

BSc Simon BERGER

# Ermittlung kritischer Drehzahlen und Eigenformen von Rotoren elektrischer Maschinen

Masterarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Ingenieur  
Studienrichtung Maschinenbau  
vorgelegt der Fakultät für Maschinenbau und  
Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Graz

Beurteiler/in: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Katrin Ellermann  
Betreuer/in: Dipl.-Ing. Mathias Mair  
Dipl.-Ing. Dr.techn. Bernhard Weilharter

Institut für Mechanik  
Technische Universität Graz

Graz, 2013

### **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 19. August 2013

.....

(Unterschrift)

# Danksagung

Am Erfolg und reibungslosen Ablauf meiner Diplomarbeit sind mehrere Personen wesentlich beteiligt, denen ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Zunächst gilt ein besonderer Dank meiner betreuenden Professorin, Frau Prof. Katrin Ellermann, die es mir ermöglicht hat, meine Diplomarbeit am Institut für Mechanik durchzuführen. Des Weiteren möchte ich die sehr gute Zusammenarbeit mit der Firma Elin Motoren GmbH in Weiz hervorheben, welche den Anstoß für die Aufgabenstellung und wesentliche Hintergrundinformationen lieferte. Spezieller Dank gilt hierbei meinen beiden Betreuern und Ansprechpartnern von der Firma Elin, Stefan Haas und Hermann Lang, die mich stets tatkräftig unterstützt und auf die wesentlichen Anforderungen aufmerksam gemacht haben. Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Betreuern von Seiten der Technischen Universität Graz, Mathias Mair und Bernhard Weilharter. Neben der außerordentlichen fachlichen Unterstützung lernte ich besonders unser angenehmes und kollegiales Arbeitsklima sehr zu schätzen.

Schlussendlich gebührt ein sehr großer Dank meinen Eltern, die mir mein Studium erst ermöglicht haben und mich nicht nur dabei stets unterstützt und gefördert haben. Meiner Freundin Daniela möchte ich speziell für die schöne Zeit mit ihr während meinen Auszeiten von dieser Arbeit danken.

Graz, im August 2013

Simon Berger

# Kurzfassung

Zur Schwingungssimulation von Rotoren in elektrischen Maschinen wird ein Tool entwickelt, das eine Vorhersage des Campbelldiagramms, der kritischen Drehzahlen und der Eigenformen ermöglicht. Dieses Tool wird in *MATLAB*<sup>®</sup> erstellt und kann mittels einer graphischen Benutzeroberfläche bedient werden. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Die Beschreibung der Rotorwelle erfolgt mit Balkenelementen nach Timoshenko. Zur Modellierung von elastischen Lagern und von hydrodynamischen Gleitlagern sowie des magnetischen Zugs werden entsprechende Modelle entwickelt und vorgestellt. Eine Verifizierung der Ergebnisse erfolgt durch einen Vergleich mit dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm *ANSYS*<sup>®</sup>.

# Abstract

For the simulation of vibrations in electrical machines, a tool is developed, which provides a prediction of the campbell diagram, the critical speeds and the eigenmodes of the rotor. This tool is developed in *MATLAB*<sup>®</sup> and can be operated via a graphical user interface. For the calculations the finite element approach is used. The rotor is modeled as a Timoshenko beam element. Models for different types of elastic and hydrodynamic bearings and the magnetic pull are developed and implemented. A verification of the solutions is done by a comparison with the commercial finite element code *ANSYS*<sup>®</sup>.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Aufgabenstellung . . . . .	1
1.2	Stand der Technik . . . . .	2
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Einmassenschwinger . . . . .	3
2.1.1	Freie ungedämpfte Schwingung . . . . .	3
2.1.2	Freie gedämpfte Schwingung . . . . .	4
2.1.3	Angeregte Schwingung . . . . .	7
2.2	Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden . . . . .	8
2.2.1	Mathematische Beschreibung . . . . .	9
2.2.2	Modalanalyse . . . . .	9
2.3	Schwingungen von Rotoren . . . . .	10
2.3.1	Campbelldiagramm und kritische Drehzahl . . . . .	11
2.3.2	Einfaches Rotormodell mit Punktmasse . . . . .	11
2.3.3	Gyroskopischer Effekt - Lavalrotor . . . . .	17
2.4	Diskretisierung kontinuierlicher Systeme . . . . .	21
2.4.1	Übertragungsmatrizenverfahren . . . . .	21
2.4.2	Finite Elemente Methode . . . . .	24
2.5	Balkentheorie . . . . .	26
2.5.1	Biegebalken nach Bernoulli . . . . .	27
2.5.2	Biegebalken nach Timoshenko . . . . .	28
2.5.3	Vergleich der beiden Theorien . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Modellierung und Elementformulierung</b>	<b>31</b>
3.1	Rotorwelle . . . . .	31
3.1.1	Systemmatrizen des Torsionsstabs . . . . .	32
3.1.2	Rotierende Timoshenko-Biegebalken . . . . .	33
3.2	Blechkpaket und Ersatzmassen . . . . .	36
3.3	Lager . . . . .	37
3.3.1	Elastische Lagerung . . . . .	37
3.3.2	Hydrodynamisches Gleitlager . . . . .	38
3.4	Magnetischer Zug . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Systembeschreibung und -lösung</b>	<b>41</b>
4.1	Mathematische Beschreibung . . . . .	41
4.1.1	Torsion . . . . .	41
4.1.2	Biegung . . . . .	42
4.2	Modalanalyse . . . . .	43

4.3	Campbelldiagramm und kritische Drehzahl . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Aufbau und Bedienung des <i>MATLAB</i><sup>®</sup>-Programms</b>	<b>45</b>
5.1	Input: Eingabe / Einlesen der Eingabedaten . . . . .	47
5.1.1	Manuelles Definieren der Eingabedaten . . . . .	47
5.1.2	Einlesen von Eingabedateien . . . . .	51
5.1.3	Vorschau der Rotorwelle . . . . .	51
5.2	Preprocessing: Erstellen der Systemmatrizen . . . . .	52
5.3	Solver: Lösen des Systems . . . . .	55
5.3.1	Durchführung einer Modalanalyse . . . . .	56
5.3.2	Erstellen eines Campbelldiagramms . . . . .	58
5.4	Postprocessing: Auswertung und Darstellung der Ergebnisse . . . . .	58
5.4.1	Campbelldiagramm . . . . .	58
5.4.2	Darstellungsformen im Bereich Modalanalyse . . . . .	58
5.5	Datenstruktur . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Vergleichsrechnungen mit kommerzieller FE-Software</b>	<b>64</b>
6.1	Geometrie . . . . .	64
6.2	Gleitlagercharakteristik . . . . .	65
6.3	Campbelldiagramm . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>69</b>
A.1	Geometrien . . . . .	69
A.2	Gleitlagercharakteristiken . . . . .	70
A.3	Campbelldiagramme . . . . .	71
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>73</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>75</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>76</b>

# 1 Einleitung

Schwingungen sind ein im täglichen Leben und in der Natur häufig vorkommendes Phänomen. Oft nicht wahrgenommen spielen Schwingungen eine wesentliche Rolle in verschiedensten Belangen. So zum Beispiel ist der Komfort beim Autofahren sehr stark von den Schwingungseigenschaften des Fahrzeugs abhängig, aber auch die menschliche Stimme und die gesamte Akustik bis hin zum Lärm basieren auf Schwingungen.

Eine besonders wichtige Bedeutung haben Schwingungen in nahezu allen Belangen der Technik. Bauteile sollten im Allgemeinen möglichst schlank und leicht gebaut werden, was wiederum deren Schwingungsfähigkeit erhöht. Trotzdem gilt es die Ausmaße einer möglichen Schwingung zu begrenzen, um ein Bauteilversagen zu verhindern [1].

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Vermeidung von Lärm und Geräuschen. Auch hier sind, wie oben bereits erwähnt, Schwingungen ein Hauptgrund für die Entstehung dieser Effekte. Um die Stärke, Form und Art derartiger Schwingungen möglichst gut und sicher voraussagen zu können, ist es von Vorteil, über entsprechende Rechenmodelle zu verfügen. So kann bereits in der Auslegungsphase einer technischen Einrichtung auf ein optimales Schwingungsverhalten geachtet werden.

## 1.1 Motivation und Aufgabenstellung

Elektromotoren bestehen aus einem ruhenden Stator und einem Rotor, welcher im Stator gelagert ist und dort mit einer bestimmten Drehgeschwindigkeit rotiert. Dieser Rotor stellt ein schwingungsfähiges System dar. Durch dessen Drehung und die in der Realität stets existierenden Unwuchten kommt es auch stets zu einer entsprechenden Anregung.

Durch die konstruktiven Begebenheiten besitzt dieses System Eigenfrequenzen, die drehzahlabhängig sind. Wenn die Drehzahl des Rotors mit einer dieser Eigenfrequenzen übereinstimmt, so kommt es zur Resonanz und damit zu unzulässig großen Schwingungsamplituden, welche im schlimmsten Fall zum Versagen des Bauteils führen. Um dies zu verhindern, muss stets sichergestellt werden, dass sich die Betriebsdrehzahl des Rotors ausreichend stark von den jeweiligen Eigenfrequenzen unterscheidet. Dazu ist es essentiell die Eigenfrequenzen der Konstruktion zu kennen.

Die Firma Elin Motoren GmbH in Weiz führt bereits während der Konstruktionsphase eine Näherungsberechnung der Eigenfrequenzen des Rotors mit Hilfe des Übertragungsmatrizenverfahrens durch. Diese Ergebnisse werden benötigt, um bereits in diesem Entwicklungsabschnitt sicherzustellen, dass die Eigenfrequenzen nicht zu nahe an der Betriebsdrehzahl liegen. Eine Berücksichtigung der stark drehzahlabhängigen und anisotropen hydrodynamischen Gleitlager ist bei dieser Methode nicht möglich. Eine Verwendung des ebenfalls zur Verfügung stehenden kommerziellen FE<sup>1</sup>-Programms *ANSYS*<sup>®</sup> ist während

---

<sup>1</sup>Finite Elemente



der Konstruktionsphase zu aufwändig.

Aus diesem Grund soll ein einfach zu bedienendes Programm in *MATLAB*<sup>®</sup> entwickelt werden, welches eine schnelle und möglichst exakte Vorhersage des Schwingungsverhaltens der Rotorwelle unter Berücksichtigung von hydrodynamischen Gleitlagern erlaubt. Um realistische Ergebnisse zu erhalten, sollten zusätzlich zu Welle und Lagerung auch der magnetische Zug und allfällige Ersatzträgheiten berücksichtigt werden können.

## 1.2 Stand der Technik

Rotoren werden zumeist als Balken modelliert. Dies erfolgt zumeist über die Balkenformulierungen nach Bernoulli oder Timoshenko [2, 3]. Der traditionelle Weg zur Lösung des Systems ist das Übertragungsmatrizenverfahren, welches 1945 von Prohl [4] vorgestellt wurde.

Nach jahrelanger Dominanz dieses Verfahrens wird es zusehends von der Methode der Finiten Elemente abgelöst. Nach der erstmaligen Verwendung dieser Methode in der Rotordynamik durch Rool und Booker [5, 6] wurde deren Ansatz ständig weiterentwickelt.

Wesentliche Beiträge stellen die Arbeiten von Nelson [7] und Genta [8] dar, welche alle wesentlichen Effekte der Rotordynamik berücksichtigen. In [9] stellt Genta einen FE-Code zur Berechnung rotordynamischer Probleme mit einem komplexen Ansatz vor.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Im Kapitel 2 *Theoretische Grundlagen* werden zunächst die für die Problemstellung relevanten Zusammenhänge und Herleitungen erklärt und zusammengefasst. Beginnend mit der Beschreibung von einfachen Phänomenen am Einmassenschwinger werden komplexere Effekte und Beschreibungen für die Schwingung von Rotoren hergeleitet. Des Weiteren werden die Grundlagen des Übertragungsmatrizenverfahrens und der Methode der finiten Elemente erarbeitet und deren Vor- und Nachteile für den vorliegenden Anwendungsfall erörtert.

Eine genaue Beschreibung der verwendeten Elemente erfolgt im Kapitel 3 *Elementformulierung*. Dabei werden die Elementformulierungen für Timoshenko-Biegebalken, Torsionsstäbe, Ersatzmassen, elastische und hydrodynamische Lagerung und den magnetischen Zug hergeleitet.

Das mathematische Vorgehen zum Zusammenfügen und Beschreiben eines aus den zuvor erklärten Elementtypen bestehenden Modells, wird in Kapitel 4 *Systembeschreibung und -lösung* beschrieben.

Das Kapitel 5 *Aufbau und Bedienung des MATLAB*<sup>®</sup>-*Programms* behandelt die konkrete Umsetzung der, in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Vorgehensweise. Die Bedienung der dort erstellten graphischen Benutzeroberfläche wird ebenfalls in diesem Kapitel erklärt.

Ein Vergleich der Ergebnisse des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programms mit jenen des kommerziellen FE-Programms *ANSYS*<sup>®</sup> erfolgt im Kapitel 6 *Vergleich der Ergebnisse*.

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden in einem ersten Schritt die theoretischen Grundlagen, die zur Beschreibung von allgemeinen Schwingungen und Schwingungseffekten notwendig sind, genauer ausgeführt. Dabei wird zunächst von der einfachsten Form einer Schwingung, dem Einmassenschwinger ausgegangen. Dieses stark vereinfachte Modell ermöglicht es bereits, die wichtigsten Eigenschaften und Effekte auch komplexerer Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden herzuleiten und zu verstehen. Anschließend wird genauer auf die speziellen Effekte und Problemstellungen in der Rotordynamik eingegangen. Schlussendlich soll eine Einführung in die Methode der Finiten Elemente und ein Überblick über gebräuchliche mathematische Formulierungen für Biegebalken das Verständnis der in dieser Arbeit verwendeten Rechenverfahren und Elementtypen erleichtern.

### 2.1 Einmassenschwinger

Ein Einmassenschwinger besitzt genau einen Freiheitsgrad. Dieses Modell ist gut geeignet, um die grundsätzlichen Eigenschaften von Schwingungen wie Eigenfrequenzen, Dämpfung und Resonanz zu erklären. Die Herleitungen in diesem Kapitel wurden aus [10] übernommen.

#### 2.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung

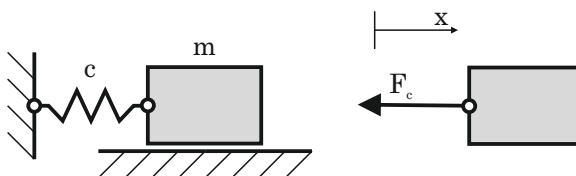


Abbildung 2.1: Einmassenschwinger

Der Einmassenschwinger besteht in seiner einfachsten Form aus einer Punktmasse mit der Masse  $m$ , welche über eine Feder mit der Federkonstante  $c$  mit einer starren Wand verbunden ist. Eine derartige Anordnung ist in Abbildung 2.1 ersichtlich. Der Einmassenschwinger besitzt einen transversalen Freiheitsgrad in Richtung der Koordinate  $x$ . Bei einer linear elastischen Feder ist die Federkraft  $F_c$  direkt proportional zur Auslenkung.

$$F_c = cx \quad (2.1)$$

Durch das Freischneiden der Punktmasse wie in Abbildung 2.1 und Umformen erhält man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (2.2)$$

Durch Definition der Kreisfrequenz  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \quad (2.3)$$

vereinfacht sich Gleichung (2.2) zu

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.4)$$

Die Lösung für eine derartige lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung lautet im Allgemeinen

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (2.5)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  können hierbei aus den Anfangsbedingungen mit dem Anfangsweg  $x_0$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$x(t = 0) = x_0, \quad (2.6)$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0, \quad (2.7)$$

ermittelt werden. Die Lösung besteht also aus einer reinen Linearkombination von Winkel-funktionen, was einer harmonischen Schwingung entspricht. Eine derartige Schwingung ist in Abbildung 2.2 ersichtlich. Unabhängig vom Anfangszustand schwingt der unangeregte Einmassenschwinger immer mit derselben Kreisfrequenz  $\omega$ , welche durch die Parameter des Systems eindeutig definiert ist. Diese Frequenz wird als Eigenfrequenz bezeichnet.

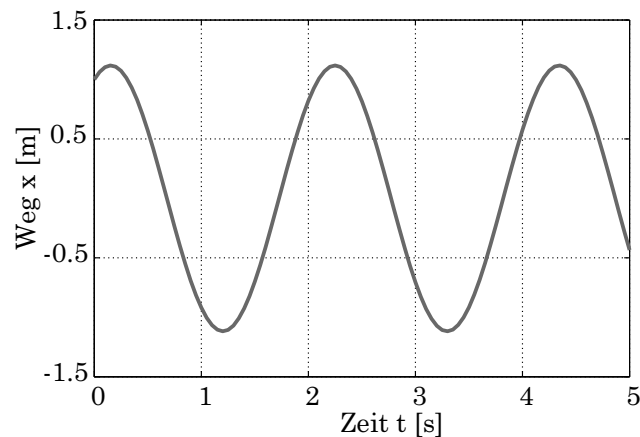


Abbildung 2.2: Freie ungedämpfte Schwingung

### 2.1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Fügt man dem zuvor behandelten System einen Dämpfer mit dem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskoeffizienten  $d$  hinzu, so ergibt sich eine Anordnung wie in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Dämpferkraft  $F_d$  errechnet sich dabei zu

$$F_d = d\dot{x}. \quad (2.8)$$

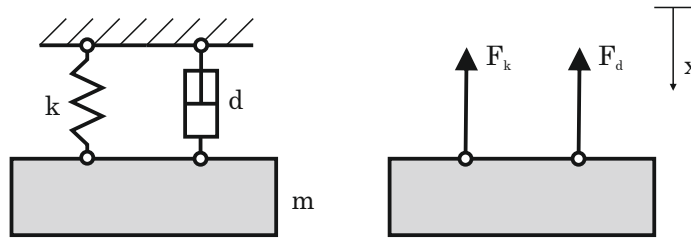


Abbildung 2.3: Einmassenschwinger mit Dämpfung

Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (2.9)$$

Nach Einführung des Abklingkoeffizienten  $\delta$  mit

$$2\delta = \frac{d}{m} \quad (2.10)$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (2.3) vereinfacht sich Gleichung (2.9) zu

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x = 0. \quad (2.11)$$

Die Lösung eines solchen Systems wird durch den Exponentialansatz

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (2.12)$$

beschrieben. Durch Rückeinsetzen in Gleichung (2.11) und unter Verwendung des Dämpfungsgrades (Lehr'sches Dämpfungsmaß)

$$D = \frac{\delta}{\omega} \quad (2.13)$$

ergibt sich

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}. \quad (2.14)$$

Je nach Größe des Dämpfungsmaßes  $D$  unterscheidet man drei Fälle:

**a) Starke Dämpfung ( $D > 1$ )**

Beide Lösungen für  $\lambda$  sind reell:  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mu$  mit  $\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$ . Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination der Teillösungen zu

$$x(t) = e^{-\delta t}(A_1e^{\mu t} + A_2e^{-\mu t}) \quad (2.15)$$

Die Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  können auch hier aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden. Weil  $\delta > \mu$  gilt, kommt es zu einer exponentiell gegen null abklingenden Bewegung ohne periodische Anzeichen, wie in Abbildung 2.4 dargestellt.

**b) Aperiodischer Grenzfall ( $D = 1$ )**

Die beiden Lösungen für  $\lambda$  sind identisch  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . Die Lösung lautet in diesem Fall

$$x(t) = (A_1 + A_2t)e^{-\delta t}. \quad (2.16)$$

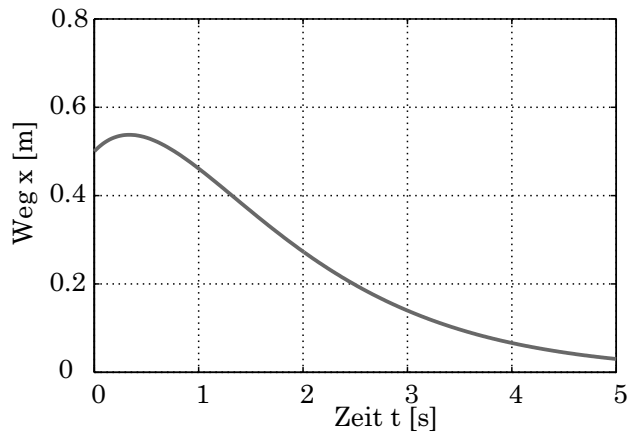


Abbildung 2.4: Stark gedämpfte Schwingung

In diesem Fall verschwindet die Bewegung schnellstmöglich. Auch hier kommt es zu keiner periodischen Schwingung. Man spricht vom aperiodischen Grenzfall.

**c) Schwache Dämpfung ( $D < 1$ )**

Die Lösung für  $\lambda$  ist konjugiert komplex  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega\sqrt{1-D^2}$ . Daraus ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung unter Verwendung der gedämpften Eigenfrequenz

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2} \quad (2.17)$$

zu

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \alpha). \quad (2.18)$$

Die Konstanten  $C$  für die Amplitude und  $\alpha$  für den Phasenwinkel können aus den Anfangsbedingungen berechnet werden. Die Lösung stellt eine harmonische Schwingung dar, die mit einer exponentiellen Dämpfung überlagert wird. Dementsprechend kommt es zu einem exponentiellen Abklingen der Bewegungsamplituden. Dies ist in Abbildung 2.5 anschaulich dargestellt. Die Kreisfrequenz der periodischen Schwingung entspricht der gedämpften Eigenfrequenz  $\omega_d$ . Anhand von Gleichung (2.17) ist ersichtlich, dass sich diese von der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems nur

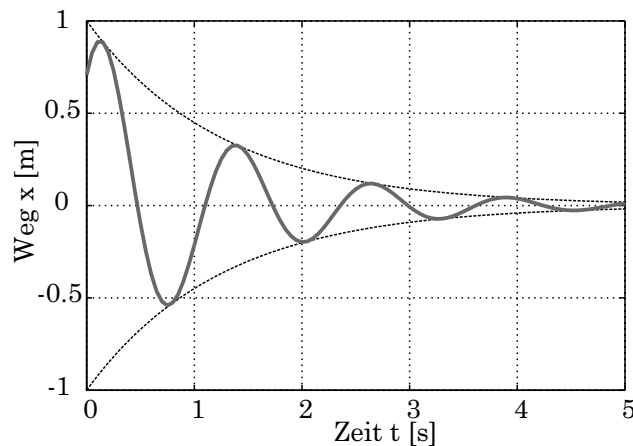


Abbildung 2.5: Schwach gedämpfte Schwingung

durch den Faktor  $\sqrt{1 - D^2}$  unterscheidet. Für sehr kleine Dämpfungen mit  $D \rightarrow 0$  stimmen die Eigenfrequenzen des gedämpften und ungedämpften Systems überein.

### 2.1.3 Angeregte Schwingung

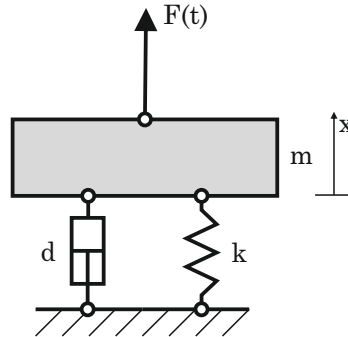


Abbildung 2.6: Gedämpfter Einmassenschwinger mit Anregung

Durch verschiedenste äußere Einflüsse kann es zu einer Schwingungsanregung kommen. Die einfachste Form einer Anregung stellt eine Anregung durch eine äußere Kraft  $F(t)$  dar, wie in Abbildung 2.6 ersichtlich. In [10] werden verschiedenste Formen der Anregung untersucht, wobei alle unter Berücksichtigung von Gleichung (2.3), Gleichung (2.10) und Gleichung (2.13) und mit  $\Omega$  für die Kreisfrequenz der Anregung und  $x_0$  für die Amplitude der Anregung auf die identische Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{x} + \frac{2D}{\omega}\dot{x} + x = x_0 E \cos(\Omega t) \quad (2.19)$$

führen. Die verschiedenen Anregungsarten unterscheiden sich nur durch den Faktor  $E$ , welcher somit die Art der Anregung bestimmt. Die rechte Seite dieser Differentialgleichung stellt eine Störfunktion dar, sodass es sich nicht mehr um eine homogene, sondern um eine allgemeine Differentialgleichung handelt. Die allgemeine Lösung für Differentialgleichungen setzt sich aus der homogenen Lösung  $x_h(t)$  und der partikulären Lösung  $x_p(t)$  zusammen zu

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (2.20)$$

Die homogene Lösung entspricht dabei der Lösung des nicht angeregten Systems und verschwindet bei einer vorhandenen Dämpfung mit zunehmender Zeit. Die Partikulärlösung beschreibt den Anteil der Schwingung, der aus der Anregung resultiert. Im weiteren Verlauf soll die homogene Lösung nicht näher betrachtet werden, da diese ohnehin abklingt und der bereits in Kapitel 2.1.2 hergeleiteten Lösung des nicht angeregten Systems entspricht. Der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet mit der dimensionslosen Größe  $V$  als Maß für das Verhältnis der Schwingungsamplitude zur Anregungsamplitude

$$x_p(t) = x_0 V \cos(\Omega t - \phi). \quad (2.21)$$

Es ist also ersichtlich, dass es sich bei der partikulären Lösung um eine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  der Anregung handelt, die um  $\phi$  zur Anregung phasenverschoben ist und deren Amplitude mit dem auch als Vergrößerungsfunktion bezeichneten Faktor  $V$  multipliziert wird. Durch Einsetzen und Lösen ergeben sich mit der normierten Anregungsfrequenz

$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$  für den Phasenwinkel  $\phi$

$$\tan(\phi) = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.22)$$

und die Vergrößerungsfunktion  $V$

$$V = \frac{E}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad (2.23)$$

Trägt man die Vergrößerungsfunktion  $V$  über der normierten Anregungsfrequenz  $\eta$  auf, so erhält man ein Diagramm wie in Abbildung 2.7 dargestellt. Anhand dieser ist ersichtlich, dass es bei einer Anregung im Bereich der Eigenfrequenz zu sehr hohen Amplituden kommt. Die Größe der Amplitude ist dabei von der Dämpfung abhängig. Je geringer der Dämpfungsgrad, desto größer wird die Amplitude. Ohne Dämpfung steigt die Amplitude theoretisch gegen unendlich. Ebenfalls ist deutlich zu erkennen, dass die Eigenfrequenz mit zunehmender Dämpfung kleiner wird. Der Effekt der steigenden Amplituden im Bereich der Eigenfrequenz wird Resonanz genannt und ist im Allgemeinen unerwünscht, da zu große Amplituden zu unerwünschten Effekten, Lärm und im schlimmsten Fall zu Bauteilversagen führen können.

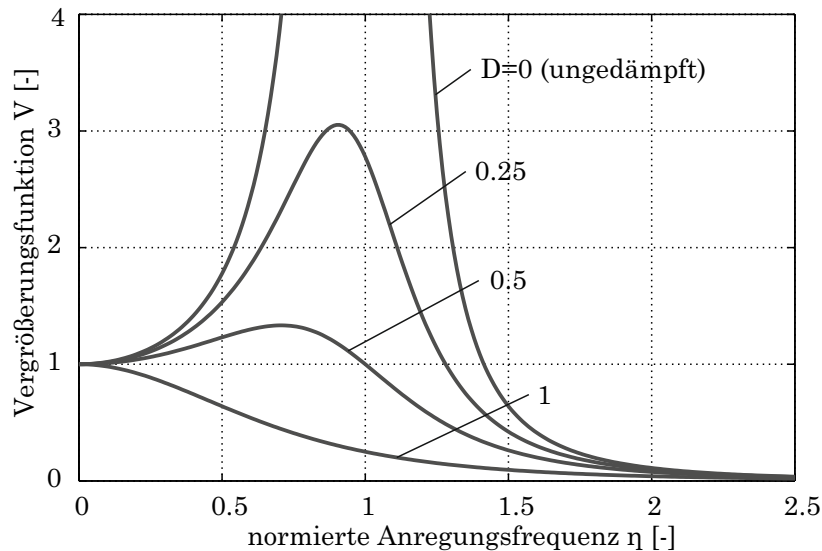


Abbildung 2.7: Verlauf der Vergrößerungsfunktion für verschiedene Dämpfungsgrade

## 2.2 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

In der Praxis ist der Einmassenschwinger als Modell für viele Anwendungsgebiete nicht ausreichend. Zumeist liegt eine weit größere Anzahl an Freiheitsgraden vor. Dies erfordert eine besondere Beschreibung des Systems. Diese und einige spezielle Eigenschaften solcher Systeme sollen in diesem Unterkapitel beschrieben werden.

Ein Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden besteht aus verschiedensten Bauteilen (Massen, Balken, starre Körper usw.) die durch unterschiedlichste Kopplungen (Feder, Dämpfer usw.) miteinander verbunden sind. Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  des Systems ergibt sich aus den mechanischen Zwangsbedingungen und kann einfach nach [11] berechnet

werden

$$f = 6n - (r + v). \quad (2.24)$$

Hierbei ist  $n$  die Zahl der starren Körper mit je 6 Freiheitsgraden, welche durch entsprechende Lagerreaktionen  $r$  und Bindungsreaktionen  $v$  reduziert werden. Des Weiteren können die Freiheitsgrade im Allgemeinen in Dreh- und Translationsfreiheitsgrade unterschieden werden.

### 2.2.1 Mathematische Beschreibung

Die Beschreibung derartiger Systeme erfolgt ähnlich der Beschreibung des Einmassenschwingers. Wie beim Einmassenschwinger sind die wesentlichen Systemeigenschaften durch Massenträgheiten, Steifigkeiten und Dämpfungen definiert. Alle Freiheitsgrade werden zu einem Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefasst, der diese in einer entsprechenden Reihenfolge enthält. Durch diese Beschreibung ergibt sich, dass die Elemente zur Beschreibung der Systemmasse, -steifigkeit und -dämpfung Matrizen sind. Das System besitzt somit eine Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , eine Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  und eine Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . Die äußeren Kräfte werden im Kraftvektor  $\mathbf{f}$  zusammengefasst. Dadurch ergibt sich für den Fall eines linearen Systems ohne veränderliche Masse die Bewegungsgleichung in Vektorform

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (2.25)$$

Die in Gleichung (2.25) vorkommenden Matrizen werden Systemmatrizen genannt.

