen zu lösen. Eine Klasse davon sind sogenannte Penalty-Methoden.

Die Grundidee dabei ist folgende: Die zu minimierende Zielfunktion - hier die Funktion d - wird um einen Straf- bzw. Penalty-Term erweitert. Dieser Gleichungsterm gibt die Verletzung der Zwangsgleichungen bzw. Zwangsungleichungen an. Durch Hinzufügen des Penalty-Terms wird die Aufgabenstellung in eine Minimierungsaufgabe ohne Zwangsgleichungen - diese sind ja bereits in den Penalty-Term eingearbeitet - umformuliert. Diese Minimierungsaufgabe lässt sich z.B. mit einem Newton-Verfahren lösen. Der zum gewählten Penaltyparameter $\mu^{(k)}$ zugehörige Lösungspunkt ist $\mathbf{x}^{(k)}$. Im nächsten Schritt ($k+1$) wird der Penaltyparameter erhöht und die Minimierungsaufgabe neuerlich gelöst. Die Sequenz der Lösungspunkte $\mathbf{x}^{(k)}$ konvergiert zur gesuchten Lösung \mathbf{x}^* der anfänglich formulierten Minimierungsaufgabe.

Die Berechnungsprozedur ist eine Abfolge von Minimierungsaufgaben mit dem bzw. mehreren Penaltyparametern als steuernde Größe. Der Aufbau und Ablauf des Lösungsverfahrens hat somit eine enge Verwandtschaft mit einem einfachen Pfadverfolgungsalgorithmus, wie er z.B. bei der Berechnung von monoton steigenden nichtlinearen Last-Verformungskurven verwendet wird. Zwei Varianten aus dieser Klasse an Lösungsverfahren werden in diesem Abschnitt kurz dargestellt:

- die einfache Penalty-Methode (PM) und
- die Augmented-Lagrange-Penalty-Methode (ALPM).

Zuerst soll aber das bei beiden Verfahren benötigte Newton-Verfahren zur Bestimmung von Minima skizziert werden. Die strikte Konvexität der zu minimierenden Funktion garantiert, dass es sich bei dem Lösungspunkt um ein Minimum handelt.

J.2 Newton-Verfahren inklusive Line-Search

Zur Minimumsberechnung einer allgemeinen Funktion $f(\mathbf{x})$ ohne Zwangsgleichungen können verschiedene Verfahren, siehe z.B. Dietmaier (2006) oder Fletcher (1987), herangezogen werden. Aufgrund der sehr guten lokalen Konvergenzeigenschaften wird in dieser Arbeit das Newton-Verfahren verwendet. Um globale Konvergenz zu erreichen, wird diese Methode um ein Line-Search-Verfahren erweitert.

J.2.1 Elementares Newton-Verfahren

Gegeben ist ein Startwert $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0$. Die Funktion f wird lokal um den gegebenen Punkt $\mathbf{x}^{(k)}$ mittels Taylor-Reihenentwicklung durch eine quadratische Funktion in $\Delta\mathbf{x}$ angenähert:

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^{(k)}) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \right)^T \Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^T \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \Delta\mathbf{x} \quad (\text{J-1})$$

Die Lage des Minimums dieser genäherten quadratischen Funktion ist:

$$\Delta\mathbf{x}^{(k)} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \quad (\text{J-2})$$

Anschließend wird vom neuen Startwert $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}$ aus die Prozedur so lange wiederholt, bis ein Minimumspunkt erreicht ist, d.h., das Abbruchkriterium erfüllt ist.

J.2.2 Erweiterung um ein Line-Search-Verfahren

Die obige Prozedur konvergiert nur gegen eine Lösung, wenn der Berechnungsstartwert im Konvergenzbereich liegt. Um diese Konvergenzschwäche zu beheben, wird zusätzlich ein Line-Search-Verfahren in die Berechnung inkludiert. Zuerst wird kontrolliert, ob beim Vorschreiten von $\mathbf{x}^{(k)}$ ausgehend in Richtung $\Delta\mathbf{x}$, die Funktion f abnimmt; $f(\mathbf{x}^{(k+1)})$ muss kleiner als $f(\mathbf{x}^{(k)})$ sein. Ist das der Fall, ist gewährleistet, dass die Funktion f abnimmt und man sich auf ein Minimum zubewegt. Trifft das nicht zu, wird ein exaktes Line-Search-Verfahren entlang der Verbindungslinie von $\mathbf{x}^{(k)}$ nach $\mathbf{x}^{(k+1)}$ aktiviert:

$$\min \left\{ f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{S}) \right\} = f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{\min} \mathbf{S}) \quad (\text{J-3})$$

Die Suchrichtung \mathbf{S} ist $\Delta\mathbf{x}$ aus (J-2). Zur Minimierung wird hier das Verfahren von Brent verwendet. Als Startwert für den nächsten Newton-Schritt wird $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} + \alpha_{\min} \mathbf{S}$ gewählt.

J.2.3 Berechnungsablauf

Die Funktion zur Minimierungsberechnung wird mit NewtonPlus bezeichnet. Damit wird ausgedrückt, dass die Newton-Methode um ein Line-Search-Verfahren erweitert wurde.

$$[\mathbf{x}_{min}, iter] = \text{NEWTONPLUS_FUNC}(\mathbf{x}_0, maxiter, f)$$

IN: $\mathbf{x}_0, maxiter, f$

OUT: $\mathbf{x}_{min}, iter$

0. Initialisiere Startwerte

$$k = 0$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0,$$

$$f^{(k)} = f(\mathbf{x}^{(k)}),$$

$$f_{\mathbf{x}}^{(k)} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}}$$

1. Berechne Suchrichtung \mathbf{S}

$$f_{\mathbf{xx}}^{(k)} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}}$$

$$\mathbf{S} = -\left(f_{\mathbf{xx}}^{(k)}\right)^{-1} f_{\mathbf{x}}^{(k)}$$

2. Line-Search-Verfahren

compute

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{S}$$

$$f^{(k+1)} = f(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

IF $f^{(k+1)} > f^{(k)}$

Exaktes Line-Search-Verfahren

$$\alpha_{min} \leftarrow f_{min} = \min \left\{ f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{S}) \right\}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{min} \mathbf{S}$$

$$f^{(k+1)} = f(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

ENDIF

Box J.1 Newton-Methode mit Line-Search-Verfahren

3. Konvergenzkontrolle/Abbruchkriterium

compute

$$f_{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k+1)}}$$

IF $f_{\mathbf{x},i}^{(k+1)} < RTOL$ for all i **OR** $k+1 = maxiter$ $\mathbf{x}_{min} = \mathbf{x}^{(k+1)}$, $iter = k + 1$, **EXIT****ELSE** $k \leftarrow k+1$, **GOTO 1****ENDIF**

Box J.1 Newton-Methode mit Line-Search-Verfahren

Die Berechnung kann auf zwei Arten abgebrochen werden:

- (i) Ein regulärer Abbruch findet statt, wenn das Minimum erreicht ist und die Komponenten des Funktionsgradienten eine Toleranzschwelle $RTOL$ unterschreiten.
- (ii) Zur Absicherung kann die Berechnung aber auch abgebrochen werden, wenn nach einer vorgegebenen, maximalen Iterationsanzahl $maxiter$ kein Minimumspunkt gefunden wurde.

