

Daniel Koch, Bakk.techn.

Softwareentwicklung eines low-cost GNSS Vessel Navigation Systems

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur/-in

Masterstudium Geomatics Science



Technische Universität Graz

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Wieser

Institut für Navigation

Graz, März 2012

Deutsche Fassung:
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....
(Unterschrift)

Englische Fassung:

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date

.....
(signature)

Danksagung

Die gegenständliche Diplomarbeit konnte ich im Rahmen meiner Diplomandentätigkeit bei der Firma TeleConsult Austria GmbH Graz, verfassen und ich bedanke mich für die Ermöglichung der Durchführung sehr herzlich bei Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.h.c.mult. Dr.techn. Bernhard Hofmann-Wellenhof, sowie bei allen beteiligten Mitarbeitern für die freundliche Aufnahme.

Besonderer Dank geht an Herrn Dipl.Ing. Markus Troger, meinen fachlichen Betreuer in der Firma TeleConsult Austria GmbH, für die vielseitige Unterstützung und Betreuung und vor allem für sein außerordentliches Engagement.

Weiters bedanke ich mich herzlich bei meinem Betreuer vom Institut für Navigation der TU Graz, Herrn Univ.-Prof. Dipl.Ing. Dr.techn. Manfred Wieser, für seine Unterstützung, sein umsichtiges Begleiten und für das Korrekturlesen meiner Diplomarbeit.

Der TU Delft, NL, besonders Frau Dr. Sandra Verhagen danke ich für die freundliche Bereitstellung der Demoversion der LAMBDA-Methode und für die Überlassung von Arbeitsmaterialien.

Ein herzliches Danke gebührt auch meiner Freundin Beate, die während der letzten Monate auf viel gemeinsame Zeit verzichten musste und mir stets helfend zur Seite stand.

Abschließend gilt ein besonderer Dank meinen Eltern, die mir nicht nur den Berufswunsch ermöglicht haben, sondern auch ständig ein sehr großes Interesse an meiner Arbeit zeigten und mir in der gesamten Studienzzeit emotionalen Beistand leisteten.

Kurzfassung

Für die Steuerung eines Schiffs benötigt der Steuermann die Kenntnis über mindestens drei Parameter: Position, Kurs und Geschwindigkeit. Nur durch diese Parameter ist eine sichere Zielführung gewährleistet.

Zur Ermittlung dieser Parameter gibt es eine Vielzahl von Methoden in der Schifffahrtsnavigation. Die vorliegende Arbeit beschreibt die Softwareentwicklung für ein Vessel Navigation System (VNS) auf Basis von low-cost GPS-Empfängern. Für die Entwicklung der Software wurden alle Systemkomponenten des Navigationssystems ausreichend getestet.

Der erste Teil dieser Arbeit widmet sich dem theoretischen Hintergrund der Arbeit, welcher die satellitengestützte Positionierung mittels GPS-Empfänger zeigt. Des Weiteren wird beschrieben, wie Position, Kurs, und Geschwindigkeit durch relative Positionierung in Echtzeit bestimmt werden können. Im Speziellen wird hier auf die Lösung der Phasenmehrdeutigkeit im Echtzeit-Modus eingegangen. Im zweiten Teil wird auf die Umsetzung und Programmierung der Software eingegangen. Der letzte Teil zeigt Analysen der Ergebnisse eines Testlaufs.

Das Ergebnis stellt eine Software dar, welche alle Parameter, die für die Schifffahrt notwendig sind, in Echtzeit wiedergibt. Die Entwicklung einer derartigen Software ist der erste Schritt zur automatisierten Steuerung eines Schiffs. Ebenfalls kann ein VNS den Steuermann eines Schiffs in sicherheitskritischen Situationen unterstützen und Informationen in Echtzeit liefern.

Abstract

In order to control a vessel, you need to know at least following three parameter: position, course and velocity. The knowledge of these parameters is essential to assure a safe guidance.

The range of methods for vessel navigation, which can provide these three parameters, is huge. The master thesis deals with the software development for a vessel navigation system (VNS), which is based on low-cost GPS receivers. During the development of the software, all components of the navigation system were tested sufficiently.

The first part of this thesis deals with the theoretical background which explains satellite-based positioning using a GPS receiver. This chapter also shows how to determine position, course and velocity based on relative positioning in real-time. The fixing of phase ambiguities in a real time mode is a special issue of this chapter.

The second part of the thesis illustrates the development itself and describes the software. The last part contains a testrun and the data analysis of this test run.

This software demonstrates a vessel navigation system which provides all necessary parameters in real time to operate a vessel safely. The development of such a software is the first step for an automatically steered vessel. Furthermore, in critical situation where the safety of the vessel is endangered, a VNS can support the steerman by proving essential informations in real-time.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Kurzfassung	ii
Abstract	iii
Akronyme	1
1 Einleitung	3
1.1 Motivation	3
2 Theoretischer Hintergrund	5
2.1 Maßeinheiten	5
2.2 Koordinatensysteme	8
2.2.1 Raumfestes Äquatorsystem	8
2.2.2 Erdfestes Äquatorsystem	8
2.2.3 Topozentrisches Horizontsystem	10
2.2.4 Objektkoordinatensystem	11
2.3 Koordinatentransformation	12
2.3.1 Transformation erdfestes - raumfestes Äquatorsystem	12
2.3.2 Transformation erdfestes Äquatorsystem - topozentrisches Horizontsystem	13
2.3.3 Transformation topozentrisches Horizontsystem - Objektkoordinatensystem	13
3 Satellitengestützte Positionierung	14
3.1 Einleitung	14
3.1.1 GPS-Dienste	14
3.1.2 GPS-Systemkonfiguration	15
3.1.3 GPS-Signalstruktur	15
3.2 Prinzip der satellitengestützten Positionierung	16
3.2.1 Fehlereinflüsse	17
3.3 Einzelpunktbestimmung mittels Codepseudoentfernungen	18
3.3.1 Modellierung von Störfaktoren	19
3.3.2 Ausgleich nach kleinsten Quadraten	19
3.3.3 Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs	20
3.3.4 Gewichtung des Systems	22
3.3.5 Berechnungsschritte	22

4	Relative Positionierung	25
4.1	Die Beobachtung der Trägerphase	25
4.2	Einfachdifferenzen (single differences)	27
4.3	Doppeldifferenzen (double differences)	28
4.4	Dreifachdifferenzen (triple differences)	28
4.5	Korrelation der Trägerphasenkombinationen	29
4.5.1	Korrelation bei Einfachdifferenzen	29
4.5.2	Korrelation bei Doppeldifferenzen	30
4.5.3	Bestimmung des Referenzsatelliten	31
4.6	Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs	32
4.6.1	Gewichtung des Systems	34
4.7	Beobachtungsmodi bei relativer Positionierung	35
4.7.1	Statisch relativer Modus	35
4.7.2	Pseudokinematischer Modus	35
4.7.3	Semikinematischer Modus	35
4.7.4	Real-time kinematischer Modus	35
5	Fixierung der Phasenmehrdeutigkeit	36
5.1	Einleitung	36
5.2	Lösungsmethoden	36
5.2.1	Suchmethoden in der Koordinatendomäne	36
5.2.2	Suchmethoden in der Ambiguitätendomäne	37
5.3	LAMBDA-Methode	38
5.3.1	Einleitung	38
5.3.2	Reparametrisierung des Integerproblems	39
5.3.3	Z-Transformation	40
5.3.4	Bestimmung der Größe des Suchraums	42
5.3.5	Sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate	44
5.3.6	Schätzung der fixierten Basislinienkomponenten	47
5.4	Beispiele zur LAMBDA-Methode	48
5.4.1	2D-Beispiel	48
5.4.2	Bestimmung der Varianz-Kovarianzmatrix der fixierten Ambiguitäten	51
6	Konzept eines low-cost GPS vessel navigation systems	52
6.1	Bestimmung der Schiffsposition	52
6.2	Bestimmung der Fahrtgeschwindigkeit	52
6.3	Bestimmung des Steuerkurses	53
6.3.1	Bestimmung des Headings durch Einzelpunktbestimmung	54
6.3.2	Bestimmung des Headings durch Richtungsänderung einer Basislinie	54
6.3.3	Bestimmung des momentanen Headings mittels relativer Positionierung	56
7	Systemkomponenten des VNS	57
7.1	GPS Empfänger	58
7.2	Prozessoreinheit	59
7.3	Antennen	59

7.4	Synchronisierung der Systemkomponenten	60
7.4.1	Prädiktion der Trägerphase durch Kalman Filterung	60
7.4.2	Extrapolation bzw. Rekonstruktion der Trägerphase durch Dopplermessung	60
8	Softwareentwicklung	64
8.1	Einlesen der Daten	64
8.2	Akquirierung der Ephemeridendaten	65
8.3	Berechnung der Satellitenposition	66
8.4	Bestimmung der Schiffsposition	66
8.5	Bestimmung der Schiffsgeschwindigkeit	67
8.6	Synchronisierung der Empfänger	67
8.7	Relative Positionierung	67
8.7.1	Selektion der Satelliten	67
8.7.2	Ausgleich nach L_2 -Norm	67
8.7.3	Fixierung der Ambiguitäten	68
8.7.4	Ablauf der iterativen Initialisierungsphase	68
8.8	Berechnung des Headings	69
9	Evaluierung einer statischen Initialisierungsphase	70
9.1	2D-Schiffsposition	72
9.2	Evaluierung der berechneten Doppeldifferenzen	73
9.3	Evaluierung der float Basislinie	74
9.4	Zeitreihe der fixierten Ambiguitäten	75
9.5	Evaluierung der fixierten Basislinie	76
9.6	Zeitreihe des Headings innerhalb der Initialisierungsphase	77
9.7	Basislinie nach der Initialisierungsphase	78
9.8	Vergleich VNS mit HEADNAV-System der TCA	80
9.9	Fazit der iterativen Initialisierungsphase	80
10	Zusammenfassung und Ausblick	81
10.1	Zusammenfassung	81
10.1.1	Schiffsposition	81
10.1.2	Geschwindigkeit	81
10.1.3	Heading	81
10.2	Ausblick	82
A	Berechnung von Satellitenpositionen	83
B	Berechnung von Azimut und Elevation	85
C	Modellierung von Ionosphäre und Troposphäre	86
C.1	Ionosphärische Refraktion	86
C.2	Troposphärische Refraktion	87
D	Modifizierter bubble-sort	88

E Meridiankonvergenz

89

Literaturverzeichnis

92

Akronyme

A

AFM	Ambiguity Function Method
AROF	Ambiguity Resolution on the Fly
ASCII	American Standard Code for Information Interchange

C

C/A	Coarse/Acquisition
CEP	Circular Error Probable
COG	Course over Ground
CTD	Course to Destination
CTS	Course to Steer
CPU	Central Processing Unit

D

DoD	Department of Defence
DOP	Dilution of Precision

E

ECDIS	Electronic Chart Display and Information System
EGNOS	European Geostationary Navigation Overlay Service
EVK	Evaluation Kit

F

FARA	Fast Ambiguity Resolution Approach
FASF	Fast Ambiguity Search Filter

G

GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
GSV	GPS Satellites in View

H

HDOP	Horizontal Dilution of Precision
------	----------------------------------

I

ISO International Standardization Organization

L

LAMBDA Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment

LSAST Least-Squares Ambiguity Search Technique

M

MAV Moving Average

MSAS Multi-functional Satellite Augmentation System

N

NMEA National Marine Electronic Association

P

PDOP Position Dilution of Precision

PRN Pseudo Random Noise

R

RTK Real-Time Kinematic

RTCM The Radio Technical Commission for Maritime Services

S

SBAS Satellite-Based Augmentation System

SNR Signal to Noise Ratio

SOG Speed over Ground

SPI Serial Port Interface

T

TCA TeleConsult Austria

TU Technische Universität

ToE Time of Ephemeris

O

OMEGA Optimal Method for Estimating GPS Ambiguities

U

UTC Universal Time Coordinated

V

VDOP Vertical Dilution of Precision

W

WAAS Wide Area Augmentation System

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Schon seit jeher war die Navigation der wesentlichste Bestandteil in der Seefahrt. Routenplanung und Zielführung sind Grundlagen einer sicheren Navigation, sei es vor 500 Jahren oder heute. Ebenso sind die Parameter, welche es zu bestimmen gilt, dieselben geblieben: Position, Kurs und Geschwindigkeit. Für die Bestimmung dieser Parameter lässt sich die hochtechnologische Welt von heute allerdings nicht mit der damaligen Zeit vergleichen. Immer neuere Methoden zur Navigation werden entwickelt, um Position, Kurs und Geschwindigkeit noch genauer bestimmen zu können. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass auch die Zielführung genauer und effizienter wird.

Für viele kinematische Anwendungen ist eine schnelle Bestimmung dieser Parameter unbedingt notwendig. Manche Flugzeuge oder Raketen bewegen sich schneller als der Schall, hierbei ist eine sichere Zielführung abhängig von der Wiederholrate der Eruiierung von Position, Kurs und Geschwindigkeit. Die Trägheitsnavigation macht es möglich, unter Verwendung von Gyroskopen und Beschleunigungssensoren mit über 2000Hz eine bestmögliche Zielführung zu gewährleisten. Ein sogenanntes INS (Inertial Navigation System) ist autonom, in der Größe kompakt und leicht handhabbar. Jedoch sind die Kosten für ein derartiges System zum heutigen Stand enorm. Zudem benötigen über 60% aller kinematischen Anwendungen keine vergleichbar hohen Wiederholraten. Für Schifffahrtsanwendungen genügt wegen der geringen Fortbewegungsgeschwindigkeit von maximal 40 Knoten ein Bruchteil der Wiederholraten von INS-Systemen. Die Kosten-Nutzenrechnung für INS würde für die Schifffahrt nicht aufgehen.

Für die Navigation auf See griff man seit den 1970er Jahren auf terrestrische Navigationssysteme zurück, um den altbewährten Sextanten und DR (Dead Reckoning) abzulösen. Unter LORAN-C (Long Range Navigation) verbirgt sich ein Hyperbelnavigationssystem, mit welchem Schiffe positioniert werden können. Die sehr gute Wiederholgenauigkeit für die Bestimmung der Position des Schiffs kann ebenfalls für die Kursbestimmung verwendet werden. Jedoch gab die USA im Jahr 2009 bekannt, dass LORAN-C aus Kostengründen stillgelegt wird. Eine neue Methode zur Navigation auf See wird benötigt.

GNSS (Global Navigation Satellite Systems) steht als Überbegriff für alle satellitengestützten Positionierungssysteme, welche in Betrieb (GPS, GLONASS) oder geplant (GALILEO, BEIDOU oder COMPASS) sind. Diese Systeme sind für geodätische Anwendungen in der Vermessung so-

wie für Navigationsanwendungen heute maßstabgebend.

Im Jahr 2000 wurde bei GPS SA (Selected Availability) abgeschaltet und somit war dieses Satellitennavigationssystem auch für den zivilen Markt nutzbar. Immer mehr Möglichkeiten für die Anwendung dieses Systems wurden entwickelt, so auch für die Schifffahrt. Ein System für die Schifffahrt, welches alle notwendigen Navigationsparameter liefert und noch zusätzliche digitale Informationen über Untiefen, Küstenlinien oder über andere Schiffe, um Kollisionen zu vermeiden, bereitstellt, nennt sich ECDIS (Electronic Chart Display and Information System). Dieses high-end Produkt kann für verschiedenste Schifffahrtsanwendungen genutzt werden.

Ein wesentlicher Nachteil dieses Produkts, so wie bei INS, sind die Kosten. Oft genügen für zivile Nutzungen in der Seefahrt die zuvor erwähnten grundlegenden Parameter der Navigation: Position, Kurs und Geschwindigkeit. Diese fundamentalen Parameter der Schifffahrt können durch GNSS schon sehr kostengünstig bestimmt werden. Besonders in der Binnenschifffahrt würde ein low-cost GNSS VNS (Vessel Navigation System) völlig ausreichen, denn hier sind die Anforderungen, welche an ein derartiges System gestellt werden, nicht so hoch.

“Es kann festgestellt werden, dass es bereits eine Reihe genügend guter Navigationssysteme gibt, die aber hinsichtlich der Entwicklung zu weitgehend automatischer Schiffsführung den Anforderungen nicht genügen können.[vgl. Schildt, 2008, S.173]“

Die folgende Arbeit beinhaltet die Entwicklung einer Software für ein low-cost Schifffahrts-Navigationssystem. Im Speziellen wurde auf die Bestimmung der Parameter: Position, Kurs und Geschwindigkeit eingegangen. Auf die Bestimmung von Untiefen, Kollisionsabschätzungen mit anderen Schiffen wird hier nicht eingegangen.

Die Software wurde im Zuge des Projekts „GNSS Heading“ bei der Firma Teleconsult Austria GmbH entwickelt und getestet.

Kapitel 2

Theoretischer Hintergrund

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Begriffe und Terminologien, welche in der Navigation am Wasser vorkommen, erklärt und ausführlich beschrieben. Viele englische Begriffe werden in dieser Arbeit ins Deutsche übernommen. Diese Begriffe müssen erklärt werden, um dem Leser nachfolgende Kapitel leichter verständlich zu machen.

2.1 Maßeinheiten

In der Seefahrt werden verschiedenste Begriffe und Maßeinheiten verwendet, welche für Landapplikationen in der Navigation ungeeignet sind oder sich nicht durchgesetzt haben. In diesem Unterkapitel finden sich nur die wichtigsten Begriffe und deren Beschreibung wieder. Nicht alle werden in den folgendem Kapitel verwendet.

Seemeile

Die Seemeile (sm) stellt die gebräuchliche Maßeinheit für die Beschreibung von Distanzen dar. Sie wird aus einer Bogenminute am mittleren Erdäquator ermittelt. Aus der Norm ISO-31-1, 1992 wird die Seemeile mit 1852m festgelegt. Die Seemeile ist nicht zu verwechseln mit der Landmeile, welche im englischsprachigen Raum sehr verbreitet ist.

Knoten

Abgeleitet aus der Seemeile wird in der Seefahrt der Knoten (kn) als Maßeinheit für Geschwindigkeiten verwendet. Knoten werden mit einer Seemeile pro Stunde berechnet [vgl. Thompson and Taylor, 2008, S.10].

Als Richtungswinkel wird in der Navigation im Allgemeinen der Winkel zwischen einer Geraden und einer Referenzgeraden beschrieben. Die Gerade würde in der Schifffahrt der gedachten Kiellinie (Längsachse des Schiffes) entsprechen. Bei der Definition der Referenzrichtung gibt es jedoch Unterscheidungen. Der folgende Formalismus zur Beschreibung von Richtungswinkeln wurde aus Maier, 1993, S.64-70 entnommen.

rechtweisend Nord (rwN)

Beschreibt die Richtung zum geographischen Nordpol.

missweisend Nord (mwN)

Missweisend Nord ist die Richtung der magnetisch missweisenden Meridiane, welche am magnetischen Nord-Südpol konvergieren. Die Richtungen rwN und mwN unterscheiden sich durch die Variation. Die magnetische Missweisung wird auch Deklination genannt, welche zudem orts- und zeitabhängig ist.

Magnetkompass-Nord (MgN)

Magnetkompass-Nord und mwN unterscheiden sich durch die Deviation (Wert der Missweisung). Durch die Deviation korrigierter mwN kann als MgN angesehen werden. Die Deviation ist ortsabhängig und kann durch Deviationstabellen bestimmt werden.

Karten-Nord

In einer gebräuchlichen Seekarte mit Mercatorabbildung entspricht diese Referenzrichtung einem Meridian. Im Allgemeinen kann rwN auf Karten-Nord über die Meridiankonvergenz umgerechnet werden. Die Richtung mwN und Karten-Nord unterscheiden sich durch die Grivation.

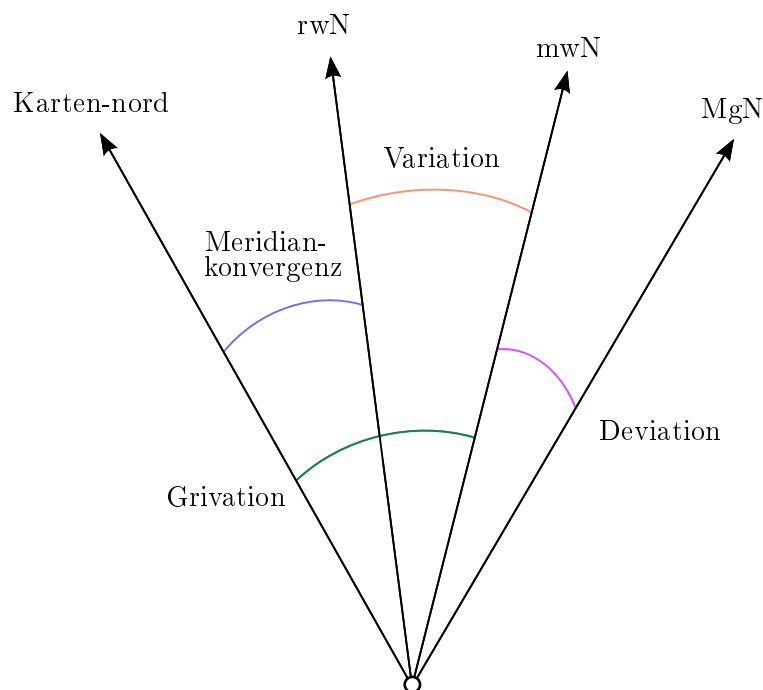


Abbildung 2.1: Nordrichtungen, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.103]

Die unterschiedlichen Nordrichtungen werden in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

Im Unterschied zur Landnavigation, gibt es in der Seefahrt, sowie auch daraus abgeleitet in der Luftfahrt, verschiedenste Kursangaben. Folgende Deklarationen der verschiedenen Kursangaben in der Schifffahrt wurden der englischen Literatur entnommen [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.104].

Heading

Heading oder Steuerkursrichtung ist die momentane Ausrichtung der Kiellängsachse des Schiffs zu einer zuvor definierten Referenzrichtung. Wird die rechtweisende Nordrichtung als Bezugsrichtung angenommen, so wird der Steuerkurswinkel als Azimut bezeichnet. Winkel werden in der Navigation oft mit der Maßeinheit Altgrad beschrieben und im Uhrzeigersinn gezählt. Anders als bei der Peilung wird bei der Kursrichtung auf ein bewegtes Objekt Bezug genommen [vgl. Troger, 2008, S.5-6].

In der Seefahrt wird nicht nur zwischen Richtungswinkeln unterschieden, sondern auch zwischen Kursangaben. Folgende Kursdefinitionen entstammen aus [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.104].

(CTD) Course to destination

Der Zielkurs beschreibt den Kurs von einer derzeitigen Position zum beabsichtigten Ziel. Würde dieser Kurs auf einer Seekarte eingezeichnet werden, so würde dies eine Gerade zwischen der Position des Schiffs und dem Ziel darstellen, sofern es sich um eine Mercatorabbildung handelt.

(COG) Course over ground

Der COG stellt den momentanen Kurs in Bezug zur Erdoberfläche dar. Dieser Kurs ist unregelmäßig, denn verschiedene Störquellen, wie zum Beispiel die Strömung des Gewässers haben auf den COG Einfluss.

(CMG) Course made good

CMG beschreibt dem gemittelten Kurs vom Ausgangspunkt bis zum derzeitigen Standpunkt des Schiffs.

(CTS) Course to steer

Der Steuerkurs stellt jenen Kurs dar, welcher eingehalten werden muss, um wieder auf Zielkurs (CTD) zu gelangen. Der Unterschied zwischen CTD und CTS ist die Abdrift, welche aus der Strömung des Gewässers resultiert.

2.2 Koordinatensysteme

Zur Beschreibung von Positionen von Objekten in einem wohldefinierten reproduzierbaren geometrischen Raum werden in der Navigation sowie in der Geodäsie Bezugssysteme verwendet. Beim Begriff Bezugssystem muss zwischen der Systemdefinition und deren Realisierung, dem Bezugsrahmen, unterschieden werden.

Bei der Definition eines Bezugssystems werden die Lagerung des Ursprungs sowie die Ausrichtung der Koordinatenachsen festgelegt. Der Bezugsrahmen beschreibt hingegen die eigentliche Realisierung des definierten Bezugssystems. Im englischen Sprachraum wird zwischen „reference system“ und „reference frame“ unterschieden, wohingegen im deutschen Sprachraum oftmals nicht zwischen den beiden Begriffen unterschieden wird und lediglich der Begriff „Referenzsystem“ verwendet wird.

Die in der Navigation gebräuchlichen Koordinatensysteme werden im folgenden Kapitel erklärt. Das Superskript der Koordinatenachsen kennzeichnet die unterschiedlichen Bezugssysteme. Durch das Subskript können die Achsen im Bezugssystem unterschieden werden. Die Definitionen und der Formalismus im folgenden Kapitel sind an die Publikation [Hofmann-Wellenhof et al., 2003] angelehnt.

2.2.1 Raumfestes Äquatorsystem

Beim raumfesten Äquatorsystem, oder auch ortsunabhängiges Äquatorsystem genannt, handelt es sich um ein quasi-inertiales Bezugssystem. Ein inertiales Bezugssystem befindet sich im Zustand der Ruhe oder besitzt eine unbeschleunigte geradlinige Bewegung. In diesem Bezugssystem gelten die Newton'schen Bewegungsgleichungen. Da der Ursprung des raumfesten Äquatorsystems allerdings durch die jährliche Bewegung um die Sonne geringfügigen Beschleunigungen unterliegt, wird es als quasi-inertiales Bezugssystem bezeichnet [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.19]. Der Ursprung des raumfesten Äquatorsystems liegt im Massenzentrum der Erde. Die x_3^i -Achse fällt mit der mittleren Rotationsachse der Erde zusammen. Die x_1^i -Achse ergibt sich aus der Schnittgeraden zwischen Äquator- und Ekliptikebene und zeigt in Richtung des wahren Frühlingspunkts [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.20]. Die x_2^i -Achse ergänzt das raumfeste Äquatorsystem zu einem kartesischen Rechtssystem.

Im englischen Sprachraum wird das raumfeste Äquatorsystem als „earth centered space fixed system“ bezeichnet.

2.2.2 Erdfestes Äquatorsystem

Der Ursprung des erdfesten Äquatorsystems befindet sich ebenfalls im Massenzentrum der Erde. Die mittlere Rotationsachse der Erde dient wiederum zur Definition der x_3^e -Achse. Die x_1^e -Achse ergibt sich aus der Schnittgeraden zwischen der Äquatorebene und der Meridianebene von Greenwich und zeigt Richtung Greenwich-Ortsmeridian. Die x_2^e -Achse vervollständigt das erdfeste Äquatorsystem zu einem kartesischen Rechtssystem [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.21]. Im englischen Sprachraum wird dieses System als ECEF (Earth Centered Earth Fixed) System bezeichnet. Daraus kann abgeleitet werden, dass dieses System fest mit der Erde ver-

bunden ist und somit mitrotiert. Ein geeignetes erdfestes terrestrisches Äquatorsystem kann beispielsweise durch ein Triple räumlicher Koordinaten eines globalen Netzes von fundamentalen Beobachtungsstationen festgelegt werden. Der ITRF (International Terrestrial Reference Frame), welcher durch den IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) realisiert wurde, stellt beispielsweise eine Realisierung eines erdfesten Äquatorsystems dar.

