

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ  
INSTITUT FÜR  
THERMISCHE TURBOMASCHINEN UND MASCHINENDYNAMIK

# **Berechnung transitionaler Strömungen in Turbomaschinen mit Hilfe des Laminar-Kinetic-Energy-Modells**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplomingenieurs,  
eingereicht an  
der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Graz

von

**Christian Bechter**

Betreuer  
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn Wolfgang Sanz

## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Christian Bechter

Graz, im April 2014

## **Vorwort**

Die vorliegende Masterarbeit wurde im Anschluss an mein Auslandssemester an der Katholieke Universiteit Leuven (Belgien) am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz mit August 2013 begonnen und nach einer Bearbeitungsdauer von etwa acht Monaten im April 2014 fertiggestellt. Interessierte sollen anhand dieser Arbeit die Prognosefähigkeit des neuartigen Laminar-Kinetic-Energy-Turbulenzmodells besonders hinsichtlich transistionaler Strömungen beurteilen können.

Ein besonderer Dank gilt an dieser Stelle meinem Betreuer Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn Wolfgang Sanz für die Anregungen zu dieser Arbeit, die kompetente Betreuung und besonders für die ständige Verfügbarkeit bei auftauchenden Fragestellungen.

Mein Dank gilt auch meinen Eltern, welche mir jegliche Förderung zukommen ließen und durch deren Unterstützung meine akademische Ausbildung erst ermöglicht wurde.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Freundin Julia für ihren Rückhalt und die Unterstützung während des gesamten Studiums bedanken.

*Christian Bechter*  
Graz, im April 2014

## **Kurzfassung**

Der Charakter einer Strömung innerhalb der Grenzschicht hat massiven Einfluss auf Eigenschaften wie Wärmeübertragung, Ablöseerscheinungen und Wandreibung. Daher ist die Kenntnis des örtlichen Strömungszustands bei der Auslegung von thermischen Turbomaschinen von essentieller Bedeutung, wobei hierbei insbesondere der Umschlag laminar-turbulent von großem Interesse ist. Das am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik entwickelte Strömungssimulationsprogramm Linars wurde daher im Rahmen dieser Arbeit mit dem neuartigen - auf dem RANS-Ansatz aufbauenden - transitionsfähigen Laminar-Kinetic-Energy-Modell erweitert, das Ziel verfolgend, transitionale Strömungen in thermischen Turbomaschinen prognostizieren zu können. Die Programmierung erfolgte dabei in der objektorientierten Programmiersprache  $C^{++}$ . Die anschließende Validierung des neu implementierten LKE-Modells geschah mit Hilfe von verschiedenen Testfällen und dem kommerziell verfügbaren Softwarepaket ANSYS Fluent. Respektable Ergebnisse liefert vor allem das Modell von Walters und Cokljat, eine seriöse Einschätzung der Praxisfähigkeit kann jedoch nur mit einer weiterführenden, intensiveren Untersuchung getroffen werden.

## **Abstract**

The character of a flow inside the boundary layer has significant influence on heat transfer, separation and wall friction. Therefore the knowledge of local flow conditions and in particular the laminar-to-turbulent transition is essential during the design phase of a thermal turbomachine. It has been shown that numerical methods (CFD) seem to be a useful tool in predicting transitional flows. To examine new approaches in turbulence modeling, the aim of the present work is the extension of the  $C^{++}$  written CFD code Linars (developed at Graz University of Technology) with a new turbulence model based on the laminar kinetic energy concept. The validation of the new turbulence model by means of different test cases and the commercial software ANSYS Fluent shall provide an evaluation of the obtained results. Overall, promising outcomes were received especially from the model developed by Walters and Cokljat. However, the findings of the current work are not able to give a reliable assessment of the practical applicability, which would need further investigations.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Aufgabenstellung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Definition von transitionalen Strömungen</b>	<b>3</b>
2.1	Arten der Transition . . . . .	4
2.2	Bedeutung der Transition in thermischen Turbomaschinen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Mathematische Formulierung von Strömungsphänomenen</b>	<b>7</b>
3.1	Navier-Stokes Gleichungen - allgemeine Form . . . . .	7
3.2	Navier-Stokes Gleichungen zur Berechnung von Strömungen in thermischen Turbomaschinen . . . . .	9
3.3	Modellierung turbulenter Strömungen mit Hilfe des RANS-Ansatzes .	13
3.3.1	Reynoldsche Mittelung . . . . .	13
3.3.2	Favrè-Mittelung . . . . .	14
3.3.3	Ansatz von Boussinesq . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Institutscod Linars</b>	<b>16</b>
4.1	Aufbau . . . . .	16
4.2	Vorgehensweise bei der Implementierung der neuen Turbulenzmodelle	17
<b>5</b>	<b>Formulierung der neu implementierten LKE-Modelle</b>	<b>19</b>
5.1	Konzept und theoretischer Hintergrund . . . . .	19
5.2	LKE-Modell Walters/Leylek(2004) . . . . .	23
5.3	LKE-Modell Walters/Leylek(2005) . . . . .	29
5.4	LKE-Modell Walters/Cokljat . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Validierung der neu implementierten Turbulenzmodelle</b>	<b>41</b>
6.1	Einleitung . . . . .	41
6.2	Randbedingungen . . . . .	41
6.3	Validierung der Turbulenzmodelle . . . . .	44

6.4	Testfall T3A - Strömung entlang einer ebenen Platte . . . . .	45
6.4.1	LKE Turbulenzmodell - Walters/Leylek(2004) . . . . .	49
6.4.2	LKE Turbulenzmodell - Walters/Leylek(2005) . . . . .	52
6.4.3	LKE Turbulenzmodell - Walters/Cokljat . . . . .	54
6.4.4	Testfall T3A - Zusammenfassende Bewertung . . . . .	59
6.5	Testfall NACA0012 - Strömung über ein Tragflächenprofil in Kaska- denanordnung . . . . .	61
6.5.1	Zusammenfassende Bewertung . . . . .	72
6.6	Strömung durch den Hochdruckstator einer zweistufigen Turbinenkon- figuration . . . . .	74
6.6.1	Bewertung der Ergebnisse an der Schaufel . . . . .	76
6.6.2	Wandschubspannung an der Saugseite der Schaufel . . . . .	84
6.6.3	Hochdruckstator - Zusammenfassende Bewertung . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Zusammenfassende Bewertung und Ausblick</b>	<b>87</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>90</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>92</b>

# Nomenklatur

## Lateinisches Alphabet

$c_f$	dimensionsloser Wandreibungswert
$c_v$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$C_\mu$	turbulenter Viskositätsfaktor
$d$	Wandabstand
$D_T$	wandnahe Dissipation der turbulenten kinetischen Energie
$D_L$	wandnahe Dissipation der laminaren kinetischen Energie
$e$	totale innere Energie
$\vec{f}^B$	Vektor von äußeren Massenkräften
$f_\nu$	viskose Dämpfungsfunktion
$f_\tau$	Dämpfungsfunktion der turbulenten Zeitskala
$f_{INT}$	Dämpfungsfunktion der Intermittenz
$f_{SS}$	shear-sheltering Dämpfungsfunktion
$f_W$	nichtviskose Dämpfungsfunktion in Wandnähe
$K_h$	relative Kanalhöhe
$k_T$	turbulente kinetische Energie
$k_L$	laminare kinetische Energie
$k_{TOT}$	totale kinetische Energie der Fluktuationen
$k_{T,l}$	turbulente kinetische Energie großer Wirbelstrukturen
$k_{T,s}$	turbulente kinetische Energie kleiner Wirbelstrukturen
$l_s$	turbulente Längenskala
$Pr$	Prandtl-Zahl
$P_T$	Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie
$P_L$	Produktionsterm der laminaren kinetischen Energie
$P_\omega$	Produktionsterm der spezifischen Dissipationsrate
$p$	Druck

$p_{TOT}$	Totaldruck
$p_{stat}$	statischer Druck
$\dot{Q}$	innere Wärmequelle
$\vec{q}$	Vektor des Wärmestroms
$R$	Gaskonstante, Produktionsterm der Bypass-Transition
$R_{NAT}$	Produktionsterm der natürlichen Transition
$Re_l$	Laufängen Reynolds-Zahl
$Re_x$	örtliche Reynolds-Zahl
$Re_T$	turbulente Reynolds-Zahl
$Re_\Omega$	wirbelbasierende Reynolds-Zahl
$R_{ij}$	Reynoldsker-Spannungstensor
$S$	Scherrate
$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Deformationstensor
$T$	Temperatur
$Tu$	Turbulenzgrad
$t$	Zeit
$u$	innere Energie
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor

### Griechisches Alphabet

$\alpha$	Anströmwinkel
$\alpha_T$	turbulente Diffusität
$\beta_{BP}$	Bypass-Transition-Schwellfunktion
$\beta_{TS}$	Tollmien-Schlichting-Schwellfunktion
$\beta_{NAT}$	Schwellfunktion der natürlichen Transition
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\epsilon$	turbulente Dissipation
$\epsilon_{TOT}$	Totaldissipationsrate
$\eta$	normal zur Wand stehende Koordinate
$\kappa$	Isentropenexponent, Wellenzahl
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit, Längenskala
$\lambda_T$	turbulenter Längenmaßstab
$\lambda_{eff}$	effektiver Längenmaßstab
$\mu$	dynamische Viskosität
$\nu$	kinematische Viskosität



$\nu_T$	turbulente Viskosität
$\nu_{T,l}$	großskalige turbulente Viskosität
$\nu_{T,s}$	kleinskalige turbulente Viskosität
$\nu_{TOT}$	totale Wirbelviskosität
$\rho$	Dichte
$\underline{\tau}$	Spannungstensor
$\tau_m$	Zeitskala
$\tau_T$	turbulente Zeitskala
$\tau_w$	Wandschubspannung
$\Phi_\mu$	Dissipationsfunktion
$\phi_{BP}$	Parameter der Bypass-Transition
$\phi_{NAT}$	Parameter der natürlichen Transition
$\Omega$	Wirbelstärke
$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Rotationstensor
$\omega$	spezifische Dissipationsrate

### Sonstige Größen

$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
$\overline{(\cdot)}$	Reynolds gemittelter Wert
$\widetilde{(\cdot)}$	Dichtegewichteter Mittelwert nach Favre
$(\cdot)'$	Fluktuationswert
$(\cdot)''$	Favre-Fluktuationswert

### Abkürzungen

CFD	Computational Fluid Dynamics
LKE	Laminar Kinetic Energy
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes
DNS	Direct Numerical Simulation

# 1 Einleitung

Durch das weit gesteckte Anwendungsgebiet der thermischen Turbomaschine sind auf diesem Gebiet derzeit massive Forschungstätigkeiten zu verzeichnen, das Ziel verfolgend, eine wirtschaftliche Optimierung vor allem hinsichtlich Wirkungsgrad zu erreichen. Der Optimierungsgrad ist aufgrund der jahrzehntelangen Forschung jedoch schon auf sehr hohem Niveau angelangt, sodass Verbesserungen bezüglich Wirkungsgrad und Leistungsdichte nur noch mit verhältnismäßig hohem Aufwand erreichbar sind. Dadurch erfährt **CFD** (Computational **F**luid **D**ynamics) eine zunehmende Bedeutung, da diese gegenüber teuren experimentellen Untersuchungen ein relativ günstiges Werkzeug zur Optimierung thermischer Turbomaschinen darstellt. Nichtsdestotrotz ist auch CFD auf experimentelle Untersuchungen angewiesen und erst die gegenseitige Verzahnung von Simulation und Experiment bringt die Vorteile vollständig zum Tragen. War CFD in der Vergangenheit durch die begrenzte Leistungsfähigkeit der damaligen Computer nur auf einfache Testfälle beschränkt, kann sie heute aufgrund der gestiegenen Rechenkapazitäten bereits an komplexen strömungsführenden Bauteilen angewandt werden.

In thermischen Turbomaschinen kann die für die Grenzschichtströmung charakteristische Reynolds-Zahl relativ geringe Werte annehmen, wodurch sich diese Bereiche der Grenzschicht in laminarem Zustand befinden können. Damit liegt innerhalb der Grenzschicht sowohl der laminare als auch der turbulente Strömungstyp vor. Als Transition wird in diesem Zusammenhang jener Zustand beschrieben, bei welchem der Umschlag laminar-turbulent erfolgt. Der Charakter der Strömung innerhalb einer Grenzschicht hat massiven Einfluss auf Eigenschaften wie Wärmeübertragung, Ablöse neigung und Wandreibung, wodurch die Kenntnis des örtlichen Zustands der Grenzschicht innerhalb einer thermischen Turbomaschine eine wesentliche Rolle im Auslegungsprozess einnimmt. Die Simulation von turbulenten Strömungen stellt dabei aufgrund der Instationarität und der Dreidimensionalität die größte Hürde bei numerischen Berechnungen dar. Prinzipiell kann die Turbulenz durch Lösen der Navier-

Stokes Gleichungen zu jedem Zeitpunkt exakt aufgelöst werden. Die für die sogenannte **DNS** (Direct Numerical Simulation) erforderliche Rechenleistung ist jedoch trotz gesteigener Leistungskapazitäten von Computern derzeit und in absehbarer Zeit nicht verfügbar. Daher versucht man die Turbulenz durch weniger rechenintensive Modellansätze nachzubilden, um in akzeptablen Rechenzeiten passable Ergebnisse zu erhalten. Die physikalischen Phänomene gehen durch diese Modelle jedoch verloren, womit die Schwierigkeit der Entwicklung entsprechender - der Wirklichkeit möglichst nahe kommender - Turbulenzmodelle erklärbar ist. Voll turbulente Bereiche können mit den heute verfügbaren Modellen schon mit guter Näherung vorhergesagt werden. Die genaue Prognose des Transitionsgebiets bereitet jedoch immer noch beträchtliche Probleme, wodurch dieser Bereich derzeit ein aktives Forschungsfeld darstellt. Dieser Sachverhalt bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit, dessen Aufgabenstellung im folgenden Abschnitt erläutert ist.

### 1.1 Aufgabenstellung

Zur Simulation transistionaler Strömungen soll das am Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz entwickelte Strömungssimulationsprogramm Linars mit dem neuartigen Laminar-Kinetic-Energy-Turbulenzmodell erweitert werden. Dieses transitionsfähige Turbulenzmodell basiert auf dem RANS-Ansatz, wurde Anfang der 2000er Jahre durch verschiedenste Publikationen bekannt und erfuhr bis heute durch zahlreiche Veröffentlichungen ständige Verbesserungen. Als Grundlage dieser Arbeit dienen drei verschiedene Publikationen, anhand derer die unterschiedlichen LKE-Modelle in der objektorientierten Programmiersprache  $C^{++}$  in den bestehenden Code Linars implementiert werden sollen. Um Rückschlüsse auf die Prognosefähigkeit - insbesondere die Vorhersage der Transition - zu erhalten, soll im Anschluss eine Validierung mit unterschiedlichen Testfällen stattfinden, wobei der Vergleich mit dem kommerziell verfügbaren Softwarepaket ANSYS Fluent diese Validierung abrunden soll.

Mit Hilfe dieser Arbeit soll es somit möglich sein, die Prognosefähigkeit der neu in den bestehenden Institutscode Linars implementierten transitionsfähigen Turbulenzmodelle festzustellen. Des Weiteren soll durch die abschließende Validierung eine Einschätzung hinsichtlich Praxisfähigkeit getroffen werden können.

## 2 Definition von transitionalen Strömungen

Ludwig Prandtl führte 1904 den Begriff der Grenzschichttheorie ein, indem er eine allgemeine Profilmströmung in eine reibungsfreie Außenströmung und eine an reibungsbehafteten Begrenzungsflächen auftretende Grenzschichtströmung unterteilte. Der Charakter innerhalb der an den Schaufelprofilen in thermischen Turbomaschinen auftretenden Grenzschicht kann dabei sehr unterschiedliche Zustände annehmen. Als Transition wird in diesem Zusammenhang jener Zustand beschrieben, bei welchem es innerhalb der Grenzschicht zum Umschlag laminar-turbulent kommt. Zunächst soll jedoch zwischen laminarer und turbulenter Grenzschichtströmung unterschieden werden:

### **Laminare Grenzschichtströmung**

Eine laminare Strömung kann auch als Schichtenströmung bezeichnet werden, in welcher die Fluidteilchen in getrennten aber parallelen Bahnen strömen. Informationsaustausch zwischen den verschiedenen Schichten ist nicht gegeben, d.h. es kommt zu keiner Verwirbelung und zu keiner Querströmung. Dadurch ist dieser Strömungstyp von geringem Impulsaustausch geprägt und zeichnet sich daher durch geringe lokale Reibungswerte aus. Dieses, in vielen technischen Anwendungen geforderte Verhalten, stellt somit den größten Vorteil der laminaren Grenzschichtströmung dar.

### **Turbulente Grenzschichtströmung**

Infolge der in turbulenten Strömungen vorherrschenden Geschwindigkeitsfluktuationen ist dieser Strömungstyp durch starken Impulsaustausch innerhalb der Strömung gekennzeichnet. Damit kommt es gegenüber der laminaren Grenzschicht zu einem An-

steigen der Reibungseffekte, andererseits reduziert sich jedoch die Neigung zum Ablösen der Grenzschicht. Eine weitere charakteristische Eigenschaft turbulenter Strömungen liegt in höheren Wärmeübertragungsraten, was in vielen technischen Anwendungen einen Vorteil darstellen kann, insbesondere dann, wenn es einer effektiven Kühlung von Bauteilen bedarf.

### 2.1 Arten der Transition

Der Transitionsvorgang stellt einen hochkomplexen Vorgang dar, welcher auch durch intensive Forschungstätigkeiten noch nicht vollständig verstanden wird. Eine präzise Vorhersage des Transitionszeitpunktes ist daher nicht möglich, auch aufgrund der Tatsache, dass sich die Transition in Abhängigkeit der gegebenen Strömungsbedingungen in unterschiedliche Arten einteilen lässt. Die wichtigsten Transitionsarten stellen hierbei die **Natürliche Transition** und die **Bypass-Transition** dar, welche nachfolgend noch ausführlicher behandelt werden:

#### Natürliche Transition

Der klassische Fall der Transition kann bei niedrigen Freistromturbulenzgraden in der Grenzschicht eines umströmten Körpers beobachtet werden und wird in der Literatur als natürliche Transition bezeichnet. Beginnend von der laminaren Grenzschichtströmung unterläuft diese Transitionsart verschiedene Phasen bis hin zu einer voll ausgebildeten turbulenten Grenzschichtströmung. Anhand der Längsanströmung einer ebenen Platte ohne aufgetragenen Druckgradienten in Abb. 2.1, lässt sich eine schematische Unterteilung der verschiedenen auftretenden Phasen im Transitionsgebiet darstellen [1]:

- Ⓐ **Stabile laminare Strömung:** Am Plattenbeginn stellt sich die Strömung als stabile laminare Grenzschichtströmung mit den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Eigenschaften dar.
- Ⓑ **Instabile zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Wellen:** Ab einem kritischen Wert der Reynolds-Zahl  $Re_{krit}$  kommt es zur Bildung zweidimensionaler Störungswellen, in der Literatur als Tollmien-Schlichting-Wellen bezeichnet.

- © **Dreidimensionale Wellen und Längswirbelbildung:** Die von den Tollmien-Schlichting-Wellen hervorgerufenen Instabilitäten verstärken sich innerhalb der Grenzschicht mit fortlaufender Zeitdauer und nehmen in diesem Stadium dann dreidimensionalen Charakter an.
- © **Aufplatzen der Wirbel:** Als Folge dieser Dreidimensionalität treten die charakteristischen  $\Lambda$ -Wirbel auf, welche lokal sehr große Scherung hervorrufen können. Dadurch brechen die Wirbel plötzlich auf und zerfallen in der nächsten Stufe in mehrere kleine Wirbelstrukturen [2].
- © **Bildung von Turbulenzflecken:** Aus diesem Zerfall bilden sich anschließend die ersten lokalen turbulenten Strömungsgebiete (so genannte Turbulenzflecken), welche in der sie umgebenden laminaren Strömung mitschwimmen und mit weiterer Fortdauer anwachsen und damit an Größe zunehmen. In diesem Bereich findet die intermittenz statt, also das gleichzeitige Vorliegen laminarer und turbulenter Strömungsgebiete.
- © **Vollturbulente Strömung:** Durch das räumliche Anwachsen der Turbulenzflecken wachsen diese weiter stromabwärts zusammen und bilden sich damit zu einer voll entwickelten turbulenten Grenzschichtströmung aus. In dieser Region der Grenzschicht findet der eigentliche Transitionsvorgang statt.

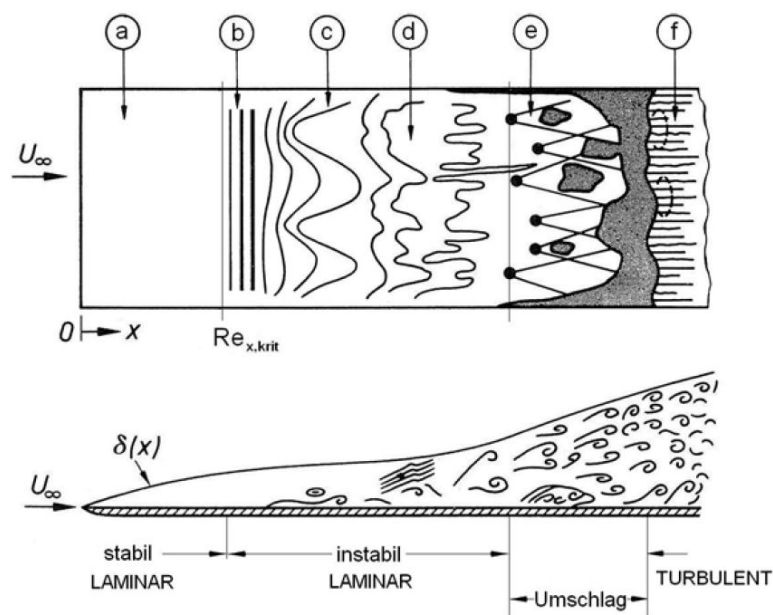


Abbildung 2.1: Darstellung natürlicher Transition [1]

### **Bypass-Transition**

Bei der so genannten Bypass-Transition wird die Phase der in der natürlichen Transition auftretenden Tollmien-Schlichting Instabilitäten komplett übersprungen. Damit bilden sich die Turbulenzflecken direkt aus der laminaren Anfangsströmung. Dieses Verhalten wird durch starke Störungen der Außenströmungen, meist infolge hoher Freistromturbulenz, hervorgerufen.

Obwohl sich die Bypass-Transition durch das Überspringen der Tollmien-Schlichting Instabilitäten als die augenscheinlich leichter zu beschreibende Transitionsart darstellt, ist dies nicht der Fall, denn es ist bis heute noch nicht gelungen, den Beginn der Bypass-Transition analytisch vollständig zu erfassen. Daher sind bis dato noch keine physikalischen Modelle in der Literatur vorhanden, welche eine genaue Prognose des Zusammenbruchs der anfänglich laminaren Grenzschicht unter dem Einfluss der Außenströmung geben können [2].

## **2.2 Bedeutung der Transition in thermischen Turbomaschinen**

Der Charakter der Strömung innerhalb der Grenzschicht hat massiven Einfluss auf Eigenschaften wie Wärmeübertragung, Ablöseneigung und Wandreibung, wodurch eine genauere Betrachtung des Strömungszustandes in der Grenzschicht bei thermischen Turbomaschinen eine essentielle Rolle einnimmt. Durch entsprechende Gestaltung der Bauteile während des Auslegungsprozesses können gewünschte Effekte im Bezug auf Wirkungsgrad und auf andere wichtige Maschinenparameter erzielt werden. Um diesen Prozess wirkungsvoll zu gestalten, ist daher eine genaue Vorhersage der Vorgänge in der Grenzschicht und insbesondere des Transitionszeitpunktes nötig.

# 3 Mathematische Formulierung von Strömungsphänomenen

## 3.1 Navier-Stokes Gleichungen - allgemeine Form

Die sogenannten Navier-Stokes Gleichungen liefern die Basis zur mathematischen Beschreibung von Strömungen und wurden Anfang des 19. Jahrhunderts von Navier und Stokes unabhängig voneinander abgefasst. Das nichtlineare partielle Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung stellt das grundlegende mathematische Modell in der Strömungsmechanik dar und formuliert die Erhaltungsgleichungen für Kontinuität, Impuls und Energie.

Erhaltungsgleichungen beschreiben im Allgemeinen die totale zeitliche Änderung einer Transportgröße  $\phi$  einer betrachteten Kontrollgröße. Mathematisch kann dies mit Hilfe der **substantiellen Ableitung** angegeben werden, welche sich aus lokaler und konvektiver Änderung der entsprechenden Transportgröße zusammensetzt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \overbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}^{\text{lokale Änderung}} + \overbrace{\vec{\nabla}(\phi\vec{u})}^{\text{konvektive Änderung}} \quad (3.1)$$

Die konvektive Ableitung bedient sich dabei der **Divergenz**  $\vec{\nabla}$ , welche innerhalb eines Strömungsfeldes den Fluss in der Umgebung eines Raumpunktes bestimmt. Damit lässt sich der Nettofluss über eine Berechnungszelle bestimmen. Wird die Divergenz auf den konvektiven Term der substantiellen Ableitung in (3.1) angewandt, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi u \\ \phi v \\ \phi w \end{pmatrix} = \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi w)}{\partial z} \quad (3.2)$$



Die Navier-Stokes Gleichungen setzen sich - wie bereits erwähnt - aus Erhaltung der Kontinuität, des Impulses in den drei Raumrichtungen und der Energie zusammen. Entsprechend dazu kann die Transportgröße  $\phi$  für die fünf Transportgleichungen mit

$$\phi = \begin{cases} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho e \end{cases} \quad (3.3)$$

angegeben werden, wobei  $\rho$  die Dichte des Fluids,  $\vec{v}$  den Geschwindigkeitsvektor und  $e$  die totale innere Energie repräsentiert. Auf diesen Informationen aufbauend und anhand der folgenden Überlegungen, können die Navier-Stokes Gleichungen in ihrer allgemeinen Form nun folgendermaßen formuliert werden:

#### Kontinuitätsgleichung

Die Erhaltungsgleichung der Masse ist in quellfreien Strömungen in spezifischer, auf das Volumen bezogener Form (Einheit  $\frac{kg}{s}/m^3$ ) durch

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.4)$$

gegeben. In anderen Worten: Es wird die totale zeitliche Änderung der Transportgröße  $\rho$  gleich Null gesetzt.

#### Impulsgleichungen

Die Impulsgleichungen basieren auf dem Newtonschen Grundgesetz, in welchem die zeitliche Änderung des Impulses addiert mit der Differenz aus eintretendem und austretendem Impulsfluss der Summe der am Fluidelement angreifenden Kräfte entspricht. Die spezifische, auf das Volumen bezogene Form mit der Einheit  $N/m^3$  ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \underline{\tau} + \rho \vec{f}^B \quad (3.5)$$

Der erste Term der Gleichung steht für die lokale zeitliche Änderung des Impulses, der Zweite repräsentiert die ein- und austretenden Impulsströme. Die auf das Fluidelement angreifenden Druckkräfte sind durch den ersten Term rechts des Gleichheitszeichens beschrieben, nachfolgend sind mit Hilfe des Spannungstensors  $\underline{\tau}$  die infolge viskoser Kräfte hervorgerufenen Schubspannungen bestimmt. Die angreifenden äußere

ren Massenkräfte werden durch den letzten Term berücksichtigt.

#### Energiegleichung

Die Energiegleichung ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, aus welchem der Satz der Energieerhaltung abgeleitet werden kann. Demzufolge kann Energie weder vernichtet noch erzeugt werden. Dadurch entspricht die Änderung der Energie innerhalb eines Kontrollvolumens der Differenz aus ein- und ausfließenden Energieflüssen, vermehrt um die am Element infolge von Druck und Schubspannung angreifende Oberflächenleistung. Damit ergibt sich die Energiegleichung in spezifischer, auf das Volumen bezogenen Form mit der Einheit  $W/m^3$  mit

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho e \vec{v}) = -\vec{\nabla}(p \vec{v}) + \dot{Q} + \rho \vec{f}^B \vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{\nabla}(\underline{\tau} \vec{v}) \quad (3.6)$$

Die linke Seite der Energiegleichung setzt sich aus der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie (innere Energie addiert mit der kinetischen Energie) und dem Nettoenergiefluss über die Grenzen des Fluidelements zusammen. Der erste Term rechts des Gleichheitszeichens beschreibt die Leistung infolge der auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte,  $\dot{Q}$  repräsentiert innere Wärmequellen, der dritte Ausdruck verkörpert den Leistungsbeitrag durch äußere Massenkräfte. Die infolge thermischer Leitung übertragene Wärmemenge ist durch den vierten Term der rechten Seite ausgedrückt, der letzte Term erfasst die Leistung der vorherrschenden Reibungskräfte.

## 3.2 Navier-Stokes Gleichungen zur Berechnung von Strömungen in thermischen Turbomaschinen

Die im vorherigen Abschnitt angegebenen Bilanzgleichungen besitzen allgemeine Gültigkeit und sind daher für alle Fluide und Strömungszustände gültig. Für die in dieser Arbeit in thermischen Turbomaschinen untersuchten Gasströmungen können Vereinfachungen getroffen werden, um das partielle Gleichungssystem mit den fünf Unbekannten  $\rho$ ,  $p$ ,  $\vec{v}$ ,  $T$  und  $e$  zu schließen [3]. Zum Einen wird **ideales Gasverhalten** vorausgesetzt, zum Anderen wird von einem **Newtonschen Fluid** ausgegangen, dessen Wärmeleitung dem **Gesetz von Fourier** unterworfen ist.

### Ideales Gas

Die Annahme eines perfekten Gases erlaubt es, die aus der Thermodynamik bekannten thermischen Zustandsgleichungen zur Berechnung heranzuziehen. Die totale Energie  $e$  setzt sich aus innerer, kinetischer und potentieller Energie zusammen, wobei Letztere in thermischen Turbomaschinen eine untergeordnete Rolle spielt und daher vernachlässigt werden kann. Damit kann die totale Energie mit der inneren Energie  $u$  und der kinetische Energie  $v^2/2$  durch

$$e = u + \frac{v^2}{2} \quad (3.7)$$

festgelegt werden. Für ideale Gase lässt sich die innere Energie mit Hilfe der spezifischen Wärmekapazität  $c_v$  und der Temperatur  $T$  durch

$$u = c_v T \quad (3.8)$$

auszudrücken. Des Weiteren gilt der Zusammenhang zwischen der spezifischen Wärmekapazität  $c_v$ , der Gaskonstante  $R$  und dem Isentropenexponent  $\kappa$ :

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (3.9)$$

Durch Zuhilfenahme der idealen Gasgleichung, definiert durch

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (3.10)$$

kann die **totale Energie** nun folgendermaßen angeschrieben werden:

$$e = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} + \frac{v^2}{2} \quad (3.11)$$

Ersetzen wir die innere Energie  $u$  in (3.7) durch (3.8) und die darin enthaltene spezifische Wärmekapazität  $c_v$  durch (3.9) ergibt sich die **Temperatur** zu:

$$T = \frac{\kappa - 1}{R} \left( \frac{e}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) \quad (3.12)$$

#### Newton'sches Fluid

Definitionsgemäß ist ein Newton'sches Fluid durch den linearen Zusammenhang zwischen Scherspannung und Schergeschwindigkeit charakterisiert. Mit dieser Annahme kann der Spannungstensor durch

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \vec{v} \delta_{ij} \right) \quad (3.13)$$

bestimmt werden. Der Indizes  $i$  steht für die Normalenrichtung der Durchtrittsfläche,  $j$  repräsentiert die Richtung des übertragenen Impulses. Des Weiteren ist das sogenannte Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  durch folgende Definition festgelegt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{wenn } i = j \\ 0 & , \quad \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad (3.14)$$

Die Proportionalitätskonstante  $\mu$  wird als dynamische Viskosität bezeichnet, ist temperaturabhängig und wird im Institutscode Linars mit der Näherungsformel von Sutherland für Luft mit

$$\mu = \mu_{T_0} \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{T_0 + 110.56}{T + 110.56} \quad (3.15)$$

bestimmt. Mit  $\mu_{T_0}$  ist die dynamische Viskosität bei einer Bezugstemperatur von  $T_0 = 273.11 \text{ K}$  mit einem Wert von  $17.16 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$  bezeichnet.