J.3 Penalty-Methode (PM)

J.3.1 Penaltyfunktion

Die Penaltyfunktion

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{x}, \mu) = \mathcal{d}(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{W}} [F_i(\mathbf{x})]^2 \quad \mathcal{W} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}) > 0\} \quad (\text{J-4})$$

besteht aus der quadratischen Zielfunktion \mathcal{d} und dem Penalty-Term, der die Überschreitung der Zwangsungleichungen angibt und dem Penaltyparameter μ , der die Größe des Strafterms steuert. Aus den N Zwangsungleichungen F_i sind nur jene enthalten, die beim aktuellen Punkt \mathbf{x} größer als null sind. Diese werden im Set \mathcal{W} zusammengefasst.

Beide Funktionsbestandteile sind konvex; da aber \mathcal{d} strikt konvex ist, ist \mathcal{L}_p ebenso strikt konvex. Damit hat die Funktion \mathcal{L}_p ein eindeutiges Minimum, dessen Lage \mathbf{x} von der Höhe des Penaltyparameters μ abhängt: Ist μ null, liegt das Minimum beim Aufpunkt \mathbf{x}_A . Geht μ gegen unendlich, nähert sich der Minimumspunkt dem gesuchten Lösungspunkt \mathbf{x}^* an. Alle Penaltywerte zwischen null und unendlich ergeben somit eine kontinuierliche Punktfolge außerhalb des konvexen Gebietes \mathbb{E} , die sich vom Aufpunkt \mathbf{x}_A dem Lösungspunkt \mathbf{x}^* nähert. Aufgrund der Näherung von außerhalb des konvexen Gebildes an die Lösung, werden solche Verfahren *exterior* Penalty-Verfahren genannt.

J.3.2 Exkurs: mechanische Interpretation der Penaltyfunktion

Die Penaltyfunktion lässt sich mechanisch-physikalisch als eine negative Potentialfunktion eines konservativen Kraftfeldes, die sich wiederum additiv aus zwei Potentialfunktionen zusammensetzt, interpretieren. Die erste Potentialfunktion Π_1 ist die negative Abstandsfunktion \mathcal{d} . In Bild 6.6 sind die Äquipotentiallinien dieser quadratischen und strikt konvexen Funktion dargestellt. Die Potentialfunktion Π_2 ist konvex und hat die besondere Eigenschaft, dass sie im Bereich \mathbb{E} , dort wo per definitionem alle Funktionen F_i null bzw. negativ sind, null ist und mit der Entfernung von \mathbb{E} - aufgrund des negativen Vorzeichens - stetig abnimmt. Diese Abnahme ist durch den Parameter μ steuerbar.

$$\Pi(\mathbf{x}, \mu) = \Pi_1(\mathbf{x}) + \Pi_2(\mathbf{x}, \mu) \quad \Pi_1 = -\mathcal{d}(\mathbf{x}), \quad \Pi_2 = -\frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{W}} [F_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{J-5})$$

Die zu den beiden Potentialen zugehörigen Kraftfelder lassen sich durch Ableitung nach \mathbf{x} bestimmen:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial \mathbf{x}} \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{D}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_2 = \mu \sum_{i \in \mathcal{W}} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} F_i. \quad (\text{J-6})$$

Wird ein als Punkt aufgefasster Körper (d.h., der einzige zur Beschreibung der Bewegung des Körpers relevante Punkt ist der Massenmittelpunkt) dem ersten Kraftfeld ausgesetzt, kommt er bei \mathbf{x}_A in eine stabile Gleichgewichtslage. Wirkt nur das zweite Kraftfeld, sind alle Punkte \mathbf{x} des Bereiches \mathbb{E} (indifferente) Gleichgewichtslagen. Gleichgewicht ist erreicht, wenn die Ableitung des Potentialfeldes null ist oder anders formuliert: Wenn das Potential einen stationären Punkt hat. Wenn beide Kraftfelder zeitgleich wirken, findet der Körper eine stabile Gleichgewichtslage zwischen dem Punkt \mathbf{x}_A und dem konvexen Raumbereich \mathbb{E} . Die Stabilität der Gleichgewichtslage lässt sich durch die zweite Ableitung des Gesamtpotentials beurteilen. Da diese aufgrund der strikten Konvexität von Π_1 stets positiv definit ist, herrscht immer stabiles Gleichgewicht. Die Intensität des zweiten Kraftfeldes lässt sich mit dem Parameter μ steuern. Hebt man den Parameter μ von null ausgehend sehr langsam stetig an, ergibt sich eine Abfolge an Gleichgewichtszuständen des Körpers, die vom Punkt \mathbf{x}_A ausgeht und sich auf den Bereich \mathbb{E} zubewegt. Je größer μ ist, desto näher an \mathbb{E} befindet sich die Gleichgewichtslage.

J.3.3 Berechnungsablauf

Als Startwert für die Berechnung wird der Aufpunkt $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_A$, der außerhalb des Gebietes \mathbb{E} liegen muss, gewählt. Der zugehörige Penaltyparameter ist $\mu^{(k)} = 0$. Es wird nun der Penaltyparameter auf den Wert $\mu^{(k+1)}$ erhöht und der zugehörige Minimumspunkt $\mathbf{x}^{(k+1)}$ der Funktion $\mathcal{L}_P^{(k+1)}$ berechnet. In Box J.2 ist als Anfangswert für $\mu^{(k+1)}$ drei angegeben. Um das Minimum mit dem Newton-Verfahren zu bestimmen, werden die erste und die zweite Ableitung von \mathcal{L}_P benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x}} + \mu \sum_{i \in \mathcal{W}} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} F_i \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_P}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} + \mu \sum_{i \in \mathcal{W}} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{J-7})$$

Die zweite Ableitung nach \mathbf{x} an Stellen, an denen eine der N Zwangsgleichung $F_i(\mathbf{x})$ null wird, ist diskontinuierlich. Kann das zu Problemen bei der Anwendung des Newton-Verfahrens führen?

Im Allgemeinen ist das ein geringeres Problem, da durch das Line-Search-Verfahren eine zusätzliche Stabilisierung zustande kommt. Am massivsten sind die Berechnungsschwierigkeiten, wenn der Minimumspunkt in so einer Diskontinuitätsstelle liegt; das Newton-Verfahren ist von seiner Grundidee nicht fähig das Minimum zu bestimmen. Das Line-Search-Verfahren - die Methode nach Brent arbeitet ohne Funktionsableitungen - übernimmt die Minimumspunktbestimmung, was aber zu einer erheblichen und nicht gewünschten Entschleunigung der Rechnung führen kann.