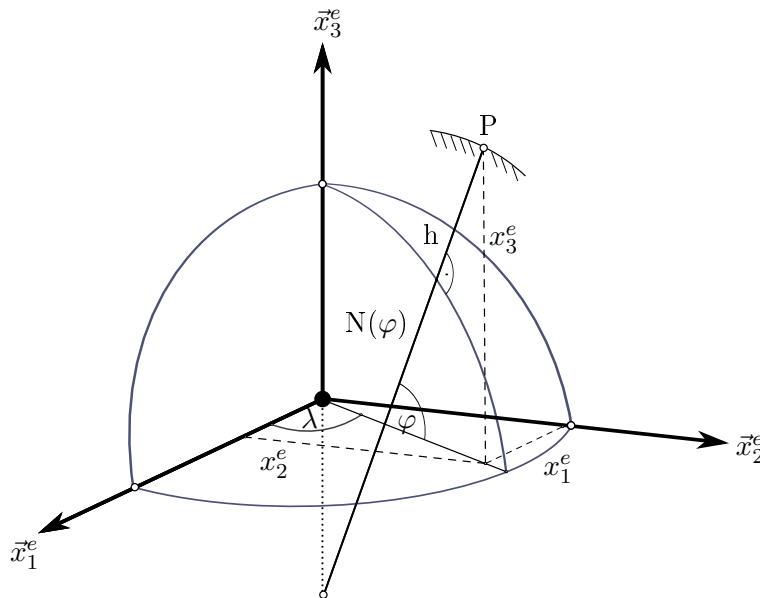


Abbildung 2.2: Kartesische und ellipsoidische Koordinaten, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.24]

Abbildung 2.2 zeigt den geometrischen Zusammenhang zwischen ellipsoidischen und kartesischen Koordinaten. Ellipsoidische Koordinaten können allerdings nur in Verbindung mit einem Referenzellipsoid angegeben werden.

Formel 2.1 beschreibt den mathematischen Zusammenhang zwischen den Koordinaten.

$$\vec{X}^e = \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N(\varphi) + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N(\varphi) + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N(\varphi) + h\right) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Parameter a und b beschreiben die große und kleine Halbachse des Referenzellipsoids. Der Normalkrümmungsradius $N(\varphi)$ ist in Formel 2.2 ersichtlich.

$$N(\varphi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.2)$$

Ein für die Navigation auf der Erde essentielles Referenzsystem ist das World Geodetic System 84 (WGS84). Das entsprechende Ellipsoid dient als wohldefinierte Rechenfläche, welche bestmöglich an die Erdoberfläche angepasst wurde, um Punkte auf der Erde zu beschreiben. Dieses System bildet die Basis für die Satellitennavigation (siehe Kapitel 3).

2.2.3 Topozentrisches Horizontsystem

Das topozentrische Horizontsystem wird oftmals direkt für terrestrische geodätische Beobachtungen verwendet, da es sich hervorragend als Koordinatensystem für Beobachtungen wie Azimut, Zenit- und Raumstrecken eignet. Der Ursprung befindet sich im Topozentrum, das heißt, der Ursprung des Koordinatensystems kann sich in einem beliebigen Punkt an oder nahe der Erdoberfläche befinden [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.22]. Die x_1^l -Achse zeigt Richtung Norden, die x_2^l -Achse zeigt Richtung Osten und die x_3^l -Achse ergänzt das System zu einem Linkssystem und zeigt somit Richtung Zenit. Um per Definition ein kartesisches Rechtssystem zu erhalten, muss die x_3^l -Achse in Richtung des Nadirs zeigen. Oftmals wird ein kartesisches Rechtssystem für Koordinatentransformationen bevorzugt [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.19].

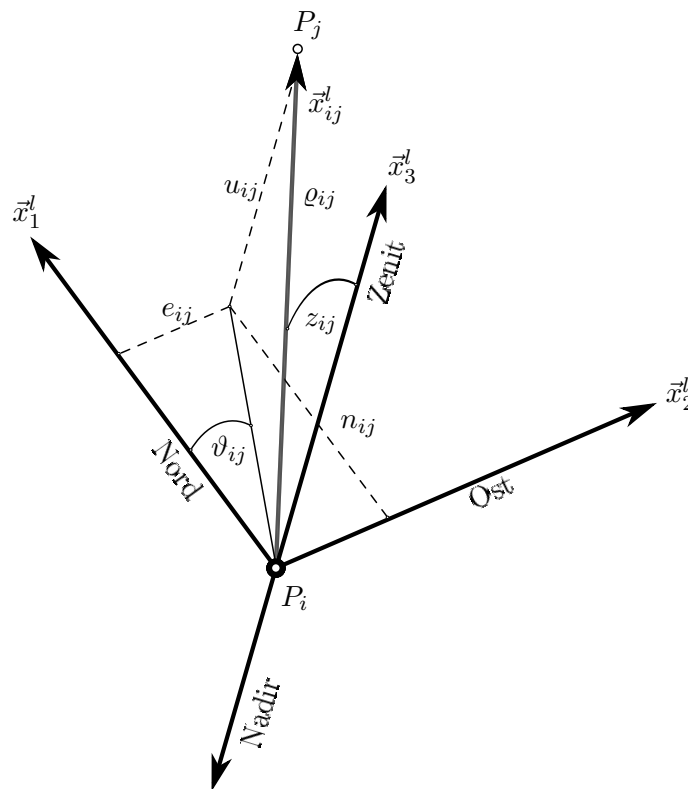


Abbildung 2.3: Beobachtungen im Topozentrischen Horizontsystem, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.22]

$$\vec{x}_{ij}^l = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \rho_{ij} \begin{bmatrix} \sin z_{ij} \cos \vartheta_{ij} \\ \sin z_{ij} \sin \vartheta_{ij} \\ \cos z_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Aus Messungen der Parameter Azimut ϑ_{ij} , Zenitdistanz z_{ij} und Raumdistanz ρ_{ij} von einem Punkt P_i aus, kann ein Punkt P_j im topozentrischen Horizontsystem beschrieben werden. Der Ursprung P_i ist der Beobachter, welcher sich auf der Erdoberfläche befindet. Aus Formel 2.3 kann aus den Beobachtungsgrößen der Punkt P_j eindeutig mathematisch beschrieben werden. Der Parameter ρ_{ij} beschreibt die räumliche Distanz zwischen P_i und P_j . Abbildung 2.3 zeigt den geometrischen Sachverhalt im topozentrischen Horizontsystem, welches im englischen Sprachge-

brauch als *local-level frame* besser bekannt ist.

2.2.4 Objektkoordinatensystem

Ist ein Koordinatensystem mit dem sich bewegenden Objekt fest verbunden, so nennt sich dieses Bezugssystem Objektkoordinatensystem. Es ist im allgemeinen Fall ein rechtsdrehendes dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem, welches im Masseschwerpunkt des Objekts gelagert wird. Verwendet wird dieses System zur Bestimmung der relativen Ausrichtung des Objekts zu einem definierten topozentrischen Horizontsystem. Diese räumliche Ausrichtung wird als Attitude bezeichnet [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.27]. Roll, pitch und yaw beschreiben in der englischen Sprache die Attitudeparameter. Eine Rotation um die Objektlängsachse x_1^b wird als roll bezeichnet. Wird um die Objektquerachse x_2^b rotiert, so definiert dies die Rotation pitch. Die auf beide Rotationsachsen orthogonal stehende Rotationsachse x_3^b fällt mit der Objekthochachse zusammen. Wird um die Hochachse gedreht, entsteht der Rotationswinkel yaw. In der Schifffahrt steht man bei ruhigem Gewässer einem eindimensionalen Problem gegenüber, um die Ausrichtung der Schiffslängsachse zu beschreiben. Hier wird der Ausdruck yaw von dem Terminus Heading (siehe Abschnitt 2.1) abgelöst.

Diese Rotationswinkel werden verwendet, um eine Koordinatentransformation von einem Objektkoordinatensystem in ein topozentrisches Horizontsystem durchzuführen.

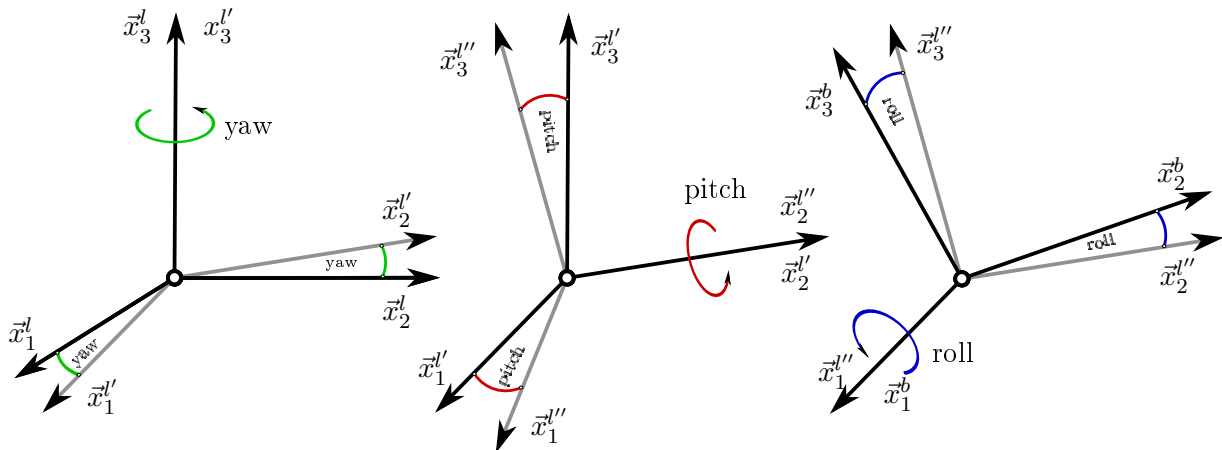


Abbildung 2.4: Rotationswinkel im Objektkoordinatensystem, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.27]

2.3 Koordinatentransformation

Um Koordinaten von einem Bezugssystem in ein anderes Bezugssystem überzuführen, wird eine Koordinatentransformation verwendet. Grundsätzlich kann ein jedes der zuvor beschriebenen Bezugssysteme in alle restlichen Systeme transformiert werden. Allerdings ist hier auf die Reihenfolge zu achten. Folgende Transformationen sind zwischen den beschriebenen Bezugssystemen möglich, die jeweils inverse Transformation ist auch möglich.

2.3.1 Transformation erdfestes - raumfestes Äquatorsystem

Raumfestes- und erdfestes Äquatorsystem besitzen den gleichen Ursprung und eine gemeinsame mittlere Rotationsachse. Somit benötigt man für eine Transformation dieser Bezugssysteme lediglich eine Rotation um die mittlere Rotationsachse der Erde. Der Rotationswinkel Θ_0 stellt die Greenwich Sternzeit dar. In Abbildung 2.5 wird der Zusammenhang zwischen erdfestem und raumfestem Äquatorsystem grafisch dargestellt.

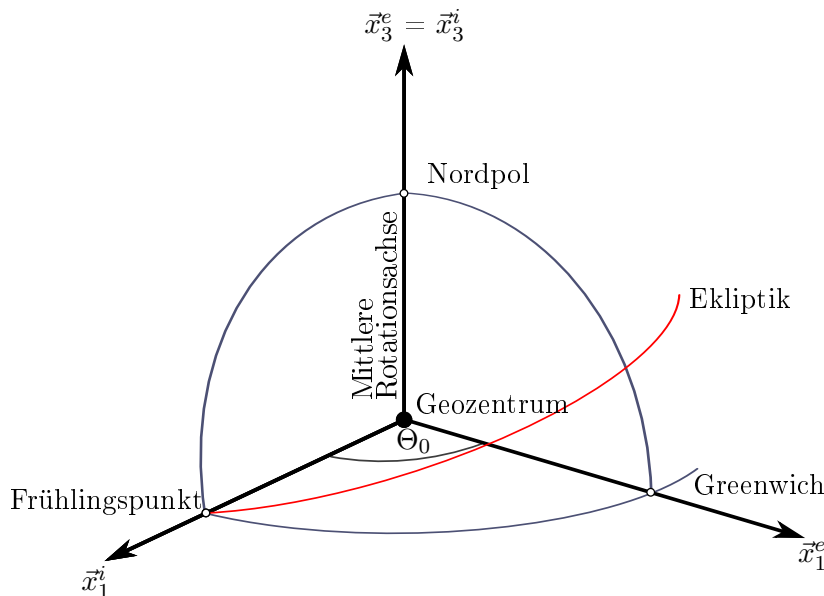


Abbildung 2.5: Zusammenhang der Äquatorsysteme, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhop et al., 2003, S.21]

Wird ein Vektor \vec{X}_e im erdfesten Äquatorsystem, welches das Startsystem darstellt, definiert, so dient folgende Rotationsmatrix $\mathbf{R}(\Theta_0)$ zur Transformation ins raumfeste Äquatorsystem, welches das Zielsystem darstellt.

$$\mathbf{R}_e^i = \mathbf{R}_3(-\Theta_0) = \begin{bmatrix} \cos \Theta_0 & -\sin \Theta_0 & 0 \\ \sin \Theta_0 & \cos \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Der Vektor \vec{X}_i im raumfesten Äquatorsystem kann durch

$$\vec{X}_i = \mathbf{R}_e^i \vec{X}_e \quad (2.5)$$

berechnet werden.

In Wirklichkeit besteht diese Transformation aus mehreren Einzeldrehungen, welche allerdings in der Navigation vernachlässigt werden. In der Satellitengeodäsie werden neben dem Stundenwinkel auch noch die Polbewegung, Nutation und Präzession berücksichtigt.

2.3.2 Transformation erdfestes Äquatorsystem - topozentrisches Horizontsystem

Eine Transformation zwischen einem topozentrischen Horizontsystem (hier: rechtsdrehend) und dem erdfesten Äquatorsystem ist in der Geodäsie zwingend notwendig, da jeder Punkt auf der Erdoberfläche den Ursprung eines Horizontsystems darstellt. Um Messungen auf der Erde in ein einheitliches System zu bringen, wird hier in das topozentrische Horizontsystem transformiert. Im Gegensatz zu anderen Transformationen, können hier nur Differenzvektoren durch die folgende Rotationsmatrix in das Zielsystem transformiert werden [vgl. Troger, 2008, S.11]. Diese Rotationsmatrix wird abhängig vom Ursprung des topozentrischen Horizontsystems in ellipsoidischen Koordinaten φ und λ wie folgt aufgestellt.

$$\mathbf{R}_e^1 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.3.3 Transformation topozentrisches Horizontsystem - Objektkoordinatensystem

Wie bereits in Abschnitt 2.2.4 beschrieben, gibt es zwischen dem topozentrischen Horizontsystem und dem Objektkoordinatensystem den Zusammenhang über die Attitudeparameter.

Jedoch wird in der Navigation stets von rechtsgedrehten Koordinatensystemen ausgegangen, somit wird auch das topozentrische Horizontsystem so definiert. Die Rotationsmatrix enthält die Parameter roll, pitch und yaw.

$$\mathbf{R}_1^b = \mathbf{R}_1(r) \mathbf{R}_2(p) \mathbf{R}_3(y) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_1^b = \begin{bmatrix} \cos p \cos y & \cos p \sin y & -\sin p \\ \sin r \sin p \cos y - \cos r \sin y & \sin r \sin p \sin y + \cos r \cos y & \sin r \cos p \\ \cos r \sin p \cos y + \sin r \sin y & \cos r \sin p \sin y - \sin r \cos y & \cos r \cos p \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Kapitel 3

Satellitengestützte Positionierung

Ein globales Satellitennavigationssystem GNSS (Global Navigation Satellite System) stellt ein Positionierungssystem durch Satelliten dar, welches in der Vermessung, Land-, See- und Luftfahrtnavigation verwendet wird, um dreidimensionale Positionen von Objekten bestimmen zu können. Das derzeit meist genutzte Satellitennavigationssystem ist GPS (Global Positioning System), welches auch für die Definition und Instandhaltung einer GPS-Zeitskala verwendet wird. Das Verteidigungsministerium (DoD) der USA betreibt GPS, das System ist kostenlos für jeden Nutzer und ist wetterunabhängig. Die wichtigste Bedingung bei einer Messung ist der ständige Sichtkontakt zwischen Empfänger und Satelliten. Dies ist für die Seefahrt leichter zu realisieren als für die Landnavigation im urbanen Raum. Andere Systeme wie Galileo, GLONASS, BEIDOU oder COMPASS werden in den kommenden Jahren den Markt der Satelliten Navigationssysteme erweitern. Das Messprinzip der Laufzeitmessung der Signale bleibt jedoch bei allen Systemen gleich.

Im nun folgenden Kapitel wird beschrieben, welche Dienste GPS anbietet, wie die Signalstruktur der GPS-Satellitensignale aussieht und wie eine Einzelpunktbestimmung mathematisch beschrieben werden kann. Die Definitionen und der Formalismus im folgenden Kapitel sind an die Publikationen Hofmann-Wellenhof et al., 2003 und Schildt, 2008 angelehnt.

3.1 Einleitung

3.1.1 GPS-Dienste

GPS bietet verschiedene Dienste an, welche für zivile und für militärische Nutzung bestimmt sind.

Standard Positioning Service (SPS)

Solange das Verteidigungsministerium der USA diesen Dienst zur Verfügung stellt, ist er für zivile Anwendungen nutzbar. Mit Hilfe dieses Dienstes kann eine Ortung mittels GPS, je nach Empfänger, auf $\pm 13\text{m}$ global durchgeführt werden [Kowoma, 2012]. Der DRMS (Distance Root Mean Square) besagt, dass 63.2% aller Messungen eine Genauigkeit von weniger als 100m aufweisen.

Precise Positioning Service (PPS)

Dieser Dienst ist ausschließlich für das US Militär konzipiert worden und ist verschlüsselt und somit dem zivilen Nutzer nicht zugänglich. Demnach wird PPS trotz seiner höheren Genauigkeit in dieser Arbeit nicht verwendet.

3.1.2 GPS-Systemkonfiguration

Um einen kontinuierlichen Betrieb von GPS sicherzustellen, wurde das NAVSTAR (*NAVigation Satellite Timing and Ranging*) System in 3 Segmente eingeteilt.

Bodensegment

Das Bodensegment besteht aus einem weltumspannenden Netz von Monitorstationen. Diese Stationen beobachten GPS-Satelliten in den jeweiligen Orbits. Die Informationen dieser Stationen werden an die *Master Control Station* in Colorado Springs CA gesendet, um Bahnkorrekturen zu berechnen, sowie mögliche Fehlfunktionen der Satelliten zu detektieren [vgl. Schildt, 2008, S.45-46]. Die korrigierten Ephemeriden werden über Uplink-Stationen wieder an die Satelliten gesendet, welche für den Nutzer zur Verfügung stehen.

Raumsegment

Das Raumsegment besteht bei GPS aus 24 aktiven, sowie 3 passiven Satelliten, welche nahezu kreisförmig die Erde auf 20.200km Höhe umrunden. Ein GPS Satellit benötigt 11h 57,96min für eine Erdumrundung [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.398]. Die Satelliten sind auf 6 Bahnebenen (jeweils 55° Inklination), welche um jeweils 60° zueinander separiert sind, aufgeteilt. Die Satelliten sind jedoch innerhalb des Orbits unregelmäßig angeordnet [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.398]. Diese Konstellation gewährleistet eine optimale weltweite Abdeckung.

Nutzersegment

Das Nutzersegment stellt die Summe aller GPS Empfänger dar, ob auf Land, See oder in der Luft.

3.1.3 GPS-Signalstruktur

Abgeleitet von einer Grundfrequenz $f_0 : 10,23\text{MHz}$, verwendet GPS derzeit 3 Trägerfrequenzen ($L_1 : 1.575,420\text{MHz}$, $L_2 : 1.227,600\text{ MHz}$ und $L_5 : 1.176,450\text{MHz}$) um digitale Informationen phasenmoduliert vom Satelliten im Orbit zur Erde zu übertragen.

Diese Frequenzen liegen im L- Band (1.0 - 2.0 GHz), um den Gebrauch von unhandlichen Richtantennen für GPS-Anwendungen zu vermeiden [vgl. Schildt, 2008, S.52]. Auf den Trägersignalen sind zum Einen Satelliteninformationen in Form von Ephemeriden moduliert und zum anderen wird ein PRN (*Pseudo Random Noise*) Code angebracht, welcher verwendet wird, um die Laufzeit des Signals bestimmen. Um GPS Satelliten eindeutig identifizieren zu können, wird ein Codemultiplexverfahren verwendet, um alle eintreffenden Signale zu differenzieren.

Einen bestimmten PRN Code stellt der C/A (*coarse acquisition*) Code dar, welcher alle Millisekunden wiederholt wird. Durch diese hohe Wiederholrate, liegt die Länge dieses Ranging-Codes bei 300 km. Beim C/A-Code ist die Mehrdeutigkeit des Signals leichter zu lösen als bei

Beobachtungen der Trägerphase. Die aus den Trägerfrequenzen L_1 und L_2 abgeleiteten Wellenlängen betragen 19,05 cm bzw. 24,45 cm. Bei der Beobachtung der Phasenlage des Trägersignals wird lediglich die relative Änderung der Entfernung zwischen Satellit und Empfänger bestimmt. Hier ist es deutlich schwieriger als beim C/A-Code die Mehrdeutigkeiten zu eruieren [vgl. Gaggl, 2004, S.3].

Für militärische Zwecke ist der verschlüsselte P-Code wichtiger. Dieser ist für zivile Nutzer nicht verwendbar, da der P-Code eine sehr niedrige Wiederholrate von 266,4 Tagen besitzt. Der C/A-Code ist auf Band L_1 moduliert, sowie der P-Code, welcher auch zusätzlich auf L_2 moduliert wird [vgl. Schildt, 2008, S.62].

3.2 Prinzip der satellitengestützten Positionierung

Das grundlegende Prinzip der Navigation und Ortung mit Hilfe von Satellitennavigationssystemen beruht auf Entfernungsmessungen. Durch die Laufzeit von Radiosignalen kann die Entfernung zwischen Satellit und Empfänger bestimmt werden. Erst unter Zuhilfenahme von Satellitenpositionen im Orbit kann eine Positionsbestimmung auf der Erde durchgeführt werden.

Die dazugehörige Gleichung der satellitengestützten Positionierung lautet

$$\varrho_r^s = \|\vec{\varrho}^s - \vec{\varrho}_r\| \quad (3.1)$$

und kann grafisch in Abbildung 3.1 entnommen werden.

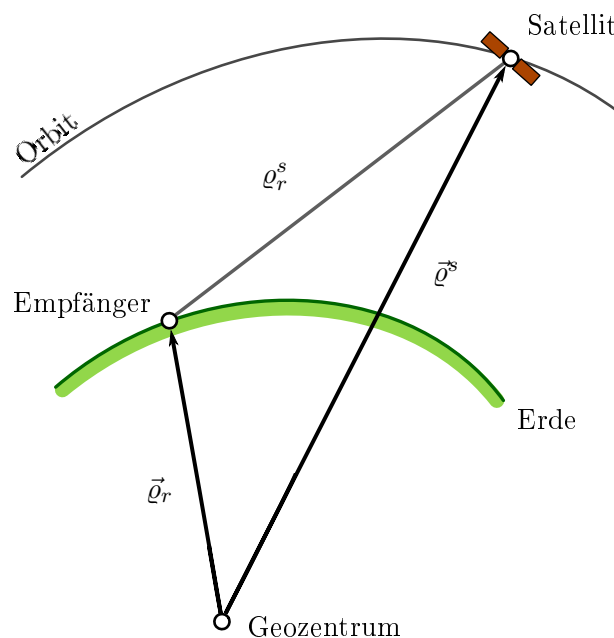


Abbildung 3.1: Prinzip der Satellitengestützten Positionierung, modifiziert nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.4

Mathematisch gesehen, würden für die Bestimmung einer dreidimensionalen Position bereits 3 Satelliten ausreichen, um Formel 3.1 eindeutig lösen zu können. Jedoch sind die Uhren im Satelliten und jene im Empfänger nicht synchron. Genau hier liegt der Unterschied zwischen geometrischer

Distanz ϱ_r^s und Codepseudoentfernung R_r^s . Eine Codepseudoentfernung beinhaltet die geometrische Distanz ϱ_r^s , sowie ein zusätzliches $\Delta\varrho_r^s$, welches sich aus dem kombinierten Uhrenfehler δ_r^s aus Satelliten- und Empfängeruhr, ausgedrückt als geometrische Distanz, zusammensetzt. (siehe Formel 3.2) [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.4]. Insgesamt sind 4 simultane Messungen von verschiedenen Satelliten notwendig, um das Gleichungssystem inklusive kombiniertem Uhrenfehler zu lösen.

In der Praxis ist es nun so, dass der Satellitenuhrenfehler δ^s aus den Informationen der Ephemeriden modelliert werden kann. Somit wird der Satellitenuhrenfehler nicht mitgeschätzt. Des Weiteren ist es notwendig, alle Koordinaten in einem einheitlichen Bezugssystem zu verwenden.

$$R_r^s = \varrho_r^s + c(\delta_r - \delta^s) = \varrho_r^s + c\delta_r^s = \varrho_r^s + \Delta\varrho_r^s \quad (3.2)$$

Der Parameter c in Formel 3.2 beschreibt die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

3.2.1 Fehlereinflüsse

Das GPS-Signal unterliegt einer Vielzahl von Fehlereinflüssen. Die Effekte werden in 3 Kategorien eingeteilt, um sie besser differenzieren zu können.

Satellitenabhängige Fehler $\Delta\varrho^s$

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt, kann der Satellitenuhrenfehler modelliert werden. Ein wesentlich größerer Einfluss bei den satellitenabhängigen Fehlern ist die ungenaue Bestimmung des Satellitenorbits. Die Satellitenposition ist abhängig von der Genauigkeit der Ephemeriden, welche den Orbit beschreiben. In der Navigation sind hauptsächlich Broadcast-Ephemeriden in Verwendung. Mit Hilfe dieser Ephemeriden kann die Satellitenposition auf 1m genau bestimmt werden. Zusammengefasst kann dieser Störterm mit $\Delta\varrho^s$ beschrieben werden.

Fehler in der Signalausbreitung $\Delta\varrho_r^s$

Das Signal im Raum (SiS - *Signal in Space*) unterliegt mehreren Störfaktoren. Tritt das Signal in die Erdatmosphäre ein, so unterliegt es einer ionosphärischen Refraktion. Die Ionosphäre ist ein dispersives Medium und somit frequenzabhängig. Dieser Effekt der Refraktion $\Delta\varrho_{iono}^s$ kann durch die Linearkombination von mehreren Frequenzen reduziert bis eliminiert werden. Der nächste Störfaktor ist die Troposphäre. Die Troposphäre wird in der Meteorologie als Advektionsschicht bezeichnet und kann mit den Parametern Temperatur, Luftdruck und partieller Wasserdampfdruck beschrieben werden. Der daraus resultierende Term $\Delta\varrho_{tropo}^s$ kann aus diesen Parametern modelliert werden.

Empfängerabhängige Fehler $\Delta\varrho_r$

Analog zum Satellitenuhrenfehler tritt auch im Empfänger ein Uhrenfehler auf. Dieser Fehler δ_r wird in der Praxis durch ein meist überbestimmtes Gleichungssystem mitgeschätzt. Auch in der Antenne des Empfängers selbst entstehen Fehler. Durch eine Variation des Antennenphasenzentrums, welches sich physisch nicht im geometrischen Zentrum der Antenne befinden muss, entstehen Fehler. Alle diese Fehler können im Term $\Delta\varrho_r$ zusammengefasst dargestellt werden.

Systematische Fehler ϵ_r

Ein wesentlich größerer und schwer reduzierbarer Fehler ist der Mehrwegeeffekt. Reflektierende

Flächen in der Nähe der Antenne, können die Laufzeit des Signals künstlich verändern. Durch eine Interferenz der Signale, kann dieser Effekt speziell bei Codemessungen auftreten. Dieser Fehler kann durch geodätische Antennen reduziert oder durch Umsicht des Benutzers vermieden werden.

Natürliches Rauschen ϵ

In der Geodäsie wird generell von natürlichen Beobachtungen ohne Systematik ausgegangen. Somit weist das Messrauschen, im optimalen Fall, eine standardisierte Normalverteilung auf.