#### Fourier'sches Gesetz

Die Bestimmung des Wärmestromes durch die Oberfläche eines betrachteten Fluidelements kann mit dem nach Fourier benannten Wärmeleitungsgesetz

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (3.16)$$

bestimmt werden. Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  verhält sich in Gasen ähnlich der dynamischen Viskosität  $\mu$  und kann mit Hilfe einer konstant gesetzten Prandtl-Zahl  $Pr$  - was näherungsweise für die meisten Gase Gültigkeit besitzt - bestimmt werden:

$$\lambda = \frac{c_p}{Pr} \mu, \quad \text{mit } Pr = 0.72 \quad \text{für Luft} \quad (3.17)$$

### Vereinfachte Navier-Stokes Gleichungen

Mit den im vorherigen Abschnitt erarbeiteten Zusammenhängen liegt nun ein geschlossenes, partielles Gleichungssystem zweiter Ordnung vor. Gegenüber den allgemein gültigen Navier-Stokes Gleichungen können in thermischen Turbomaschinen infolge der geringen Dichte **Massenkräfte** und **innere Wärmequellen vernachlässigt** werden, wodurch sich die Gleichungen geringfügig vereinfachen.

Die **Kontinuitätsgleichung** bleibt gegenüber (3.4) unverändert und lässt sich in ausführlicher Schreibweise folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3.18)$$

Bei den **Impulsgleichungen** ergeben sich marginale Vereinfachungen. Gegenüber der allgemeinen Formulierung (3.5) kann bei der Betrachtung von thermischen Turbomaschinen der die Massenkräfte repräsentierende Term infolge der geringen Dichte vernachlässigt werden. Damit können die Impulsgleichungen für die drei Raumrichtungen in konservativer Schreibweise wie folgt angeschrieben werden:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

Auch für die **Energiegleichung** ergeben sich Vereinfachungen gegenüber der allgemeinen Formulierung (3.6), da innere Wärmequellen und der Leistungsbeitrag der äußeren Massenkräfte aufgrund der geringen Dichte vernachlässigt werden können. Die in thermischen Turbomaschinen Gültigkeit besitzende Energiegleichung lautet somit in konservativer Form folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ew)}{\partial z} = & - \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \\ & - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \Phi_\mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Leistung der viskosen Kräfte wird dabei durch die sogenannte Dissipationsfunktion  $\Phi_\mu$  berücksichtigt:

$$\begin{aligned}\Phi_\mu = \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})\end{aligned}\quad (3.23)$$

Das nun vorliegende Gleichungssystem stellt die Basis für die Beschreibung von Strömungen in thermischen Turbomaschinen im Institutscode Linars dar.

## 3.3 Modellierung turbulenter Strömungen mit Hilfe des RANS-Ansatzes

Prinzipiell kann die Turbulenz auch für die von hohen Reynolds-Zahlen geprägte Strömung in thermischen Turbomaschinen durch Lösen der Navier-Stokes Gleichungen zu jedem Zeitpunkt exakt aufgelöst werden. Dafür müssten jedoch alle charakteristischen Energieskalen berücksichtigt werden, was mit der damit verbundenen Feinheit des Berechnungsgitters enorme Anforderung an die Rechenleistung stellen würde. Diese Rechenleistung für die sogenannte **DNS** (Direct Numerical Simulation) ist gegenwärtig und auch in absehbarer Zeit nicht verfügbar, womit man sich anderer Methoden zur Modellierung der Turbulenz bedienen muss. Im folgenden Abschnitt wird die häufig angewandte und auch im Institutscode Linars verwendete **RANS - Methode** (Reynolds Averaged Navier Stokes) zur Modellierung der Turbulenz in groben Zügen beschrieben, eine ausführlichere Darlegung ist in der von Pečnik verfassten Dissertation [2] zu finden.

### 3.3.1 Reynoldsche Mittelung

Der Momentanwert einer fluktuierende Größe  $\Phi$  kann in Mittelwert  $\bar{\Phi}$  und Schwankungsgröße  $\Phi'$  zerlegt werden:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (3.24)$$

Für statistisch stationäre Strömungen ergibt sich nach Einsetzen des Reynoldschen Ansatzes in die im vorherigen Abschnitt angegebenen Kontinuitätsgleichung (3.18) und bei anschließender zeitlicher Mittelung folgende, in Einsteinscher Summenkonvention angegebene, Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\rho' u_i'}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.25)$$

Damit verändert sich (3.25) gegenüber (3.18) um den dritten Term, welcher sich als Produkt von Dichte- und Geschwindigkeitsschwankung darstellt. Für inkompressible Strömungen besitzt dieser Term den Wert Null, da die Dichte  $\rho$  einen konstanten Wert annimmt und somit keine Korrelation zur Geschwindigkeit  $u_i$  aufweist. Im Gegensatz dazu muss dieser Term bei kompressiblen Strömungen, wie dies in thermischen Turbomaschinen der Fall ist, sehr wohl berücksichtigt werden. Neben der Kontinuitätsgleichung wird die Mittelungsoperation auch noch an den anderen Navier-Stokes Gleichungen (3.19) - (3.21) und (3.22) durchgeführt, wodurch noch zusätzliche Terme hinzukommen.

### 3.3.2 Favre-Mittelung

Um eine mathematische Vereinfachung dahingehend zu erreichen, die Anzahl der zusätzlichen Terme zu senken, schlug Favre die nach ihm benannte dichtegewichtete Mittelung vor:

$$\tilde{\Phi} = \frac{\overline{\rho \Phi}}{\bar{\rho}} \quad (3.26)$$

Anhand von (3.26) kann eine Vereinfachung nur für die Terme, welche in konservativer Schreibweise die Dichte  $\rho$  beinhalten, festgestellt werden. Daher wird für die Geschwindigkeit  $u_i$ , die Temperatur  $T$  und die totale Energie  $e$  die Favre-Mittelung, für die Dichte  $\rho$  und den Druck  $p$  die konventionelle Reynolds-Mittelung angewandt. Eine beliebig betrachtete Strömungsgröße  $\Phi$  setzt sich dabei analog zu (3.24) aus dem Favre-Mittelwert und der Schwankungsgröße zusammen:

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi'' \quad (3.27)$$

Für detailliertere Ausführungen sei an dieser Stelle wieder an [2] verwiesen.

### 3.3.3 Ansatz von Boussinesq

Die durch die Mittelung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen entstandenen zusätzlichen Terme stellen neue unbekannte Terme dar, welche zum sogenannten **Schließungsproblem der Turbulenz** führen und mit entsprechenden Ansätzen modelliert werden müssen. Für inkompressible Strömungen beschränken sich die Unbekannten auf den Reynoldschen-Spannungstensor, welcher durch

$$R_{ij} = \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (3.28)$$

gegeben ist. Der Name rührt daher, dass die Komponenten des Tensors als **scheinbare Spannungen** infolge turbulenter Fluktuationen angesehen werden. Durch den symmetrischen Aufbau des Reynoldschen-Spannungstensors reduziert sich die Anzahl der Unbekannten auf Sechs, allerdings gilt dies nur für inkompressible Strömungen bei Reynolds-Mittelung. Erfolgt anhand den Überlegungen im vorherigen Abschnitt die Mittelung bei kompressiblen Strömungen zusätzlich nach Favre, lässt sich die Anzahl der Unbekannten analog zu inkompressiblen Strömungen auf Sechs reduzieren.

Um die RANS-Gleichungen zu schließen, sind in der Literatur verschiedene Ansätze verfügbar. Der einfachste und am häufigsten verwendete Ansatz ist der **Wirbelviskositätsansatz** nach Boussinesq, welcher den Reynoldschen-Spannungstensor folgendermaßen definiert:

$$R_{ij} = \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} - \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\tilde{u}_k}{x_k} \delta_{ij} \right) \quad (3.29)$$

Die in (3.29) auftauchende Variable  $k$  repräsentiert die turbulente kinetische Energie, welche durch

$$k = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}} \quad (3.30)$$

angegeben wird. Mit diesen Überlegungen ist das RANS-Gleichungssystem geschlossen. Jedoch muss nun die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t = \bar{\rho} \cdot \nu_t$  durch entsprechende Turbulenzmodelle formuliert werden, was in den meisten Fällen ein Lösen von zusätzlichen Transportgleichungen impliziert. Ein solches Turbulenzmodell stellt das in dieser Arbeit untersuchte LKE-Modell dar, welches in den nachfolgenden Kapiteln noch eine genauere Betrachtung erfährt.



## 4 Institutscode Linars

Laut Aufgabenstellung gilt es, ein neuartiges Turbulenzmodell in den bestehenden Institutscode Linars des Instituts für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz zu implementieren. Daher soll dieses sich bereits in vielen Anwendungsbereichen bewährte Strömungssimulationsprogramm in diesem Abschnitt kurz vorgestellt werden. Basierend auf der Idee von Sanz und dem darauf aufbauenden Strömungssolver von Gehringer entwickelten Pieringer und Pečnik ab 2004 einen komplett neuen Strömungssolver, welcher in der objektorientierten Programmiersprache  $C^{++}$  geschrieben ist. Der große Vorteil dieser Programmiersprache besteht in der hohen Flexibilität, da Erweiterungen, wie das in dieser Arbeit praktizierte Hinzufügen von neuen Turbulenzmodellen, oder Anpassungen mit vergleichsweise geringem Aufwand geschehen können.

Die Bereitstellung der erforderlichen Steuerparameter erfolgt in Linars über das sogenannte *Control-File*. Zusätzlich liefern drei durch den Benutzer veränderbare *Files* das zur Berechnung notwendige Berechnungsgitter und die entsprechenden Randbedingungen.

### 4.1 Aufbau

Linars berechnet die nach Reynolds und Favre gemittelten kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in konservativer Form mit Hilfe der **Finiten-Volumen-Methode**, durch welche die zugrundeliegenden Erhaltungsprinzipien per Definition auch für die diskretisierten Gleichungen erfüllt sind. Die Einbettung von zusätzlich entstehenden Transportgleichungen bei Integration von Turbulenzmodellen geschieht analog zu den fünf Erhaltungsgleichungen, wobei der Zustandsvektor in diesem Fall um die das Turbulenzmodell beschreibenden Größen erweitert wird.

### Räumliche Diskretisierung

Durch die teilweise sehr hohen Geschwindigkeiten in thermischen Turbomaschinen üben die konvektiven Terme insbesondere in den Impulsgleichungen einen massiven Einfluss auf das Berechnungsergebnis aus. Daher ist die Diskretisierung dieser Terme für entsprechende Genauigkeiten des Ergebnisses von entscheidender Bedeutung. Da bei der zentralen Diskretisierung kein Einfluss auf die physikalische Ausbreitungsrichtung des Ausbreitungsproblems genommen wird, bedient sich das Strömungssimulationsprogramm Linars der **Upwind-Verfahren**, in welchen die Ausbreitungsrichtung im Diskretisierungsprozess Berücksichtigung findet. Trotzdem ergibt sich das Problem, dass die numerische Lösung in der Mitte der Volumenzelle gespeichert ist und somit am Zellenrand eine unstetige Funktion vorliegt. Diese Situation lässt sich als Riemannproblem auffassen, welches in Linars durch den weitverbreiteten, von Roe (1981) vorgeschlagenen **approximativen Riemann-Löser** gelöst wird, wodurch die konvektiven Flüsse über die Zellgrenzen bestimmt werden können.

### Zeitliche Diskretisierung

Für die zeitliche Diskretisierung der nach Reynolds und Favre gemittelten kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen bietet Linars zwei Verfahren an: Ein 4-Schritt Runge-Kutta Verfahren und ein implizites Verfahren, welches das Gleichungssystem mit Hilfe der Methode der alternierenden Richtungen (ADI-Verfahren) löst [2].

## 4.2 Vorgehensweise bei der Implementierung der neuen Turbulenzmodelle

Durch die Programmierung in der objektorientierten Programmiersprache  $C^{++}$  kann Linars relativ einfach mit neuen oder modifizierten Turbulenzmodellen erweitert werden. Dazu wird eine neue Klasse mit dazugehörigem *Header File* angelegt, welche dann analog zu den bereits in Linars verfügbaren Turbulenzmodellen mit dem bestehenden Code verknüpft wird. Beim Start der Berechnung wird die jeweilige Klasse aktiviert und über das Prinzip des „Vererbens zwischen Klassen“ werden beim Abruf turbulenter Funktionen die Unterprogramme der jeweiligen Klasse aufgerufen.

### Vorgehensweise

Als Compiler wurde im vorliegenden Fall Microsoft Visual C++ verwendet. Zu Beginn wurde in diesem Programm ein *Source File* mit dem Namen *grid\_LamKE.cpp* mit dazugehörigem *Header File* angelegt, in welchem dann die neue Klasse des LKE-Turbulenzmodells definiert wurde. Im Anschluss wurden die verschiedensten Funktionen, wie etwa die Berechnung der viskosen Flüsse oder die Berechnung der turbulenten Viskosität, entsprechend den Vorgaben des Turbulenzmodells definiert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Institutscode Linars mit drei verschiedenen Versionen des LKE-Turbulenzmodells erweitert. Die Aktivierung des gewünschten Modells geschieht im *Header File* mit dem Namen *definitions.h*, in welchem folgende Zeile zu finden ist:

```
#define TLE_VERSION_1 3
```

Durch Eingeben einer Zahl kann das gewünschte LKE-Turbulenzmodell aktiviert werden. Im obenstehenden Beispiel ist das Modell *Walters/Cokljat* durch die Zahl 3 aktiviert, während das Modell *Walters/Leylek(2004)* durch 1 und das Modell *Walters/Leylek(2005)* durch 2 aufgerufen werden kann.

# 5 Formulierung der neu implementierten LKE-Modelle

## 5.1 Konzept und theoretischer Hintergrund

Das LKE-Modell (LKE für **L**aminar-**K**inetic-**E**nergy) ist ein neuartiges transitionsfähiges Turbulenzmodell, welches Anfang der 2000er Jahre durch verschiedenste Publikationen bekannt wurde und bis heute durch zahlreiche Veröffentlichungen stetig verbessert wurde. Anhand der vorliegenden Arbeit kann neben der Aussagekraft auch die Entwicklung des LKE-Modelles verfolgt werden. Im folgenden Abschnitt werden drei LKE-Turbulenzmodelle, beginnend mit dem im Jahre 2004 veröffentlichten Modell von Walters und Leylek [4], gefolgt von einer auf diesem Modell aufbauenden Publikation derselben Autoren im Jahre 2005 [5], bis hin zur aktuellsten Arbeit von Walters und Cokljat [6] im Jahre 2008, vorgestellt.

Beim LKE-Modell handelt sich um ein auf dem RANS-Ansatz basierendes Dreigliedriges - Turbulenzmodell, bei welchem zu den fünf bestehenden noch drei zusätzliche Transportgleichungen zur Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_T$  nach dem Ansatz von **Boussinesq** gelöst werden. Neben den bereits in verschiedensten Turbulenzmodellen verwendeten Größen der **turbulenten kinetischen Energie** und der **turbulenten Dissipation** wird bei diesem neuartigen Modell auch auf die später noch genauer beschriebene **laminare kinetische Energie** zurückgegriffen.

### Theoretischer Hintergrund

Die neuartige, dem Modell den Namen gebende Transportgröße  $k_L$  beschreibt nicht-turbulente, in Strömungsrichtung ausgerichtete Fluktuationen und basiert auf den in der Arbeit von Mayle und Schulz [7] getätigten Überlegungen. Die laminare kineti-

sche Energie wird durch Wechselwirkungen im **vortransitionalen Grenzschichtbereich**, welcher dort im Bezug auf das Geschwindigkeitsprofil Ähnlichkeit zur laminaren Grenzschicht aufweist, hervorgerufen. Durch die Interaktion von Freistromturbulenz und vortransitionaler Grenzschicht kommt es bei steigender Freistromturbulenz zu einer **Verzerrung** des nach Blasius definierten laminaren Geschwindigkeitsprofils. Diese Verzerrung geht mit einer entgegengesetzten Impulsänderung zwischen den innerhalb und außerhalb der Grenzschicht liegenden Regionen einher. Diese Impulsänderung ruft beträchtliche **Fluktuationen in Strömungsrichtung** hervor, deren Größenordnung ein Vielfaches der turbulenten Schwankungen im Freistrom betragen kann. Dieser Prozess ist mit einer Zunahme der Wandschubspannung verbunden, welche schlussendlich zum Zusammenbruch der in Strömungsrichtung orientierten Fluktuationen führt und somit in die sogenannten **Bypass-Transition** mündet.

Bei Verwendung der laminaren kinetischen Energie ist jedoch Vorsicht geboten, da es sich bei dieser Größe nicht um Turbulenz im üblichen Sinn des Wortes handelt. Während sich Turbulenz durch Instationarität, Dreidimensionalität und Wirbelstrukturen auszeichnet, ist die **laminare kinetische Energie** fast vollständig auf die Komponente in Strömungsrichtung konzentriert und grenzt sich damit deutlich von der klassischen Turbulenzdefinition ab. Auch der spektrale Energietransport von großen zu kleinen Wirbeln findet nicht statt. Damit nimmt die treibende Kraft dieses Prozesses - die **Dissipation** - im vortransitionalen Grenzschichtbereich, mit Ausnahme des wandnahen Bereiches (Haftbedingung), sehr kleine Werte an.

Die Produktion der laminaren kinetischen Energie stellt einen komplexen Vorgang dar und ist in ihrer Gesamtheit noch nicht vollständig verstanden. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Modellen wird der Vorschlag von Volino [8] aufgenommen, welcher das Wachstum von  $k_L$  mit dem sogenannten „**splat mechanism**“ modelliert. Dabei wird von einer Interaktion zwischen großen Wirbeln und der Wand ausgegangen, was in einer **Umlenkung der Wirbel in Strömungsrichtung** resultiert und somit zum Wachstum der laminaren kinetischen Energie beiträgt. Kleinere Wirbel interagieren hingegen mit der Hauptströmung als typische Turbulenz. Da der „splat mechanism“ nur für große Wirbel stattfindet, kann das turbulente Energiespektrum der wandnahen Region in wandlimitierende (große) und nicht-wandlimitierende (kleine) Wirbelstrukturen aufgeteilt werden. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 5.1 dargestellt, wobei die Grenzwirbelgröße mit  $\lambda_{eff}$  bezeichnet wird. Der Energieinhalt ist in Abhängigkeit der Wellenzahl  $\kappa$  angegeben, welche sich als Kehrwert der Wirbellänge  $\lambda$  definiert.

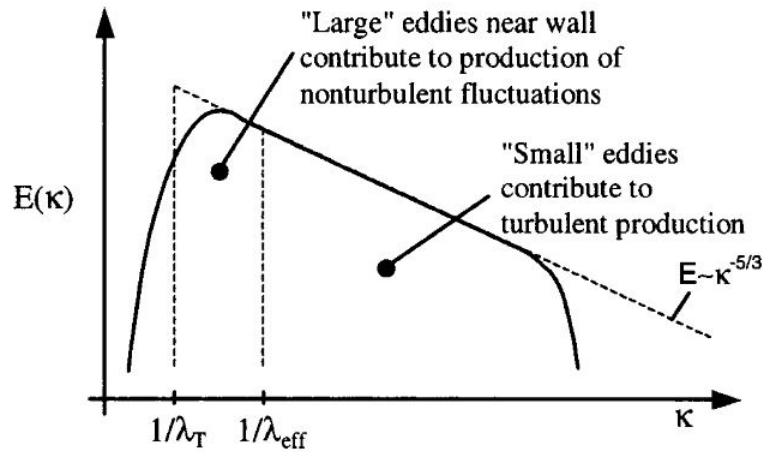


Abbildung 5.1: Konzept des „splat mechanism“ zur Produktion von  $k_L$  [4]

**Es kann also festhalten werden:** Wirbelstrukturen kleiner als  $\lambda_{eff}$  interagieren mit der Hauptströmung als typische Turbulenz, größere Wirbelstrukturen tragen zur Produktion der laminaren kinetischen Energie  $k_L$  bei.

Der effektive Längenmaßstab wird bei den drei betrachteten Turbulenzmodellen mit

$$\lambda_{eff} = MIN(C_\lambda d, \lambda_T) \quad (5.1)$$

angegeben und kann durch die Minimumsfunktion nicht größer als der turbulente Längenmaßstab  $\lambda_T$  werden. Mit  $d$  wird der Wandabstand bezeichnet,  $C_\lambda$  steht für eine dimensionslose, den Wert 2495 annehmende Konstante. Der turbulente Längenmaßstab ist beim Modell *Walters/Leylek(2004)* mit

$$\lambda_T = \frac{k_T^{3/2}}{\epsilon} \quad (5.2)$$

definiert. Die zwei anderen Modelle verwenden als dritte Transportgröße die spezifische Dissipationsrate  $\omega$ , womit der turbulente Längenmaßstab bei diesen Turbulenzmodellen mit

$$\lambda_T = \frac{\sqrt{k_T}}{\omega} \quad (5.3)$$

festgelegt ist, da die turbulente Dissipation  $\epsilon$  und die spezifische Dissipationsrate  $\omega$  durch

$$\epsilon = \omega \cdot k_T \quad (5.4)$$

ineinander übergeführt werden können.

Kolmogorov (1941) stellte in seinem Werk zum spektralen Energietransfer von großen zu kleinen Wirbeln den Zusammenhang

$$k_T = \int_0^{\infty} E(\lambda) d\lambda \quad (5.5)$$

zwischen turbulenter kinetischer Energie  $k_T$  und Längenmaßstab  $\lambda$  her. Folgedessen lässt sich die turbulente kinetische Energie bei Betrachtung von Abb. 5.1 als Fläche unter der Funktion identifizieren und kann entsprechend den vorherigen Aussagen bezüglich der Größe der Wirbelstrukturen in zwei Bereiche - mit  $\lambda_{eff}$  als Trennwert - aufgeteilt werden. Der rechts von  $\lambda_{eff}$  liegende Teil wird aufgrund der dort vorherrschenden kleinen Wirbelstrukturen mit  $k_{T,s}$  (small scale), der links von der Trennebene liegende Teil ist angesichts der Überzahl an großen Wirbelstrukturen mit  $k_{T,l}$  (large scale) bezeichnet. Die turbulente kinetische Energie kann demzufolge mit

$$k_T = k_{T,s} + k_{T,l} \quad (5.6)$$

ermittelt werden. Nach denselben Überlegungen kann auch die turbulente Viskosität  $\nu_T$  in die kleinskalige turbulente Viskosität  $\nu_{T,s}$  und die großskalige turbulente Viskosität  $\nu_{T,l}$  aufteilt werden, wobei wiederum

$$\nu_T = \nu_{T,s} + \nu_{T,l} \quad (5.7)$$

gelten muss.

Es ist anzumerken, dass mit **zunehmendem Wandabstand** und der damit verbundenen Nichtexistenz des sogenannten „splat mechanism“ folgender Zusammenhang gilt:  $\mathbf{k}_{T,s} \rightarrow \mathbf{k}_T$  und  $\mathbf{k}_{T,l} \rightarrow \mathbf{0}$

Das wichtigste Element eines transitionsfähigen Turbulenzmodells ist jedoch die Art der Bestimmung des Transitionszeitpunkts. Bei allen drei untersuchten Turbulenzmodellen ist der Beginn der Transition durch einen lokalen Parameter (single point) bzw. durch eine entsprechende Strömungsbedingung bestimmt, wobei das Überschreiten eines Schwellwerts die Transition auslöst. Zusätzliche Information dazu und die genaue Formulierungen der Transportgleichungen sind in den drei nachfolgenden Abschnitten zusammengefasst.

## 5.2 LKE-Modell Walters/Leylek(2004)

Das erste in den Institutscode implementierte LKE-Turbulenzmodell basiert auf dem im Jahre 2004 von Walters und Leylek in ihrem Paper [4] vorgestellten Turbulenzmodell - fortan mit Modell *Walters/Leylek(2004)* bezeichnet. Neben der turbulenten kinetischen Energie  $k_T$  und der vorhin vorgestellten laminaren kinetischen Energie  $k_L$  wird das Turbulenzmodell mit der dritten Transportgröße, der turbulenten Dissipation  $\epsilon$ , vervollständigt.

Nach den Darlegungen unter *Abschnitt 5.1* wird die turbulente kinetische Energie in Wandnähe in Bezug auf die Größe der Wirbelstruktur in  $k_{T,s}$  und  $k_{T,l}$  aufgeteilt:

$$k_{T,s} = k_T \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{2/3} \quad (5.8)$$

$$k_{T,l} = k_T \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{2/3} \right] \quad (5.9)$$

Die Summe von (5.8) und (5.9) entspricht nach Glg. (5.6) der turbulenten kinetischen Energie  $k_T$ . Mit  $\lambda_{eff}$  ist der effektive Längenmaßstab nach (5.1) bezeichnet, der turbulente Längenmaßstab  $\lambda_T$  ist durch (5.2) festgelegt.

Die inkompressible Form der drei **Transportgleichungen** für  $k_T$ ,  $k_L$  und  $\epsilon$  ist für das betrachtete Turbulenzmodell wie folgt definiert:

$$\frac{Dk_T}{Dt} = P_T + R + R_{NAT} - \epsilon - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right] \quad (5.10)$$

$$\frac{Dk_L}{Dt} = P_L - R - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right] \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k_T} (P_T + R_{NAT}) + C_{\epsilon R} R \frac{\epsilon}{\sqrt{k_T k_L}} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k_T} - \frac{\epsilon}{k_T} D_T \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der erste, rechts des Gleichheitszeichen stehende Term repräsentiert die Produktion der jeweiligen Transportgröße, der zweite Term zeichnet sich bei allen drei Transport-



gleichungen für den Transitionsvorgang zuständig. Die Dissipation  $\epsilon$  in Glg. (5.10) reduziert die turbulente kinetische Energie, der Abbau von  $\epsilon$  wird durch den dritten Term der rechten Seite in Glg. (5.12) beschrieben. Der vierte Term in Glg. (5.12) reduziert den Längenmaßstab in den äußeren Regionen der turbulenten Grenzschicht,  $D_T$  und  $D_L$  spezifizieren den Dissipationsvorgang in Wandnähe.

Der **Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie** ist durch

$$P_T = \nu_{T,s} S^2 \quad (5.13)$$

bestimmt, welcher eine quadratische Abhängigkeit von der Scherrate

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (5.14)$$

aufweist. Die turbulente Viskosität  $\nu_T$  wird anhand der Überlegungen unter *Abschnitt 5.1* nach Glg. (5.7) in die kleinskalige und großskalige turbulente Viskosität aufgeteilt. Die kleinskalige turbulente Viskosität ist im vorliegenden Modell mit

$$\nu_{T,s} = f_\nu f_{\tau,s} C_\mu \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff} \quad (5.15)$$

definiert.  $C_\mu$  ist der turbulente Viskositätsfaktor, welcher in der Gleichgewichtsregion einer vollturbulenten Grenzschicht mit 0.09 angegeben wird. Walters und Leylek wählen in ihrem Modell einen anderen Ansatz, indem sie  $C_\mu$  in Abhängigkeit von  $S$ ,  $k_T$  und  $\epsilon$  angeben:

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \left( \frac{S \cdot k_T}{\epsilon} \right)} \quad (5.16)$$

$f_\nu$  und  $f_{\tau,s}$  sind unterschiedliche Aufgaben erfüllende Dämpfungsfunktionen. Die Erstgenannte integriert die viskosen Effekte in Wandnähe (Reibungseffekte), die zweite Funktion berücksichtigt die Unfähigkeit langsamer Wirbel, starken Spannungsgradienten in der Grenzschicht folgen zu können. Ihre Definitionen lauten:

$$f_\nu = 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{Re_{T,s}}}{A_\nu}\right) \quad (5.17)$$

$$f_{\tau,s} = 1 - \exp\left[-C_{\tau,s} \left(\frac{\tau_m}{\tau_{T,s}}\right)^2\right] \quad (5.18)$$

Die Dämpfungsfunktionen weisen Abhängigkeiten von der turbulenten Reynolds-Zahl

der kleinskaligen Wirbel  $Re_{T,s}$  und zu unterschiedlichen Zeitskalen auf, welche wie folgt gegeben sind:

$$Re_{T,s} = \frac{k_{T,s}^2}{\nu \epsilon} \quad (5.19)$$

$$\tau_m = \frac{1}{S} \quad (5.20)$$

$$\tau_{T,s} = \frac{\lambda_{eff}}{\sqrt{k_{T,s}}} \quad (5.21)$$

Der ersten Term der rechten Seite von Glg. (5.11) repräsentiert den **Produktionsterm** der **laminaren kinetischen Energie** und ist analog zum Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie (5.13) aufgebaut:

$$P_L = \nu_{T,l} S^2 \quad (5.22)$$

Wird ausschließlich die Bypass-Transition berücksichtigt, ist die großskalige turbulente Viskosität  $\nu_{T,l}$  wie folgt gegeben:

$$\nu_{T,l} = f_{\tau,l} C_{11} \left( \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \right) \sqrt{k_{T,l}} \lambda_{eff} \quad (5.23)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (5.24)$$

Die Dämpfungsfunktion  $f_{\tau,l}$  weist einen analogen Aufbau zu Glg. (5.18) auf und wird von den Autoren folgendermaßen angegeben:

$$f_{\tau,l} = 1 - \exp \left[ -C_{\tau,l} \left( \frac{\tau_m^2}{\tau_{T,l}} \right) \right] \quad (5.25)$$

$$\tau_{T,l} = \frac{\lambda_{eff}}{\sqrt{k_{T,l}}} \quad (5.26)$$

Die aufgrund des „splat mechanism“ erfolgende Produktion der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuationen geschieht in der Grenzschicht nach den Ausführungen unter *Abschnitt 5.1* in Abwesenheit wahrnehmbarer Dissipation. In Wandnähe versagt jedoch diese These, da dort aufgrund der vorherrschenden Haftbedingung Dissipation zu beobachten ist. Diese wandnahe Dissipation ist durch die expliziten Berechnungsterme  $D_T$  und  $D_L$  in (5.10) und (5.11) berücksichtigt und im betrachteten Modell folgendermaßen gegeben:

$$D_T = 2\nu \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \quad (5.27)$$

$$D_L = 2\nu \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \quad (5.28)$$

Der Effekt des Zusammenbruchs der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuation und der damit einhergehenden Bypass-Transitionsprozess ist in den drei Transportgleichungen durch den Term  $R$  ausgedrückt. Dieser sogenannte Bypass-Transition-Produktionsterm beschreibt die Rate, bei welcher während des Transitionsprozesses laminare kinetische Energie in turbulente kinetische Energie umgewandelt wird. Demzufolge sind die Vorzeichen von  $R$  in (5.10) und (5.11) gegengleich, um keine Nettoproduktion zu fabrizieren. Da der Zusammenbruch der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuationen eine Produktion von Turbulenz hervorruft, ist der Term  $R$  proportional zur laminaren kinetischen Energie  $k_L$  und umgekehrt proportional zur effektiven turbulenten Zeitskala:

$$R = C_R \beta_{BP} \frac{k_L}{\tau_T} \quad (5.29)$$

$$\tau_T = \frac{\lambda_{eff}}{\sqrt{k_T}} \quad (5.30)$$

Die **Einleitung des Bypass-Transitionsprozesses** erfolgt bei diesem Modell mit Hilfe einer Schwellfunktion, welche eine Abhängigkeit des Wandabstandes  $d$  und der Größe der turbulenten kinetischen Energie in der Hauptströmung  $k_T$  aufweist (5.31). Wird die Schwellfunktion  $\beta_{BP}$  durch entsprechend hohe Werte der turbulenten kinetischen Energie überschritten, wird ein Zusammenbrechen der laminaren Fluktuationen bei gleichzeitiger Überführung in turbulente kinetische Energie angenommen - es tritt Bypass-Transition ein.

$$\beta_{BP} = 1 - \exp\left(-\frac{\Phi_{BP}}{A_{BP}}\right) \quad (5.31)$$

$$\phi_{BP} = \text{MAX} \left[ \left( \frac{\sqrt{k_T} d}{\nu} - C_{BP,crit} \right), 0 \right] \quad (5.32)$$

Das von Walters und Leylek vorgeschlagene Modell zeichnet sich zusätzlich durch die Berücksichtigung von **natürlicher Transition** aus. Bei dieser Transitionsart wird die Bildung der sogenannten Tollmien-Schlichting-Wellen beim Umschlag der lami-

naren Grenzschicht zur turbulenten Grenzschicht berücksichtigt, während bei der Bypass-Transition diese Phase übersprungen wird. Um dieses Phänomen zu berücksichtigen, wird die großskalige turbulente Viskosität (5.23) durch eine vom Freistrom unabhängige Instabilitätskomponente erweitert:

$$\nu_{T,l} = f_{\tau,l} C_{11} \left( \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \right) \sqrt{k_{T,l} \lambda_{eff}} + \beta_{TS} C_{12} \phi_{NAT} d^2 \Omega \quad (5.33)$$

Die zusätzliche Komponente setzt sich dabei aus der Tollmien-Schlichting Schwellfunktion

$$\beta_{TS} = 1 - \exp \left( - \frac{MAX(\phi_{NAT} - C_{TS,crit}, 0)^2}{A_{TS}} \right) \quad (5.34)$$

und einem von Wandabstand  $d$ , kinematischer Viskosität  $\nu$  und  $S$  abhängigen Parameter

$$\phi_{NAT} = \frac{d^2 S}{\nu} \quad (5.35)$$

zusammen. Die bei niedrigen Freistromturbulenzgraden auftretende natürliche Transition ist zusätzlich durch einen „Produktionsterm“  $R_{NAT}$  berücksichtigt:

$$R_{NAT} = C_{R,NAT} \beta_{NAT} k_L S \quad (5.36)$$

$$\beta_{NAT} = 1 - \exp \left[ - \frac{MAX(\phi_{NAT}^{0.75} \phi_{MIX}^{0.25} - C_{NAT,crit}, 0)}{A_{NAT}} \right] \quad (5.37)$$

$$\phi_{MIX} = \frac{\sqrt{k_L} d}{\nu} \quad (5.38)$$

Der in Glg. (5.12) verwendete Koeffizient  $C_{\epsilon 1}$  ist durch Glg. (5.39) gegeben und ist für die Senkung der turbulenten Längenskala  $\lambda_T$  in Wandnähe verantwortlich.

$$C_{\epsilon 1} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{4/3} \right] + 1.44 \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{4/3} \quad (5.39)$$

Abschließend ist die Funktion  $C_{\epsilon R}$ , welche eine zu starke Reduktion der turbulenten Längenskala  $\lambda_T$  im Anfangsstadium des Transitionsprozesses vermeiden soll, und die in (5.10) und (5.12) verwendete Diffusität  $\alpha_T$  angeben:

$$C_{\epsilon R} = 0.21 \left( \frac{1.5 \lambda_T}{\lambda_{eff}} - 1 \right) \quad (5.40)$$

$$\alpha_T = f_\nu C_{\mu,std} \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff} \quad (5.41)$$

## Randbedingungen

Eine wichtige Einflussgröße bei der Turbulenzmodellierung stellen die gesetzten Randbedingungen dar. Die Autoren des betrachteten LKE-Turbulenzmodells schlagen am Eintritt konstante Werte für  $k_T$  und  $\epsilon$  vor, die laminare kinetische Energie  $k_L$  soll dort Null sein. An Begrenzungsflächen gilt für alle Transportgrößen die sogenannte Zero-flux Bedingung:

$$\frac{\partial k_T}{\partial \eta} = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial k_L}{\partial \eta} = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = 0 \quad (5.44)$$

Mit  $\eta$  wird die lokale, normal zur Wand stehende Koordinate bezeichnet. Abschließend sind in Tab. 5.1 die Modellkonstanten des transitionsfähigen Turbulenzmodells *Walters/Leylek(2004)* aufgelistet.