Ist der Minimumspunkt gefunden, wird kontrolliert, ob das Abbruchkriterium erfüllt ist und ob man nahe genug an die Lösung \mathbf{x}^* gelangt ist. Ist das nicht der Fall, wird der Pe-

naltypparameter abermals erhöht und der zugehörige Minimalpunkt berechnet. Man erhält mit dieser Vorgehensweise eine diskrete von \mathbf{x}_A ausgehende Punktfolge $\mathbf{x}^{(k)}$, die sich dem Lösungspunkt \mathbf{x}^* annähert. In den Berechnungsablauf kann zusätzlich eine Berechnungssteuerung inkludiert werden, die - je nach lokalen Gegebenheiten - eine automatische Anpassung des Penaltyparameters vornimmt. Als Beurteilungsgröße für die Erhöhung oder Verringerung von μ dient die benötigte Iterationszahl, um das Newton-Verfahren abzuschließen. Wird bei $\mu^{(k+1)}$ nach einer festgelegten Anzahl *maxiter* von Iterationsschritten im Newton-Verfahren kein Lösungspunkt $\mathbf{x}^{(k+1)}$ gefunden, wird der Penaltyparameter verkleinert - wobei dieser aber selbstverständlich immer noch größer als $\mu^{(k)}$ sein muss - und das Newton-Verfahren abermals gestartet. In Box J.2 ist dafür der Mittelwert von $\mu^{(k)}$ und $\mu^{(k+1)}$ gewählt worden. Sind zur $\mathbf{x}^{(k+1)}$ Bestimmung nur sehr wenige Newton-Iterationsinkremente (*iter* < *miniter*) nötig, kann der Penaltyparameter für das nächste Berechnungsinkrement stärker als üblich erhöht (in Box J.2 um den Faktor 10 statt um den üblichen Faktor 3) werden. Als zusätzliche Erweiterung kann bei Bedarf auch festgelegt werden, dass z.B. diese Minimaliterationszahl mehrere, aufeinander folgende Male unterschritten wird, bevor es zu der markanten Erhöhung des Penalty-Parameters kommt.

Die in Box J.2 angegebenen Parameter zur Berechnungssteuerung sind selbstverständlich auch anders vorgebar.

```
[  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda$ ,  $\mathcal{A}$  ] = PM_FUNC( $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $F_i$ )
```

```
IN:  $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $F_i$ 
```

```
OUT:  $\mathbf{x}$ 
```

0. Kontrolle ob Aufpunkt \mathbf{x}_A in \mathbb{E} liegt

```
compute  $\mathcal{F}$ :
```

```
 $\mathcal{F} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}_A) > 0\}$ 
```

```
IF  $\mathcal{F} \neq \{ \}$ 
```

```
  GOTO 1
```

```
ELSE
```

```
   $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$ ,  $\lambda = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{A} = \{ \}$ ,
```

```
  EXIT
```

```
ENDIF
```

Box J.2 Penalty-Methode mit Berechnungssteuerung

1. Initialisiere Startwerte

$$k = 0$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_A$$

$$\mu^{(k)} = 0$$

$$\mu^{(k+1)} = 3$$

2. Berechne $\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \min\{\mathcal{L}_p^{(k+1)}\}$

compute

$$\mathcal{L}_p^{(k+1)} = \mathcal{L}_p(\mu^{(k+1)})$$

$$[\mathbf{x}^{(k+1)}, \text{iter}] = \text{NEWTONPLUS_FUNC}(\mathbf{x}^{(k)}, \text{maxiter}, \mathcal{L}_p^{(k+1)})$$

3. Berechnungssteuerung I - Schrittweitenverkleinerung

IF $\text{iter} = \text{maxiter}$

$$\mu^{(k+1)} = 0.5(\mu^{(k)} + \mu^{(k+1)}), \text{GOTO } 2$$

ELSE

GOTO 4

END

4. Konvergenzkontrolle/Abbruchkriterium

IF $F_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) < RTOL$ for all i

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)},$$

$$\mathcal{A} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid 0 \leq F_i(\mathbf{x}) < RTOL\}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = [\mathbf{G}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})]^+ \mathbf{D}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x})$$

EXIT

ELSE

$k \leftarrow k+1$, **GOTO 5**

ENDIF

5. Berechnungssteuerung II - Schrittweitenvergrößerung

IF $\text{iter} < \text{miniter}$

$$\mu^{(k+1)} = 10 \mu^{(k)}, \text{GOTO } 2$$

ELSE

$$\mu^{(k+1)} = 3 \mu^{(k)}, \text{GOTO } 2$$

END

J.3.4 Kritik

In der Nähe der Lösung konvergiert dieses Verfahren immer schlechter. Die Lösung wird nur angenähert und nie erreicht, da dabei der Penaltyparameter unendlich groß sein müsste. Außerdem wird die Matrix der zweiten Ableitung von \mathcal{L}_p nach \mathbf{x} bei sehr hohem Penaltyparameter immer schlechter konditioniert. Diese Tatsache macht das Verfahren - trotz seiner konzeptionellen Einfachheit - sehr ineffizient. Weiters hat man nach dem Berechnungsdurchlauf nur den Lösungspunkt \mathbf{x}^* bestimmt; das aktive Set \mathcal{A} und die Lagrange'schen Parameter müssen erst durch eine Nachlaufrechnung bestimmt werden. All diese Gründe machen im Vergleich zum SQP-Verfahren die Penalty-Methode zu keiner praktikablen Lösungsmethode. Die oben gezeigte Vorgehensweise ist aber die Basis für die im nächsten Kapitel dargestellte Augmented-Lagrange-Penalty-Methode.

J.4 Augmented-Lagrange-Penalty-Methode (ALPM)

J.4.1 Augmented-Lagrange-Penaltyfunktion

Wie bereits der Titel besagt, besteht die Augmented-Lagrange-Penalty-Funktion aus einer Lagrange'schen Funktion, die um einen Strafterm - wie er bereits bei der PM verwendet wurde - erweitert wird:

$$\mathcal{L}_{ALP}(\mathbf{x}, \lambda^i, \mu) = \mathcal{d}(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{W}} \lambda^i F_i(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{W}} [F_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{J-8})$$

Das working Set \mathcal{W} berechnet sich aus:

$$\mathcal{W} = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid (\lambda^i + \mu F_i) > 0\} \quad (\text{J-9})$$

Wie es zu dieser Gleichung kommt, ist über die Einführung von Schlupfvariablen zeigbar. Ansätze zur Herleitung finden sich detaillierter z.B. in Rao (2009) auf S. 462. Das Vorgehen ist nahezu deckungsgleich mit der zuvor gezeigten PM. Der Penaltyparameter μ und die Lagrange'schen Parameter λ^i werden vorgegeben und über das Newton-Verfahren das Minimum bestimmt. Für das Newton-Verfahren werden die erste und die zweite Ableitung von \mathcal{L}_{ALP} benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{ALP}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i \in \mathcal{W}} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} (\lambda^i + \mu F_i) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ALP}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i \in \mathcal{W}} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} (\lambda^i + \mu F_i) + \mu \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{J-10})$$

Die Sequenz an Minimalpunktbestimmungen konvergiert gegen die gesuchte Minimalbedingung, wobei - wie bei der PM - als Anfangspunkt \mathbf{x}_A gewählt wird und die diskrete Punktsequenz $\mathbf{x}^{(k)}$ sich dem Lösungspunkt \mathbf{x}^* auf \mathbb{E} annähert.