### 2.2.2 Modalanalyse

Ähnlich wie beim Einmassenschwinger ist es wichtig, die Eigenfrequenzen eines solchen Systems mit mehreren Freiheitsgraden ermitteln zu können. Während beim Einmassenschwinger stets nur eine einzelne Eigenfrequenz existiert, besitzt ein System mit  $n$  Freiheitsgraden genau  $n$  Eigenfrequenzen. Während beim Einmassenschwinger die Schwingungsform stets klar durch den einzelnen Freiheitsgrad vorgegeben ist, existieren bei einem System mit mehreren Freiheitsgraden viele verschiedene Formen, wie sich eine Schwingung ausbilden kann. Man spricht von verschiedenen Schwingungsformen oder -moden. Zu jeder der  $n$  Eigenfrequenzen existiert eine zugehörige Eigenform, welche die geometrische Form dieser Schwingung repräsentiert.

Eine Eigenform beschreibt die relative Schwingungsamplitude jedes Freiheitsgrades. Eine Aussage über die absoluten Amplituden ist nicht möglich. Eine Modalanalyse ermöglicht es, die Eigenfrequenzen und die Eigenformen eines schwingungsfähigen Systems mit mehreren Freiheitsgraden aus den Systemmatrizen zu berechnen. Eigenfrequenzen und -formen sind ausschließlich von den Parametern des Systems selbst abhängig, weshalb eine eventuelle Anregung hierbei keinen Einfluss hat. Dies trifft jedoch nur für den hier betrachteten einfachen und linearen Fall zu.

### Ungedämpfte Systeme

Das ungedämpfte System ohne Anregung wird durch

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (2.26)$$



beschrieben. Durch Einsetzen des Exponentialansatzes

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t} \quad (2.27)$$

und nach Rückeinsetzen in Gleichung (2.32) ergibt sich ein Eigenwertproblem der Form

$$(\mathbf{K} + \lambda_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.28)$$

wobei hierbei  $\lambda_i$  den  $i$ -ten Eigenwert darstellt und  $\mathbf{r}_i$  den zugehörigen Eigenvektor. Für ein ungedämpftes symmetrisches System ergeben sich stets rein imaginäre, paarweise konjugiert komplexe Eigenwerte

$$\lambda_i = \pm i \omega_i^2 \quad (2.29)$$

mit der jeweiligen Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$ . Die zugehörigen Eigenformen sind reelle Vektoren.

### Systeme mit Dämpfung

Die Gleichung für homogene Systeme mit Dämpfung lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0. \quad (2.30)$$

Durch Transformation auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung ergibt sich mit dem neuen Zustandsvektor  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

die Systembeschreibung der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z} \quad (2.32)$$

sodass das gesamte System mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  beschrieben werden kann. Auch hier folgt aus einem Exponentialansatz wie in Gleichung (2.27) für  $\mathbf{z}$  ein komplexes Eigenwertproblem der Form

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.33)$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  und den zugehörigen Eigenformen  $\mathbf{r}_i$ . In diesem Fall ergeben sich für  $\lambda_i$  komplexe Zahlen, wobei der Realteil eine Information bezüglich der Dämpfung enthält und der Imaginärteil die Eigenkreisfrequenz bestimmt. Für eine allgemeine Dämpfung sind auch die Eigenvektoren komplex. Dementsprechend kann es zu Phasenverschiebungen zwischen den einzelnen Freiheitsgraden kommen.

## 2.3 Schwingungen von Rotoren

Rotoren sind laut ISO-Definition definiert als Körper, die so gelagert sind, dass sie um eine fixe Achse rotieren können [12]. Durch diese Rotation entstehen spezielle Effekte, die im Rahmen der Rotordynamik berücksichtigt werden.

### 2.3.1 Campbelldiagramm und kritische Drehzahl

Wie oben beschrieben ist die Drehung um die Rotationsachse eine wesentliche Eigenschaft von Rotoren. Diese Drehung erfolgt mit der Rotordrehgeschwindigkeit  $\Omega$ . Aufgrund verschiedener Effekte, die im folgenden Kapitel näher erläutert werden, kommt es zu einer Abhängigkeit der Eigenfrequenzen eines Rotors von der Rotordrehgeschwindigkeit  $\Omega$ .

Für den ruhigen und sicheren Lauf eines Rotors ist es essentiell, Schwingungsamplituden möglichst klein zu halten. Wie beim angeregten Einmassenschwinger bereits ausgeführt, werden Schwingungsamplituden besonders hoch, wenn Resonanz auftritt. Es muss also sichergestellt werden, dass dem Rotor keine Anregung im Bereich einer seiner Eigenfrequenzen widerfährt. Durch die Rotation und Unwuchten kommt es im Allgemeinen immer zu einer Anregung mit Frequenz der Rotordrehzahl. Stimmt die Frequenz der Rotordrehzahl mit einer Eigenfrequenz überein, so spricht man von einer kritischen Drehzahl.

Zur Veranschaulichung und Bestimmung dieser kritischen Drehzahlen wird ein Campbelldiagramm verwendet. Ein solches Campbelldiagramm eines beliebigen Rotors ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Dabei werden die Eigenfrequenzen des Rotors über der Rotordrehzahl aufgetragen. Bei äquivalenten Einheiten für beide Achsen bildet die Anregung durch Unwucht eine um  $45^\circ$  geneigte Gerade. Schneidet diese eine Eigenfrequenz, so ist der Ordinatenwert dieses Schnittpunktes eine kritische Drehzahl. Anhand der Schnittpunkte der Eigenfrequenzen mit der strichliert dargestellten Anregungsgeraden werden die kritischen Drehzahlen (bzw. kritische Drehfrequenzen  $f_{criti}$ ) ermittelt und eingezeichnet.

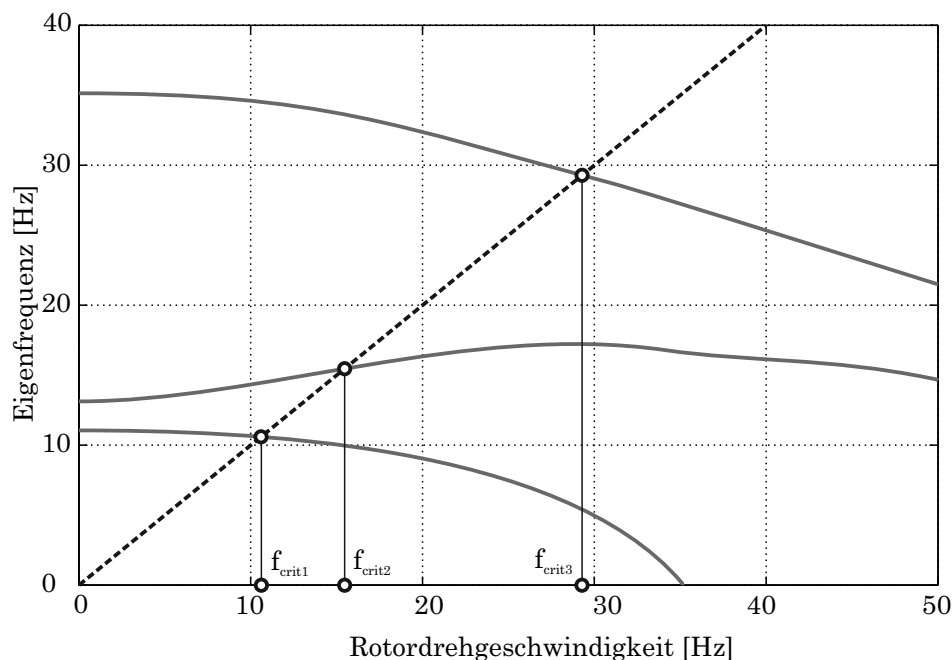


Abbildung 2.8: Campbelldiagramm und kritische Drehzahlen

### 2.3.2 Einfaches Rotormodell mit Punktmasse

Das einfachste Modell zur Beschreibung von Biegeschwingungen eines Rotors besteht aus einer masselosen Welle mit daran aufgebrachtener Punktmasse. Dieses Modell wird auch als Jeffcot-Rotor bezeichnet. Ähnlich wie beim Einmassenschwinger dient auch dieses verein-

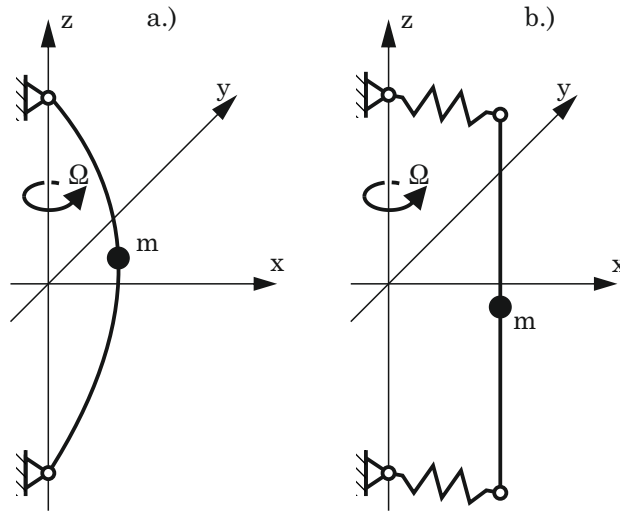


Abbildung 2.9: Jeffcot Rotoren: a) starre Lager und nachgiebige Welle, b) starre Welle und nachgiebige Lager [12]

fachte Modell dazu, wichtige Grundlagen der Rotordynamik zu erklären und zu verstehen. Die einfachste Form eines Jeffcot-Rotors stellen die Varianten a) und b) in Abbildung 2.9 dar. Beide Varianten liefern dasselbe Ergebnis, sofern von einem ungedämpften und axial symmetrischen System ausgegangen wird. Es wird im Folgenden davon ausgegangen,

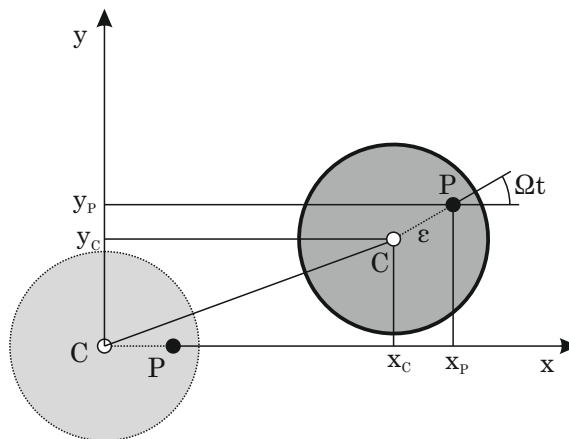


Abbildung 2.10: Ausgelenkter Querschnitt eines Jeffcot Rotors

dass der Rotor eine Unwucht aufweist und daher die Punktmasse an der Stelle  $P$  um den Abstand  $\epsilon$  zum geometrischen Mittelpunkt  $C$  versetzt liegt. Dies ist in Abbildung 2.10 dargestellt, wobei zusätzlich von einer durch eine Schwingung verursachten Auslenkung des geometrischen Mittelpunktes  $C$  von der Rotationsachse, die im Koordinatenursprung liegt, ausgegangen wird. Im ausgelenkten Zustand setzt sich der Ortsvektor des Schwerpunkts aus der Auslenkung des geometrischen Mittelpunkts und dem Abstand des Schwerpunkts zu diesem zusammen. Für den Ortsvektor der Unwucht ergibt sich damit

$$\mathbf{r}_P(t) = \begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_C(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Die kinetische Energie  $\mathcal{T}$  und die potentielle Energie  $\mathcal{U}$  ergeben sich daraus mit der Steifigkeit  $c$  zu

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2), \quad (2.35)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}c(x_P^2 + y_P^2). \quad (2.36)$$

Damit kann die Bewegungsgleichung nach Lagrange 2. Art aufgestellt werden

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial q_i} = 0, \quad (2.37)$$

wobei  $q_i$  die generalisierten Koordinaten, also  $x_C$  und  $y_C$  sind. Gleichung (2.37) führt auf die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C(t) + cx_C(t) &= m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_C(t) + cy_C(t) &= m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Bewegungsgleichungen entlang jeder Koordinate ähneln jenen eines angeregten Einmassenschwingers. Die Anregung auf der rechten Seite resultiert aus der Unwucht. Analog zum Einmassenschwinger können die freie Schwingung (homogene Lösung) und die angelegte Schwingung (partikuläre Lösung) getrennt voneinander betrachtet werden.

### Freie Schwingung

Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (2.38) des angeregten Rotors unter Vernachlässigung der Störfunktion zu

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C(t) + cx_C(t) &= 0 \\ m\ddot{y}_C(t) + cy_C(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Lösung ergibt sich durch Anwendung des Exponentialansatzes zu

$$\begin{aligned} x_C(t) &= X \cos(\omega_n t - \phi_x) \\ y_C(t) &= Y \cos(\omega_n t - \phi_y). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dies entspricht zwei harmonischen, voneinander entkoppelten Schwingungen mit der Eigenfrequenz  $\omega_n$ , die sich analog zum Einmassenschwinger aus

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (2.41)$$

ergibt. Die Konstanten für die Amplituden  $X, Y$  und die Phasenlagen  $\phi_x, \phi_y$  ergeben sich dabei aus den Anfangsbedingungen. Anhand von Abbildung 2.11 ist ersichtlich, wie sich die Wirbelbewegung in der  $xy$ -Ebene aus einer Kreisfunktion für die  $x$ -Ebene und einer ebensolchen für die  $y$ -Ebene zusammensetzt. Die Radien der Kreise entsprechen den Konstanten  $X, Y$ , die beiden Pfeile rotieren beide mit der Drehgeschwindigkeit  $\omega_n$  und weisen eine Phasenverschiebung von  $\phi_x - \phi_y$  zueinander auf. Aus diesem Ergebnis ergeben sich einige interessante Erkenntnisse:

- Es ist ersichtlich, dass sich die Trajektorie von  $C$  je nach Anfangsbedingungen kreisförmig, elliptisch oder als Linie ausbilden kann. Man spricht hierbei von einem Orbit.
- Obwohl beide Schwingungen die konstante Kreisfrequenz  $\omega_n$  aufweisen, rotiert der Vektor  $\overline{OC}$  mit einer nicht konstanten Winkelgeschwindigkeit in der  $xy$ -Ebene. Seine Periode entspricht jedoch  $2\pi/\omega_n$ .
- Sollte sich durch entsprechende Anfangsbedingungen ein periodischer, also kreisförmiger Orbit ausbilden, so rotiert der Rotor in seiner konstant ausgelenkten Form mit der Drehgeschwindigkeit  $\omega_n$ . Es handelt sich somit streng genommen um keine Schwingung, sondern um ein Wirbeln.
- Die Eigenfrequenz des Rotors ist unabhängig von seiner Drehzahl. Der Verlauf der Eigenfrequenz im Campbelldiagramm nimmt eine Gerade an, deswegen entspricht diese auch der kritischen Drehzahl.

$$\Omega_{crit} = \omega_n \quad (2.42)$$

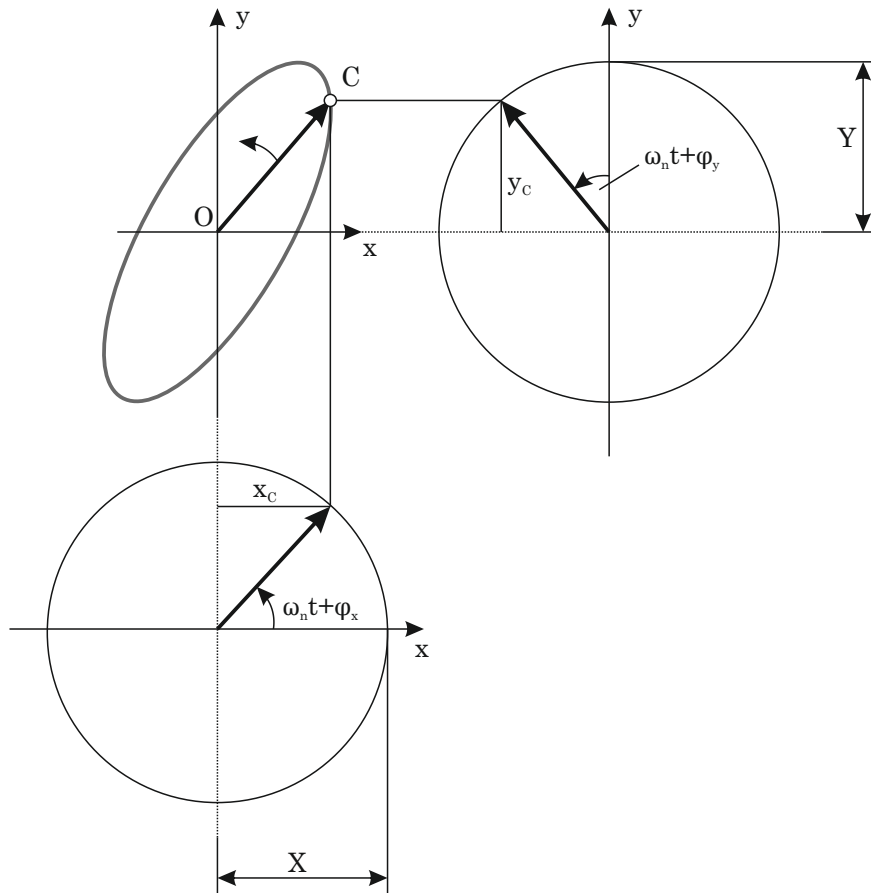


Abbildung 2.11: Die aus zwei harmonischen Schwingungen zusammengesetzte Wirbelbewegung in der  $xy$ -Ebene

## Unwucherregte Schwingung

Die Bewegungsgleichung (2.38) beschreibt die Anregung durch die Unwucht  $\epsilon$ . Die partielle Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}x_C(t) &= x_{C_0} \cos(\Omega t) \\y_C(t) &= y_{C_0} \sin(\Omega t).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Durch Rückeinsetzen in die Bewegungsgleichung (2.38) ergibt sich der Zusammenhang für die Amplituden in die jeweilige Koordinatenrichtung  $x_{C_0}$  und  $y_{C_0}$  mit  $\Omega_{Cr}$  aus Gleichung (2.42) zu

$$x_{C_0} = y_{C_0} = \epsilon \frac{\frac{\Omega^2}{\Omega_{Cr}^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{Cr}^2}}.\tag{2.44}$$

Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 2.12 dargestellt. Daraus ergeben sich wiederum einige wichtige Erkenntnisse:

- Die Amplituden der beiden Koordinatenrichtungen sind gleich groß und um  $90^\circ$  phasenverschoben. Dementsprechend ergibt sich ein kreisförmiger Orbit und die Wirbel­frequenz beträgt exakt  $\Omega$ . Es handelt sich also um synchrones Wirbeln.
- Im unterkritischen Bereich  $\Omega < \Omega_{Cr}$  steigt die Amplitude von null gegen unendlich. Der Phasenwinkel zwischen Erregung und Antwort ist null. Dementsprechend befindet sich wie in 2.13 unter a.) dargestellt der geometrische Mittelpunkt C näher an der Drehachse als der Massenpunkt P.
- Im überkritischen Bereich  $\Omega > \Omega_{Cr}$  sinkt die Amplitude monoton und wird negativ. Dadurch ergibt sich ein Phasenwinkel zwischen Anregung und Antwort von  $180^\circ$ . Betrachtet man diesen Phasenwinkel geometrisch, so erkennt man, dass es im überkritischen Bereich zu einer Selbstzentrierung des Rotors und somit zu einem ruhigeren Lauf kommt. Wie in Abbildung 2.13 b) dargestellt, befindet sich der Massenpunkt P näher an der Drehachse als der geometrische Mittelpunkt C.

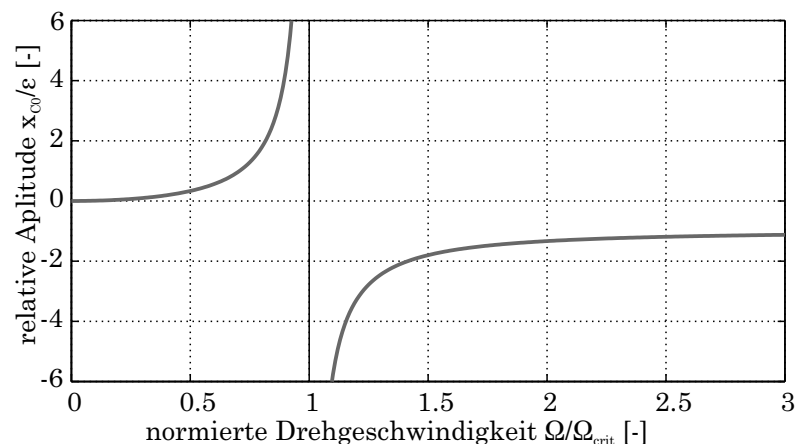


Abbildung 2.12: Verlauf der normierten Amplitude über der normierten Drehgeschwindigkeit

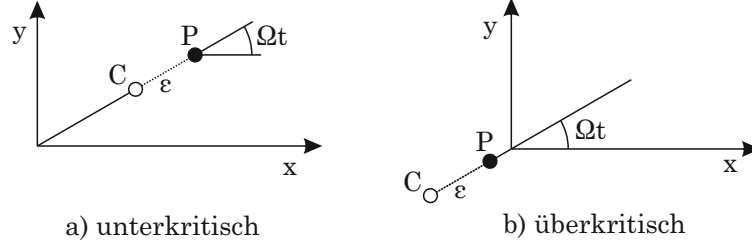


Abbildung 2.13: Verhalten im unter- und überkritischen Bereich

### Freies Wirbeln des gedämpften Systems

Bei einem gedämpften Rotor gilt es grundsätzlich zwischen einer rotierenden und einer nicht rotierenden Dämpfung zu unterscheiden. Eine rotierende Dämpfung ist eine solche, die mit dem Rotor mitrotiert (z.B. Strukturdämpfung). Diese wirkt immer stabilisierend auf das System. Eine nicht rotierende Dämpfung (z.B. durch Dämpfer in der Lagerung) kann die Schwingungsamplituden im unterkritischen Bereich reduzieren, weist jedoch im überkritischen Bereich destabilisierende Effekte auf. Die Bewegungsgleichung für einen gedämpften Jeffcot-Rotor wird in [12] hergeleitet und lautet in komplexer Schreibweise mit den Koeffizienten für rotierende Dämpfung  $d_r$  und nicht rotierende Dämpfung  $d_n$

$$m\ddot{r}_C + (d_r + d_n)\dot{r}_C + (c - id_r\Omega)r_C = m\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}. \quad (2.45)$$

Das Lösen dieser Gleichung erfolgt mit dem Exponentialansatz

$$r_C = r_{C_0} e^{st} \quad (2.46)$$

und führt nach Einsetzen in Gleichung (2.45) und Umformen auf den Zusammenhang

$$s_{1,2} = \sigma_{1,2} + i\omega_{1,2} = -\frac{d_r + d_n}{2m} \pm \sqrt{\frac{(d_r + d_n)^2 - 4m(c - i\Omega d_r)}{4m^2}}. \quad (2.47)$$

Nun können Realteil und Imaginärteil aufgeteilt werden, sodass diese sich zu

$$\sigma_{1,2} = -\frac{d_r + d_n}{2m} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega_{crit}}{m}\right)^2} - \Gamma}, \quad (2.48)$$

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\text{sign}(\Omega)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega_{crit}}{m}\right)^2} + \Gamma}, \quad (2.49)$$

ergeben, wobei die Abkürzung

$$\Gamma = \frac{c}{m} - \frac{(d_r - d_n)^2}{4m^2} \quad (2.50)$$

verwendet wird. Die Lösung hat die Form

$$r = R_1 e^{(\sigma_1 + i\omega_1)t} + R_2 e^{(\sigma_2 + i\omega_2)t} \quad (2.51)$$

mit den aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten  $R_1, R_2$ . Aufgrund der Dämpfung wird der Realteil  $\sigma$  nicht zu null. Ist er negativ, so kommt es zu einer exponentiellen Verkleinerung der Amplituden über die Zeit, das Verhalten ist stabil. Ist  $\sigma$  positiv, so wird das System instabil.

- Bei der Lösung  $s_1 = \sigma_1 + i\omega_1$  stimmt das Vorzeichen von  $\omega_1$  mit der Rotordrehgeschwindigkeit überein, man spricht von einem Vorwärtswirbeln. Der Wert  $\sigma_1$  kann positiv oder negativ sein. Die Stabilitätsbedingung lautet ohne Herleitung

$$\Omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \left( 1 + \frac{d_n}{d_r} \right). \quad (2.52)$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Rotor im unterkritischen Bereich ( $\Omega < \sqrt{\frac{c}{m}}$ ) auf jeden Fall stabil ist. Im überkritischen Bereich ist die Stabilität abhängig vom Verhältnis  $\frac{d_n}{d_r}$ . Wenn keine rotierende Dämpfung  $d_r$  vorhanden ist, so ist der Rotor im überkritischen Bereich immer instabil.

- Bei der Lösung  $s_2 = \sigma_2 + i\omega_2$  stimmt das Vorzeichen von  $\omega_2$  nicht mit der Rotordrehgeschwindigkeit überein. Die Wirbelbewegung führt in die entgegengesetzte Richtung, man spricht von einem Rückwärtsmode. In [12] wird nachgewiesen, dass ein Rückwärtsmode keine Instabilitäten verursacht.

### 2.3.3 Gyroskopischer Effekt - Lavalrotor

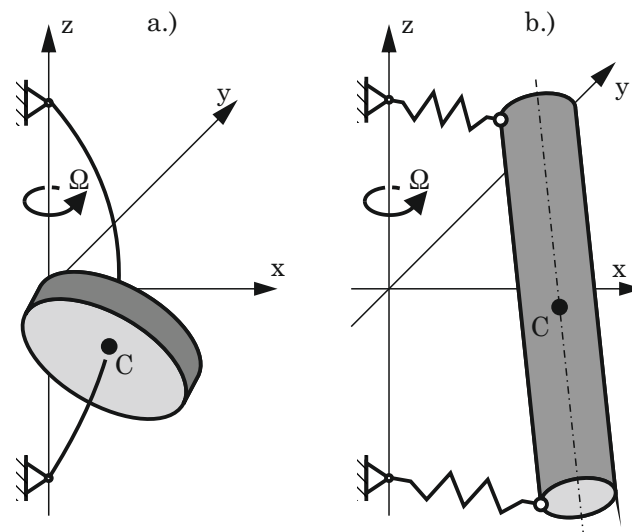


Abbildung 2.14: Lavalrotoren: a.) Scheibe auf biegesteifer Welle mit starren Lagern, b.) Rotor als starrer Körper auf nachgiebigen Lagern [12]

Beim Jeffcot-Rotor wurde der Rotor als Punktmasse modelliert, dementsprechend wurden keine Massenträgheitsmomente berücksichtigt. Erweitert man dieses Modell durch Ersatz der Punktmasse durch einen starren Körper, im einfachsten Fall eine rotationssymmetrische Scheibe, so erhält man ein Modell mit vier Freiheitsgraden<sup>1</sup>. Ein derartiges Modell

<sup>1</sup>jeweils um die x-Achse und die y-Achse ein Translations- und ein Drehfreiheitsgrad



wird als Laval-Rotor bezeichnet. Zwei unterschiedliche Varianten eines solchen sind in Abbildung 2.14 ersichtlich. Dieses Modell bildet nun auch den gyroskopischen Effekt ab, der auf Kreiselkräften beruht.

Wird die sich mit Rotordrehzahl  $\Omega$  rotierende Scheibe mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_x$  um die x-Achse oder mit  $\dot{\varphi}_y$  um die y-Achse ausgelenkt, so entsteht am Rotor ein Drehmoment um die jeweils andere Achse [13]. Dieses Drehmoment führt zusammen mit dem Trägheitsmoment z. B. in y-Richtung mit dem axialen Massenträgheitsmoment  $J_t$  und dem polaren Massenträgheitsmoment  $J_p$  zum gesamten an der Scheibe angreifenden Moment

$$M_y = \underbrace{J_p \Omega \dot{\varphi}_x}_{\text{Kreiselmoment}} - \underbrace{J_t \ddot{\varphi}_y}_{\text{Trägheitsmoment}}. \quad (2.53)$$

In [12] wird die Bewegungsgleichung für einen Laval-Rotor im ruhenden Inertialsystem hergeleitet. Unter der Annahme einer rotationssymmetrischen Scheibe bzw. eines rotationssymmetrischen Körpers ergibt sich der Trägheitstensor zu

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Anhand der Bewegungsgleichung mit den Steifigkeiten  $c_{ij}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \end{bmatrix} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & J_t \end{bmatrix}}_{\text{gyroskopische Matrix } \mathbf{G}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi}_x \end{bmatrix} + \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & -c_{12} \\ 0 & 0 & -c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix } \mathbf{K}} \begin{bmatrix} x \\ \varphi_y \\ y \\ \varphi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55) \end{aligned}$$

ist ersichtlich, dass es durch den Kreiseffekt, der durch die gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  beschrieben wird, zu einer Kopplung der beiden Schwingungsebenen  $xz$  und  $yz$  kommt. Eine Kopplung der Translationsfreiheitsgrade  $x$  und  $y$  und der Drehfreiheitsgrade  $\varphi_y$  und  $\varphi_x$  erfolgt über die Steifigkeitsmatrix mit den Einträgen in der Nebendiagonale  $K_{12}$ .