Tabelle 5.1: Walters/Leylek(2004) - Modellkonstanten

$A_0 = 4.04$	$C_{\text{NAT,crit}} = 460$	$C_{\tau,s} = 4360$
$A_S = 2.12$	$C_{\text{TS,crit}} = 1000$	$C_{\epsilon,1} = 1.92$
$A_\nu = 5.5$	$C_{\text{R,NAT}} = 4$	$C_\lambda = 2.495$
$A_{\text{BP}} = 8$	$C_{11} = 3.4 \times 10^{-6}$	$C_{\mu,std} = 0.09$
$A_{\text{NAT}} = 120$	$C_{12} = 6 \times 10^{-11}$	$\sigma_k = 1$
$A_{\text{TS}} = 2000$	$C_{\text{R}} = 0.21$	
$C_{\text{BP,crit}} = 35$	$C_{\tau,1} = 4360$	

### 5.3 LKE-Modell Walters/Leylek(2005)

Im Jahre 2005 wurde von Walters und Leylek eine verbesserte Version des unter *Abschnitt 5.2* vorgestellten Transitionsmodells veröffentlicht [5] - im Rahmen dieser Arbeit ab sofort mit *Walters/Leylek(2005)* bezeichnet. Durch leichte Modifikationen und Verwendung der Dissipationsrate  $\omega$  an Stelle der turbulenten Dissipation  $\epsilon$  soll die Prognosefähigkeit des LKE-Modelles verbessert werden. Die bei den Modellen unterschiedlich verwendete Definition der Dissipation ( $\omega$  bzw.  $\epsilon$ ) kann nach (5.4) ineinander überführt werden.

Auch dieses Modell greift auf die im *Abschnitt 5.1* getätigten Überlegungen zurück und teilt die turbulente kinetische Energie bezüglich der Wirbelstrukturen in  $k_{T,s}$  und  $k_{T,l}$ . Die Definition dieser Größen ist ident zu den Formulierungen (5.8) und (5.9) der Vorgängerversion, lediglich der turbulente Längenmaßstab ist durch die abweichende Formulierung der Dissipation durch Glg. (5.3) festgelegt.

$$k_{T,s} = k_T \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{2/3} \quad (5.45)$$

$$k_{T,l} = k_T \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{2/3} \right] \quad (5.46)$$

Die **Transportgleichungen** für  $k_T$ ,  $k_L$  und  $\omega$  sind in inkompressibler Form untenstehend angeschrieben:

$$\frac{Dk_T}{Dt} = P_T + R + R_{NAT} - \omega k_T - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right] \quad (5.47)$$

$$\frac{Dk_L}{Dt} = P_L - R - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right] \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = & P_\omega + C_{\omega R} \frac{\omega}{k_T} (R + R_{NAT}) - C_{\omega 2} \omega^2 + C_{\omega 3} f_\omega \alpha_T \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{4/3} \frac{\sqrt{k_T}}{d^3} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

Vergleicht man den Aufbau der Transportgleichungen mit jenen im Modell *Walters/Leylek(2004)* sind einzig in Glg. (5.49) Unterschiede auszumachen. Die Funktionen der verschiedenen Terme der Transportgleichungen sind ident zum Vorgängermodell und können im vorherigen Abschnitt nachgelesen werden.

Der **Produktionsterm** der **turbulenten kinetischen Energie** bleibt zum Vorgängermodell unverändert und wird mit

$$P_T = \nu_{T,s} S^2 \quad (5.50)$$

angegeben, wobei  $S$  durch Glg. (5.14) festgelegt ist. Die kleinskalige viskose Turbulenz ist mit

$$\nu_{T,s} = \text{MIN} \left( f_\nu f_{INT} C_\mu \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff}, \frac{2.5 \cdot \epsilon_{TOT}}{S^2} \right) \quad (5.51)$$

gegeben und unterscheidet sich damit zum Vorgängermodell unter anderem durch die Limitierung, welche einer zu schnellen Produktionsrate im Falle von Ablöseerscheinungen entgegenwirken soll. Der turbulente Viskositätsfaktor  $C_\mu$ , die in Wandnähe wirkende Dämpfungsfunktion  $f_\nu$  und die effektive Längenskala  $\lambda_{eff}$  sind durch (5.52), (5.17) und (5.1) gegeben.

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \left( \frac{S}{\omega} \right)} \quad (5.52)$$

Die Dämpfungsfunktion  $f_{INT}$  soll die Turbulenzproduktion abschwächen und somit eine Überschätzung in der späteren Phase der Bypass-Transition vermeiden - ein Schwachpunkt des Modelles *Walters/Leylek(2004)*.

$$f_{INT} = \text{MIN} \left( \frac{k_T}{C_{INT} k_{TOT}}, 1 \right) \quad (5.53)$$

Die totale kinetische Energie der Fluktuationen  $k_{TOT}$  und die Totaldissipationsrate  $\epsilon_{TOT}$  sind wie folgt festgelegt:

$$k_{TOT} = k_T + k_L \quad (5.54)$$

$$\epsilon_{TOT} = \epsilon + D_T + D_L \quad (5.55)$$

Der erste Term der rechten Seite von (5.48) entspricht dem **Produktionsterm** der **laminaren kinetischen Energie**, ist analog zu (5.50) aufgebaut und kann unter

Einbeziehung von (5.14) folgendermaßen definiert werden.

$$P_L = \nu_{T,l} S^2 \quad (5.56)$$

Wird ausschließlich Bypass-Transition berücksichtigt, ist die großskalige turbulente Viskosität durch

$$\nu_{T,l} = MIN \left( f_{\tau,l} C_{11} \left( \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \right) \sqrt{k_{T,l}} \lambda_{eff}, \frac{0.5 \cdot k_{T,l}}{S} \right) \quad (5.57)$$

festgelegt. Die Dämpfungsfunktion  $f_{\tau,l}$  unterscheidet sich zum Vorgängermodell nur geringfügig und ist wie folgt vorgegeben:

$$f_{\tau,l} = 1 - exp \left[ -C_{\tau,l} \left( \frac{\tau_m^2}{\tau_{T,l}} \right) \right] \quad (5.58)$$

$$\tau_{T,l} = \frac{\lambda_{eff}}{\sqrt{k_{T,l}}} \quad (5.59)$$

$$\tau_m = \frac{1}{\Omega} \quad (5.60)$$

In Wandnähe ist aufgrund der dort vorherrschenden Haftbedingung gegenüber der restlichen Grenzschicht Dissipation zu beobachten (nähere Ausführungen unter *Abschnitt 5.1*). Diese wandnahe Dissipation ist durch die expliziten Berechnungsterme analog zum Vorgängermodell in (5.47) und (5.48) mit

$$D_T = 2\nu \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \quad (5.61)$$

$$D_L = 2\nu \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \quad (5.62)$$

gegeben. Der in allen drei Transportgleichungen aufscheinende Term  $R$  beschreibt den Effekt des Zusammenbruchs der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuationen und den damit einhergehenden Bypass-Transitionseffekt. Dieser sogenannte Bypass-Transition-Produktionsterm definiert die Rate, mit welcher die laminare kinetische Energie in turbulente kinetische Energie umgewandelt wird.

$$R = C_R \beta_{BP} k_L \omega \left( \frac{\lambda_T}{\lambda_{eff}} \right)^{2/3} \quad (5.63)$$



Die **Einleitung des Bypass-Transitionsprozesses** erfolgt wiederum durch die Schwellfunktion  $\beta_{BP}$ . Wird diese durch entsprechend hohe Werte der turbulenten kinetischen Energie überschritten, brechen die Fluktuationen in Strömungsrichtung zusammen, womit der Bypass-Transitionsprozess gestartet ist. Die den Transitionsprozess kontrollierende Schwellfunktion ist analog zum Vorgängermodell folgendermaßen festgelegt:

$$\beta_{BP} = 1 - \exp\left(-\frac{\Phi_{BP}}{A_{BP}}\right) \quad (5.64)$$

$$\phi_{BP} = \text{MAX} \left[ \left( \frac{\sqrt{k_T}d}{\nu} - C_{BP,crit} \right), 0 \right] \quad (5.65)$$

Neben der Bypass-Transition ist bei diesem Modell die Integration **natürlicher Transition** vorgesehen. Wie bereits im vorherigen Kapitel erwähnt, ist diese Transitionsart durch die Bildung der sogenannten Tollmien-Schlichting-Wellen beim Umschlag von laminarer zu turbulenter Grenzschicht gekennzeichnet, während bei der Bypass-Transition diese Phase übersprungen und somit nicht berücksichtigt wird. Um diesem Phänomen Rechnung zu tragen, wird Glg. (5.57) durch einen additiven Term erweitert:

$$\nu_{T,l} = \text{MIN} \left( f_{\tau,l} C_{11} \left( \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \right) \sqrt{k_{T,l} \lambda_{eff}} + \beta_{TS} C_{12} \phi_{NAT} d^2 \Omega, \frac{0.5 \cdot k_{T,l}}{S} \right) \quad (5.66)$$

Die additive Komponente setzt sich dabei aus der durch Glg. (5.34) angegebenen Tollmien-Schlichting Schwellfunktion  $\beta_{TS}$  und einem von Wandabstand  $d$ , kinematischer Viskosität  $\nu$  und Wirbelstärke  $\Omega$  abhängigen Parameter

$$\phi_{NAT} = \frac{d^2 \Omega}{\nu} \quad (5.67)$$

zusammen. Die natürliche Transition ist zusätzlich durch einen „Produktionsterm“  $R_{NAT}$  berücksichtigt. Gegenüber dem Vorgängermodell schlagen Walters und Leylek bei dieser Version eine Abhängigkeit von  $\Omega$  an Stelle von  $S$  vor:

$$R_{NAT} = C_{R,NAT} \beta_{NAT} k_L \Omega \quad (5.68)$$

Die Funktionen  $\beta_{NAT}$  und  $\phi_{MIX}$  sind analog zum vorherigen Modell durch (5.37) und (5.38) gegeben.

Betrachtet man die Transportgleichung der turbulenten Dissipationsrate  $\omega$ , ist bei

Vergleich mit dem Modell *Walters/Leylek(2004)* die größte Abweichung auszumachen. Der erste, rechts des Gleichheitszeichens stehende Term in Glg. (5.49) ist von den Autoren folgendermaßen angegeben:

$$P_\omega = \left( C_{\omega l} \nu_{T,\omega} S^2 + f_{\Delta P} C_{\Delta P} k_{T,l} \Omega \right) \frac{\omega}{k_T} \quad (5.69)$$

Innerhalb des Klammerausdruckes ist die turbulente Produktion durch den ersten Term beschrieben, wobei die effektive turbulente Viskosität mit

$$\nu_{T,\omega} = f_\nu C_{11} f_{INT} C_\mu \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff} \quad (5.70)$$

bestimmt ist, welche sich von der kleinskaligen viskosen Turbulenz in Glg. (5.51) nur durch die dort verhängte Limitierung unterscheidet. Die un stetige Dämpfungsfunktion im zweiten Term innerhalb des Klammerausdruckes nimmt die Form

$$f_{\Delta P} = \begin{cases} f_{\tau,l} & , \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial d} > 0 \\ 0 & , \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial d} \leq 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

an und ist nur bei einer über dem Wandabstand steigenden Wirbelstärke  $\Omega$  in ihrer dämpfenden Funktion im Eingriff.

Der in Glg. (5.49) verwendete Koeffizient  $C_{\omega R}$  bewirkt eine Reduktion des turbulenten Längenmaßstabes bei Eintritt des Transitionsprozesses und lässt sich mit

$$C_{\omega R} = 1.5 \cdot \left( \frac{\lambda_T}{\lambda_{eff}} \right)^{2/3} - 1 \quad (5.72)$$

anschreiben. Der ebenfalls in (5.49) verwendete Koeffizient  $C_{\omega 2}$  nimmt die funktionelle Form

$$C_{\omega 2} = 0.92 \cdot \left( \frac{\lambda_T}{\lambda_{eff}} \right)^{4/3} \quad (5.73)$$

an. Die Verwendung von  $\omega$  kann zu einem reduzierten Intermittenz-Effekt in den äußeren Regionen der turbulenten Grenzschicht führen. Mit dem vierten Term in Glg. (5.49) wird diesem Effekt entgegengewirkt, wobei die Funktion  $f_\omega$  folgendermaßen definiert wird:

$$f_\omega = 1 - \exp \left[ -0.41 \cdot \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{4/3} \right] \quad (5.74)$$

Schlussendlich kann die in (5.47) und (5.49) verwendete Diffusität  $\alpha_T$  analog zum Vorgängermodell angegeben werden:

$$\alpha_T = f_\nu C_{\mu, std} \sqrt{k_T \lambda_{eff}} \quad (5.75)$$

## Randbedingungen

Die für diese Version von Walters und Leylek vorgeschlagenen Randbedingungen weisen keine Änderungen gegenüber dem Vorgängermodell *Walters/Leylek(2004)* auf und sind somit unter *Abschnitt 5.2* nachzulesen. Abschließend sind in Tab. 5.2 die Modellkonstanten des Transitionsmodells *Walters/Leylek(2005)* aufgelistet.

Tabelle 5.2: Walters/Leylek(2005) - Modellkonstanten

$A_0 = 4.04$	$C_{\text{NAT,crit}} = 440$	$C_{\omega_1} = 0.44$
$A_S = 2.12$	$C_{\text{TS,crit}} = 1000$	$C_{\Delta, P} = 0.15$
$A_\nu = 6.75$	$C_{\text{R,NAT}} = 0.04$	$C_{\omega_3} = 0.3$
$A_{\text{BP}} = 3$	$C_{11} = 3.4 \times 10^{-6}$	$C_\lambda = 2.495$
$A_{\text{NAT}} = 60$	$C_{12} = 1 \times 10^{-9}$	$C_{\mu, std} = 0.09$
$A_{\text{TS}} = 200$	$C_{\text{R}} = 0.08$	$\sigma_k = 1$
$C_{\text{BP,crit}} = 12$	$C_{\tau, 1} = 4360$	$\sigma_\omega = 1.17$

## 5.4 LKE-Modell Walters/Cokljat

Walters veröffentlichte 2008 zusammen mit Cokljat ein weiteres Paper [6], in welchem ein weiterentwickeltes LKE-Modell vorgestellt wird, das seit kurzem auch im weitverbreiteten kommerziellen Softwarepaket ANSYS Fluent eingebettet ist. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Transitionsmodell ab sofort mit *Walters/Cokljat* bezeichnet. Auch bei diesem Modell werden die Transportgrößen neben der turbulenten kinetischen Energie  $k_T$  und der laminaren kinetischen Energie  $k_L$  durch die spezifische Dissipationsrate  $\omega$  gebildet. Es muss an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass im Originalpaper einige mathematische Formulierungen Fehler aufweisen, welche jedoch in referenzierenden Arbeiten (i.a. Fürst [9]) richtiggestellt wurden. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Sachverhalt berücksichtigt und die entsprechenden Formulierungen werden abweichend vom Originalpaper in korrekter Form angegeben.

In Anlehnung an die Überlegungen unter *Abschnitt 5.1* wird die turbulente kinetische Energie in Wandnähe in Bezug auf Größe der Wirbelstruktur in  $k_{T,s}$  und  $k_{T,l}$  aufgeteilt.

$$k_{T,s} = f_{SS} f_W k_T \quad (5.76)$$

$$k_{T,l} = k_T - k_{T,s} \quad (5.77)$$

Die Fähigkeit von Wirbelströmungen, durch die Grenzschicht zu penetrieren, ist aufgrund der Scherwirkung innerhalb der Grenzschicht begrenzt - in der Literatur auch als „**shear sheltering**“ bezeichnet. Mit der Berücksichtigung dieses Effektes bei der Bestimmung von  $k_{T,s}$  bzw.  $k_{T,l}$  erhoffen sich die Autoren eine genauere Vorhersage des Transitionsprozesses. Damit stellt die diesen Effekt beschreibende Dämpfungsfunktion

$$f_{SS} = \exp \left[ - \left( \frac{C_{SS} \nu \Omega}{k_T} \right)^2 \right] \quad (5.78)$$

die größte Veränderung zum Vorgängermodell dar.  $C_{SS}$  präsentiert eine den Wert 1.5 annehmende Konstante, die zur Komplettierung von (5.76) noch fehlende Funktion  $f_W$  ist durch

$$f_W = \left( \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T} \right)^{2/3} \quad (5.79)$$

ausgedrückt, wobei die effektive Längenskala  $\lambda_{eff}$  und die turbulente Längenskala  $\lambda_T$  durch (5.1) und (5.3) festgelegt sind.

Die **Transportgleichungen** für  $k_T$ ,  $k_L$  und  $\omega$  sind in inkompressibler Form für dieses Modell folgendermaßen angegeben:

$$\frac{Dk_T}{Dt} = P_T + R + R_{NAT} - \omega k_T - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right] \quad (5.80)$$

$$\frac{Dk_L}{Dt} = P_L - R - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right] \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = & C_{\omega 1} \frac{\omega}{k_T} P_T + \left( \frac{C_{\omega R}}{f_W} - 1 \right) \frac{\omega}{k_T} (R + R_{NAT}) - C_{\omega 2} \omega^2 + C_{\omega 3} f_\omega \alpha_T f_W^2 \frac{\sqrt{k_T}}{d^3} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\alpha_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Gegenüber den zwei Vorgängermodellen sind lediglich in der Transportgleichung der spezifischen Dissipationsrate (5.82) erhebliche Unterschiede festzustellen. Die Produktion der Dissipation, deren Abbau und die Diffusion ist in dieser Gleichung durch den ersten, dritten und fünften Term der rechten Seite beschrieben. Für den Transitionsvorgang zeichnet sich der zweite, rechts des Gleichheitszeichens stehende Term verantwortlich, der vierte Term soll den Längenmaßstab in den äußeren Regionen der turbulenten Grenzschicht reduzieren.

Die Definition des **Produktionsterms** der **turbulenten kinetischen Energie** bleibt unverändert und wird mit

$$P_T = \nu_{T,s} S^2 \quad (5.83)$$

modelliert. Die Scherrate  $S$  ist durch (5.14) gegeben, die kleinskalige viskose Turbulenz ist durch

$$\nu_{T,s} = f_\nu f_{INT} C_\mu \sqrt{k_{T,s}} \lambda_{eff} \quad (5.84)$$

festgelegt. Somit gehen die Autoren wieder auf den ursprünglichen Ansatz (5.15) zurück, dessen Definition gegenüber dem Nachfolgemodell (5.51) keine Limitierung aufweist. Der turbulente Viskositätsfaktor  $C_\mu$  ist analog zum Vorgängermodell mit Glg. (5.52) festgelegt, die Berücksichtigung der viskosen Wandeffekte geschieht mit Hilfe der viskosen Dämpfungsfunktion  $f_\nu$ , welche in Abhängigkeit der effektiven tur-

bulenten Reynolds-Zahl bestimmt wird.

$$f_\nu = 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{Re_T}}{S_\nu}\right) \quad (5.85)$$

$$Re_T = \frac{f_W^2 k_T}{\nu \omega} \quad (5.86)$$

Der Einfluss der Intermittenz ist analog zum Vorgängermodell durch die Funktion  $f_{INT}$  berücksichtigt, wobei sich die totale kinetische Energie der Fluktuationen  $k_{TOT}$  durch Glg. (5.54) bestimmen lässt.

$$f_{INT} = MIN\left(\frac{k_T}{C_{INT} k_{TOT}}, 1\right) \quad (5.87)$$

Der **Produktionsterm** der **laminaren kinetischen Energie** lässt sich mit

$$P_L = \nu_{T,l} S^2 \quad (5.88)$$

anschreiben. Bei ausschließlicher Betrachtung von Bypass-Transition ist die großskalige turbulente Viskosität durch

$$\nu_{T,l} = MIN\left(f_{\tau,l} C_{11} \left(\frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu}\right) \sqrt{k_{T,l} \lambda_{eff}}, \frac{0.5 \cdot (k_L + k_{T,l})}{S}\right) \quad (5.89)$$

festgelegt, wodurch sich bei Vergleich mit dem Vorgängermodell lediglich die Limitierung verändert hat. Im Gegensatz dazu unterscheidet sich die Dämpfungsfunktion  $f_{\tau,l}$  beträchtlich und wird in diesem Modell durch

$$f_{\tau,l} = 1 - \exp\left[-C_{\tau,l} \frac{k_{T,l}}{\lambda_{eff}^2 \Omega^2}\right] \quad (5.90)$$

beschrieben. Bei den Darlegungen zur Produktion der laminaren kinetischen Energie aufgrund des sogenannten „splat mechanism“ ist in Wandnähe kontrovers zum restlichen Grenzschichtgebiet durch die Haftbedingung an der Wand Dissipation festzustellen (nähere Ausführungen unter *Abschnitt 5.1*). Beschrieben wird dieser Umstand in (5.80) und (5.81) durch zwei Terme, welche folgende Definitionen aufweisen:

$$D_T = \nu \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_T}}{\partial x_j} \quad (5.91)$$

$$D_L = \nu \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k_L}}{\partial x_j} \quad (5.92)$$

Somit unterscheidet sich die Definition von  $D_T$  und  $D_L$  bei dieser Version gegenüber den Vorgängermodellen um den Faktor 2.

Wie bereits in den vorherigen Abschnitten erläutert, ist der Effekt des Zusammenbruches der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuationen und der damit einhergehende Bypass-Transitionseffekt durch den Term  $R$  bestimmt. Dieser sogenannte Bypass-Transition-Produktionsterm definiert die Rate, bei welcher laminare kinetische Energie in turbulente kinetische Energie umgewandelt wird und ist mit

$$R = C_R \beta_{BP} k_L \left( \frac{\omega}{f_W} \right) \quad (5.93)$$

angegeben. Um keine Nettoproduktion zu erzeugen sind die Vorzeichen in (5.80) und (5.81) gegengleich.

Analog zu den früheren Publikationen erfolgt die **Einleitung des Bypass - Transitionsprozesses** durch die in Abhängigkeit der Funktion  $\phi_{BP}$  stehende Schwellfunktion  $\beta_{BP}$ . Nimmt die Funktion  $\phi_{BP}$  einen Wert ungleich Null an, wird der Zusammenbruch der Fluktuationen in Strömungsrichtung angenommen, womit der Bypass-Transitionsprozess eingeleitet ist. Die erwähnten Funktionen zur Transitionseinleitung sind untenstehend angeführt:

$$\beta_{BP} = 1 - \exp \left( - \frac{\Phi_{BP}}{A_{BP}} \right) \quad (5.94)$$

$$\phi_{BP} = \text{MAX} \left[ \left( \frac{\sqrt{k_T}}{\nu \Omega} - C_{BP,crit} \right), 0 \right] \quad (5.95)$$

Im vorliegenden Modell findet auch die **natürliche Transition** Berücksichtigung, welche im Gegensatz zur Bypass-Transition die Bildung der sogenannten Tollmien-Schlichting-Wellen beim Umschlag der Grenzschicht von laminarer zur turbulenter Strömung berücksichtigt. Um diesem Phänomen Rechnung zu tragen, wird Glg. (5.89) durch eine vom Freistrom unabhängige Instabilitätskomponente erweitert:

$$\nu_{T,l} = \text{MIN} \left( f_{\tau,l} C_{11} \left( \frac{\Omega \lambda_{eff}^2}{\nu} \right) \sqrt{k_{T,l}} \lambda_{eff} + \beta_{TS} C_{12} Re_{\Omega} d^2 \Omega, \frac{0.5(k_L + k_{T,l})}{S} \right) \quad (5.96)$$

Die zusätzliche Komponente setzt sich aus der Tollmien-Schlichting Schwellfunktion

$$\beta_{TS} = 1 - \exp\left(-\frac{MAX(Re_{\Omega} - C_{TS,crit}, 0)^2}{A_{TS}}\right) \quad (5.97)$$

und einem von Wandabstand  $d$ , kinematischer Viskosität  $\nu$  und Wirbelstärke  $\Omega$  abhängigen Parameter zusammen:

$$Re_{\Omega} = \frac{d^2\Omega}{\nu} \quad (5.98)$$

Auftretende natürliche Transition ist analog zu den Vorgängermodellen durch einen „Produktionsterm“

$$R_{NAT} = C_{R,NAT}\beta_{NAT}k_L\Omega \quad (5.99)$$

berücksichtigt, der eine Abhängigkeit von folgenden Funktionen aufweist:

$$\beta_{NAT} = 1 - \exp\left(-\frac{\phi_{NAT}}{A_{NAT}}\right) \quad (5.100)$$

$$\phi_{NAT} = MAX\left(Re_{\Omega} - \frac{C_{NAT,crit}}{f_{NAT,crit}}, 0\right) \quad (5.101)$$

$$f_{NAT,crit} = 1 - \exp\left(-C_{NC}\frac{\sqrt{k_L}d}{\nu}\right) \quad (5.102)$$

Der in Glg. (5.82) verwendete Koeffizient  $f_{\omega}$  stellt eine kinematische Dämpfungsfunktion dar und ist folgendermaßen gegeben:

$$f_{\omega} = 1 - \exp\left[-0.41 \cdot \left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda_T}\right)^4\right] \quad (5.103)$$

Schlussendlich kann die in (5.80) und (5.82) verwendete Diffusität  $\alpha_T$  wie folgt angegeben werden:

$$\alpha_T = f_{\nu}C_{\mu,std}\sqrt{k_{T,s}}\lambda_{eff} \quad (5.104)$$



## Randbedingungen

Analog zu den zwei Vorgängermodellen schlagen die Autoren für das betrachtete LKE-Turbulenzmodell am Eintritt konstante Werte für die das Tubulenzmodell beschreibenden Größen  $k_T$ ,  $k_L$  und  $\omega$  vor, jedoch soll bei festen Begrenzungsflächen nur bei der spezifischen Dissipationsrate  $\omega$  die Zero-flux Bedingung gelten,  $k_T$  und  $k_L$  werden an der Wand physikalisch richtig Null gesetzt:

$$k_T = k_L = 0 \quad (5.105)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0 \quad (5.106)$$

Mit  $\eta$  wird die lokale, normal zur Wand stehende Koordinate bezeichnet. Abschließend sind in Tab. 5.3 die Modellkonstanten des Modells aufgelistet.

Tabelle 5.3: Walters/Cokljat - Modellkonstanten

$A_0 = 4.04$	$C_{\text{NAT,crit}} = 1250$	$C_{\omega 1} = 0.44$
$A_S = 2.12$	$C_{\text{TS,crit}} = 1000$	$C_{\omega 2} = 0.92$
$A_\nu = 6.75$	$C_{\text{R,NAT}} = 0.02$	$C_{\omega 3} = 0.3$
$A_{\text{BP}} = 0.6$	$C_{11} = 3.4 \times 10^{-6}$	$C_{\omega \text{R}} = 1.5$
$A_{\text{NAT}} = 200$	$C_{12} = 6 \times 10^{-11}$	$\sigma_k = 1$
$A_{\text{TS}} = 200$	$C_{\text{R}} = 0.12$	$\sigma_\omega = 1.17$
$C_{\text{BP,crit}} = 1.2$	$C_{\tau,1} = 4360$	
$C_{\text{INT}} = 0.75$	$C_{\text{SS}} = 1.5$	

# 6 Validierung der neu implementierten Turbulenzmodelle

## 6.1 Einleitung

Die Feststellung der Prognosefähigkeit der neu in den bestehenden Institutscode Linars implementierten Turbulenzmodelle und die Bewertung der Berechnungsergebnisse hinsichtlich Plausibilität soll in diesem Kapitel anhand verschiedener Testfälle erfolgen. Die Strömung entlang einer ebenen Platte stellt den einfachsten und ersten Testfall dar, gefolgt von einer quasi-dreidimensionalen Strömungsberechnung entlang eines genormten NACA-Profiles. Den Abschluss bildet die dreidimensionale Strömungsberechnung durch einen Hochdruckstator.

## 6.2 Randbedingungen

Um realistische Ergebnisse bei Strömungssimulationen zu erzielen, ist das sinnvolle und realistische Setzen entsprechender Randbedingungen von essenzieller Bedeutung. Als Besonders schwierig erweist sich hierbei die Modellierung der Turbulenz am Eintritt einer betrachteten Strömung. Das in dieser Arbeit untersuchte LKE-Turbulenzmodell fordert zur Modellierung der Turbulenz die Festlegung der turbulenten kinetischen Energie  $k_T$  und der Dissipation  $\epsilon$  bzw.  $\omega$  am Eintritt. Mit Hilfe des **Turbulenzgrads**  $Tu$  und der **turbulenten Längenskala**  $l_s$  können diese Größen aufgrund der im Anschluss angeführten Überlegungen festgelegt werden. Zusätzlich sind die Randbedingungen am Ein- und Austritt folgendermaßen vorgegeben:

Am **Eintritt** in das Rechengebiet ist neben den schon bereits erwähnten Größen zur Modellierung der Turbulenz - Turbulenzgrad  $Tu$  und turbulenter Längenmaßstab  $l_s$  - der Totaldruck  $p_{TOT}$ , die Totaltemperatur  $T_{TOT}$  und der Richtungsvektor der Strömung vorgegeben. Am **Austritt** aus dem Rechengitter wird bei Unterschallströmungen die Austrittsrandbedingung durch den statischen Druck  $p_{stat}$  festgelegt. Durch den resultierenden Druckgradienten zwischen Ein- und Austritt ergibt sich die Geschwindigkeit im Freistrom.