Wo sind aber die Unterschiede und Vorteile der ALPM zur PM? Der wesentliche Unterschied liegt in der zusätzlichen Einführung der Lagrange'schen Parameter λ^i . Dadurch muss bei der Näherung an den Lösungspunkt der Penaltyparameter μ nicht mehr unendlich groß werden, was wiederum die schlechte Konditionierung der zweiten Ableitung bei der PM in Lösungsnähe beseitigt. Als Ergebnisgrößen wird nicht nur der Lösungspunkt \mathbf{x}^* bestimmt, als weitere Ergebnisgrößen werden die Lagrange'schen Parameter λ^i berechnet. Aus diesen lässt sich das aktive Set \mathcal{A} bestimmen. Wie werden aber die Parameter λ^i bestimmt? Wird das Berechnungskrement k abgeschlossen, hat die Funktion $\mathcal{L}_{ALP}^{(k)}$ ein Minimum erreicht:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ALP}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{d}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} + \sum_{i \in \mathcal{W}^{(k)}} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \underbrace{\left(\lambda^{i,(k)} + \mu^{(k)} F_i^{(k)} \right)}_{>0} = \mathbf{0} \quad (\text{J-11})$$

Der Faktor mit dem Lagrange'schen Parametern und dem Penalty-Parameter ist per definitionem immer größer als null. Vergleicht man diese Minimalbedingung mit der gesuchten Bedingung aus (9-14) bzw. (9-15), sieht man, dass der positive Term in der Klammer gegen die Lagrange'sche Parameter im Lösungspunkt konvergiert. Damit lässt sich die Updatebedingung für alle λ^i für das nachfolgende Inkrement $k+1$ gewinnen:

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Update: } \lambda^{i,(k+1)} &= \lambda^{i,(k)} + \mu^{(k)} F_i^{(k)} > 0 & i \in \mathcal{W}^{(k)} \\ \lambda^{i,(k+1)} &= \max \left[0, \lambda^{i,(k)} + \mu^{(k)} F_i^{(k)} \right] & \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (\text{J-12})$$

Mit diesem Update der Lagrange'schen Parameter kann der Penaltyparameter wieder auf null zurückgesetzt werden, da

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ALP}(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{i,(k)}, \mu^{(k)})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ALP}(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{i,(k+1)}, \mu = 0)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (\text{J-13})$$

gilt. Im Unterschied zur PM muss also in der ALPM der Penaltyparameter nicht von Inkrement zu Inkrement ansteigen.

J.4.2 Berechnungsablauf

Als Startwert (Inkrement $k = 0$) für die Berechnung wird der Aufpunkt $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_A$ gewählt; der zugehörige Penaltyparameter $\mu^{(k)}$ und die Lagrange'schen Parameter $\lambda^{i,(k)}$ sind null. Im ersten Berechnungsschritt wird nur der Penaltyparameter $\mu^{(k+1)}$ erhöht - die Parameter $\lambda^{i,(k+1)}$ aus der Updategleichung bleiben zunächst null - und anschließend der zugehörige Minimumspunkt $\mathbf{x}^{(k+1)}$ berechnet. Damit deckt sich der erste Berechnungsschritt der ALPM mit dem der PM. Nach der Minimumspunktberechnung mit dem Newton-Verfahren wird abkontrolliert, ob sich der berechnete Punkt in Lösungsnähe befindet. Ist das nicht der Fall, wird der Penaltyparameter erhöht und die Lagrange'schen Parameter upgedatet. Grundsätzlich ist nur einer der beiden Erhöhungen notwendig, hier sollen aber beide durchgeführt werden, um die Tendenz zur Lösung zu erhöhen. Zusätzlich wird auch bei diesem Verfahren eine Berechnungssteuerung für den Penaltyparameter μ eingebaut. Der Ablauf ist ähnlich wie bei der PM, wird nach einer gewissen Anzahl von Newton Iterationsschritten kein Minimumspunkt gefunden, wird der Penaltyparameter um die Hälfte reduziert. Hier besteht ein wesentlicher Unterschied zur Steuerung bei der PM: Nachdem die Lagrange'schen Parameter bereits upgedatet wurden, kann man bei jedem Inkrement $k+1$ wiederum von null starten. Damit kann $\mu^{(k+1)}$ kleiner als $\mu^{(k)}$ sein. Das zeigt sich in der Schrittweisenreduzierung, indem nicht mehr der Mittelwert von $\mu^{(k+1)}$ und $\mu^{(k)}$

verwendet wird, sondern $\mu^{(k+1)}$ solange halbiert wird, bis die Newton-Prozedur ein Minimum mit einer geringeren Iterationszahl als *maxiter* findet. Bei einer sehr geringen Anzahl von Newton-Iterationen wird der Penaltyparameter markanter als üblich erhöht.

J.4.3 Vergleich mit der PM und dem SQP-Rechenverfahren

Mit den wenigen konzeptionellen Eigenheiten und Modifikationen der Augmented-Lagrange-Penalty-Methode lassen sich die Ineffizienzen der Penalty-Methode beseitigen. Bereits mit einem moderat großen Penaltyparameter lässt sich eine Lösung bestimmen. Weiters werden im Berechnungsverlauf die Lagrange'schen Parameter λ^i und das aktive Set \mathcal{A} mitberechnet. Die ALPM läuft mit der inkludierten Berechnungssteuerung enorm robust ab, trotzdem ist diese Methode im Vergleich zum SQP-Verfahren bereits bei dem im Rahmen dieser Arbeit ausgeführten Programm merklich langsamer. Eine Ursache liegt in der Notwendigkeit die zweite Ableitung der Zwangsgleichungen F_i in der ALPM um einiges öfter berechnen zu müssen als beim SQP-Verfahren.

```
[ x, λ, A ] = ALPM_FUNC(xA, D, Fi)
```

```
IN: xA ∈ ℝ, D, Fi
```

```
OUT: x, λ, A
```

0. Kontrolle ob Aufpunkt \mathbf{x}_A in \mathbb{E} liegt

```
compute F:
```

```
F = {  $i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid F_i(\mathbf{x}_A) > 0$  }
```

```
IF F ≠ { }
```

```
    GOTO 1
```

```
ELSE
```

```
     $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{A} = \{ \}$ ,
```

```
    EXIT
```

```
ENDIF
```

1. Initialisiere Startwerte

```
 $k = 0$ 
```

```
 $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_A$ 
```

```
 $\mu^{(k)} = 0$ 
```

```
 $\lambda^{i(k)} = 0$ 
```

```
 $\mu^{(k+1)} = 3$ 
```

2. Berechne $\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \min \{ \mathcal{L}_{ALP}^{(k+1)} \}$

compute

$$\lambda^{i,(k+1)} = \max \left[0, \lambda^{i,(k)} + \mu^{(k)} F_i^{(k)} \right] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\mathcal{L}_{ALP}^{(k+1)} = \mathcal{L}_{ALP} \left(\mu^{(k+1)}, \lambda^{i,(k+1)} \right)$$

$$[\mathbf{x}^{(k+1)}, \text{iter}] = \text{NEWTONPLUS_FUNC}(\mathbf{x}^{(k)}, \text{maxiter}, \mathcal{L}_{ALP}^{(k+1)})$$

3. Berechnungssteuerung I: Schrittweitenverkleinerung

IF $\text{iter} = \text{maxiter}$

$$\mu^{(k+1)} = 0.5 \mu^{(k)}, \text{GOTO } 2$$

ELSE

GOTO 4

END

4. Konvergenzkontrolle/Abbruchkriterium

compute

$$F_i^{(k+1)} = F_i(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

$$\mathbf{G}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \lambda^{1,(k+1)} \\ \lambda^{2,(k+1)} \\ \vdots \\ \lambda^{N,(k+1)} \end{bmatrix}$$