Durch den Einfluss der gyroskopischen Matrix besitzt das System auch ohne Unwuchtanregung eine Abhängigkeit von der Rotordrehzahl  $\Omega$  und dementsprechend ändern sich auch die Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl. Die beiden Schwingungsebenen können zu einer komplexen Ebene zusammengefasst werden. Damit ergeben sich die komplexen Koordinaten

$$r = x + iy, \quad (2.56)$$

$$\varphi = \varphi_y - i\varphi_x. \quad (2.57)$$

Mit diesem Ansatz vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (2.55) zu

$$m\ddot{r} + c_{11}r + c_{12}\varphi = 0, \quad (2.58)$$

$$J_t\ddot{\varphi} - i\Omega J_p\dot{\varphi} + c_{12}r + c_{22}\varphi = 0. \quad (2.59)$$

### Freies Wirbeln des ungekoppelten gyroskopisches System

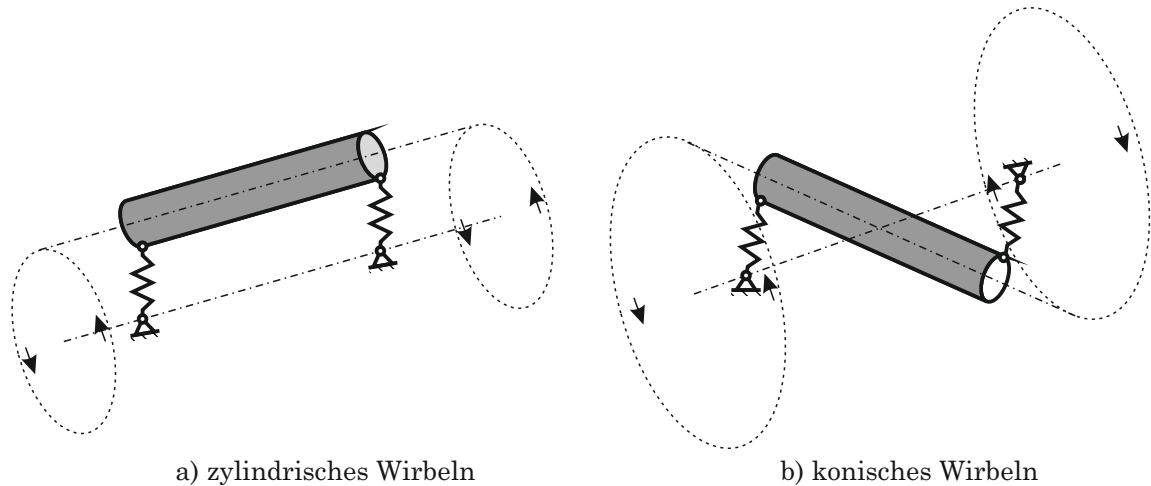


Abbildung 2.15: Verschiedene Wirbelformen beim Lavalrotor

Die Translationsfreiheitsgrade sind von den Rotationsfreiheitsgraden entkoppelt, wenn die Einträge in der Nebendiagonale der Steifigkeitsmatrix in Gleichung (2.55) verschwinden. Translatorische Bewegung findet mit parallel zur Drehachse verschobener Achse statt und wird als zylindrisches Wirbeln bezeichnet. Dies ist in Abbildung 2.15 a) dargestellt. Rotationsbewegungen finden um den Schwerpunkt des Rotors statt und werden als konisches Wirbeln bezeichnet, wie in Abbildung 2.15 a) ersichtlich. Die Bewegungsgleichung reduziert sich auf

$$m\ddot{r} + c_{11}r = 0 \quad (2.60)$$

$$J_t\ddot{\varphi} - i\Omega J_p\dot{\varphi} + c_{22}\varphi = 0. \quad (2.61)$$

Gleichung (2.60) entspricht der des einfachen Rotors mit Massenpunkt und wird deshalb nicht näher erläutert. Dieser Teil der Lösung weist keine Abhängigkeit von der Rotordrehzahl auf. Die Gleichung (2.61) stellt den einfachsten Fall eines gyroskopischen Systems dar. Die freie Schwingung dieses ungedämpften Systems kann mit dem Exponentialansatz  $\varphi = \varphi_0 e^{st}$  ermittelt werden. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gleichung (2.60) und Umformen ergibt sich das charakteristische Polynom für die Eigenfrequenzen

$$(J_t s^2 + i s J_p \Omega + c_{22}) = 0 \quad (2.62)$$

und daraus die Lösung für die komplexe Zahl  $s = \sigma + i\omega$  in dimensionsloser Form mit dem Verhältnis  $\delta = J_p/J_t$  und den dimensionslosen Größen  $\omega^* = \omega/\omega_0$  und  $\Omega^* = \Omega/\omega_0$ , wobei

$\omega_0 = \sqrt{K_{22}/J_t}$  die Eigenfrequenz im Stillstand ist, zu

$$\omega^* = \frac{\delta\Omega^*}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2\Omega^{*2}}{4} + 1}, \quad (2.63)$$

$$\sigma^* = 0. \quad (2.64)$$

Daraus ergeben sich folgende Erkenntnisse für das Campbelldiagramm, welches in Abbildung 2.16 dargestellt ist:

- Die Kurven im Campbelldiagramm sind keine horizontalen Linien, da die Eigenfrequenz von der Drehzahl abhängig ist, außer wenn  $\delta = 0$  ist und damit der gyroskopische Effekt verschwindet.
- Die Frequenz der Vorwärtsmoden ( $\omega > 0$ ) steigt mit zunehmender Drehzahl und weist eine Asymptote  $\omega = \delta\Omega$  auf.
- Die Frequenz der Rückwärtsmoden ( $\omega < 0$ ) steigt mit zunehmender Drehzahl und strebt gegen null für  $\Omega \rightarrow \infty$ .
- Bei scheibenähnlichen Rotoren mit  $\delta > 1$  kommt es zu keinem Schnittpunkt mit der Anregungsgeraden  $\omega = \Omega$  und es gibt somit keine kritische Drehzahl.
- Bei langen Rotoren mit  $\delta < 1$  kommt es zu einem Schnittpunkt mit der Anregungsgeraden  $\omega = \Omega$  und es gibt somit eine kritische Drehzahl. Diese ergibt sich zu

$$\Omega_{Cr} = \sqrt{\frac{c_{22}}{J_t} \frac{1}{\sqrt{1-\delta}}}. \quad (2.65)$$

- Im Grenzfall  $\delta = 1$  kommt es zwar zu keiner dezidierten kritischen Drehzahl, aber die Eigenfrequenz liegt immer näher an der Frequenz der Drehzahl, je höher diese wird.

Das komplette Campbelldiagramm dieses Systems ergibt sich aus einer Überlagerung des Campbelldiagramms des einfachen Rotors mit Punktmasse mit dem hier behandelten Campbelldiagramm des konischen Wirbels.

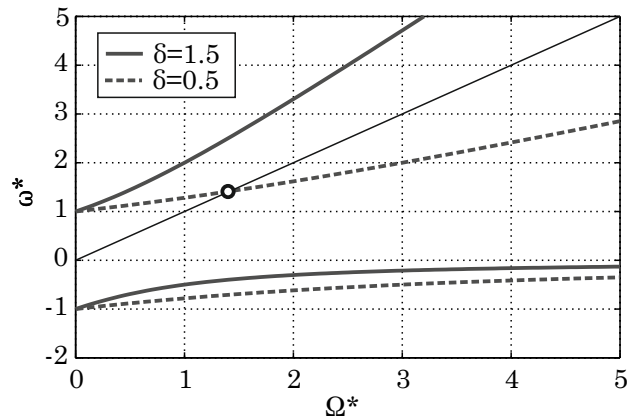


Abbildung 2.16: Campbelldiagramm des Lavalrotors

## Freies Wirbeln des gekoppelten Systems

Die ungekoppelte Lösung für das ungekoppelte System hat die Form

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} e^{st}. \quad (2.66)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung in komplexen Koordinaten (2.59) ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} ms^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & J_t s^2 + isJ_p \Omega + c_{22} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.67)$$

Weil die Lösungen für dieses Eigenproblem rein komplex sind<sup>2</sup>, kann anstatt von  $s = i\omega$  direkt  $\omega$  im Ansatz verwendet werden, was auf die Gleichung

$$\omega^4 - \Omega\omega^3 \frac{J_p}{J_t} - \omega^2 \left( \frac{c_{11}}{m} + \frac{c_{22}}{J_t} \right) + \Omega\omega \frac{c_{11}J_p}{mJ_t} + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{mJ_t} = 0 \quad (2.68)$$

führt. Diese Gleichung besitzt vier Lösungen, wobei zwei negativ sind. Es existieren also für jede Drehzahl jeweils zwei Vorwärtsmoden und zwei Rückwärtsmoden.

## 2.4 Diskretisierung kontinuierlicher Systeme

Sehr häufig bestehen schwingungsfähige Systeme nicht nur aus Punktmassen und starren Körpern, sondern auch aus kontinuierlichen Bauteilen, wie zum Beispiel Balken oder verformbaren Körpern, die nicht als starr angesehen werden können. Eine analytische Beschreibung und Lösung ist für sehr einfache Beispiele möglich, wird aber bei komplexeren Geometrien und Systemen sehr schnell nicht mehr durchführ- und berechenbar.

Aus diesem Grund stellt eine entsprechende Diskretisierung eines solchen Systems den Schlüssel zu einer guten Modellierung und zur Beschreibung und anschließenden Lösung des Systems dar. Die zwei wichtigsten Methoden zur Diskretisierung kontinuierlicher Systeme im Bereich der Rotordynamik werden im Folgenden dargestellt und erläutert.

### 2.4.1 Übertragungsmatrizenverfahren

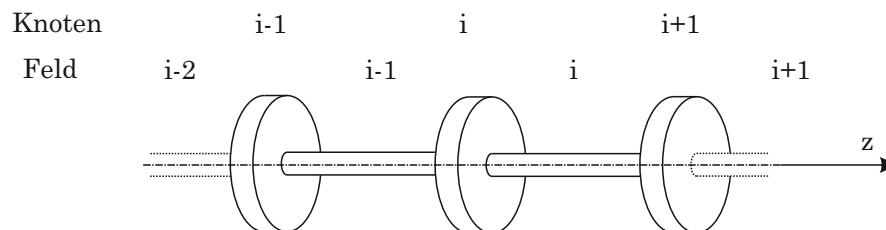


Abbildung 2.17: Einteilung des Systems in Knoten und Felder

Das Übertragungsmatrizenverfahren wurde ursprünglich für dynamische Betrachtungen

<sup>2</sup>aufgrund der fehlenden Dämpfung

von nichtrotierenden Balken eingesetzt. Nach einer Erweiterung um gyroskopische Effekte durch Prohl [4] war dies jahrelang die Standardmethode zur Berechnung kritischer Drehzahlen.

Das System wird in starre Körper<sup>3</sup> zerlegt, die durch masselose Balken<sup>4</sup> verbunden werden, wie in Abbildung 2.17 dargestellt. Diesen werden die elastischen Eigenschaften des Systems aufgeprägt. Bei axialsymmetrischen Rotoren kann ähnlich wie in Abschnitt 2.3.3 vorgegangen werden. Jedes Element hat dann vier Freiheitsgrade, die zu zwei komplexen Koordinaten zusammengefasst werden können. Die Zustandsvektoren sind dann ebenso wie die Übertragungsmatrizen von vierter Ordnung.

Der in  $n$  Knoten zerlegte Rotor besitzt  $n - 1$  Felder. Die Berechnung erfolgt in Linierrichtung von links nach rechts. Jedes Feld besitzt ein linkes und ein rechtes Ende mit einem jeweiligen Knoten. Jeder Knoten besitzt einen Zustandsvektor, der die generalisierten Koordinaten und Kräfte des jeweiligen Knotens enthält. Die Übertragungsmatrix eines Feldes  $\mathbf{T}_{f_i}$  stellt den Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor des rechten Knotens  $\mathbf{s}_{R_i}$  mit dem des linken Knotens eines Feldes  $\mathbf{s}_{L_i}$  dar.

$$\mathbf{s}_{R_i} = \mathbf{T}_{f_i} \mathbf{s}_{L_i} \quad (2.69)$$

Der Index  $i$  bezieht sich auf das jeweilige Feld und die Indizes  $R$  und  $L$  beziehen sich auf linkes und rechtes Ende. Der linke Knoten des  $i$ -ten Feldes und der rechte Knoten des  $(i-1)$ -ten Feldes befinden sich an derselben Position, haben aber nicht denselben Zustandsvektor, da sich zwischen ihnen die  $i$ -te Punktmasse befindet. Die beiden Zustandsvektoren stehen durch die Übertragungsmatrix des  $i$ -ten Knotens  $\mathbf{T}_{n_i}$  in Verbindung

$$\mathbf{s}_{L_i} = \mathbf{T}_{n_i} \mathbf{s}_{R_{i-1}}. \quad (2.70)$$

Üblicherweise werden die Übertragungsmatrizen des Knotens und des Feldes zusammengefasst, sodass sich eine Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}_i$  für ein Element ergibt

$$\mathbf{s}_{R_i} = \mathbf{T}_{f_i} \mathbf{T}_{n_i} \mathbf{s}_{R_{i-1}} = \mathbf{T}_i \mathbf{s}_{R_{i-1}}. \quad (2.71)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor des äußerst linken Knotens mit dem des letzten (äußerst rechten) ergibt sich aus dem Produkt der einzelnen Übertragungsmatrizen zu

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \mathbf{T}_{n-2} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{s}_0 = \mathbf{T}_G \mathbf{s}_0. \quad (2.72)$$

Die Gesamtübertragungsmatrix  $\mathbf{T}_G$  lautet demnach

$$\mathbf{T}_G = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i. \quad (2.73)$$

Dies ist das Produkt aller Knoten- und Feldübertragungsmatrizen in der richtigen Reihenfolge. Um die einzelnen Feldübertragungsmatrizen zu berechnen, wird das Feld als Balken betrachtet. Dementsprechend ergeben sich Zusammenhänge für die einzelnen Koordinaten,

---

<sup>3</sup>im weiteren Verlauf als Knoten bezeichnet

<sup>4</sup>im weiteren Verlauf als Felder bezeichnet

die zu folgendem Zusammenhang führen [12]:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ \phi_y \\ F_x \\ M_y \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{pmatrix} 1 & l_i & -\frac{l_i^3}{6EI_y} + \frac{l_i\chi}{GA} & \frac{l_i^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i^2}{2EI_y} & \frac{l_i}{EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \phi_y \\ F_x \\ M_y \end{pmatrix}_{L_i}. \quad (2.74)$$

Die Knotenübertragungsmatrizen ergeben sich durch Überlegungen zu kinematischer Verträglichkeit und unter Berücksichtigung des gyroskopischen Effekts und der Massenträgheiten zu

$$\begin{pmatrix} u_x \\ \phi_y \\ F_x \\ M_y \end{pmatrix}_{L_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 m_i + k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J_{t_i} + \omega \Omega J_{p_i} + \kappa & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \phi_y \\ F_x \\ M_y \end{pmatrix}_{R_{i-1}}. \quad (2.75)$$

Zur Berechnung der kritischen Drehzahlen werden in obiger Matrix die Drehzahlen  $\omega = \Omega = \Omega_{crit}$  gleichgesetzt.

Wenn die einzelnen Übertragungsmatrizen ermittelt sind, ist es keine Schwierigkeit, die Gesamtübertragungsmatrix zu berechnen. Als nächsten Schritt gilt es die Randbedingungen einzubauen. Als einfaches Beispiel dient, wenn beide Enden des Rotors einfach gelagert sind. Dann ergibt sich die Systemgleichung zu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_y \\ F_x \\ 0 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_y \\ F_x \\ 0 \end{pmatrix}_0. \quad (2.76)$$

Die erste und die letzte Spalte der Gesamtübertragungsmatrix können somit gestrichen werden, da sie mit null multipliziert werden. Die erste und letzte Zeile ergeben die Gleichung

$$\begin{pmatrix} T_{12} & T_{13} \\ T_{42} & T_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_y \\ F_x \end{pmatrix}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.77)$$

Diese ergibt eine nicht triviale Lösung nur dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} T_{12} & T_{13} \\ T_{42} & T_{43} \end{pmatrix} = T_{12}T_{43} - T_{42}T_{13} = 0. \quad (2.78)$$

Die Einträge der Gesamtübertragungsmatrix beinhalten den Term  $\omega^2$ . Somit führt Gleichung (2.78) auf einen Zusammenhang für  $\omega$  ähnlich der charakteristischen Gleichung eines Eigenwertproblems. Eine Lösung für  $\omega$  wird meist durch Iterieren ermittelt. Somit muss bei dieser Methode niemals mit einer Matrix, deren Ordnung größer als vier ist, gerechnet werden. Dies erklärt die weite Verbreitung dieser Methode in Zeiten, in denen Rechenkapazität eine wesentliche Limitation darstellte.

Bei nicht axialsymmetrischen Rotoren müssen die beiden Biegeebenen getrennt voneinander betrachtet werden, was die Ordnung des Zustandsvektors und der Übertragungsmatrizen auf acht verdoppelt. Damit ist der Hauptvorteil des Übertragungsmatrizenverfahrens

rens, nämlich seine Einfachheit, nicht mehr gegeben und es ist sinnvoller, mit der Methode der Finiten Elemente zu arbeiten.

## 2.4.2 Finite Elemente Methode

Die Methode der Finiten Elemente (FEM) ist eine allgemeine Diskretisierungsmethode für partielle Differentialgleichungen und wird in verschiedensten Bereichen der Technik eingesetzt. Ein großer Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit der Berechnung von sehr komplexen Geometrien. Aufgrund der stark gestiegenen Rechenleistung und des Speicherangebotes moderner Rechner ersetzt FEM die Übertragungsmatrizenmethode immer mehr.

Im Folgenden soll ein allgemeiner Überblick über die FEM gegeben werden. Sie basiert auf der Einteilung eines Kontinuums in  $m$  finite Elemente, also Elemente die nicht unendlich klein sind. Jedes dieser Elemente besitzt  $n$  Knotenpunkte, die sich im Allgemeinen an der Oberfläche, in speziellen Fällen aber auch im Inneren des Elements befinden. Jeder dieser Knoten besitzt eine gewisse Anzahl an Freiheitsgraden. Im weiteren Verlauf wird angenommen, dass es sich dabei um die Verschiebungen in die drei Koordinatenrichtungen handelt.

$$\hat{\mathbf{u}}^T = ( u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad w_n ) \quad (2.79)$$

Das Verschiebungsfeld im Inneren jedes Elementes wird dann durch eine Matrix von Interpolationsfunktionen  $\mathbf{H}^{(m)}(x, y, z)$ , wobei  $m$  den Index für das jeweilige Element darstellt, und die Verschiebungen der einzelnen Knoten angenähert.

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.80)$$

Durch diese Interpolation wird das Verschiebungsfeld mit seinen unendlich vielen Freiheitsgraden auf eine diskrete Form gebracht und es verbleiben nur noch die Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knoten. In Abbildung 2.18 ist eine derartige Interpolation für einen einfachen Fall dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass es durch die Interpolation zu Fehlern im Vergleich zur exakten Lösung kommt. Die FEM ist demnach immer eine Näherungslösung. An die Interpolationsfunktionen, auch Ansatzfunktionen genannt, werden folgende Forderungen gestellt [12]:

- Es sind nur stetige Funktionen sinnvoll.
- Starrkörperverschiebungen sollten abbildbar sein.
- Die Elemente müssen kompatibel bleiben (keine Klaffungen und Überlappungen).
- Konstante Verzerrungszustände sollten erfasst werden können.

Als Ansatzfunktionen, die diese Bedingungen erfüllen, werden häufig Polynome verwendet. Eine weit verbreitete Art sind die Lagrange-Polynome. Auch lineare Funktionen erfüllen diese Forderungen und können zur Approximation verwendet werden. In weiterer Folge soll eine einfache Beschreibung der FE-Methode anhand eines verschiebungsbezogenen Kontinuumsproblems erläutert werden. Weitere verschiedene Varianten sind in [14] zu finden. Hier erfolgt die Herleitung auf Basis des Prinzips der virtuellen Arbeit. Die virtuelle Arbeit

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} + \delta W_{inertia} = 0 \quad (2.81)$$

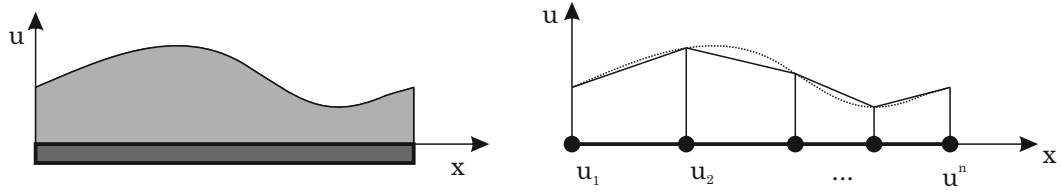


Abbildung 2.18: Lineare Interpolation mit eindimensionalen Finiten Elementen

kann durch die einzelnen Arbeitsterme für die innere virtuelle Arbeit  $\delta W_{int}$ , die äußere Arbeit  $\delta W_{ext}$  und die virtuelle Arbeit der Trägheit  $\delta W_{inertia}$  ausgedrückt werden. Mit den als Spaltenvektoren angeschriebenen Tensoren zweiter Stufe für die Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und die Spannung  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

und mit Hilfe des Werkstoffgesetzes

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.83)$$

ergeben sich die Energieterme zu

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} dV = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (2.84)$$

$$\delta W_{ext} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dS, \quad (2.85)$$

$$\delta W_{inertia} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho (-\ddot{\mathbf{u}}) dV. \quad (2.86)$$

Anschließend kann der FE-Ansatz aus Gleichung (2.80) in die einzelnen Terme eingesetzt werden. Der Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  kann dabei aus dem interpolierten Verschiebungsfeld mit



Hilfe einer entsprechenden Differentialoperatormatrix  $\mathbf{D}$  bestimmt werden.

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y, z) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^{(m)}(x,y,z)} \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.87)$$

Durch Aufsummieren der Terme

$$\delta W_{int} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV}_{\mathbf{K}^{(m)}} \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.88)$$

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^B dV^{(m)}}_{\mathbf{R}_B^{(m)}} + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \sum_S \underbrace{\int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^S dS^{(m)}}_{\mathbf{R}_S^{(m)}}, \quad (2.89)$$

$$\delta W_{inertia} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV}_{\mathbf{M}^{(m)}} \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.90)$$

für die einzelnen Elemente erhält man die FE-Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit. Die globalen Matrizen für die Steifigkeit  $\mathbf{K}$  und die Masse  $\mathbf{M}$  ergeben sich durch Summation der Elementmatrizen mit dem Index  $m$ . Die globalen Vektoren für die Volumskräfte  $\mathbf{R}_B^{(m)}$  und die Oberflächenkräfte  $\mathbf{R}_S^{(m)}$  ergeben sich aus der Summation der Volumskräfte  $\mathbf{f}_B$  und Oberflächenkräfte  $\mathbf{f}_S$  der einzelnen Elemente. Dieser Vorgang wird auch Assemblierung genannt. Die Gesamtbeschreibung für ein dynamisches System in FE-Formulierung ergibt sich damit zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S. \quad (2.91)$$

Verwendet man zur Berechnung aller Systemmatrizen die identischen Ansatzfunktionen, so spricht man von konsistenten Systemmatrizen. Durch eine entsprechende Knotenpunkt-nummerierung weisen die Systemmatrizen eine ausgeprägte Bandstruktur auf, was die Lösung des FE-Systems stark erleichtert.

## 2.5 Balkentheorie

Eine Balkentheorie stellt die mathematische Beschreibung des Biegeverhaltens eines ein-dimensionalen Bauteiles dar. Zwei weitverbreitete Methoden sollen hier beschrieben und deren Unterschiede erklärt werden.

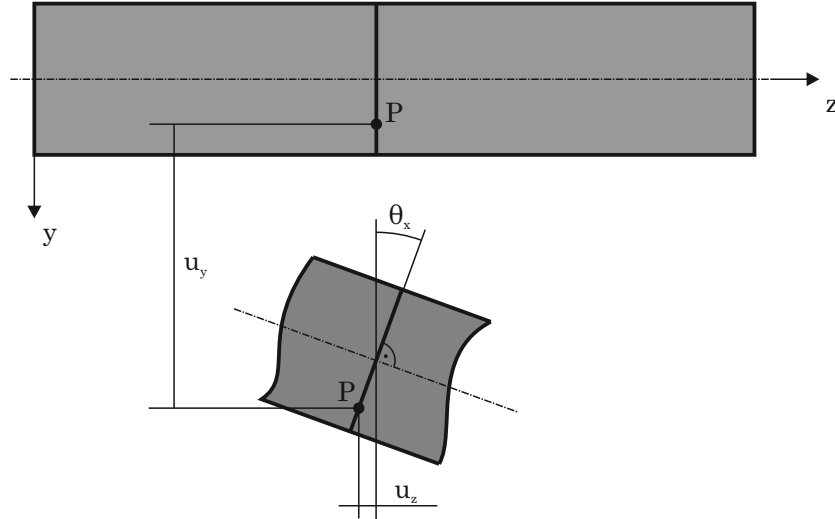


Abbildung 2.19: Kinematik des Bernoulli-Balkens

### 2.5.1 Biegebalken nach Bernoulli

Die Balkentheorie nach Bernoulli stellt die einfachste Form einer Balkentheorie dar. Sie vernachlässigt die Verformung des Balkens durch die Schubbeanspruchung, man spricht somit von einem schubstarren Balken. Man geht von der Annahme aus, dass alle Querschnitte eben und unverformt bleiben und auch im verformten Zustand im rechten Winkel zur verformten Balkenachse stehen. Aus diesem Grund ergibt sich der Zusammenhang

$$\theta_x = -\frac{du_y}{dz} = \frac{du_z}{dy} \quad (2.92)$$

für die Winkeländerung des Querschnitts  $\theta_x$  in Abbildung 2.19. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ergibt sich somit zu

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y(z, t) \\ y\theta_x(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Aus dem Zusammenhang für die Schubverzerrung und der Annahme in Gleichung (2.92) ist ersichtlich, dass diese verschwindet.

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \theta_x = \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (2.94)$$

Der Verzerrungsvektor weist somit nur mehr einen Eintrag auf.

$$\varepsilon_{yy} = y \frac{d\theta_x}{dz} = y\theta'_x \quad (2.95)$$

Daraus ergibt sich die Normalspannung aus dem Werkstoffgesetz zu

$$\tau_{yy} = E\varepsilon_{yy} = Ey\theta'_x. \quad (2.96)$$

Unter Berücksichtigung der Bestimmungsgleichung des axialen Flächenträgheitsmomentes  $I_x$  um die x-Achse

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (2.97)$$

ergibt sich die Formulierung für die virtuelle Arbeit der inneren Energie

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} dV = - \int_0^l \int_A \delta(\theta'_x) E y^2 \theta'_x dA dz = - \int_0^l \delta \theta'_x E I_x \theta_x dz \quad (2.98)$$

und die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\begin{aligned} \delta W_{inertia} &= - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = - \int_0^l \int_A [\delta u_y \quad y \delta \theta_x] \rho \begin{bmatrix} \ddot{u}_y \\ y \ddot{\theta}_x \end{bmatrix} dA dz = \\ &= - \int_0^l \delta \theta_x \rho I_x \ddot{\theta}_x dz - \int_0^l \delta u_y \rho A \ddot{u}_y dz. \end{aligned} \quad (2.99)$$

## 2.5.2 Biegebalken nach Timoshenko

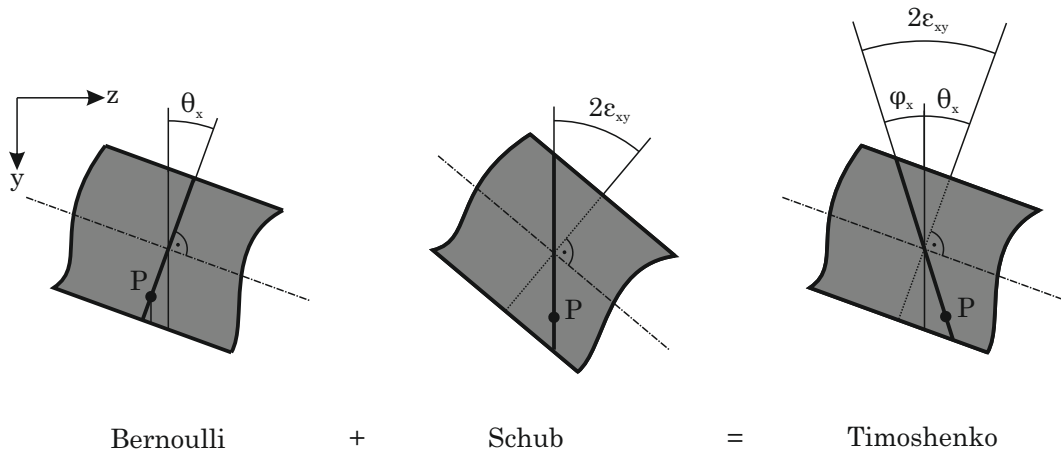


Abbildung 2.20: Überlagerung eines Bernoulli-Balkens mit einem Balken mit reiner Schubverformung ergibt den Timoshenko-Balken

Bei der Balkentheorie nach Timoshenko werden auch die Schubverformungen berücksichtigt. Der Timoshenko-Biegebalken entspricht somit der Überlagerung eines Bernoulli-Biegebalkens mit einem Balken unter reiner Schubverformung, was in Abbildung 2.20 ersichtlich ist. Somit bleiben die Querschnitte zwar immer noch eben und unverformt, sie stehen jedoch nicht mehr im rechten Winkel zur Balkenachse und deren Verdrehwinkel muss als zusätzlicher Freiheitsgrad  $\varphi_x$  angesehen werden. Dies ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ergibt sich somit zu

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y(x, t) \\ y \varphi_x(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

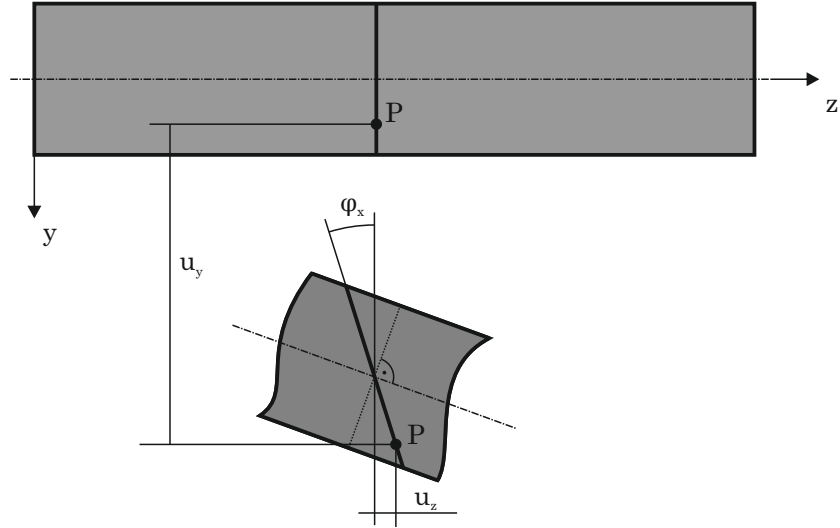


Abbildung 2.21: Kinematik des Timoshenko-Biegebalkens

Daraus kann mit Hilfe des Zusammenhangs in Gleichung (2.82) unter Berücksichtigung von

$$u'_y = \frac{du_y}{dz} \varphi'_x = \frac{d\varphi_x}{dz} \quad (2.101)$$

die Verzerrung bestimmt werden.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\varphi'_x \\ u'_y + \varphi_x \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Mit dem entsprechend vereinfachten Werkstoffgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

ergeben sich unter Berücksichtigung von Gleichung (2.97) und mit  $k_s$  für den Schubkorrekturfaktor die Formulierung für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} dV = - \int_0^l \int_A [\delta(y\varphi'_x) \quad \delta(u'_y + \varphi_x)] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y\varphi'_x \\ u'_y + \varphi_x \end{bmatrix} dAdz = \\ &= - \underbrace{\int_0^l \delta \varphi'_x EI_x \varphi_x dz}_{\text{Biegeanteil}} - \underbrace{\int_0^l \delta(u'_y + \varphi_x) GAk_s(u'_y + \varphi_x) dz}_{\text{Schubanteil}} \end{aligned} \quad (2.104)$$

und die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte.

$$\begin{aligned}
\delta W_{inertia} &= - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = - \int_0^l \int_A [\delta u_y \quad y \delta \varphi_x] \rho \begin{bmatrix} \ddot{u}_y \\ y \ddot{\varphi}_x \end{bmatrix} dA dz = \\
&= - \int_0^l \delta \varphi_x \rho I_x \ddot{\varphi}_x dz - \int_0^l \delta u_y \rho A \ddot{u}_y dz.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Aus diesen Zusammenhängen ist die Überlagerung des Ergebnisses des Bernoullibalkens mit einer Schubverformung direkt ersichtlich.