### Turbulenzgrad $Tu$

Der Turbulenzgrad  $Tu$  beschreibt das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeitsschwankungen in Hauptströmungsrichtung zur Geschwindigkeit der Außenströmung  $U_\infty$  und ist für den inkompressiblen Fall folgendermaßen definiert:

$$Tu = \frac{1}{U_\infty} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \quad (6.1)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen dem Turbulenzgrad  $Tu$  und der turbulenten kinetischen Energie

$$k_T = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2} \quad (6.2)$$

können die zwei Größen ineinander überführt werden. Sind die mittleren turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen in allen drei Raumrichtungen von gleicher Größe, spricht man von isotroper Turbulenz:

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} \quad (6.3)$$

Unter Miteinbeziehung dieser Annahme vereinfacht sich Gleichung (6.2) zu

$$k_T = \frac{3}{2} \cdot \overline{u'^2} \quad (6.4)$$

sodass die turbulente kinetische Energie nun folgendermaßen angeschrieben werden kann:

$$k_T = \frac{3}{2} \cdot Tu^2 \cdot U_\infty^2 \quad (6.5)$$

Somit kann mit diesem Zusammenhang die turbulente kinetische Energie  $k_T$  am Eintritt vorgegeben werden.

### Turbulente Längenskala $l_s$

Die turbulente Längenskala  $l_s$  ist eine physikalische Größe, welche die Dimension der energiereichen Turbulenzwirbel in turbulenten Strömungen charakterisiert. In der Simulationssoftware Linars dient die turbulente Längenskala der Festlegung der Dissipation am Eintritt und ist mit

$$l_s = C_\mu^{0.75} \cdot \frac{\sqrt{k_T}}{\omega} \quad (6.6)$$

festgelegt. Vorsicht ist beim Vergleich der Ergebnisse mit anderer Software geboten, da diese mitunter andere Definitionen verwenden. Besonders der auch in dieser Arbeit zur Validierung der Turbulenzmodelle eingesetzte und weitverbreitete kommerzielle Code Fluent sei an dieser Stelle genannt, da in diesem Softwarepaket die turbulente Längenskala mit

$$l_s = C_\mu^{-0.25} \cdot \frac{\sqrt{k_T}}{\omega} \quad (6.7)$$

definiert ist. Die Modellkonstante  $C_\mu$  ist in Linars wie auch in Fluent mit 0.09 angegeben.

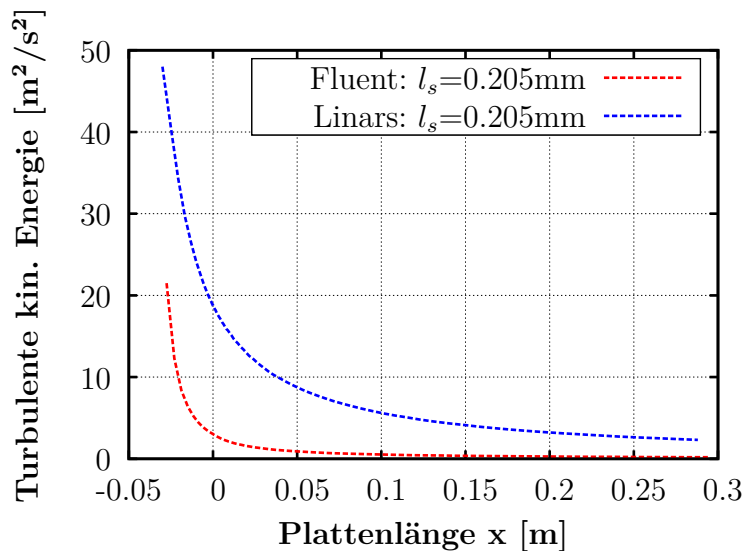


Abbildung 6.1: Abklingverhalten von  $k_T$  - idente turbulente Längenskala

Abb. 6.1 soll den Einfluss einer abweichenden Definition der turbulenten Längenskala  $l_s$  anhand des Abklingverhaltens der Turbulenz entlang einer ebenen Platte verdeutlichen. Im Unterschied zu Fluent liegt die turbulente kinetische Energie von Linars bei Berechnung mit identer turbulenter Längenskala deutlich höher. Damit ist ein

Vergleich dieser zwei Softwarepakete bei Vorgabe derselben turbulenten Längenskala nicht berechtigt.

Da die Definitionen der turbulenten Längenskala für Linars und Fluent bekannt sind, kann durch einen Umrechnungsfaktor (im vorliegenden Fall beträgt dieser Faktor 0.09) eine Umrechnung von einem Code auf den anderen erfolgen. Aus dem daraus resultierenden Schaubild (Abb. 6.2) kann nun übereinstimmendes Abklingverhalten festgestellt werden.

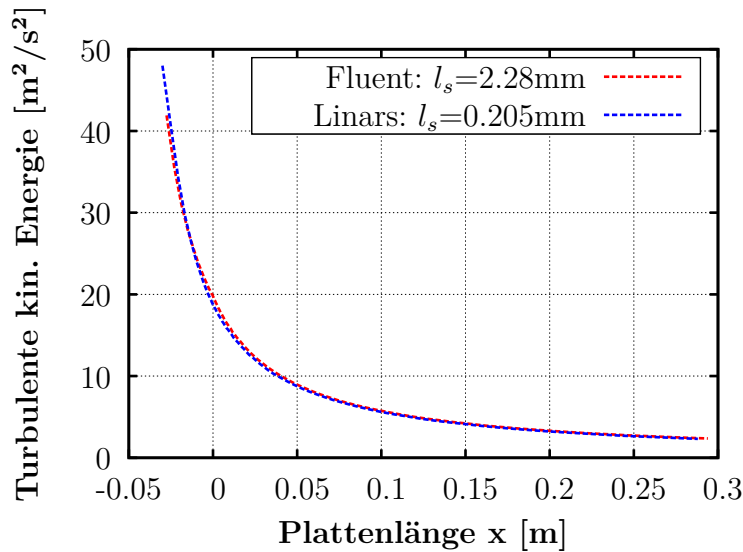


Abbildung 6.2: Abklingverhalten von  $k_T$  - angepasste turbulente Längenskala

### 6.3 Validierung der Turbulenzmodelle

Laut Aufgabenstellung ist das Transitionsverhalten der vorliegenden Turbulenzmodelle zu untersuchen. Daher müssen geeignete Parameter gefunden werden, um den Transitionsvorgang in der Grenzschicht entsprechend zu visualisieren. Als besonders geeigneter Parameter hat sich hierbei die Wandschubspannung  $\tau_w$  herauskristallisiert, da diese im Transitionsgebiet durch eine charakteristische Änderung gekennzeichnet ist. Um Vergleichbarkeit mit anderen Berechnungen herzustellen wird sinnvollerweise der dimensionslose Wandreibungskoeffizient

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2} \quad (6.8)$$

verwendet. Mit  $U_\infty$  wird die Geschwindigkeit der Außenströmung bezeichnet,  $\rho$  steht für die Dichte des Fluids.

Zusätzlich kann das Transitionsverhalten der neuen Turbulenzmodelle anhand von zwei bereits in Linars implementierten transitionsfähigen Turbulenzmodellen verglichen werden. In den nachfolgenden Abschnitten handelt es sich dabei um das Wilcox  $k-\omega$ -Modell und das transitionsfähige SST\_TR-Modell.

## 6.4 Testfall T3A - Strömung entlang einer ebenen Platte

Der erste Testfall stellt jenen einer transitionalen Strömung entlang einer adiabaten ebenen Platte dar. Das für die Simulation mit Linars herangezogene Rechennetz ist in Abb. 6.3 abgebildet.

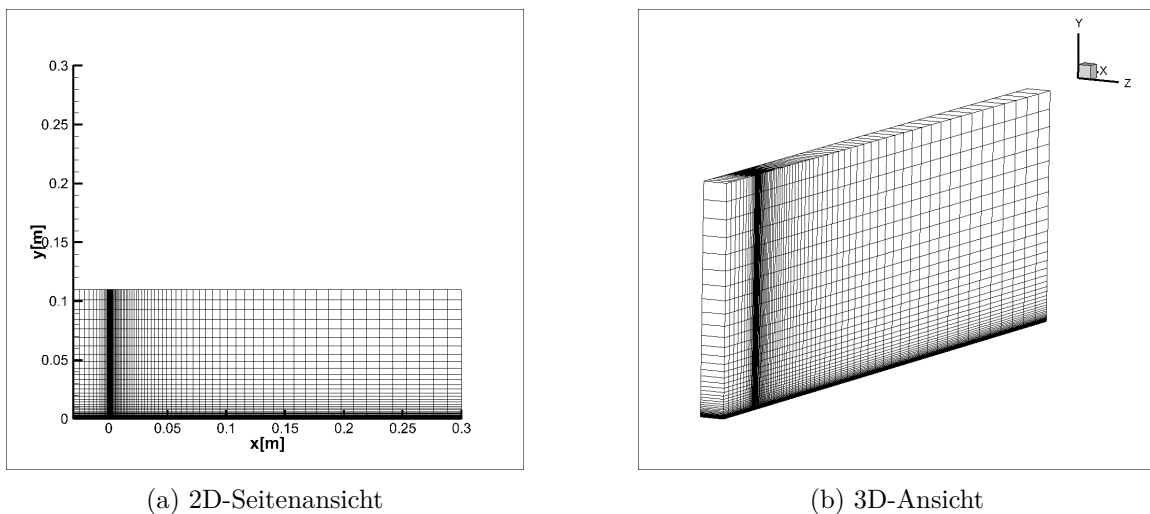


Abbildung 6.3: Testfall T3A - verwendetes Rechennetz

Im Anschluss an den 30 mm langen Eintrittsbereich, welcher die Homogenisierung der Strömung gewährleisten soll, schließt sich die Messplatte mit einer Länge von 300 mm an. Das H-Grid weist 80 Zellen in Strömungsrichtung und 64 Zellen normal dazu auf - die Zellentiefe beträgt ein Zellvolumen, womit eine Quasi-3D-Strömung vorliegt. Da die Transition ein Grenzschichtphänomen darstellt, sind die Berechnungszellen im

Wandbereich verdichtet. Zusätzlich ist der Eintrittsbereich durch eine feinere Gitterstruktur gekennzeichnet, um die Strömung beim Übergang vom Eintrittsbereich zur Plattenvorderkante entsprechend aufzulösen.

Tabelle 6.1: Randbedingungen - Testfall T3A

<b>Eintritt</b>		<b>Austritt</b>	
$p_{TOT}$	$1.016\,334 \times 10^{-5} \text{ Pa}$	$p_{stat}$	$0.953\,000 \times 10^5 \text{ Pa}$
$T_{TOT}$	293.15 K		
$l_S$	0.205 mm		
$k_L$	$0 \text{ m}^2/\text{s}^2$		

Tabelle 6.2: Stoffwerte - Testfall T3A

<b>Stoffwerte</b>	
$\kappa$	1.4
$\nu$	$6.742\,99 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$
R	287 J/(kgK)

Die bei der Berechnung verwendeten Randbedingungen am Ein- und Austritt sind in Tab. 6.1, die verwendeten Stoffwerte unter Annahme idealen Gasverhaltens und Luft als Strömungsmedium in Tab. 6.2 angeführt. Der Turbulenzgrad wurde bei den verschiedensten Untersuchungen variiert und ist in den jeweiligen Auswertediagrammen separat angegeben. Im Anschluss sind abschließend die verschiedenen Punkte aufgelistet, anhand derer die **Validierung der Turbulenzmodelle** erfolgt.

### Vergleich mit experimentell ermittelten Daten

Experimentelle Daten des international standardisierten und gut dokumentierten Testfalles der transitionalen Strömung entlang einer adiabaten Platte sind von der Europäischen Forschungsgesellschaft EROFTAC (**E**uropean **R**esearch **C**ommunity **O**n **F**low **T**urbulence **A**nd **C**ombustion) zu erhalten und werden in den nachfolgenden Betrachtungen zur Validierung der implementierten Turbulenzmodelle herange-

zogen. Um Vergleichbarkeit mit den experimentellen Daten herzustellen, gilt es, die aus der numerischen Berechnung erhaltene Abklingkurve des Freistromturbulenzgrades durch Variation des Turbulenzgrades  $Tu$  bei konstanter turbulenter Längenskala an die Messwerte anzupassen. Die turbulente Längenskala wurde anhand vorliegender Daten ähnlicher - bereits am Institut durchgeführten Versuchen [10] - mit  $l_s = 0.205 \text{ mm}$  festgelegt. Bei identem Verlauf des Turbulenzgrades im Freistrom für Experiment und Berechnung ist Vergleichbarkeit gegeben, womit das Transitionsverhalten in der Grenzschicht der beiden betrachteten Fälle in Relation gesetzt werden kann.

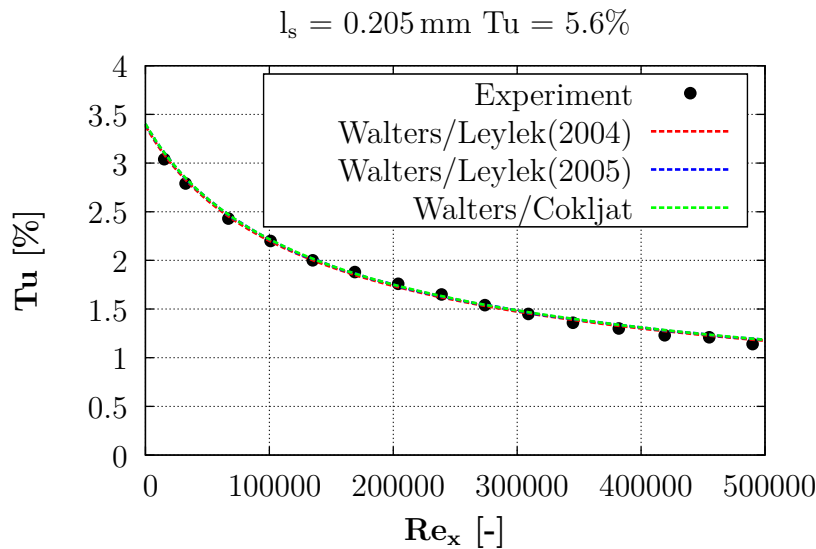


Abbildung 6.4: Testfall T3A - Abklingverhalten des Turbulenzgrades

Bestmögliche Übereinstimmung für alle drei untersuchten LKE-Modelle kann nach Abb. 6.4 bei einem Turbulenzgrad von  $Tu = 5.6\%$  festgestellt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass die Randbedingungen am Eintritt des Berechnungsgitters - also 30 mm vor der Eintrittskante (siehe Abb. 6.3) - gesetzt werden und daher bei einem eingestellten Turbulenzgrad von  $Tu = 5.6\%$  dieser Wert an der Eintrittskante bereits auf  $Tu = 3.3\%$  abgeklungen ist.

Laut den Ausführungen unter *Abschnitt 6.3* ist die Visualisierung des Transitionsverhaltens mit dem dimensionslosen Wandreibungskoeffizienten  $c_f$  besonders aussagekräftig. In den Auswertediagrammen ist dieser Wert über der lokalen Reynolds-Zahl

$$Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu} \quad (6.9)$$

aufgetragen. Die Variable  $x$  steht für die aktuelle Position in Strömungsrichtung,



mit  $U_\infty$  wird die Geschwindigkeit der Außenströmung und mit  $\nu$  die dynamische Viskosität bezeichnet. Bei den von der EROFTAC verfügbaren experimentellen Daten ist die Reynolds-Zahl bezogen auf die Plattenlänge mit  $\mathbf{Re}_L=527300$  angegeben, was bei den vorliegenden Berechnungen durch das Setzen der dynamischen Viskosität bei festgelegtem Druckverhältnis zwischen Ein- und Austritt erreicht wurde.

### Variation der turbulenten Längenskala

Durch Variation der turbulenten Längenskala kann das richtige physikalische Verhalten eines Transitionsmodells überprüft werden. Da die Dissipation laut Glg. (6.6) im Nenner zu finden ist, bedeutet ein Ansteigen ebendieser bei konstanter turbulenter kinetischer Energie (diese wird nach den Ausführungen in *Abschnitt 6.2* am Eintritt durch den Turbulenzgrad  $Tu$  festgelegt) eine Abnahme der turbulenten Längenskala. Größere Dissipation bedeutet aber auch, dass mehr turbulente kinetische Energie durch viskose Reibung in innere Energie umgewandelt wird und sich daher das Transitionsgebiet aufgrund der niedrigeren turbulenten kinetischen Energie in Richtung Plattenhinterkante verschiebt. Fassen wir also kurz zusammen: Damit ein Turbulenzmodell die Grenzschicht physikalisch richtig abbildet, müssen **kleinere turbulente Längenskalen** zu einem **späteren Einsetzen der Transition** führen.

Bei der Auswertung wird die ursprüngliche turbulente Längenskala jeweils mit dem Faktor 0.1 bzw. 10 multipliziert. Zur Visualisierung ist der Wandreibungskoeffizient  $c_f$  über der dimensionslosen Plattenlänge  $x/l$  aufgetragen. Die kinematische Viskosität ist bei diesem Vergleich nicht konstant gesetzt, sondern nach dem Gesetz von Sutherland berechnet, welches die Temperaturabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt.

### Vergleich mit laminarer und turbulenter Ähnlichkeitslösung

Für den einfachen Fall einer Plattenströmung sind in der Literatur Ähnlichkeitslösungen für die laminare und die voll turbulente Strömung verfügbar. Die nach **Blasius** bestimmte laminare Ähnlichkeitslösung des dimensionslosen Wandreibungskoeffizienten entlang einer parallel angeströmten ebenen Platte lässt sich mit

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.10)$$

anschreiben, während die turbulente Ähnlichkeitslösung von **Schlichting** empirisch mit

$$c_f = \frac{0.445}{(\ln(0.06 \cdot Re_x))^2} \quad (6.11)$$

ermittelt wurde. Mit den bekannten Verläufen des Wandreibungskoeffizienten über der örtlichen Reynolds-Zahl kann eine quantitative Einschätzung der erhaltenen Ergebnisse getroffen werden.

### 6.4.1 LKE Turbulenzmodell - Walters/Leylek(2004)

Anhand von Abb. 6.5 lassen sich bei dem im Jahre 2004 von Walters und Leylek publizierten LKE-Modell die Verläufe der berechneten Wandreibungskoeffizienten  $c_f$  über der Lauflängen-Reynolds-Zahl  $Re_x$  bei unterschiedlichen Turbulenzgraden  $Tu$  unterscheiden. Die Ähnlichkeitslösungen der laminaren Strömung nach Blasius und der voll turbulenten Strömung nach Schlichting sind im Diagramm in grauer Farbe gehalten.

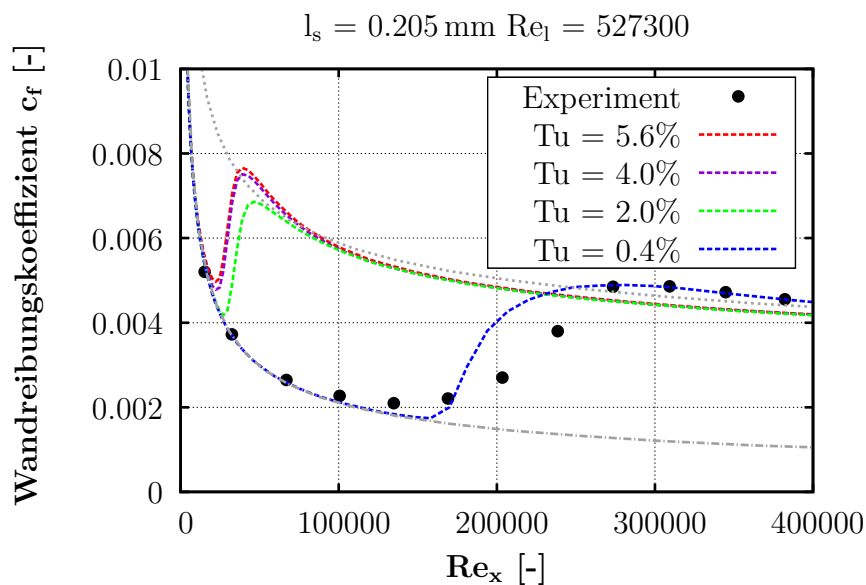


Abbildung 6.5: Walters/Leylek(2004) - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden

Tendenziell lässt sich beim Vergleich mit den experimentellen Daten ein zu frühes Einsetzen der Transition - kurz nach der Eintrittskante - beobachten. Lediglich die

Berechnung mit  $Tu = 0.4\%$  liefert ein annähernd dem Experiment entsprechendes Ergebnis. Berücksichtigt man jedoch für diesen Fall den in Abb. 6.6 getätigten Vergleich des Freistromturbulenzgrads mit dem Experiment, relativiert sich das gute Ergebnis der Kurve bei  $Tu = 0.4\%$ . Um dem Experiment vollkommen zu entsprechen, müsste die Berechnung mit  $Tu = 5.6\%$  mit den vom Experiment vorgegebenen Wandschubspannungen übereinstimmen. Diese Forderung wird jedoch nicht eingehalten, da der Verlauf massiv von den aus der Messung ermittelten Werten abweicht.

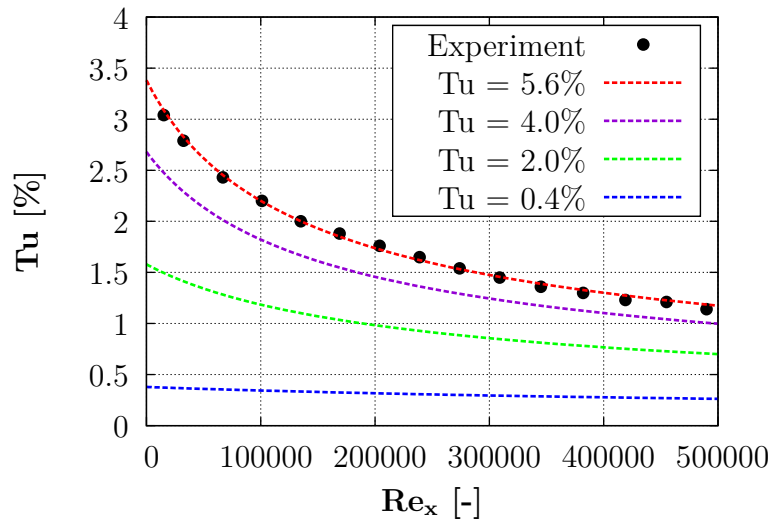


Abbildung 6.6: Walters/Leylek(2004) - Abklingverhalten von  $Tu$

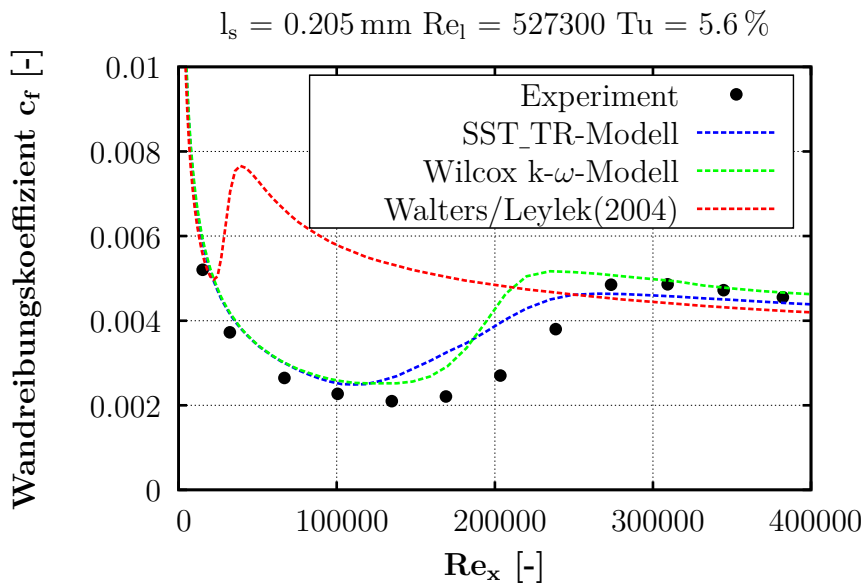


Abbildung 6.7: Walters/Leylek(2004) - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Turbulenzmodellen

Auch der Vergleich mit bereits in Linars implementierten, transitionsfähigen Turbulenzmodellen in Abb. 6.7 unterstreicht die vorherig getätigte Schlussfolgerung. Bei Vergleich für  $Tu = 5.6\%$  liegt das Transitionsgebiet des betrachteten Turbulenzmodells zu nahe an der Plattenvorderkante, während die anderen zwei Turbulenzmodelle das Transitionsgebiet beträchtlich später vorhersagen und damit dem Experiment deutlich näher kommen.

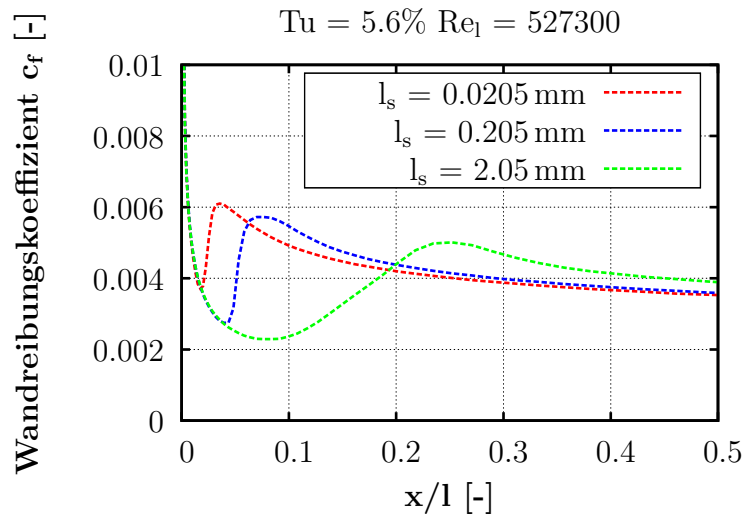


Abbildung 6.8: Walters/Leylek(2004) Tu = 5.6% - Variation von  $l_s$

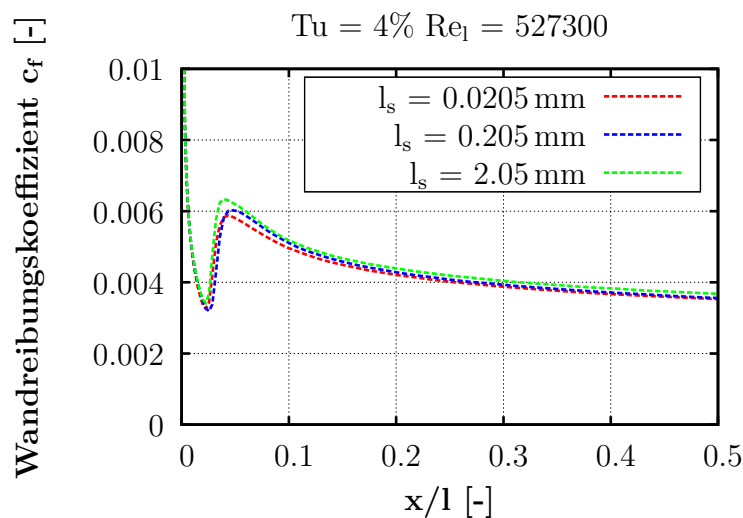


Abbildung 6.9: Walters/Leylek(2004) Tu = 4% - Variation von  $l_s$

Bei den Untersuchungen wurde unphysikalisches Verhalten bei Variation der am Eintritt vorgegebenen turbulenten Längenskala entdeckt. Laut Physik müssten nach den

Ausführungen unter *Abschnitt 6.4* eine kleinere turbulente Längenskala mit einem weiter stromabwärts liegenden Transitionsgebiet einhergehen, bei größeren turbulenten Längenskalen sollte umgekehrtes Verhalten vorliegen. Überraschenderweise verhält sich das vorliegende Modell genau entgegengesetzt. Das Transitionsgebiet wird also bei größeren turbulenten Längenskalen stromabwärts geschoben. Diese Tendenz ist vor allem bei der Berechnung mit  $Tu = 5.6\%$  zu beobachten (Abb. 6.8) während bei der Berechnung mit  $Tu = 4\%$  (Abb. 6.9) keine wesentlichen Änderungen feststellbar sind.

### 6.4.2 LKE Turbulenzmodell - Walters/Leylek(2005)

Auch für das von Walters und Leylek publizierte Nachfolgemodell lässt sich die Tendenz eines zu frühen Transitionsbeginns durch die Verläufe der berechneten Wandreibungskoeffizienten  $c_f$  über der Lauflängen-Reynolds-Zahl  $Re_x$  bei unterschiedlichen Turbulenzgraden  $Tu$  aus Abb. 6.10 ableiten. Die Ähnlichkeitslösungen der laminaren Strömung nach Blasius und der voll turbulenten Strömung nach Schlichting sind analog zur vorherigen Auswertung in grauer Farbe gehalten.

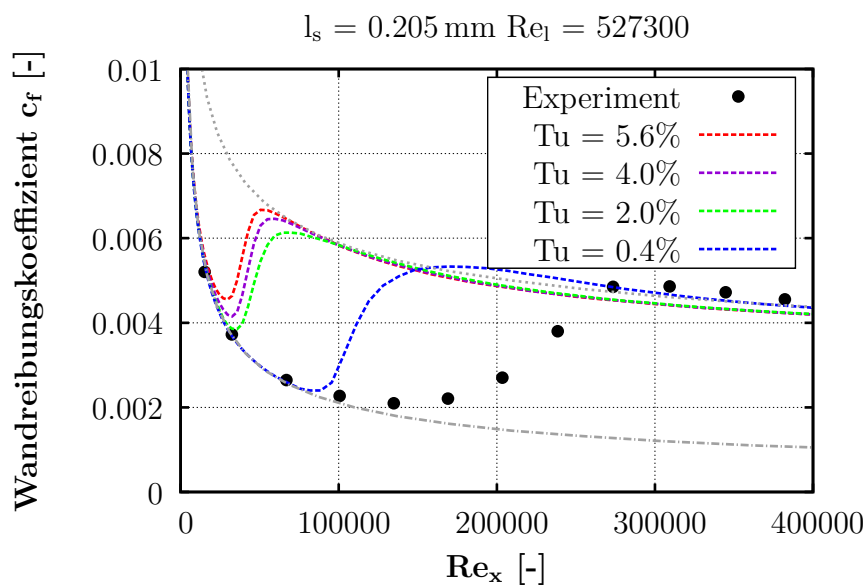


Abbildung 6.10: Walters/Leylek(2005) - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden

Der Transitionsvorgang wird bei höheren Turbulenzgraden schon bei der örtlichen Reynolds-Zahl von etwa  $Re_x = 40000$  eingeleitet, jedoch wirkt sich der Einfluss des Turbulenzgrades im Gegensatz zum Vorgängermodell nicht so gravierend aus. Bei einem Turbulenzgrad von  $Tu = 0.4\%$  ist das Transitionsgebiet erst bei einer Reynolds-Zahl von  $Re_x = 100000$  angesiedelt. Zusätzlich fällt beim Vergleich mit den experimentellen Datenpunkten, neben des deutlich in Richtung der Plattenvorderkante verschobenen Transitionsbereichs, auch das zu kurze Transitionsgebiet auf. Neben der qualitativ dürftigen Vorhersage der Transition wird jedoch die quantitative Größe des Wandreibungskoeffizienten im Bereich der voll turbulenten Strömung wie auch im vorigen Modell sehr gut prognostiziert.

Der Vergleich mit den bereits implementierten Turbulenzmodellen (Abb. 6.11) verdeutlicht das bereits bei niedrigen örtlichen Reynolds-Zahlen auftretende Transitionsgebiet und unterstreicht damit das Versagen des Modells hinsichtlich Bestimmung des Transitionszeitpunkts für diesen Testfall.