IF $F_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) < RTOL$ for all i **AND** $\left| \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_A) + \mathbf{G}^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} \right| < RTOL$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}, \mathcal{A} = \{ i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid \lambda^{i,(k+1)} > 0 \},$$

EXIT

ELSE

$$k \leftarrow k+1, \text{GOTO } 5$$

ENDIF

5. Berechnungssteuerung II - Schrittweitenvergrößerung

IF $\text{iter} < \text{miniter}$

$$\mu^{(k+1)} = 10 \mu^{(k)}, \text{GOTO } 2$$

ELSE

$$\mu^{(k+1)} = 3 \mu^{(k)}, \text{GOTO } 2$$

END

LITERATUR

- Altenbach, H., Altenbach, J., Rikards, R. (1996), *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart
- Alfano, G., de Angelis, F., Rosati, L. (1998), *An implicit integration procedure for plane stress J_2 elastoplasticity*, Computational Mechanics - New Trends and Applications, CIMNE, Barcelona, Spain
- Amadei, B. (1988), *Strength of a Regularly Jointed Rock Mass Under Biaxial and Axisymmetric Loading Conditions*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech., Abstr. 25, No.1, 3-13
- Anand, L., Kothari, M. (1996), *A computational procedure for rate-independent crystal plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 44, No. 4, 525-558
- Armero, F., Pérez-Foguet, A. (2002a), *On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity - part I: The variational structure*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 53, 297-329
- Armero, F., Pérez-Foguet, A. (2002b), *On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity - part II: Globally convergent schemes*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 53, 331-374
- Aurichio, F., Beirão da Veiga, L. (2003), *On a new integration scheme for von-Mises plasticity with linear hardening*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 56, 1375-1396
- Badel, P.-B., Leblond, J.-B. (2004), *A note on integration schemes for the microplane model of the mechanical behaviour of concrete*, Commun. Numer. Meth. Engng., 20, 75-81
- Bader, T.K., Hofstetter, K., Hellmich, C., Eberhardsteiner, J. (2010), *Poromechanical scale transitions of failure stresses in wood: from the lignin to the spruce level*, ZAMM, 90, No. 10-11, 750-767
- Baker, W.H., Kriszek, R.J. (1970), *Mohr-Coulomb strength theory for anisotropic soils*, J. Soil. Mech. Found. Div., Vol. 96, No. 1, 269-292
- Barenblatt, G.I., Joseph, D.D. eds. (1997), *Collected Papers of R.S. Rivlin*, Vol I+II, Springer-Verlag, New York
- Batchelor, G.K. ed. (1958), *The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor - Volume I: Mechanics of Solids*, Cambridge University Press
- Batdorf, S.B., Budiansky, B. (1949), *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 1871, Langley Aeronautical Laboratory, Washington
- Battini, J.-M. (2002), *Co-rotational beam elements in instability problems*, Doctoral Thesis, KTH, Stockholm
- Bažant, Z.P. (1984), *Microplane Model for Strain-controlled Inelastic Behaviour*, Mechanics of Engineering Materials, Edited by C.S. Desai and R.H. Gallagher, Chapter 3, 45-59, John Wiley & Sons
- Bažant, Z.P., Gambarova, P.G. (1984), *Crack Shear in Concrete: Crack Band Microplane Modell*, J. Struct. Eng., Vol. 110, No. 9, 2015-2035

-
- Bažant, Z.P., Oh, B.H. (1985), *Microplane Model for progressive Fracture of Concrete and Rock*, J. Eng. Mech., Vol. 111, No. 4, 559-582
- Bažant, Z.P., Oh, B.H. (1986), *Numerical Integration on the Surface of a Sphere*, ZAMM, 66, 37-40
- Bažant, Z.P., Kim, J. (1986), *Creep of Anisotropic Clay: Microplane Model*, J. Geotech. Eng.-ASCE, Vol. 112, No. 4, 458-475
- Bažant, Z.P., Prat, P.C. (1988), *Microplane Model for Brittle-Plastic Material: I. Theory*, J. Eng. Mech., Vol. 114, No. 10, 1672-1688
- Bažant, Z.P., Xiang, Y., Prat, P.C. (1996), *Microplane Model for Concrete. I: Stress-Strain Boundaries and Finite Strain Theory*, J. Eng. Mech., Vol. 122, No. 3, 245-254
- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M. (2006), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3rd ed., John Wiley & Sons
- Berveiller, M., Zaoui, A. (1979), *An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 26, 325-349
- Bhatti, M. Asghar (2000), *Practical Optimization Methods with Mathematica Applications*, Springer-Verlag, New York
- Bigoni, D., Piccolroaz, A. (2004), *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials*, Int. J. Solids Struct., 41, 2855-2878
- Bigoni, D. (2012), *Nonlinear Solid Mechanics: Bifurcation Theory and Material Instability*, Cambridge University Press
- Bishop, J.F., Hill, R. (1951), *A Theory of the Plastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate under Combined Stresses*, Phil. Mag. XLII, 414-427
- Bodig, J., Jayne, B.A. (1993), *Mechanics of Wood and Wood Composites*, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida
- Boehler, J.P. ed. (1987), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Wien - New York
- Boehler, J.P., Sawczuk, A. (1976), *On Yielding of Oriented Solids*, Acta Mechanica, 27, 185-206
- Borja, R.I., Wren, J.R. (1993), *Discrete Micromechanics of Elastoplastic Crystals*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 36, 3815-3840
- Brent, R.P. (1973), *Algorithms for Minimization without Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- Budiansky, B., Wu, T.T. (1962), *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals*, Office of naval research, Technical Report No. 12, Division of Engineering and Applied Physics, Harvard University, Cambridge, Mass.
- Bunge, H.-J. (1969), *Mathematische Methoden der Texturanalyse*, Akademie-Verlag, Berlin
-