### 2.5.3 Vergleich der beiden Theorien

Die Verwendung der Balkenbeschreibung nach Timoshenko weist einige Vorteile auf. Zunächst ist sie natürlich speziell für Probleme, bei denen auch die Schubverformung eine wesentliche Rolle spielt, exakter als die Theorie nach Bernoulli. Dies wirkt sich speziell bei relativ 'dicken' und gedrungenen Balken aus. Maßgebend dafür ist der Schlankheitsgrad  $\lambda = \frac{d}{l}$ , welcher das Verhältnis zwischen Durchmesser  $d$  und Länge  $l$  des Balkens beschreibt. Einen weiteren Vorteil bei der Theorie nach Timoshenko stellt die erleichterte Sicherstellung der Kontinuitätsbedingung

$$u_y^1 = u_y^2, \quad u_y'^1 = u_y'^2 \tag{2.106}$$

zwischen zwei Elementen dar. Diese Forderung unter Verwendung nur einer einzelnen Ansatzfunktion für  $u_y$  ist bei der Bernoulli-Theorie sehr schwierig. Bei der Timoshenko-Theorie ergibt sich aufgrund des zusätzlichen Freiheitsgrad der Verdrehung  $\varphi_x$  eine zweite Ansatzfunktion und das Erfüllen der Kontinuitätsbedingung stellt keine Schwierigkeit mehr dar.

Probleme ergeben sich bei der Verwendung der Timoshenko-Theorie für finite Elemente mit niedriger Ordnung der Ansatzfunktionen. Diese sind nicht in der Lage, den Verlauf der Schubdeformation über die Balkenlänge korrekt darzustellen und es kommt zum 'Shear-Locking'-Effekt. Dies führt zu einem erhöhten Anteil des Schubterms an der virtuellen Arbeit und damit zu einer Versteifung des Systems. Abhilfe schaffen spezielle Verfahren oder Ansatzfunktionen höherer Ordnung [14].

### 3 Modellierung und Elementformulierung

Eine der Aufgabenstellung entsprechende Elementformulierung ist ein wesentlicher Punkt, um die FE-Methode sinnvoll nutzen zu können. Die Elementformulierung stellt die mit der FE-Methode kompatible mathematische Beschreibung eines Bauteiles bzw. Elementes dar. Die in der vorliegenden Arbeit zu betrachtenden Rotoren sind Teil einer Asynchronmaschine und bestehen im Wesentlichen aus folgenden Bauteilen:

- **Rotorwelle:** Die Rotorwelle stellt das Grundgerüst des gesamten Bauteils dar und nimmt alle Beanspruchungen auf. Sie stellt die Verbindung vom Blechpaket, in dem die elektromagnetischen Kräfte entstehen, zum Abtrieb und zur Lagerung dar.
- **Blechpaket:** Das Blechpaket ist an der Welle montiert und weist im Allgemeinen einen deutlich größeren Querschnitt auf. Es ist schwierig zu modellieren, da das Blechpaket nicht aus homogenem Material aufgebaut ist.
- **Lagerung:** Die Lagerung sorgt für eine Fixierung der Rotorwelle im Raum.
- **Magnetischer Zug:** Aufgrund der elektromagnetischen Kräfte entsteht ein magnetischer Zug, welcher einer Kraft entspricht, die stets in Richtung des geringsten Luftspaltes weist.

#### 3.1 Rotorwelle

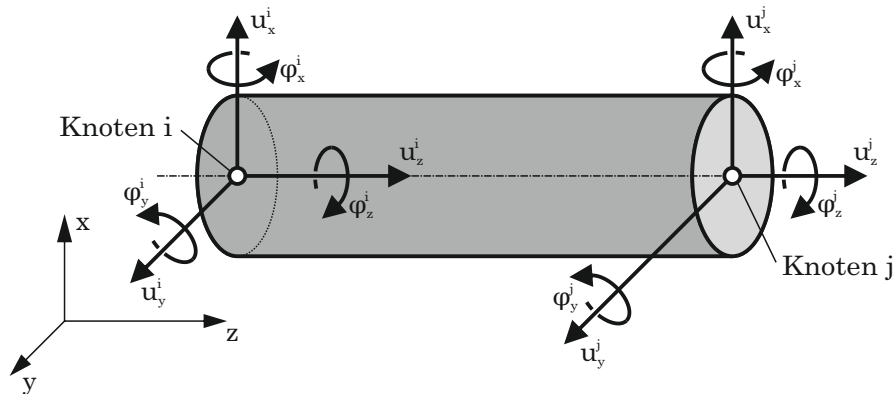


Abbildung 3.1: Freiheitsgrade eines allgemeinen 2-Knoten-Wellenelementes

Die Rotorwelle stellt das Grundgerüst des gesamten Modells dar. Im Folgenden soll stets von einer rotationssymmetrischen Rotorwelle mit im Vergleich zur Längsausdehnung nicht allzu großen Querschnitten ausgegangen werden. Aufgrund dieser Eigenschaften bietet sich die Beschreibung als eindimensionaler Körper, also als Linienelement an.

Ein derartiges Element mit zwei Knoten ist in Abbildung 3.1 dargestellt und besitzt insgesamt 12 Freiheitsgrade. Diese bestehen aus den drei Verschiebungsfreiheitsgraden  $u_x, u_y, u_z$  in die drei Koordinatenrichtungen  $x, y$  und  $z$  und den jeweils drei Verdrehungs-

freiheitsgraden  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  ebenfalls um die drei Koordinatenrichtungen x, y und z an den beiden Knoten  $i, j$ . Der Vektor der generalisierten Koordinaten für ein beliebiges Balkenelement lautet somit

$$\mathbf{q} = [ u_x \quad u_y \quad u_z \quad \varphi_x \quad \varphi_y \quad \varphi_z ]^T. \quad (3.1)$$

Der Vektor mit den Freiheitsgraden der Knoten eines beliebigen Elementes lautet

$$\hat{\mathbf{q}} = [ u_x^i \quad u_y^i \quad u_z^i \quad \varphi_x^i \quad \varphi_y^i \quad \varphi_z^i \quad u_x^j \quad u_y^j \quad u_z^j \quad \varphi_x^j \quad \varphi_y^j \quad \varphi_z^j ]^T. \quad (3.2)$$

Die drei Hauptbeanspruchungsarten für ein derartiges Element sind Biegung, Torsion und Zug [15]. Im einfachsten Fall können diese Beanspruchungsarten überlagert werden und beeinflussen sich gegenseitig nicht, sie sind somit komplett voneinander entkoppelt. Aufgrund dieser Tatsache kann der Vektor mit den generalisierten Koordinaten aufgeteilt werden in Vektoren für die jeweilige Beanspruchungsart und diese getrennt voneinander betrachtet werden. Es ergibt sich somit der Zustandsvektor für die Zugbeanspruchung

$$\hat{\mathbf{q}}_Z = [ u_z^i \quad u_z^j ]^T, \quad (3.3)$$

für die Torsion

$$\hat{\mathbf{q}}_T = [ \varphi_z^i \quad \varphi_z^j ]^T, \quad (3.4)$$

und für die Biegung jeweils um die x- und die y-Achse

$$\hat{\mathbf{q}}_{B_y} = [ u_y^i \quad \varphi_x^i \quad u_y^j \quad \varphi_x^j ]^T, \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{B_x} = [ u_x^i \quad \varphi_y^i \quad u_x^j \quad \varphi_y^j ]^T. \quad (3.6)$$

Die Formulierung der Zug- und Torsionsbeanspruchung ist relativ einfach, da die Rotation der Welle keinen Einfluss auf diese Beanspruchungsarten hat. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur die Torsionsbeanspruchung behandelt. Die Zugbeanspruchung in z-Richtung ist nicht relevant. Aufwändiger gestaltet sich die Beschreibung der Biegebeanspruchung, da hier die Rotationsgeschwindigkeit aufgrund der Kreiseffekte sehr wohl einen Einfluss auf das System hat.

### 3.1.1 Systemmatrizen des Torsionsstabs

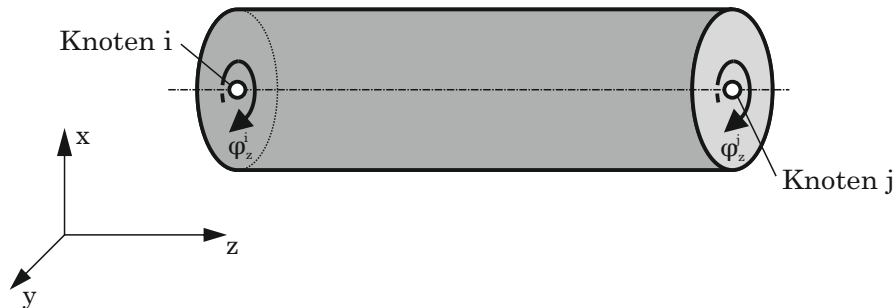


Abbildung 3.2: Freiheitsgrade des einfachen Torsionsstabes

Bei der reinen Torsionsbeanspruchung besitzt das Wellenelement in jedem Knoten einen

Verdrehungsfreiheitsgrad wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Beschreibung der Torsionsbeanspruchung erfolgt im einfachsten Fall unter Annahme von eben bleibenden Querschnitten und damit reiner Schubbeanspruchung.

Aus der elementaren Festigkeitslehre ist bekannt, dass die Torsionssteifigkeit eines Stabes mit der Länge  $L$ , dem polaren Flächenträgheitsmoment  $I_P$  und dem Schubmodul  $G$  mit der Torsionsfederkonstante

$$k_t = \frac{GI_P}{L} \quad (3.7)$$

beschrieben werden kann. Für das 2-Knotenelement ergibt sich daraus die Steifigkeitsmatrix für Torsion zu

$$\mathbf{K}_T = \frac{GI_P}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Dies entspricht der Herleitung nach der FE-Methode unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen. Der Verlauf der generalisierten Koordinate wird also angenähert durch

$$\mathbf{q}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_z^i \\ \varphi_z^j \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{q}}_T} \quad (3.9)$$

mit den linearen Interpolationen

$$N_i(z) = \frac{1}{L}(z_j - z), \quad (3.10)$$

$$N_j(z) = \frac{1}{L}(z - z_i). \quad (3.11)$$

In einem zylindrischen Koordinatensystem stellt sich aufgrund der Verdrehungen die Verschiebung

$$u_\varphi = r\varphi_z \quad (3.12)$$

ein. Somit kann die Massenmatrix nach Gleichung (2.90) berechnet werden und ergibt sich unter Berücksichtigung der Elementlänge  $L$  und des polaren Flächenmomentes  $I_p$  zu

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho I_p L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Rotierende Timoshenko-Biegebalken

Die Herleitung der Systemmatrizen für den Elementtypen rotierender Timoshenko-Balken erfolgt nach [12]. Ein derartiges Element ist in Abbildung 3.3 dargestellt und beschreibt das Biegeverhalten des Balkens in beiden Biegeebenen mit Hilfe der Timoshenko-Theorie.

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Balkens können die beiden Biegeebenen mit denselben Ansatzfunktionen angenähert werden. Durch entsprechende Definition der Vorzeichen für die Biegung um die x-Achse erhält man die identen Interpolationsmatrizen  $\mathbf{H}$ .



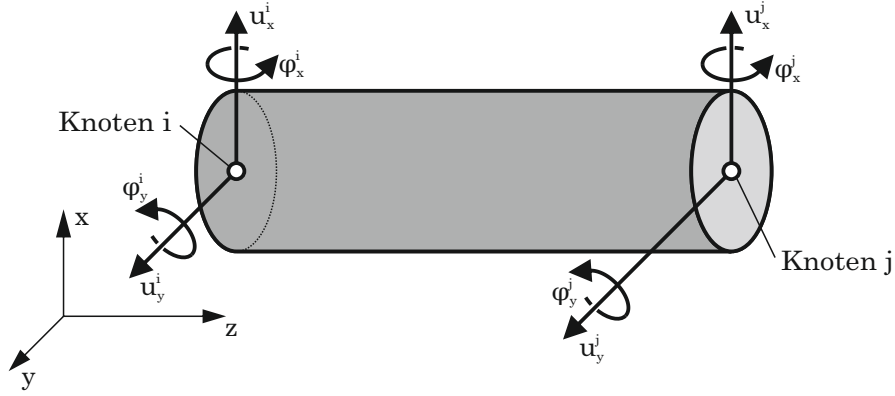


Abbildung 3.3: Freiheitsgrade des rotierenden Timoshenko-Biegebalkens

$$\begin{bmatrix} u_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} u_x^1 \\ \phi_y^1 \\ u_x^2 \\ \phi_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} u_y \\ -\phi_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} u_y^1 \\ -\phi_x^1 \\ u_y^2 \\ -\phi_x^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Die Ansatzfunktionen gilt es hier sorgfältig zu wählen, um das in Abschnitt 2.5.2 bereits erwähnte Problem des Shear-Lockings zu vermeiden. Es hat sich dabei bewährt, Ansatzfunktionen zu verwenden, die den von der Schubsteifigkeit abhängigen Faktor

$$\Phi = \frac{12EI_t\chi}{GA l^2} \quad (3.16)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , dem axialen Flächenträgheitsmoment  $I_t$  und dem Schubfaktor  $\chi$ , enthalten. Diese hermiteschen Polynome können als Ansatzfunktionen alle Randbedingungen für Verschiebungen und Verdrehungen korrekt abbilden. Sie lauten mit der dimensionslosen Koordinate  $\zeta = \frac{z}{l}$

$$N_{11} = \frac{1 + \Phi(1 - \zeta) - 3\zeta^2 + 2\zeta^3}{1 + \Phi}, \quad N_{12} = l\zeta \frac{1 + \frac{1}{2}\Phi(1 - \zeta) - 2\zeta + \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (3.17)$$

$$N_{13} = \zeta \frac{\Phi + 3\zeta - 2\zeta^2}{1 + \Phi}, \quad N_{14} = l\zeta \frac{-\frac{1}{2}\Phi(1 - \zeta) - \zeta + \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (3.18)$$

$$N_{21} = 6\zeta \frac{\zeta - 1}{l(1 + \Phi)}, \quad N_{22} = \frac{1 + \Phi(1 - \zeta) - 4\zeta + 3\zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (3.19)$$

$$N_{23} = -6\zeta \frac{\zeta - 1}{l(1 + \Phi)}, \quad N_{24} = \frac{\Phi\zeta - 2\zeta + 3\zeta^2}{1 + \Phi}. \quad (3.20)$$

Die Herleitung der Systemmatrizen erfolgt nach Lagrange 2. Art. Die potenzielle Energie  $d\mathcal{U}$  setzt sich dabei wieder aus den Anteilen durch Schubdeformation und Biegeverformung

zusammen.

$$d\mathcal{U} = \underbrace{\frac{1}{2}EI_y \left[ \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \right)^2 \right]}_{\text{Biegung}} dz + \underbrace{\frac{1}{2}GAk(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}_{\text{Schub}} dz \quad (3.21)$$

Durch Einsetzen der Interpolationsbeziehungen aus Gleichungen (3.14), (3.15) und Integration über die Elementlänge  $l$  erhält man einen Zusammenhang der Form

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{B_x}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}_{B_x} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{B_y}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{q}}_{B_y} \quad (3.22)$$

mit der für beide Biegeebenen identen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , welche sich mit dem axialen Flächenträgheitsmoment  $I_t$  errechnet zu

$$\mathbf{K} = \frac{EI_t}{l^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ (4+\Phi)l^2 & -6l & (2-\Phi)l^2 & \\ & 12 & 6l & \\ \text{symm.} & & & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Die kinetische Energie  $d\mathcal{T}$  für ein infinitesimales Stück des Balkens lautet

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2}\rho A(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2)dz + \frac{1}{2}\rho [J_t(\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2) + J_p(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}_x\varphi_y)] dz. \quad (3.24)$$

Durch Einsetzen der Interpolationsansätze und unter Berücksichtigung des Zusammenhangs  $J_p = 2J_t$  zwischen dem polaren Massenträgheitsmoment  $J_p$  und dem axialen Massenträgheitsmoment  $J_t$  für axialsymmetrische Querschnitte und Integration über die Elementlänge ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{B_x}^T \mathbf{M}_T \dot{\mathbf{q}}_{B_x} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{B_y}^T \mathbf{M}_T \dot{\mathbf{q}}_{B_y} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{B_x}^T \mathbf{M}_R \dot{\mathbf{q}}_{B_x} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{B_y}^T \mathbf{M}_R \dot{\mathbf{q}}_{B_y} + \\ + \rho J_t l \Phi^2 + \underbrace{2\Omega \dot{\mathbf{q}}_{B_y}^T \mathbf{M}_R \dot{\mathbf{q}}_{B_x}}_{\text{gyroskopischer Term}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hierbei ist  $\mathbf{M}_T$  der translatorische Anteil der Massenmatrix und  $\mathbf{M}_R$  der rotatorische Anteil. Diese ergeben sich zu

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho Al}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ & l^2m_5 & lm_4 & -l^2m_6 \\ & & m_1 & -lm_2 \\ \text{symm.} & & & l^2m_5 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

und

$$\mathbf{M}_R = \frac{\rho I_t}{30l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ & l^2m_9 & -lm_8 & -l^2m_{10} \\ & & m_7 & -lm_8 \\ \text{symm.} & & & l^2m_9 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Mit den jeweiligen Einträgen

$$m_1 = 156 + 294\Phi + 140\Phi^2 \qquad m_2 = 22 + 38.8\Phi + 17.5\Omega^2 \qquad (3.28)$$

$$m_3 = 54 + 126\Phi + 70\Phi^2 \qquad m_4 = 13 + 31.5\Phi + 17.5\Omega^2 \qquad (3.29)$$

$$m_5 = 4 + 7\Phi + 3.5\Phi^2 \qquad m_6 = 3 + 7\Phi + 3.5\Omega^2 \qquad (3.30)$$

$$m_7 = 36 \qquad m_8 = 3 - 15\Phi \qquad (3.31)$$

$$m_9 = 4 + 5\Phi + 10\Phi^2 \qquad m_{10} = 1 + 5\Phi - 5\Omega^2 \qquad (3.32)$$

ergibt sich die Massenmatrix aus der Summe der beiden Anteile

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R. \qquad (3.33)$$

Die gyroskopische Matrix beschreibt die Kreiseffekte und entsteht durch den letzten Term in Gleichung (3.25), der die beiden Biegeebenen miteinander koppelt. Sie errechnet sich aus

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{M}_R. \qquad (3.34)$$

### 3.2 Blechpaket und Ersatzmassen

Das am Rotor aufgebrachte Blechpaket ist im Allgemeinen sehr schwierig zu modellieren, da seine geometrische Form und Materialparameter sehr schwierig zu erfassen sind. Trotzdem hat das Blechpaket aufgrund seiner großen räumlichen Ausdehnung und Massen einen wesentlichen Einfluss auf die Rotorschwingungen. Für das vorliegende Simulationsmodell wurde ein stark vereinfachtes Modell für das Blechpaket verwendet, welches auf Messdaten beruht.

Die Steifigkeit des Blechpakets und der darunterliegenden Rotorwelle wird zusammengefasst und analog zur Steifigkeit eines Wellenelementes berechnet. Als Eingabeparameter dient ein messtechnisch ermitteltes Flächenträgheitsmoment, welches in Kombination mit dem E-Modul für Stahl die entsprechende Steifigkeit des Blechpaketes abbildet. Dies wird sowohl für die Torsion als auch für die Biegung durchgeführt.

Zur Modellierung des Trägheitsverhaltens des Blechpaketes und der darunterliegenden Rotorwelle wird die messtechnisch ermittelte Masse als Punktmasse auf alle Knoten im Bereich des Blechpakets aufgeteilt. Zur Beschreibung der Torsionsträgheit wird dementsprechend ein polares Ersatzträgheitsmoment bestimmt.

Um diese Ersatzträgheiten arbeitsäquivalent über einen gewissen Wellenbereich zu verteilen, muss dies wie beispielhaft in Abbildung 3.4 dargestellt, erfolgen. Die Ersatzmassen an den Rändern  $m_r$  und im Inneren des Bereiches  $m_i$  lauten also im allgemeinen Fall für eine Aufteilung einer Masse  $m$  auf einen Bereich mit  $n$  Elementen und dementsprechend  $n + 1$  Knoten

$$m_r = m \frac{1}{2n}, \qquad m_i = m \frac{1}{n}. \qquad (3.35)$$

Dies gilt analog für die Ersatzträgheiten für die Torsion. Wichtig ist es darauf zu achten, dass die Ersatzträgheiten für die Torsion auch einen wesentlichen Einfluss auf den gyroskopischen Effekt haben und dementsprechend auch in der gyroskopischen Matrix entsprechend berücksichtigt werden müssen.

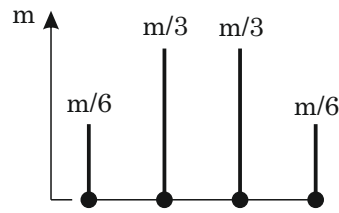


Abbildung 3.4: Aufprägung der Ersatzmassen auf mehrere Knoten

### 3.3 Lager

Rein technisch ist es natürlich notwendig, einen Rotor zu lagern, um dessen Position zu fixieren. Aber auch mathematisch ist eine Lagerung wichtig um sicherzustellen, dass das FE-System nicht singulär ist und somit frei im Raum verschoben werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Lagerungstypen modelliert. Bei beiden handelt es sich um eine Kopplung von einem Knoten des Systems zu einem ortsfesten Punkt.

#### 3.3.1 Elastische Lagerung

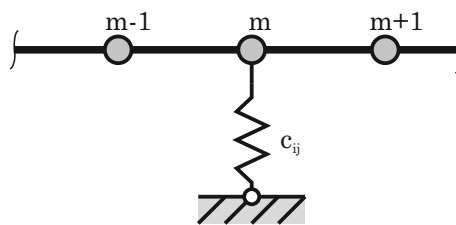


Abbildung 3.5: Lagerung mit einfacher Feder

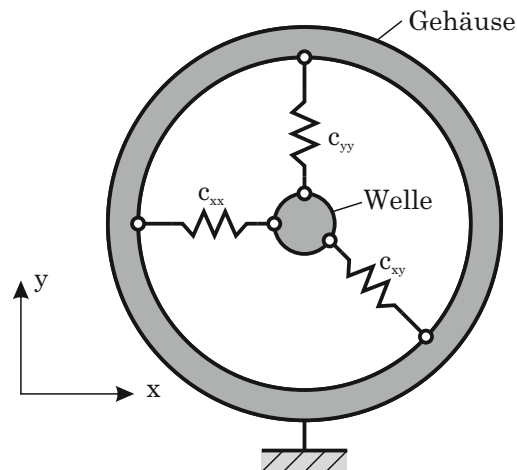


Abbildung 3.6: Veranschaulichung der Federsteifigkeit in den Nebendiagonalen

Die elastische Lagerung stellt die einfachste Möglichkeit einer Lagerung dar und ist eine einfache Verbindung eines Knotens des Modells mit einem ortsfesten Punkt durch eine linear elastische Feder. Diese Feder kann durch eine Steifigkeitsmatrix beschrieben werden,

die im allgemeinen folgende Form hat

$$\mathbf{K}_{Lager} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Anhand von Abbildung 3.6 ist ersichtlich, dass es sich bei den Einträgen in der Nebendiagonale der Federsteifigkeitsmatrix um eine Kopplung der beiden Biegeebenen handelt. Die einfachste Form einer Feder weist diesen Zusammenhang nicht auf und verhält sich in beide Koordinatenrichtungen ident, sodass gilt  $k_{xx} = k_{yy}$  und sich die Federsteifigkeitsmatrix damit zu

$$\mathbf{K}_{Lager} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

ergibt.

### 3.3.2 Hydrodynamisches Gleitlager

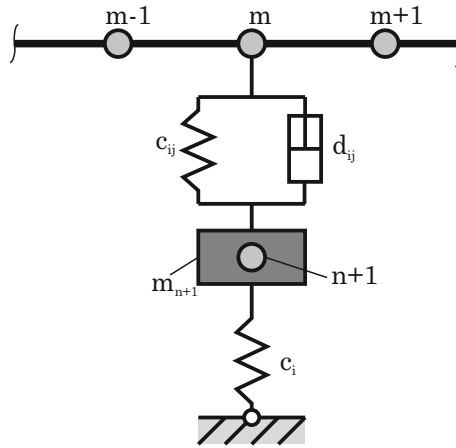


Abbildung 3.7: Modellierung eines Gleitlagers

Der Schmierpalt eines hydrodynamischen Gleitlagers wird durch ein Feder-Dämpfer-System modelliert. Wichtig ist hierbei anzumerken, dass jeweils der Dämpfer als auch die Feder stark anisotrop sind und zusätzlich eine starke Abhängigkeit von der Rotordrehzahl  $\Omega$  aufweisen. Beide Effekte entstehen durch die Strömung im Schmierpalt. Diese Strömung kann natürlich ebenfalls modelliert werden, um so rechnerisch auf die entsprechenden Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten zu kommen [12]. Somit ergibt sich für den Schmierpalt eine Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{Schmierpalt}(\Omega) = \begin{bmatrix} c_{xx}(\Omega) & c_{xy}(\Omega) \\ c_{yx}(\Omega) & c_{yy}(\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

und eine Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D}_{Schmierpalt}(\Omega) = \begin{bmatrix} d_{xx}(\Omega) & d_{xy}(\Omega) \\ d_{yx}(\Omega) & d_{yy}(\Omega) \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Zur Beschreibung der Gesamtlagerung wird im Folgenden davon ausgehen, dass auch die Struktur, an der das Gleitlager angebracht ist, also das Gehäuse, eine bestimmte Steifigkeit

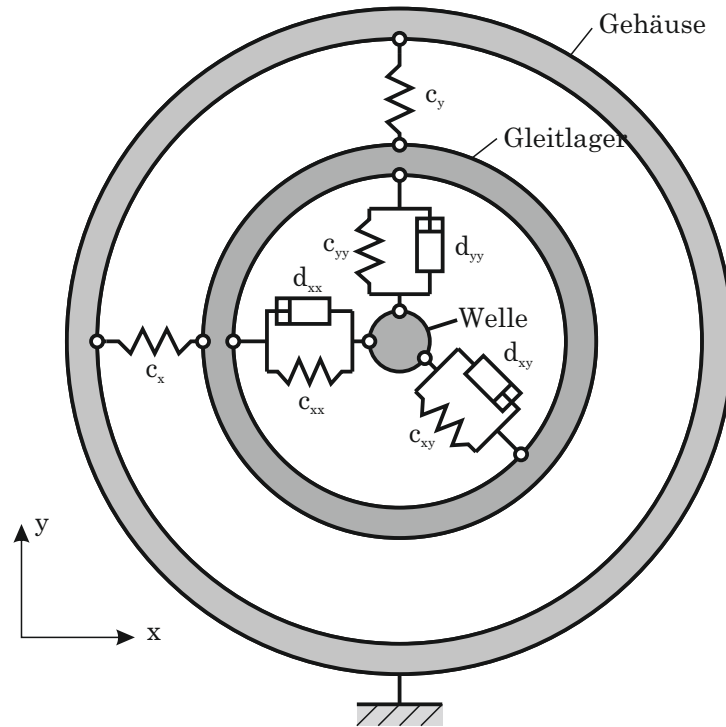


Abbildung 3.8: Gleitlagermodellierung in der Biegeebene

besitzt. Diese wird durch eine in Serie zum Gleitlager geschaltene Feder mit der Steifigkeit

$$\mathbf{K}_{Geh} = \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

modelliert. Dies ist in Abbildung 3.7 dargestellt, wobei  $m$  die Knotennummer des Knotens, an dem das Gleitlager montiert ist, darstellt.