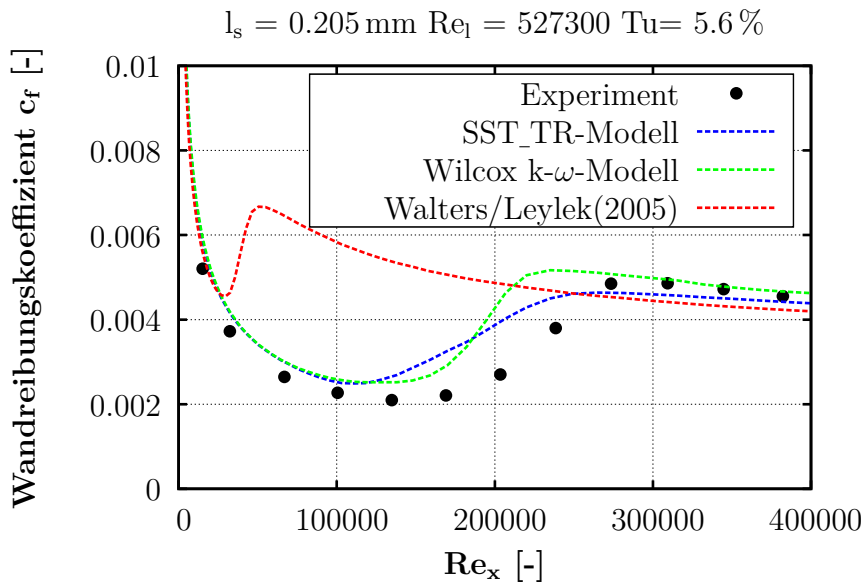


Abbildung 6.11: Walters/Leylek(2005) - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Turbulenzmodellen

Bei Variation der turbulenten Längenskala am Eintritt kann aus Abb. 6.12 richtiges physikalische Verhalten (laut Ausführungen unter *Abschnitt 6.4*) bei zunehmender turbulenter Längenskala entnommen werden. Das Transitionsgebiet wird in diesem Fall in Richtung Vorderkante verschoben. Erstaunlicherweise ist dieselbe Tendenz - dazu noch in wesentlich ausgeprägterer Form - auch bei Abnahme der turbulenten

Längenskala am Eintritt zu beobachten.

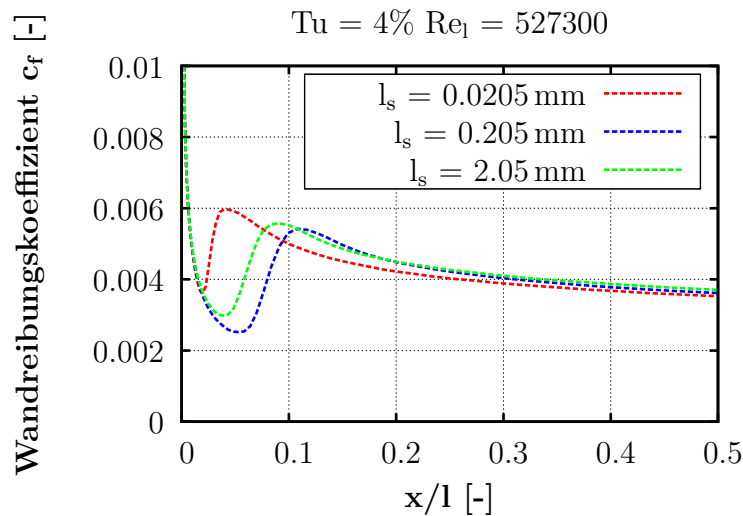


Abbildung 6.12: Walters/Leylek(2005)  $Tu = 4\%$  - Variation von  $l_s$

### 6.4.3 LKE Turbulenzmodell - Walters/Cokljat

Das aktuellste, auch in Fluent implementierte Turbulenzmodell nach Walters und Cokljat prognostiziert den Verlauf des Wandreibungskoeffizienten nach Abb. 6.13 sehr gut. Besonders bei  $Tu = 4\%$  wird im Vergleich mit dem Experiment sowohl Lage als auch Länge des Transitionsgebiets beinahe perfekt vorhergesagt, jedoch führen diese Randbedingungen nach Abb. 6.14 zu einem leicht tieferen Verlauf des Turbulenzgrades entlang der ebenen Platte.

Bemerkenswert ist bei diesem Modell der starke Einfluss des Turbulenzgrades auf das Transitionsgebiet. Zeigen die zwei bisher betrachteten Modelle relativ geringe Abhängigkeiten vom Turbulenzgrad, ist dieser beim Modell von Walters und Cokljat doch beträchtlich. Bei  $Tu = 2\%$  ist der Transitionsbeginn beinahe schon an der Plattenhinterkante, bei  $Tu = 0.4\%$  ist der Verlauf mit der laminaren Lösung nach Blasius ident, womit es zu keinem Umschlag kommt. Diese Tatsache ist jedoch nicht verwunderlich, da bei derart niedrigen Turbulenzgraden die turbulente kinetische Energie (also Turbulenz) nach Glg. (6.5) am Eintritt einen sehr geringen Wert annimmt und die Grenzschichtströmung somit laminar verbleibt. Die quantitative Größe des Wandreibungskoeffizienten wird in der turbulenten Grenzschicht für alle betrachteten Fälle sehr gut vorhergesagt.

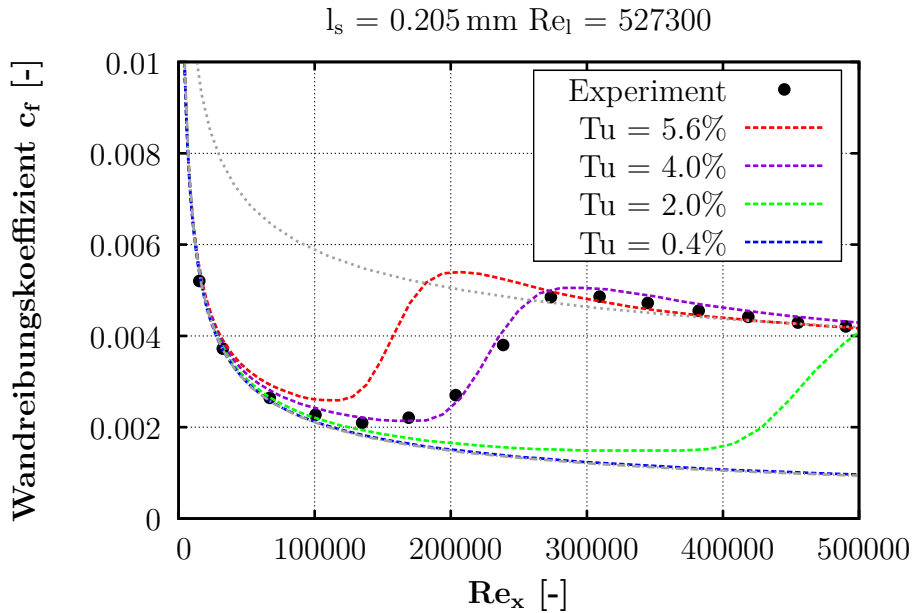


Abbildung 6.13: Walters/Cokljat - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden

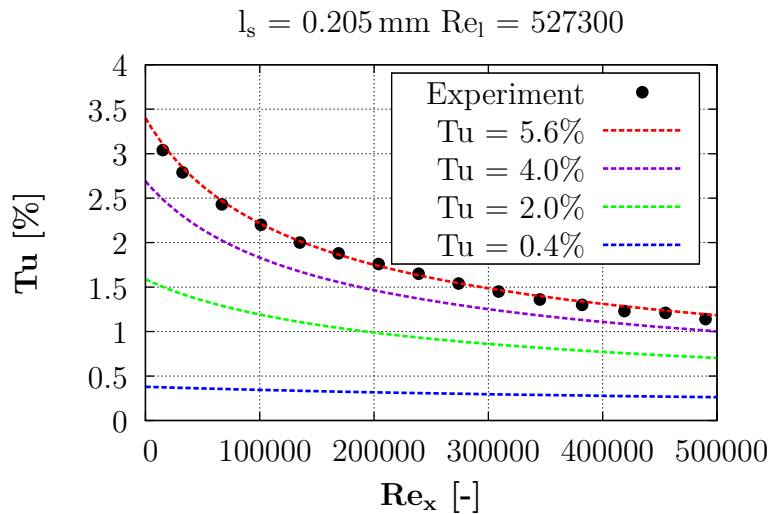


Abbildung 6.14: Walters/Cokljat - Abklingverhalten des Turbulenzgrades

Im Vergleich mit den bereits implementierten Turbulenzmodellen in Abb. 6.15 tritt die Transition für das Modell *Walters/Cokljat* minimal früher bezogen auf die Plattenvorderkante auf. Gegenüber den Daten aus dem Experiment ist diese Tendenz jedoch für alle drei Modelle zu beobachten, wobei das Wilcox-Modell am Besten abschneidet. Die Länge des Transitionsgebiets wird vom Modell *Walters/Cokljat* jedoch im Vergleich mit dem Experiment sehr gut prognostiziert, während das SST\_TR-Modell



hier ein deutliches und sehr in die Länge gezogenes Transitionsgebiet aufweist.

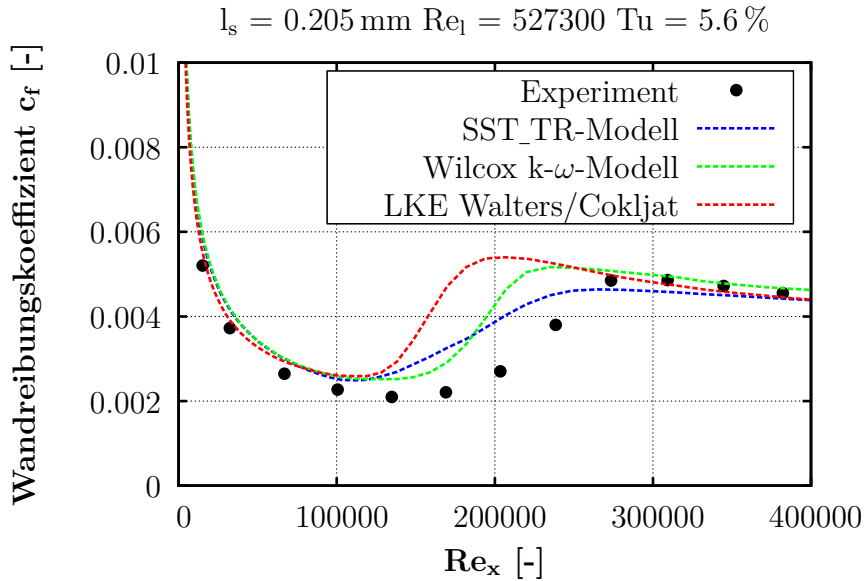


Abbildung 6.15: Walters/Cokljat - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Turbulenzmodellen

Die zwei bisher getesteten Turbulenzmodelle zeigen bei Variation der am Eintritt vorgegebenen turbulenten Längenskala  $l_s$  unphysikalisches Verhalten, indem sich das Transitionsgebiet bei Abnahme der turbulenten Längenskala in Richtung Plattenvorderkante verschiebt. Dies ist für das Modell *Walters/Cokljat* nicht der Fall, denn Abb. 6.16 und Abb. 6.17 zeigen unter Berücksichtigung der unter *Abschnitt 6.4* erarbeiteten Ausführungen physikalisch richtiges Verhalten.

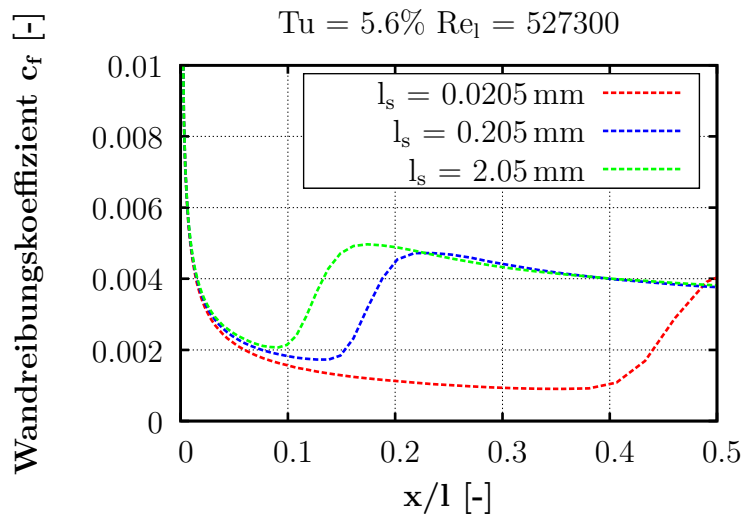


Abbildung 6.16: Walters/Cokljat Tu = 5.6% - Variation von  $l_s$

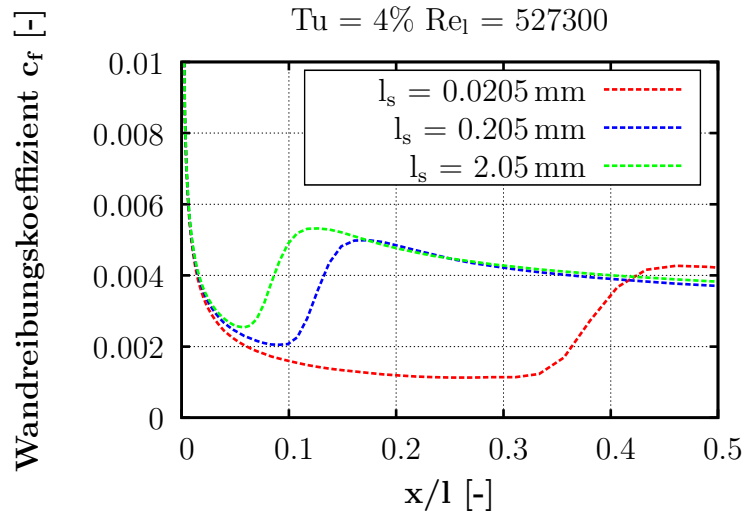


Abbildung 6.17: Walters/Cokljat Tu= 4% - Variation von  $l_s$

### Vergleich mit Fluent

Das LKE-Modell von Walters und Cokljat ist laut Fluent User Guide auch im kommerziellen Softwarepaket Fluent implementiert. Daher ist ein Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den Resultaten aus Fluent sinnvoll. Um die unterschiedliche Definition der turbulenten Längenskala zu berücksichtigen, erfolgt eine Umrechnung (nähere Details dazu unter *Abschnitt 6.2*), um Vergleichbarkeit herzustellen.

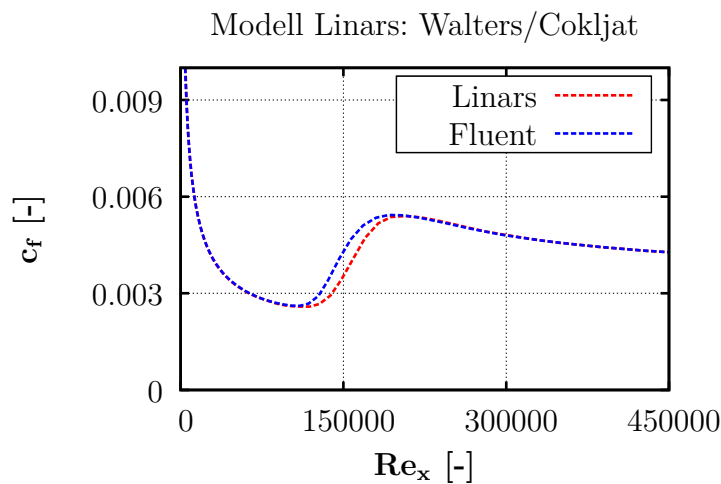
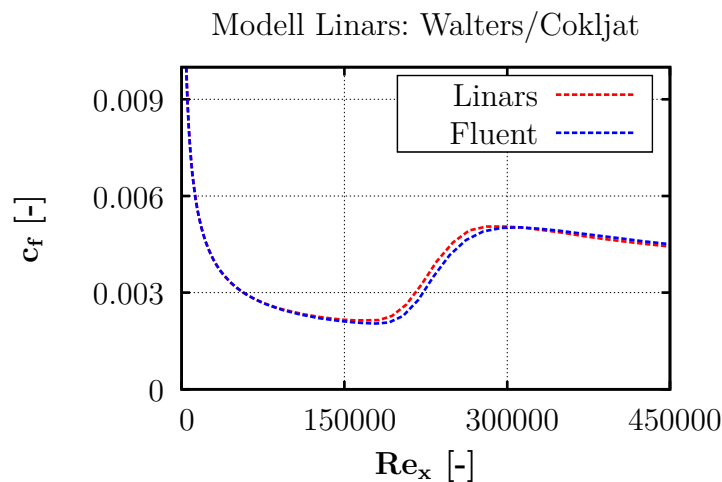
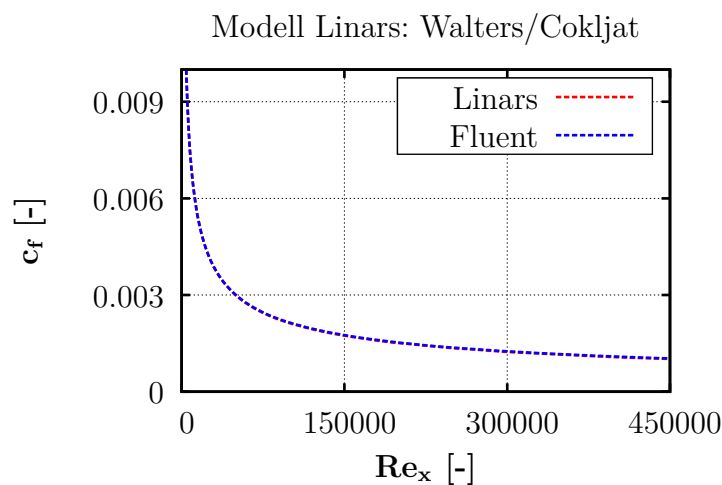


Abbildung 6.18: Testfall T3A - Vergleich mit Fluent Tu = 5.6%

An der ebenen Platte ist annähernd identes Verhalten festzustellen, einzig bei Betrachtung des Transitionszeitpunktes ist eine minimale Abweichung bei  $Tu = 5.6\%$  (Abb. 6.18) und bei  $Tu = 4\%$  (Abb. 6.19) festzustellen. Möglicherweise arbeitet Fluent mit einem leicht modifizierten - vom User Guide abweichenden - Modell, wahrscheinlicher ist jedoch, dass sich die Implementierung gegenüber Linars unterscheidet. Die Ähnlichkeiten sind jedoch nicht zu übersehen. Insbesondere in der laminaren und der anschließenden turbulenten Grenzschicht decken sich die Verläufe der Wandreibungskoeffizienten. Beim sehr niedrig angesetzten Turbulenzgrad von  $Tu = 0.4\%$  (Abb. 6.20) nehmen beide Programme die laminare Ähnlichkeitslösung nach Balasius an.

Abbildung 6.19: Testfall T3A - Vergleich mit Fluent  $Tu = 4\%$ Abbildung 6.20: Testfall T3A - Vergleich mit Fluent  $Tu = 0.4\%$

#### 6.4.4 Testfall T3A - Zusammenfassende Bewertung

Nach dem ersten Testfall lassen sich erste Rückschlüsse auf die Vorsagegüte der Modelle ziehen. Alle drei Modelle beherrschen die quantitative Vorhersage der Wand Schubspannung in der turbulenten Grenzschicht sehr gut, während bei der Prognostizierung des Transitionszeitpunkts deutliche Unterschiede vorherrschen. Die zwei älteren Modelle von Walters und Leylek zeigen Schwächen bei der Auffindung des Transitionsgebiets - das Transitionsgebiet liegt deutlich zu nahe an der Plattenvorderkante. Das derzeit aktuelle LKE-Modell von Walters und Cokljat liefert hier sehr gute Resultate. Unterstrichen wird diese Tatsache beim Vergleich mit dem SST\_TR- und Wilcox  $k-\omega$ -Turbulenzmodell.

Das Verhalten bei Variation der turbulenten Längenskala ist bei den Modellen von Walters und Leylek überraschenderweise physikalisch nicht nachzuvollziehen. Sollten kleinere turbulente Längenskalen zu einem späteren Einsetzen der Transition führen, verhalten sich diese Modelle genau gegensätzlich. Das unsystematische Verhalten und die unphysikalische Verschiebung des Transitionsgebietes bei unterschiedlichen turbulenten Längenskalen erschwert die Einstellung der Randbedingungen bei diesen zwei Modellen zusätzlich. Deutlich besser schneidet hier das Modell *Walters/Cokljat* ab. Richtigerweise wird bei diesem Modell bei Abnahme der turbulenten Längenskala das Transitionsgebiet in Richtung Plattenhinterkante verschoben bzw. umgekehrt. Damit ist die Physik bei diesem Modell richtig abgebildet.

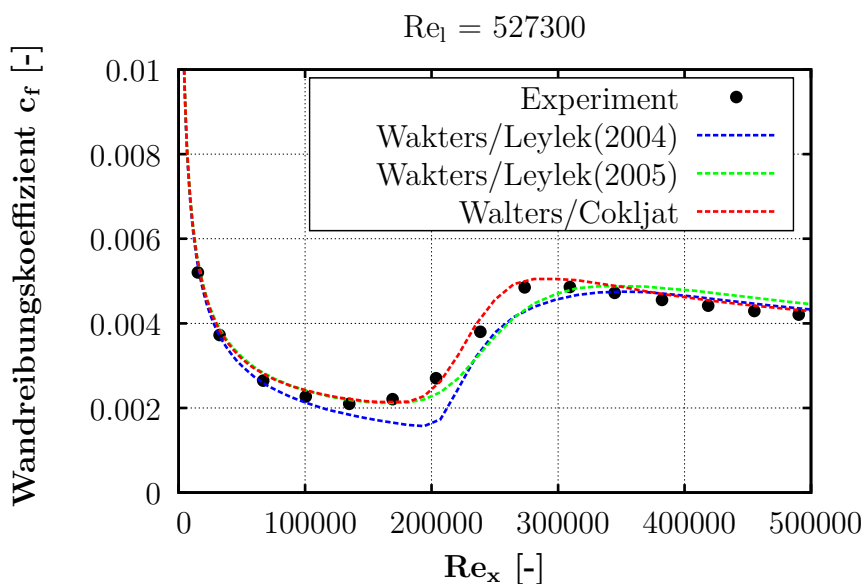


Abbildung 6.21: Testfall T3A - Angepasste Randbedingungen

Das Modell *Walters/Cokljat* hat sich bei diesem Testfall als das eindeutig Beste herauskristallisiert. Sowohl Transitionszeitpunkt, Länge des Transitionsgebietes, Verhalten bei Änderung der Randbedingungen und die Werte der Wandschubspannung in der turbulenten Grenzschicht werden durch dieses Modell sehr gut prognostiziert. Bei Vergleich mit Fluent kann die Ähnlichkeit nicht übersehen werden. Insbesondere in der laminaren und turbulenten Grenzschicht decken sich die beiden Verläufe. Möglicherweise arbeitet Fluent mit einer anderen Implementierung, wodurch dieses Verhalten erklärt werden kann.

Tabelle 6.3: Testfall T3A - modifizierte Randbedingungen

	<b>Walters/Leylek(2004)</b>	<b>Walters/Leylek(2005)</b>	<b>Walters/Cokljat</b>
Tu	0.4 %	4 %	4 %
$l_s$	1.9 mm	1.5 mm	0.205 mm

In der abschließenden Abbildung 6.21 sind die Randbedingungen laut Tab. 6.3 dahingehend modifiziert, bestmögliche Übereinstimmung mit dem Experiment beim Verlauf des Wandreibungskoeffizienten über der örtlichen Reynolds-Zahl zu erlangen.

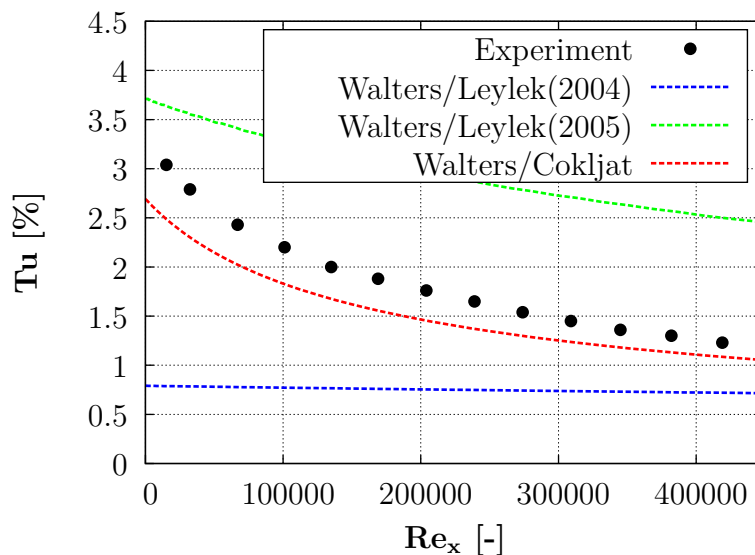


Abbildung 6.22: Testfall T3A - Abklingverhalten bei modifizierten Randbedingungen

Auch hier zeigt sich die Überlegenheit des Modelles *Walters/Cokljat*. Nur durch massive Änderungen der Randbedingungen ist eine Annäherung an die experimentellen

Daten für die zwei älteren LKE-Modelle zu erreichen, während es beim aktuellsten Modell lediglich einer geringen Senkung des Turbulenzgrades bedarf. Die Auswirkungen dieser drastischen Änderungen sind im Abklingverhalten des Turbulenzgrades in Abb. 6.22 dargestellt. Während das Modell *Walters/Cokljat* annähernd der gemessenen Abklingkurve entspricht, weichen die Verläufe der zwei anderen Modelle von dieser deutlich ab.

## 6.5 Testfall NACA0012 - Strömung über ein Tragflächenprofil in Kaskadenanordnung

Bei diesem Testfall wird zur Bewertung der neu implementierten Turbulenzmodelle ein genormtes NACA0012-Profil in Kaskadenanordnung herangezogen. Die NACA (National Advisory Committee for Aeronautics - heute NASA) wurde Anfang des 20. Jahrhunderts in den USA gegründet, um den damals vorherrschenden Rückstand der USA in der Luftfahrttechnologie gegenüber Europa wettzumachen. Im Rahmen dieses Projekts wurden die durch Parametervariation eines Ursprungsprofils erhaltenen Profilformen systematisch untersucht. Eine Profilform stellt dabei das NACA0012-Profil dar, anhand welchem die Systematik der Profilbezeichnung veranschaulicht werden kann. Die ersten zwei Ziffern repräsentieren die Profilwölbung (im betrachteten Fall ist also keine Profilwölbung vorhanden), die letzten zwei Ziffern stehen für das Verhältnis von Profildicke zur Länge der Profilschneide.

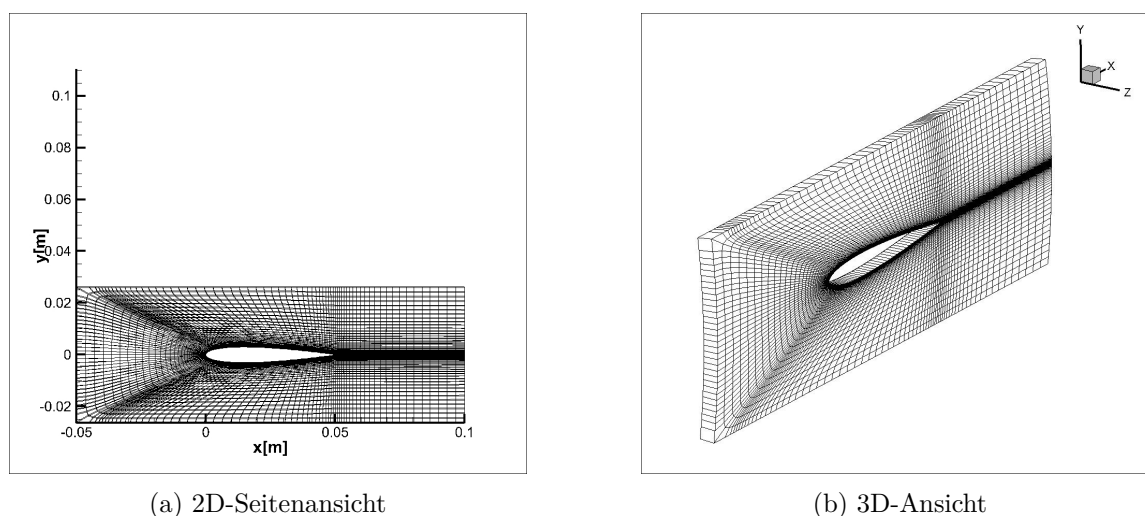


Abbildung 6.23: Testfall NACA0012 - verwendetes Berechnungsgitter

Das bei der Berechnung verwendete Berechnungsgitter (Abb. 6.23) zählt entlang der Profilober- und Profilunterseite jeweils 60 Zellen, wobei eine Verdichtung hin zur Profilverdichtungsseite den dort entstehenden Staupunkt entsprechend auflösen soll. Durch Vorgabe von einem Zellenvolumen normal zur Strömungsrichtung liegt auch bei diesem Testfall analog zum T3A-Testfall eine Quasi-3D-Strömung vor. Um Grenzschichtphänomene zufriedenstellend auflösen zu können, ist der wandnahe Bereich durch eine feinere Gitterstruktur gekennzeichnet. Die Untersuchungen am NACA-Profil erfolgen anhand unterschiedlicher Turbulenzgrade und Anströmwinkel. Zunächst werden die erhaltenen Berechnungsergebnisse bei einem Anströmwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  und den Turbulenzgraden  $Tu = 5.6\%$  und  $Tu = 7\%$  ausgewertet. Zum Abschluss wird die Fähigkeit der Transitionsprognose bei einem Anströmwinkel  $\alpha = 12^\circ$  und einem Turbulenzgrad von  $Tu = 7\%$  ermittelt. Zur Bewertung der Modelle ist in den Auswertediagrammen der Wandreibungskoeffizient  $c_f$  über der dimensionslosen Sehnenlänge  $x/l$  aufgetragen.

Tabelle 6.4: Randbedingungen - Testfall NACA0012

<b>Eintritt</b>		<b>Austritt</b>	
$p_{TOT}$	$1.221 \times 10^5 \text{ Pa}$	$p_{stat}$	$0.953 \times 10^5 \text{ Pa}$
$T_{TOT}$	300 K		
$l_s$	0.5 mm		
$k_L$	$0 \text{ m}^2/\text{s}^2$		

Tabelle 6.5: Stoffwerte - Testfall NACA0012

<b>Stoffwerte</b>	
$\kappa$	1.4
R	287 J/(kgK)

Im vorherigen Testfall der ebenen Platte ist die kinematische Viskosität  $\nu$  konstant gesetzt, um die Reynolds-Zahl dem Experiment anzugleichen. Bei der NACA0012-Kaskade wird die Viskosität mit dem Gesetz nach Sutherland, welches die Temperaturabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt, ermittelt. Auf Basis am Institut

durchgeführter Arbeiten wurde die turbulente Längenskala mit  $l_s = 0.5 \text{ mm}$  vorgegeben. Die Randbedingungen für diesen Testfall sind in Tab. 6.4, die verwendeten Stoffwerte in Tab. 6.5 zusammengefasst.