Unter der Berücksichtigung dieser Fehlerterme kann die Beobachtungsgleichung in der Satellitengestützten Positionierung reparametrisiert werden. Formel 3.3 zeigt den endgültigen funktionalen Zusammenhang, um Codepseudoentfernungen für die Positionierung heranzuziehen.

$$R_r^s(t) = \varrho_r^s(t) + c(\delta_r(t) - \delta^s(t)) + \Delta\varrho_{iono}^s(t) + \Delta\varrho_{tropo}^s(t) + \epsilon_r(t) + \epsilon(t) \quad (3.3)$$

Die Formel 3.2 besitzt zusätzlich noch eine zeitliche Abhängigkeit, da Satelliten sowie Empfänger auf der Erde, bei Applikationen in der Navigation, in Bewegung sind.

3.3 Einzelpunktbestimmung mittels Codepseudoentfernungen

Wie bereits im vorherigen Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, werden für eine dreidimensionale Positionierung bei GPS mindestens 4 Satelliten benötigt, um das Gleichungssystem eindeutig lösen zu können. Die folgenden Abschnitte zeigen anhand von 4 Satelliten j, k, l und m die Linearisierung der nichtlinearen Beobachtungsgleichung und den Ausgleich nach kleinsten Quadraten. In Abbildung 4.2 wird der Sachverhalt grafisch dargestellt.

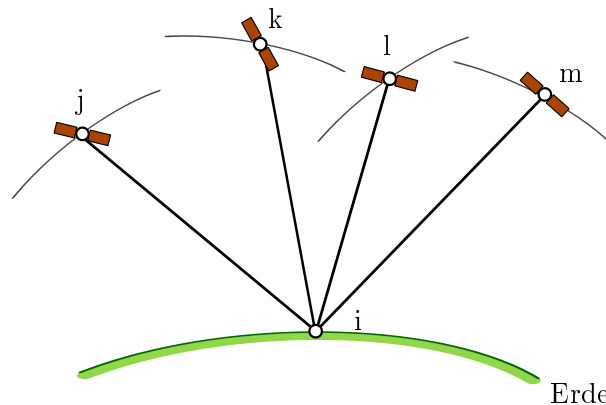


Abbildung 3.2: Satellitengestützte Positionierung

Vor der Linearisierung des Beobachtungsmodells muss unterschieden werden, welche Parameter geschätzt und welche modelliert werden können, wie Tabelle 3.1 zeigt.

Trotz seiner periodischen Eigenschaft, wird der Mehrwegeeffekt $\epsilon_r(t)$ in der Praxis weder geschätzt noch modelliert. Parameter $\vec{\varrho}_r(t)$ entspricht der dreidimensionalen Position des Empfängers $[x_r(t), y_r(t), z_r(t)]$ in einem erdfesten Äquatorsystem.

Tabelle 3.1: Einteilung der Parameter

modelliert		geschätzt	
$\delta^s(t)$	[s]	$\delta_r(t)$	[s]
$\Delta\varrho_{iono}^s(t)$	[m]	$\vec{\varrho}_r(t)$	[m]
$\Delta\varrho_{tropo}^s(t)$	[m]		

3.3.1 Modellierung von Störfaktoren

Modellierung des Satellitenuhrenfehlers δ^s

In den broadcast Ephemeriden, welche von jedem GPS Satelliten übermittelt werden, sind auch Parameter enthalten, welche die charakteristischen Eigenschaften der Atomuhren im Satelliten beschreiben. Diese Daten, in Form von Koeffizienten, werden herangezogen, um den Uhrenfehler $\delta^s(t)$ zu bestimmen. Durch ein charakteristisches Polynom 2. Grades

$$\delta^s(t) = a_0 + a_1\Delta t_c + a_2\Delta t_c^2 \quad (3.4)$$

kann $\delta^s(t)$ bestimmt werden. Wobei Δt_c die zeitliche Differenz der aktuellen Zeit t_{oc} (*time of clock*) im Empfänger, zur Referenzepoche der Ephemeriden t_{oe} (*time of ephemeris*) darstellt. Grundsätzlich sind broadcast Ephemeriden ± 2 Stunden nach der Referenzepoche t_{oe} gültig.

Modellierung der ionosphärischen Refraktion $\Delta\varrho_{iono}^s$

Die ionosphärische Refraktion ist nicht nur, wie bereits erwähnt, von der Frequenz abhängig, sondern auch von der Position des Satelliten gegenüber dem Beobachter auf der Erde. Signale von niedrig stehenden Satelliten besitzen einen längeren Weg durch die Atmosphäre um bei der Antenne des Empfängers anzukommen. Hier ist im Allgemeinen die Refraktion höher. Desweiteren ist die ionosphärische Refraktion vom *Total Electronic Content* (TEC) abhängig, welcher die Elektronendichte in der Ionosphäre angibt. Bei GPS kann der Effekt dieser Refraktion durch ein Klobuchar Modell verringert werden. Die Koeffizienten dieses Modells werden in der Navigationsnachricht mitgesendet.

Modellierung der troposphärischen Refraktion $\Delta\varrho_{tropo}^s$

Die Troposphäre stellt ein nicht dispersives Medium dar, welches durch die Parameter Luftdruck, Temperatur und partieller Wasserdampfdruck beschrieben wird. Auch hier ist die Elevation zum Satelliten entscheidend. Modelle wie Hopfield oder Saastamonien werden in der Praxis verwendet um die troposphärische Refraktion zu modellieren.

3.3.2 Ausgleich nach kleinsten Quadraten

Ein System von linearen Gleichungen kann in der linearen Algebra allgemein mit

$$\vec{l} = \mathbf{A}\vec{x} \quad (3.5)$$

beschrieben werden. Der Vektor \vec{x} stellt implizit alle unbekannt Parameter dar und wird mit einer Koeffizientenmatrix \mathbf{A} , oder auch Design-Matrix genannt, multipliziert. Im Vektor \vec{l} befin-

den sich die Beobachtungen.

Beim Ausgleichverfahren in der Geodäsie wird stets als Bedingung gesetzt, dass die L_2 -Norm des Verbesserungsvektors minimiert werden muss. Formel 3.6 zeigt die Minimumsbedingung.

$$\vec{v}^T \mathbf{P} \vec{v} = (\vec{l} - \mathbf{A}\vec{x})^T P (\vec{l} - \mathbf{A}\vec{x}) = \textit{Minimum!} \quad (3.6)$$

Diese Norm ist mit der Normalverteilung verknüpft und somit für Beobachtungen in der Satellitennavigation bestens geeignet. Der Nachteil besteht darin, dass bei auftretenden Ausreißern in den Beobachtungen, die L_2 -Norm nicht robust genug ist, um den Ausreißer aufzudecken. Dieser fließt dann in das Ergebnis ein.

3.3.3 Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs

Für die Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs wird Formel 3.7 herangezogen, in der bereits die Parameter der ionosphärischen und troposphärischen Refraktion und der Satellitenuhrenfehler als modelliert gelten. Somit sind die zu schätzenden Parameter die Empfängerposition $\vec{\varrho}_r$ und der Empfängeruhrenfehler δ_r . Die Satellitenposition $\vec{\varrho}^s$ kann aus den Broadcast-Ephemeriden berechnet werden.

$$R_r^s(t) = \varrho_r^s(t) + c\delta_r(t) - c\delta^s(t) + \Delta\varrho_{iono}^s(t) + \Delta\varrho_{tropo}^s(t) \quad (3.7)$$

Alle nichtlinearen Parameter der Formel 3.7 sind in der Distanz ϱ_r^s enthalten. Dies bedeutet, dass die Distanz ϱ_r^s , wie Formel 3.8 zeigt, linearisiert werden muss.

$$\varrho_r^s(t) = \sqrt{(x^s(t) - x_r(t))^2 + (y^s(t) - y_r(t))^2 + (z^s(t) - z_r(t))^2} \quad (3.8)$$

Für den Taylorpunkt

$$\vec{\varrho}_{r0} = [x_{r0}, y_{r0}, z_{r0}] \quad (3.9)$$

wird eine approximative Empfängerposition herangezogen.

Der Taylorpunkt $\vec{\varrho}_{r0}$ wird in Formel 3.8 gesetzt und ergibt eine approximierte Distanz

$$\varrho_{r0}^s(t) = \sqrt{(x^s(t) - x_{r0})^2 + (y^s(t) - y_{r0})^2 + (z^s(t) - z_{r0})^2}. \quad (3.10)$$

Die Taylorreihe, welche nach dem linearen Glied abgebrochen wird, ist in Formel 3.11 ersichtlich. Die neuen Unbekannten sind demnach $\Delta x_r(t)$, $\Delta y_r(t)$ und $\Delta z_r(t)$.

$$\begin{aligned} f(x_r(t), y_r(t), z_r(t)) &\equiv f(x_{r0} + \Delta x_r(t), y_{r0} + \Delta y_r(t), z_{r0} + \Delta z_r(t)) = \\ &f(x_{r0}, y_{r0}, z_{r0}) + \left. \frac{\partial f(x_r(t), y_r(t), z_r(t))}{\partial x_r(t)} \right|_{x_r(t)=x_{r0}(t)} \Delta x_r(t) \\ &+ \left. \frac{\partial f(x_r(t), y_r(t), z_r(t))}{\partial y_r(t)} \right|_{y_r(t)=y_{r0}(t)} \Delta y_r(t) \\ &+ \left. \frac{\partial f(x_r(t), y_r(t), z_r(t))}{\partial z_r(t)} \right|_{z_r(t)=z_{r0}(t)} \Delta z_r(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die partiellen Ableitungen der Distanz $\varrho_r^s(t)$ zeigt Formel 3.12.

$$\varrho_r^s(t) = \varrho_{r0}^s - \frac{x^s(t) - x_{r0}}{\varrho_{r0}^s} \Delta x_r(t) - \frac{y^s(t) - y_{r0}}{\varrho_{r0}^s} \Delta y_r(t) - \frac{z^s(t) - z_{r0}}{\varrho_{r0}^s} \Delta z_r(t) \quad (3.12)$$

Die Distanz $\varrho_r^s(t)$ aus Formel 3.7 wird durch die nun linearisierten Terme aus Formel 3.12 substituiert. Resultierend ergibt sich Formel 3.13.

$$\begin{aligned} R_r^s(t) = & \varrho_{r0}^s(t) - \frac{x^s(t) - x_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta x_r(t) - \frac{y^s(t) - y_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta y_r(t) \\ & - \frac{z^s(t) - z_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta z_r(t) + c\delta_r(t) - c\delta^s(t) + \Delta\varrho_{iono}^s(t) + \Delta\varrho_{tropo}^s(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Neben den Beobachtungen werden die bereits modellierten Parameter auf die linke Seite der Formel 3.13 gebracht, sodass die unbekanntnen Terme auf der rechten Seite der Gleichung stehen (siehe Formel 3.14).

$$\begin{aligned} R_r^s(t) + c\delta^s(t) - \Delta\varrho_{iono}^s(t) - \Delta\varrho_{tropo}^s(t) - \varrho_{r0}^s(t) = & -\frac{x^s(t) - x_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta x_r(t) \\ & -\frac{y^s(t) - y_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta y_r(t) - \frac{z^s(t) - z_{r0}}{\varrho_{r0}^s(t)} \Delta z_r(t) + c\delta_r(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die linke Seite der Formel 3.14 abzüglich $\varrho_{r0}^s(t)$, entspricht nun dem Beobachtungsvektor des linearisierten Gleichungssystems. Aus der rechten Seite ergibt sich die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} .

$$\delta l_r^s(t) = R_r^s(t) + c\delta^s(t) - \Delta\varrho_{iono}^s(t) - \Delta\varrho_{tropo}^s(t) - \varrho_{r0}^s(t) \quad (3.15)$$

Wird die Anzahl der Satelliten mit 4 angenommen, so stellt dies die Mindestkonfiguration dar um das Gleichungssystem eindeutig zu lösen. Wie bereits in Abbildung 3.2 dargestellt, wurden die Satelliten j, k, l und m vom Empfänger i beobachtet. Die daraus resultierende Koeffizientenmatrix \mathbf{A} wird in Formel 3.16 gezeigt. Das jeweilige Superskript stellt den beobachteten Satelliten dar. Im Subskript wird immer der Empfänger i dargestellt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{x^j(t) - x_i(t)}{\varrho_i^j(t)} & -\frac{y^j(t) - y_i(t)}{\varrho_i^j(t)} & -\frac{z^j(t) - z_i(t)}{\varrho_i^j(t)} & 1 \\ -\frac{x^k(t) - x_i(t)}{\varrho_i^k(t)} & -\frac{y^k(t) - y_i(t)}{\varrho_i^k(t)} & -\frac{z^k(t) - z_i(t)}{\varrho_i^k(t)} & 1 \\ -\frac{x^l(t) - x_i(t)}{\varrho_i^l(t)} & -\frac{y^l(t) - y_i(t)}{\varrho_i^l(t)} & -\frac{z^l(t) - z_i(t)}{\varrho_i^l(t)} & 1 \\ -\frac{x^m(t) - x_i(t)}{\varrho_i^m(t)} & -\frac{y^m(t) - y_i(t)}{\varrho_i^m(t)} & -\frac{z^m(t) - z_i(t)}{\varrho_i^m(t)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Der resultierende Beobachtungsvektor lässt sich wie in Formel 3.17 aufstellen.

$$\delta \vec{l}(t) = \begin{bmatrix} R_i^j(t) + c\delta^j(t) - \Delta\varrho_{iono}^j(t) - \Delta\varrho_{tropo}^j(t) - \varrho_i^j(t) \\ R_i^k(t) + c\delta^k(t) - \Delta\varrho_{iono}^k(t) - \Delta\varrho_{tropo}^k(t) - \varrho_i^k(t) \\ R_i^l(t) + c\delta^l(t) - \Delta\varrho_{iono}^l(t) - \Delta\varrho_{tropo}^l(t) - \varrho_i^l(t) \\ R_i^m(t) + c\delta^m(t) - \Delta\varrho_{iono}^m(t) - \Delta\varrho_{tropo}^m(t) - \varrho_i^m(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Das Ergebnis des Ausgleichs ist der Vektor

$$\vec{x} = [\Delta x_i(t), \Delta y_i(t), \Delta z_i(t), c\delta_i(t)] \quad (3.18)$$

welcher die unbekannt Parameter enthält. Durch diese Zuschläge kann durch Formel 3.19 vom approximierten Taylorpunkt die geschätzte Empfängerposition bestimmt werden.

$$\vec{\varrho}_r = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i0} + \Delta x_i(t) \\ y_{i0} + \Delta y_i(t) \\ z_{i0} + \Delta z_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.3.4 Gewichtung des Systems

In der satellitengestützten Positionierung wird angenommen, dass die Messungen der Signale von GNSS Satelliten unkorreliert stattfinden. Jedoch sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit. Für die Gewichtung des Gleichungssystems können verschiedene Ansätze verwendet werden. Signale können aufgrund ihres Rauschverhaltens, SNR (*signal to noise ratio*) gewichtet werden oder über die Elevation des Satelliten.

Wird die Elevation als Kriterium für die Gewichtung der Signale verwendet, so geschieht dies über UERE Tabellen. Der UERE (*user equivalent range error*) erlaubt Schätzungen für den zu erwartenden Fehler einer Positionslösung, die mit Hilfe von Codepseudoentfernungen ermittelt wird. Tabelle 3.2 zeigt die Gewichte der Matrix \mathbf{P} abhängig von der Satellitenelevation. Zwischen den Elevationen kann linear interpoliert werden. Für den Eintrag in die Gewichtsmatrix muss der Reziprokwert eingeführt werden.

Tabelle 3.2: Elevationsabhängigkeit des UERE, Quelle: Troger, 2009, S.10

Elevation	5°	50°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	90°
$\sigma_{UERE}[\text{m}]$	8.44	7.70	7.09	6.59	5.81	5.29	4.96	4.76	4.60

3.3.5 Berechnungsschritte

Für die Berechnung der Empfängerposition $\varrho_r(t)$ müsste der Aussendezeitpunkt des Signals von jedem Satelliten genauestens bekannt sein. Dieser Sendezeitpunkt t^s ist jedoch unbekannt, deswegen muss die Empfängerposition iterativ bestimmt werden. Folgender Algorithmus zeigt, wie aus Codepseudoentfernungen eine Einzelpunktbestimmung erfolgen kann:

1. Approximation der räumlichen Distanz $\varrho_r^s(t)$

Die Entfernungen zwischen Empfänger r und jedem Satelliten wird im 1. Iterationsschritt mit der unkorrigierten Codepseudoentfernung approximiert, siehe Formel 3.20. Die wahre Entfernung ist zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt, da weder die Satellitenposition noch die genaue Empfängerposition bekannt ist.

$$\varrho_r^s(t) \approx R_r^s(t) \quad (3.20)$$

Der Empfängeruhrenfehler $\delta_r(t)$ ist ebenfalls noch unbekannt, und wird hier mit Null angenommen.

$$\delta_r(t) = 0 \quad (3.21)$$

2. Bestimmung des Aussendezeitpunkts t^s

Um den Aussendezeitpunkt des Signals zu bestimmen, wird vom Empfangszeitpunkt t_r die Laufzeit des Signals $\Delta t_r^s(t)$ abgezogen. Ebenfalls wird der Empfängeruhrenfehler $\delta_r(t)$ angebracht.

$$\Delta t_r^s(t) = \varrho_r^s(t)/c \quad (3.22)$$

Der Aussendezeitpunkt des Signals t^s wird mit Formel 3.23 bestimmt.

$$t^s = t_r - \Delta t_r^s(t) - \delta_r(t) \quad (3.23)$$

3. Modellierung des Satellitenuhrenfehlers $\delta^s(t^s)$

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, kann der Satellitenuhrenfehler $\delta^s(t^s)$ aus einem charakteristischen Polynom 2. Grades bestimmt werden. Jedoch wird für den Fehler noch ein relativistischer Effekt angebracht, da die Uhr im Satelliten wegen der hohen Geschwindigkeit des Satelliten im Orbit langsamer läuft, siehe Formel 3.24.

$$\delta^s(t^s) = a_0 + a_1 \Delta t_c^s + a_2 \Delta t_c^{s^2} + \delta_{rel}^s(t^s) \quad (3.24)$$

mit

$$\delta_{rel}^s(t^s) = F_{rel} e \sqrt{a} \sin(E(t^s)), \quad (3.25)$$

wobei der relativistische Term mit

$$F_{rel} = -2 \frac{\sqrt{GM}}{c^2} \quad (3.26)$$

berechnet wird. Die zu verwendeten Parameter sind in Tabelle A.1 ersichtlich.

Die Korrektur $\delta^s(t^s)$ wird an den bereits berechneten Sendezeitpunkt t^s angebracht, siehe Formel 3.27.

$$t_{corr} = t^s - \delta^s(t^s) \quad (3.27)$$

4. Berechnung der Satellitenposition $\bar{\varrho}^s(t_{corr})$ aus broadcast Ephemeriden

Die Satellitenposition im erdfesten Äquatrosystem kann zum korrigierten Aussendezeitpunkt t_{corr} berechnet werden. (Siehe Anhang A)

5. Berücksichtigung der Erdrotation

Die berechnete Satellitenposition $\bar{\varrho}^s(t_{corr})$ muss um die Erdrotation korrigiert werden. Deswegen muss die Satellitenposition um den Winkel $\delta\alpha$ gegen die Erdrotation gedreht werden. Der Winkel $\delta\alpha$ beschreibt einen infinitesimalen Winkel, um den sich die Erde während der Laufzeit des Signals Δt_r^s weiterdreht. Somit kann die Satellitenposition zum Zeitpunkt t_r dargestellt werden. Die Laufzeit eines GPS Signals beträgt ungefähr 0,07

Sekunden, somit dreht sich in dieser Zeit die Erde um 33 m am mittleren Äquator in Richtung Osten weiter.

$$\mathbf{R}_3(\omega_E \Delta t_r^s) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_E \Delta t_r^s) & \sin(\omega_E \Delta t_r^s) & 0 \\ -\sin(\omega_E \Delta t_r^s) & \cos(\omega_E \Delta t_r^s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation in [rad/s] wird mit dem Parameter ω_E angegeben.

6. Berechnung von Azimut und Elevation der Satelliten

Dieser Berechnungsschritt für Azimut und Elevation ist in Anhang B ersichtlich.

7. Modellierung der Refraktionsterme $\Delta_{iono}^s(t_{corr})$ und $\Delta_{tropo}^s(t_{corr})$

Die in Schritt 6 berechneten Elevationswinkel werden als Eingangsgröße verwendet, um die Refraktionen modellieren zu können. Des Weiteren werden die Klobucharparameter aus der Navigationsnachricht benötigt, um $\Delta_{iono}^s(t_{corr})$ zu eruiieren. Für die Modellierung der Refraktion $\Delta_{tropo}^s(t_{corr})$, werden die Parameter Temperatur, Luftdruck, partieller Wasserdampfdruck und die Zenitdistanz eines jeden Satelliten benötigt. Der Berechnungsschritt ist in Anhang C ersichtlich.

8. Aufstellen der Komponenten für den nichtlinearen Ausgleich

Durch die berechnete Satellitenposition $\vec{\rho}^s(t_{corr})$ und der approximierten Empfängerposition $\varrho_r(t)$ kann die Designmatrix \mathbf{A} , die Gewichtsmatrix \mathbf{P} und der Beobachtungsvektor $\vec{l}(t_{corr})$ berechnet werden. Siehe Abschnitt 3.3.3 und 3.3.4.

9. Ausgleich nach L_2 -Norm

Die zu schätzenden Parameter können durch Formel 3.29 bestimmt werden.

$$\delta \hat{x}(t_{corr}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \delta \vec{l}(t_{corr}) \quad (3.29)$$

Die Zuschläge $\delta \hat{x}(t_{corr}) : [\Delta x_r(t_{corr}), \Delta y_r(t_{corr}), \Delta z_r(t_{corr}), c\delta_r(t_{corr})]$ werden an den Taylorpunkt ϱ_{r0} bzw. an den Empfängeruhrenfehler $\delta_r(t)$ angebracht.

$$\vec{\rho}_r(t_{corr}) = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r0} + \Delta x_r(t_{corr}) \\ y_{r0} + \Delta y_r(t_{corr}) \\ z_{r0} + \Delta z_r(t_{corr}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\delta_r(t_{corr}) = \delta_r(t) + \frac{c\delta_r(t_{corr})}{c} \quad (3.31)$$

Nach diesem Berechnungsschritt kann wieder bei Schritt 2 begonnen werden, solange, bis die Zuschläge keinen Beitrag mehr zur Empfängerposition liefern.

Kapitel 4

Relative Positionierung

Schon seit den achtziger Jahren wird die Methode der relativen Positionierung in der Vermessung verwendet. Ein derartiges Verfahren in der Navigation anzuwenden, ist allerdings noch Neuland. Hier steht nicht die Präzision im Vordergrund, sondern Parameter wie Integrität und Kontinuität eines System sind hier entscheidend. Das Equipment für relative Positionierung wird immer kostengünstiger, leichter und besser in beweglichen Objekten integrierbar. Es war also nur eine Frage der Zeit, wann diese Messmethode Einzug in die Navigation hält.

Anders als bei SPS wird hier nicht die Codepseudodistanz, sondern die Trägerphase beobachtet. Die Beobachtung des Codes beinhaltet eine Vielzahl an Fehler wie Kapitel 3.2.1 zeigt. Bestimmte Faktoren können mit relativer Positionierung reduziert oder sogar eliminiert werden. Im folgenden Kapitel wird beschrieben wie eine Trägerphasenmessung bei GPS erfolgt, wie diese mathematisch formuliert und ausgewertet werden kann. Formalismus und Definitionen wurden aus Hofmann-Wellenhof et al., 2008, entnommen.

4.1 Die Beobachtung der Trägerphase

Für die Messung der Trägerphase von L_1 , L_2 oder in Zukunft L_5 , wird eine Phasenregelschleife (*Phase-Lock-Loop*) verwendet, um die Phasenverschiebung von empfangenen und rekonstruierten Signalen zu bestimmen [vgl. Gaggl, 2004, S.3]. “Die Trägerwellen der GPS-Signale können entweder durch Codekorrelation oder codefreie Techniken rekonstruiert werden [vgl. Gaggl, 2004, S.3].“

Die Genauigkeit dieses Phasenverschubs $\Phi_A^j(t)$ liegt bei $1/100$ einer Wellenlänge und befindet sich stets zwischen 0 und 2π [vgl. Leick, 1990, S.210], siehe 4.1. Dieses Replika des Signals wird durch einen Oszillator im Empfänger gebildet. Somit entspricht die Genauigkeit des Replikas der Stabilität des Oszillators. Das Ergebnis der Phasenregelschleife ist das Phasenreststück und nicht das gesamte Signal des Satelliten. Somit ist die Anzahl der ganzen Wellenlängen zwischen Satellit und Empfänger stets unbekannt. Diese Unbekannte wird als Phasenmehrdeutigkeit bezeichnet. Bei der Messung der Trägerphase wird in der Literatur oft auf die Definition der Interferometrie verwiesen, da auch bei der elektronischen Distanzmessung in der Ingenieurgeodäsie Mehrdeutigkeiten auftreten [vgl. Leick, 1990, S.209]. Jener Effekt entsteht auch bei der Messung des C/A-Codes, allerdings ist wegen der größeren Chiplänge die Lösung der Codemehrdeutigkeit wesentlich einfacher. Das größte Problem bei der relativen Positionierung liegt darin, die Phasenmehrdeutigkeit zu bestimmen.

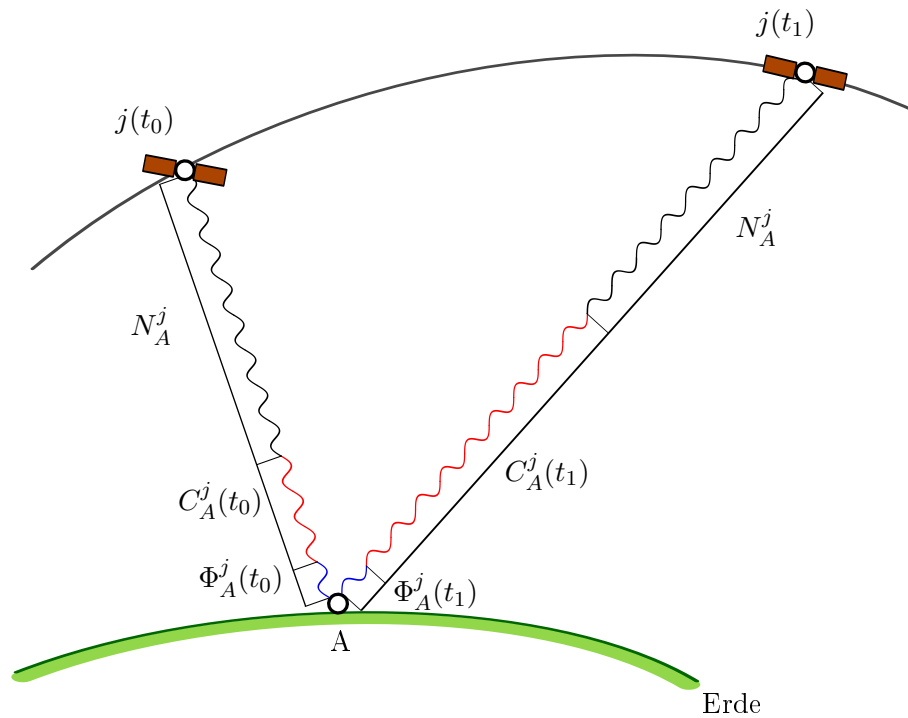


Abbildung 4.1: Prinzip der Trägerphasenbeobachtung

In Abbildung 4.1 sind die einzelnen Komponenten einer Trägerphasenmessung dargestellt. Tabelle 4.1 beschreibt diese Parameter.