Durch diese Serienschaltung entsteht ein Zwischenknoten, welcher in das System mit einbezogen werden muss. An diesem wirken Kräfte und damit kann er auch Beschleunigungen erfahren. Um das System nicht singulär werden zu lassen, ist es notwendig, zu den  $n$  bestehenden Knoten den Knoten  $n + 1$  für das Gehäuse hinzuzufügen und an diesem Knoten eine Masse  $m_{n+1}$  anzubringen.

In Abbildung 3.8 ist das Gleitlagermodell in der Biegeebene dargestellt, wobei bildlich nur symmetrische Nebendiagonaleinträge veranschaulicht werden können. Unter Verwendung des Zustandsvektors

$$\mathbf{q}_{Lager} = [u_x^m \quad u_y^m \quad u_x^{n+1} \quad u_y^{n+1}]^T \quad (3.41)$$

ergeben sich die Systemmatrizen des Lagers zu

$$\mathbf{K}_{Lager}(\Omega) = \begin{bmatrix} c_{xx}(\Omega) & c_{xy}(\Omega) & -c_{xx}(\Omega) & -c_{xy}(\Omega) \\ c_{yx}(\Omega) & c_{yy}(\Omega) & -c_{yx}(\Omega) & -c_{yy}(\Omega) \\ -c_{xx}(\Omega) & -c_{xy}(\Omega) & c_{xx}(\Omega) + c_x & c_{xy}(\Omega) \\ -c_{yx}(\Omega) & -c_{yy}(\Omega) & c_{yx}(\Omega) & c_{yy}(\Omega) + c_y \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{D}_{Lager}(\Omega) = \begin{bmatrix} d_{xx}(\Omega) & d_{xy}(\Omega) & -d_{xx}(\Omega) & -d_{xy}(\Omega) \\ d_{yx}(\Omega) & d_{yy}(\Omega) & -d_{yx}(\Omega) & -d_{yy}(\Omega) \\ -d_{xx}(\Omega) & -d_{xy}(\Omega) & d_{xx}(\Omega) & d_{xy}(\Omega) \\ -d_{yx}(\Omega) & -d_{yy}(\Omega) & d_{yx}(\Omega) & d_{yy}(\Omega) \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{M}_{Lager} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.4 Magnetischer Zug

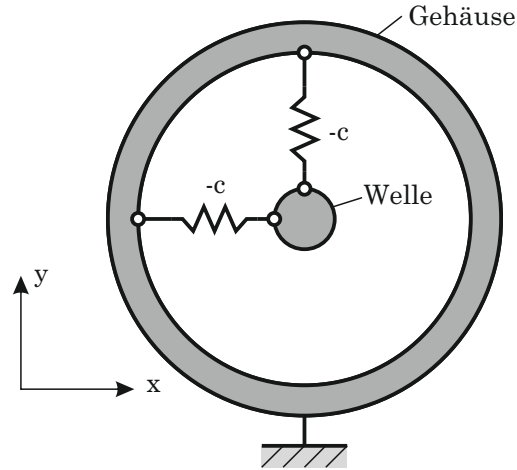


Abbildung 3.9: Modellierung des magnetischen Zuges

Der magnetische Zug entsteht durch das magnetische Feld im Inneren eines Elektromotors. Sobald der Rotor ausgelenkt wird, befindet er sich nicht mehr symmetrisch im Statorgehäuse und der Luftspalt zwischen Stator und Rotor ist damit ebenfalls nicht mehr symmetrisch. Das magnetische Feld versucht den Luftspalt an seiner engsten Stelle weiter zu verengen und erzeugt somit eine Kraft exakt in Auslenkungsrichtung des Rotors. Dieses Verhalten kann durch Anbringen einer Feder mit negativer Federsteifigkeit wie in Abbildung 3.9 modelliert werden. Die Steifigkeitsmatrix nimmt somit die Form

$$\mathbf{K}_{magnZ} = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

an.

## 4 Systembeschreibung und -lösung

Die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Elemente müssen zu einem Gesamtsystem zusammengefügt werden. Dieser Vorgang wird auch Assemblierung genannt und führt zu globalen Systemmatrizen. Mit Hilfe dieser können dann unterschiedliche Problemstellungen durch entsprechende Lösungsverfahren behandelt werden.

### 4.1 Mathematische Beschreibung

Die Assemblierung des Gesamtsystems erfolgt durch Summation der einzelnen Systemmatrizen zu globalen Systemmatrizen. Hierzu muss zunächst ein globaler Vektor mit den generalisierten Koordinaten des gesamten Systems definiert werden, sodass eine eindeutige Zuordnung der Systemmatrizen in die globalen Matrizen gewährleistet ist.

Wie bereits in Abschnitt 3.1 ausgeführt, können Torsion und Biegung komplett getrennt voneinander betrachtet werden.

#### 4.1.1 Torsion

Der globale Zustandsvektor enthält die Freiheitsgrade aller  $n$  Knoten.

$$\hat{\mathbf{q}}_T = [\varphi_z^1 \quad \varphi_z^2 \quad \dots \quad \varphi_z^n]^T \quad (4.1)$$

Die globalen Systemmatrizen ergeben sich durch Summation aller  $n - 1$  Elementmatrizen  $\mathbf{K}_{Tor}^i, \mathbf{M}_{Tor}^i$ , wobei  $i$  den Index für des jeweiligen Elementes darstellt. Somit ergibt sich die globale Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tor} = \sum_i^{n-1} \mathbf{K}_{tor}^i \quad (4.2)$$

und die globale Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{Tor} = \sum_i^{n-1} \mathbf{M}_{Tor}^i. \quad (4.3)$$

Im nächsten Schritt werden die in Abschnitt 3.2 eingeführten Ersatzträgheiten  $J_p, J_i$ , welche für die Torsion relevant sind, an den entsprechenden Stellen hinzuaddiert. Dies erfolgt immer in der Diagonale der Massenmatrix. Die Bewegungsgleichung bezüglich Torsion lautet somit

$$\mathbf{M}_{Tor} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_T + \mathbf{K}_{Tor} \hat{\mathbf{q}}_T = 0 \quad (4.4)$$

Unter Verwendung des Exponentialansatzes

$$\mathbf{q}_T = e^{i\omega t} \quad (4.5)$$



ergibt sich durch Einsetzen und Umformen das Eigenproblem

$$(-\mathbf{M}_{Tor}\omega_i^2 + \mathbf{K}_{Tor})\mathbf{r}_i = 0 \quad (4.6)$$

mit genau  $n$  Eigenfrequenzen  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  und den  $n$  zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{r}_i$ , wobei jeder Eigenvektor genau  $n$  Einträge besitzt. Aufgrund der fehlenden Einspannung in Torsionsrichtung wird es stets zu Eigenfrequenzen mit dem Wert null kommen, die einer Starrkörperverdrehung entsprechen. Die Rotorwelle kann als Ganzes frei und ohne Widerstand um ihre eigene Achse gedreht werden. Der zugehörige Eigenvektor hat dementsprechend für alle Knotenpunkte denselben Wert als Eintrag.

#### 4.1.2 Biegung

Zunächst werden globale Matrizen für die ebene Biegung erzeugt. Der zugehörige Zustandsvektor lautet für die Biegung um die y-Achse

$$\hat{\mathbf{q}}_{B_y} = [u_x^1 \quad \varphi_y^1 \quad u_x^2 \quad \varphi_y^2 \quad \dots \quad u_x^n \quad \varphi_y^n]^T \quad (4.7)$$

und für die Biegung um die x-Achse

$$\hat{\mathbf{q}}_{B_x} = [u_y^1 \quad \varphi_x^1 \quad u_y^2 \quad \varphi_x^2 \quad \dots \quad u_y^n \quad \varphi_x^n]^T. \quad (4.8)$$

Jede Elementmatrix hat die Größe  $4 \times 4$ . Dementsprechend haben die globalen Matrizen für die ebene Biegung bei einem System mit  $n$  Knoten die Dimension  $2n \times 2n$ . Die globalen Systemmatrizen für die ebene Biegung berechnen sich nach

$$\mathbf{K}_B = \sum_i^{n-1} \mathbf{K}_B^i, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M}_B = \sum_i^{n-1} \mathbf{M}_B^i, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{G}_B = \sum_i^{n-1} \mathbf{G}_B^i. \quad (4.11)$$

Zur Beschreibung der räumlichen Biegung besteht die Möglichkeit, einen komplexen globalen Zustandsvektor zu definieren, wie bereits in Abschnitt 2.3.3 durchgeführt. Die Freiheitsgrade der Biegung um die y-Achse bilden den Realteil, jene um die x-Achse den Imaginärteil. Der Zustandsvektor ergibt sich damit zu

$$\hat{\mathbf{q}}_B^* = [u_x^1 + iu_y^1 \quad \varphi_y^1 + i\varphi_x^1 \quad u_x^2 + iu_y^2 \quad \varphi_y^2 + i\varphi_x^2 \quad \dots \quad u_x^n + iu_y^n \quad \varphi_y^n + i\varphi_x^n]^T. \quad (4.12)$$

Dadurch ergibt sich unter Berücksichtigung einer Dämpfungsmatrix eine Bewegungsgleichung der Form

$$\mathbf{M}_B \ddot{\hat{\mathbf{q}}_B^*} - i\Omega \mathbf{G}_B \dot{\hat{\mathbf{q}}_B^*} + \mathbf{K}_B \hat{\mathbf{q}}_B^* = 0. \quad (4.13)$$

Der Nachteil dieser Beschreibung ist die Tatsache, dass diese nur für komplett rotationsymmetrische Systeme mit Proportionaldämpfung funktioniert [12]. Obwohl das hier beschriebene Modell rotationsymmetrische Rotorelemente verwendet, sind die modellierten Gleitlager anisotrop und die Dämpfung nicht proportional. Deshalb ist es notwendig,

die beiden Biegeebenen aufzuteilen und einen rein reellen Zustandsvektor zu definieren.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_B &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{B_y}^T & \hat{\mathbf{q}}_{B_x}^T \end{bmatrix}^T = [\text{Re}(\hat{\mathbf{q}}_B^*)^T \quad \text{Imag}(\hat{\mathbf{q}}_B^*)^T]^T \\ &= [u_x^1 \quad \varphi_y^1 \quad u_x^2 \quad \varphi_y^2 \quad \dots \quad u_x^n \quad \varphi_y^n \quad u_y^1 \quad \varphi_x^1 \quad u_y^2 \quad \varphi_x^2 \quad \dots \quad u_y^n \quad \varphi_x^n]^T\end{aligned}\quad (4.14)$$

Auf diese Weise können globale Matrizen für jede Biegeebene assembliert werden, die aufgrund der Rotationssymmetrie für den Wellenkörper identisch sind. Die globale Beschreibung erfolgt durch entsprechendes Zusammenbauen der globalen Matrizen der beiden Biegeebenen. Das Gleichungssystem wird doppelt so groß wie jenes mit den komplexen Koordinaten, alle Systemmatrizen haben die Größe  $4n \times 4n$ . Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_B + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_B \\ -\mathbf{G}_B & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}'} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}'} \hat{\mathbf{q}}_B = 0. \quad (4.15)$$

## 4.2 Modalanalyse

Um eine Modalanalyse durchzuführen ist es zunächst notwendig das lineare Differentialgleichungssystem 2. Ordnung aus Gleichung (4.15) umzuwandeln in ein ebensolches erster Ordnung. Dazu wird zunächst ein Zustandsvektor definiert, der den globalen Vektor mit den generalisierten Koordinaten und dessen Ableitung enthält

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_B \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}}_B \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Dementsprechend ergibt sich die Ableitung dieses Vektors zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_B \\ \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_B \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

und das Gesamtgleichungssystem unter Berücksichtigung einer Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}'$  zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{K}' & -\mathbf{M}'^{-1}(\mathbf{D}' + \Omega\mathbf{G}') \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}. \quad (4.18)$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  beschreibt das Gesamtsystem und unter Annahme des Exponentialansatzes

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_n e^{s_n t} \quad (4.19)$$

ergeben sich nach Lösung des Eigenwertproblems genau  $n$  komplexe Eigenwerte  $s_n$  mit den  $n$  zugehörigen komplexen Eigenvektoren  $\mathbf{z}_n$ . Die Eigenvektoren geben Auskunft über die Form der Biegeschwingung und liegen beliebig in der komplexen Ebene. Jeder Knoten besitzt im Eigenvektor einen komplexen Wert der seine Schwingung beschreibt. Die Amplitude, also der Betrag der komplexen Zahl gibt Auskunft über die Schwingungsamplitude. Der Phasenwinkel gibt Auskunft über die Phasenverschiebung der einzelnen Knoten untereinander. Durch die Kopplung über die gyroskopische Matrix und die anisotrope Lagerung wird dieser im Allgemeinen ungleich null und somit kommt es zu einer Verwindung der

Biegeformen.

Die komplexen Eigenwerte beschreiben den zeitlichen Verlauf der Schwingung, wobei der Realteil einer exponentiellen Dämpfung der Amplituden entspricht. Ist dieser negativ, so kommt es über die Zeit zu einer Abschwächung der Amplituden und das System bleibt stabil. Bei positivem Realteil kommt es zur Anfachung und das System wird instabil. Der Imaginärteil der Eigenwerte stellt die gedämpfte Kreisfrequenz der Schwingung dar.

### 4.3 Campbelldiagramm und kritische Drehzahl

Die Auswertung des Campbelldiagramms erfolgt durch eine mehrmalige Modalanalyse bei verschiedenen Drehzahlpunkten. Zu jedem Drehzahlpunkt werden alle Eigenfrequenzen berechnet und in das Campbelldiagramm eingetragen, sodass ein Verlauf der Eigenfrequenzen über die Drehzahlen ersichtlich wird. Die kritischen Drehzahlen ergeben sich in den Schnittpunkten der Anregungsgerade mit den Eigenfrequenzverläufen, wie bereits in Abschnitt 2.3.1 ausgeführt. Dort ist in Abbildung 2.8 auch ein derartiges Diagramm dargestellt.

Die kritischen Drehzahlen können für Systeme ohne Dämpfung rechnerisch direkt aus den Systemmatrizen bestimmt werden.

$$\det(-\Omega^2(\mathbf{M}' - i\mathbf{G}') + \mathbf{K}') = 0 \quad (4.20)$$

## 5 Aufbau und Bedienung des *MATLAB*<sup>®</sup>-Programms

Die Implementierung des in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Modells wird in *MATLAB*<sup>®</sup> durchgeführt. Zur vereinfachten Bedienung des *MATLAB*<sup>®</sup>-Programms wird eine graphische Benutzeroberfläche (GUI<sup>1</sup>) gestaltet, mit welcher alle Programmabläufe gesteuert werden können. Die Bedienung dieser, sowie der Programmaufbau und -ablauf werden in diesem Kapitel näher erläutert.

Grundsätzlich gliedern sich die Berechnung und damit auch der Programmaufbau in vier Schritte, welche auch bei kommerziellen FE-Programmen im Wesentlichen ident sind:

- **Input:** In diesem Abschnitt erfolgt die Definition der Problemstellung, alle wesentlichen Parameter müssen definiert werden. Input-Daten werden generiert.
- **Preprocessing:** Das Programm bereitet die zuvor generierten Inputdaten entsprechend auf und erzeugt für den jeweiligen Lösungsprozess geeignete Daten. Im hier beschriebenen Programm sind das die Systemdaten.
- **Solution:** Die Problemstellung wird von einem Solver, der nach einem geeigneten Lösungsprinzip oder -algorithmus arbeitet, gelöst. Hierbei entstehen wiederum Daten.
- **Postprocessing:** Die vom Solver erzeugten Daten werden in diesem Abschnitt entsprechend aufbereitet und visualisiert, um dem Benutzer eine Interpretation zu ermöglichen.

Dieser standardisierte Ablauf ist in Abbildung 5.1 übersichtlich dargestellt, wobei dort auch die in den verschiedenen Programmabschnitten erzeugten Daten ersichtlich sind.

Die GUI ist in mehrere verschiedene Bereiche unterteilt, die in Abbildung 5.2 dargestellt sind. Dies gewährleistet eine einfache und übersichtliche Bedienung. Je nachdem in welchem Programmabschnitt der Benutzer sich gerade befindet, wird er Einstellungen in einem unterschiedlichen Bereich der GUI treffen.

- **Menü:** In diesem Bereich stehen die Unterpunkte *File* und *Einlesen* zur Verfügung. Im Unterpunkt *File* könne die gesamten Einstellungen und Systemdaten (inklusive eventuell vorhandener Lösungsdaten) als *\*.mat* Datei gespeichert, beziehungsweise ebensolche Dateien gelesen werden. Im Untermenüpunkt *Einlesen* können standardisierte Eingabedaten für Lagerung und Geometrie eingelesen werden. Dies wird ausführlich im Abschnitt 5.1.2 behandelt.
- **Pan & Zoom:** Diese Buttons dienen zur Steuerung des Plotbereichs.
- **Geometrie & Lagerdaten:** Diese Tabelle dient zur Darstellung und Bearbeitung aller für die Geometrie und zur Beschreibung der Materialien relevanten Daten.

---

<sup>1</sup>Graphical User Interface

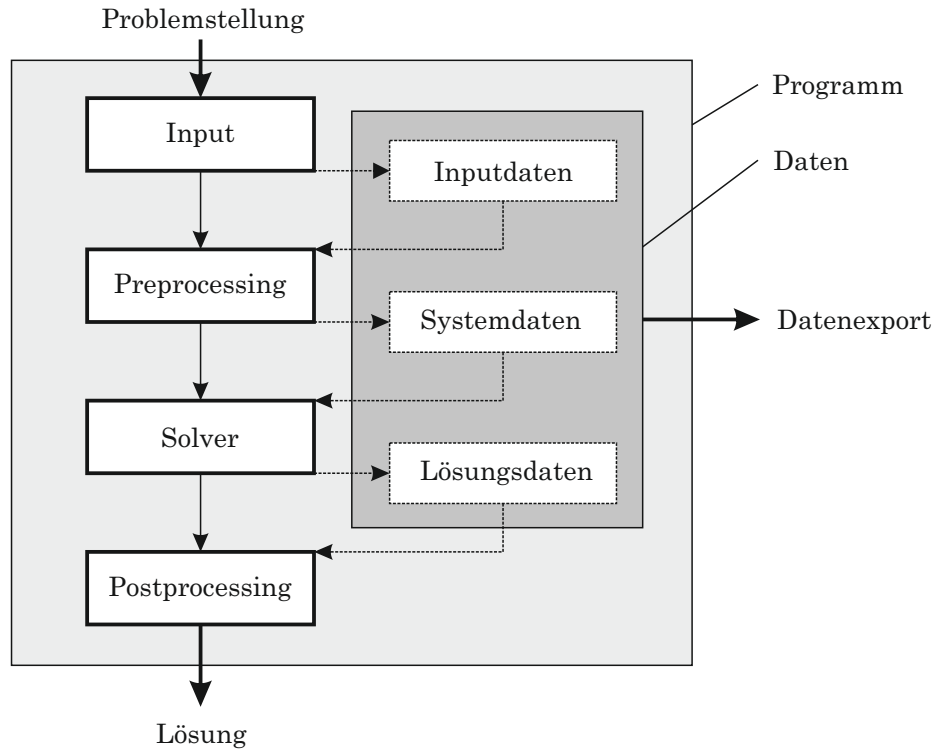


Abbildung 5.1: Überblick über den Programmaufbau und -ablauf

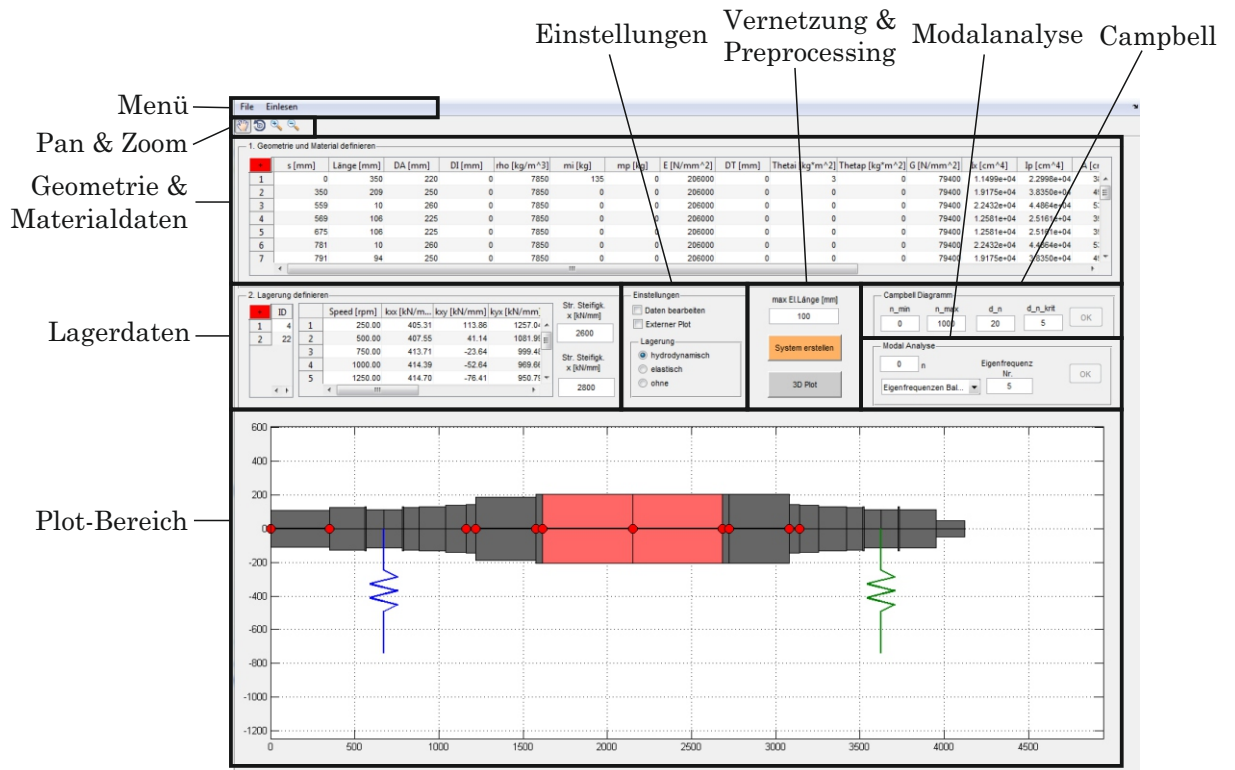


Abbildung 5.2: Aufbau der graphischen Benutzeroberfläche

- **Einstellungen:** Hier können verschiedenste Einstellungen getroffen werden (z.B. Ausgabe aller Plots in einem externen Fenster, Art der Lagerung usw.), dieser Bereich ist zusätzlich in Abbildung 5.3 dargestellt.
- **Vernetzung & Preprocessing:** Hier wird das Preprocessing gestartet, die Feinheit der Vernetzung kann gewählt werden.
- **Modalanalyse:** Eine Modalanalyse kann anhand bestimmter Parameter gestartet werden.
- **Campbelldiagramm:** Dieser Bereich dient zur Erstellung eines Campbelldiagramms.
- **Plotbereich:** In diesem Bereich werden die Ein- oder Ausgabedaten visualisiert.

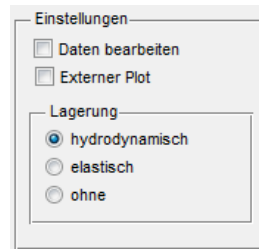


Abbildung 5.3: Bereich Einstellungen der GUI

## 5.1 Input: Eingabe / Einlesen der Eingabedaten

Die Definition der Eingabeparameter erfolgt entweder manuell oder durch Einlesen von Inputfiles.

### 5.1.1 Manuelles Definieren der Eingabedaten

#### Geometrie- und Materialdaten

	s [mm]	Länge [mm]	DA [mm]	DI [mm]	rho [kg/m <sup>3</sup> ]	mi [kg]	mp [kg]	E [N/mm <sup>2</sup> ]	DT [mm]	Th
+										
1	0	350	220	0	7850	135	0	206000	0	
2	350	209	250	0	7850	0	0	206000	0	
3	559	10	260	0	7850	0	0	206000	0	
4	569	106	225	0	7850	0	0	206000	0	
5	675	106	225	0	7850	0	0	206000	0	
6	781	10	260	0	7850	0	0	206000	0	
7	791	94	250	0	7850	0	0	206000	0	

Abbildung 5.4: Tabelle Geometrie- & Materialdaten

Um Eingabedaten manuell bearbeiten zu können, muss im Bereich Einstellungen die Checkbox *Daten bearbeiten* aktiviert sein, siehe Abbildung 5.3. Nur dann ist die manuelle Eingabe in die Tabelle Geometrie- und Materialparameter möglich. Der Aufbau dieser Tabelle ist in Abbildung 5.4 genauer dargestellt. Der Rotor wird nun Abschnitt für Abschnitt definiert. Ein neuer Abschnitt kann durch einen Klick auf den +-Button in der oberen linken Ecke der Tabelle hinzugefügt werden. Jede Zeile stellt einen rotationssymmetrischen Abschnitt der Rotorwelle dar. Innerhalb eines solchen Abschnitts müssen alle Parameter konstant sein.

Jede Spalte entspricht einem bestimmten Parameter mit definierter Einheit. Nicht alle dieser Parameter müssen eingegeben werden, manche werden auch aus bereits eingegebenen Parametern berechnet.

Tabelle 5.1: Parameter zur Beschreibung der Geometrie

Bezeichnung	Kürzel in GUI	Formelzeichen	Einheit
Länge	L	$l$	$mm$
Außendurchmesser	DA	$d_a$	$mm$
Innendurchmesser	DI	$d_i$	$mm$
Torsionsdurchmesser	DT	$d_t$	$mm$
axiales Flächenmoment	Ix	$I_t$	$cm^4$
polares Flächenmoment	Ip	$I_p$	$cm^4$
Querschnittsfläche	A	$A$	$cm^2$

Zur Beschreibung der Geometrie werden die Parameter in Tabelle 5.1 verwendet. Im Normalfall werden die Parameter  $d_a, d_i$  und  $l$  angegeben und  $I_t, I_p$  und  $A$  können daraus berechnet werden. Dies erfolgt nach den Zusammenhängen

$$A = \frac{(d_a^2 - d_i^2)\pi}{4}, \quad (5.1)$$

$$I_t = \frac{(d_a^4 - d_i^4)\pi}{64} \quad (5.2)$$

und

$$I_p = \frac{(d_a^4 - d_i^4)\pi}{32}. \quad (5.3)$$

Einen direkten Einfluss auf die Steifigkeit des Systems haben von den geometrischen Parametern nur die Länge und die Flächenmomente, wie in Gleichung (3.23) ersichtlich. Sollte es sich beim jeweiligen Wellenabschnitt um den Teil eines Blechpaketes handeln, so ergeben sich zwei Möglichkeiten dessen Steifigkeit zu definieren.

- Im einfachsten Fall werden die Flächenmomente direkt angegeben. Ist dies der Fall, so wird aus dem axialen Flächenmoment ein Ersatzaußendurchmesser DA ermittelt. Dieser hat jedoch keinerlei Einfluss auf die Berechnung und dient nur zur Visualisierung der Geometrie.
- Eine weitere Möglichkeit ist die Modellierung über die Ersatzdurchmesser DA für die Biegesteifigkeit und DT für die Torsionssteifigkeit. Sind beide Parameter vorhanden, so werden die Flächenmomente aus ihnen bestimmt. Ist nur der Ersatzdurchmesser DA vorhanden, so wird dieser auch zur Berechnung der Torsionssteifigkeit verwendet.

Tabelle 5.2: Materialparameter

Bezeichnung	Kürzel in Gui	Formelzeichen	Einheit
Elastizitätsmodul	E	$E$	$N/mm^2$
Schubmodul	G	$G$	$N/mm^2$
Dichte	rho	$\rho$	$kg/m^3$
Querkontraktionszahl	nu	$\nu$	—

Die Materialparameter sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Durch Eingabe der Parameter E und G kann die Querkontraktionszahl  $\nu$  nach

$$\nu = \frac{E}{2(1 + G)} \quad (5.4)$$

berechnet werden.

Bei der Modellierung des Blechpakets wird die Dichte zu null definiert und alle Trägheiten werden über Ersatzträgheiten definiert. Diese und weitere Parameter sind in Tabelle 5.3 angeführt. Die Werte für den Schub- und Elastizitätsmodul sind kompatibel zu den Geometrieparametern zu definieren.

Tabelle 5.3: zusätzliche Parameter

Bezeichnung	Kürzel in GUI	Formelzeichen	Einheit
Gesamtlänge	s	$s$	$mm$
Punkt-Ersatzmasse	mp	$m_p$	$kg$
verteilte Ersatzmasse	mi	$m_i$	$kg$
Punkt-Torsionsträgheit	Thetap	$J_p$	$kgm^2$
verteilte Torsionsträgheit	Thetai	$J_i$	$kgm^2$
Masse	m	$m$	$kg$
Torsionsträgheit	Theta	$J$	$kgm^2$
magnetischer Zug	Kmagn	$q_{magn}$	$N/mm$
Anzahl der Elemente	n	$n$	–

Ersatzträgheiten (jeweils bezüglich Torsion als  $J_i, J_p$  oder bezüglich Biegung als  $m_i, m_p$ ) können auf einzelne Knoten (Index  $p$ ) oder verteilt auf einen Wellenabschnitt (Index  $i$ ) definiert werden. Wird eine punktförmige Ersatzmasse ( $m_p, J_p$ ) definiert, so wird diese auf den rechten Knoten des jeweiligen Wellenabschnittes aufgeprägt. Das Blechpaket wird bezüglich seiner Trägheit durch derartige Ersatzmassen modelliert. Die Werte für die Masse  $m$  und die Torsionsträgheit  $J$  des Wellenabschnittes werden aus den Geometrie- und den Materialdaten bestimmt und gehen nicht direkt in die Rechnung ein. Sie dienen nur zur Information, berücksichtigen keine Ersatzträgheiten und werden nach den Zusammenhängen

$$m = Al\rho \quad (5.5)$$

und

$$J = m \frac{d_a^2 - d_i^2}{8} \quad (5.6)$$

bestimmt.