**Bewertung für einen Anströmwinkel von  $0^\circ$  -  $Tu = 5.6\%$**

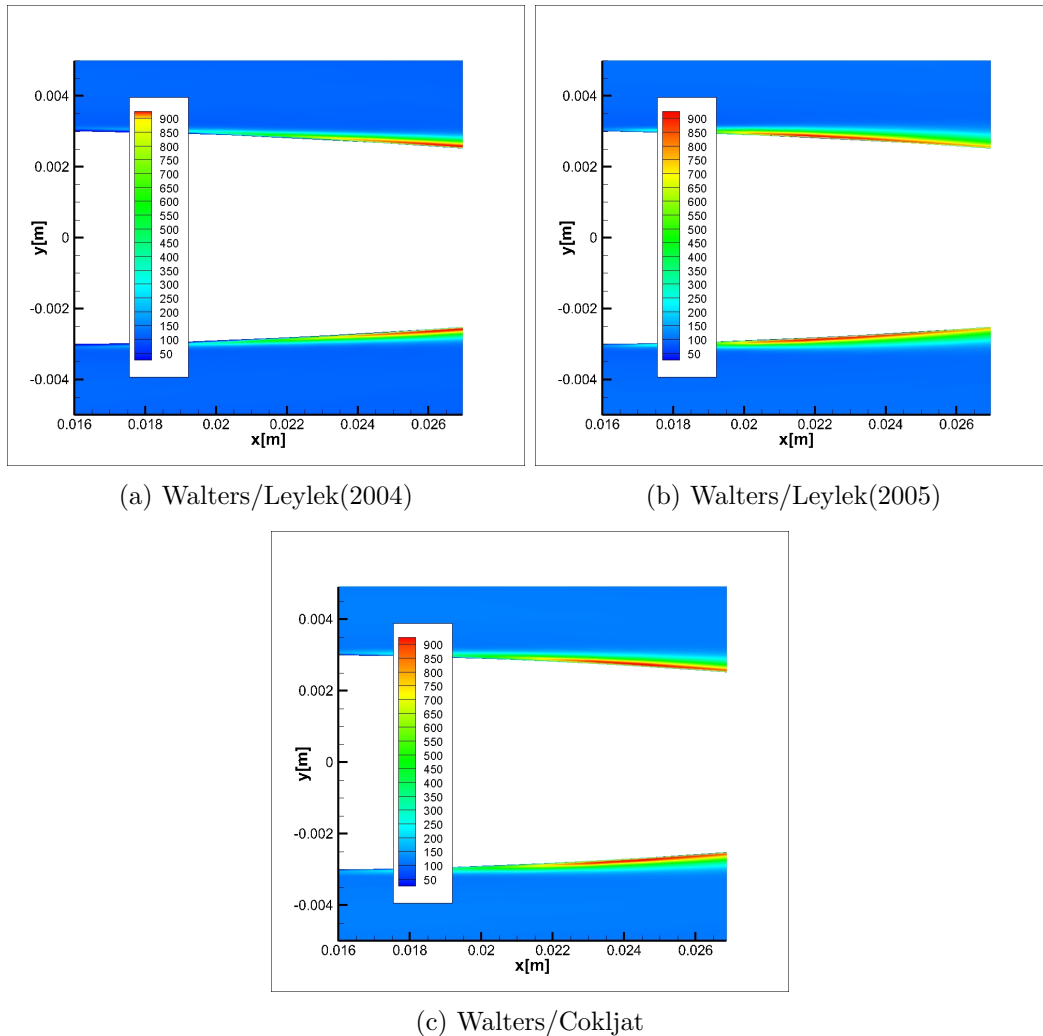


Abbildung 6.24: Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vorderen Bereich des Profils - Anströmung  $0^\circ$ ,  $Tu = 5.6\%$

Wie bereits mehrfach erwähnt, geht im Transitionsgebiet die laminare Grenzschichtströmung in eine turbulente Grenzschichtströmung über. Damit muss in diesem Gebiet die turbulente kinetische Energie - gleichzusetzen mit der Turbulenz - erheblich ansteigen. Alle drei Modelle sind in der Lage, einen Grenzschicht-Umschlag vorherzusagen, was in Abb. 6.24 deutlich durch die vorherrschenden hohen Werte der



turbulenten kinetischen Energie zu erkennen ist. Anhand desselben Schaubilds können schon in diesem Stadium unterschiedliche Transitionszeitpunkte der untersuchten LKE-Modelle vorhergesagt werden.

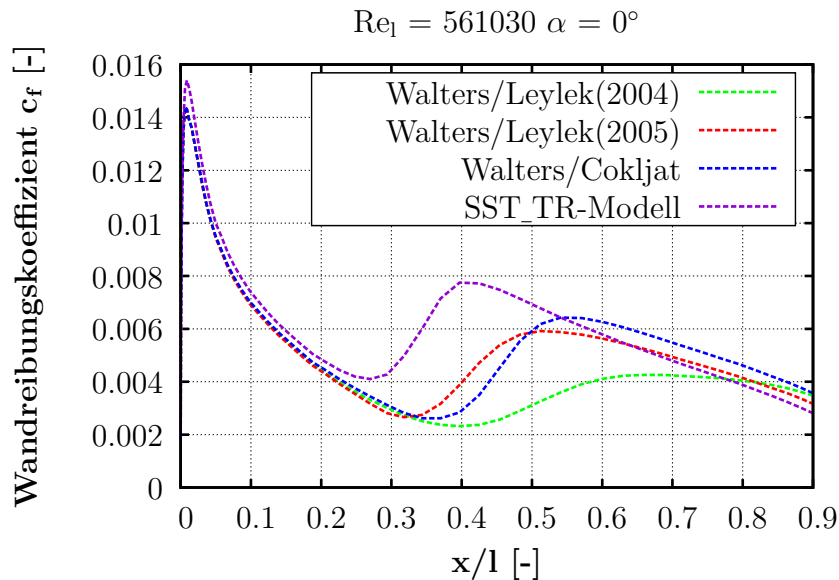


Abbildung 6.25: Testfall NACA0012 -  $Tu = 5.6\%$

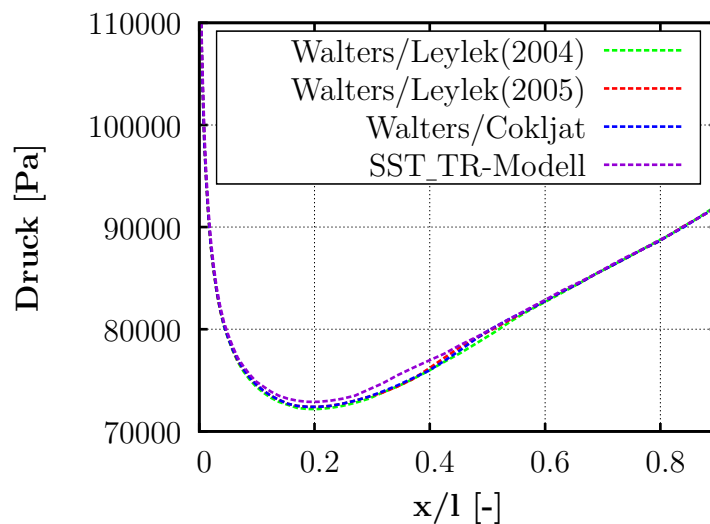


Abbildung 6.26: Druckverlauf NACA0012 -  $Tu = 5.6\%$

Im Gegensatz zu dem bereits in Linars implementierten SST\_TR-Modell ist für alle drei LKE-Modelle ein in Richtung Profilhinterkante verschobenes Transitionsgebiet zu erkennen (Abb. 6.25). Weitere Unterschiede sind bei der Länge des Transitionsgebiets festzustellen. Während sich das Modell *Walters/Leylek(2004)* durch ein sehr in

die Länge gezogenes Transitionsgebietes auszeichnet, ist dieses für die anderen zwei LKE-Modelle und auch für das SST\_TR-Modell wesentlich kürzer und annähernd von selber Länge. Der Verlauf des statischen Druckes an der Profloberfläche ist für alle betrachteten Modelle nach Abb. 6.26 beinahe identisch. Nach anfänglichem Abfall des Drucks ist anschließend erwartungsgemäß ein kontinuierlicher Anstieg zur Profilhinterkante zu beobachten. Die leichten Unterschiede im Bereich des Druckminimums lassen auf unterschiedliche Verdrängungsdicken der Grenzschicht schließen.

**Bewertung für einen Anströmwinkel von  $0^\circ$  -  $Tu = 7\%$**

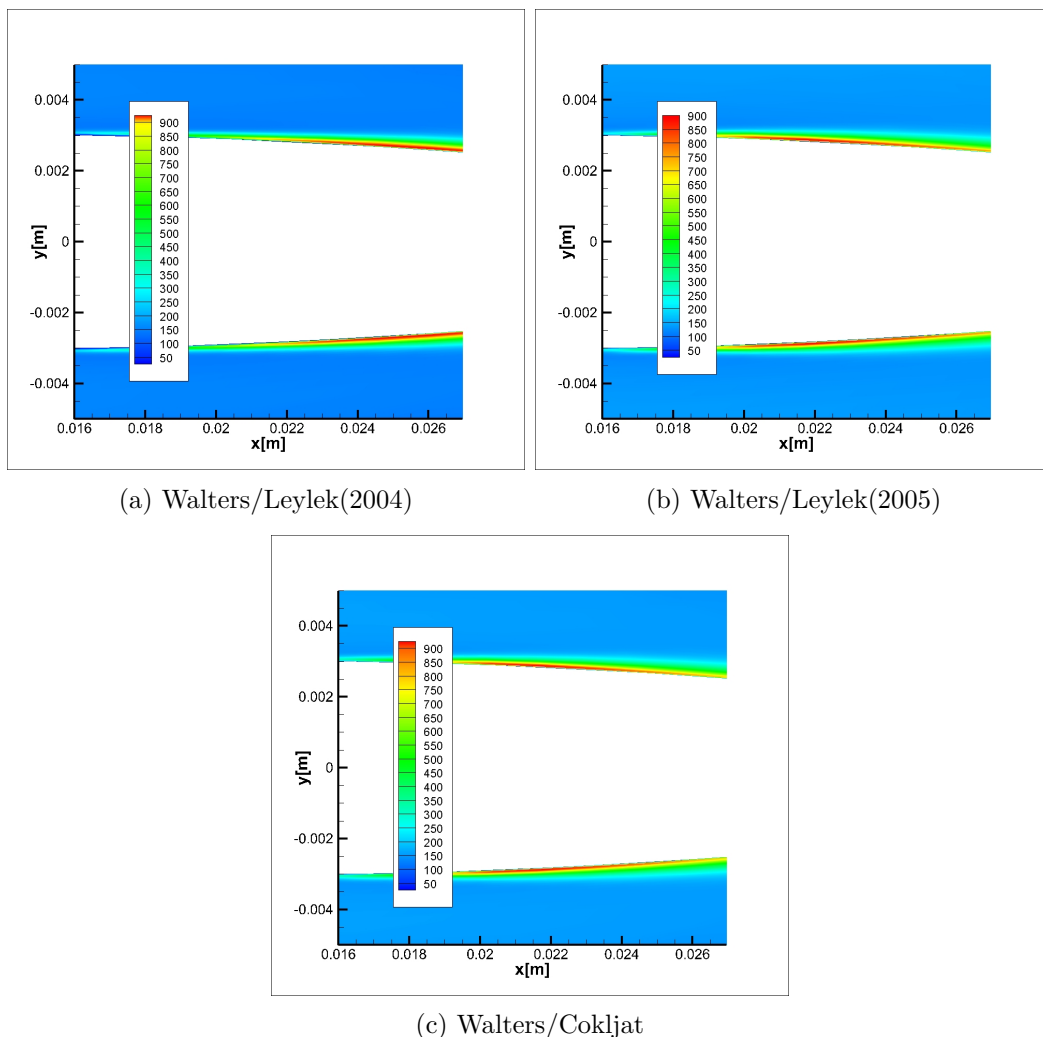


Abbildung 6.27: Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vorderen Bereich des Profils - Anströmung  $0^\circ$ ,  $Tu = 7\%$

Nach Anhebung des Turbulenzgrades am Eintritt auf  $Tu = 7\%$  kann auch für diesen Testfall wiederum ein Transitionsgebiet in Abb. 6.27 durch die mit roter Farbe

gekennzeichneten Gebiete hoher turbulenter kinetischer Energie lokalisiert werden. Durch die unterschiedliche Lage dieser Gebiete lassen sich schon anhand dieser Schaubilder unterschiedliche Transitionszeitpunkte der untersuchten LKE-Modelle ableiten. Abb. 6.28 bestätigt die Ergebnisse des vorherigen Testfalles für  $Tu = 5.6\%$ , da auch hier der Umschlag bei den LKE-Modellen verglichen mit dem SST\_TR-Modell erheblich später erfolgt. Das längere Transitionsgebiet, sowohl beim Modell *Walters/Leylek(2004)* als auch beim Modell *Walters/Leylek(2005)* - auch wenn nicht in dessen Ausprägung - ist deutlich zu erkennen.

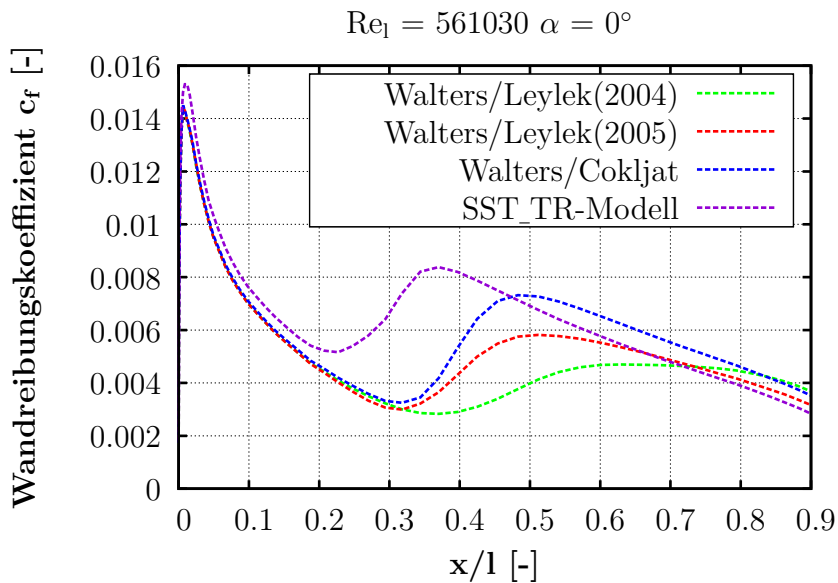


Abbildung 6.28: Testfall NACA0012 -  $Tu = 7\%$

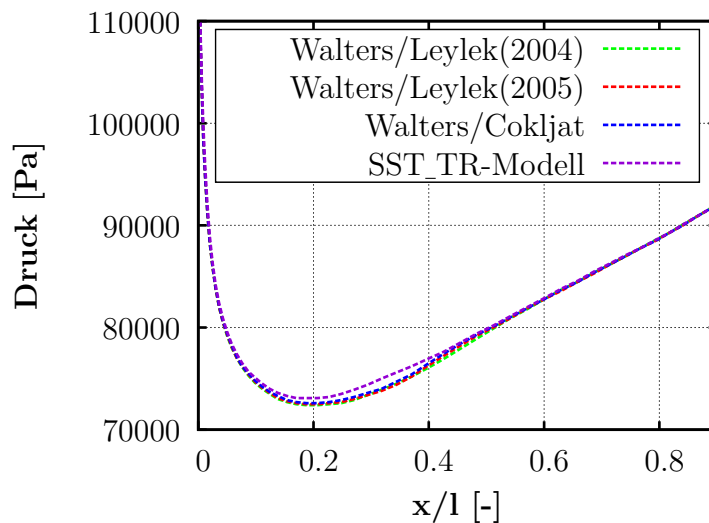


Abbildung 6.29: Druckverlauf NACA0012 -  $Tu = 7\%$

Gegenüber Abb. 6.25 weist das Modell *Walters/Leylek(2005)* für den betrachteten Fall ein deutlich längeres Transitionsgebiet auf, während sich das Modell *Walters/Cokljat* analog zur vorherigen Untersuchung durch ein kurzes Transitionsgebiet ähnlich dem SST\_TR-Modell auszeichnet. Keine Überraschungen ergeben sich beim Verlauf des statischen Druckes entlang der Profloberfläche. Bei allen betrachteten Modellen stellt sich annähernd dasselbe plausible Ergebnis ein (Abb. 6.29). Nach anfänglichem Absinken der Druckfunktion ist ein stetiger Anstieg bis zur Profilhinterkante ersichtlich. Auch hier zeigt das SST\_TR-Modell erneut eine leicht andere Grenzschicht-Verdrängungsdicke.

**Bewertung für einen Anströmwinkel von  $12^\circ$  -  $Tu = 7\%$**

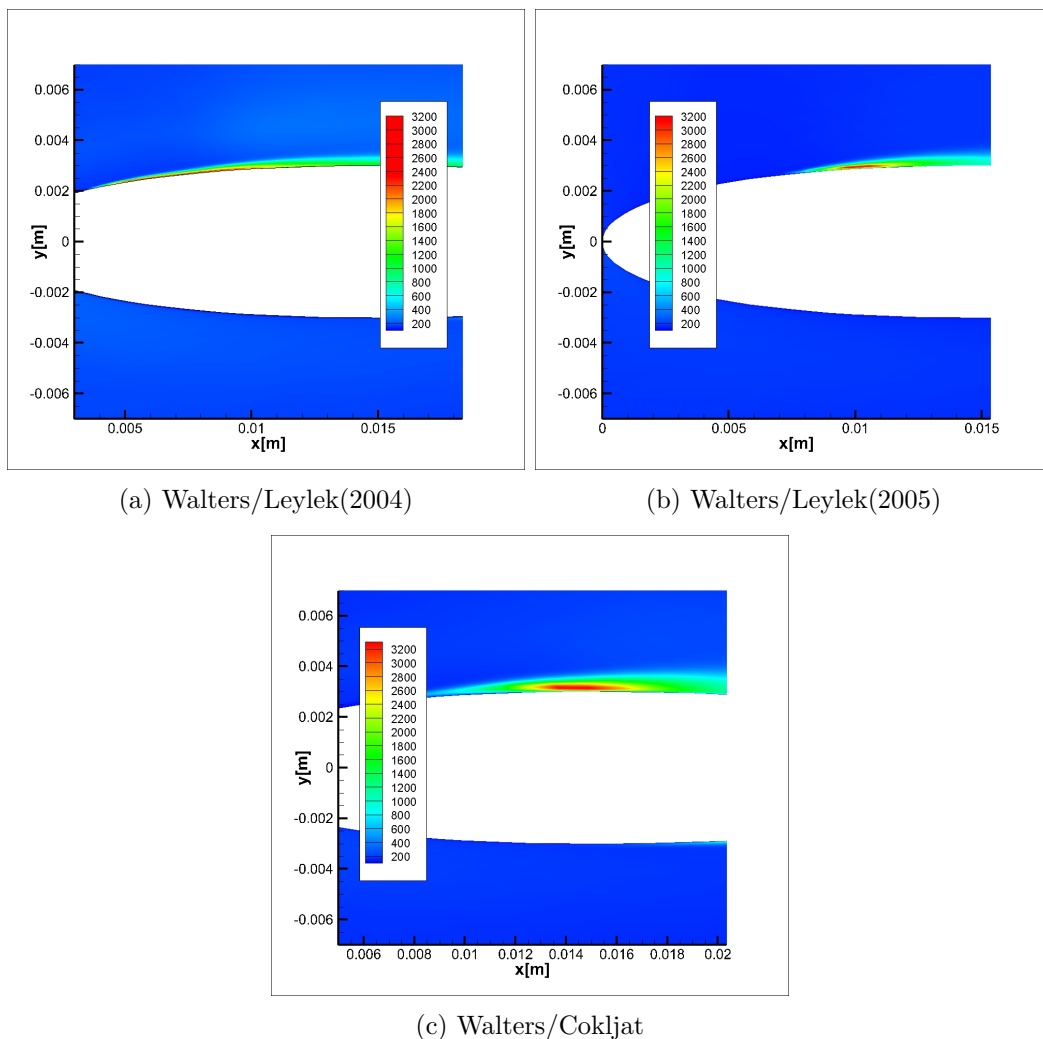


Abbildung 6.30: Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vorderen Bereich des Profils - Anströmung  $12^\circ$ ,  $Tu = 7\%$

Der Anströmwinkel der bis dato erfolgten Berechnungen betrug jeweils  $\alpha = 0^\circ$ . Bei der folgenden Betrachtung soll nun ein von der Horizontalen um  $12^\circ$  geneigter Geschwindigkeitsvektor vorgegeben werden. Dieser anspruchsvolle Testfall soll das Verhalten bei starken Geschwindigkeitsgradienten aufzeigen. Nicht selten ist bei diesem Testfall ein Ablösen der Grenzschicht zu beobachten. Wird die Größenordnung der turbulenten kinetischen Energie in Abb. 6.30 mit den Berechnungen bei horizontaler Profilanströmung (Abb. 6.24 und Abb. 6.27) verglichen, so stellen wir erheblich größere Werte fest. Diese Tatsache ist der aus der Schräganströmung resultierenden höheren Geschwindigkeitsgradienten des Fluids geschuldet, das zu einer höheren turbulenten kinetischen Energie führt.

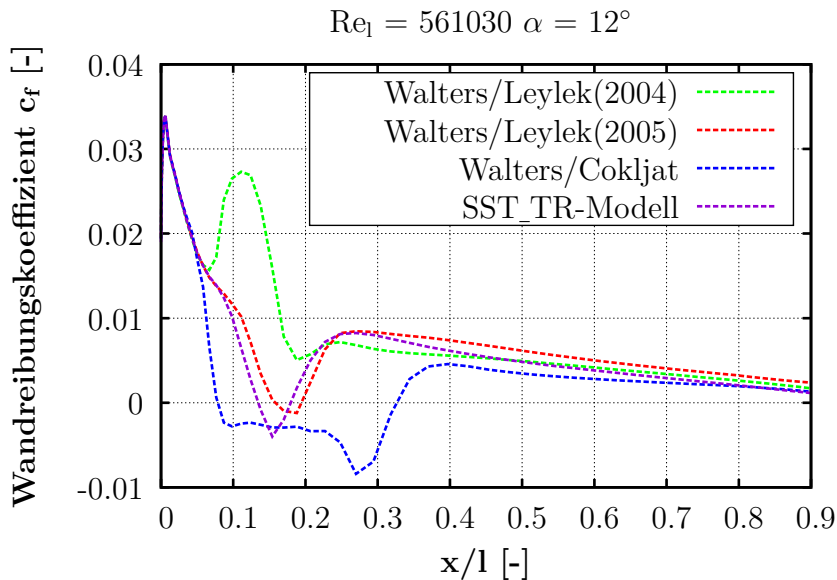


Abbildung 6.31: Testfall NACA0012 -  $Tu = 7\%$ , Anströmwinkel  $12^\circ$

Für alle drei getesteten Modelle unterscheidet sich der Verlauf des Wandreibungskoeffizienten über der dimensionslosen Profillänge gegenüber den vorherigen Beispielen deutlich. Während sich das Modell *Walters/Leylek(2004)* durch einen unerklärlichen Peak bei etwa  $x/l = 0.1$  in Abb. 6.31 auszeichnet, fällt die Auswertekurve bei den anderen zwei Modellen unter den Wert Null - ein deutliches Zeichen für Ablösung. Dieses Verhalten ist für die vorgegebenen Randbedingungen, insbesondere durch den um zwölf Grad geneigten Geschwindigkeitsvektor nicht unplausibel.

Ablösungsgebiete lassen sich am Besten durch Betrachtung des Geschwindigkeitsprofils lokalisieren, da Ablösung definitionsgemäß Rückströmung in der Grenzschicht hervorruft und somit in diesem Bereichen die axiale Geschwindigkeit negative Werte

annimmt. Damit wird auch die Wandschubspannung kleiner Null, da diese proportional dem Geschwindigkeitsgradienten ist. Die Ablöseerscheinungen liegen beim Modell *Walters/Cokljat* in besonders ausgeprägter Form vor (Abb. 6.31, Abb. 6.32 und Abb. 6.33). Dazu verglichen, zeigt das Modell *Walters/Leylek(2005)* und auch das SST\_TR-Modell nur geringe Ablöseerscheinungen (Abb. 6.32 und Abb. 6.33), was durch den Verlauf des Wandreibungskoeffizienten in Abb. 6.31 verdeutlicht wird. Keine Ablösung ist hingegen beim Modell *Walters/Leylek(2004)* festzustellen, welches über die ganze Profillänge positive Werte für die Wandschubspannung liefert.

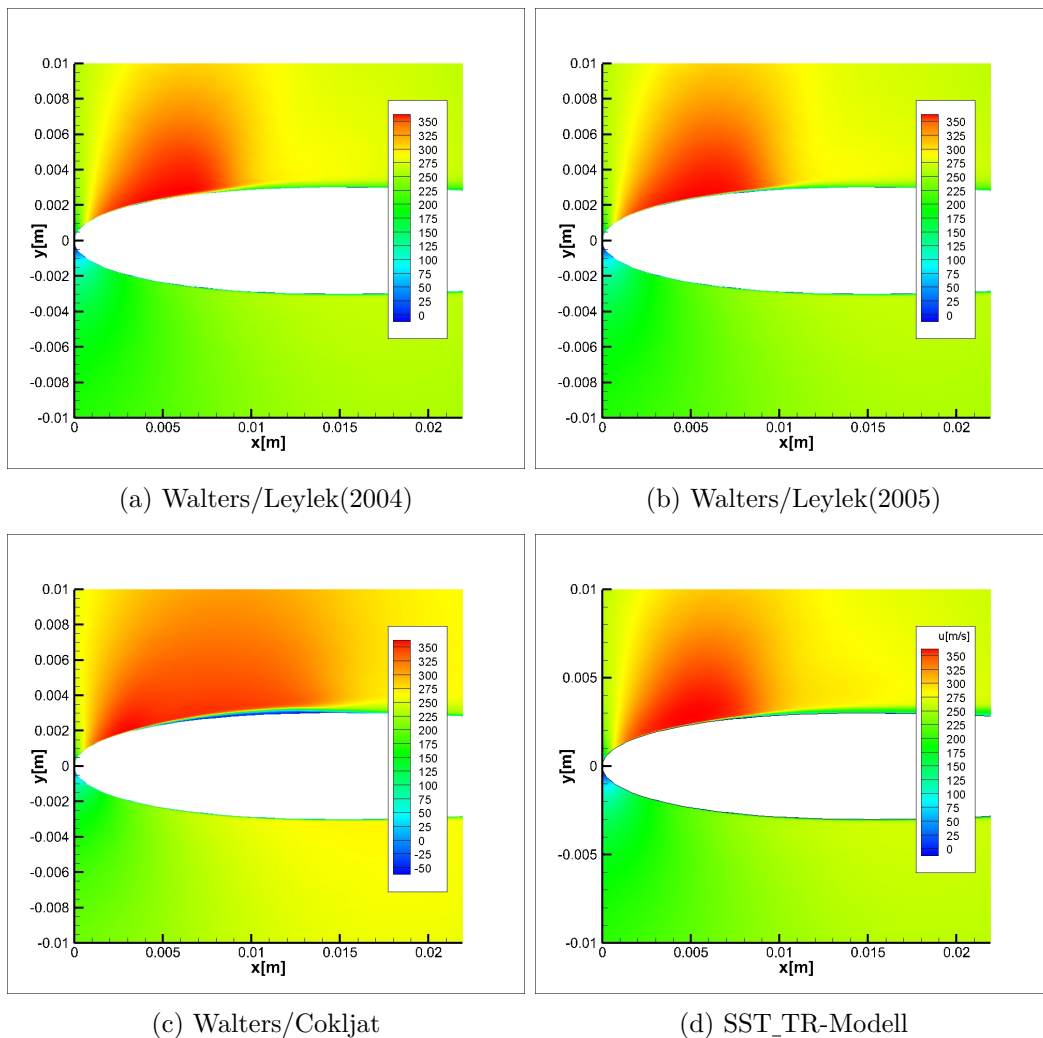


Abbildung 6.32: Geschwindigkeitsverteilung - Anströmwinkel  $12^\circ$ ,  $Tu = 7\%$

Betrachtet man Abb. 6.34, fällt das Modell *Walters/Cokljat* gegenüber den anderen Modellen durch den zweifach S-förmigen Druckverlauf im ersten Drittel des Profils auf, während die Berechnung mit den anderen drei Modellen einen annähernd gleichen Druckverlauf liefert. Dieser markante Unterschied kann der bei diesem Fall deutlich

aufretenden Ablösung zugeschrieben werden.

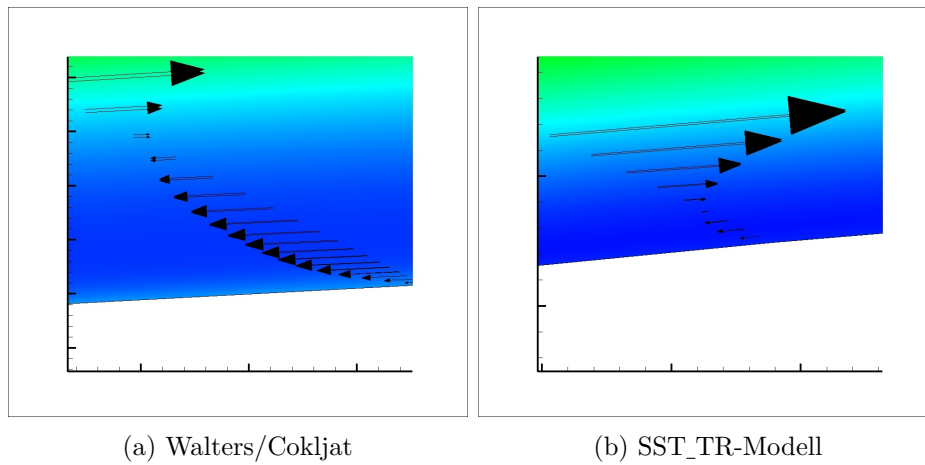


Abbildung 6.33: Geschwindigkeitsgradient im wandnahen Bereich - Anströmwinkel  $12^\circ$ ,  $Tu = 7\%$

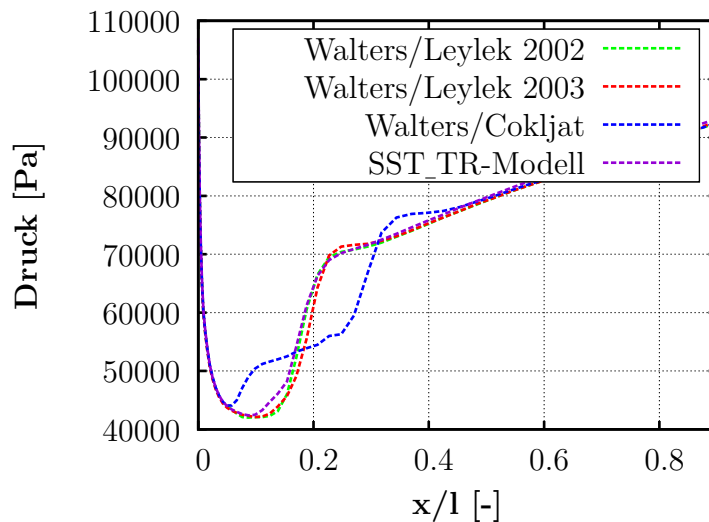
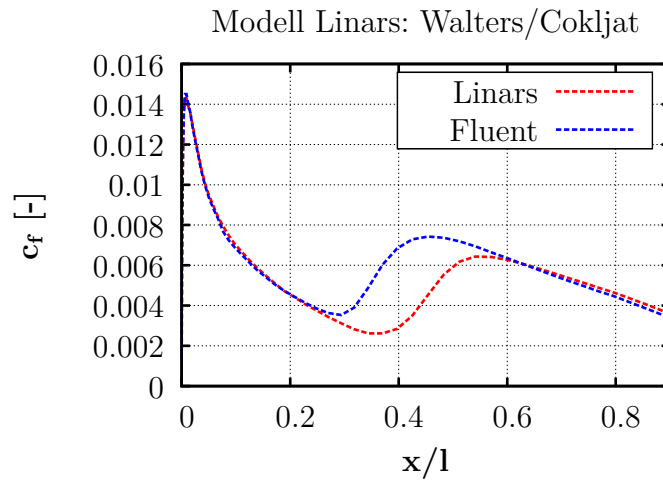


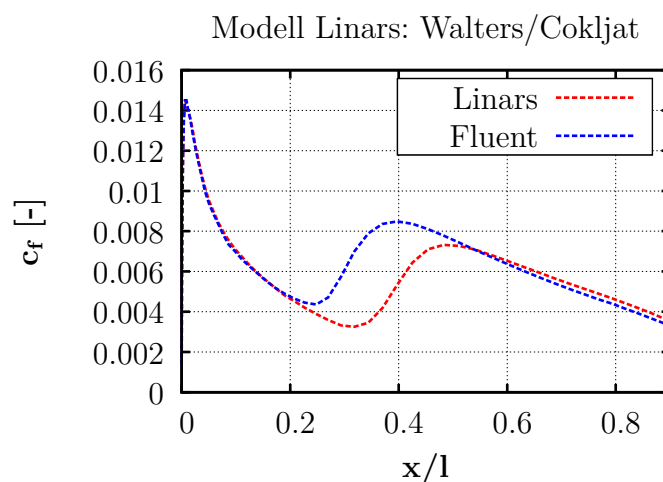
Abbildung 6.34: Druckverlauf NACA0012 -  $Tu= 7\%$ , Anströmwinkel  $12^\circ$

### Vergleich mit Fluent

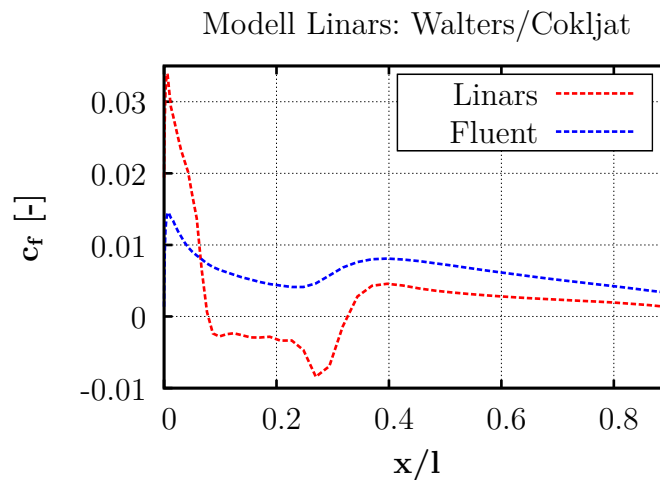
Übereinstimmend mit den in den bisherigen Abschnitten getätigten Überlegungen ist es auch für diesen Testfall sinnvoll, die Berechnungsergebnisse des Modells *Walters/Cokljat* mit dem kommerziellen Code Fluent zu vergleichen. Analog zum T3A-Testfall fällt bei Betrachtung von Abb. 6.35 und Abb. 6.36 der voneinander abweichende Transitionsbeginn auf. Fluent prognostiziert diesen etwas früher als dies bei den Berechnungen mit dem in Linars implementierten Modell der Fall ist.