-
- von Burzynski, W. (1929), *Über die Anstrengungshypothesen*, Schweizer Bauzeitung, 94, Heft 21, 259-262
- Calladine, C.R. (1971), *A microstructural view of the mechanical properties of saturated clay*, Géotechnique, 21, No. 4, 391-415
- Calladine, C.R. (2000), *Plasticity for Engineers: Theory and Applications*, Horwood Publishing Limited
- Carlson, D.E., Hoger, A. (1984), *The derivative of a tensor-valued function of a tensor*, IMA Reprint series #101, University of Minnesota
- Carol, I., Jirásek, M., Bažant, Z.P. (2001), *A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I. Free energy and consistent microplane stresses*, Int. J. Solids Struct., Vol. 38, 2921-2931
- Carol, I., Jirásek, M., Bažant, Z.P. (2004), *A framework for microplane models at large strain, with application to hyperelasticity*, Int. J. Solids Struct., Vol. 41, 511-557
- Coope, I.D. (1985), *The Maratos Effect in Sequential Quadratic Programming Algorithms using the L1 Exact Penalty Function*, Technical Report No. CS-85-32, University of Canterbury
- Cowan, H.J. (1952), *Strength of Reinforced Concrete under the Action of Combined Stresses, and the Representation of the Criterion of Failure by a Space Model*, Nature, No. 4303, p. 663
- Crisfield, M.A. (1991), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1, John Wiley & Sons
- Cuitiño, A.M., Ortiz, M., *Computational modelling of single crystals*, Model. Sim. Mater. Sci. Eng., 1, 225-263
- de Borst, R. (1991), *The Zero-normal-stress Condition in Plane-stress and Shell Elastoplasticity*, Comm. Appl. Numer. Meth., Vol. 7, 29-33
- De Magistris, F. (2005), *Wood fibre deformation in combined shear and compression*, Doctoral Thesis, KTH, Stockholm, Sweden
- Dietmaier, P. (2006), *Nichtlineare Gleichungssysteme und Optimierungsaufgaben*, Vorlesung, TU Graz
- Dinwoodie, J.M. (2000), *Timber: Its nature and behaviour*, 2nd edition, E & FN SPON, London and New York
- Dodds, R.H. (1986), *Numerical Techniques for Plasticity Computations in Finite Element Analysis*, Computers & Structures, Vol. 26, No. 5, 767-779
- Dormieux, L., Kondo, D., Ulm, F.-J. (2006), *Microporomechanics*, John Wiley & Sons
- Duveau, G., Shao, J.F., Henry, J.P. (1998), *Assessment of some failure criteria for strongly anisotropic geomaterials*, Mechanics of cohesive-frictional materials, 3, 1-26
- Easterling, K.E., Harrysson, R., Gibson, L.J., Ashby, M.F., *On the Mechanics of Balsa and Other Woods*, Proc. R. Soc. A, Vol. 383, No.1784, 31-41
-

- Eberhardsteiner, J., Pulay, F., Mang, H. (1991), *Zur Frage der Lasteinleitung bei experimentellen Festigkeitsuntersuchungen von zweiachial beanspruchtem Holz*, Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ), 136. Jg, Heft 6/1991
- Eberhardsteiner, J., Gingerl, M., Ondris, L. (1997), *Form- und Beanspruchungsoptimierung eines Holzprobekörpers für biaxiale Werkstoffprüfungen mittels numerischer Analysen*, Projekte an den zentralen Applikationsservern des Zentralen Informatikdienstes der Technischen Universität Wien, Berichte 1997, 133-139
- Eberhardsteiner, J. (2002), *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz - Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften*, Springer Verlag, Wien, New York
- Engler, O., Randle, V. (2010), *Introduction to Texture Analysis - Macrotexture, Microtexture and Orientation Mapping*, CRC Press, 2nd ed.
- Fleischmann, M. (2005), *Numerische Berechnung von Holzkonstruktionen unter Verwendung eines realitätsnahen orthotropen elasto-plastischen Werkstoffmodells*, Dissertation, Institut für Festigkeitslehre, TU Wien
- Fletcher, R. (1987), *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester
- Forest Products Laboratory (1999), *Wood Handbook - Wood as an Engineering Material*, Gen. Tech. Rep. FPL-GTR-113, U. S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory Madison, WI
- Fuschi, P., Dutko, M., Peric, D., Owen, D. R. J. (1994), *On numerical integration of the five parameter model for concrete*, Computers & Structures, 53, No. 4, 825-838
- Gibson, L.J., Ashby, M.F. (1999), *Cellular solids - Structure and properties*, Cambridge Solid State Series, 2nd ed.
- Grammel, R. (1928), *Handbuch der Physik - Band VI, Mechanik der elastischen Körper*, Springer-Verlag, Berlin
- Greenwood, J.H. (1977), *German work on grp design*, Composites, 8, Issue 3, 175-184
- Grimsel, M. (1977), *Mechanisches Verhalten von Holz - Struktur- und Parameteridentifikation eines anisotropen Werkstoffes*, Dissertation, TU Dresden
- Grosse, M., Rautenstrauch, K., Schlegel, R. (2005), *Numerische Modellierung von Holz und Verbindungselementen in Holz-Beton-Verbundkonstruktionen*, Bautechnik 82, Heft 6, 355-364
- Guest, J.J. (1899), *On the Strength of Ductile Materials under Combined Stress*, Proc. Phys. Soc. London, 202-272
- Guggenberger, W. (2008), *Flächentragwerke*, Vorlesungsunterlagen, TU Graz
- Guggenberger, W. (2012), *Festigkeitslehre für Verfahrenstechniker*, Vorlesungsunterlagen, TU Graz
- Halphen, B., Nguyen, Q.S. (1975), *Sur les matériaux standard généralisés*, Journal de Mécanique, 14, 39-63
- Han, S. (1975), *A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming*, Report Cornell University
-

- Hankinson, R. L. (1921), *Investigation of crushing strength of spruce at varying angles of grain*, Air Service Information Circular III, 259, 15 p.
- Hashin, Z. (1980), *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*, J. appl. Mech., 47, 329-334
- Havner, K.S. (1971a), *A discrete model for the prediction of subsequent yield surfaces in polycrystalline plasticity*, Int. J. Solids Struct., Vol. 7, 719-730
- Havner, K.S. (1971b), *On convergence of a discrete aggregate model in polycrystalline plasticity*, Int. J. Solids Struct., Vol. 7, 719-730
- Hemmer, K. (1985), *Versagensarten des Holzes der Weißtanne (Abies alba) unter mehrachsiger Beanspruchung*, Berichte der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Fridericiana in Karlsruhe, 4. Folge, Heft 11
- Hencky, H. (1924), *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufene Nachspannungen*, ZAMM, 4, 323-334
- Hill, R. (1948), *A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. R. Soc. Lond. A 193, 281-297
- Hill, R. (1950), *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press
- Hill, R. (1958), *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, J. Mech. Phys. Solids, 6, New York, 236-249
- Hoek, E., Brown, E.T. (1980), *Underground Excavations in Rock*, Institution of Mining and Metallurgy
- Hoffmann, O. (1967), *The Brittle Strength of Orthotropic Materials*, J. Comp. Mat., 1, 200-206
- Hofstetter, K., Gamstedt, E.K. (2009), *Hierarchical modelling of microstructural effects on mechanical properties of wood. A review*, Holzforschung, Vol. 63, 130-138
- Hofstetter, K., Hellmich, C., Eberhardsteiner, J. (2006), *Continuum micromechanics estimation of wood strength*, Proc. Appl. Math. Mech., 6, 75-78
- Hofstetter, K., Hellmich, C., Eberhardsteiner, J. (2007), *Micromechanical modeling of solid-type and plate-type deformation patterns within softwood materials. A review and an improved approach*, Holzforschung, Vol. 61, 343-351
- Holzappel, G.A. (2000), *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons
- Homberg, S., Persson, K., Petersson, H. (1999), *Nonlinear mechanical behaviour and analysis of wood and fibre materials*, Computers & Structures, 72, 459-480
- Hu, L.W. (1958), *Modified tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and its application*, J. Franklin Inst., 25, 187-204
- Huber, M.T. (1904), *Specific work of strain as a measure of material effort*, Arch. Mech., 56, 3, 173-190
-