Tabelle 4.1: Parameter der Trägerphasenbeobachtung

Parameter	Bezeichnung
$C_A^j(t)$	Integerzähler des Empfängers A
$\Phi_A^j(t)$	Phasenreststück
N_A^j	Phasenmehrdeutigkeit (Ambiguität)

"Der Empfänger verfolgt die Änderung der Trägerphase kontinuierlich und inkrementiert bzw. dekrementiert den Stand eines Integerzählers, wenn die gemessene Phase den Messbereich eines Cycle über- bzw. unterschreitet [vgl. Gaggl, 2004, S.3]." Dies beschreibt die Eigenschaft des Integerzählers $C_A^j(t)$. Die Initialisierung dieses Zählers ist empfängerabhängig und kann auch negativ sein. Allerdings wird bei einem negativ initialisierten Zähler nur dekrementiert. Dies ist notwendig, um keinen Vorzeichenwechsel im Zähler vorzunehmen. Bei Abschattungen oder bei schwachen Signalen kann es vorkommen, dass $C_A^j(t)$ falsch in- oder dekrementiert wird. Ein sogenannter Phasensprung (*cycle slip*) entsteht. Tritt dieser Umstand ein, so müsste neu initialisiert werden. Abbildung 4.1 zeigt die Phasenmehrdeutigkeit N_A^j . Dieser Parameter ist zeitunabhängig und hat die Eigenschaft eines Integers. Die Phasenmehrdeutigkeit bleibt konstant, solange der Integerzähler nicht neu initialisiert werden muss. Entsteht ein Phasensprung, so muss N_A^j neu gelöst werden, oder die Trägerphase repariert werden. Im Vergleich zu SPS wird die Phasenmehrdeutigkeit als Unbekannte in den funktionalen Zusammenhang aufgenommen, siehe Formel 4.1. Die Bestimmung von N_A^j ist aufgrund der Integer-Eigenschaft als nicht trivial anzusehen, hier

wird auf Kapitel 5 verwiesen. Somit kann der funktionale Zusammenhang für Beobachtungen der Trägerfrequenz L_1 für relative Positionierung aus Formel 4.1 entnommen werden.

$$\Phi_r^s(t) = \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_r^s(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot (\delta_r(t) - \delta^s(t)) + N_r^s - \Delta\varrho_{iono}^s(t) + \Delta\varrho_{tropo}^s(t) + \epsilon_r(t) + \epsilon(t) \quad (4.1)$$

Zu beachten ist, dass die Trägerphase durch die dispersive Ionosphäre beschleunigt und durch die Troposphäre, sowie beim C/A-Code, verlangsamt wird [vgl. Gaggl, 2004, S.4]. Dies ist am Vorzeichen der Terme von $\Delta\varrho_{iono}^s(t)$ und $\Delta\varrho_{tropo}^s(t)$ erkennbar. Der Parameter λ entspricht der Wellenlänge der Trägerphase L_1 . Wird $\Phi_r^s(t)$ mit dieser Wellenlänge multipliziert, so ergibt dies die Phasenpseudoentfernung.

$$\lambda_{L_1} = \frac{c}{f} = \frac{299792458.0}{1.5754 \cdot 10^9} = 0,1903 \text{ m} \quad (4.2)$$

Für die Berechnungen in den folgenden Abschnitten wird Formel 4.1 vereinfacht und Refraktionssterme sowie systematische Fehler werden vernachlässigt.

4.2 Einfachdifferenzen (single differences)

Für die relative Positionierung sind zwei Empfänger zu verwenden, welche beide Trägerphasen beobachten können. Die aus der Vermessung stammenden Ausdrücke *Base* und *Rover* sind gebräuchlich um die Empfänger zu unterscheiden. Der Einfachheit und der Übersichtlichkeit halber werden Base und Rover in den folgenden Formeln mit A und B bezeichnet, wie Abbildung 4.2 zeigt.

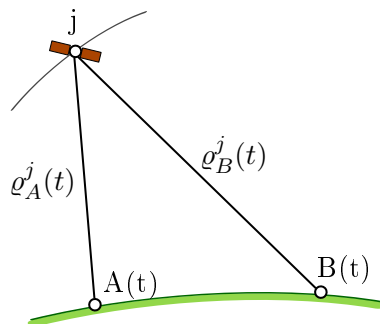


Abbildung 4.2: Einfachdifferenzen

Wie bereits erwähnt, können Fehler, welche bei GPS vorkommen, durch relative Positionierung reduziert oder eliminiert werden. Werden mit beiden Empfängern, A und B, simultane Trägerphasenbeobachtungen zum selben Satelliten j durchgeführt, so können die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_A^j(t) &= \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_A^j(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot (\delta_A(t) - \delta^j(t)) + N_A^j \\ \Phi_B^j(t) &= \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_B^j(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot (\delta_B(t) - \delta^j(t)) + N_B^j \end{aligned} \quad (4.3)$$

linear kombiniert werden.

Jene Linearkombination, bei welcher der Satellitenuhrenfehler $\delta^j(t)$ eliminiert wird, heißt Einfachdifferenz (*single difference*). Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn beide Oszillatoren exakt

synchron arbeiten. In der Praxis ist dies schwer zu realisieren, deswegen wird der Effekt der satellitenabhängigen Fehler nur reduziert. Das Ergebnis der Linearkombination ist in Formel 4.4 dargestellt.

$$\Phi_{AB}^j(t) = \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_{AB}^j(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot \delta_{AB}(t) + N_{AB}^j \quad (4.4)$$

Der Subskript AB in Formel 4.4 deutet auf eine Linearkombination der Empfänger hin.

4.3 Doppeldifferenzen (double differences)

Werden mit beiden Empfängern, A und B, simultane Trägerphasenbeobachtungen zu den Satelliten j und k durchgeführt, so können die einfachen Differenzen

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^j(t) &= \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_{AB}^j(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot \delta_{AB}(t) + N_{AB}^j \\ \Phi_{AB}^k(t) &= \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_{AB}^k(t) + \frac{c}{\lambda_{L_1}} \cdot \delta_{AB}(t) + N_{AB}^k \end{aligned} \quad (4.5)$$

linear kombiniert werden.

Bei der Berechnung von Doppeldifferenzen wird der kombinierte Empfängeruhrenfehler reduziert, wenn man von nicht exakt synchronen Oszillatoren in den Empfängern ausgeht, siehe Formel 4.5.

$$\Phi_{AB}^{jk}(t) = \frac{1}{\lambda_{L_1}} \cdot \varrho_{AB}^{jk}(t) + N_{AB}^{jk} \quad (4.6)$$

Der Subskript jk in Formel 4.6 deutet auf eine Linearkombination der beobachteten Satelliten hin. Abbildung 4.3 zeigt simultane Messungen zweier Empfänger zu zwei Satelliten.

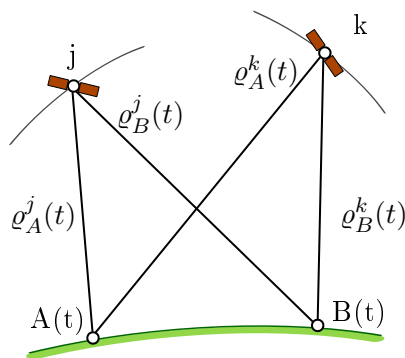


Abbildung 4.3: Doppeldifferenzen

4.4 Dreifachdifferenzen (triple differences)

Bei einfachen und doppelten Differenzen wurden immer zu einer Epoche t die Trägerphasen beobachtet. Um die zeitunabhängigen Phasenmehrdeutigkeiten zu eliminieren, werden Doppeldifferenzen von zwei Epochen linear kombiniert.

“TD’s werden jedoch i.A. nicht zur Positionsbestimmung herangezogen, da sie zu verrauscht

sind und somit zu ungenauen Ergebnissen führen würden [vgl. Gaggli, 2004, S.6].“ Diese Variante der Linearkombination wird in der Praxis nicht angewandt. In dieser Arbeit werden keine Dreifachdifferenzen verwendet.

4.5 Korrelation der Trägerphasenkombinationen

Bei der Beobachtung der Trägerphase von zwei Empfängern A und B entstehen zwei Arten von Korrelationen. Die Beobachtungen können physikalisch und mathematisch korreliert sein [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.178]. Phase $\Phi_A^j(t)$ und $\Phi_B^j(t)$ sind physikalisch miteinander korreliert, da die Signale von Satellit j stammen. Die mathematische Korrelation der Phasen entsteht durch die Differenzenbildung bei Einfach- und Doppeldifferenzen. Diese Korrelation ist für die relative Positionierung interessanter als die physikalische Korrelation.

Für die mathematische Korrelation wird a-priori angenommen, dass die Phase Φ ein normalverteiltes Rauschen aufweist, mit einem Erwartungswert bei Null und einer Varianz, welche sich aus dem UERE ableiten lässt, siehe Tabelle 3.2 [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.178].

Folgender Formalismus der Formeln wurde aus Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.179-181 entnommen.

4.5.1 Korrelation bei Einfachdifferenzen

Wird die Trägerphase zweier Satelliten j und k von Empfänger A und B zum selben Zeitpunkt t beobachtet, so können Einfachdifferenzen gebildet werden, siehe 4.7.

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^j(t) &= \Phi_B^j(t) - \Phi_A^j(t) \\ \Phi_{AB}^k(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_A^k(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Für die mathematische Korrelation zwischen den Beobachtungen können diese Einfachdifferenzen als Matrix-Vektor Produkt dargestellt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{AB}^j(t) \\ \Phi_{AB}^k(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_A^j(t) \\ \Phi_B^j(t) \\ \Phi_A^k(t) \\ \Phi_B^k(t) \end{bmatrix}}_{\Phi}\tag{4.8}$$

Durch diese Matrix-Vektor-Darstellung, Formel 4.8, kann das Varianzfortpflanzungsgesetz angewandt werden, wobei die Matrix C als Design-Matrix dient.

$$\Sigma_{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\Phi} \cdot \mathbf{C}^T\tag{4.9}$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix aus Formel 4.9 entsteht durch die Annahme, dass die beobachteten Trägerphasen nicht linear abhängig sind. Somit sind die Beobachtungen als unkorreliert anzunehmen (Formel 4.10).

$$\Sigma_{\Phi} = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}\tag{4.10}$$

Die Varianz σ^2 kann als Varianz der Gewichtseinheit angesehen werden und wird, wie bereits erwähnt, aus dem UERE bestimmt. Um die Formel 4.9 zu vervollständigen, wird die Information der unkorrelierten Beobachtungen in das Varianzfortpflanzungsgesetz eingebracht, siehe Formel 4.11.

$$\Sigma_{\mathbf{s}} = \mathbf{C} \cdot \underbrace{\sigma^2 \cdot \mathbf{I}}_{\Sigma_{\phi}} \cdot \mathbf{C}^T = \sigma^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \quad (4.11)$$

Wie obenstehende Formel 4.11 zeigt, kann die Varianz-Kovarianzmatrix Σ_{ϕ} für Einfachdifferenzen bestimmt werden. Die Dimension der Matrix $\Sigma_{\mathbf{s}}$ wird durch die Anzahl der Satelliten bestimmt, welche differenziert werden können. Auch hier ist wieder ersichtlich (Formel 4.12), dass die Einzeldifferenzen wieder unkorreliert sind [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.179].

$$\Sigma_{\mathbf{s}} = \sigma^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\sigma^2 \cdot \mathbf{I} \quad (4.12)$$

Matrix $\Sigma_{\mathbf{s}}$ wird lediglich bei Doppeldifferenzen verwendet. In der Praxis werden Einfachdifferenzen für die Positionsbestimmung nicht verwendet.

4.5.2 Korrelation bei Doppeldifferenzen

Analog kann das Schema, wie Abschnitt 4.5.1 zeigt, für die Bestimmung der Varianz-Kovarianzmatrix auch bei Doppeldifferenzen angewandt werden. Jedoch sind für zwei Doppeldifferenzen insgesamt drei Satelliten in Betracht zu ziehen, wobei der Satellit j einen Referenzsatelliten darstellt. Für eine genauere Beschreibung der Wahl des Referenzsatelliten siehe Abschnitt 4.5.3. Die Doppeldifferenzen werden aus den bereits gebildeten Einfachdifferenzen berechnet, siehe Formel 4.13.

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_{AB}^k(t) - \Phi_{AB}^j(t) \\ \Phi_{AB}^{jl}(t) &= \Phi_{AB}^l(t) - \Phi_{AB}^j(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

In Formel 4.13 wird jede Einfachdifferenz von jener Einfachdifferenz abgezogen, welche den Referenzsatelliten beinhaltet. Analog zu 4.7 können über Matrix-Vektor-Schreibweise die Doppeldifferenzen bestimmt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{AB}^{jk}(t) \\ \Phi_{AB}^{jl}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{AB}^j(t) \\ \Phi_{AB}^k(t) \\ \Phi_{AB}^l(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \quad (4.14)$$

Das Varianzfortpflanzungsgesetz kann wie folgt angeschrieben werden: siehe Formel 4.15, wobei die Information der Varianzen aus der Einfachdifferenz nun einfließt. Die nicht lineare Abhängigkeit der Einfachdifferenzen wird somit ebenfalls berücksichtigt.

$$\Sigma_{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \cdot \underbrace{2\sigma^2 \cdot \mathbf{I}}_{\Sigma_{\mathbf{s}}} \cdot \mathbf{C}^T \quad (4.15)$$

Die berechnete Varianz-Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzen $\Sigma_{\mathbf{D}}$ weist im Gegensatz zu $\Sigma_{\mathbf{S}}$ nun Korrelationen auf.

$$\Sigma_{\mathbf{D}} = 2\sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Dies bedeutet, dass die berechneten Doppeldifferenzen zu 50% miteinander korreliert sind und somit eine lineare Abhängigkeit aufweisen.

Diese Eigenschaft ist wichtig für die Gewichtung des Systems, siehe Abschnitt 4.6.1.

4.5.3 Bestimmung des Referenzsatelliten

Die Wahl des richtigen Referenzsatelliten ist unabdingbar. Zu Beginn der Berechnung wird ausgewählt, welcher Satellit sich als Referenz eignet. Es gibt einige Kriterien, welche Eigenschaften ein Referenzsatellit aufweisen sollte. Diese Kriterien entstammen zum einen aus [Gaggl, 2004, S.38] und zum anderen aus gegenwärtigen empirischen Versuchen. Für die Wahl des Referenzsatelliten gibt es keine definierten Vorschriften, dies ist oft applikationsbedingt.

Der Referenzsatellit

- muss für beide Empfänger A und B sichtbar sein,
- soll ein möglichst optimales SNR aufweisen und das Signal sollte keinem Mehrwegeeffekt unterliegen,
- soll einen möglichst großen Elevationswinkel aufweisen, um lange beobachtet werden zu können,
- soll keine Elevation unter 20° aufweisen, es sei denn, der Satellit steigt auf, und der Elevationswinkel sich sodann vergrößert,
- soll nur dann neu bestimmt werden, wenn das Signal plötzlich abgeschattet wird oder einem Mehrwegeeffekt unterliegt,
- muss nicht neu bestimmt werden, wenn ein cycle slip auftritt.

Die Wahl der Schranke für den Elevationswinkel (*cut off angle*) aller übrigen sichtbaren Satelliten ist applikationsbedingt und kann frei bestimmt werden. Jedoch sollten Satelliten mit einem Elevationswinkel unter 10° nicht für die Berechnung herangezogen werden. Hier ist der Fehlereinfluss der Atmosphäre zu groß.

4.6 Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs

Formel 4.6 kann mit der Wellenlänge λ_{L_1} multipliziert werden um Formel 4.17 in Metern angeben zu können. Der Term $\varrho_{AB}^{jk}(t)$ beinhaltet alle geometrischen Verhältnisse zwischen den Empfängern A, B und den beobachteten Satelliten j und k . Wobei Satellit j als Referenzsatellit deklariert wurde.

$$\lambda_{L_1} \cdot \Phi_{AB}^{jk}(t) = \varrho_{AB}^{jk}(t) + \lambda_{L_1} \cdot N_{AB}^{jk} \quad (4.17)$$

Für die Bestimmung der doppeldifferenzierten Distanzen $\varrho_{AB}^{jk}(t)$, sowie Ambiguitäten $N_{AB}^{jk}(t)$, kann das Varianzfortpflanzungsgesetz aus Abschnitt 4.5.2 herangezogen werden.

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t) \\ \varrho_{AB}^{jk}(t) &= \varrho_B^k(t) - \varrho_B^j(t) - \varrho_A^k(t) + \varrho_A^j(t) \\ N_{AB}^{jk}(t) &= N_B^k(t) - N_B^j(t) - N_A^k(t) + N_A^j(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

In der Beobachtungsgröße $l_{AB}^{jk}(t)$ sind nun alle Größen enthalten, welche nicht mitgeschätzt werden. Im rechten Teil der Formel 4.19 sind alle Parameter bereits in linearisierter Form dargestellt, wobei der Koeffizient eines jeden Parameters die partielle Ableitung darstellt. Mit Ausnahme der Phasenmehrdeutigkeit.

$$\begin{aligned} l_{AB}^{jk}(t) &= a_{x_A}^{jk}(t)\Delta x_A + a_{y_A}^{jk}(t)\Delta y_A + a_{z_A}^{jk}(t)\Delta z_A \\ &\quad + a_{x_B}^{jk}(t)\Delta x_B + a_{y_B}^{jk}(t)\Delta y_B + a_{z_B}^{jk}(t)\Delta z_B \\ &\quad + \lambda_{L_1} \cdot N_{AB}^{jk} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Als zusätzliche Bedingung wird dem Gleichungssystem nun die Information gegeben, dass Empfänger A bereits koordinativ bekannt ist. Demnach muss die Position des Empfängers im Ausgleich nicht mitgeschätzt werden. Die Zuschläge zu Empfänger A fallen somit weg, wie Formel 4.20 zeigt.

$$\Delta x_A = \Delta y_A = \Delta z_A = 0 \quad (4.20)$$

Der Beobachtungsvektor $l_{AB}^{jk}(t)$ vereinfacht sich dadurch, dass Empfänger A keinen Taylorpunkt mehr benötigt.

$$l_{AB}^{jk}(t) = \lambda_{L_1} \cdot \Phi_{AB}^{jk}(t) - \varrho_{B0}^k(t) + \varrho_{B0}^j(t) + \varrho_A^k(t) - \varrho_A^j(t) \quad (4.21)$$

Die partiellen Ableitungen aus 4.19 werden wie folgt berechnet: In Formel 4.22 ist deutlich zu erkennen, dass hier ausschließlich die Geometrie der Satellitenkonstellation sowie Empfängerpositionen eine Rolle spielen.

$$\begin{aligned} a_{x_B}^{jk}(t) &= -\frac{x^k(t) - x_{B0}}{\varrho_{B0}^k(t)} + \frac{x^j(t) - x_{B0}}{\varrho_{B0}^j(t)} \\ a_{y_B}^{jk}(t) &= -\frac{y^k(t) - y_{B0}}{\varrho_{B0}^k(t)} + \frac{y^j(t) - y_{B0}}{\varrho_{B0}^j(t)} \\ a_{z_B}^{jk}(t) &= -\frac{z^k(t) - z_{B0}}{\varrho_{B0}^k(t)} + \frac{z^j(t) - z_{B0}}{\varrho_{B0}^j(t)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

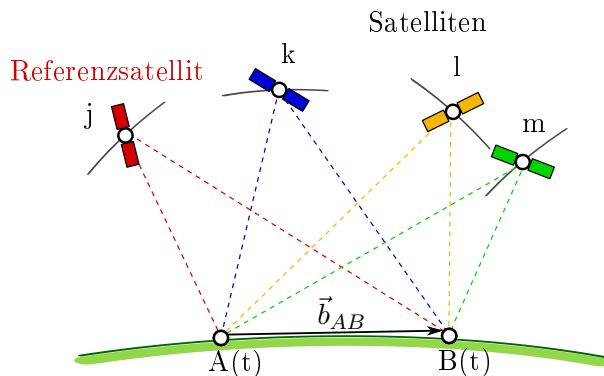


Abbildung 4.4: Beobachtete Trägerphasen

Wie in Abbildung 4.4 ersichtlich, werden von insgesamt vier Satelliten die Trägerphasen beobachtet. Der Referenzsatellit j ist in Rot gehalten. Alle vier Satelliten sind von beiden Empfängern beobachtbar und somit für den Ausgleich der relativen Positionierung geeignet.

Die Koeffizienten für die Design-Matrix A , können wie in Formel 4.22 beschrieben, bestimmt werden. Ebenfalls kann der Beobachtungsvektor \vec{l}_{DD} aufgestellt werden. Die schlussendliche geschätzten Größen bestehen aus dem Differenzvektor \vec{b}_{AB} zwischen den Empfängern, siehe Abbildung 4.4, und den doppeldifferenzierten Phasenmehrdeutigkeiten.

Formel 4.23 zeigt die Darstellung der Komponenten eines Ausgleichs nach L_2 -Norm für eine Epoche.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{l}_{AB}^{jk}(t) \\ \vec{l}_{AB}^{jl}(t) \\ \vec{l}_{AB}^{jm}(t) \end{bmatrix}}_{\vec{l}_{DD}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{x_B}^{jk}(t) & a_{y_B}^{jk}(t) & a_{z_B}^{jk}(t) & \lambda_{L_1} & 0 & 0 \\ a_{x_B}^{jl}(t) & a_{y_B}^{jl}(t) & a_{z_B}^{jl}(t) & 0 & \lambda_{L_1} & 0 \\ a_{x_B}^{jm}(t) & a_{y_B}^{jm}(t) & a_{z_B}^{jm}(t) & 0 & 0 & \lambda_{L_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_B \\ \Delta y_B \\ \Delta z_B \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix}}_{\vec{x}_{DD}} \quad (4.23)$$

Dieses Gleichungssystem kann indes nicht eindeutig gelöst werden. Insgesamt werden sechs Parameter mitgeschätzt. Folglich ist das Gleichungssystem für eine Messepoche bei drei doppeldifferenzierten Trägerphasenbeobachtungen unterbestimmt. Aufgrund dessen müssen mindestens zwei Epochen beobachtet werden, um das Gleichungssystem eindeutig zu lösen.

$$\begin{bmatrix} \vec{l}_{DD}(t_0) \\ l_{DD}(t_1) \\ l_{DD}(t_2) \\ \vdots \\ l_{DD}(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_0) \\ \mathbf{A}(t_1) \\ \mathbf{A}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(t_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_B \\ \Delta y_B \\ \Delta z_B \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Die sechs geschätzten Parameter bestehen stets aus den drei Komponenten des Differenzvektors und den doppeldifferenzierten Phasenmehrdeutigkeiten. Per Definition weisen die Phasenambiguitäten Integer-Eigenschaft auf. Diese geht jedoch durch den Ausgleich der L_2 -Norm verloren. Der nächste Berechnungsschritt ist, diese sogenannten *Float-Ambiguitäten* als Elemente im Raum der ganzen Zahlen darzustellen, um die Integer-Eigenschaft zu rekonstruieren.

Eine ausführliche Beschreibung zur Fixierung der Float-Ambiguitäten ist in Kapitel 5 ersichtlich. Der mitgeschätzte Differenzvektor \vec{b}_{AB} wird bei relativer Positionierung als *Basislinie* bezeichnet. Analog zu den Float-Ambiguitäten wird diese geschätzte Basislinie als *float-Basislinie* bezeichnet, welche allerdings keine Integer-Eigenschaft besitzt.

Nach einer erfolgreichen Rekonstruktion der Integer-Eigenschaft der Phasenmehrdeutigkeiten, kann auch die float-Basislinie fixiert werden. Wurde die Basislinie fixiert, so ist in der Literatur von einer *fixierten Basislinie* die Rede.

Durch die fixierte Basislinie kann die Position des Empfängers B bestimmt werden, wie Formel 4.25 zeigt:

$$\vec{b}_{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{AB} \\ \Delta y_{AB} \\ \Delta z_{AB} \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_B = \vec{X}_A + \vec{b}_{AB} \quad (4.25)$$

Die float- sowie die fixierte Basislinie wird im erdfesten Äquatorsystem dargestellt.

4.6.1 Gewichtung des Systems

Für die Gewichtung des Ausgleichs kann die Korrelationsmatrix Σ_D^{-1} als Gewichtsmatrix herangezogen werden, Formel 4.26 [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.180].

$$\mathbf{P} = \Sigma_D^{-1} \quad (4.26)$$

Da die doppeldifferenzierten Trägerphasenbeobachtungen korreliert sind, ist auch die inverse Gewichtsmatrix vollbesetzt, wie Matrix $\mathbf{P}(t)$ zeigt.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{n_D + 1} \begin{bmatrix} n_D & -1 & -1 & \dots \\ -1 & n_D & -1 & \dots \\ -1 & & \ddots & \\ \vdots & \dots & & n_D \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Der Parameter n_D entspricht der Anzahl der Satelliten abzüglich dem Referenzsatelliten. Dies ist auch die Anzahl der doppeldifferenzierten Trägerphasenbeobachtungen.

Wie bereits erwähnt, müssen mindestens zwei Epochen beobachtet werden, um das Gleichungssystem eindeutig lösen zu können. Auch bei der Gewichtung muss dies beachtet werden. Die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}(t)$ besteht aus diagonal angeordneten Blockmatrizen, siehe 4.28. Dies bedeutet, dass die Trägerphasen innerhalb einer Epoche zu 50% korrelieren, allerdings zwischen den Epochen unkorreliert auftreten.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & & & & 0 \\ & \mathbf{P}(t_1) & & & \\ & & \mathbf{P}(t_2) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mathbf{P}(t_n) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.7 Beobachtungsmodi bei relativer Positionierung

Folgende Einteilung der Modi für den Einsatzbereich der relativen Positionierung wurde aus [Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.437-439] entnommen:

4.7.1 Statisch relativer Modus

Dieser Modus der relativen Positionierung wird am häufigsten in der Vermessung verwendet. Die Genauigkeit ist zum einen von der Basislinienlänge und zum anderen von der Beobachtungsdauer abhängig. Die Basislinienlänge ist entscheidend für die mathematische Korrelation der Trägerphasen, genauso wie die Beobachtungsdauer. Durch lange Beobachtungen der Satellitenkonstellation können die float-Ambiguitäten besser gelöst werden. Durch die Änderung der Geometrie konvergieren die float-Ambiguitäten und können leichter fixiert werden.

Für eine Basislinie von 20 km auf Basis der Auswertung einer Trägerphase, kann mit einer horizontalen Genauigkeit von $5 \text{ mm} + 0,5 \text{ ppm}$ gerechnet werden, [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.437-439].

4.7.2 Pseudokinematischer Modus

Dieser Modus basiert auf einer Reokkupationsmethode. Hierbei wird mit zwei Empfängern statisch relativ positioniert. Nach kurzer Zeit wird abgebrochen und nach einer Stunde wieder auf den gleichen Punkten wie zuvor aufgesetzt und es werden die Trägerphasen beobachtet. Innerhalb dieser Stunde hat sich die Satellitengeometrie geändert und die Lösung der Phasenmehrdeutigkeiten wird vereinfacht.

4.7.3 Semikinematischer Modus

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Phasenmehrdeutigkeiten bereits vor der Messung gelöst wurden und somit für den Messeinsatz gleich zur Verfügung stehen.

Einer der zwei Empfänger (Rover) kann aufgrund der fixierten Phasenmehrdeutigkeiten bewegt werden.

4.7.4 Real-time kinematischer Modus

In Echtzeit werden rohe Trägerphasenbeobachtungen des in Bewegung befindlichen Rovers an die Basis übermittelt. In der Basis können ebenfalls in Echtzeit die Phasenmehrdeutigkeiten fixiert werden. Dabei soll die Basislinienlänge nicht wesentlich länger sein als 20 km. Das Problem ist die Beobachtung der identen Phasenlage der Signale. Fehler können durch die Übertragungsdauer der Daten von Rover zur Basis entstehen. Auch das Lösen von Phasenmehrdeutigkeiten ist sehr rechenaufwendig und verlangt spezielle Techniken. "Methoden, die bei kinematischen Anwendungen zum Einsatz kommen, werden dabei häufig als On-the-Fly- oder OTF-Methoden bezeichnet [vgl. Gaggl, 2004, S.7]."