Auch der magnetische Zug wird direkt als Parameter eingegeben. Einen weiteren Eingabeparameter stellt die Anzahl der Elemente  $n$  dar. Damit kann eine Netzauflösung für den konkreten Wellenabschnitt vorgegeben werden, sodass dieser in genau  $n$  Elemente unterteilt wird. Die Gesamtlänge  $s$  wird automatisch errechnet und addiert die Länge aller Wellenabschnitte bis zum aktuellen Abschnitt.

Bei jeder Änderung eines Eingabeparameters werden alle abhängigen Parameter automatisch neu berechnet und eine Visualisierung des Rotormodells im Plot-Bereich erstellt bzw. aktualisiert.



## Lagerdaten

Position		Daten Schmierfilm				Struktursteifigkeit
+	ID	Speed [rpm]	k <sub>xx</sub> [kN/m...]	k <sub>xy</sub> [kN/mm]	k <sub>yx</sub> [kN/mm]	Str. Srteifigk. horizontal
1	4	250.00	405.31	113.86	1257.04	2600
2	22	500.00	407.55	41.14	1081.99	Str. Srteifigk. vertikal
		750.00	413.71	-23.64	999.41	2800
		1000.00	414.39	-52.64	969.64	
		1250.00	414.70	-76.41	950.79	

x-Richtung

y-Richtung

Abbildung 5.5: Eingabemaske für hydrodynamische Lagerung

Je nach Einstellung für die Lagerungsart im Bereich Einstellungen der GUI, siehe Abbildung 5.3, hat die Eingabemaske für die Lagerdaten ein unterschiedliches Aussehen.

Für die Parametrisierung des in Abschnitt 3.3.2 vorgestellten hydrodynamischen Gleitlagermodells mit Struktursteifigkeit muss die Auswahl *hydrodynamisch* für die Lagerung im Bereich Einstellungen aktiv sein. Die Eingabemaske hat dann einen Aufbau wie in Abbildung 5.5 dargestellt. Im linken Bereich wird die Position der Lagerstellen angegeben, wobei diese über die Nummer des Wellenabschnittes definiert wird. Mit dem +-Button in der linken oberen Ecke können zusätzliche Lagerstellen generiert werden. Das Lager wird immer am rechten Rand des angegebenen Abschnittes eingefügt.

In der nächsten Tabelle werden die Daten für die Steifigkeit und die Dämpfungseigenschaften des Schmierfilms definiert. Jede Zeile steht hier für eine bestimmte Rotordrehzahl. Die Daten werden in der Reihenfolge und in den Einheiten, wie in Tabelle 5.4 dargestellt, eingegeben.

Tabelle 5.4: Daten zur Beschreibung des des hydrodynamischen Gleitlagermodells

Bezeichnung	Kürzel in GUI	Formelzeichen	Einheit
Rotordrehzahl	Speed	$\Omega$	<i>rpm</i>
Steifigkeitskoeffizient	k <sub>xx</sub>	$c_{xx}$	<i>kN/mm</i>
Steifigkeitskoeffizient	k <sub>xy</sub>	$c_{xy}$	<i>kN/mm</i>
Steifigkeitskoeffizient	k <sub>yx</sub>	$c_{yx}$	<i>kN/mm</i>
Steifigkeitskoeffizient	k <sub>yy</sub>	$c_{yy}$	<i>kN/mm</i>
Dämpfungskoeffizient	c <sub>xx</sub>	$d_{xx}$	<i>kNs/mm</i>
Dämpfungskoeffizient	c <sub>xy</sub>	$d_{xy}$	<i>kNs/mm</i>
Dämpfungskoeffizient	c <sub>yx</sub>	$d_{yx}$	<i>kNs/mm</i>
Dämpfungskoeffizient	c <sub>yy</sub>	$d_{yy}$	<i>kNs/mm</i>
Steifigkeitskoeffizient	Str.Steifigk. horizontal	$c_x$	<i>kN/mm</i>
Steifigkeitskoeffizient	Str.Steifigk. horizontal	$c_x$	<i>kN/mm</i>

Die Struktursteifigkeit in x-Richtung  $c_x$  und jene in y-Richtung  $c_y$  werden in den Eingabefeldern rechts der Tabelle mit den Daten des Schmierfilms definiert.

Für die Verwendung einer einfachen Lagerung mit einer Feder, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, muss die Auswahl *elastisch* als Lagerung im Bereich Einstellungen aktiv sein. Die Eingabemaske schaut nun ähnlich der des hydrodynamischen Gleitlagers aus. Die Definition der Lagerposition erfolgt analog. Die Tabelle, die zuvor zur Definition des Schmier-

films verwendet wurde, vereinfacht sich und enthält nur mehr die Werte für  $\Omega, c$  wie in Tabelle 5.5 angegeben. Der Steifigkeitskoeffizient  $c$  definiert die Federsteifigkeit in beiden

Tabelle 5.5: Daten zur Beschreibung der elastischen Lagerung

Bezeichnung	Kürzel in GUI	Formelzeichen	Einheit
Rotordrehzahl	Speed	$\Omega$	<i>rpm</i>
Steifigkeitskoeffizient	kxx	$c$	<i>kN/mm</i>

Biegeebenen und kann für verschiedene Rotorgeschwindigkeiten  $\Omega$  definiert werden. Die Definition einer Struktursteifigkeit hat keine Auswirkung auf das System.

Während der Definition einer Lagerstelle wird die graphische Ansicht der Rotorwelle ständig aktualisiert und die Lagerpositionen werden durch ein Federsymbol angedeutet.

### 5.1.2 Einlesen von Eingabedateien

Innerhalb der Firma Elin Motoren GmbH existieren Eingabedateien, die alle notwendigen Parameter (angeführt in den Tabellen 5.1, 5.2 und je nach Lagertyp zusätzlich in Tabelle 5.4 oder 5.5) bestimmter Rotormodelle enthalten. Die in den Tabellen 5.1 und 5.2 angeführten Parameter für Geometrie- und Materialdaten, sowie die Beschreibung der elastischen Lagerung (Tabelle 5.5) können im Menüpunkt Einlesen, Geometrie aufgerufen und automatisch eingelesen werden.

Die Daten für die Gleitlagermodellierung können ebenfalls automatisch eingelesen werden. Dies erfolgt über den Menüpunkt Einlesen, Lagerdaten. Die elastische Lagerung wird dann durch eine hydrodynamische ersetzt.

Nach dem Einlesen einer beliebigen Parameterdatei wird die graphische Ansicht der Rotorwelle stets automatisch aktualisiert. Der Punkt *Daten bearbeiten* im Bereich *Einstellungen* der GUI wird automatisch deaktiviert. Will man die eingelesenen Parameter editieren, so muss dieser wieder aktiviert werden.

### 5.1.3 Vorschau der Rotorwelle

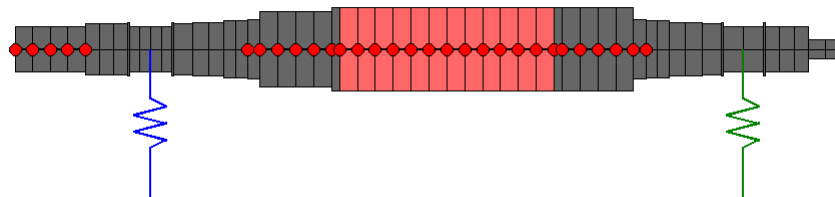


Abbildung 5.6: Vorschau von Wellengeometrie, Ersatzmassen und magnetischem Zug

Um den Eingabeprozess zu erleichtern und die aktuell eingegebenen Daten zu visualisieren, wird nach jeder Eingabe die Wellenvorschau aktualisiert. In Abbildung 5.6 ist eine derartige Vorschau dargestellt. Anhand der Unterteilung der Welle sind die einzelnen Elemente ersichtlich. Ersatzmassen sind als rote Punkte an den jeweiligen Knoten visualisiert. Die Lagerstellen werden als Federsymbole dargestellt und Bereiche, die dem magnetischen

Zug ausgesetzt sind, werden in blass rot visualisiert. Zusätzlich ist es möglich eine dreidimensionale Ansicht der Geometrie der modellierten Rotorwelle zu erzeugen. Eine derartige Vorschau ist in Abbildung 5.7 ersichtlich.

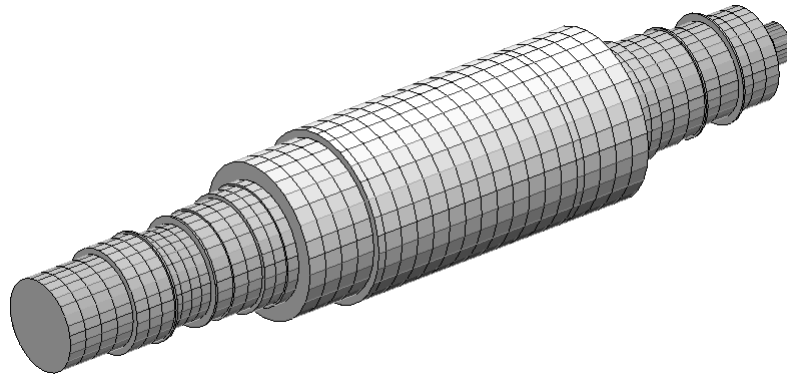


Abbildung 5.7: Dreidimensionale Ansicht der Wellengeometrie

## 5.2 Preprocessing: Erstellen der Systemmatrizen

Nachdem alle Eingabedaten aktuell und vorhanden sind, kann oberhalb des *Preprocessing*-Buttons eine maximale Elementlänge definiert werden. Jeder Wellenabschnitt wird in so viele Finite Elemente unterteilt, dass deren maximale Länge kleiner als der dort eingegebene Wert ist. Die graphische Vorschau der Rotorwelle wird automatisch aktualisiert. Über den Button *Preprocessing* wird die Funktion `preprocessing.m` gestartet. Zunächst werden alle Eingabedaten in SI-Einheiten umgerechnet und unter `data.input` in die Datenstruktur, die in Abschnitt 5.5 näher erläutert wird, aufgenommen. Zum Erstellen der Systemmatrizen wird wie in Abbildung 5.8 veranschaulicht, vorgegangen. Zunächst werden die globalen Matrizen für die Torsion und für eine ebene Biegung assembliert. Dazu werden in der Matlabfunktion `assembleMatrix.m` für die Biegung, bzw. `assembleMatrixTorsion.m` für die Torsion die jeweiligen Elementmatrizen berechnet und anschließend deren Einträge an der richtigen Stelle der globalen Matrizen (k,m,g) hinzu addiert. In Abbildung 5.9 ist dieser Vorgang veranschaulicht. Die Elementmatrizen überlappen sich an den, die Elemente verbindenden Knoten und es entstehen Bandmatrizen. Die einzelnen Elementmatrizen werden mit den Funktionen `getElemK.m`, `getElemMG.m`, `getElemMatrixTorsion.m` berechnet. Im nächsten Schritt werden mit der Funktion `addMasses.m` bzw. `addMassesTorsion.m` die Ersatzträgheiten in die globalen Matrizen eingebaut. Alle Ersatzmassen wirken nur in der Diagonale der jeweiligen Massenmatrix. Im selben Schritt erfolgt der Einbau des magnetischen Zuges mit der Funktion `addKmagn.m`. Hierbei gilt es zu beachten, dass der magnetische Zug bezogen auf die Rotorlänge definiert wurde. Dieser Wert muss also zunächst mit der Elementlänge multipliziert werden, sodass man eine Federsteifigkeit erhält. Anschließend wird dieser Wert halbiert und auf beide Knoten des Elements aufgeprägt. Der Wert für den jeweiligen Knoten lautet also

$$c_{magn} = \frac{1}{2} q_{magn} l. \quad (5.7)$$

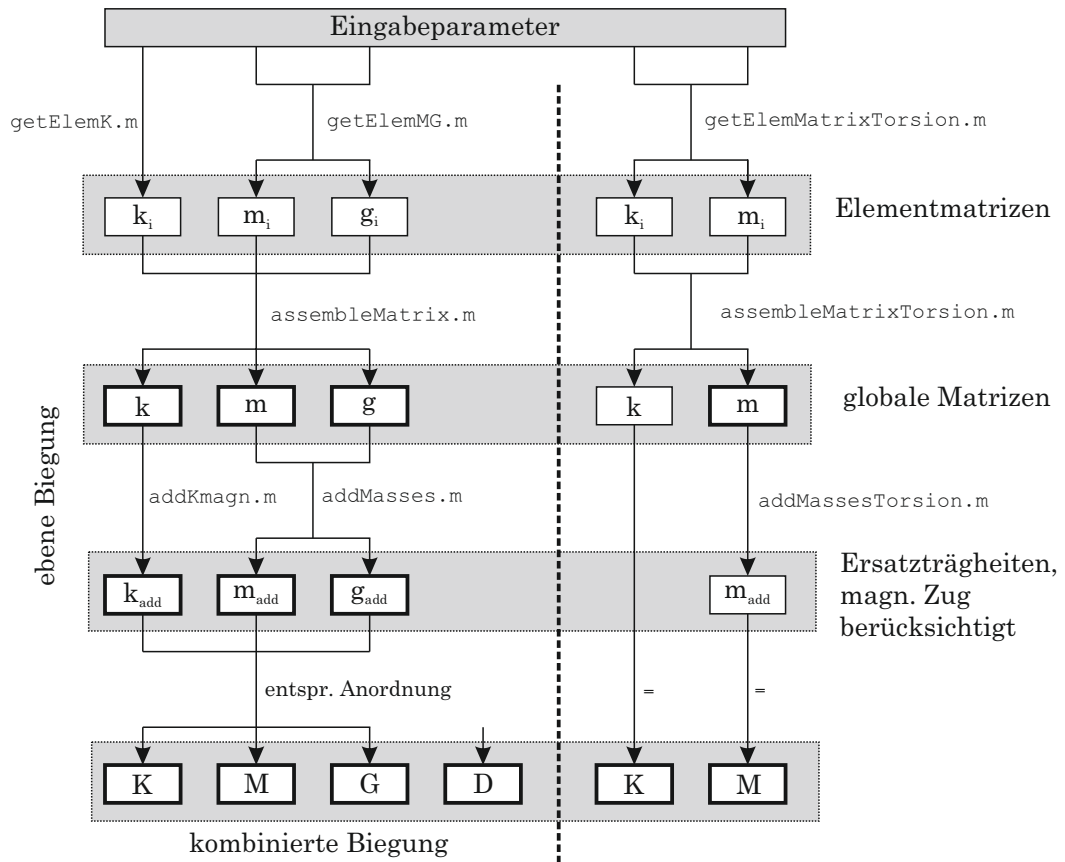


Abbildung 5.8: Ablauf des Preprocessings

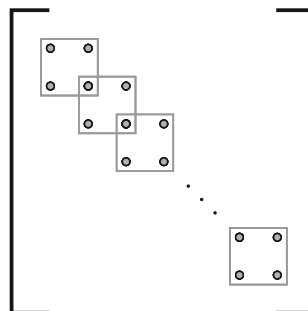


Abbildung 5.9: Assemblieren der Elementmatrizen

Als nächstes werden aus den globalen Systemmatrizen für eine Biegeebene die entsprechenden Systemmatrizen für die Biegung in beiden Ebenen errechnet. Dies erfolgt durch entsprechende Anordnung der Matrizen für eine Biegeebene wie in Gleichung (4.15) angeführt. Dieser Vorgang ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Die Größe der Systemmatrizen verdoppelt sich. Es wird eine ebenso große, mit Nullen besetzte Dämpfungsmatrix erzeugt. Somit stehen alle globalen Systemmatrizen zur Verfügung. Die Lagerung wurde in diesem Programmabschnitt noch nicht berücksichtigt. Ein Teil der während des Preprocessings

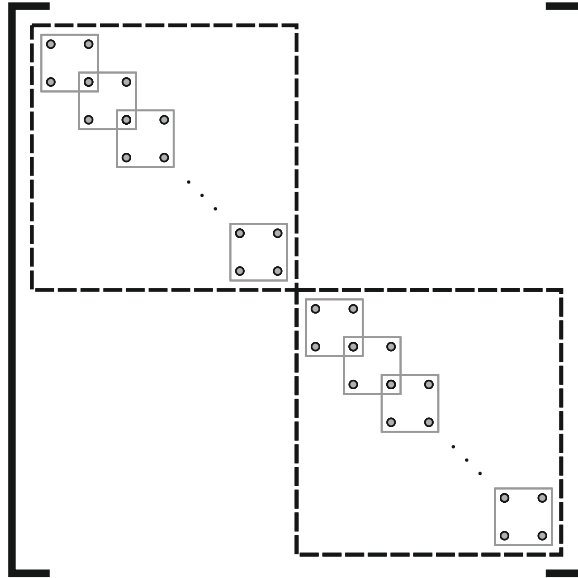


Abbildung 5.10: Zusammenbau einer globalen Matrix für die kombinierte Biegung

erstellten Matrizen werden in der Datenstruktur des Programms unter `data.system` abgespeichert. Diese sind Abbildung 5.8 fett umrahmt und in Tabelle 5.6 zusammengefasst.

Tabelle 5.6: Im Preprocessing generierte Systemmatrizen

Bezeichnung	Kürzel Daten- struktur	Dimension	Bemerkung
Steifigkeitsmatrix	k	$2n \times 2n$	ebene Biegung
Massenmatrix	m	$2n \times 2n$	ebene Biegung
Gyroskopische Matrix	g	$2n \times 2n$	ebene Biegung
Steifigkeitsmatrix	k_add	$2n \times 2n$	ebene Biegung mit magn. Zug
Massenmatrix	m_add	$2n \times 2n$	ebene Biegung mit Ersatzmassen
Gyroskopische Matrix	g_add	$2n \times 2n$	ebene Biegung mit Ersatzmassen
Steifigkeitsmatrix	K	$4n \times 4n$	komb. Biegung mit magn. Zug
Massenmatrix	M	$4n \times 4n$	komb. Biegung mit Ersatzmassen
Gyroskopische Matrix	G	$4n \times 4n$	komb. Biegung mit Ersatzmassen
Dämpfungsmatrix	D	$4n \times 4n$	komb. Biegung, Nullmatrix
Steifigkeitsmatrix	Ktorsion	$n \times n$	Torsion
Massenmatrix	mtorsion	$n \times n$	Torsion
Massenmatrix	Mtorsion	$n \times n$	Torsion mit Ersatzmassen

### 5.3 Solver: Lösen des Systems

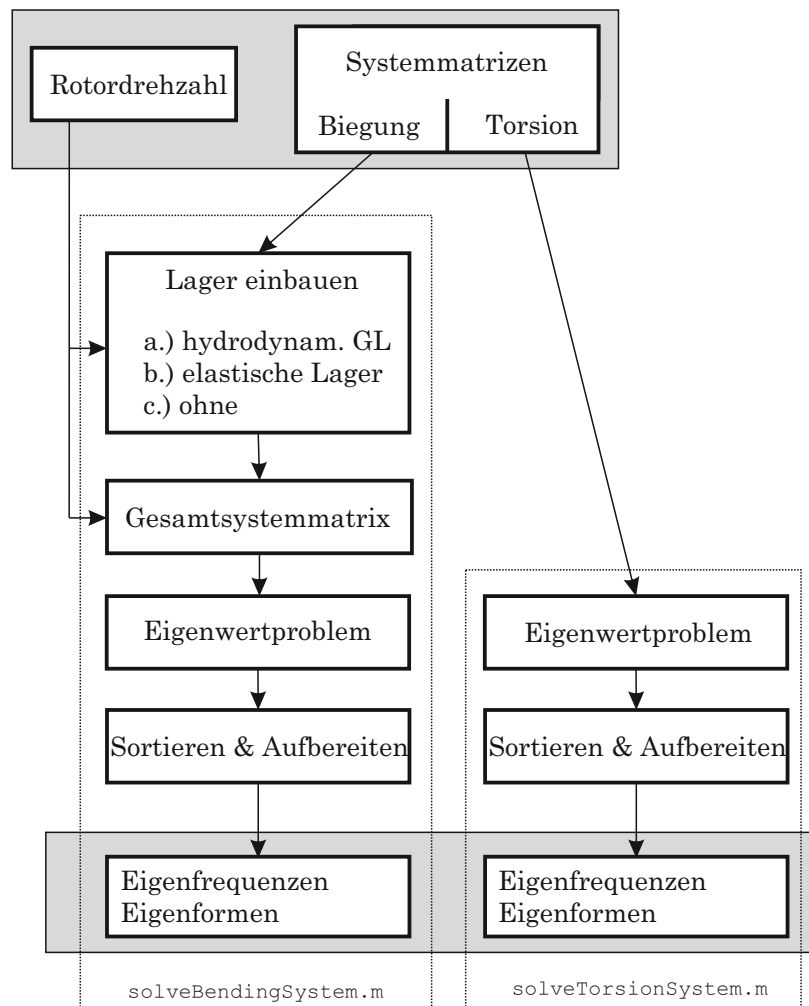


Abbildung 5.11: Ablauf des Lösungsprozesses

Der Ablauf des Lösungsprozesses ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Die beiden Beanspruchungsarten Torsion und Biegung werden dabei getrennt behandelt. Während bei der Torsionsbeanspruchung das Eigenwertproblem direkt aus den im Preprocessing erzeugten Systemmatrizen mit der Funktion `solveTorsionSystem.m` gelöst werden kann, stellt sich dieser Vorgang bei der Biegung etwas komplexer dar.

Die Lösung des Biege-Systems erfolgt mit der Funktion `solveBendingSystem.m`. Zunächst muss hierbei die Lagerung in die Systemmatrizen eingebaut werden. Dabei werden die drei Typen

- hydrodynamisches Gleitlager
- elastisches Lager
- keine Lagerung

unterschieden. Es wird hier vermehrt Augenmerk auf den Einbau des hydrodynamischen Gleitlagermodells gelegt, da das Einbauen einer einfachen elastischen Lagerung einfacher und analog erfolgt. Aufgrund der als Eingabeparameter bekannten Rotordrehzahl können die für die aktuelle Drehzahl relevanten Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten des

Schmierfilms aus den Eingabedaten interpoliert werden. Diese können dann entsprechend in die globalen Steifigkeits- bzw. Dämpfungsmatrix für die kombinierte Biegung (K,D) eingebaut werden. Dieser Vorgang ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Hierbei stellen die schwarzen Punkte Einträge dar, die aus dem Einbau des Lagermodells (siehe Abschnitt 3.3.2) resultieren. Es ist zu erkennen, dass die Matrizen um zusätzliche Freiheitsgrade für die Knoten des Lagergehäuses erweitert werden. Diese Erweiterung muss natürlich auch für die gyroskopische und die Massenmatrix erfolgen. Die Massenmatrix erhält in der Diagonale dieser zusätzlichen Elemente entsprechende Einträge für eine Massenträgheit der Lagergehäuse. Es ist ersichtlich, dass es durch Einbau der Lager zu Einträgen weit außerhalb der Diagonale der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix kommt. Nach Einbau der

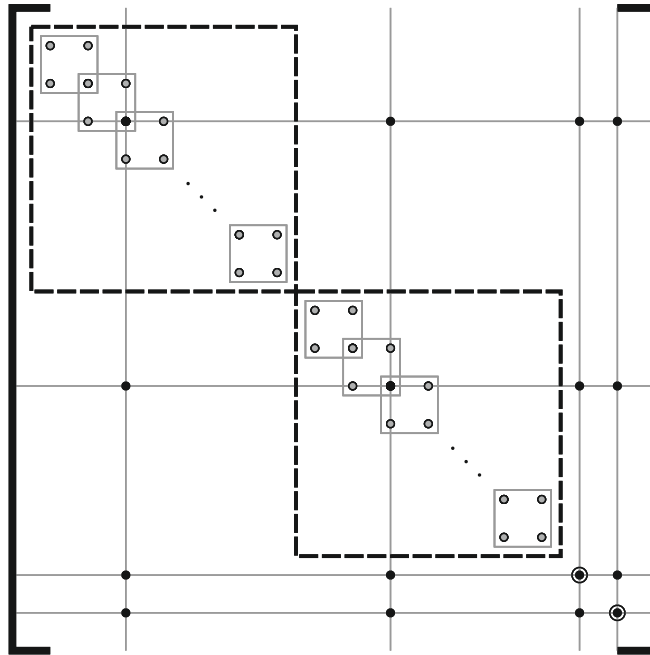


Abbildung 5.12: Einbau des Lagermodells in die globale Steifigkeitsmatrix

Lagerung sind alle Systemmatrizen komplett und die Gesamtsystemmatrix  $\mathbf{A}$  kann nach Gleichung (4.18) ermittelt werden. Somit ist eine entsprechende Beschreibung des Systems vorhanden und das Eigenwertproblem kann gelöst werden.

Nach Sortierung und Aufbereitung stehen die in Tabelle 5.8 angeführten Daten für die Torsion und die in Tabelle 5.7 dargestellten Daten für die Biegung zur Verfügung.

Eine Lösung des Systems kann über die beiden Bereiche *Modalanalyse* und *Campbell-diagramm* in der GUI gestartet werden.

### 5.3.1 Durchführung einer Modalanalyse

Zum Durchführen einer Modalanalyse wird die in Abbildung 5.13 dargestellte Eingabemaske verwendet. Der wesentliche Parameter ist hierbei die Rotordrehzahl  $n$  in  $[rpm]$ . Nach der Definition dieser Parameter wird durch einen Klick auf den Button *OK* eine Modalanalyse gestartet. Die beiden zusätzlichen Eingabemöglichkeiten bestimmen die Ausgabeform der Lösung und werden dementsprechend im Postprocessing behandelt.

Tabelle 5.7: Lösungsdaten für die Biegung in *data.sol.bend*

Bezeichnung	Kürzel Daten- struktur	Hinweis
Eigenfrequenzen	freq	Vektor mit den Eigenfrequenzen des Systems
Stabilitätsfaktor	stab	Vektor mit den Realteilen der Eigenwerte
Verschiebung	u1	Matrix, jede Spalte stellt Eigenform bezüglich Verschiebung in x-Richtung dar
Verschiebung	u2	Matrix, jede Spalte stellt Eigenform bezüglich Verschiebung in y-Richtung dar
Verdrehung	phi1	Matrix, jede Spalte stellt Eigenform bezüglich Verdrehung um y-Achse dar
Verdrehung	phi2	Matrix, jede Spalte stellt Eigenform bezüglich Verdrehung um x-Achse da
Rotordrehzahl	rpm	Rotordrehzahl, bei der die Lösung erstellt wurde

Tabelle 5.8: Lösungsdaten für die Torsion in *data.sol.torsion*

Bezeichnung	Kürzel in Daten- struktur	Hinweis
Eigenfrequenzen	freq	Vektor mit den Eigenfrequenzen des Systems
Verdrehung	phi	Matrix, jede Spalte stellt Eigenform bezüglich Verdrehung um z-Achse da

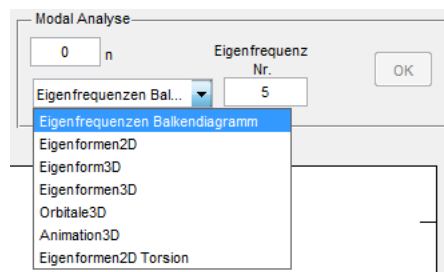


Abbildung 5.13: Eingabemaske zur Modalanalyse



### 5.3.2 Erstellen eines Campbelldiagramms

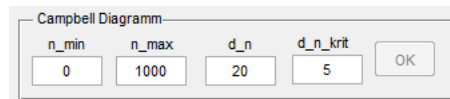


Abbildung 5.14: Eingabemaske zum Erstellen eines Campbelldiagrammes

Zum Erstellen eines Campbelldiagramms wird der in Abbildung 5.14 dargestellte Bereich der GUI verwendet. Dabei müssen die Parameter nach Tabelle 5.9 definiert werden. Mit

Tabelle 5.9: Parameter zum Erstellen eines Campbelldiagramms

Bezeichnung	Kürzel in GUI	Einheit	Beschreibung
minimale Drehzahl	nmin	<i>rpm</i>	Startpunkt der x-Achse
maximale Drehzahl	nmax	<i>rpm</i>	Endpunkt der x-Achse
Schrittweite	dn	<i>rpm</i>	Gibt die Abstufung bzw. die Auflösung der x-Achse an
Schwelle	dnkrit	<i>rpm</i>	Gibt den maximalen Unterschied zwischen Anregungsgerade und Eigenfrequenz an, ab dem betreffende Eigenfrequenz als kritische Drehzahl markiert wird

dem Button *OK* wird die Berechnung des Campbelldiagramms gestartet. Anhand der Eingabeparameter werden mit Hilfe einer Schleife Modalanalysen an den definierten Drehzahlpunkten durchgeführt und die jeweiligen Eigenfrequenzen als Punkte im Campbelldiagramm eingetragen. Anschließend wird die Anregungsgerade eingezeichnet und Punkte, die eine kleinere Abweichung als *dnkrit* von dieser Gerade aufweisen, als kritische Drehzahlen entsprechend markiert. Die Ausgabe des Campbelldiagramms selbst gehört bereits zum Postprocessing und wird dementsprechend im Kapitel 5.4 behandelt.

## 5.4 Postprocessing: Auswertung und Darstellung der Ergebnisse

### 5.4.1 Campbelldiagramm

Wenn im Bereich *Campbelldiagramm* eine Berechnung gestartet wird, so wird automatisch ein Campbelldiagramm ausgegeben. Verschiedenste vom Programm erzeugte Campbelldiagramme sind im Kapitel 6 ersichtlich.