- Hutchinson, J.W. (1964a), *Plastic stress-strain relations of f.c.c. polycrystalline metals hardening according to Taylor's rule*, J. Mech. Phys. Solids, 12, 11-24
- Hutchinson, J.W. (1964b), *Plastic deformations of b.c.c. polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 12, New York, 25-33
- Jaeger, J.C. (1960), *Shear Failure of Anisotropic Rocks*, Geological Magazine, 97, 65-72
- Jeltsch-Fricker, R. (1996), *Bruchbedingung vom Mohrschen Typ für transversal isotrope Werkstoffe am Beispiel der Faser-Kunststoff-Verbunde*, ZAMM, 76, 9, 505-520
- Jenkins, C.F. (1920), *Report on Materials of Construction used in Aircraft and Aircraft Engines*, London, H.M. Stationary Office
- Jirásek, M., Bažant, Z.P. (2002), *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons
- Kasal, B., Leichti, R.J. (2005), *State of the art in multiaxial phenomenological failure criteria for wood members*, Prog. Struct. Engng. Mater., 7, 3-13
- Khan, A.S. , Huang, S. (1995), *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons
- Klisinski, M., Mróz, Z., Runesson, K. (1992), *Structure of constitutive equations in plasticity for different choices of state and control variables*, Int. J. Plast., 8, 221-243
- Klisinski, M. (1998), *On constitutive equations for arbitrary stress-strain control in multi-surface plasticity*, Int. J. Solids Struct., 35, No. 20, 2655-2678
- Kocks, U.F. (1970), *The Relation Between Polycrystal Deformation and Single Crystal Deformation*, Metallurgical Transactions, Vol. 1, 1121-1143
- Kohlhauser, C. (2005), *A multi-surface plasticity model with strain softening for failure mechanisms of clear spruce wood under plain biaxial stress conditions and stabilization of its numerical implementation for large characteristic lengths*, Diplomarbeit, Institut für Festigkeitslehre, TU Wien
- Koiter, W.T. (1953), *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elasto-plastic materials with a singular yield surface*, Quart. Appl. Math., 11, 350-354
- Kollmann, F. (1982), *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*, zweite Auflage/erster Band, Springer Verlag, Berlin
- Kossa, A., Szabó, L. (2009), *Exact integration of the von Mises elastoplasticity model with combines linear isotropic-kinematic hardening*, Int. J. Plast., 25, 1083-1106
- Krieg, R. D., Krieg, D. B. (1977), *Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model*, ASME. J. Pressure Vessel Tech., 99, 510-515
- Kröner, E. (1961), *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls*, Acta Metallurgica, Vol. 9
- Kuhl, E., Steinmann, P., Carol, I. (2001), *A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II. Dissipation and inelastic constitutive modeling*, Int. J. Solids Struct., 38, 2933-2952
- Lee, E.H. (1969), *Elastic-plastic deformation at finite strains*, J. appl. Mech., 36, 1-6
- Lekhnitskii, S. G. (1968), *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne
-

- Leon, A. (1934), *Über die Rolle des Trennbruches im Rahmen der Mohr'schen Anstrengungshypothese*, Der Bauingenieur, Heft 31/324
- Leon, A. (1935), *Über die Scherfestigkeit des Betons*, Beton und Eisen, XXXIV. Jahrgang, 130-135
- Leukart, M. (2005), *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohesiven Reibungsmaterialien*, Bericht Nr. 45, Dissertation, Universität Stuttgart
- Lin, T.H. (1957), *Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 5, 143-149
- Lischke, N. (1984), *Elastomechanisches Verhalten von Fichtenholz unter Einbeziehung der räumlichen Werkstoffstruktur*, Der Bauingenieur, 59, 67-71
- Lourenço, P.B. , de Borst, R., Rots, J.G. (1997), *A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 40, 4033-4057
- Lubliner, J. (2008), *Plasticity Theory*, Dover Publications
- Luenberger, D.G., Ye, Y. (2008), *Linear and Nonlinear Programming*, Vol I, Springer-Verlag, New York
- Mackenzie-Helnwein, P., Eberhardsteiner, J., Mang, H. (2003), *A multi-surface plasticity model for clear wood and its application to the finite element analysis of structural details*, Computational Mechanics 31, 204-218
- Mackenzie-Helnwein, P., Eberhardsteiner, J., Mang, H. (2005), *Rate-independent mechanical behavior biaxially stressed wood: Experimental observation and constitutive modeling as an orthotropic two-surface elasto-plastic material*, Holzforschung, Vol. 59, 311-321
- Mackenzie-Helnwein, P., Müllner, H. W., Eberhardsteiner, J., Mang, H. A. (2005), *Analysis of layered wooden shells using an orthotropic elasto-plastic model for multi-axial loading of clear spruce wood*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 194, 2661-2685
- Madsen, B. (1992), *Structural Behaviour of Timber*, Timber Eng. Ltd., Vancouver
- Maier, G. (1968), *A quadratic programming approach for certain classes of nonlinear structural problems*, Meccanica, Vol. 3, 121-130
- Maier, G. (1970), *A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes*, Meccanica, Vol. 5, 54-66
- Mandel, J. (1965), *Generalisation de la theorie de plasticite de W.T. Koiter*, In. J. Solids Struct., Vol. 1, 273-295
- Mandel, J. (1966), *Conditions de Stabilité et Postulat de Drucker*, IUTAM Symposium Rheology and Soil Mechanics, Springer Verlag
- Mandel, J. (1970), *Propriétés mécanique des Matériaux*, Editions Eyrolles, Paris
- Mang, H., Hofstetter, G., *Festigkeitslehre*, Springer-Verlag, Wien, New York
- Mark, H., Polanyi, M., Schmid, E. (1923), *Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen*, Zeitschrift f. Physik, 12, 58-116
-

-
- Maudlin, P.J., Wright, S.I., Kocks, U.F., Sahota, M.S., *An Application of Multisurface Plasticity Theory: Yield Surfaces of Textured Materials*, Acta mater., 44, No.10, 4027-4032
- Miehe, C. (1996), *Multisurface thermoplasticity for single crystals at large strains in terms of eulerian vector updates*, Int. J. Solids Struct., Vol. 33, No. 20-22, 3103-3130
- Miehe, C. (1998), *Comparison of two Algorithms for the Computation of fourth-order isotropic Tensor Functions*, Computers & Structures, Vol. 66, No.1, 37-43
- Miehe, C., Schröder, J. (2001), *A comparative study of stress update algorithms for rate-independent and rate-dependent crystal plasticity*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 50, 273 - 298
- Miehe, C., Göktepe, S., Lulei, F. (2004), *A micro-macro approach to rubber-like materials - Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 52, 2617 - 2660
- von Mises, R. (1913), *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttinger Nachrichten Math.-Phys. Klasse, 1, 582-592
- von Mises, R. (1928), *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, ZAMM, 8, 161-185
- Mohr, C.O. (1928), *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?*, Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, Abhandlung 5, S. 192-240, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 3. erw. Auflage
- Mohr, D. (2004), *Mechanism-based multi-surface plasticity model for ideal truss lattice materials*, Int. J. Solids Struct., 42, 3235-3260
- Montáns, F.J. (2004), *Implicit plane stress algorithm for multilayer J_2 -plasticity using Prager-Ziegler translation rule*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 59, 409-418
- Mróz, Z. (1963), *Non-associated flow laws in plasticity*, Journal de Mécanique, Vol. II, No. 1, 21-42
- Mróz, Z. (1969), *An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general work-hardening model*, Acta Mechanica, 7, 199-212
- Müllner, H. W. (2003), *Konstitutives Modellieren von Fichtenholz unter biaxialer Beanspruchung mittels eines orthotropen Einflächenmodells unter Berücksichtigung von Ver- und Entfestigung*, Diplomarbeit, Institut für Festigkeitslehre, TU Wien
- Norris, C. B. (1962), *Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses*, Forest Products Laboratory, Forest Service U.S. Department of Agriculture, Report No. 1816
- Ogden, R.W. (1984), *Non-linear Elastic Deformations*, Dover-Publications, New York
- Ottosen, N.S., Ristinmaa, M. (1996), *Corners in plasticity - Koiter's theory revisited*, Int. J. Solids Struct., Vol. 33, 3967-3721
- Paul, B. (1961), *A Modification of the Coulomb-Mohr Theory of Fracture*, J. appl. Mech., 28, 259-267
-