Kapitel 5

Fixierung der Phasenmehrdeutigkeit

Wie bereits in Kapitel 4 beschrieben, besitzen Phasenmehrdeutigkeiten, oder auch Ambiguitäten genannt, den Charakter von ganzzahligen Werten. Diese Eigenschaft geht allerdings bei der Schätzung von Basislinienkomponenten und Ambiguitäten mit Hilfe der L_2 -Norm verloren.

Um die Genauigkeit der Basislinie zu erhöhen, muss die ursprüngliche Charakteristik der Ambiguitäten reparametrisiert werden. Besitzen Ambiguitäten wieder die Eigenschaft von ganzzahligen Werten, so werden sie als fixierte Ambiguitäten bezeichnet.

Diese Reparametrisierung bzw. Optimierung der Genauigkeit einer Basislinie stellt eine nicht triviale Aufgabe eines Optimierungsproblems dar. Dieses Optimierungsproblem vereinfacht sich nicht durch die Bildung von Doppeldifferenzen bei relativer Positionierung. Es erschwert sogar die Suche nach ganzzahligen Werten, aufgrund der Korrelation bei vorliegenden linear kombinierten Ambiguitäten. Das Basisproblem stellt hier die hohe Korrelation der doppeldifferenzierten Ambiguitäten dar, resultierend aus den Linearkombinationen.

Zusätzlich sollten in der Navigation die Ambiguitäten in Echtzeit gelöst werden und das bei kurzen Basislinien. Das Fixieren der Ambiguitäten in Echtzeit wird in der englischen Literatur als *Ambiguity Resolution On the Fly* (AROF) bezeichnet. AROF stellt die Königsdisziplin bei der Fixierung von Ambiguitäten dar.

Im nun folgenden Kapitel wird erklärt, welche Methoden es ermöglichen, die Ambiguitäten auf ihren ganzzahligen Charakter wieder zurückzuführen. Des Weiteren wird eine Methode anschaulich beschrieben, Ambiguitäten aufgrund ihrer Korrelation zu fixieren.

5.1 Einleitung

5.2 Lösungsmethoden

Die Menge der Lösungsansätze für die Fixierung der Ambiguitäten ist groß. In der Literatur finden sich unterschiedlichste Ansätze zur Lösung des Optimierungsproblems. Folgende Klassifikation der Lösungsmethoden wurde aus Hofmann-Wellenhof et al., 2008, sowie aus Gaggl, 2004, entnommen.

5.2.1 Suchmethoden in der Koordinatendomäne

Die aus der Radartechnik stammende Methode zur Fixierung der Ambiguitäten geht auf die Erfindungen der Gruppe um Charles Counselman zurück. Die Methode der *Ambiguity Func-*

tion Method (AFM) stellt zugleich die bekannteste dar, welche der Kategorie der *Suchmethoden in der Koordinatendomäne* zugehörig ist.

Der wesentliche Vorteil gegenüber anderen Methoden liegt darin, dass diese unabhängig von Phasensprüngen während der Beobachtung ist.

Im ersten Schritt werden, wie in Kapitel 4 beschrieben, die float Basislinienkomponenten, sowie die float Ambiguitäten geschätzt. Durch eine Näherung der Basislinie kann in einem der beiden Empfänger ein Suchraum definiert werden. Dieser Suchraum entspricht im einfachsten Fall einem Quader, zentriert um die Näherungslösung des Empfängers. Die Größe des Quaders ist abhängig von der Wellenlänge der Trägerfrequenz, sowie von den geschätzten Standardabweichungen der Empfängerposition. In Abbildung 5.1 ist ein Suchraum in Quaderform abgebildet.

Jeder Gitterpunkt des regelmäßigen Gitters entspricht einer möglichen Lösung der Ambiguitäten. Um den richtigen Gitterpunkt zu finden, wird eine sogenannte *Ambiguity Function* verwendet. Jener Gitterpunkt mit dem maximalen Funktionswert, welcher einer reellen Zahl entspricht, wird fixiert und gerundet. Aufgrund der neuen Information über die Ambiguitäten, kann die Basislinie neu geschätzt werden.

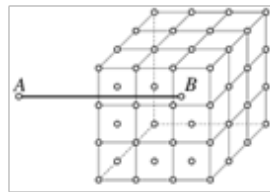


Abbildung 5.1: Suchraum für die Fixierung in der Koordinatendomäne in Gitterform [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.222]

5.2.2 Suchmethoden in der Ambiguitätendomäne

Analog zu Abschnitt 5.2.1 werden zunächst die float Basislinienkomponenten, sowie die float Ambiguitäten durch Bildung von Doppeldifferenzen geschätzt. Als Basis für die Optimierung der Ambiguitäten wird ein spezieller Suchalgorithmus verwendet, um jene Ambiguitäten zu finden, welche sich in der Untermenge der ganzen Zahlen befinden. Denn nur Ambiguitäten im Raum \mathbb{Z}^n repräsentieren eine potentielle Lösungsmenge. Für diesen Lösungsansatz gibt es eine Vielzahl an Methoden, einige sind wie folgt aufgelistet [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.206]:

- LSAST (*Least-Squares Ambiguity Search Technique*)
- FARA (*Fast Ambiguity Resolution Approach*)
- LAMBDA (*Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment*)
- FASF (*Fast Ambiguity Search Filter*)
- OMEGA (*Optimal Method for Estimating GPS Ambiguities*)

Die in dieser Arbeit verwendete LAMBDA-Methode wird nachfolgend in Abschnitt 5.3 genauer erklärt.

5.3 LAMBDA-Methode

Der nun folgende Formalismus und die Nomenklaturen wurden aus Teunissen and Kleusenberg, 1998, entnommen. Tabelle 5.1 zeigt die wichtigsten Parameter der LAMBDA-Methode und deren Bezeichnung nach Teunissen and Kleusenberg, 1998:

Tabelle 5.1: Beschreibung der Parameter

Parameter	Bezeichnung
\hat{a}	float Ambiguitäten
\check{a}	fixierte Ambiguitäten in \mathbb{Z}^n
\hat{z}	float Ambiguitäten (dekorreliert)
\check{z}	fixierte Ambiguitäten in \mathbb{Z}^n (dekorreliert)
$Q_{\hat{a}}$	Varianz-Kovarianzmatrix der float Ambiguitäten
Z	Transformationsmatrix
χ^2	Volumen des Suchraums

5.3.1 Einleitung

Die LAMBDA-Methode (Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment) wird, wie bereits in Abschnitt 5.2.2 erwähnt, in die Kategorie der *Suchmethoden in der Ambiguitätendomäne* eingereiht. Die Methode wurde im Jahre 1993 im *Dept. of Civil Engineering and Geosciences* der TU Delft, Nl. von Prof. Peter J.G. Teunissen und seinem Team entwickelt und bereits in einer Vielzahl von Applikationen, in der Vermessung und in der Navigation, implementiert.

Unabhängige Tests zeigen, dass die LAMBDA-Methode am Besten geeignet ist, um das Mehrdeutigkeitsproblem zu lösen [vgl. Tiberius, 2002, S.109].

Im Vergleich zu anderen Methoden, wird insbesondere hier die Integer-Eigenschaft der Ambiguitäten ausgenutzt, um basierend auf der L_2 -Norm auch ganzzahlige Werte zu schätzen.

$$\|\hat{a} - \check{a}\|^2 = (\hat{a} - \check{a})^T \mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \longrightarrow \textit{Minimum!} \quad \check{a} \in \mathbb{Z}^n \quad (5.1)$$

Formel 5.1 zeigt die Minimierung der Kostenfunktion nach Teunissen and Kleusenberg, 1998. Hierbei gilt es die Differenz zwischen float und fixierten Ambiguitäten zu minimieren. Die Kovarianzmatrix der fixierten Ambiguitäten $\mathbf{Q}_{\check{a}}^{-1}$ definiert die Metrik des Systems. "Handelt es sich bei $\mathbf{Q}_{\check{a}}$ um eine Diagonalmatrix, was einer vollkommenen Unkorreliertheit der Ambiguitäten entspricht, so erhält man die Integer-LSQ-Lösung durch einfaches Runden [Gaggl, 2004, S.16]".

Bei näherer Betrachtung kann gesagt werden, dass das Ergebnis wesentlich von der Korrelation der Eingangsdaten abhängt. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass bei hoher Korrelation der Ambiguitäten, die Minimumssuche keine triviale Aufgabe darstellt.

5.3.2 Reparametrisierung des Integerproblems

Um den float Ambiguitäten ihre ursprüngliche Charakteristik wiederzugeben, sind mehrere Schritte notwendig. Zunächst müssen die Suchräume klassifiziert werden, welche die Varianz-Kovarianzmatrix der float Ambiguitäten $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ beschreibt. Die Dimension des Suchraums wird lediglich über die Anzahl der Ambiguitäten geregelt, welche wiederum von der Anzahl der beobachteten Satelliten abhängt. Bei doppeldifferenzierten Ambiguitäten, siehe Formel 4.18, entspricht die Dimension des Suchraums der Satellitenanzahl, abzüglich dem Referenzsatelliten. Folgende Klassifizierung der Dimensionen kann vorgenommen werden, siehe Tabelle 5.2:

Tabelle 5.2: Klassifizierung der Suchraumdimensionen

Anzahl der Ambiguitäten	Suchraum
1	Gerade
2	Ellipse (Kreis)
3	Ellipsoid (Kugel)
\vdots	\vdots
n	n-dimensionales Hyperellipsoid

Im Ursprung eines jeden Suchraums befinden sich die float Ambiguitäten. Der Suchraum selbst wird durch die Varianz-Kovarianzmatrix aufgespannt. Jeder Gitterpunkt in Abbildung 5.2 enthält eine Integer-Lösung, welche in \mathbb{Z}^n liegt. Nur Gitterpunkte stellen potentielle Lösungen des Integer-Problems dar.

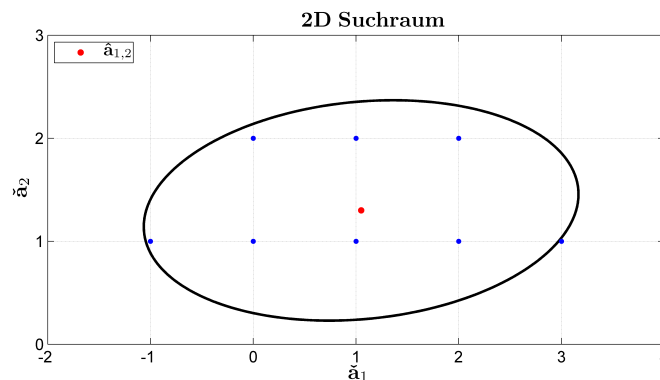


Abbildung 5.2: Suchraum aufgespannt durch $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$

Je größer die Korrelation der float Ambiguitäten, desto länger und schmaler ist der Suchraum. Hier können numerische Instabilitäten der Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ große Auswirkungen haben. Eine kleine Änderung in der Rotation der Hauptachse des Suchraums, kann ein völlig anderes Spektrum an Lösungsmöglichkeiten ergeben.

Um die Lösungsmannigfaltigkeit auf eine endliche Untermenge zu reduzieren, werden jene Integer-Lösungen, welche sich innerhalb des Suchraums befinden für die Suche herangezogen. Die Größe des Suchraums kann durch den Faktor χ^2 geregelt werden.

Die zu minimierende Kostenfunktion (Formel 5.1) lässt sich mit der Einführung des Parameters χ^2 in Verbindung bringen:

$$(\hat{a} - \check{a})^T Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \leq \chi^2 \quad (5.2)$$

Es gilt nun jene Kombination von Ambiguitäten zu finden, welche die Kostenfunktion minimiert und welche sich zudem auch innerhalb eines minimalisierten Suchraums befindet. Dies beschreibt zugleich auch die Aufgabe des *Integer-LSQ-Schätzers*. Für die Minimierung des Suchraums gibt es zwei verschiedene Ansätze:

- Umschreiben des Suchraums mit Tangentialebenen (*planes of support*)
- Sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate (*sequential conditional LSQ search*)

Für die LAMBDA-Methode wurde laut Teunissen and Kleusenber, 1998, die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate vorgezogen, siehe Abschnitt 5.3.5. Die erste Variante ist in der Methode FARA zu finden.

Allerdings ist diese Variante sehr rechen- und zeitaufwendig, insbesondere bei großer Korrelation des Suchraums. Zudem wird der Suchraum durch kurze Beobachtungszeiten der Trägerphase in die Länge gezogen.

In der Praxis entspricht der n-dimensionale Suchraum einem langgezogenen Hyperellipsoid, wo Hunderte von Kombinationen durch eine sequentielle Suche getestet werden müssen. Oftmals kommt es durch numerische Instabilitäten des Algorithmus zu Fehlern in der Fixierung der Ambiguitäten.

Um diesen Effekt zu verringern, soll der Suchraum, nach Teunissen and Kleusenber, 1998, dekorreliert werden. Für diese Dekorrelation der float Ambiguitäten muss eine geeignete Transformationsmatrix gefunden werden.

Die Anforderungen an eine derartige Transformationsmatrix sind hoch. Jene Transformationsmatrix Z soll die Kovarianzen der Ambiguitäten verringern, zugleich müssen die Elemente der Matrix \mathbb{Z}^n entsprechen. Des Weiteren muss bei einer inversen Transformation, der Integer-Charakter der Ambiguitäten erhalten bleiben, siehe Abschnitt 5.3.3.

Die Z-Transformation liefert, je nach Dimension des Suchraums, eine genäherte n-dimensionale Hyperkugel als neuen Suchraum. Diese Transformation hat ebenfalls die Eigenschaft, je nach Grad der Korrelation der Daten, die Hauptachsen des Suchraums in \mathbb{R}^n zu verändern.

Bei vollkommener Dekorrelation der Ambiguitäten, könnte die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate durch einfaches Runden ersetzt werden [vgl. Gaggli, 2004, S.21].

5.3.3 Z-Transformation

Um sicherzustellen, dass die Transformationsmatrix \mathbf{Z} auch bijektiv abbildet, wird die Determinante berechnet. Liefert die Determinante einen Wert ungleich Null, so ist sie nicht nur regulär, sondern besitzt auch die Eigenschaft bijektiv abzubilden. Die nun folgende Herleitung der Z-Transformation wird der Einfachheit halber mit zwei float Ambiguitäten durchgeführt. Wie Formel 5.3 zeigt:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{a}_1}^2 & \sigma_{\hat{a}_{12}} \\ \sigma_{\hat{a}_{21}} & \sigma_{\hat{a}_2}^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Aus Teunissen and Kleusenber, 1998, geht hervor, dass sich als Algorithmus für die Dekorrelation der Ambiguitäten eine Gauß-Transformation eignet. Somit kann \mathbf{Z}^T aus $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ durch eine Gauß-Transformation gebildet werden. Der grundlegende Gedanke basiert auf Verschieben von horizontalen und vertikalen Tangenten, welche den Suchraum in der jeweiligen Koordinatenachse verkleinert. Durch Kombination von vertikalen und horizontalen Tangenten kann der Suchraum zeitgleich dekorreliert werden. Diese abstrakte Überlegung kann durch eine Matrix \mathbf{Z}_{Hz}^T und \mathbf{Z}_V^T mathematisch dargestellt werden. Formel 5.4 und 5.5 zeigen die Gauß-Transformation in horizontale und vertikale Richtung, welche die Kovarianzen der Ambiguitäten verkleinert:

$$\mathbf{Z}_{Hz}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sigma_{21}}{\sigma_1^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma_{2|1} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{Z}_V^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma_{1|2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Für eine kombinierte Dekorrelation in horizontaler wie vertikaler Richtung können beide Matrizen multipliziert werden.

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}_V^T \cdot \mathbf{Z}_{Hz}^T \quad (5.6)$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{Z}^T entspricht jedoch noch nicht den Anforderungen einer gültigen Z-Transformation. Durch die Kombination der Standardabweichungen entspricht die Nebendiagonale nicht ganzzahligen Werten. Hierbei kann gerundet werden.

Die nun zulässige Transformationsmatrix \mathbf{Z}^T ist fähig, Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ in Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ zu transformieren, wobei die Kovarianzen der float Ambiguitäten verkleinert werden. Ebenfalls kann Vektor \hat{a} transformiert werden, siehe Formel 5.7:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \mathbf{Z}^T \hat{a} \\ \mathbf{Q}_{\hat{z}} &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_{\hat{a}} \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Kostenfunktion, welche es zu minimieren gilt (siehe Formel 5.1), bleibt auch nach einer gültigen Z-Transformation erhalten.

$$(\hat{z} - \check{z})^T \mathbf{Q}_{\hat{z}}^{-1} (\hat{z} - \check{z}) \leq \chi^2 \quad (5.8)$$

In der unten stehenden Abbildung 5.3 wird grafisch dargestellt, welchen Einfluss eine Gauß-Transformation auf einen korrelierten Suchraum hat.

Die linke Seite der Abbildung 5.3 zeigt den korrelierten 2-dimensionalen Suchraum in Rot gehalten. Die horizontalen Tangenten in Blau gehalten, engen den ursprünglichen Suchraum zunächst nur in vertikaler Richtung ein, wobei die vertikalen Tangenten konstant bleiben. Dies geschieht solange, bis blaue und rote Tangenten ident sind. Gut ersichtlich ist auch, dass sich die Ausrichtung der Halbachsen ändert.

In der rechten Abbildung wird der bereits vertikal dekorrelierte Suchraum durch vertikale Tangenten transformiert. Dies geschieht genau so lange, bis blaue und grüne Tangenten ident sind. Dieses Vorgehen ist volumserhaltend.

Im 2-dimensionalen Fall bleibt somit die Fläche des Suchraums auch nach einer Z-Transformation konstant.

Nach einer vollkommenen Dekorrelation entsteht im 2-dimensionalen Fall ein Kreis. Ein perfekter Kreis ist jedoch durch das Runden der Nebendiagonalelemente in der Transformationsmatrix \mathbf{Z}^T numerisch nicht zu erreichen.

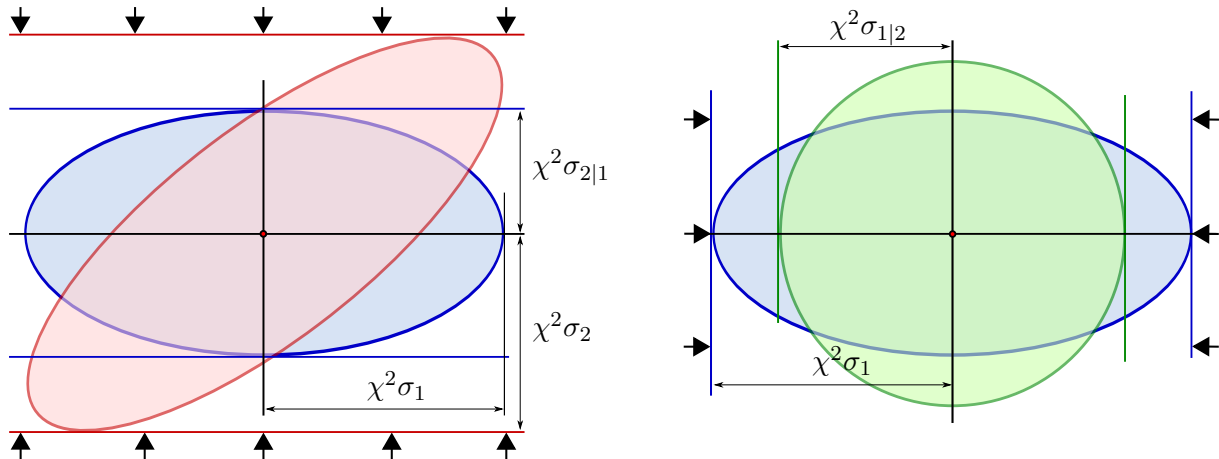


Abbildung 5.3: Dekorrelation des Ambiguitätensuchraums, modifiziert nach Teunissen and Kleusenbergh, 1998, S.365

Für die Fixierung der Ambiguitäten ist eine Dekorrelation des Suchraums nicht zwingend vorgesehen, jedoch ratsam.

Zusammenfassend die Eigenschaften der Z-Transformation:

Die Z-Transformation,

- muss einer Matrix entsprechen, welche invertierbar ist,
- muss eine Transformationsmatrix \mathbf{Z}^T besitzen, welche nur ganzzahlige Elemente beinhalten darf,
- soll die Varianzen sowie Kovarianzen von $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ verkleinern,
- ist volumserhaltend.

5.3.4 Bestimmung der Größe des Suchraums

Die initiale Größe des Suchraums wird vor der eigentlichen Suche nach den fixierten Ambiguitäten bestimmt. Folgender Algorithmus entstammt aus Joosten, 2001, S.29.

Die Qualität der bestimmten Anfangsgröße des Suchraums χ^2 ist entscheidend für die Effizienz der sequentiellen Suche. Ist der Suchraum zu Beginn zu groß, wird der positive Effekt der Dekorrelation kompensiert. Bei einem zu kleinen Suchraum, würden sich potentielle Integer-Lösungen nicht mehr im Suchraum befinden.

Über den Parameter χ^2 , welcher die Einheit $cycle^n$ besitzt, kann eine Aussage getroffen werden, wieviele Lösungsmöglichkeiten im Suchraum vorhanden sein könnten.

Das Volumen des Suchraums lässt sich wie folgt bestimmen, siehe Formel 5.9:

$$E_n = \chi^2 \cdot \sqrt{\det(\mathbf{Q}_z)} \cdot V_n \quad (5.9)$$

Der Parameter V_n beschreibt die Volumsfunktion, welche durch

$$V_n = \frac{2 \pi \binom{n}{2}}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (5.10)$$

berechnet werden kann. Das Eulersches Integral zweiter Gattung oder auch Gammafunktion genannt, kann aus Formel 5.11 entnommen werden [vgl. Bartsch, 2004, S.777]:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{bei } x > 0 \quad (5.11)$$

Durch Umformen der Formel 5.9 erfolgt die Größe des Suchraums

$$\chi^2 = \frac{E_n}{\sqrt{\det(\mathbf{Q}_z)} \cdot V_n}. \quad (5.12)$$

Somit kann die Größe eines jeden n-dimensionalen Suchraums berechnet werden.

Abbildung 5.4 zeigt die Anzahl der möglichen Integer-Kombinationen innerhalb eines Suchraums, von 1 bis 100 *cycle*². Dargestellt werden insgesamt 10 Messreihen.

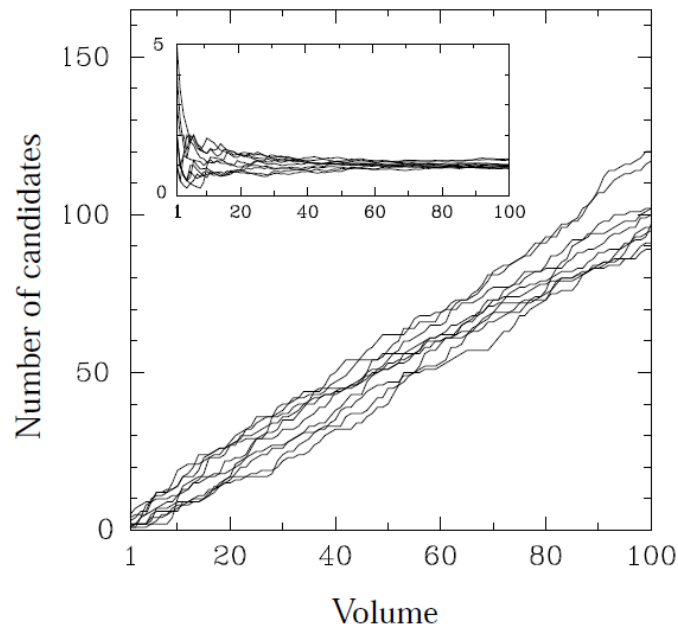


Abbildung 5.4: Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit des Suchraumvolumens [de Jonge C. Tiberius, 1996, S.30]

5.3.5 Sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate

Das Runden zum nächsten ganzzahligen Wert bei der Ambiguitätensuche erweist sich nur bei einer diagonalbesetzten Varianz-Kovarianzmatrix als sinnvoll. Obwohl die Z-Transformation zuvor schon die Kovarianzen verringert hat, wird hier ein hochentwickelter Schätzer benötigt.

Die nach Tiberius, 2002, beste Variante, ist die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate. Hierbei werden die potentiellen Lösungsmöglichkeiten, welche sich innerhalb des Suchraums befinden, sowie deren Korrelation zueinander herangezogen, um so zu fixierten Ambiguitäten zu gelangen. Folgender Ausdruck soll minimiert werden, siehe Formel 5.13:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{z}_i - \check{z}_i)^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \text{Minimum! } \check{z} \in \mathbb{Z}^n \quad (5.13)$$

Wie in Formel 5.13 ersichtlich, wurden die Ambiguitäten, sowie der Suchraum bereits dekorreliert. Eine Dekorrelation im Vorfeld stellt allerdings keine Voraussetzung für die sequentielle Suche kleinster Quadrate dar.

Im ersten Schritt kann das erste Element im dekorrelierten Ambiguitätenvektor \hat{z} auf eine ganze Zahl gerundet werden. Diese Rundung geschieht zu Beginn varianzfrei.

$$\check{z}_1 = \text{INT}[\hat{z}_1] \quad (5.14)$$

Die zweite Ambiguität \hat{z}_2 kann aufgrund ihrer Kovarianz zur ersten Ambiguität geschätzt werden. Dies geschieht mit jeder Ambiguität \hat{z}_i solange, bis alle Ambiguitäten nach der ersten Ambiguität \hat{z}_1 geschätzt wurden. Im zweiten Durchlauf wird die bereits aus Ambiguität \check{z}_1 geschätzte Ambiguität $\hat{z}_{2|1}$ auf eine ganze Zahl gerundet. Somit kann mit \check{z}_2 der Vorgang wiederholt werden. Der nun folgende Algorithmus zeigt den Berechnungsablauf, siehe Formel 5.15:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{2|1} &= \hat{z}_2 - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1^2}(\hat{z}_1 - \check{z}_1) \\ \hat{z}_{3|1} &= \hat{z}_3 - \frac{\sigma_{31}}{\sigma_1^2}(\hat{z}_1 - \check{z}_1) \\ &\vdots \\ \hat{z}_{3|1,2} &= \hat{z}_{3|1} - \frac{\sigma_{3,2|1}}{\sigma_{2|1}^2}(\hat{z}_{2|1} - \check{z}_2) \\ \hat{z}_{4|1,2} &= \hat{z}_{4|1} - \frac{\sigma_{4,2|1}}{\sigma_{2|1}^2}(\hat{z}_{2|1} - \check{z}_2) \\ &\vdots \\ \hat{z}_{4|1,2,3} &= \hat{z}_{4|2} - \frac{\sigma_{4,3|2}}{\sigma_{3|2}^2}(\hat{z}_{3|2} - \check{z}_3) \\ \hat{z}_{5|1,2,3} &= \hat{z}_{5|2} - \frac{\sigma_{5,3|2}}{\sigma_{3|2}^2}(\hat{z}_{3|2} - \check{z}_3) \\ &\vdots \\ \hat{z}_{i|I} &= \hat{z}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_{i,j|J}}{\sigma_{j|J}^2}(\hat{z}_{j|J} - \check{z}_j) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Um die letzte allgemeine Formel (in Formel 5.15) besser deuten zu können, werden in Tabelle 5.3 die einzelnen Indizes beschrieben.