Abbildung 6.35: NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent  $\alpha=0^\circ$ ,  $Tu = 5.6\%$ 

Die Gleichartigkeit der beiden Modelle ist jedoch deutlich ersichtlich. Insbesondere in der laminaren und in der turbulenten Grenzschicht sind die Werte beinahe identisch. Um die unterschiedliche Definition der turbulenten Längenskala zu berücksichtigen, erfolgte auch für diesen Testfall eine Umrechnung (nähere Details dazu unter *Abschnitt 6.2*), um Vergleichbarkeit herzustellen. Bemerkenswerterweise kommt es bei der Berechnung mit Fluent in Abb. 6.37 gegenüber der Berechnung mit Linars bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 12^\circ$  zu keiner Ablösung der Strömung. Dies muss aber nicht nur auf das Turbulenzmodell zurückzuführen sein.

Abbildung 6.36: NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent  $\alpha=0^\circ$ ,  $Tu = 7\%$



Abbildung 6.37: NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent  $\alpha=12^\circ$ ,  $Tu = 7\%$ 

### 6.5.1 Zusammenfassende Bewertung

Im Gegensatz zur ebenen Platte sind für diesen Testfall leider keine experimentellen Daten für die Auswertung verfügbar. Dennoch kann durch Vergleich mit bereits implementierten und bewährten Turbulenzmodellen sowie dem kommerziellen Softwarepaket Fluent die Aussagekraft der Modelle bewertet werden. Bei einem Anströmwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  liefern alle Modelle plausible Ergebnisse, auch wenn sich die zwei Modelle von Walters und Leylek durch ein etwas in die Länge gezogenes Transitionsgebiet auszeichnen. Diese Tendenz ist dabei besonders stark beim Modell *Walters/Leylek(2004)* zu beobachten.

Vergleicht man die Ergebnisse mit dem SST\_TR-Modell, stellt man für die LKE-Modelle einen späteren Umschlagpunkt von laminarer zur turbulenter Grenzschichtströmung fest. Auch Fluent bestätigt dieses Phänomen und sagt den Transitionsbeginn etwas früher vorher. Die Ähnlichkeit des Modells *Walters/Cokljat* mit Fluent ist jedoch gegeben, besonders der Verlauf der laminaren und der vollturbulenten Grenzschichtströmung ist annähernd identisch. Voneinander abweichendes Verhalten kann jedoch bei einem Anströmwinkel von  $\alpha = 12^\circ$  festgestellt werden. Während die Strömung bei der Berechnung mit Linars im Anfangsdrittel des Profils ablöst, liefert Fluent ein Ergebnis mit einer entlang des gesamten Profils anliegenden Strömung.

Auch für diesen Testfall stellt sich das Modell von Walters und Cokljat wiederum als das Geeignetste der drei untersuchten LKE-Modelle dar. Als besondere Stärke kann das kurze Transitionsgebiet und im Vergleich mit bewährten Modellen die gute quantitative Vorhersage des Wandreibungskoeffizienten genannt werden. Aufgrund der fehlenden Messergebnisse stellt sich bei diesem Testfall die Bewertung im Vergleich zur ebenen Platte schwieriger dar - insbesondere, ob ein Anströmwinkel von  $\alpha = 12^\circ$  Ablösung hervorruft. Jedoch verhält sich das Modell physikalisch immer sinnvoll, reagiert bei Vergleich mit Fluent und dem SST\_TR-Modell gleichartig und ist nicht durch unerklärliche Ausreißer, wie der Peak beim Modell *Walters/Leylek(2004)* in Abb. 6.31 gekennzeichnet.

## 6.6 Strömung durch den Hochdruckstator einer zweistufigen Turbinenkonfiguration

Beträchtlicher Forschungsaufwand wird derzeit auf dem Gebiet der Treibstoff- und Emissionsreduktion von Triebwerken betrieben. Dabei werden abweichend vom derzeitigen Standard - dem Mantelstromtriebwerk - auch neuartige Triebwerkskonfigurationen diskutiert. Ein dieses Ziel verfolgendes Forschungsprojekt wurde von der Europäischen Union mit dem Namen **DREAM** ins Leben gerufen. Das Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz beteiligte sich an diesem Forschungsprojekt und führte verschiedene Untersuchungen an der in Abb. 6.38 dargestellten Prüfstandskonfiguration durch, welche eine Hoch- und Niederdruckstufe beinhaltet.

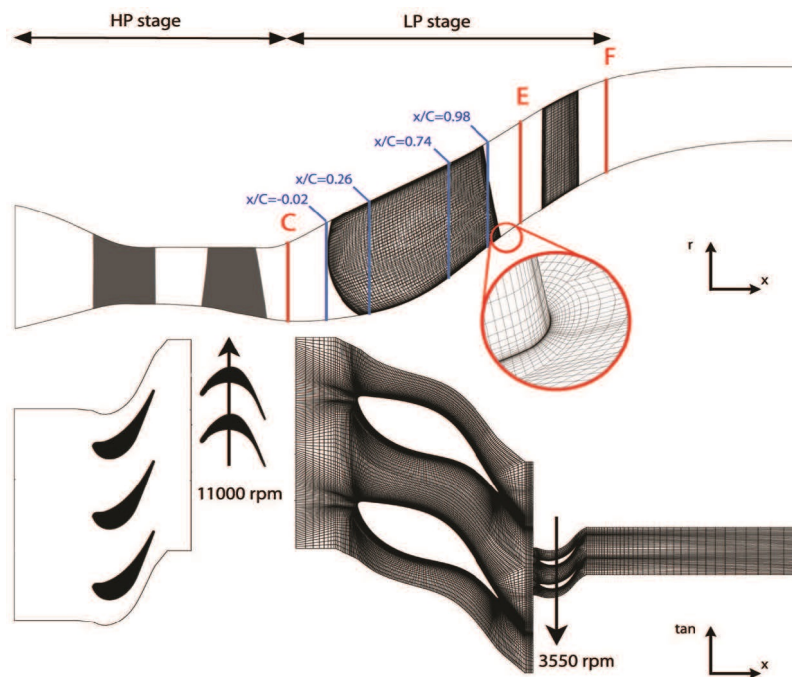


Abbildung 6.38: Prüfstandskonfiguration [11]

Ziel dieser Arbeit ist es jedoch nicht, einen wissenschaftlichen Beitrag zu diesem Forschungsprojekt zu liefern, es wird lediglich der **Hochdruckstator** mit dem vorhandenen Berechnungsgitter zur Bestimmung der Fähigkeiten des neu implementierten LKE-Modells im Rahmen einer komplexen 3D-Strömung verwendet. Da sich bei den zwei bisher durchgeführten Testfällen das Modell *Walters/Cokljat* gegenüber den an-

deren zwei LKE-Modellen als überlegen herauskristallisiert hat, wird bei diesem Testfall die Bewertung nur anhand dieses Modelles erfolgen - in diesem Abschnitt fortan mit *Linars LKE* bezeichnet. Die Validierung des neu implementierten Turbulenzmodells wird in Anlehnung an die bereits durchgeführten Testfälle unter anderem mit dem transitionsfähigen SST-Turbulenzmodell (Linars SST\_TR) geschehen. Zusätzlich werden die Berechnungen mit dem kommerziell verfügbaren Code Fluent verglichen, dessen LKE-Modell laut Theory Guide - wie bereits mehrfach erwähnt - auf dasselbe Modell zurückgreift.

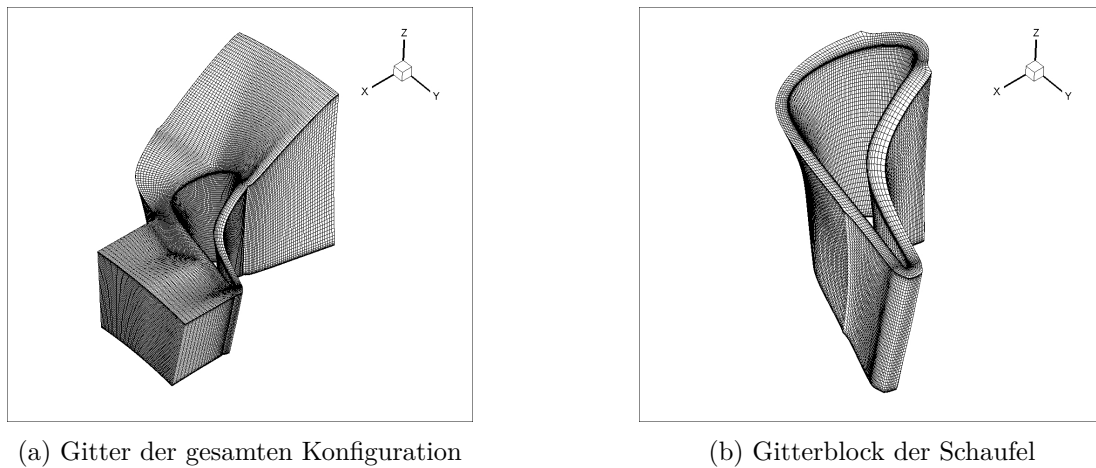


Abbildung 6.39: Hochdruckstator - Berechnungsgitter

Das zur Strömungssimulation am Hochdruckstator verwendete strukturierte Berechnungsgitter ist in Abb. 6.39 dargestellt und besteht aus fünf Blöcken. Der Gitterblock um die uns interessierende Schaufel weist eine um die Schaufel umlaufende Koordinate  $i$  mit 272 Gitterpunkten und die in radialer Richtung verlaufende Koordinate  $k$  mit 68 Gitterpunkten auf. Normal zur Schaufeloberfläche können 20 Gitterpunkte mit entsprechender Verdichtung im Grenzschichtbereich gezählt werden.

Tabelle 6.6: Randbedingungen - Hochdruckstator

<b>Eintritt</b>		<b>Austritt</b>	
$p_{TOT}$	$4.008 \times 10^5 \text{ Pa}$	$p_{stat}$	$2.000 \times 10^5 \text{ Pa}$
$T_{TOT}$	442 K		
$T_u$	5 %		
$l_s$	0.5 mm		
$k_L$	$0 \text{ m}^2/\text{s}^2$		

Die Berechnungen werden mit den in Tab. 6.6 zusammengefassten Randbedingungen und mit den auch bei der Untersuchung des NACA-Profiles verwendeten Stoffwerten in Tab. 6.5 durchgeführt. Die turbulente Längenskala wurde dabei anhand von am Institut durchgeführten Untersuchungen [12] mit  $l_s = 0.5$  mm festgelegt.

### 6.6.1 Bewertung der Ergebnisse an der Schaufel

Aufgrund der Dreidimensionalität des Problems müssen bei diesem Testfall entsprechende Auswertelinien auf der Schaufeloberfläche festgelegt werden, um einen Vergleich der unterschiedlichen Berechnungsergebnisse zu ermöglichen. Durch Festlegen von relativen Werten der Kanalhöhe, welche dem Abstand zwischen Naben- und Außendurchmesser der Schaufel entspricht, können bestimmte Auswertelinien auf der Schaufeloberfläche definiert werden. Im vorliegenden Fall werden die Ergebnisse bei einer relativen Kanalhöhe von  $K_h = 25\%$ ,  $K_h = 50\%$  und  $K_h = 75\%$  bewertet. Die Ergebnisse für das SST\_TR-Modell stammen aus der Arbeit von Egger [12], in welcher die Wandschubspannung als Wurzel der quadratischen Summe der in den drei Raumrichtungen auftretenden Schubspannung an der Wand angegeben wird. Daher erfolgen auch die in dieser Arbeit durchgeführten Auswertungen nach dieser Definition.

#### Bewertung bei einer relativen Kanalhöhe von 25%

Der Verlauf der Wandschubspannung entlang der um die gesamte Schaufel laufenden Auswertelinie bei einer relativen Kanalhöhe von  $K_h = 25\%$  ist in Abb. 6.40 dargestellt. Während auf der Druckseite die Verläufe der drei ausgewerteten Berechnungen gute Übereinstimmung liefern, sind auf der Saugseite der Statorschaufel doch beträchtliche Unterschiede zwischen den beiden LKE-Modell-Berechnungen und dem SST\_TR-Modell zu beobachten. Besonders auffallend ist dabei das saugseitig tendenziell geringere Wandschubspannungsniveau des LKE-Transitionsmodells im vorderen Bereich der Schaufel. Des Weiteren kann für das LKE-Modell in Linars als auch in Fluent ein ausgeprägtes Transitionsgebiet bei etwa  $x = 0.035$  m, ersichtlich durch das typische Merkmal eines plötzlichen Sprungs der Wandschubspannung, ausgemacht werden. Die Einleitung der Transition erfolgt in Fluent etwas früher, ein Umstand, der bereits bei den bisherigen Testfällen beobachtet werden konnte. Sind die Verläufe der Wandschubspannung beim LKE-Modell für Linars als auch für Fluent in

der laminaren Phase noch annähernd gleich, unterscheiden sie sich im Anschluss an das Transitionsgebiet doch erheblich, mit deutlich höherer Wandschubspannung im Fluent-Modell. Das SST\_TR-Modell zeigt ebenfalls den Abfall und den anschließenden starken Anstieg der Wandschubspannung, was ebenfalls auf Transition hindeutet. Wie bereits bei der Vorstellung des LKE-Modells erwähnt, ist das Transitionsgebiet durch punktuell sehr hohe Werte der turbulenten kinetischen Energie gekennzeichnet, da in diesem Bereich die Überführung der in Strömungsrichtung ausgerichteten Fluktuationen (laminare kinetische Energie) in turbulente kinetische Energie stattfindet. Dieses Verhalten ist in Abb. 6.41 für beide Modelle zu beobachten, wobei die Berechnung mit Linars eine große Zone hoher turbulenter kinetischer Energie im Vergleich zu Fluent liefert.

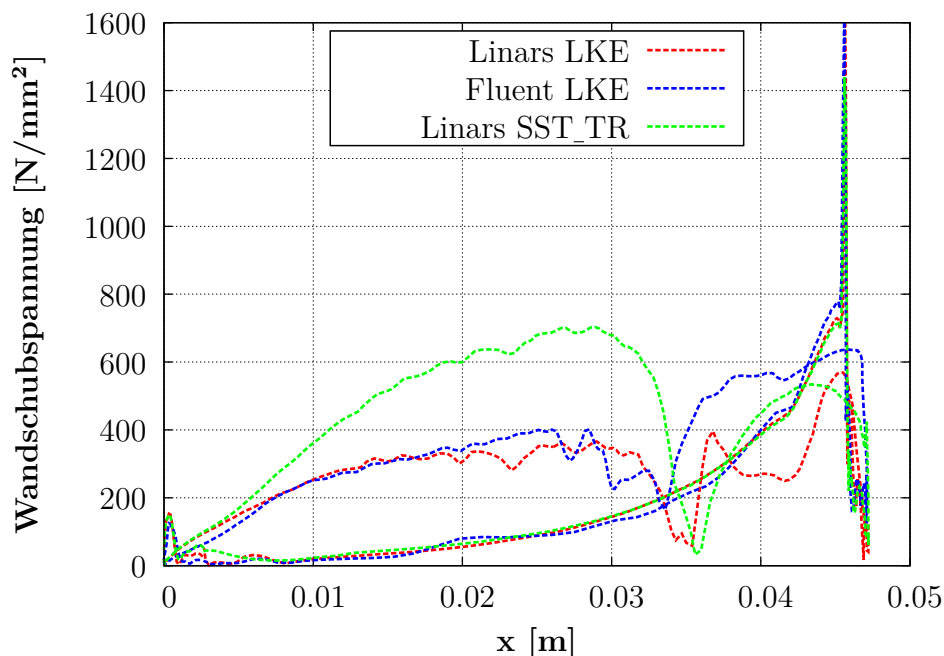


Abbildung 6.40: Hochdruckstator  $K_h = 25\%$  - Verlauf der Wandschubspannung

Signifikante Unterschiede sind in diesem Zusammenhang auch für die Größe der Region hoher turbulenter kinetischer Energie auszumachen. Während sich dieser Bereich in Fluent nur über einen schmalen, in der Abbildung beinahe nicht feststellbaren Bereich entlang der Saugseite zieht, ist in Linars ein ausgeprägter, weit zur Profilhinterkante reichender Bereich hoher turbulenter kinetischer Energie zu erkennen, was auf Ablösung hindeutet. Um Ablösezonen entlang der Schaufeloberfläche zu identifizieren, ist in Abb. 6.42 die auf den Hochdruckstator bezogene tangentielle Geschwindigkeitskomponente dargestellt. Interessanterweise scheint in Linars die Grenzschichtströmung im Transitionsbereich kurz abzureißen, ersichtlich durch das

kleine Gebiet mit einer entgegen der Strömungsrichtung ausgerichteten Geschwindigkeit. Die Ablöseerscheinungen sind jedoch nur von kurzer Dauer, die im Anschluss an das Transitionsgebiet liegende Region zeichnet sich wieder durch eine anliegende Strömung aus. Damit lässt sich die hohe Turbulenzproduktion in Abb. 6.41 erklären. In Fluent ist ein solches Verhalten nicht feststellbar. Dort ist über der ganze Schaufellänge eine anliegende Grenzschichtströmung zu erkennen und daher keine Ablösung auszumachen.

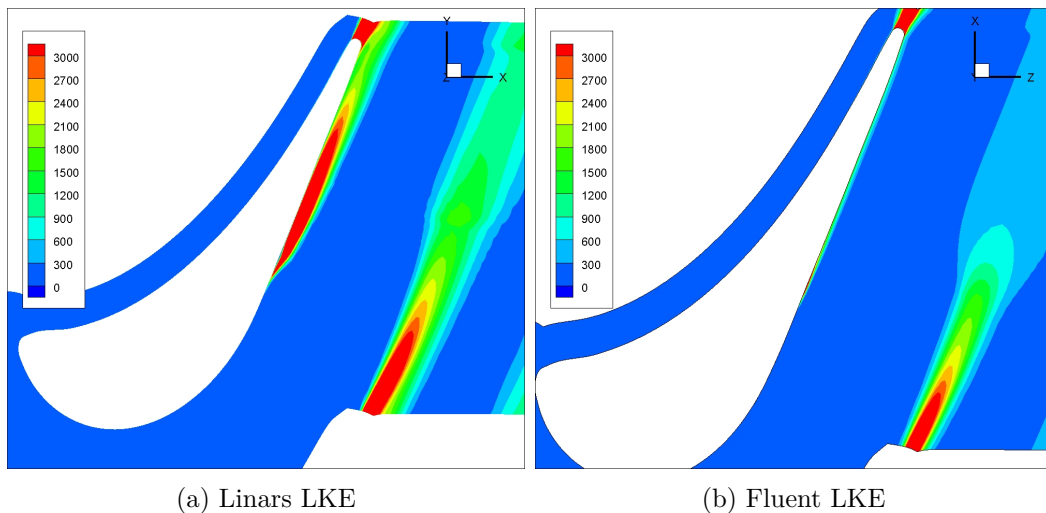


Abbildung 6.41: Hochdruckstator  $K_h = 25\%$  - Turbulente kinetische Energie

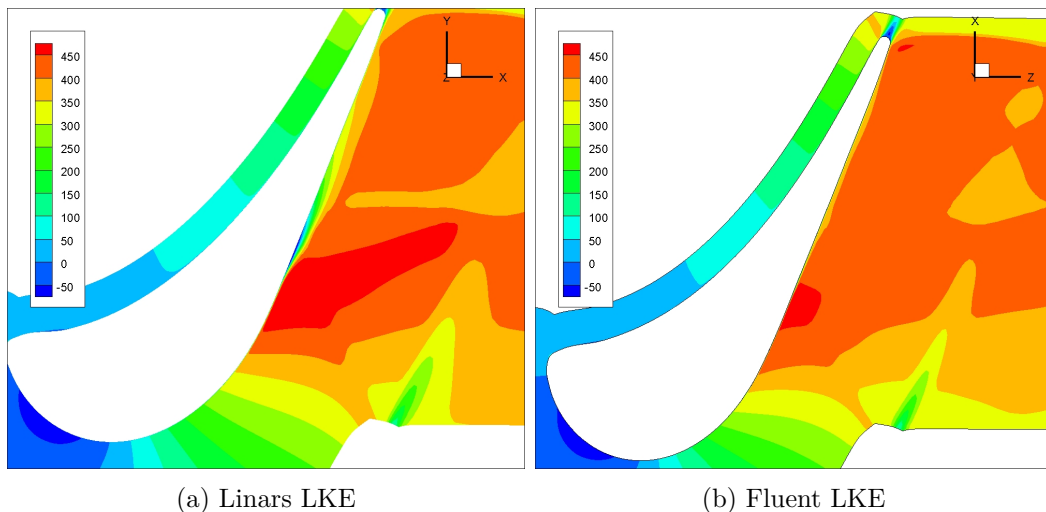


Abbildung 6.42: Hochdruckstator  $K_h = 25\%$  - Geschwindigkeitsverteilung

Betrachtet man die Druckverläufe entlang der Auswertelinie  $K_h = 25\%$ , sind für die Druckseite idente und für die Saugseite annähernd deckende Verläufe zu erkennen (Abb. 6.43), ab dem Bereich der Ablösung sind jedoch wesentliche Unterschiede

feststellbar. Der Bereich nahezu konstanten Drucks in der Linars-Lösung zeigt dabei ebenfalls das Ablösegebiet an.

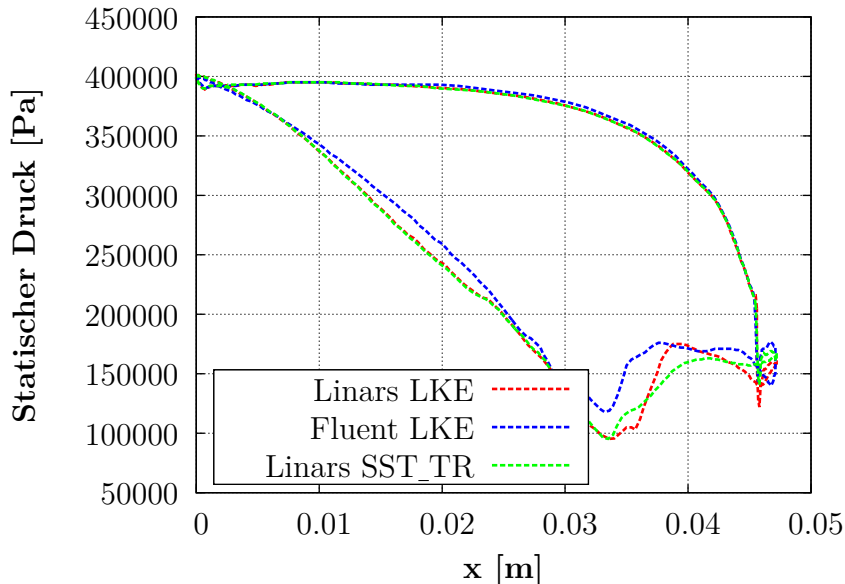


Abbildung 6.43: Hochdruckstator  $K_h = 25\%$  - Verlauf des statischen Druckes

### Bewertung bei einer relativen Kanalhöhe von 50%

Auch auf der um die ganze Schaufel laufenden Auswertelinie  $K_h = 50\%$  sind zwischen den untersuchten Turbulenzmodellen bei Betrachtung des Verlaufes der Wandschubspannung (Abb. 6.44) deutliche Unterschiede feststellbar. Analog zur Auswertelinie bei  $K_h = 25\%$  ist auch hier der Umstand eines höheren Niveaus der Wandschubspannung beim SST\_TR-Modell gegenüber dem LKE-Modell gegeben. Dies erweckt den Eindruck, dass die Strömung bei diesem Modell von Anfang an vollturbulent ist, was die höheren Wandschubspannungen im vorderen Profilbereich erklären würde. Das neu in den Institutscode implementierte LKE-Transitionsmodell (Linars LKE) weist im vorderen Profilbereich einen beinahe identischen Verlauf mit Fluent auf, weicht im hinteren Drittel jedoch deutlich von diesem ab. Während die Berechnung mit Fluent ein durch den Sprung der Wandschubspannung bei  $x = 0.032$  m erkennbares Transitionsgebiet aufweist, bleibt die Wandschubspannung in Linars weiterhin auf niedrigem Niveau. Durch dieses Verhalten liegt der Rückschluss nahe, dass die Grenzschichtströmung über der ganze Profillänge im laminaren Zustand verharrt. Diese These wird durch Abb. 6.45 bekräftigt, in welcher zu keinem Zeitpunkt ein für das Transitionsgebiet charakteristisches Ansteigen der turbulenten kinetischen Energie zu beobachten



ist. Im Gegensatz dazu liefert die Berechnung mit Fluent eine Region mit höherer turbulenter kinetischer Energie in der Grenzschicht. Diese für das LKE-Modell kennzeichnende Zunahme repräsentiert den Ort des Transitionsgebiets, welches sich zusätzlich durch den sprunghaften Anstieg der Wandschubspannung in Abb. 6.44 eindeutig identifizieren lässt. Im Anschluss an das Transitionsgebiet ist das Niveau der Wandschubspannung in der Größenordnung des SST\_TR-Modelles, wodurch die vorhin getätigte Vermutung einer vollturbulenten Grenzschicht beim SST\_TR-Modell entlang der gesamten Profillänge bestärkt wird.

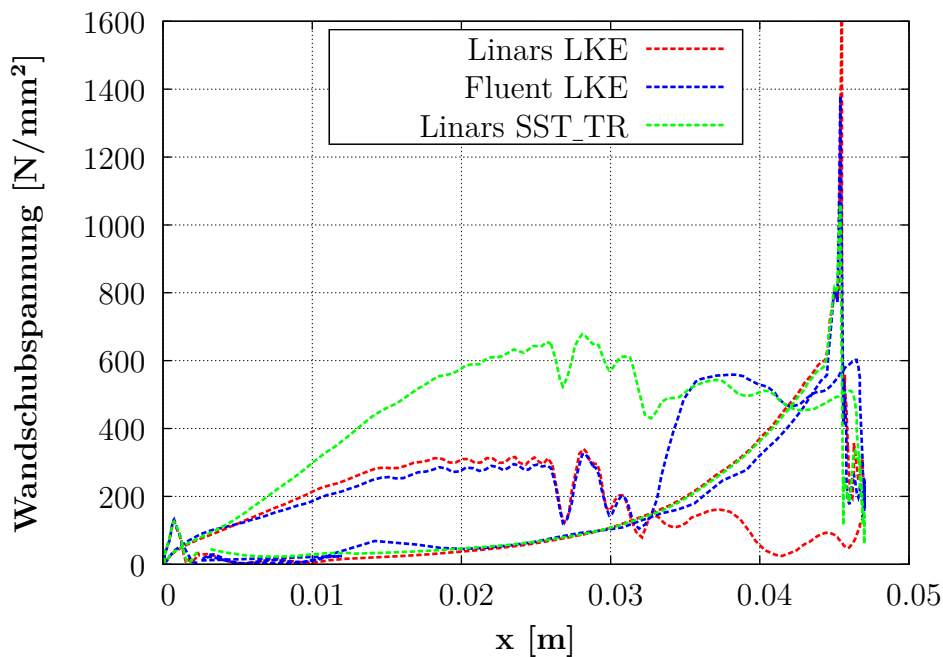


Abbildung 6.44: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Verlauf der Wandschubspannung

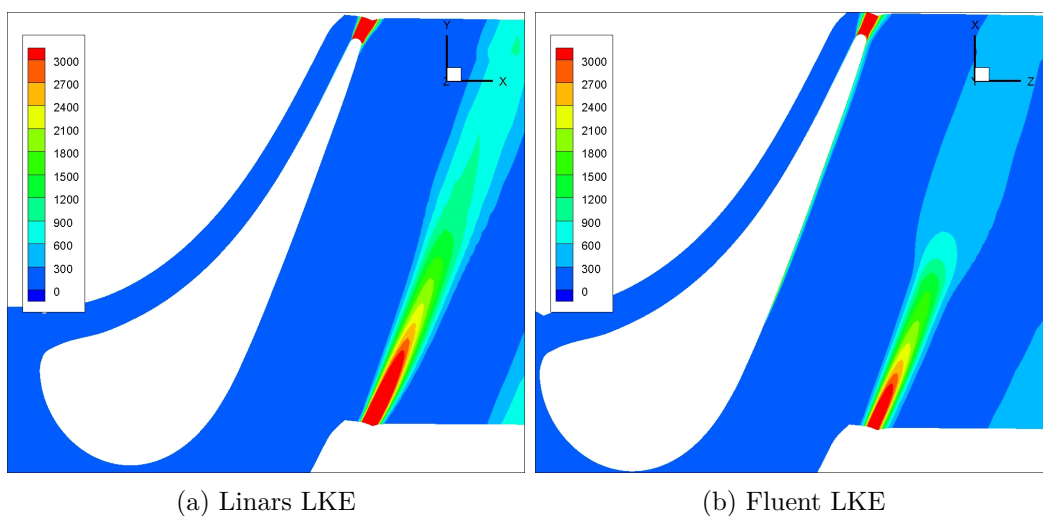


Abbildung 6.45: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Turbulente kinetische Energie

Ein Ablösen der Grenzschicht ist bei Analyse der Geschwindigkeitsverteilung in Abb. 6.46 nicht feststellbar, vielmehr liefern die Berechnungen für die betrachtete Ebene ein nahezu identes Geschwindigkeitsprofil für beide Modelle. Bei Betrachtung der Druckverläufe entlang der Auswertelinie bei einer relativen Kanalhöhe von  $K_h = 50\%$  (Abb. 6.47) können sowohl für die Druckseite als auch für die Saugseite annähernd idente Verläufe wahrgenommen werden. Auch an der Profilhinterkante - geprägt durch Ablöseerscheinungen und Instabilitäten - sind erstaunlicherweise keine wesentlichen Unterschiede feststellbar.