- Payne, H. (1958), *The slip theory of plasticity for crystalline aggregates*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 7, 126-134
- Penrose, R. (1955), *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc, 51, 406-413
- Peressini, A.L., Sullivan, F.E., Uhl, J.J.Jr. (1988), *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer-Verlag, New York
- Piccoloroaz, A., Bigoni, D. (2009), *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials: A generalization to surfaces with corners*, Int. J. Solids Struct., 41, 2855-2878
- Pietruszczak, S., Mróz, Z. (2001), *On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 25, 509-524
- Pietruszczak, S., Pande, G.N. (2001), *Description of soil anisotropy based on multi-laminate framework*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 25, 197-206
- Puck, A. (1996), *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*, Hanser Verlag, Wien-München
- Puck, A., Schürmann, H. (1998), *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models*, Composite Science and Technology, 58, 1045-1067
- van der Put, T.A.C.M. (2005), *The Tensorpolynomial Failure Criterion For Wood*, Delft Wood Science Foundation Publication Series, Nr. 2
- Quing, H., Mishnaevsky L.Jr. (2010), *3D multiscale micromechanical model of wood: From annual rings to microfibrils*, Int. J. Solids Struct., 47, 1253-1267
- Ramm, E., Matzenmiller, A. (1987), *Computational Aspects of Elasto-Plasticity in Shell Analysis*, Proceeding, International Conference on Computational Plasticity, Barcelona, Pineridge Press, Swansea
- Rao, S.S. (2009), *Engineering Optimization*, Fourth Edition, John Wiley & Sons
- Resch, E. (2011), *Zuverlässige numerische Simulation von Holzverbindungen*, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden
- Reuss, A. (1929), *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einzelkristalle*, ZAMM, 9, 49-58
- Reuss, A. (1930), *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*, ZAMM, 10, 266-274
- Rice, J.R. (1971), *Inelastic constitutive relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 19, 433-455
- Ritto-Corrêa, M., Camotim, D. (2001), *Integration algorithm for J_2 elastoplasticity under arbitrary mixed stress-strain control*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 50, 1213-1232
- Rösler, J., Harders, H., Bäker, M. (2007), *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg
- Salençon, J. (2001), *Handbook of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg
-

- Salençon, J. (2002), *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, Les Éditions de l'École polytechnique
- Sawischlewski, E., Steinmann, P., Stein, E. (1996), *Modelling and computation of instability phenomena in multisurface elasto-plasticity*, Computational Mechanics, 18, 245-258
- Schleicher, F. (1926), *Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung)*, ZAMM, 6, 199-216
- Schmidt, J., Kaliske M. (2006), *Zur dreidimensionalen Materialmodellierung von Fichtenholz mittels eines Mehrflächen-Plastizitätsmodells*, Holz als Roh- und Werkstoff, 64, 393-402
- Schmidt, J., Kaliske M. (2009), *Models for numerical failure analysis of wooden structures*, Eng. Struct., 31, 571-579
- Schmidt-Baldassari, M. (2003), *Numerical concepts for rate-independent single crystal plasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192, 1261-1280
- Schröder, J., Miehe, C. (1997), *Aspects of computational rate-independent crystal plasticity*, Comp. Mat. Sci., 9, 168-176
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, Berlin-Heidelberg
- Simo, J.C., Kennedy, J.G., Govindjee, S. (1988), *Non-smooth multisurface plasticity and visoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms*, Int. J. Num. Meth. Engrg., 26, 2161-21858
- Simo, J.C., Taylor, R.L. (1986), *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 22, 649-670
- de Souza Neto, E.A., Peric, D., Owen, D.R.J. (2008), *Computational Methods for Plasticity*, John Wiley & Sons
- Spencer, A.J.M. (1984), *Constitutive theory for strongly anisotropic solids*, in Continuum Theory of the mechanics of Fibre-reinforced Composites, CISM Courses and Lectures No. 282, Springer-Verlag, Wien, 1-32
- Stein, E., de Borst, R., Hughes, T.J.R. eds. (2004), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Vol II - Solids and Structures, John Wiley & Sons, Chichester
- Stroud, A.H. (1971), *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- Stüssi, F. (1946), *Holzfestigkeit bei Beanspruchung schräg zur Faser*, Schweizer Bauzeitung, 128, 251-252
- Stupnicki, J. (1968), *Analysis of the behaviour of wood under external load, based on a study of cell structure*, Acta polytechnica scandinavica, Civil engineering and building construction series, No. 53
- Tresca, H. (1864), *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*, Comptes-rendus de l'académie des sciences, Paris, France 59, 754-758
-

-
- Truesdell, C.A., Noll, W. (1965), *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin
- Tsai, S.W., Wu, E.M. (1971), *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*, J. Compos. Mater., Vol. 5, 58-80
- Ulm, F.-J., Coussy, O. (2003), *Mechanics and Durability of Solids, Volume I*, MIT/Prentice Hall Series on Civil, Environmental, and System Engineering, Pearson Education, Inc., New Jersey
- Valoroso, N., Rosati, L. (2009a), *Consistent derivation of the constitutive algorithm for plane stress isotropic plasticity. Part I: Theoretical formulation*, Int. J. Solids Struct., 46, 74-91
- Valoroso, N., Rosati, L. (2009a), *Consistent derivation of the constitutive algorithm for plane stress isotropic plasticity. Part II: Computational issues*, Int. J. Solids Struct., 46, 92-124
- Wei, Z., Peric, D., Owen, D.R.J. (1996), *Consistent linearization for the exact stress update of Prandtl-Reuss non-hardening elastoplastic models*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 39, 1219-1235
- Yu, M. (2002), *Advances in strength theories for materials under complex stress states in the 20th century*, Appl. Mech. Rev., 55, No.3
- Zaoui, A. (1997), *Matériaux hétérogènes et composites*, Vorlesungsskriptum, Ecole Polytechnique, Département de Mécanique
- Zienkiewicz, O.C., Pande, G.N. (1977), *Time-dependent Multilaminar Model of Rocks - a numerical Study of Deformation and Failure of Rock Masses*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1, 219-247
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000), *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*, 5th edition, Butterworth-Heinemann
-