Tabelle 5.3: Beschreibung der Indizes

Index	von	bis
i	1	n
I	1	i-1
J	1	j-1
N	1	n-1

Wird bei

$$\hat{z}_{i|I} = \hat{z}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_{i,j|J}}{\sigma_{j|J}^2} (\hat{z}_{j|J} - \check{z}_j) \tag{5.16}$$

die Summe auf die linke Seite der Gleichung gebracht und beide Seiten der Gleichung \check{z}_i subtrahiert, so folgt Formel 5.17:

$$\hat{z}_i - \check{z}_i = (\hat{z}_{i|I} - \check{z}_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_{i,j|J}}{\sigma_{j|J}^2} (\hat{z}_{j|J} - \check{z}_j) \tag{5.17}$$

Diese linke Seite der Formel 5.17 beschreibt nun einen Teil der Minimumsbedingung aus Formel 5.13. Formel 5.17 kann in Matrix-Vektorschreibweise dargestellt werden:

$$\hat{z} - \check{z} = \mathbf{L} \cdot (\hat{d} - \check{z}). \tag{5.18}$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix der fixierten Ambiguitäten $\mathbf{Q}_{\check{z}}$ kann durch das Varianzfortpflanzungsgesetz bestimmt werden:

$$\mathbf{Q}_{\check{z}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T \tag{5.19}$$

Matrix \mathbf{D} besteht aus den sequentiell geschätzten Kovarianzen der float Ambiguitäten und Vektor \hat{d} beinhaltet die sequentiell geschätzten float Ambiguitäten:

$$\hat{d} = [\hat{z}_1, \hat{z}_{2|1}, \dots, \hat{z}_{n|N}]^T, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_{2|1}^2, \dots, \sigma_{n|N}^2). \tag{5.20}$$

Matrix \mathbf{L} besteht aus einer unteren Dreiecksmatrix, welche wie folgt aufgestellt werden kann:

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{bei } 1 \leq i < j \leq n \\ 1 & \text{bei } i = j \\ \frac{\sigma_{i,j|J}}{\sigma_{j|J}^2} & \text{bei } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases} \tag{5.21}$$

In der Kostenfunktion der dekorrelierten Ambiguitäten

$$(\hat{z} - \check{z})^T \mathbf{Q}_{\hat{z}}^{-1} (\hat{z} - \check{z}) \leq \chi^2 \quad (5.22)$$

kann durch

$$(\hat{z} - \check{z}) = (\hat{d} - \check{z}) \quad (5.23)$$

und

$$\mathbf{Q}_{\hat{z}}^{-1} = \mathbf{L}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1} \quad (5.24)$$

substituiert werden. Resultierend können die neuen Ausdrücke der Kostenfunktion als

$$(\hat{d} - \check{z})^T \mathbf{D}^{-1} (\hat{d} - \check{z}) = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{z}_{i|I} - \check{z}_i)^2}{\sigma_{i|I}^2} \quad (5.25)$$

angeschrieben werden.

Die sequentielle Suche darf nur dann erfolgen, wenn sich die potentiellen Integer-Kombinationen auch im Suchraum befinden. Dies ist zugleich Bedingung für die sequentielle Suche kleinster Quadrate. Ohne diese Bedingung müsste der gesamte Raum \mathbb{Z}^n durchsucht werden. Durch Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{z}_{i|I} - \check{z}_i)^2}{\sigma_{i|I}^2} \leq \chi^2 \quad (5.26)$$

kann jede Ambiguität, welche sich im Suchraum befindet, und durch χ^2 definiert ist, fixiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2}{\sigma_1^2} &\leq \chi^2 \\ \frac{(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\hat{z}_{2|1} - \check{z}_2)^2}{\sigma_{2|1}^2} &\leq \chi^2 \\ &\vdots \\ \frac{(\hat{z}_{n|N} - \check{z}_n)^2}{\sigma_{n|N}^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\hat{z}_{j|J} - \check{z}_j)^2}{\sigma_{j|J}^2} &\leq \chi^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die beschriebene sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate benötigt vorgegebene Suchintervalle, die nicht größer sein dürfen, als der Suchraum, welcher durch χ^2 bestimmt wird. Die Bestimmung der Größe der einzelnen Intervalle ist in Tabelle 5.4 ersichtlich. Hierbei ist es wesentlich zwischen Suchintervall und Suchraum zu unterscheiden.

Tabelle 5.4: Intervalldefinitionen für den Suchraum

Intervall	Bedingung
\hat{z}_1	$(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2 \leq \sigma_1 \chi^2$
\vdots	\vdots
\hat{z}_i	$(\hat{z}_{i I} - \check{z}_i)^2 \leq \sigma_{i I}^2 \lambda(\check{z}_{i-1}) \chi^2$

Der Skalierungsparameter $\lambda(\check{z}_{i-1})$ gibt die Suchintervallsgröße an, in der gesucht werden kann.

$$\lambda(\check{z}_{i-1}) = 1 - \frac{(\hat{z}_{i-1} - \check{z}_i)^2}{\sigma_{i-1}^2} \chi^2 \quad (5.28)$$

Die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate ist nur dann zulässig, wenn die vorläufig fixierten Ambiguitäten \check{z}_i die Bedingungen der Suchintervallsgröße erfüllen, siehe Tabelle 5.4. Können potentielle Integer-Kombinationen gefunden werden, welche Formel 5.27 erfüllen, so kann ein neues χ^2 berechnet werden. Durch diese Neubestimmung der Größe des Suchraums wird dieser automatisch verkleinert. Der Effekt: Immer weniger Integer-Kombinationen befinden sich im Suchraum.

Dieser Vorgang wiederholt sich solange, bis keine Integer-Kombination Formel 5.27 erfüllt. Trifft dies zu, können die Suchintervalle verändert werden. In den neu definierten Suchintervallen wiederholt sich der Vorgang der sequentiell bedingten Suche kleinster Quadrate. Die Größe des Suchraums χ^2 wird aus den zuletzt definierten Suchintervallen übernommen. Die Suche kann abgebrochen werden, wenn die Suchintervalle keine zulässige Integer-Kombination mehr liefert, da die Größe des Suchraums zu klein geworden ist, um eine Integer-Kombination zu beinhalten. Die zuletzt gefundene Integer-Kombination aus dem vorherigen Suchraum wird als fixierte Lösung akzeptiert.

“Die Vorteile dieser Suchstrategie gegenüber der Methode der Tangentialebenen besteht darin, dass die durch das Hyperellipsoid gebildete Grenze des Suchraums streng eingehalten wird und dessen Größe während der Suche adaptiert werden kann, was zu einem verringerten Rechenaufwand führt [Gaggl, 2004, S.21].“

In Abschnitt 5.4.1 wird anhand eines Beispiels die Vorgehensweise der sequentiell bedingten Suche kleinster Quadrate genauer geschildert.

5.3.6 Schätzung der fixierten Basislinienkomponenten

Nach der Fixierung der Ambiguitäten kann durch die bijektive Abbildung der Z-Transformation der Parameter \check{z} in \check{a} zurücktransformiert werden.

Durch die endgültige Fixierung der Ambiguitäten, kann aus den float Basislinienkomponenten

$$\hat{b} = [\Delta\hat{x}, \Delta\hat{y}, \Delta\hat{z}]^T \quad (5.29)$$

die fixierte Basislinie bestimmt werden.

$$\check{b} = \hat{b} - \mathbf{Q}_{\hat{b}\check{a}} \mathbf{Q}_{\check{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \quad (5.30)$$

5.4 Beispiele zur LAMBDA-Methode

Das in Abschnitt 5.4.1 dargestellte Beispiel soll die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate verdeutlichen. Das Beispiel ist in Teunissen and Kleusenberg, 1998, S.340-342, zu finden.

5.4.1 2D-Beispiel

Abbildung 5.5 auf der linken Seite zeigt den 2-dimensionalen Ambiguitätensuchraum, welcher durch $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ aufgespannt wird. In der Mitte des Suchraums (rot) befinden sich die float Ambiguitäten \hat{a}_1 und \hat{a}_2 . Mit Hilfe der Z-Transformation kann der Suchraum, wie Abbildung 5.5 auf der rechten Seite zeigt, dekorreliert werden. Wie bereits in 5.3.3 beschrieben, wird der Suchraum nicht vollständig dekorreliert, sodass die Varianz-Kovarianzmatrix einen Kreis ergibt. Der grüne Kreis kennzeichnet in beiden Abbildungen die Lösung der sequentiell bedingten Suche kleinster Quadrate. Deutlich zu erkennen ist, dass die Suche in beiden Fällen dasselbe Ergebnis erzielt.

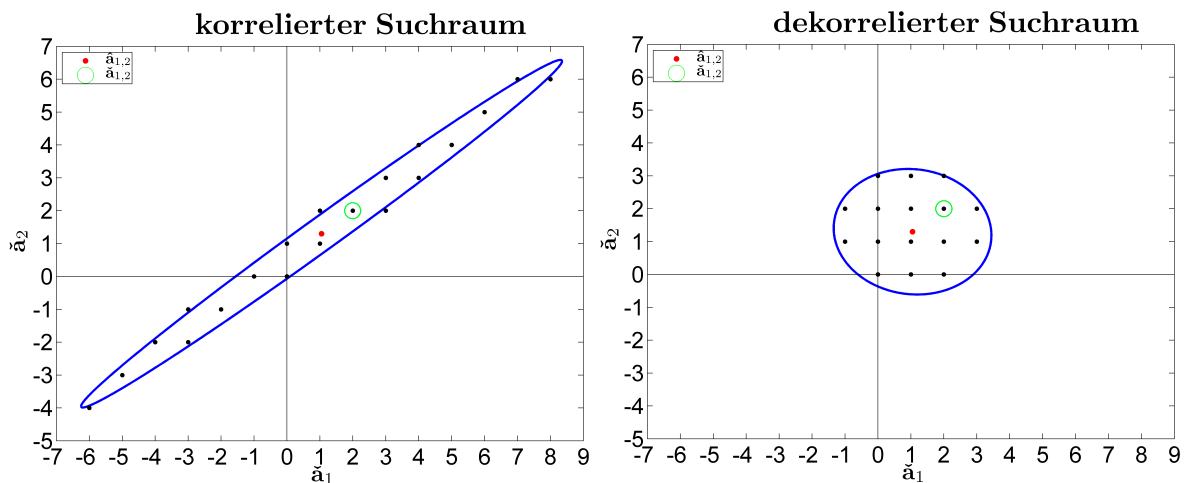


Abbildung 5.5: Vergleich der Suchräume

Nach der Dekorrelation wird das Volumen des Suchraums, im 2-dimensionalen Fall die Fläche, bestimmt. Die sequentiell bedingte Suche kann begonnen werden.

Im 2-dimensionalen Fall kann der Ambiguitätensuchraum wie folgt angeschrieben werden:

$$\frac{(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\hat{z}_{2|1} - \check{z}_2)^2}{\sigma_{2|1}^2} \leq \chi^2 \quad (5.31)$$

Des Weiteren können die Intervallsgrenzen für den 2-dimensionalen Fall, welche in Tabelle 5.5 zu finden sind, berechnet werden. Die Anzahl der Intervalle wird durch die Anzahl der zu bestimmenden Ambiguitäten bestimmt.

Tabelle 5.5: Suchintervalle für die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate

Intervall	Bedingung
\hat{z}_1	$(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2 \leq \sigma_1^2 \chi^2$
\hat{z}_2	$(\hat{z}_{2 1} - \check{z}_2)^2 \leq \sigma_{2 1}^2 \lambda(\check{z}_1) \chi^2$

Auch die Berechnung des Skalierungsfaktors $\lambda(\check{z}_1)$ vereinfacht sich:

$$\lambda(\check{z}_1) = 1 - \frac{(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2}{\sigma_1^2} \chi^2 \quad (5.32)$$

Die zwei Ungleichungen in Tabelle 5.5 spannen die Suchintervalle, wie Abbildung 5.6 zeigt, auf. In dieser Abbildung stellt die weiße Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Suchraums verläuft, jene Gerade dar, auf der sich das berechnete $\hat{z}_{2|1}$ befindet. Die Gerade schneidet genau dort den Suchraum, wo die Grenzen des Suchintervalls von \check{z}_1 den Suchraum berühren. Nach Teunissen and Kleusenber, 1998, S.339, befindet sich $\hat{z}_{2|1}$ stets auf dieser Geraden, bei einem variierenden \check{z}_1 .

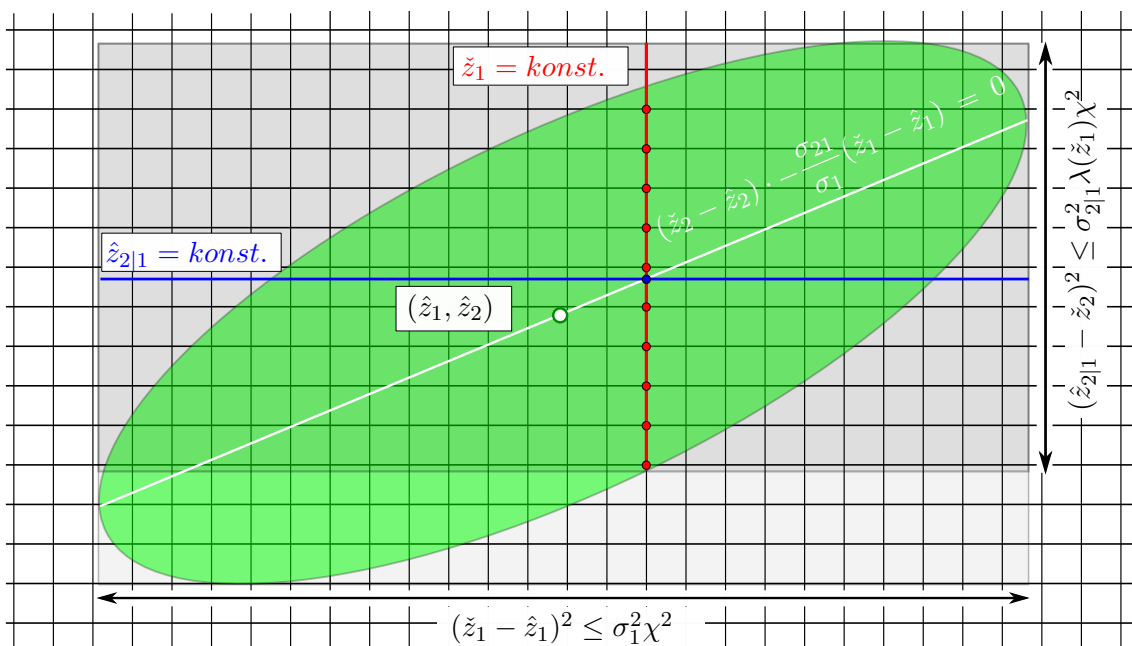


Abbildung 5.6: Suchraum und Suchintervall, [Teunissen and Kleusenber, 1998, S.339]

Wie bereits festgehalten, wird die erste Ambiguität gerundet, siehe Formel 5.14. Auf Basis dieser vorläufig fixierten Ambiguität \check{z}_1 können die beiden Suchintervalle berechnet werden, Tabelle 5.5. Aus

$$\frac{(\hat{z}_1 - \check{z}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\hat{z}_{2|1} - \check{z}_2)^2}{\sigma_{2|1}^2} \leq \chi^2 \quad (5.33)$$

kann die neue Größe des Suchraums χ^2 berechnet werden, wobei

$$\check{z}_2 = INT[\hat{z}_{2|1}] \quad (5.34)$$

aus

$$\hat{z}_{2|1} = \hat{z}_2 - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1^2}(\hat{z}_1 - \check{z}_1) \quad (5.35)$$

bestimmt wird.

Ist das neue χ^2 kleiner gleich dem zuvor initialisierten χ^2 , so entspricht dies einer potentiellen Integer-Lösung. Die Ambiguität $\check{z}_{2|1}$ kann auf den nächstliegenden ganzzahligen Wert gerundet werden. Der Vorgang der sequentiellen Suche wiederholt sich bei konstantem \check{z}_1 genau so lange, bis das Ergebnis aus 5.33 größer als das zuvorbestimmte χ^2 ist.

Ist dies der Fall, so kann \check{z}_1 analog wie \check{z}_2 auf den nächstliegenden ganzzahligen Wert gerundet werden. Somit verändern sich auch die Suchintervalle und die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate in den neuen Suchintervallen wird wiederholt. Dieser Prozess läuft solange, bis keine Integer-Kombination die Bedingung aus Tabelle 5.5 erfüllt. Wie bereits beschrieben, wird die letzte Integer-Kombination \check{z}_1 und \check{z}_2 als fixierte Lösung angesehen. Der gefundene fixierte Ambiguitätenvektor muss durch eine inverse Z-Transformation in den Raum \mathbb{R}^n transformiert werden, wie Formel 5.36 zeigt:

$$\begin{bmatrix} \check{a}_1 \\ \check{a}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \check{z}_1 \\ \check{z}_2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Für die Fixierung der Ambiguitäten ist es nach Teunissen and Kleusenber, 1998, nicht notwendig, alle Integer-Kombinationen im Suchraum zu testen. Oftmals wird schon viel früher die sequentiell bedingte Suche abgebrochen, da der Suchraum keinen Integer-Wert zulässt.

Der Vollständigkeit halber zeigt Abbildung 5.7 (oben) alle Integer-Kombinationen, welche sich im korrelierten Suchraum befinden. Die untere Abbildung visualisiert die Suchraumgröße der jeweiligen Integer-Kombination. Deutlich ist zu erkennen, dass bei Integer-Kombination Nr.12 der kleinste Suchraum gebildet werden kann. Dies bedeutet, dass kein anderer Suchraum kleiner ist, als jener bei Integer-Kombination Nr.12 und somit diese Kombination als fixierte Lösung betrachtet wird.

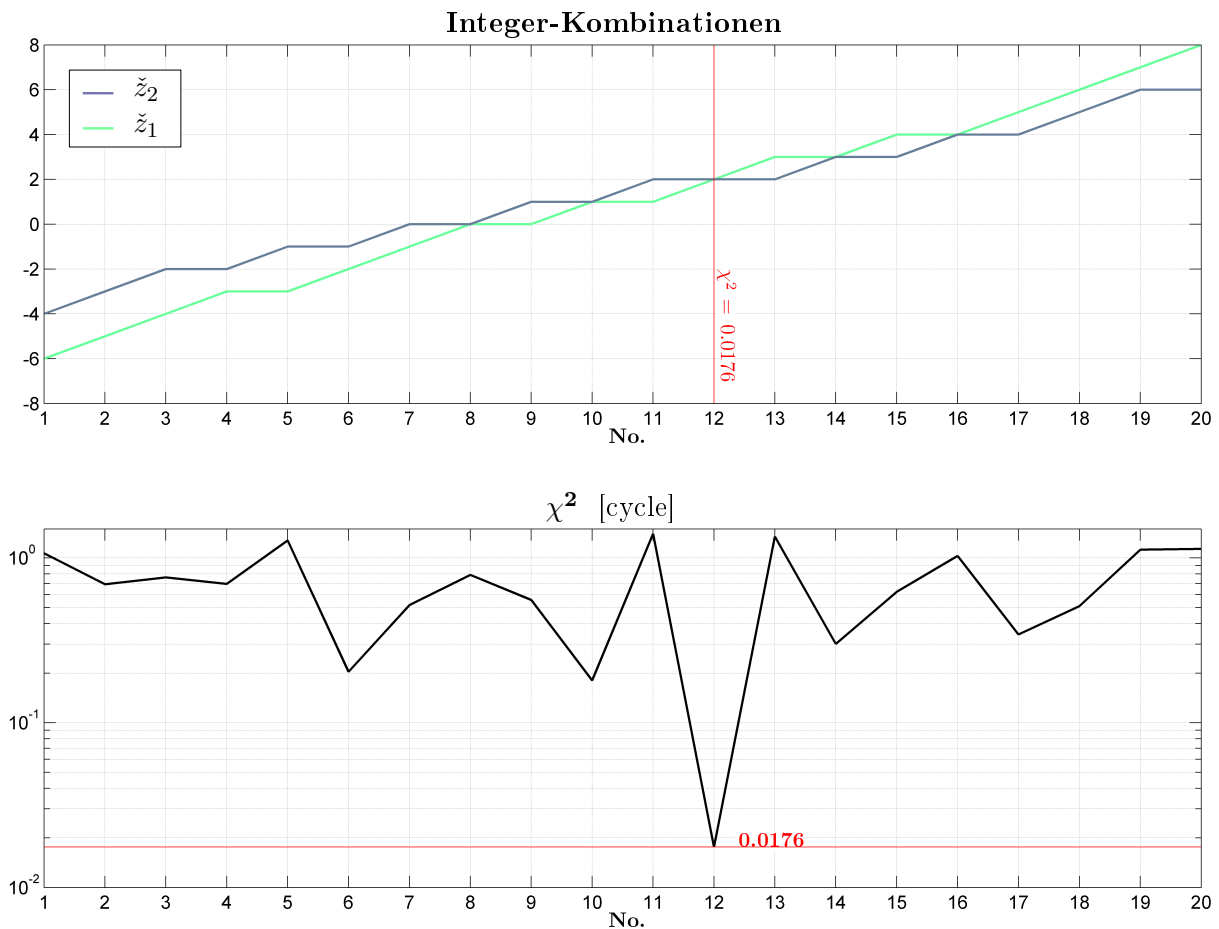


Abbildung 5.7: Integer-Kandidaten im Suchraum und deren Suchraumgröße

Im 2-dimensionalen Beispiel, siehe Abbildung 5.5, liefert die LAMBDA-Methode im korrelierten sowie im unkorrelierten Fall dieselbe Lösung. Dies trifft aber nicht immer zu, vor allem, wenn der Suchraum mehr als zwei Dimensionen besitzt und hoch korreliert ist.

Die Korrelation ist abhängig von der Beobachtungsdauer der Trägerphase und von der Basislinienlänge. Ebenfalls bringt jede Linearkombination zusätzlich eine mathematische Korrelation in das System.

5.4.2 Bestimmung der Varianz-Kovarianzmatrix der fixierten Ambiguitäten

Die Integer-Charakteristik der Ambiguitäten gilt natürlich auch für deren Varianzen sowie Kovarianzen. Wie beschrieben, kann die Integer-Charakteristik der Ambiguitäten durch eine sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate reparametrisiert werden. Die Reparametrisierung der Varianzen sowie der verkleinerten Kovarianzen kann dadurch jedoch nicht realisiert werden. In Teunissen and Kleusenberg, 1998, ist zu erkennen, dass dies ein Problem der LAMBDA-Methode darstellt. Im einfachsten Fall kann die dekorrelierte Varianz-Kovarianzmatrix gerundet werden.

Weitere Untersuchungen wurden in dieser Arbeit zu diesem Thema nicht unternommen, für Erklärungen siehe Teunissen and Kleusenberg, 1998.

Kapitel 6

Konzept eines low-cost GPS vessel navigation systems

Der Begriff Nautik bezeichnet alle nötigen Schiffsmanöver (Steuermannskunst), um von der aktuellen Position des Schiffs sicher zum Zielpunkt zu gelangen. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Kunst ist die Navigation. Nur wenn die Parameter Position, Geschwindigkeit und Steuerkurs mit ausreichender Genauigkeit bekannt sind, ist eine sichere Zielführung gewährleistet. Die Methoden zur Bestimmung dieser Parameter haben sich im Laufe der Zeit weiter entwickelt. Immer genauere und sicherere Hilfsmittel wurden entwickelt, um altbewährte Techniken wie Sichtnavigation, Koppelnavigation und astronomische Navigation durch den Sextanten abzulösen.

Heutzutage sind Funk- und Satellitennavigation aus der Schifffahrt nicht mehr wegzudenken. Derartige GNSS Empfänger für kinematische Anwendungen sind in den letzten Jahren immer kostengünstiger geworden. Folgendes Kapitel zeigt, wie aus low-cost GPS-Empfängern, ein GNSS-Schiffahrtsnavigationssystem konzipiert werden kann, welches alle nötigen Parameter der Navigation mit ausreichender Genauigkeit liefert.

6.1 Bestimmung der Schiffsposition

Anders als bei der traditionellen GNSS-Vermessung, wird in kinematischen Anwendungen der Navigation auf hohe Genauigkeit verzichtet, um möglichst in Echtzeit eine Positionsbestimmung durchführen zu können. Die Position des Schiffs kann mittels low-cost GPS-Empfängern durch Einzelpunktbestimmung, abhängig vom Berechnungsalgorithmus und der Wiederholrate, auf circa 3 m genau bestimmt werden. Dies ist für viele Schifffahrtsanwendungen ausreichend. Bei Hafenmanövern oder bei sicherheitskritischen Anwendungen würde eine solche Einzelpunktbestimmung nicht mehr genügen. In diesem Zusammenhang wird auf Kapitel 3 verwiesen.

6.2 Bestimmung der Fahrtgeschwindigkeit

Die Bestimmung der Fahrtgeschwindigkeit ist eng gekoppelt mit der Position des Schiffs. So kann aus der Änderung des Ortsvektors im erdfesten Äquatorsystem, pro Zeiteinheit die Geschwindigkeit über Grund (SOG) berechnet werden.

Aus dem Grenzwert der zeitlichen Änderung des Ortsvektors zur Schiffsposition im erdfesten Äquatorsystem, kann auf die Geschwindigkeit geschlossen werden. Sie bezieht sich auf die Ge-

schwindigkeit über Grund und ist somit verschiedenster Störquellen, wie zum Beispiel der Strömung des Gewässers ausgesetzt.

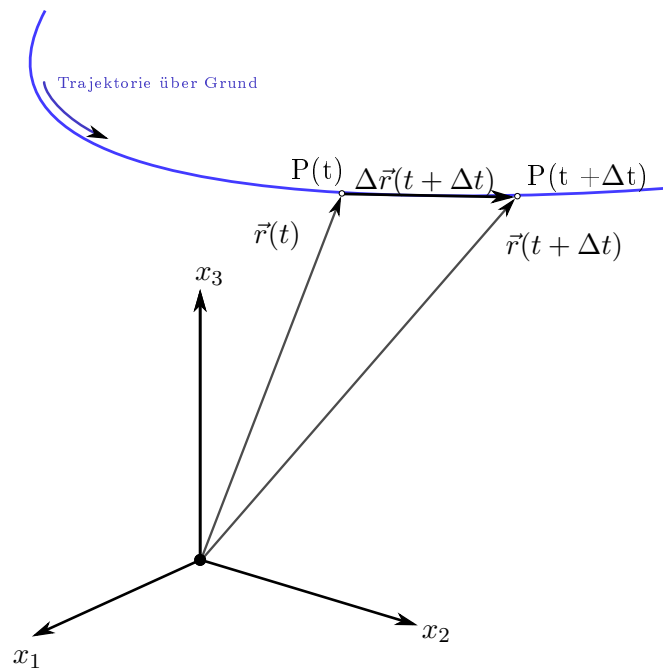


Abbildung 6.1: Fahrtgeschwindigkeit

In Abbildung 6.1 ist die Bestimmung der aktuellen Fahrtgeschwindigkeit des Schiffs grafisch dargestellt. Durch die Änderung der Position des Schiffs innerhalb der Zeitspanne Δt kann ein Differenzvektor Δr gebildet werden. Dies beschreibt nichts anderes, als die Differenzbildung der Ortsvektoren $\vec{r}(t + \Delta t)$ und $\vec{r}(t)$ in einem wohldefinierten Bezugssystems. “Die *Geschwindigkeit* von P ist definiert als Grenzwert der zeitlichen Änderung des Ortsvektors [vgl. Gross et al., 2004, S.3].“

$$v = \|\vec{v}\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right\| \quad (6.1)$$

Der Vektor $\vec{r}(t)$ beschreibt nichts anderes als den Geschwindigkeitsvektor. Dieser ist tangential in Richtung der Schiffsbewegung gerichtet. Die Geschwindigkeit über Grund wird durch die Länge des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} bestimmt.

6.3 Bestimmung des Steuerkurses

Im Laufe der Zeit hat sich die Methodik zur Bestimmung des Steuerkurses bei Schiffen geändert. Durch LORAN-C verbesserte sich die Schifffahrtsnavigation. Altbewährte Methoden, wie das Einschneiden von bekannten Punkten an Land oder die astronomische Seefahrtsnavigation sind dennoch nicht wegzudenken.