### 5.4.2 Darstellungsformen im Bereich Modalanalyse

Im Bereich *Modalanalyse* stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die Lösungsdaten zu visualisieren. Eine Auswahl erfolgt über das Drop-Down-Menü, welches in Abbildung 5.13 dargestellt ist. Einen Überblick über die Möglichkeiten gibt Tabelle 5.10. Alle dreidimensionalen Darstellungsarten (3D) können mit Hilfe der Plot-Bedienungsbuttons

Tabelle 5.10: Darstellungsformen im Bereich *Modalanalyse*

Bezeichnung	Daten	2D/3D	Typ	Beschreibung
Eigenfrequenzen Balkendiagramm	Eigenfrequenzen	2D	Biegung, Torsion	mehrere Eigenfrequenzen möglich
Eigenformen2D	Eigenformen	2D	Biegung	mehrere Eigenformen gleichzeitig möglich
Eigenform3D	Eigenformen	3D	Biegung	Visualisierung einer einzelnen Eigenform
Eigenformen3D	Eigenformen	3D	Biegung	mehrere Eigenformen gleichzeitig möglich
Orbitale3D	Eigenformen	3D	Biegung	Visualisierung einer einzelnen Eigenform
Animation3D	Eigenformen	3D	Biegung	Animation einer einzelnen Eigenform
Eigenformen2D Torsion	Eigenformen	2D	Torsion	mehrere Eigenformen gleichzeitig möglich

räumlich frei gedreht und verschoben werden. Bei Darstellungsformen, die mehrere Eigenformen oder Eigenfrequenzen gleichzeitig abbilden können (in Tabelle 5.10 in der Beschreibung angeführt), können diese durch Definition eines Vektors mit den gewünschten Modenummern in Eingabefeld *Eigenfrequenz Nr.* definiert werden<sup>2</sup>. Im Folgenden werden die Darstellungsformen im Einzelnen näher erklärt.

## Eigenfrequenzen

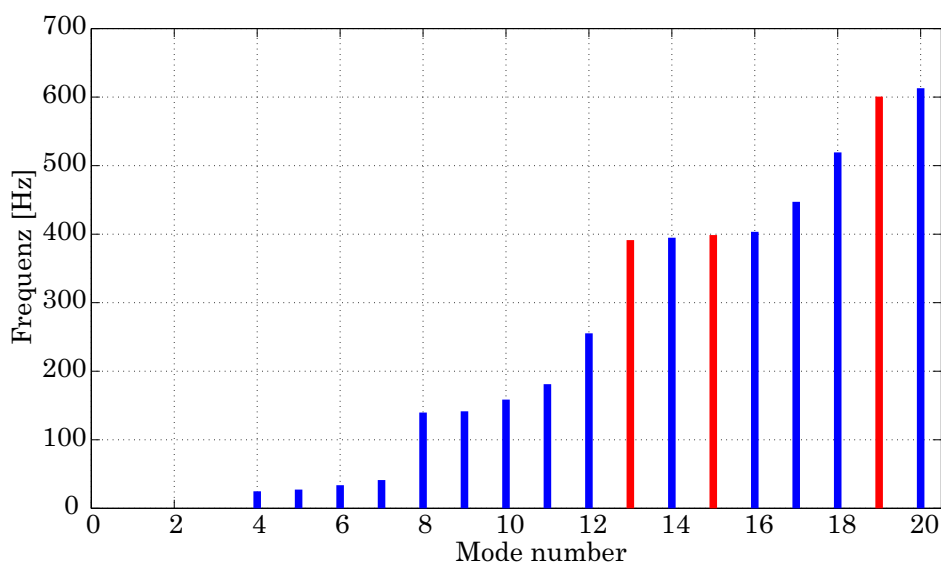


Abbildung 5.15: Balkendiagramm zur Darstellung der Eigenfrequenzen

Die verschiedenen Eigenfrequenzen des Rotors können als Balkendiagramm dargestellt wer-

<sup>2</sup>z.B.: 1:4:20,[1 5 7], 1:4

den. Bei dieser Darstellungsart werden sowohl Eigenfrequenzen bezüglich der Torsion als auch der Biegung dargestellt. Die Eigenfrequenzen werden der Größe nach gereiht und farblich nach Torsion und Biegung unterschieden. Eine derartige Darstellung ist in Abbildung 5.15 ersichtlich.

### **Eigenformen**

Die Darstellung der Eigenform veranschaulicht die Schwingungsform des Biegebalkens. Es bestehen drei verschiedene Möglichkeiten die Eigenformen bezüglich Biegung darzustellen:

- Es besteht die Möglichkeit einer dreidimensionalen Darstellung einer bestimmten Eigenform, wie in Abbildung 5.16, wo die Rotorwelle als Zylinder mit konstantem Querschnitt dargestellt wird.
- Eine weitere Möglichkeit veranschaulicht Abbildung 5.17, bei der mehrere verschiedene Eigenformen dargestellt werden können.
- Bei der Darstellung in Abbildung 5.18 werden die Amplituden der komplexen Zeiger und deren Phasendifferenz dargestellt

Zur Darstellung der Eigenform der Torsionsschwingung steht die Auswahlmöglichkeit Eigenformen2D Torsion zur Verfügung.

### **Orbitale**

Die graphische Darstellung der Orbitale der einzelnen Knoten gibt einen anschaulichen Überblick über die Schwingungsform und die Verwindung des Biegebalkens in dreidimensionaler Form. Hierbei werden nur die Verschiebungsfreiheitsgrade der beiden Biegeebenen herangezogen. In Abbildung 5.19 ist eine derartige Orbitaldarstellung ersichtlich. An jedem Knoten werden die komplexen Werte des Eigenvektors für die Verschiebung in die y-Richtung und in die z-Richtung als Vektoren dargestellt (siehe auch Abschnitt 2.3.2 und Abbildung 2.11). Diese Werte sind als Vektoren in blau und rot eingezeichnet. Die schwarz strichlierte Linie entspricht einem reellen Vektor der jeweils die Realteile der beiden zuvor beschriebenen Vektoren in der entsprechenden Richtung enthält. Durch die Rotation dieser Vektoren entstehen Kreise, Ellipsen oder Linien, auf welchen sich der Wellenmittelpunkt im Verlauf der Schwingung bewegt. Diese Ansicht kann frei im Raum bewegt werden.

### **Animation**

Bei dieser Art der Darstellung wird eine Animation des schwingenden Rotors ausgegeben. Dieser wird vereinfacht als Zylinder mit konstantem Querschnitt dargestellt.

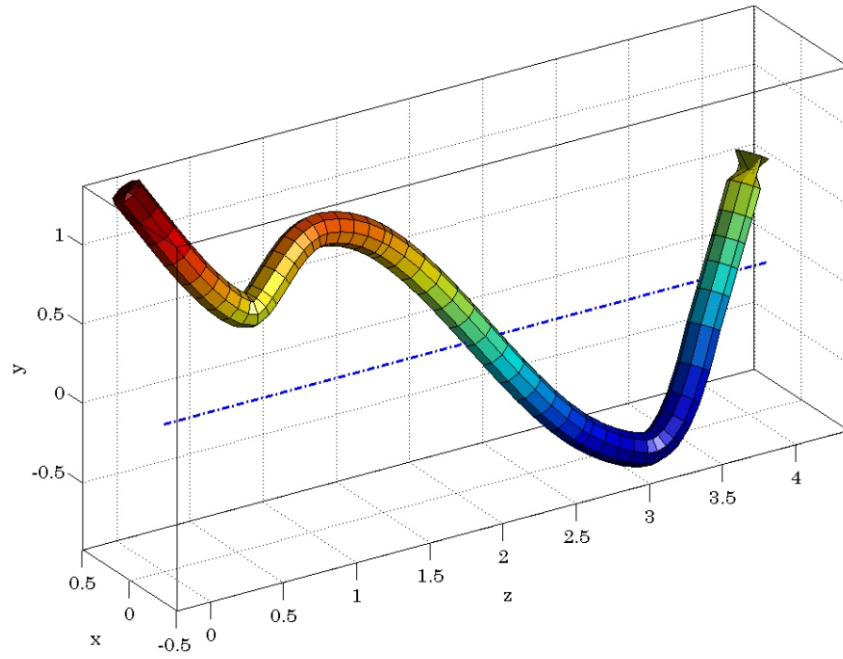


Abbildung 5.16: Dreidimensionale Darstellung einer Eigenform

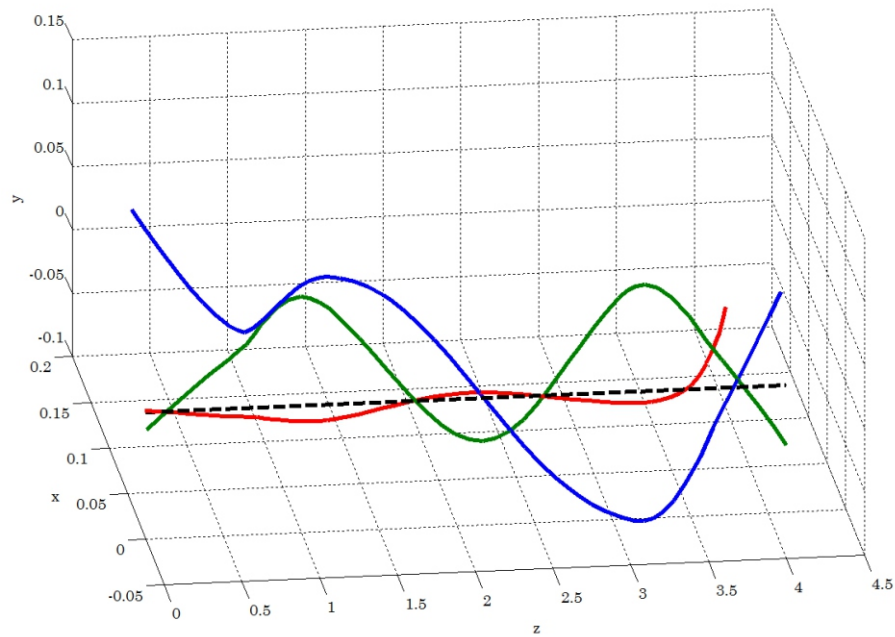


Abbildung 5.17: Dreidimensionale Darstellung mehrerer Eigenformen

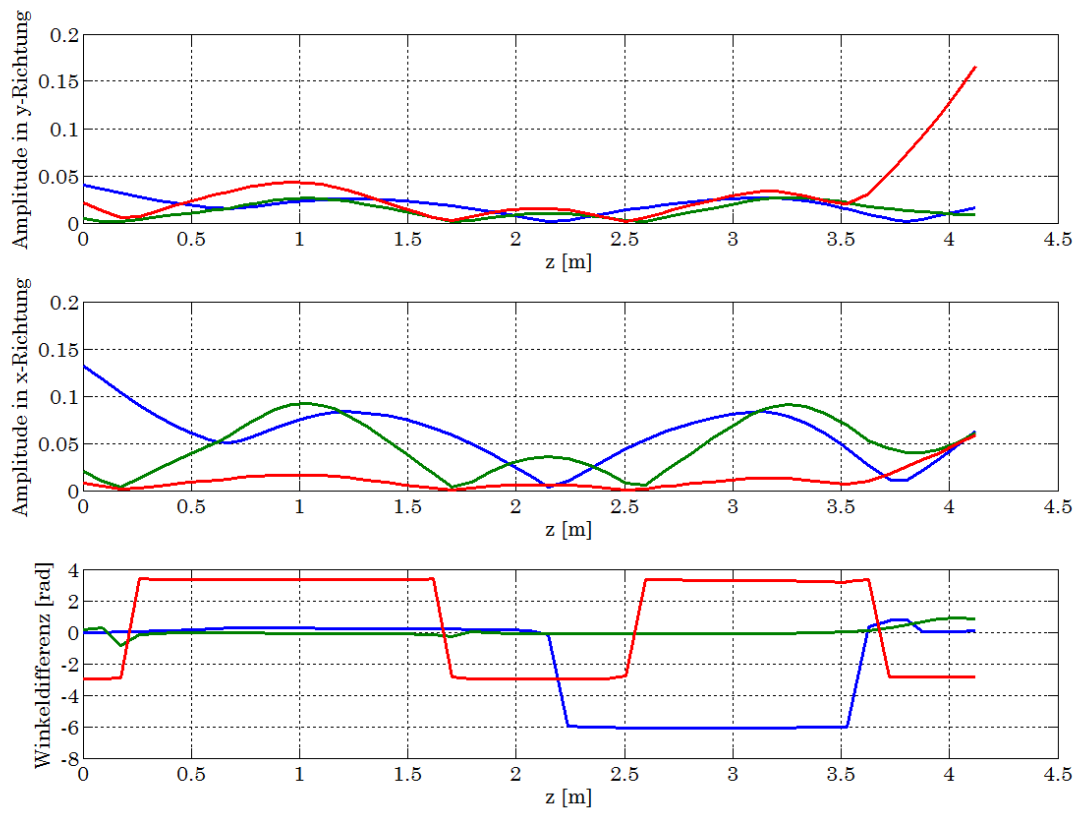


Abbildung 5.18: Darstellung mehrerer Eigenformen durch Amplituden und Phasendifferenz

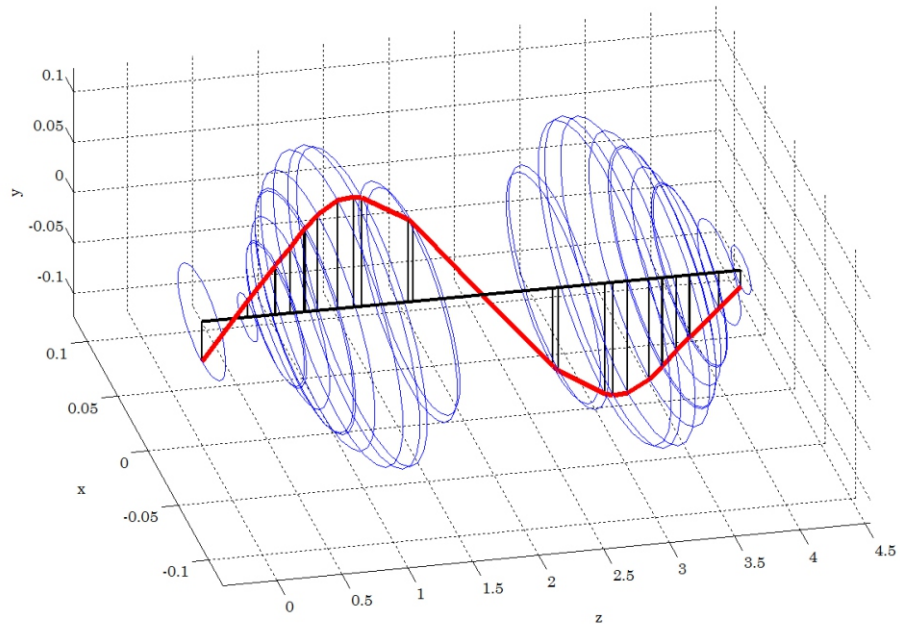


Abbildung 5.19: Orbitaldarstellung

## 5.5 Datenstruktur

Alle während des Ablauf des gesamten Programms anfallenden Daten werden in einer übergeordneten Datenstruktur abgespeichert und verwaltet. Aus Übersichtlichkeitsgründen wird dabei das Matlabformat *struct* verwendet. Alle Daten befinden sich innerhalb der Variable *data*, die in folgende Unterbereiche aufgeteilt ist.

1. **input:** Eingabedaten
  - a) **geom:** Daten zur Beschreibung der Geometrie
  - b) **mat:** Daten zur Materialdefinition
  - c) **add:** Daten betreffende der Ersatzträgheiten
  - d) **calc:** aus den Eingabedaten errechnete Daten
  - e) **Kmagn:** Daten zum magnetischen Zug
  - f) **bearings:** Daten zur Parametrisierung der Lagerung
    - i. **position:** Vektor mit den Lagerstellen
    - ii. **values:** Werte der Schmierfilmkoeffizienten
    - iii. **nref:** Vektor für Drehzahlpunkte
    - iv. **bearingtype:** Definition des Lagertyps
    - v. **structure:** Struktursteifigkeiten
2. **info:** Daten zur Beschreibung des Systems (z.B. Anzahl der Knoten, Elemente, usw.) sind hier abgespeichert
3. **system:** Daten, die während des Preprocessings entstehen. Kleinbuchstaben sind globale Systemmatrizen für ebene Biegung (z.B. *k*), mit Index *add* wurden sind Ersatzmassen inkludiert (z.B. *kadd*), Großbuchstaben sind Systemmatrizen für kombinierte Biegung (z.B. *K*)
4. **sol:** Lösungsdaten
  - a) **bending:** Daten bezüglich der Biegung
  - b) **torsion:** Daten bezüglich der Torsion

## 6 Vergleichsrechnungen mit kommerzieller FE-Software

Um das Rotormodell zu verifizieren, wurden Vergleichsrechnungen durchgeführt. Dabei wurden vier verschiedene Rotormodelle mit unterschiedlicher Geometrie, Massenverteilung, Lagerung usw. betrachtet. Die Vergleichsrechnung wurde in *ANSYS*<sup>®</sup> Workbench 14.0 durchgeführt. Das *ANSYS*<sup>®</sup>-Modell verwendet die identen Inputdaten und verwendet zur Modellierung die in Tabelle 6.1 dargestellten Elementtypen. Der Modellaufbau in

Tabelle 6.1: In *ANSYS*<sup>®</sup> verwendete Elementtypen

Teil	<i>ANSYS</i> <sup>®</sup> -Elementtypen
Welle	beam188
Gleitlager	combi214, matrix27
Punktmassen	mass21
magn. Zug	matrix27
elastische Lagerung	matrix27

*ANSYS*<sup>®</sup> ist im Wesentlichen gleich. Ein Unterschied zwischen den beiden Modellen liegt in den Ansatzfunktionen. Die von *ANSYS*<sup>®</sup> verwendeten Ansatzfunktionen und eine nähere Beschreibung der in Tabelle 6.1 angeführten Elementtypen sind in [16] zu finden. Ein weiterer Unterschied ist im bei der Berechnung in *ANSYS*<sup>®</sup> verwendeten Gleitlagermodell zu finden. Hierbei wird das combi214 Element zur Beschreibung des Schmierspalts, direkt an das matrix27 Element zur Beschreibung der Gehäusesteifigkeit gekoppelt. Dieser Modelaufbau besitzt somit im Unterschied zu dem in *MATLAB*<sup>®</sup> verwendeten, keine zusätzliche Masse für das Gehäuse, wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben.

Insgesamt wurden vier unterschiedliche Rotoren verglichen. In diesem Kapitel wird beispielhaft ein solcher Rotor betrachtet. Die Daten zu den weiteren Rotoren sind im Anhang (Abschnitt A) zu finden.

### 6.1 Geometrie

Anhand der schematischen Ansicht des Rotors sind dessen Geometrie, Vernetzung, Ersatzträgheiten und Angriffsbereiche für den magnetischen Zug ersichtlich, wie in Abschnitt 5.1.3 beschrieben.

Anhand von Abbildung 6.1 ist ersichtlich, dass Ersatzmassen im Bereich des Blechpakets angebracht sind. Der magnetische Zug wirkt ebenfalls im Bereich des Blechpakets im Zentrum der Welle.

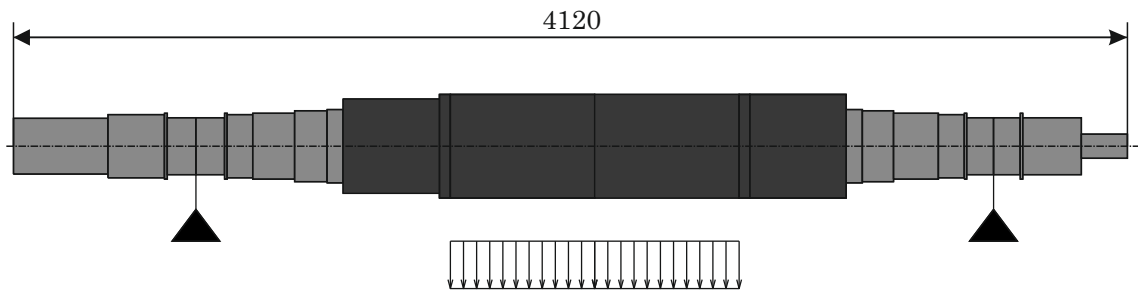


Abbildung 6.1: Geometrie von Rotor Nr. 1

## 6.2 Gleitlagercharakteristik

Anhand der Gleitlagercharakteristik in Abbildung 6.2 ist die starke Abhängigkeit der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten des Gleitlagers von der Rotordrehzahl ersichtlich. Die starke Abweichung der Koeffizienten in die verschiedenen Richtungen veranschaulicht das anisotrope Verhalten des Gleitlagers.

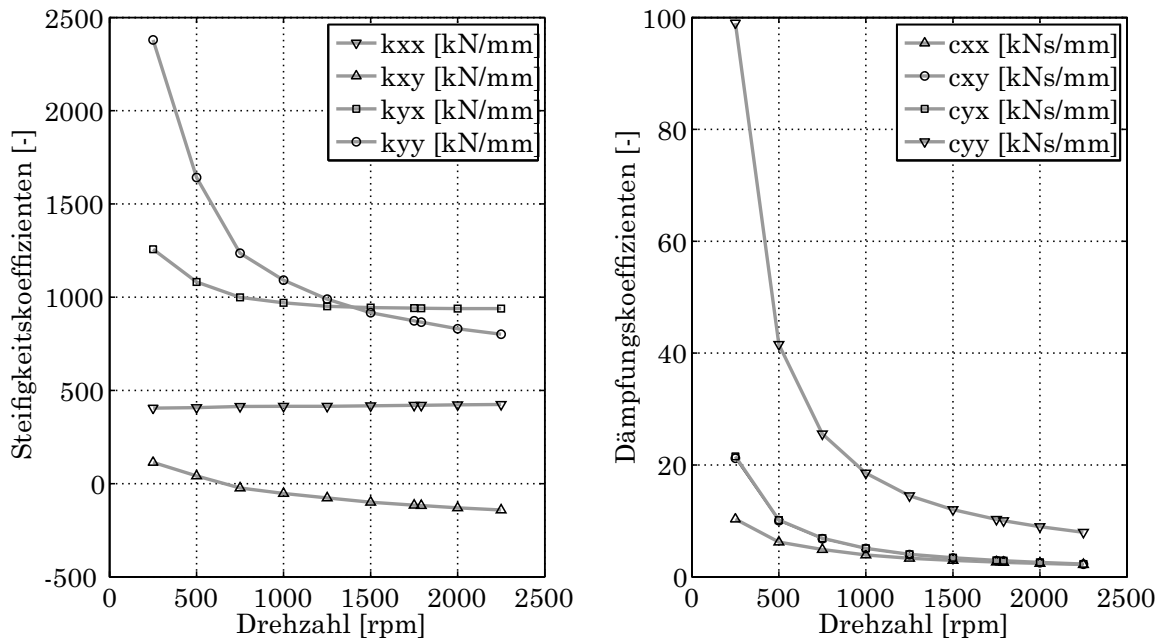


Abbildung 6.2: Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 1

## 6.3 Campbelldiagramm

Anhand des Campbelldiagramms in Abbildung 6.3 ist ersichtlich, dass das vorliegende Modell eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von ANSYS® aufweist. Die im Allgemeinen sehr kleinen Abweichungen treten speziell in Bereichen mit starken Änderungen der Eigenfrequenzen über der Drehzahl auf. Das sind also jene Bereiche mit sehr großer Steigung im Campbelldiagramm. Der maßgebende Einflussfaktor für diese Steigung und die Änderung dieser Steigung ist die Gleitlagercharakteristik. Das drehzahlabhängige



Verhalten der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten überwiegt den gyroskopischen Effekt bei Weitem. Aus diesem Grund ist der Grund für die Abweichungen auch bei diesen Koeffizienten zu suchen und liegt im Wesentlichen im unterschiedlichen Interpolationsverfahren der Koeffizienten zwischen den einzelnen Drehzahlstützstellen, an denen bekannte Werte vorliegen. Während das von *ANSYS*<sup>®</sup> verwendete Interpolationsverfahren unbekannt bleibt, ist es in *MATLAB*<sup>®</sup> möglich verschiedene Verfahren zu verwenden. Ein weiterer Un-

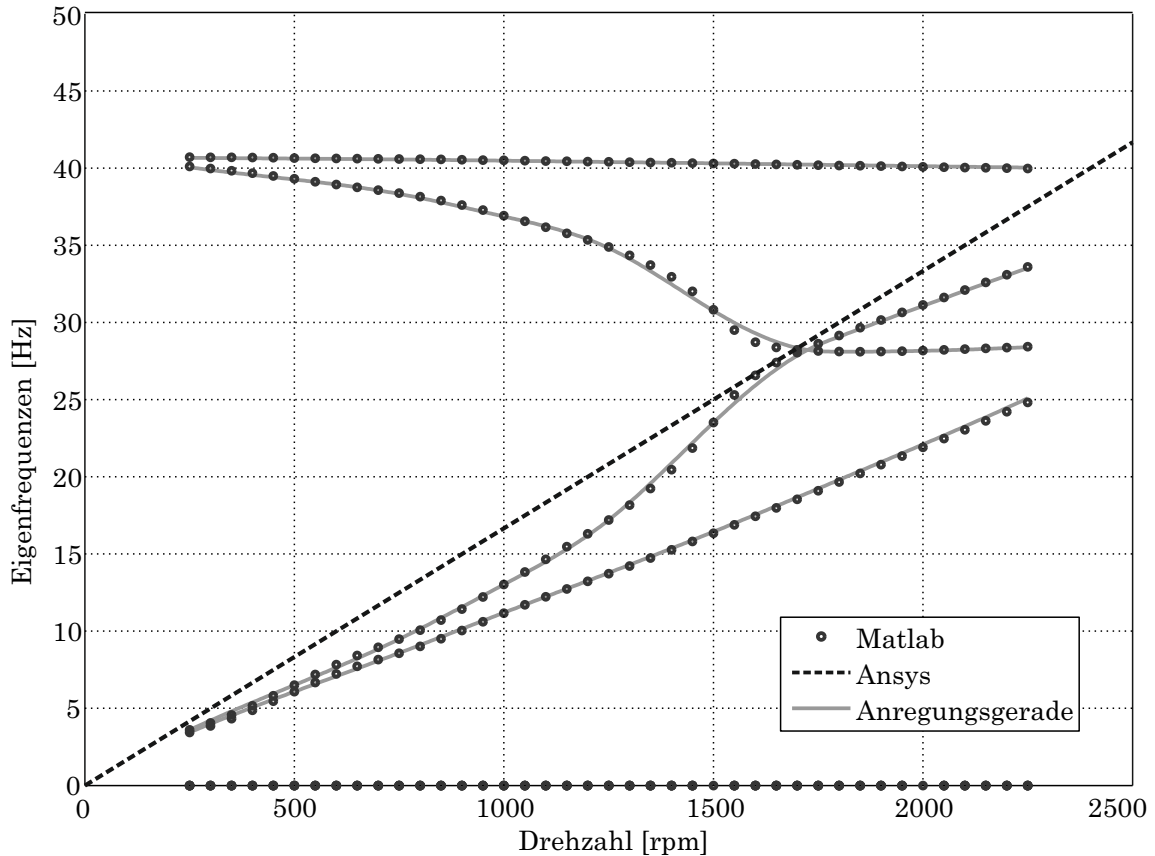


Abbildung 6.3: Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 1

terschied im Vergleich zu *ANSYS*<sup>®</sup> ist in der Wahl der Ansatzfunktionen zu finden. Die von *ANSYS*<sup>®</sup> verwendeten Ansatzfunktionen sind in [16] zu finden.

Ein wesentlicher Unterschied in den Ergebnissen im Vergleich zu jenen von *MATLAB*<sup>®</sup> ist in den stets auftretenden Eigenfrequenzen mit der Frequenz von null zu sehen. Diese Lösung ergibt sich beim vorliegenden Modell durch die gewählte Modellierung des hydrodynamischen Gleitlagers. Durch die zwischen Gehäuse und Welle angeordnete Masse, welche das Gleitlagergehäuse darstellen sollte, besitzt dieses Modell im Vergleich zu *ANSYS*<sup>®</sup> zusätzliche Freiheitsgrade. Da diese Masse direkt mit dem Dämpfer des Gleitlagers verbunden ist und relativ klein ist, ergibt sich stets eine Schwingungsform bei der diese Masse eine Schwingung mit starker Dämpfung erfährt und dementsprechend keinen periodischen Anteil besitzt, sodass die Eigenfrequenz zu null wird.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass der Vergleich dem vorliegenden Modell eine durchaus ausreichende Genauigkeit bescheinigt.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden nach einer kurzen Einführung in die Problemstellung in Kapitel 1 zunächst die notwendigen theoretischen Grundlagen in Kapitel 2 erarbeitet und zusammengefasst. Nach der Herleitung verschiedenster Effekte am einfachsten schwingungsfähigen System, dem Einmassenschwinger, wurden weitere spezielle Effekte in der Rotordynamik hergeleitet und erklärt. Anschließend wurden verschiedene Balkenformulierungen erläutert und eine Gegenüberstellung von Übertragungsmatrizenmethode und der Methode der Finiten Elemente durchgeführt.

In Kapitel 3 wurden die verwendeten finiten Elementtypen definiert und hergeleitet. Neben 2-Knoten-Elementen zur Beschreibung eines rotierenden Biegebalkens und eines Torsionstabes wurden auch ein elastisches und ein hydrodynamisches Lagermodell, sowie Elemente zur Beschreibung vom elektromagnetischen Zug und von Ersatzmassen, vorgestellt.

Die mathematische Beschreibung und Lösung bezüglich Eigenfrequenzen und Eigenformen eines aus obigen Elementen aufgebauten Modells wurde in Kapitel 4 erläutert.