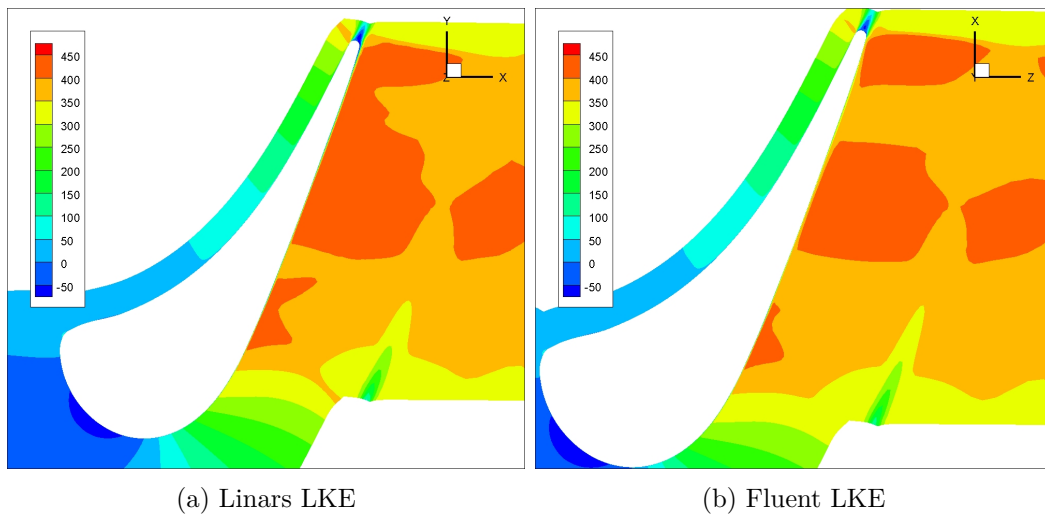


Abbildung 6.46: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Geschwindigkeitsverteilung

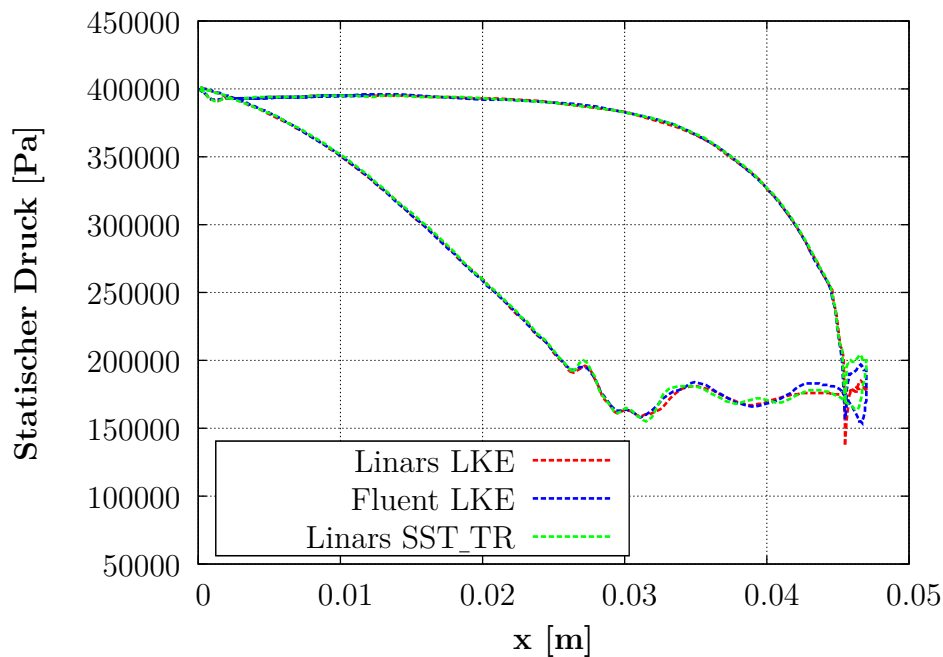


Abbildung 6.47: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Verlauf des statischen Druckes

### Bewertung bei einer relativen Kanalhöhe von 75%

Zum Abschluss sollen die Berechnungsergebnisse bei einer relativen Kanalhöhe von  $K_h = 75\%$  verglichen werden. Um die Transitionsfähigkeit der Modelle zu beurteilen, repräsentiert Abb. 6.48 die Wandschubspannung entlang der Schaufel für die betrachtete Ebene. Analog zu den anderen Auswertelinien kann auch hier das hohe Niveau der Wandschubspannung im vorderen Profilbereich für die vom SST\_TR-Modell erhaltenen Berechnungsergebnisse beobachtet werden, wohingegen die Verläufe der beiden LKE-Modelle nach etwa einem Drittel der Profillänge lokal nicht mehr ansteigen. Gegenüber dem vorherigen Vergleich bei einer relativen Kanalhöhe von  $K_h = 50\%$  kann ein Umschlagen der laminaren Grenzschicht für beide LKE-Modelle durch den sprunghaften Anstieg bei etwa  $x = 0.032\text{ m}$  ausgemacht werden. Auffallend dabei ist, dass sich der Zeitpunkt des Transitionsbeginns als auch der Verlauf der Wandschubspannung im nachtransitionalen Bereich für beide LKE-Modelle sehr ähnlich sind.

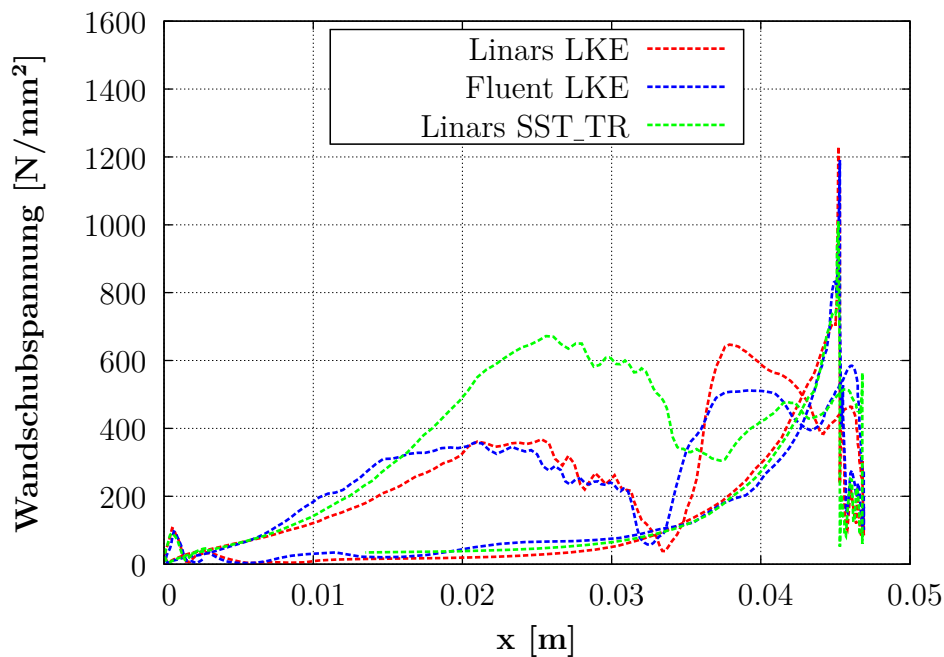


Abbildung 6.48: Hochdruckstator  $K_h = 75\%$  - Verlauf der Wandschubspannung

Die für das Transitiongebiet charakteristischen Zonen hoher turbulenter kinetischer Energie ist für beide Modelle in Abb. 6.49 dargestellt. Sowohl die Berechnungen mit Linars als auch mit Fluent weisen für das LKE-Modell eine vom Transitiongebiet bis zur Profilhinterkante reichende schmale Zonen erhöhter turbulenter kinetischer Energie auf. Zusätzlich sind die absoluten Werte für beide Modelle von gleicher Grö-

Benennung, womit die gute Übereinstimmung der Ergebnisse für diese Auswertelinie bestätigt wird. Ablöseerscheinungen sind in Abb. 6.50 weder in Linars noch in Fluent zu beobachten. Die Ähnlichkeit der beiden Modelle wird auch dadurch bekräftigt, dass die beiden Geschwindigkeitsprofile - mit Ausnahme geringer Abweichungen im Transitionsbereich - sehr gut korrespondieren.

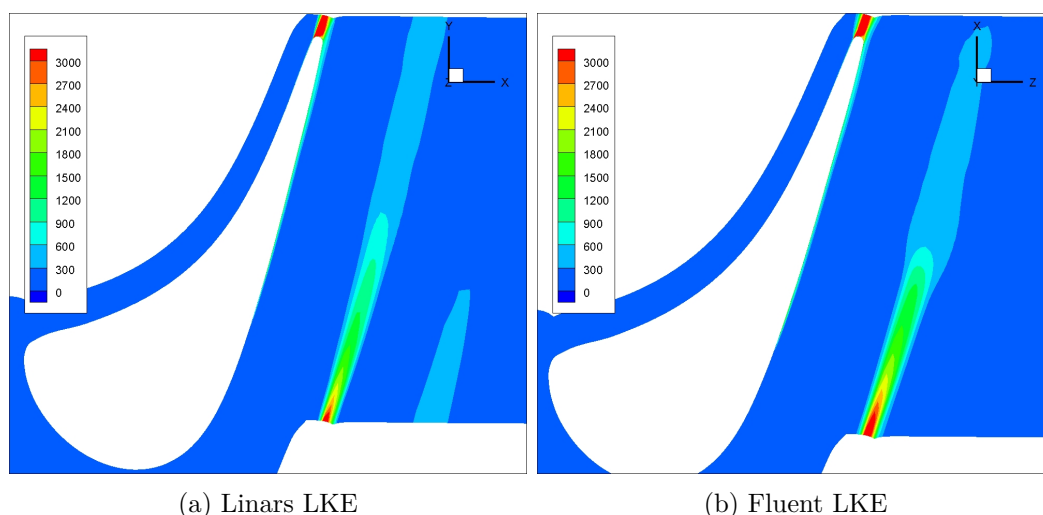


Abbildung 6.49: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Turbulente kinetische Energie

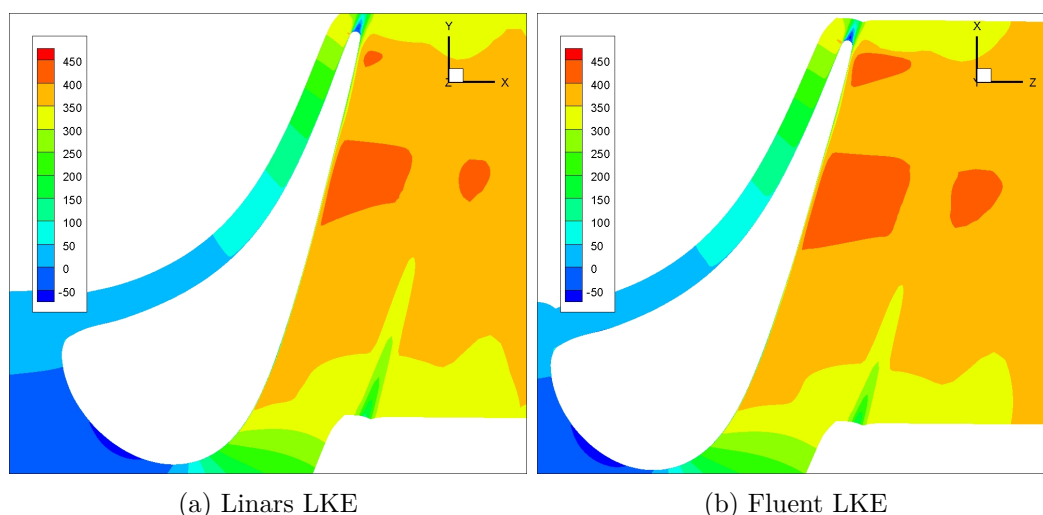
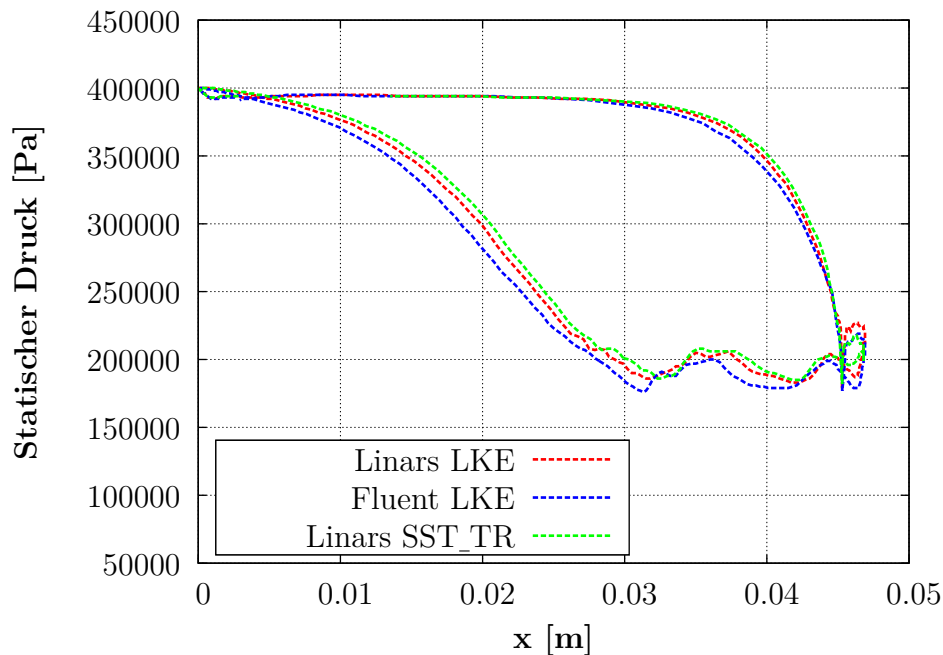


Abbildung 6.50: Hochdruckstator  $K_h = 50\%$  - Geschwindigkeitsverteilung

Überraschenderweise zeigt der Druckverlauf in Abb. 6.51 entgegen der bisherigen guten Übereinstimmung für diese Auswertelinie deutliche Abweichungen. Während das SST\_TR-Modell und das LKE-Modell in Linars annähernd deckende Druckverläufe entlang der Schaufel liefern, weicht Fluent insbesondere auf der Saugseite doch ein wenig von diesem Verlauf ab.

Abbildung 6.51: Hochdruckstator  $K_h = 75\%$  - Verlauf des statischen Druckes

### 6.6.2 Wandschubspannung an der Saugseite der Schaufel

Den Abschluss der Untersuchungen am Hochdruckstator soll der Vergleich der Wandschubspannung an der gesamten saugseitigen Schaufeloberfläche darstellen. In Abb. 6.52 lassen sich die Konturen der Wandschubspannung an der Saugseite für Linars und Fluent vergleichen. Dabei widerspiegeln die Schaubilder die vorherigen an verschiedenen Auswertelinien gezeigten Ergebnisse.

In Linars scheint Transition nur im oberen und unteren Bereich der Schaufel stattzufinden, während die mittlere Region aufgrund der niedrigen Wandschubspannung durch eine laminare Grenzschicht gekennzeichnet ist. Diese Tatsache wurde schon im vorherigen Abschnitt bei der Auswertelinie bei  $K_h = 50\%$  (Abb. 6.44) festgestellt. Fluent liefert ein sich über den ganzen hinteren Bereich der Schaufel ziehendes transitionales Gebiet, ersichtlich durch die höheren Wandschubspannungen in der gesamten Region der Hinterkante. Damit zeigen die Berechnungsergebnisse aus Fluent entlang der gesamten Schaufelhöhe Transition. Anhand dieses Vergleiches kann somit doch ein erheblicher Unterschied zwischen dem LKE-Modell in Linars und Fluent festgestellt werden.

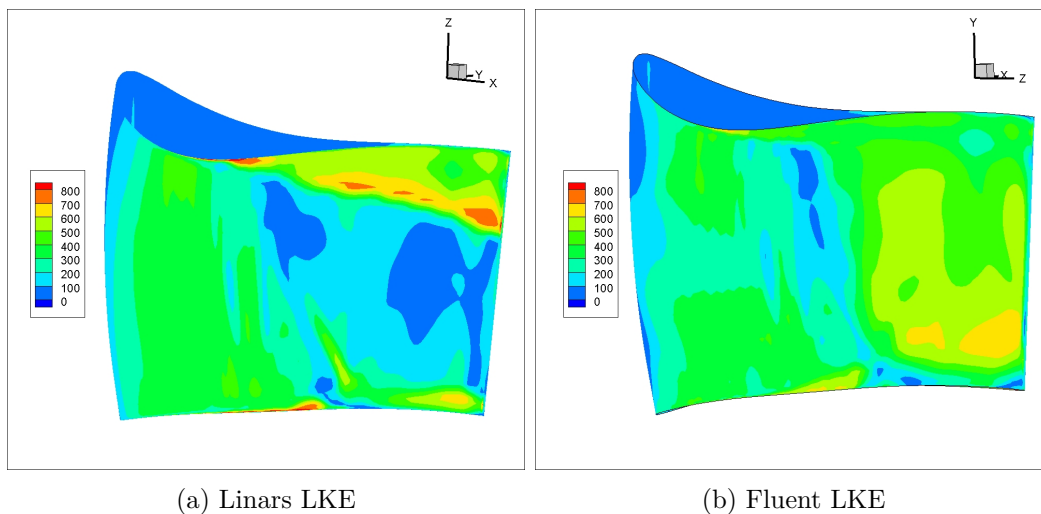


Abbildung 6.52: Wandschubspannung an der Saugseite der Schaufel

### 6.6.3 Hochdruckstator - Zusammenfassende Bewertung

Nach diesem anspruchsvollen dreidimensionalen Testfall können zusätzliche Erkenntnisse für das in Linars implementierte LKE-Transitionsmodell gewonnen werden. Besonders auffallend ist das Verhalten beim Vergleich mit dem bereits in Linars implementierten SST\_TR-Turbulenzmodell, welches für alle bewerteten Auswertelinien im vorderen Bereich des Profils höhere Werte für die Wandschubspannung liefert und damit den Rückschluss nahe legt, dass die Strömung von Beginn an vollturbulentes Charakter aufweist. Das LKE-Modell zeigt jedoch für alle ausgewerteten Fälle im Anfangsstadium der Profilströmung laminares Verhalten und unterstreicht die Transitionsfähigkeit bei relativen Kanalhöhen von  $K_h = 25\%$  und  $K_h = 75\%$  durch das Umschlagen der Grenzschicht. Eigenartigerweise ist dieses Verhalten bei  $K_h = 50\%$  nicht zu beobachten, da das LKE-Modell über der gesamten Profillänge für Linars in laminares Zustand verharrt.

Demgegenüber zeigt das auch in Fluent implementierte LKE-Modell für alle drei Auswertelinien schönes Transitionsverhalten, gekoppelt mit ansteigenden Werten der turbulenten kinetischen Energie im Transitionsgebiet. Beim Vergleich zwischen Fluent und Linars ist jedoch Vorsicht geboten, da die Auswertelinien bei entsprechenden relativen Kanalhöhen nicht vollständig deckungsgleich sein müssen. Der Institutscode Linars arbeitet mit einem strukturierten Berechnungsnetz, welches sich in Richtung der Koordinate  $k$  (radiale Richtung) durch annähernd äquidistante Abstände zwi-

schen den Berechnungszellen auszeichnet. Damit kann aus einer Gesamtanzahl von 68  $k$ -Linien für die gewünschte relative Kanalhöhe eine entsprechende Auswertelinie ausgewählt und ausgewertet werden. Demgegenüber arbeitet Fluent mit einem unstrukturierten Berechnungsnetz womit diese Vorgehensweise nicht möglich ist. Jedoch bietet sich dort die Möglichkeit, mit der sogenannten *Spanwise-Coordinate* entsprechende Flächen relativ zur Schaufelhöhe zu definieren, anhand derer die Auswertung dann erfolgen kann. Die Übereinstimmung der Auswertelinien zwischen den beiden Programmen ist sehr ansprechend, was durch den Vergleich der Ergebnisse bestätigt wird. Geringfügige Abweichungen zwischen den Auswertelinien können jedoch nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Beim Vergleich der Wandschubspannung an der Saugseite der Schaufel (Abb. 6.52) sind beträchtliche Unterschiede für die beiden Modelle festzustellen. Während Fluent entlang der ganzen Schaufelhöhe transitionales Verhalten zeigt, ist dieses Verhalten in Linars nur im Randbereich festzustellen. Es ist anzumerken, dass bei diesem Testfall Konvergenzschwierigkeiten, sowohl für Linars als auch für Fluent aufgetreten sind. So musste die CFL-Zahl extrem nach unten gesetzt werden und auch die Beschleunigung der Berechnung mit Hilfe eines Mehrgitterverfahrens (Multigrid) war in Linars nicht möglich, mit der Folge einer sehr langsamen Konvergenzgeschwindigkeit. Startend bei einer auskonvergierten Lösung (berechnet mit dem SST\_TR-Turbulenzmodell) wurde die Berechnung nach etwa 80000 Zeitschritten ausgewertet, da nur noch marginale Änderungen feststellbar waren und auch aufgrund der zeitlichen Komponente (für 1000 Zeitschritte benötigt Linars an die sechs Stunden). Es war jedoch zu beobachten, dass sich das Transitionsgebiet mit fortschreitender Berechnungsdauer von der oberen Kante nach unten zieht, womit bei einer weiterführenden Berechnung sich das turbulente Gebiet möglicherweise noch vergrößern würde.

Zusammenfassend ist dieser Testfall als sehr anspruchsvoll anzusehen. Das LKE-Modell ist jedoch auch hier in der Lage, Transition zu prognostizieren. Die erhaltenen Berechnungsergebnisse sind jedoch aufgrund der oben getätigten Aussagen mit Vorsicht zu genießen, erlauben aber allemal eine Einschätzung des implementierten LKE-Modells. Mit entsprechenden Eingriffen, welche eine Beschleunigung der Konvergenz erlauben, oder einer zeitintensiven weiterführenden Berechnung könnte sich das Ergebnis in Linars möglicherweise noch deutlicher an jenes von Fluent annähern.

# 7 Zusammenfassende Bewertung und Ausblick

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Prognosefähigkeit transitionaler Strömungen mit Hilfe des Laminar-Kinetic-Energy-Modells untersucht. Nach der anfänglich allgemein gehaltenen Erklärung von transitionalen Strömungen sind im darauffolgenden zweiten Kapitel die Grundzüge der mathematischen Beschreibung von Strömungen in thermischen Turbomaschinen erläutert. Anschließend wird das auf diese Informationen zurückgreifende, institutseigene Strömungssimulationsprogramm Linars vorgestellt, mit dessen Hilfe die Bewertung des neuartigen LKE-Turbulenzmodells erfolgt. Der theoretische Hintergrund und die unterschiedlichen Formulierungen der drei in dieser Arbeit behandelten LKE-Modelle sind im fünften Kapitel behandelt, gefolgt von der Validierung anhand verschiedener Testfälle.

## Zusammenfassende Bewertung der erhaltenen Ergebnisse

Der Testfall der **ebenen Platte** ist besonders gut zur Bewertung der Prognosefähigkeit von transitionalen Strömungen geeignet, da experimentelle Daten für diesen international standardisierten und gut dokumentierten Testfall verfügbar sind. Anhand der erhaltenen Berechnungsergebnisse können doch beachtliche Unterschiede zwischen den drei unterschiedlichen LKE-Modellen festgestellt werden. Besonders die zwei älteren Modelle *Walters/Leylek(2004)* und *Walters/Leylek(2005)* zeigen Schwächen bei der Spezifizierung des Transitionsgebiets, indem sie dieses jeweils zu nahe an der Plattenvorderkante vorhersagen. Zusätzlich reagieren diese zwei Modelle bei Variation der am Eintritt vorgegebenen turbulenten Längenskala physikalisch nicht



sinnvoll, da eine Abnahme dieser Größe ein in Richtung Vorderkante verschobenes Transitionsgebiet zur Folge hat. Das auf der derzeit aktuellsten Veröffentlichung basierende LKE-Modell *Walters/Cokljat* hebt sich von diesen zwei Modellen jedoch deutlich ab, indem sowohl der Transitionszeitpunkt als auch die Länge des Transitionsgebiets sehr gut prognostiziert wird und auch das Verhalten bei Änderung der am Eintritt vorgegebenen Randbedingungen physikalisch nachvollziehbar ist.

Für den Testfall der Strömung über das genormte **NACA-Profil** sind leider keine experimentellen Daten verfügbar, jedoch kann durch Vergleich mit bereits bewährten Turbulenzmodellen und dem kommerziell verfügbaren Code Fluent eine Einschätzung getroffen werden. Alle drei Modelle liefern bei diesem Testfall plausible Ergebnisse, auch wenn die zwei älteren Modelle *Walters/Leylek(2004)* und *Walters/Leylek(2005)* ein etwas in die Länge gezogenes Transitionsgebiet aufweisen. Auffallend ist bei allen Modellen der jeweils spätere Umschlagspunkt von laminarer zu turbulenter Grenzschichtströmung gegenüber dem bereits in Linars verfügbaren SST\_TR-Modell. Auch das in Fluent eingebettete LKE-Modell zeigt diese Tendenz und prognostiziert das Transitionsgebiet etwas früher. In diesem Zusammenhang ist auch das Ablösen der Grenzschicht bei einem Anströmwinkel von  $\alpha = 12^\circ$  bei der Berechnung mit dem Institutscode Linars zu erwähnen, während die mit Fluent erhaltenen Ergebnisse eine anliegende Strömung entlang des gesamten Profils liefern.

Die Berechnungsergebnisse des anspruchsvollen dreidimensionalen Testfalls einer Strömung durch den **Hochdruckstator** einer zweistufigen Turbinenkonfiguration zeigen an der Schaufel teilweise Transitionsverhalten. Erstaunlicherweise schlägt die Strömung beim Modell *Walters/Cokljat* nur in den Randbereichen um, während das LKE-Modell in Fluent entlang der gesamten Schaufelhöhe Transitionsverhalten aufweist. Jedoch sind die Ergebnisse nach den Ausführungen unter *Abschnitt 6.6.3* mit Vorsicht zu genießen, da bei der Berechnung und auch bei der Auswertung Schwierigkeiten bestanden und somit eine endgültige Bewertung des Transitionsverhalten anhand dieses Testfalls nicht zulässig ist. Eine Einschätzung des neuen LKE-Modells ist jedoch möglich.

### **Ausblick**

Die Fähigkeit des neu implementierten LKE-Turbulenzmodells, transitionale Strömungen zu prognostizieren, kann anhand der untersuchten Testfälle nachgewiesen werden. Von den drei unterschiedlichen LKE-Modellen hat sich dabei das Modell *Walters/Cokljat* als das Geeignetste herauskristallisiert, weshalb zukünftige Untersuchungen mit diesem Modell erfolgen sollten. Da sich die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen auf lediglich drei Testfälle beschränken, kann jedoch noch nicht von einer vollständigen Validierung ausgegangen werden. Die Praxisfähigkeit des LKE-Modells im Institutscode Linars muss daher anhand weiterführender Untersuchungen eruiert werden, damit eine endgültige Bewertung der Prognosefähigkeit in Abhängigkeit dieser Ergebnisse getroffen werden kann.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung natürlicher Transition [1] . . . . .	5
5.1	Konzept des „splat mechanism“ zur Produktion von $k_L$ [4] . . . . .	21
6.1	Abklingverhalten von $k_T$ - idente turbulente Längenskala . . . . .	43
6.2	Abklingverhalten von $k_T$ - angepasste turbulente Längenskala . . . . .	44
6.3	Testfall T3A - verwendetes Rechennetz . . . . .	45
6.4	Testfall T3A - Abklingverhalten des Turbulenzgrades . . . . .	47
6.5	Walters/Leylek(2004) - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden . . . . .	49
6.6	Walters/Leylek(2004) - Abklingverhalten von $Tu$ . . . . .	50
6.7	Walters/Leylek(2004) - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Turbulenzmodellen . . . . .	50
6.8	Walters/Leylek(2004) $Tu = 5.6\%$ - Variation von $l_s$ . . . . .	51
6.9	Walters/Leylek(2004) $Tu = 4\%$ - Variation von $l_s$ . . . . .	51
6.10	Walters/Leylek(2005) - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden . . . . .	52
6.11	Walters/Leylek(2005) - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Turbulenzmodellen . . . . .	53
6.12	Walters/Leylek(2005) $Tu = 4\%$ - Variation von $l_s$ . . . . .	54
6.13	Walters/Cokljat - Vergleich Experiment mit numerischer Lösung mit unterschiedlichen Turbulenzgraden . . . . .	55
6.14	Walters/Cokljat - Abklingverhalten des Turbulenzgrades . . . . .	55
6.15	Walters/Cokljat - Vergleich mit bereits in Linars implementierten Tur- bulenzmodellen . . . . .	56
6.16	Walters/Cokljat $Tu = 5.6\%$ - Variation von $l_s$ . . . . .	56
6.17	Walters/Cokljat $Tu = 4\%$ - Variation von $l_s$ . . . . .	57
6.18	Testfall T3A - Vergleich mit Fluent $Tu = 5.6\%$ . . . . .	57
6.19	Testfall T3A - Vergleich mit Fluent $Tu = 4\%$ . . . . .	58

6.20	Testfall T3A - Vergleich mit Fluent $Tu = 0.4\%$ . . . . .	58
6.21	Testfall T3A - Angepasste Randbedingungen . . . . .	59
6.22	Testfall T3A - Abklingverhalten bei modifizierten Randbedingungen .	60
6.23	Testfall NACA0012 - verwendetes Berechnungsgitter . . . . .	61
6.24	Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vor- deren Bereich des Profils - Anströmung $0^\circ$ , $Tu = 5.6\%$ . . . . .	63
6.25	Testfall NACA0012 - $Tu = 5.6\%$ . . . . .	64
6.26	Druckverlauf NACA0012 - $Tu = 5.6\%$ . . . . .	64
6.27	Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vor- deren Bereich des Profils - Anströmung $0^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	65
6.28	Testfall NACA0012 - $Tu = 7\%$ . . . . .	66
6.29	Druckverlauf NACA0012 - $Tu = 7\%$ . . . . .	66
6.30	Turbulente kinetische Energie im Bereich des GS-Umschlages im vor- deren Bereich des Profils - Anströmung $12^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	67
6.31	Testfall NACA0012 - $Tu = 7\%$ , Anströmwinkel $12^\circ$ . . . . .	68
6.32	Geschwindigkeitsverteilung - Anströmwinkel $12^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	69
6.33	Geschwindigkeitsgradient im wandnahen Bereich - Anströmwinkel $12^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	70
6.34	Druckverlauf NACA0012 - $Tu = 7\%$ , Anströmwinkel $12^\circ$ . . . . .	70
6.35	NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent $\alpha=0^\circ$ , $Tu = 5.6\%$ . . . . .	71
6.36	NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent $\alpha=0^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	71
6.37	NACA0012 - Vergleich Linars mit Fluent $\alpha=12^\circ$ , $Tu = 7\%$ . . . . .	72
6.38	Prüfstandskonfiguration [11] . . . . .	74
6.39	Hochdruckstator - Berechnungsgitter . . . . .	75
6.40	Hochdruckstator $K_h = 25\%$ - Verlauf der Wandschubspannung . . . . .	77
6.41	Hochdruckstator $K_h = 25\%$ - Turbulente kinetische Energie . . . . .	78
6.42	Hochdruckstator $K_h = 25\%$ - Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	78
6.43	Hochdruckstator $K_h = 25\%$ - Verlauf des statischen Druckes . . . . .	79
6.44	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Verlauf der Wandschubspannung . . . . .	80
6.45	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Turbulente kinetische Energie . . . . .	80
6.46	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	81
6.47	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Verlauf des statischen Druckes . . . . .	81
6.48	Hochdruckstator $K_h = 75\%$ - Verlauf der Wandschubspannung . . . . .	82
6.49	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Turbulente kinetische Energie . . . . .	83
6.50	Hochdruckstator $K_h = 50\%$ - Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	83
6.51	Hochdruckstator $K_h = 75\%$ - Verlauf des statischen Druckes . . . . .	84
6.52	Wandschubspannung an der Saugseite der Schaufel . . . . .	85

# Literaturverzeichnis

- [1] Walter Österreicher. *Messung des laminar/turbulent-Übergangs an Turbinenschaufeln mittels Heißfilmanemometrie*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2004.
- [2] R. Pečnik. *Transitionsmodellierung in thermischen Turbomaschinen*. Dissertation, Technische Universität Graz, 2007.
- [3] W. Sanz. *Computational Fluid Dynamics*. Vorlesungsskriptum, Technische Universität Graz, 2013.
- [4] D. K. Walters, J. H. Leylek. A New Model for Boundary Layer Transition Using a Single-Point RANS Approach. *ASME J. Turbomach.*, 126:193–202, 2004.
- [5] D.K. Walters, J. H. Leylek. Computational Fluid Dynamics Study of Wake-Induced Transition on a Compressor Flat Plate. *ASME J. Turbomach.*, 127:52–63, 2005.
- [6] D. K. Walters, D. Cokljat. A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations of Transition Flow. *ASME J. Turbomach.*, 130:1–14, 2008.
- [7] R. E. Mayle, A. Schulz. The Path to Predicting Bypass Transition. *ASME J. Turbomach.*, pages 405–411, 1997.
- [8] R. J. Volino. A New Model for Free-Stream Turbulence Effects on Boundary Layers. *ASME J. Turbomach.*, pages 613–620, 1998.

- [9] J. Fürst, J. Přihoda, P. Straka. *Numerical simulation of transitional flows*. Springer-Verlag Wien, 2012.
- [10] A. Tratnig. *Berechnung der instationären transitionalen Strömung durch eine Niederdruckturbinenkaskade mit verschiedenen Turbulenzmodellen*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, 2005.
- [11] R. Spataro, Co.Santner, D. Lengani, E. Göttlich. On the flow evolution through a LP turbine with wide-chord vanes in an S-shaped channel. *Proceedings of ASME Turbo 2012*, 2012.
- [12] M. Egger. *Untersuchung der Strömung um einen Hochdruckstator mit verschiedenen Turbulenzmodellen und CFD-Codes*. Bachelorarbeit, Technische Universität Graz, 2013.