Vor allem nach dem Abschalten der Selective Availability bei GPS wurde Satellitennavigationsmethoden für die zivile Schifffahrt herangezogen. Aufgrund der ständigen Steigerung der

Genauigkeit durch verschiedene Messmethoden konnte auch eine Kursbestimmung bei Schiffen durchgeführt werden. Jede Methode bringt Vor- und Nachteile mit sich. Die nun folgenden Abschnitte zeigen Methoden, welche zur Bestimmung des Headings eines Schiffs mittels GPS verwendet werden können.

6.3.1 Bestimmung des Headings durch Einzelpunktbestimmung

Analog, wie für die Bestimmung der Geschwindigkeit, könnte auch die Änderung des Steuerkurses bestimmt werden. Dies ist jedoch wegen des erhöhten Messrauschens der GPS-Empfänger, vor allem im low-cost Bereich nicht möglich. Kursänderungen des Schiffs würden bei solchen GPS-Empfängern und einer hohen Wiederholrate im Messrauschen untergehen. Folgendes Beispiel zeigt die Problematik bei der Bestimmung des Headings:

Die Geschwindigkeit einer Segelyacht in voller Fahrt beträgt rund 40kn. Die Position des Schiffs kann auf $\pm 5\text{m}$ durch GPS mittels SPS im dynamischen Modus bestimmt werden. Wird das Heading alle Sekunden auf Basis der GPS Messungen berechnet, so beträgt der durchschnittliche Fehler des Headings rund 20° .

Durch diese Abschätzung der Genauigkeit des Headings wird deutlich: Diese Methode gewährleistet in sicherheitskritischen Situationen keine genaue Kursbestimmung.

6.3.2 Bestimmung des Headings durch Richtungsänderung einer Basislinie

Wie bereits in Kapitel 2 festgehalten, beschreibt das Heading die momentane Ausrichtung der Kiellängsachse eines Schiffs zum Zeitpunkt t . In Abbildung 6.2 wird die Änderung des Headings dargestellt. Durch die Richtungsänderung eines betragsmäßig invarianten Differenzvektors $\vec{b}(t)$, zwischen einem Referenz-GPS-Empfänger und einem zweiten GPS-Empfänger, kann auf die Änderung des Headings geschlossen werden. Ein derartiger Differenzvektor $\vec{b}(t)$ wird in der Geodäsie bei relativer Positionierung als *Basislinie* bezeichnet. Hier wird auf Kapitel 4 verwiesen.

Als *Basis* und *Rover* werden in der Navigation die beiden GPS Empfänger bezeichnet. Der Winkel α stellt die Änderung des Headings nach einer Richtungsänderung des Schiffs dar. Befindet sich das Schiff in Ruhe, so kann für eine definierte Zeitspanne die Basislinie durch relative Positionierung bestimmt werden. In der Initialisierungsphase können die Ambiguitäten bestimmt werden, welche über die gesamte Messdauer invariant sind. Zum Zeitpunkt t_0 kann nun das Heading bestimmt werden.

Befindet sich das Schiff in Bewegung, wird aufgrund der relativen Änderung der Trägerphase und den fixierten Ambiguitäten die Richtungsänderung der Vorepoche berechnet. Dieser Ansatz wird in E. De Weerd and Mulder, 1998, genauer beschrieben.

Wird die Summe der Richtungsänderungen zur Ausgangsausrichtung des Schiffs addiert, so steht das Heading zu jedem Zeitpunkt dem Steuermann zur Verfügung.

$$k(t) = k(t_0) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad (6.2)$$

Formel 6.2 zeigt die Ausrichtung der Kiellängsachse $k(t)$, welche durch Koppelnavigation bestimmt wurde.

Der große Nachteil bei dieser Vorgehensweise ist: Treten cycle-slips nach der Initialisierungsphase auf, müssen die Ambiguitäten neu fixiert werden. Hierbei müsste das Messsystem wieder eine

Initialisierungsphase durchführen. Je nach Methode zur Fixierung der Ambiguitäten, müsste das Schiff im schlechtesten Fall sogar zum Stillstand kommen. Diese Navigationsmethode ist wegen der Summierung von Drehraten auch enorm fehleranfällig. Kleine Fehler in der Bestimmung der Basislinie haben besonders bei Manövern, in denen der Kurs oft verändert werden muss, große Auswirkungen. Hierbei ist es wichtig dynamische Ausreißertests anzuwenden. Aufgrund dieser Tatsachen, wäre diese Methode in der Schifffahrtsnavigation nicht ratsam.

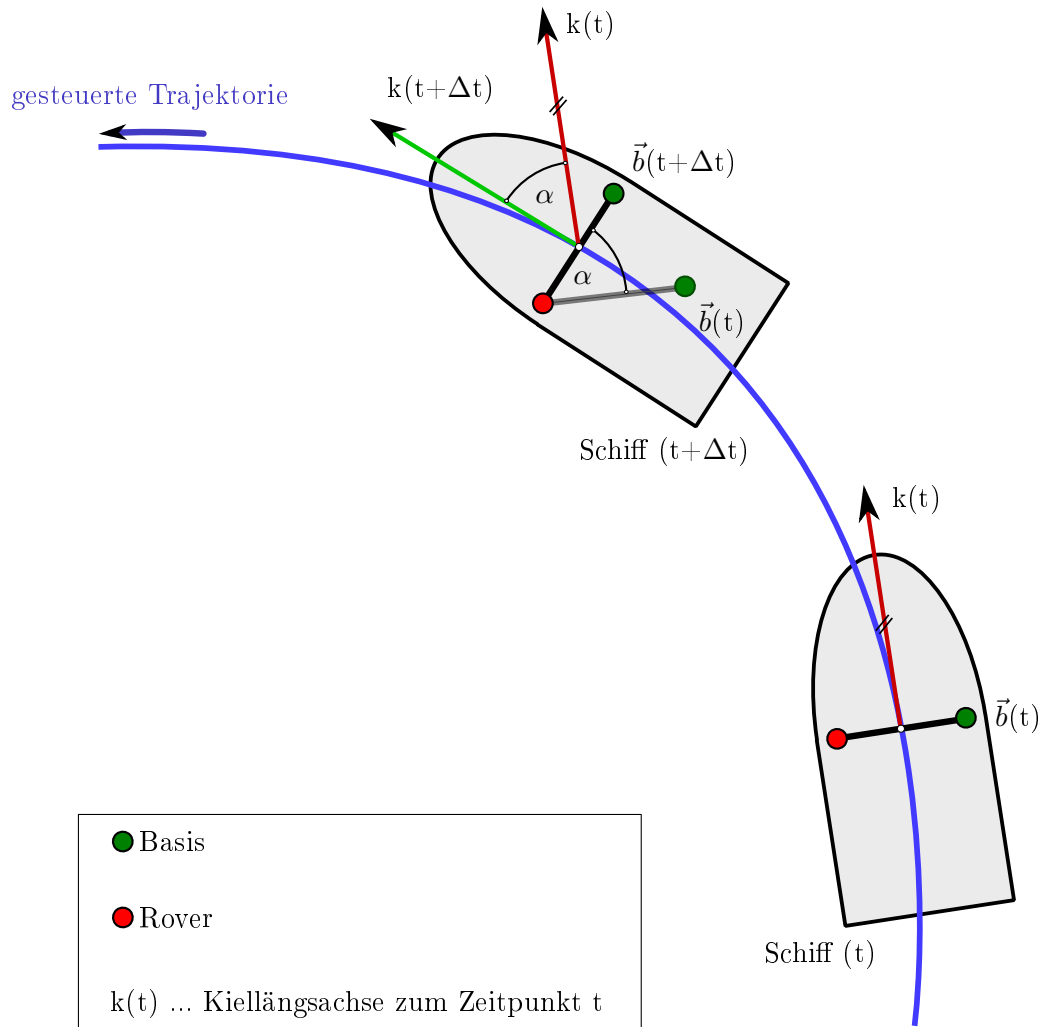


Abbildung 6.2: Änderung des Headings eines Schiffs

6.3.3 Bestimmung des momentanen Headings mittels relativer Positionierung

Für die Bestimmung der momentanen Ausrichtung der Kiellängsachse mittels relativer Positionierung gibt es mehrere Methoden, die einander sehr ähneln. Die Basis all dieser Methoden beschreibt die Ambiguitätenlösung, sowie die Fixierung der Basislinie. In Abschnitt 6.3.2 wird lediglich zu Beginn der Messung eine Initialisierungsphase durchgeführt, in welcher die Ambiguitäten fixiert werden können. Die Nachteile dieser Vorgehensweise wurden bereits geschildert.

Leistungsfähige Algorithmen zur Lösung der Ambiguitäten müssen verwendet werden, um diese in Echtzeit zu fixieren. So können zu jedem Zeitpunkt der Messung die Ambiguitäten fixiert werden und ist dies der wesentliche Unterschied zu Abschnitt 6.3.2. Würde hier ein cycle-slip auftreten, so werden die Ambiguitäten neu fixiert. Das VNS benötigt zu Beginn der Messung eine Initialisierungsphase, während der Fahrt erfolgt die Initialisierung dynamisch. In Kapitel 5 wird ein leistungsfähiger Algorithmus für die Fixierung der Ambiguitäten beschrieben.

Nach Troger, 2008, wird für Schiffe eine Basislinie quer zur Längsachse des Schiffs angedacht. Das Problem hierbei besteht darin, dass die Basislinie auf den Abstand zwischen Backbord und Steuerbord begrenzt ist. Die dadurch resultierende kurze Basislinie erschwert jedoch die Fixierung der Ambiguitäten.

Wurden die Ambiguitäten sowie die Basislinie fixiert, so kann das Heading wie folgt berechnet werden (siehe Formel 6.3):

$$k(t) = \vartheta_{AB} - 90^\circ = \arctan\left(\frac{e_{AB}(t)}{n_{AB}(t)}\right) - 90^\circ \quad (6.3)$$

Abbildung 6.3 stellt das Konzept grafisch dar. Die fixierte Basislinie $\vec{b}_{BR}(t)$ wird nach jeder Berechnung in ein topozentrisches Horizontsystem transformiert. Der Ursprung des Bezugssystems ist immer die aktuelle Position der Basis. Der resultierende Richtungswinkel $\vartheta_{BR}(t)$ ist das Azimut zur Querachse des Schiffs. Nach Abzug von 90° vom Azimut ergibt sich das Heading. Dieses Konzept der Headingbestimmung kommt bei dieser Arbeit zur Anwendung.

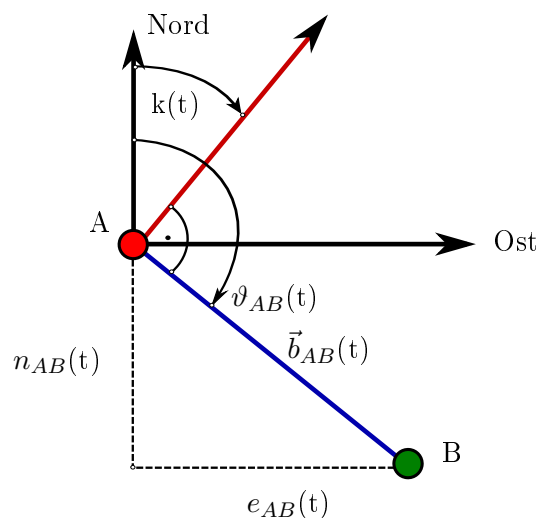


Abbildung 6.3: Berechnung des Headings

Kapitel 7

Systemkomponenten des VNS

An ein echtzeitfähiges low-cost VNS mittels GPS werden spezielle Anforderungen gestellt. Die Hardware- sowie Softwarekomponenten müssen exakt interagieren, um die Parameter: Position, Geschwindigkeit und Kurs in Echtzeit bestimmen zu können. Der Berechnungsalgorithmus richtet sich ganz nach der Berechnungsmethode der einzelnen Parameter.

Codemessungen, Trägerphasenbeobachtungen, sowie Dopplerverschiebungen müssen eingebracht werden, um ein echtzeitfähiges VNS betreiben zu können.

Aufgrund der hohen Ansprüche fällt die Wahl der Geräte zunächst auf geodätische GPS-Empfänger, die bereits seit langem in der Vermessung verwendet werden. Ein großer Nachteil liegt in den hohen Anschaffungskosten. Hingegen gelangen expansiv auf den Markt GPS-Geräte, die nur einen Bruchteil eines geodätischen GPS-Empfängers kosten, jedoch liefern sie dem Anwender nicht die Messung der Trägerphase. Kombinationsmöglichkeiten bzw. ein Kompromiss zwischen geodätischen Empfängern und low-cost GPS-Empfängern, welche die Trägerphase wiedergeben können, müssen gefunden werden. Dasselbe gilt für die Wahl der GPS-Antennen.

Für Echtzeitanwendungen in der Navigation werden zusätzlich mobile Prozessoreinheiten verwendet, die die Auswertung der GPS-Beobachtungen vornehmen und den speziellen Anforderungen entsprechen.

Wie bereits in Kapitel 6 erwähnt, wird für das Bestimmen des Headings die Methode der relativen Positionierung verwendet. Dies stellt nicht nur hohe Ansprüche an die Hardware, sondern auch an die Software. Im Vergleich zum Post-Processing, muss die gesamte Berechnungsalgorithmik optimiert werden, um überhaupt hohe Messraten verarbeiten zu können. Im folgenden Kapitel werden die Hard- und Softwarekomponenten genauer erklärt. Des Weiteren wird die Berechnungsalgorithmik für jeden einzelnen zu bestimmenden Parameter des VNS beschrieben.

7.1 GPS Empfänger

Schon seit Jahren etablierte sich die Firma u-blox mit der Fertigung von GPS-Empfängern in der Navigation. Der EVK-6T Empfänger von u-blox verbindet Präzision der Messungen mit dem Vorteil geringer Anschaffungskosten. Die Messungen der Trägerphase auf der Frequenz L_1 stehen dem Anwender zur Verfügung und können in eine Prozessoreinheit übertragen werden. Das gesamte Messsystem beruht auf relativer Positionierung; deswegen werden für das VNS auch zwei baugleiche Empfänger benötigt, welche fix mit dem Schiff auf Backbord sowie Steuerbord verbunden sind. Tabelle 7.1 zeigt die Spezifikationen des Geräts.

Tabelle 7.1: Systemspezifikationen EVK-6T [ublox, 2011]

Produktbezeichnung	u-blox 6 Evaluation Kit with Precision Timing
Modulbezeichnung	LEA-6T Precision Timing (Kanäle: 50)
Hersteller	u-blox
GPS Empfängertyp	L_1
GPS chip	UBX-G6010-ST-TM
SBAS	EGNOS, WAAS, MSAS
Wiederholrate	bei online Datenübertragung max. 5Hz
Positionsgenauigkeit	2,5 m (CEP) 2,0 m (CEP) (SBAS-unterstützt)
Datenübertragung	1 USB V2.0 full speed 12 Mbit/s
Protokoll	NMEA, UBX binary, RTCM
Stromversorgung	2.7-3.6 V
Verfügbarkeit	26 sec. (cold start) 1 sec. (hot start)
Kosten	295,- (Stand: März 2012, Quelle: www.u-blox.com)

Abbildung 7.1 zeigt einen der zwei GPS-Empfänger, der für das VNS Verwendung findet.

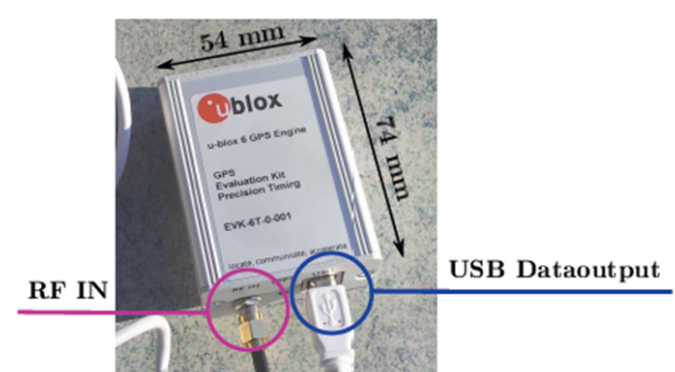


Abbildung 7.1: u-blox EVK-6T

7.2 Prozessoreinheit

Für die Prozessoreinheit, welche die Auswertung der Messungen in Echtzeit durchführt, wird ein Notebook verwendet. Über eine USB-Schnittstelle erfolgt der Datenaustausch zwischen Empfänger und Notebook. Die Spezifikationen für das verwendete Notebook sind in Tabelle 7.3 ersichtlich. Abbildung 7.2 zeigt das Notebook.

Tabelle 7.2: Systemspezifikationen der Prozessoreinheit

Produktbezeichnung	TravelMate Notebook 6293
Hersteller	Acer
Prozessor	Intel Core 2 Duo P8400, 2.26 GHz
Arbeitsspeicher	3 GByte DR2
Festplatte	320 GByte (SATA)
Bildschirm	12,1 Zoll, 16:10, 1280x800 Pixel
Betriebssystem	Windows 7 Professional
Kosten	1.047,- (Stand: März 2012, Quelle: www.geizhals.de)



Abbildung 7.2: Prozessoreinheit

7.3 Antennen

Die Firma u-blox liefert mit dem Empfänger zusätzlich eine Patch-Antenne. Diese Antenne ist L_1 -tauglich und kann auf jedes bewegliche Objekt, mit Hilfe einer Magnetplatte an der Unterseite der Antenne angebracht werden. Empirische Tests zeigten, dass diese Antenne nicht für relative Positionierung bei kurzen Basislinien geeignet ist, weswegen geodätische Antennen verwendet werden. Die Spezifikationen der Antennen sind in Tabelle 7.3 ersichtlich. Abbildung 7.3 zeigt die Antenne.

Tabelle 7.3: Systemspezifikationen der Antennen

Produktbezeichnung	ASHTECH GEODETIC L1/L2 70197501A
Hersteller	ASHTECH

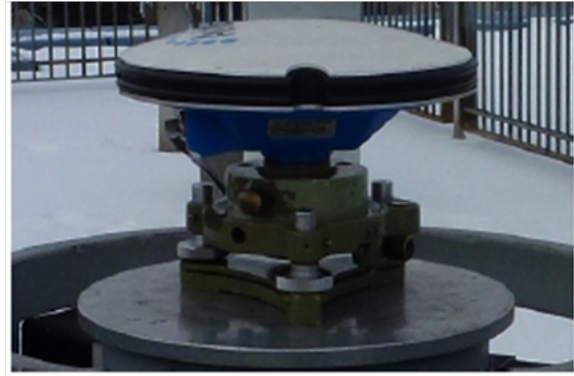


Abbildung 7.3: geodätische Antenne

7.4 Synchronisierung der Systemkomponenten

Für relative Positionierung in Echtzeit müssen alle Komponenten, Hardware und Software problemlos interagieren, sowie Prozesse synchronisiert ablaufen. Die Hardware kann kaum beeinflusst werden; wichtiger sind die Beobachtungen, die in digitaler Form aus dem Empfänger zur Prozessoreinheit gelangen.

Bei relativer Positionierung muss die Trägerphase bei den Empfängern zur selben Zeit gemessen werden. Ist dies nicht der Fall, so entsteht ein erhöhtes Rauschen bei der Bildung von Dopplerdifferenzen. Die Basislinie ist demnach ebenfalls verrauscht.

Erfolgt keine Messung der Trägerphase bei einem der Empfänger, so muss die Phase des Empfängers für den Beobachtungszeitpunkt aus den bereits erfolgten Messungen geschätzt oder extrapoliert werden. Dies ist für Echtzeitanwendungen ein Kompromiss zwischen Rechengeschwindigkeit und Genauigkeit.

7.4.1 Prädiktion der Trägerphase durch Kalman Filterung

Durch einen Kalman-Filter kann eine Phasenglättung der doppel-differenzierten Trägerphasen erfolgen. Sollten Beobachtungen der Trägerphase für einzelne Epochen von einem der beiden Empfänger ausfallen, so kann durch den Kalman-Filter die Phase prädiziert werden. Dies wiederum ist vom dynamischen Modell der Filterung abhängig.

7.4.2 Extrapolation bzw. Rekonstruktion der Trägerphase durch Dopplermessung

Die Dopplerverschiebung hat sich in den vergangenen Jahrzehnten bereits als etablierte Messgröße bewährt. Der Dopplereffekt wurde in der Satellitengeodäsie erstmalig verwendet, um die Position des Erdtrabanten *Sputnik* zu bestimmen. Auch das Transit-System verwendete den in-

tegrierten Doppler für Positionsbestimmung von Satelliten im Orbit.

In der Navigation wird diese Methode vor allem für die Bestimmung von Objektgeschwindigkeiten verwendet. Die Dopplermessung beschreibt die Veränderung der Frequenz des Signals aufgrund der relativen Distanzänderung zwischen Empfänger und Satellit. Der Zusammenhang zwischen Trägerphase und Dopplermessung wird in Formel 7.1 verdeutlicht.

$$\dot{\Phi}^i(t) = \frac{\text{Doppler}^i}{\lambda} \quad (7.1)$$

Durch diesen funktionalen Zusammenhang der Beobachtungsgrößen ist es möglich, die Trägerphase für einige Epochen zu rekonstruieren. Wird die Trägerphase in die Zukunft prädictiert, so entspricht dies einer Extrapolation der Phase. Somit ist es auch möglich, die Trägerphase in die Vergangenheit zu rekonstruieren.

In gegenständlicher Arbeit wird die Rekonstruktion der Phasenlage verwendet, um die Empfänger zu synchronisieren. Abhängig von der Verzögerung der Beobachtungen der Trägerphase, wird extrapoliert oder rekonstruiert. Als Referenzzeit wird stets die Beobachtungszeit der Basis t^A herangezogen. Die Asynchronität der Beobachtungen zwischen den Empfängern wird mit δt_A^B ausgedrückt (siehe Formel 7.2).

$$\delta t_A^B = t^B - t^A \quad (7.2)$$

Die Dopplerverschiebung $\dot{\Phi}^i(t)$ ist nicht nur satellitenabhängig, sondern auch von der Wiederholrate der Beobachtungen. $\dot{\Phi}^i(t)$ muss entsprechend dem Synchronitätsparameter δt_A^B skaliert werden, um die Trägerphasen der beiden Empfänger zu synchronisieren. Dieser Term wird von der gemessenen Trägerphase $\Phi_B^i(t)$ abgezogen; in Formel 7.3 ersichtlich.

$$\begin{aligned} \Phi_{B,Extra}^i(t) &= \Phi_B^i(t) - \left(\dot{\Phi}^i(t) \cdot +\delta t_A^B \right) \\ \Phi_{B,Rekonst}^i(t) &= \Phi_B^i(t) - \left(\dot{\Phi}^i(t) \cdot -\delta t_A^B \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wie Formel 7.3 weiters zeigt, ist das Vorzeichen von δt_A^B entscheidend, ob die Trägerphase extrapoliert oder rekonstruiert wird.

Bewegt sich der Satellit vom Empfänger weg, so ist die Dopplerverschiebung negativ und der Integerzähler in der Phasenregelschleife wird inkrementiert. Invers dazu wird der Integerzähler dekrementiert, so bewegt sich der Satellit zum Empfänger. Somit bleibt das Vorzeichen für den Korrekturterm $\dot{\Phi}^i(t) \cdot \pm \delta t_A^B$ bei der Extrapolation sowie Rekonstruktion dasselbe. Es kann daraus geschlossen werden, dass Trägerphase und Dopplerverschiebung stets unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

Dies ergaben empirische Tests mit dem Empfänger u-blox EVK-6T. Im Vergleich zu einem geodätischen Empfänger, dem Ashtech Z-Xtreme, wird der Integerzähler nicht negativ initialisiert. Demnach ist Formel 7.3 empfängerabhängig.

Folgende Abbildung 7.4 zeigt den Fehler pro Zeiteinheit, welcher bei einer Extrapolation der Trägerphase begangen wird, ausgehend von einer Referenzepoche t_0 . Dafür werden die Dopplerverschiebungen von insgesamt fünf Satelliten zum Zeitpunkt t_0 festgehalten und $\Phi_{B,Extra}^i(t)$, in Formel 7.4 ersichtlich, berechnet.

$$\Phi_{B,Extra}^i(t) = \Phi_B^i(t_0) - \left(\dot{\Phi}^i(t_0) \cdot +\delta t_A^B(t) \right) \quad (7.4)$$

Wie zu erkennen ist, divergieren die Fehler bei zunehmender zeitlicher Differenz zur Referenzepeche. Der Grund dafür liegt im Empfängeruhrenfehler. Zudem ist die Dopplerverschiebung ursprünglich nicht für eine Extrapolation der Trägerphase vorgesehen.

Wie Abbildung 7.4 zeigt, sind Differenzen von Satellit zu Satellit unterschiedlich. Dies lässt sich auf die unterschiedlichen Änderungen des Dopplereffekts zurückführen. Die Satelliten besitzen, abhängig vom Elevationswinkel, unterschiedliche radiale Geschwindigkeiten gegenüber dem Empfänger. Satelliten im Zenit weisen eine größere Änderung der Dopplerverschiebung auf, als Satelliten am Horizont. Stehen Empfänger und Satellit in einem großen Abstand zueinander, so besitzt die Dopplerverschiebung einen kontinuierlich glatten Verlauf, da die Änderung der Radialgeschwindigkeit geringer ausfällt. Demnach ist auch der resultierende numerische Fehler bei niedrig stehenden Satelliten kleiner.

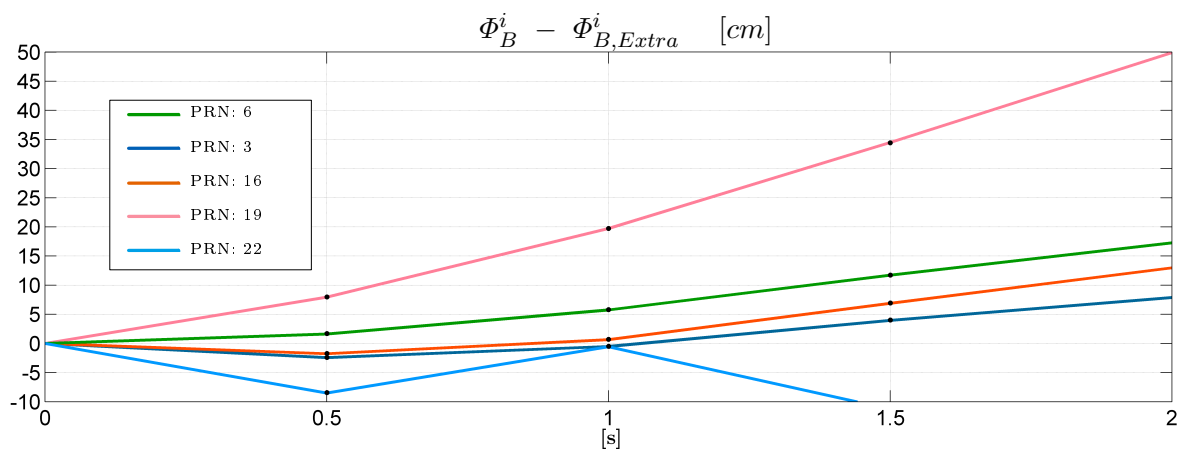


Abbildung 7.4: Extrapolation der Trägerphase durch Dopplermessungen

Werden extrapolierte bzw. rekonstruierte Trägerphasen für die relative Positionierung herangezogen, so kann sich der Fehler aufgrund der Linearkombinationen vergrößern. Folgendes Beispiel zeigt den beschriebenen Effekt anhand doppeldifferenzierter Trägerphasenbeobachtungen:

Angenommen die Trägerphase des Rovers B muss extrapoliert werden, wobei $\delta t_A^B = 500\text{ms}$ beträgt. Der Satellit j mit der PRN:16 wird als Referenzsatellit ausgewählt, da dieser die größte Elevation besitzt. Satellit k (PRN:3) wird für die Bildung von Doppeldifferenzen herangezogen. Die doppeldifferenzierten Trägerphasen können nach

$$\Phi_{AB}^{jk}(t) = \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t) \quad (7.5)$$

berechnet werden. Der daraus resultierende Fehler $\delta\Phi_{AB}^{jk}(t)$ beträgt 18,5 cm, wobei $\Phi_A^j(t)$ und $\Phi_A^k(t)$ als fehlerfrei angenommen werden.