Die praktische Umsetzung in einem *MATLAB*<sup>®</sup>-Programm und dessen Bedienung wurden in Kapitel 5 erklärt. Besonderes Augenmerk wurde auf eine einfach zu bedienende graphische Benutzeroberfläche gelegt, um somit dem Bediener während der Konstruktionsphase eine schnelle Vorausberechnung des Schwingungsverhaltens unterschiedlicher Geometrien zu ermöglichen.

Im Kapitel 6 wurde ein Vergleich der Ergebnisse dieses Programms mit jenem aus einer nahezu identen Berechnung mit *ANSYS*<sup>®</sup> durchgeführt. Dabei konnte festgestellt werden, dass die Abweichungen nur minimal sind und im Bereich weniger Hertz liegen. Die Gründe für diese Abweichungen sind einerseits im Interpolationsverfahren für die Werte der hydrodynamischen Gleitlagers, in kleinen Abweichungen bei der Modellierung dieses Lagertyps, in unterschiedlichen Ansatzfunktionen und eventuell in numerischen Fehlern beim Lösen der Systemmatrizen zu finden.

Durch den Vergleich mit *ANSYS*<sup>®</sup> ist sichergestellt, dass das vorliegende Programm das gewählte Modell richtig beschreibt und berechnet. Ob der gewählte Modellierungsgrad ausreichend ist und ob die Ergebnisse aus der Simulation in ausreichendem Maße der Realität entsprechen, kann nur durch einen Vergleich mit experimentell ermittelten Daten sichergestellt werden. Ein derartiger Vergleich ist aus diesem Grund auf jeden Fall anzustreben.

Dass durch die, während der Modellierung getroffenen, Vereinfachungen Abweichungen im Vergleich zur Realität auftreten, steht außer Frage. Um diese zu minimieren muss die Komplexität des Modells erhöht werden. Im Folgenden werden einige Vorschläge aufgezählt, die das bestehende Modell maßgeblich verbessern könnten:

- Jedwede Dämpfung hat Einfluss auf das Schwingungsverhalten. Das vorliegende Modell besitzt ausschließlich eine Dämpfung über den Schmierfilm der hydrodynamischen Lagerung. Eine Berücksichtigung der Materialdämpfungseigenschaften, sowie eventueller spezieller Dämpfungseigenschaften des Blechpakets durch Reibung, sind eine Möglichkeit um die Genauigkeit des Modells zu erhöhen.
- Der magnetische Zug wird im bestehenden Modell in seiner einfachsten Form modelliert. In der Realität stellt sich dieser jedoch deutlich komplexer dar. Nähere Informationen hierzu sind in [17] zu finden. Möglicherweise ist eine exaktere Modellierung des magnetischen Zuges sinnvoll.
- Das vorliegende Modell betrachtet den Rotor für sich alleine. Seine Fixierung im Raum erfolgt über lineare Federelemente, die die Struktursteifigkeit des Gehäuses darstellen. In der Praxis stellt das Gehäuse selbst natürlich ebenfalls ein schwingungsfähiges System dar und es tritt dementsprechend eine Kopplung und damit eine Beeinflussung der beiden Systeme gegenseitig auf. Am Gehäuse ist auch der Stator montiert, welcher bezüglich Schwingungen durch die auftretenden elektromagnetischen Kräfte ebenfalls sehr relevant ist. Aufgrund der Tatsache, dass für den Stator ebenfalls entsprechende FE-Modelle existieren, stellt die Verbindung des hier beschriebenen Modells mit jenem des Stators und des Gehäuses eine sehr interessante Möglichkeit dar, den Modellierungsgrad deutlich zu erhöhen.
- Das hier beschriebene Modell wird ausschließlich im Frequenzbereich verwendet. Natürlich könnten damit grundsätzlich auch transiente Berechnungen durchgeführt werden. Derartige Funktionen können im bestehenden Modell leicht hinzugefügt werden und würden es ermöglichen, zusätzliche Effekte, wie zum Beispiel das Anfahrverhalten, zu simulieren. In diesem Zusammenhang stellen auch mögliche Unwuchten eine wesentliche Systemeigenschaft dar, die entsprechend modelliert werden müssten.
- Das hier verwendete Torsionsmodell stellt das einfachste seiner Art dar und ist komplett von der Biegung entkoppelt. Erweiterte Torsionsmodelle, wie zum Beispiel die Torsionsbeschreibung nach St. Venant [14] erlauben eine exaktere Beschreibung der Torsion und stellen auch einen Zusammenhang zwischen der Biegung und der Torsion dar, sodass es zu einer Kopplung kommt.

# A Anhang

## A.1 Geometrien

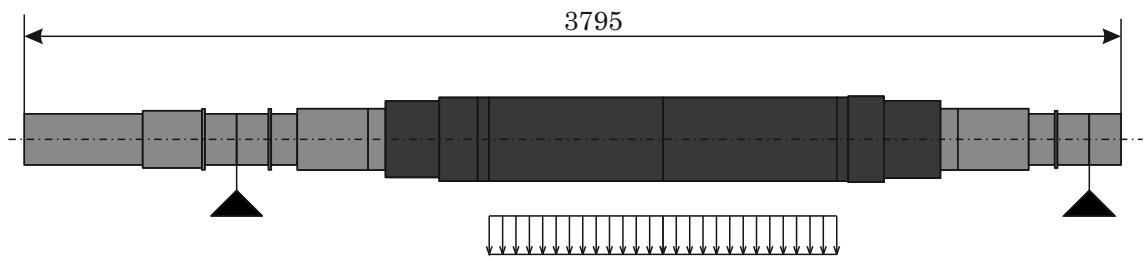


Abbildung A.1: Geometrie von Rotor Nr. 2

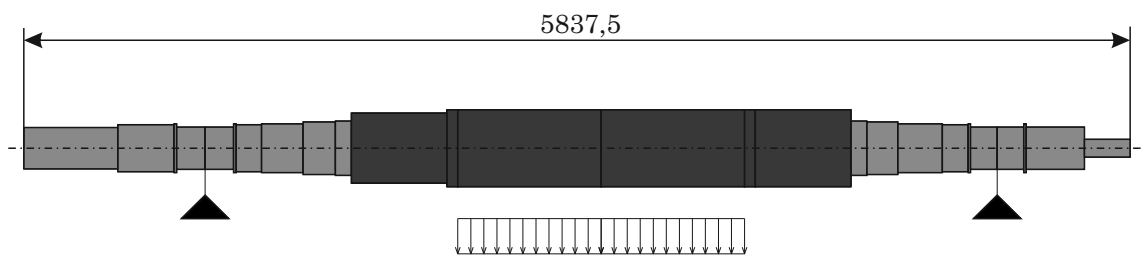


Abbildung A.2: Geometrie von Rotor Nr. 3

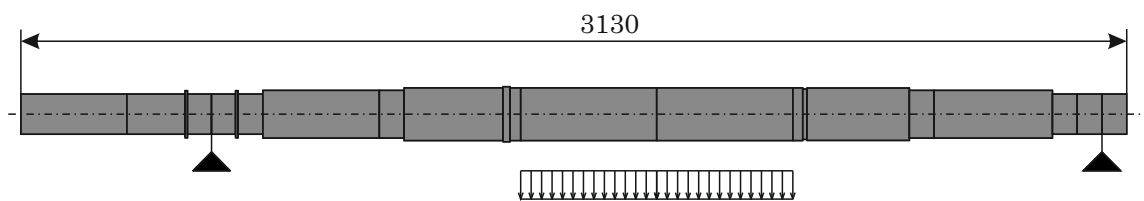


Abbildung A.3: Geometrie von Rotor Nr. 4

## A.2 Gleitlagercharakteristiken

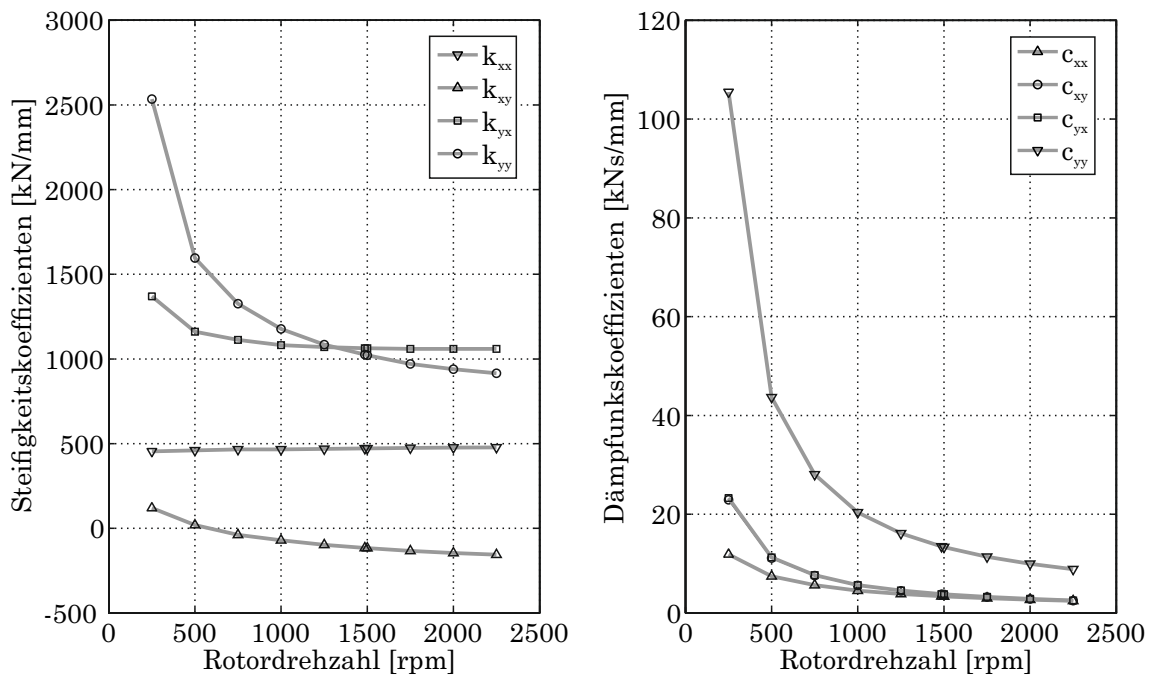


Abbildung A.4: Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 2

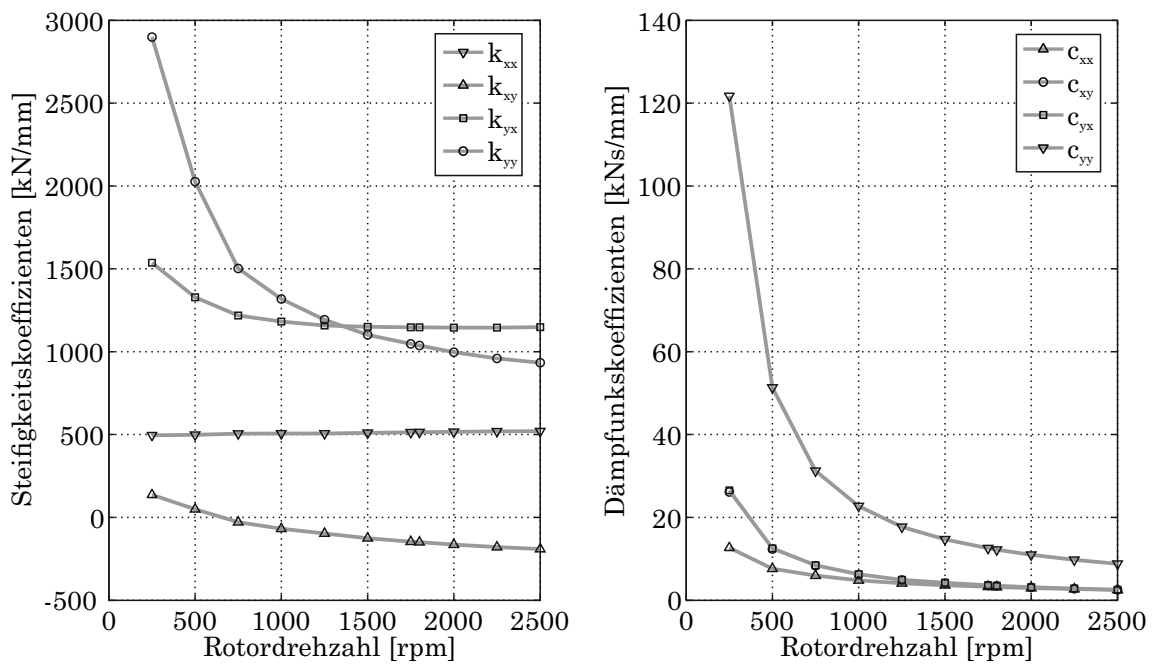


Abbildung A.5: Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 3

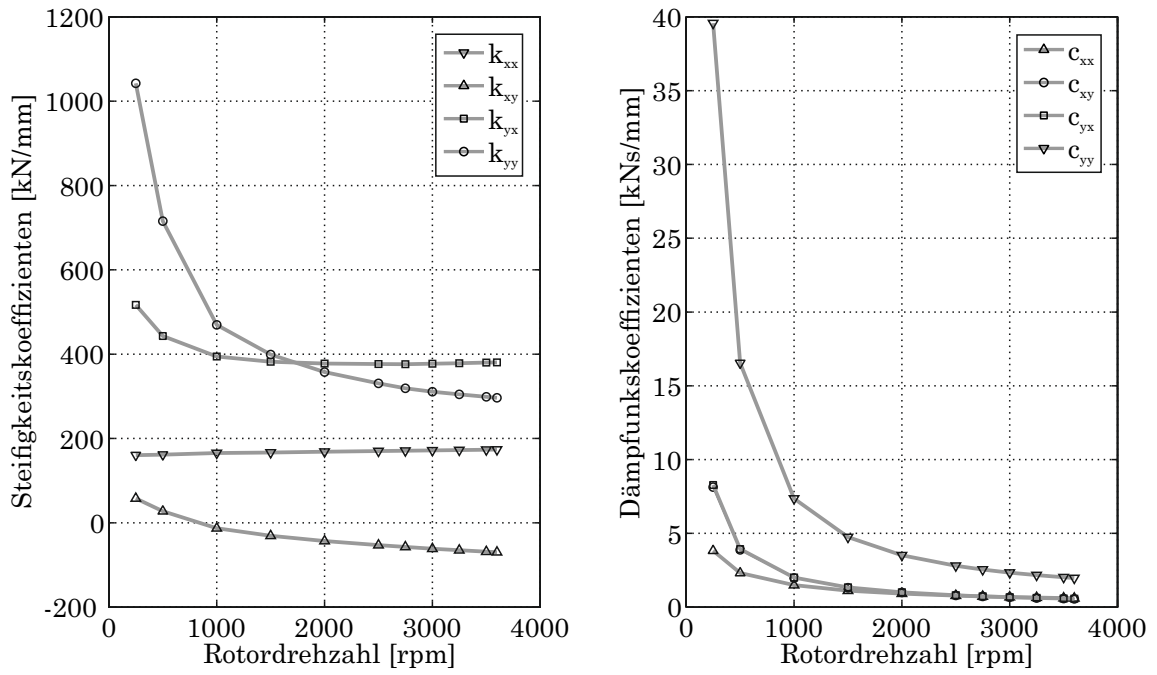


Abbildung A.6: Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 4

### A.3 Campbelldiagramme

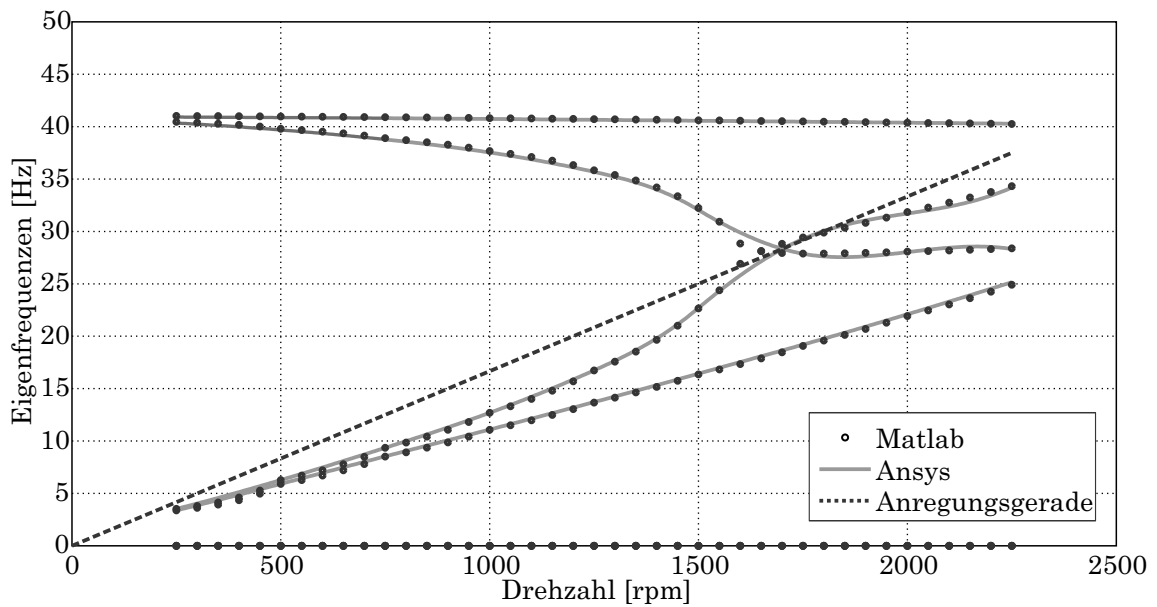


Abbildung A.7: Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 2

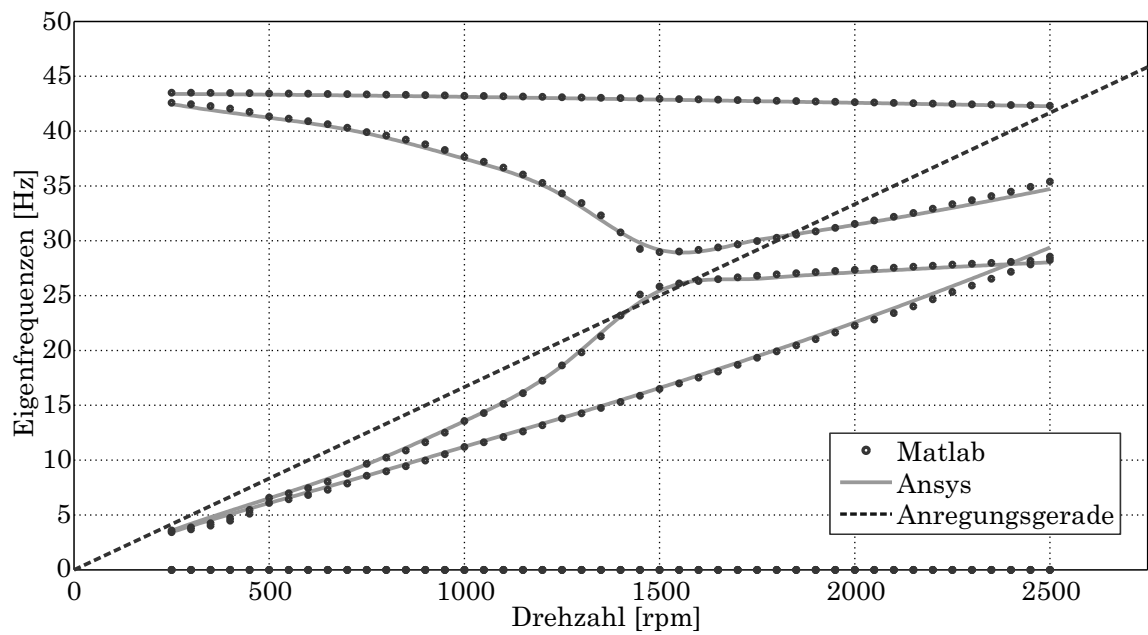


Abbildung A.8: Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 3

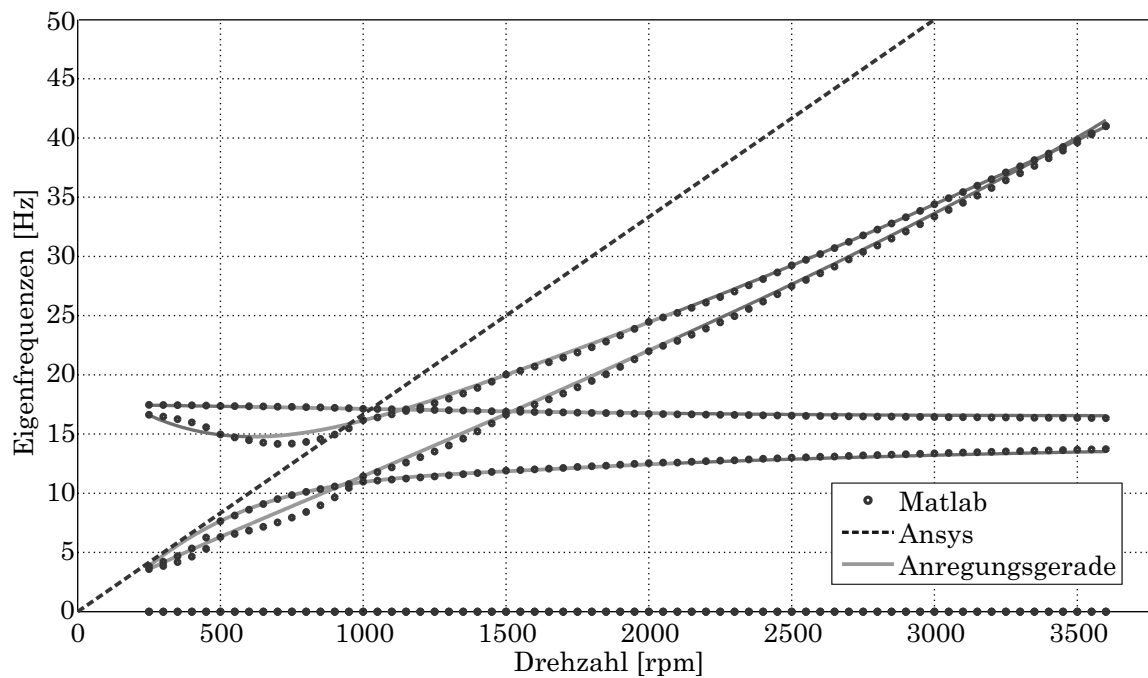


Abbildung A.9: Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 4

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Einmassenschwinger . . . . .	3
2.2	Freie ungedämpfte Schwingung . . . . .	4
2.3	Einmassenschwinger mit Dämpfung . . . . .	5
2.4	Stark gedämpfte Schwingung . . . . .	6
2.5	Schwach gedämpfte Schwingung . . . . .	6
2.6	Gedämpfter Einmassenschwinger mit Anregung . . . . .	7
2.7	Verlauf der Vergrößerungsfunktion für verschiedene Dämpfungsgrade . . . . .	8
2.8	Campbelldiagramm und kritische Drehzahlen . . . . .	11
2.9	Jeffcot Rotoren: a) starre Lager und nachgiebige Welle, b) starre Welle und nachgiebige Lager [12] . . . . .	12
2.10	Ausgelenkter Querschnitt eines Jeffcot Rotors . . . . .	12
2.11	Die aus zwei harmonischen Schwingungen zusammengesetzte Wirbelbewegung in der xy-Ebene . . . . .	14
2.12	Verlauf der normierten Amplitude über der normierten Drehgeschwindigkeit . . . . .	15
2.13	Verhalten im unter- und oberkritischen Bereich . . . . .	16
2.14	Lavalrotoren: a.) Scheibe auf biegesteifer Welle mit starren Lagern, b.) Rotor als starrer Körper auf nachgiebigen Lagern [12] . . . . .	17
2.15	Verschiedene Wirbelformen beim Lavalrotor . . . . .	19
2.16	Campbelldiagramm des Lavalrotors . . . . .	20
2.17	Einteilung des Systems in Knoten und Felder . . . . .	21
2.18	Lineare Interpolation mit eindimensionalen Finiten Elementen . . . . .	25
2.19	Kinematik des Bernoulli-Balkens . . . . .	27
2.20	Überlagerung eines Bernoulli-Balkens mit einem Balken mit reiner Schubverformung ergibt den Timoshenko-Balken . . . . .	28
2.21	Kinematik des Timoshenko-Biegebalkens . . . . .	29
3.1	Freiheitsgrade eines allgemeinen 2-Knoten-Wellenelementes . . . . .	31
3.2	Freiheitsgrade des einfachen Torsionsstabes . . . . .	32
3.3	Freiheitsgrade des rotierenden Timoshenko-Biegebalkens . . . . .	34
3.4	Aufprägen der Ersatzmassen auf mehrere Knoten . . . . .	37
3.5	Lagerung mit einfacher Feder . . . . .	37
3.6	Veranschaulichung der Federsteifigkeit in den Nebendiagonalen . . . . .	37
3.7	Modellierung eines Gleitlagers . . . . .	38
3.8	Gleitlagermodellierung in der Biegebene . . . . .	39
3.9	Modellierung des magnetischen Zuges . . . . .	40
5.1	Überblick über den Programmaufbau und -ablauf . . . . .	46
5.2	Aufbau der graphischen Benutzeroberfläche . . . . .	46
5.3	Bereich Einstellungen der GUI . . . . .	47
5.4	Tabelle Geometrie- & Materialdaten . . . . .	47



5.5	Eingabemaske für hydrodynamische Lagerung . . . . .	50
5.6	Vorschau von Wellengeometrie, Ersatzmassen und magnetischem Zug . . . . .	51
5.7	Dreidimensionale Ansicht der Wellengeometrie . . . . .	52
5.8	Ablauf des Preprocessings . . . . .	53
5.9	Assemblieren der Elementmatrizen . . . . .	53
5.10	Zusammenbauen einer globalen Matrix für die kombinierte Biegung . . . . .	54
5.11	Ablauf des Lösungsprozesses . . . . .	55
5.12	Einbau des Lagermodells in die globale Steifigkeitsmatrix . . . . .	56
5.13	Eingabemaske zur Modalanalyse . . . . .	57
5.14	Eingabemaske zum Erstellen eines Campbelldiagrammes . . . . .	58
5.15	Balkendiagramm zur Darstellung der Eigenfrequenzen . . . . .	59
5.16	Dreidimensionale Darstellung einer Eigenform . . . . .	61
5.17	Dreidimensionale Darstellung mehrerer Eigenformen . . . . .	61
5.18	Darstellung mehrerer Eigenformen durch Amplituden und Phasendifferenz . . . . .	62
5.19	Orbitaldarstellung . . . . .	62
6.1	Geometrie von Rotor Nr. 1 . . . . .	65
6.2	Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 1 . . . . .	65
6.3	Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 1 . . . . .	66
A.1	Geometrie von Rotor Nr. 2 . . . . .	69
A.2	Geometrie von Rotor Nr. 3 . . . . .	69
A.3	Geometrie von Rotor Nr. 4 . . . . .	69
A.4	Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 2 . . . . .	70
A.5	Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 3 . . . . .	70
A.6	Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten des hydrodynamischen Gleitlagers von Rotor Nr. 4 . . . . .	71
A.7	Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 2 . . . . .	71
A.8	Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 3 . . . . .	72
A.9	Vergleich des Campbelldiagramms für Rotor Nr. 4 . . . . .	72

# Tabellenverzeichnis

5.1	Parameter zur Beschreibung der Geometrie . . . . .	48
5.2	Materialparameter . . . . .	48
5.3	zusätzliche Parameter . . . . .	49
5.4	Daten zur Beschreibung des des hydrodynamischen Gleitlagermodells . . . . .	50
5.5	Daten zur Beschreibung der elastischen Lagerung . . . . .	51
5.6	Im Preprocessing generierte Systemmatrizen . . . . .	54
5.7	Lösungsdaten für die Biegung in <i>data.sol.bend</i> . . . . .	57
5.8	Lösungsdaten für die Torsion in <i>data.sol.torsion</i> . . . . .	57
5.9	Parameter zum Erstellen eines Campbelldiagramms . . . . .	58
5.10	Darstellungsformen im Bereich <i>Modalanalyse</i> . . . . .	59
6.1	In <i>ANSYS</i> <sup>®</sup> verwendete Elementtypen . . . . .	64

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Jäger, *Technische Schwingungslehre*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] F. Dimentberg, *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*. Butterworth London, 1961.
- [3] R. Loevi and V. Piarulli, *Dynamics of Rotating Shafts*. The Shock and Vibration Information Center Naval Research Laboratory, Washington D.C., 1969.
- [4] M. Prohl, “A general method for calculating speeds of flexible rotors,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 67, pp. 142–148, 1945.
- [5] R. Ruhl, “Dynamics of distributed parameter rotor systems: transfer matrix approach and finite element techniques,” Master’s thesis, Cornell University, 1970.
- [6] R. Ruhl and J. Booker, “A finite element model for distributed parameter turborotor systems,” *ASME Journal of Engineering for Industry*, vol. 94, pp. 1428–132, 1972.
- [7] H. Nelson and J. McVaugh, “The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements,” *Journal of Engineering for Industry*, pp. 593–600, Mai 1976.
- [8] G. Genta, “Consistent element matrices in rotordynamics,” *Meccanica*, vol. 20, pp. 235–248, 1985.
- [9] G. Genta, C. Delprete, and D. Bassani, “Dynrot: A finite element code for rotordynamic analysis based on complex co-ordinates,” *Engineering Computations*, vol. 13, no. 6, pp. 86–109, 2005.
- [10] D. Gross, *Technische Mechanik 3*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [11] D. Gross, *Technische Mechanik 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [12] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*. Springer Science+Business Media Inc., 2005.
- [13] R. Gasch, R. Nordmann, and H. Pfützner, *Rotordynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [14] K. Bathe, *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [15] M. Merkel and A. Öchsner, *Eindimensionale Finite Elemente*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [16] *Ansys Theory Manual*.
- [17] A. Tenhunen, “Finite-element calculation of unbalanced magnetic pull and circulating current between parallel windings in induction motor with non-uniform eccentric rotor,” *Proceedings of Electromotion Bologna*, pp. 19–24, 2001.