Die Wellenlänge des Trägersignals L_1 , beträgt 19,04 cm. Der Fehler liegt noch unter einer Wellenlänge. Ist der Fehler gleich der Wellenlänge λ_{L1} so entspräche dies einem Phasensprung, wäre die Trägerphase nicht linearkombiniert.

Das Ergebnis in Abbildung 7.4 zeigt, dass die Dopplerverschiebung nicht für eine längere Überbrückung der Trägerphase geeignet ist. Jedoch können, je nach Wiederholrate des Empfängers, einige Millisekunden extrapoliert, sowie rekonstruiert werden, um einen kontinuierlichen Verlauf der Auswertung zu gewährleisten. Der Vorteil besteht darin, dass diese Methode nicht sehr

rechenaufwendig ist, im Vergleich zu einem Kalman Filter. Somit ist sie wesentlich für Echtzeitanwendungen in der Navigation.

Kapitel 8

Softwareentwicklung

Für die Bestimmung der Parameter Position, Geschwindigkeit und Kurs werden alle nötigen Beobachtungen in das Programm über eine definierte Schnittstelle eingelesen.

Zwecks der Möglichkeit einer Echtzeit-Programmierung wurde als Programmiersprache C++ gewählt. Diese performante Programmierung hat den Vorteil, unabhängig vom Betriebssystem zu arbeiten und steigert die Interoperabilität mit anderen Systemen. Ein weiterer Vorteil dieser Programmiersprache ist die Verwendungsmöglichkeit unterschiedlicher Programmierparadigmen, um zum Beispiel Prozesse parallel ablaufen zu lassen.

Die Software wurde leistungsoptimiert programmiert, sodass die Summe der Laufzeit aller Algorithmen kleiner ist als die gewählte Messrate. So stehen die geforderten Parameter ohne Verzögerung dem Anwender zur Verfügung.

8.1 Einlesen der Daten

Die gemessenen Daten des Empfängers können über eine USB-Schnittstelle an die Prozessoreinheit übertragen werden. Die hierbei verwendeten Routinen entstammen der TeleConsult Austria GmbH. Der gesendete I/O-Datenstream der Empfänger muss dekodiert werden, um die Daten in Dezimalzahlen darzustellen.

Folgende Daten werden aus der Basis und dem Rover übertragen, siehe Tabelle 8.1.

Tabelle 8.1: Übertragene Daten der Empfänger

Parameter	Basis	Rover	Einheit
GPS Systemzeit	✓	✓	$[GPS_{week}, GPS_{sec}]$
Trägerphase L_1	✓	✓	$[cycle]$
C/A-Code	✓	✓	$[m]$
Doppler	✓	✓	$[Hz]$
Klobucharparameter	✓	X	$[]$
Empfängerposition [ECEF]	✓	✓	$[cm]$
SOG	✓	X	$[cm/s]$
Ephemeridendaten	✓	X	$[]$

Für eine bessere Akquirierung der Daten werden diese in Strukturen geschrieben, um einen leichteren Zugriff zu gewährleisten.

8.2 Akquirierung der Ephemeridendaten

Der Datenaustausch geschieht nicht nur einseitig. Ausschließlich auf Anfrage nach Ephemeridendaten werden nach einem vom Anwender definierten Intervall die Daten vom Empfänger gesendet. Dieser Vorgang wird als *pollen* bezeichnet.

Zu Beginn der Messung werden die ersten Epochen verwendet, um die Ephemeriden zu akquirieren. Abhängig vom gewählten Intervall vor Messbeginn, wird dieser Vorgang wiederholt.

Vor der Speicherung der Daten wird zunächst überprüft, ob Ephemeriden der jeweiligen PRN bereits vorhanden sind. Sind Satelliten mit der entsprechenden PRN im Speicher, ist zu prüfen, ob sich die ToE (*Time of Ephermis*) verändert hat. Die Überspeicherung erfolgt, wenn aktuellere Ephemeridendaten für denselben Satelliten hereinkommen. Sind die Ephemeridendaten eines Satelliten noch nicht vorhanden, so ist ohne Überprüfung die ToE abzuspeichern. Der Werdegang wird in Abbildung 8.4 deutlich.

Dieselbe Vorgehensweise geschieht, wenn Ephemeriden das erste Mal vom Empfänger abgerufen werden und dauert, je nach Anzahl der sichtbaren Satelliten und vordefinierter Wiederholrate, bis zu 3 Sekunden.

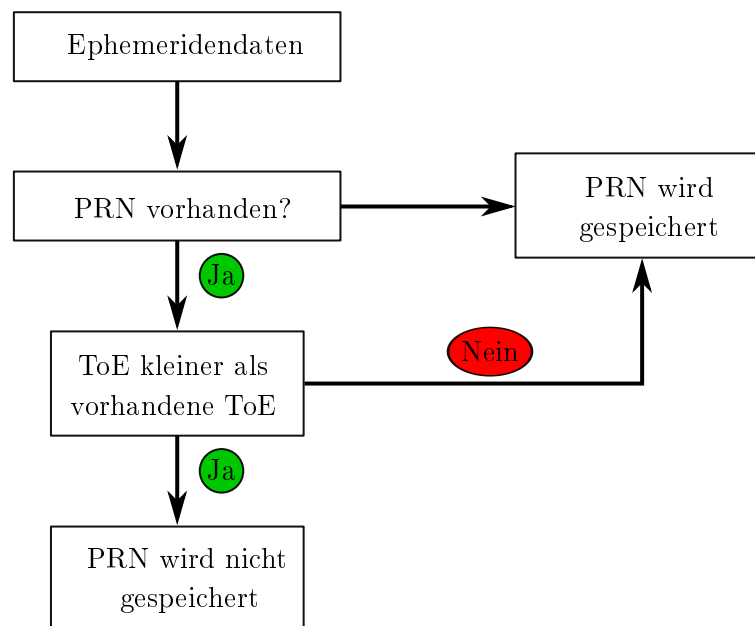


Abbildung 8.1: Ablauf der Ephemeriden Akquirierung

8.3 Berechnung der Satellitenposition

Die Berechnung der Satellitenposition ist beschrieben in Anhang A. Im Gegensatz zur Einzelpunktbestimmung wird der Empfangszeitpunkt t_r verwendet, um die Ephemeriden auszuwerten. Dies ist nur dann zulässig, wenn mindestens Einfachdifferenzen gebildet werden. Der Effekt: Satellitenabhängige Fehler werden reduziert bis eliminiert bei absoluter Synchronität der Empfängeruhren.

8.4 Bestimmung der Schiffsposition

Wie in Tabelle 8.1 ersichtlich, werden vom Empfänger auch dessen Position übermittelt. Diese wird zu jeder Messepoche an die Prozessoreinheit gesendet. Zum einen werden die Positionen der Empfänger gemittelt, um die Schiffsposition zu erhalten, zum anderen entsprechen diese Koordinaten den Taylorpunkten bei der relativen Positionierung.

Für die Bestimmung der Schiffsposition werden die bereits berechneten Koordinaten herangezogen, da der Empfänger einen dynamischen Filter verwendet, um bei kinematischen Anwendungen einen glatteren Verlauf der Trajektorie zu erhalten. Die Software ist jedoch auch fähig, die Einzelpunktbestimmung der Empfänger selbst durchzuführen, allerdings nicht mit der Genauigkeit, die der Empfänger liefert.

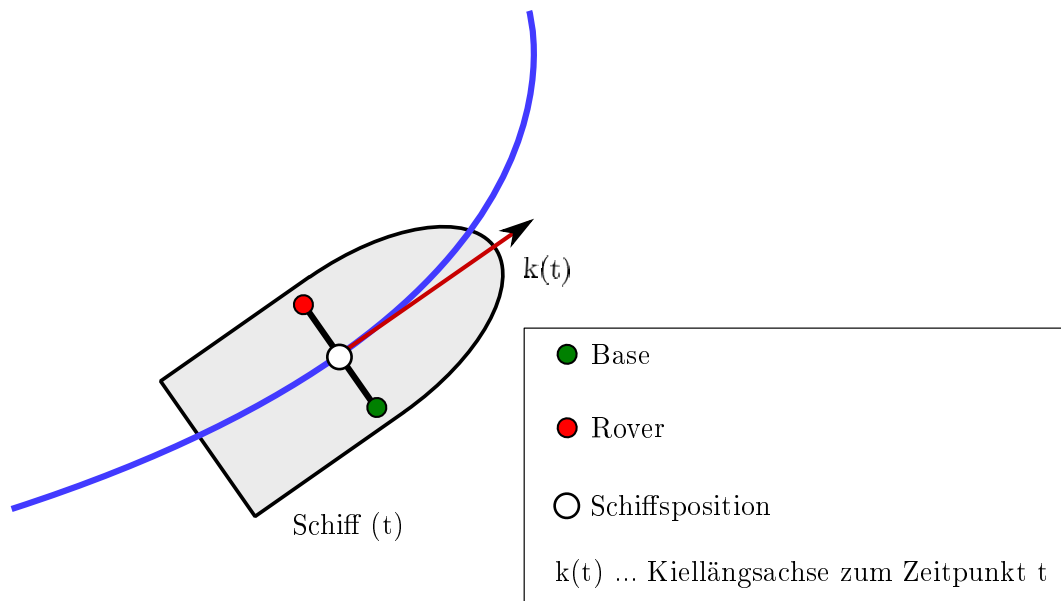


Abbildung 8.2: Bestimmung der Schiffsposition

Wie in Abbildung 8.2 zu erkennen ist, wird durch die Mittelung der Empfängerkoordinaten zugleich der Mittelpunkt des Schiffs bestimmt. Im Idealfall sollte dieser Punkt mit dem Schwerpunkt des Schiffs übereinstimmen, sodass die Steuermanöver mit dem berechneten Heading übereinstimmen.

8.5 Bestimmung der Schiffsgeschwindigkeit

Analog wie die Empfängerposition, wird die Geschwindigkeit über Grund vom Empfänger selbst bestimmt. Siehe Tabelle 8.1.

8.6 Synchronisierung der Empfänger

Um die Trägerphasenmessungen der beiden Empfänger zu synchronisieren, ist entsprechend Abschnitt 7.4.2 vorzugehen. Aufgrund der bedingt kurzen Rechenzeit wurde auf eine Phasenglättung und Prädiktion der Phase, wie Abschnitt 7.4.1 schildert, verzichtet.

8.7 Relative Positionierung

8.7.1 Selektion der Satelliten

Die Selektion der Satelliten kann durch die Definition eines *cutt-off*-Winkels erfolgen. Ist die Elevation kleiner als der definierte Winkel, so ist der Satellit nicht zur Auswertung heranzuziehen. Der Referenzsatellit wird wie, in Abschnitt 4.5.3 dargestellt, bestimmt.

Diese Software kann Mehrwegeeffekte von Signalen nicht erkennen. Deswegen wird der *cutt-off*-Winkel vom Anwender vor Messbeginn umgebungsabhängig gewählt.

Für die relative Positionierung muss gewährleistet sein, dass dieselben Satelliten für beide Antennen sichtbar sind. Satelliten, die nur bei einem Empfänger vorhanden sind, sind zu eliminieren. Die restlichen Satelliten werden durch einen modifizierten *bubble-sort*-Algorithmus, nach Größe der Elevation geordnet. Dieser Algorithmus ermöglicht die Beobachtungen, sowie die berechneten Satellitenpositionen leichter zu verknüpfen. Anhang D zeigt den Pseudocode des modifizierten bubble-sort-Algorithmus.

8.7.2 Ausgleich nach L_2 -Norm

Für die Bestimmung der einzelnen Komponenten des Ausgleichs bei relativer Positionierung siehe Abschnitt 4.6. Wie genannt, müssen mindestens zwei Epochen mit jeweils drei doppeldifferenzierten Trägerphasenbeobachtungen verwendet werden, um das Gleichungssystem eindeutig zu lösen.

Werden mehr Epochen für den Ausgleich verwendet, kann die Design-Matrix, wie Abbildung 8.3 zeigt, als Summe von Blockmatrizen angeschrieben werden:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \text{Red blocks} \\ \text{Green blocks} \\ \text{Blue blocks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_1) \\ \mathbf{A}(t_2) \\ \mathbf{A}(t_3) \end{bmatrix}$$

Abbildung 8.3: Design-Matrix

Auf Grund der Übersicht wurden 3 Epochen für das Aufstellen der Matrix verwendet. Analog

dieser Vorgehensweise erfolgt die Bestimmung des Beobachtungsvektors und der Gewichtsmatrix. Hierbei sei erwähnt, dass die einzelnen Epochen nicht miteinander korreliert sind.

Um einen kontinuierlichen Verlauf der Parameterschätzung zu gewährleisten, ist ein modifizierter stufenweiser Ausgleich anzuwenden. Ähnlich der Berechnung eines gleitenden Mittelwerts, sind zum Ausgleich immer die aktuelle Epoche in Form einer Blockmatrix hinzuzunehmen. Zugleich fällt die erste Blockmatrix aus dem System heraus. Formel 8.1 verdeutlicht den Ablauf:

$$A(t_1) = \begin{bmatrix} A(t_1) \\ A(t_2) \\ A(t_3) \end{bmatrix}, A(t_2) = \begin{bmatrix} A(t_2) \\ A(t_3) \\ A(t_4) \end{bmatrix}, \dots, A(t_n) = \begin{bmatrix} A(t_n) \\ A(t_{n+1}) \\ A(t_{n+2}) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Der Ablauf mittels gleitender Blockmatrizen glättet die geschätzten Parameter. Die Durchführung in Echtzeit stellt keine triviale Aufgabe an die Akquirierung der Beobachtungsdaten dar. Zusätzlich müssen in jeder Blockmatrix dieselben Satelliten vorhanden sein; dies ist für die Schätzung der Ambiguitäten von Wichtigkeit. Ist die Anzahl der Satelliten bei nur einer Blockmatrix größer als bei den anderen, so können die doppeldifferenzierten Ambiguitäten jener Satelliten nicht mit der Qualität geschätzt werden, wie die restlichen Ambiguitäten. Diese geschätzten Ambiguitäten können im schlimmsten Fall das Ergebnis verfälschen und das Fixieren der Ambiguitäten erschweren. Somit stellen plötzlich sichtbare Satelliten ein Problem für den Ausgleich dar.

Die Ionosphäre wird aufgrund der kurzen Basislinie vernachlässigt. Es wird angenommen, dass der Einfluss der Ionosphäre für beide Empfänger der selbe ist, und so durch die Bildung von Linearkombinationen herausfällt.

8.7.3 Fixierung der Ambiguitäten

Bei Schätzung der float Ambiguitäten sowie der float Basislinienkomponenten für die aktuelle Epoche, müssen die Ambiguitäten fixiert werden. Diesbezügliches geschieht mit Hilfe der LAMBDA-Methode. Die Suchmethode in der Ambiguitätendomäne ist dem Abschnitt 5.3 zu entnehmen.

Den MATLAB-Code einer Demoversion dieses Algorithmus, sowie eine detaillierte Beschreibung hat die TU Delft, NL zur Verfügung gestellt, siehe Joosten, 2001. Basierend auf der Demoversion wurde die LAMBDA-Methode in C++ implementiert.

8.7.4 Ablauf der iterativen Initialisierungsphase

Die Initialisierungsphase stellt bei der RTK-Methode die wichtigste Phase der Messung dar, siehe Abschnitt 4.7. In dieser Phase müssen bei der relativen Positionierung die Ambiguitäten fixiert werden um die float Basislinie zu verbessern.

Kommerzielle Softwarepakete schätzen die float Ambiguitäten über mehrere Epochen. Aufgrund einer möglichen Asynchronität der Empfänger ist dies nicht realisierbar, trotz der Extrapolation bzw. Rekonstruktion von beobachteten Trägerphasen. Der Grund liegt darin, dass die Methode zur Synchronität der Empfänger sehr fehleranfällig ist, wie in Abschnitt 7.4.2 erklärt.

Demnach sind die Ambiguitäten nur dann zu fixieren, wenn $\delta t_B^A = 0$ gilt; dies ist eine Bedingung der *iterativen Initialisierungsphase*.

Im ersten Schritt ist vom Anwender eine *Initialisierungsschranke* zu wählen, welche iteriert wird.

Im zweiten Schritt, wie in Abschnitt 8.7.2 beschrieben, erfolgt die Schätzung der float Lösungen. Entspricht $\delta t_B^A = 0$ und ist die Länge der float Basislinie kleiner als die zuvor gewählte Schranke, so können die float Ambiguitäten fixiert werden. Die neu definierte Schranke entspricht nun der float Basislinienlänge. Wieder können neue float Basislinienkomponenten sowie Ambiguitäten aus den nächsten Epochen geschätzt und wiederum wird geprüft ob die Ambiguitäten fixiert werden oder nicht. Dieser Vorgang wiederholt sich solange, bis die fixierte Basislinienlänge der wahren Basislinienlänge entspricht.

Der Algorithmus ist in Abbildung 8.4 veranschaulicht:

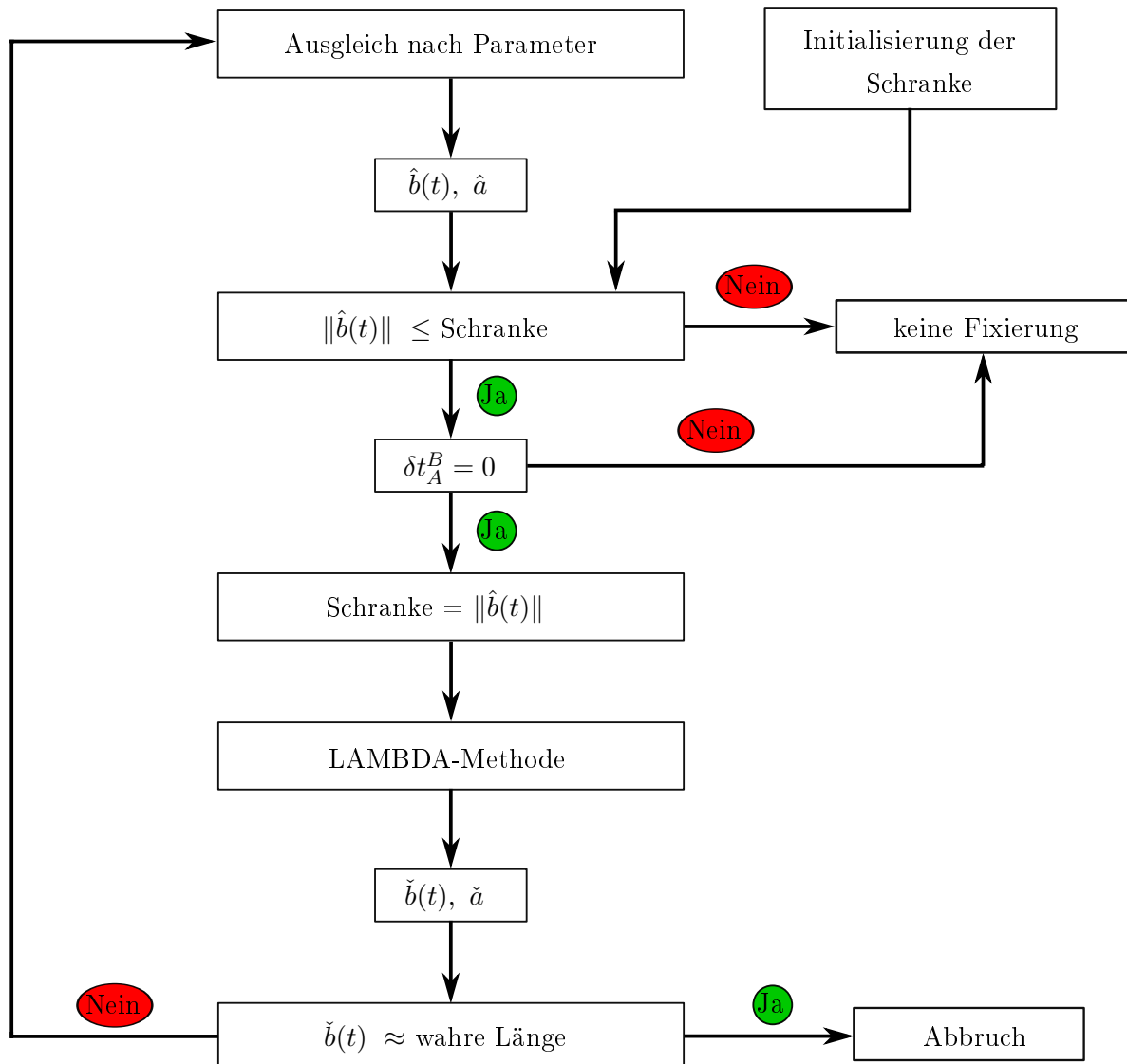


Abbildung 8.4: Ablauf der Initialisierungsphase

8.8 Berechnung des Headings

Die Fixierung der Ambiguitäten sowie der entgültig fixierten Basislinie ermöglichen die Berechnung des Headings. Die Methode der Berechnung ist in Abschnitt 6.3.3 genau erklärt.

Kapitel 9

Evaluierung einer statischen Initialisierungsphase

Zur Evaluierung der iterativen Initialisierungsphase wurde am Dach des Mathematik/Geodäsie-Gebäudes am 14.02.2012 das low-cost GPS VNS statisch getestet. Hierbei konnten die Schiffsposition, sowie das Heading des fiktiven Schiffs eruiert werden.

Für eine Kontrolle der Ergebnisse der Initialisierung sorgten die am Dach befindlichen Pfeiler. Sie sind koordinativ bekannt. Durch die berechnete Referenzposition sowie dem Referenzheading kann eine Aussage über die Qualität der Initialisierung getroffen werden. Die zugrundeliegenden Pfeilerkoordinaten stammen aus Fleckl, 2007.

Es galt zu beachten, die Basislinienlänge möglichst klein zu halten. Empirische Tests zeigten, dass die Basislinie unter 2 m für die Bestimmung des Headings nicht geeignet ist. Um für eine Vielzahl von Schiffstypen kompatibel zu sein, sollte die Basislinienlänge nicht mehr als 10 m ausmachen.

Tabelle 9.1 zeigt die Referenzparameter. Das Azimut der Basislinie wurde aus Gauß-Krüger-Koordinaten bestimmt und dient als Referenzheading. Unerlässlich ist, beim Vergleich des VNS Headings die Meridiankonvergenz einzubeziehen; siehe Anhang E. Aufgrund der kurzen Basislinie kann auf eine Streckenreduktion verzichtet werden.

Tabelle 9.1: Referenzparameter

Parameter	Wert
Basislinie	6,71 m
Azimut	355,3°
Meridiankonvergenz	0,961°

Die Messanordnung, sowie das resultierende Azimut wird in Abbildung 9.1 verdeutlicht. Durch diese Anordnung von Basis und Rover, können die bereits gestellten Forderungen an die Basislinienlänge eingehalten werden.

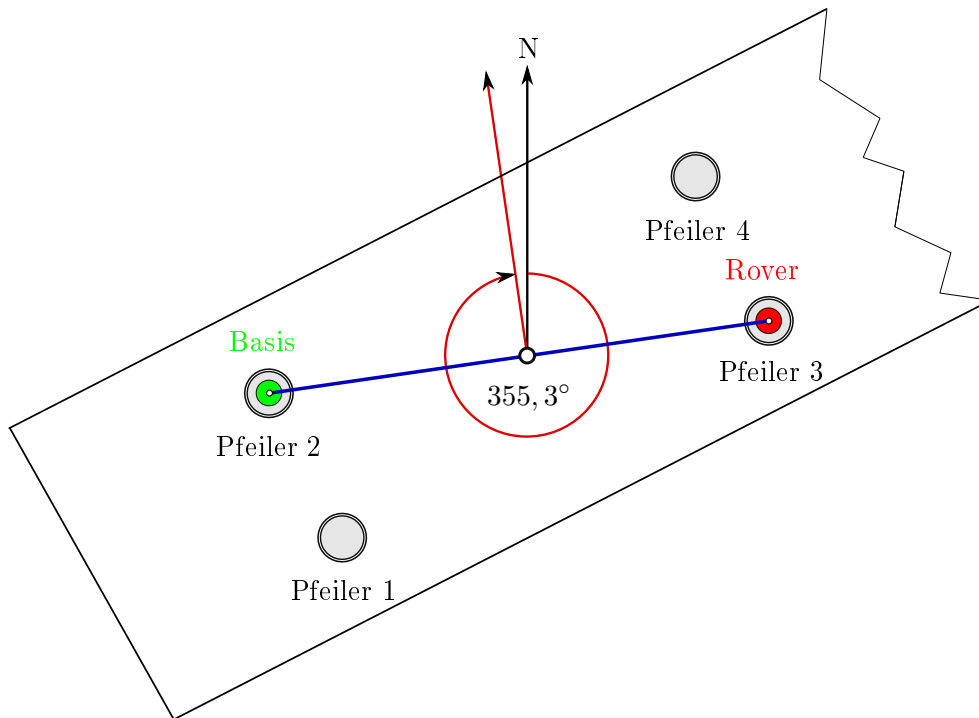


Abbildung 9.1: Anordnung des VNS

Die gewählten Systemeinstellungen des VNS werden in Tabelle 9.2 veranschaulicht. Die approximierte Basislinie entspricht jener Schranke, welche erreicht werden muss, um die iterative Initialisierungsphase abzubrechen. Dies bedeutet: Ist die fixierte Basislinie kleiner als 7,7 m, so kann das daraus resultierende Heading als fixiertes Heading erachtet werden. Diese Schranke ist vor Messbeginn vom Anwender frei zu wählen.

Ebenfalls ist die Wiederholrate der Messungen frei zu wählen. Bewegt sich eine Segelyacht mit 40 kn, so können durch eine Wiederholrate von 500 ms die Position sowie das Heading des Schiffs alle 10 m bestimmt werden. Ein weiterer Grund für diese Wahl stellt die Extrapolation bzw. Rekonstruktion der Trägerphase dar. Wie Abschnitt 7.4.2 zeigt, ist die Qualität dieser Verfahrensweise bei großer Wiederholrate am besten.

Tabelle 9.2: Systemdefinitionen

Parameter	Wert
Ephemeriden-update	30 Min.
Wiederholrate	2 Hz
Epochen pro Ausgleich	3
cut-off-Winkel	30°
Approximierte Basislinie	7,7 m
Initiale Schranke	100 m

Der Cut-off-Winkel von 30° wurde deswegen so groß gewählt, da sich das Gebäude des Joanneum Research im Süden der Messanordnung befindet. Zudem ist dieses Gebäude höher, als das Mathematik/Geodäsie-Gebäudes. Aufgrund der nicht vorhandenen Mehrwegeeffektdetektivi-

on, wird durch diesen cut-off-Winkel auf eine große Anzahl von Satelliten verzichtet, folgend verringert sich die Wahrscheinlichkeit auftretender systematischer Fehler. Die initiale Schranke, die darüber entscheidet, ob die Ambiguitäten fixiert werden oder nicht, ist nunmehr mit 100 m überaus groß gewählt, um die Initialisierungsphase zu verkürzen.

9.1 2D-Schiffsposition

Für die Bestimmung der Schiffsposition sind die von den Empfängern berechneten und mittels EGNOS verbesserten Positionen heranzuziehen.

Diese Empfängerpositionen von Basis und Rover wurden gemittelt, um auf die Schiffsposition zu schließen, siehe Abschnitt 6.1.

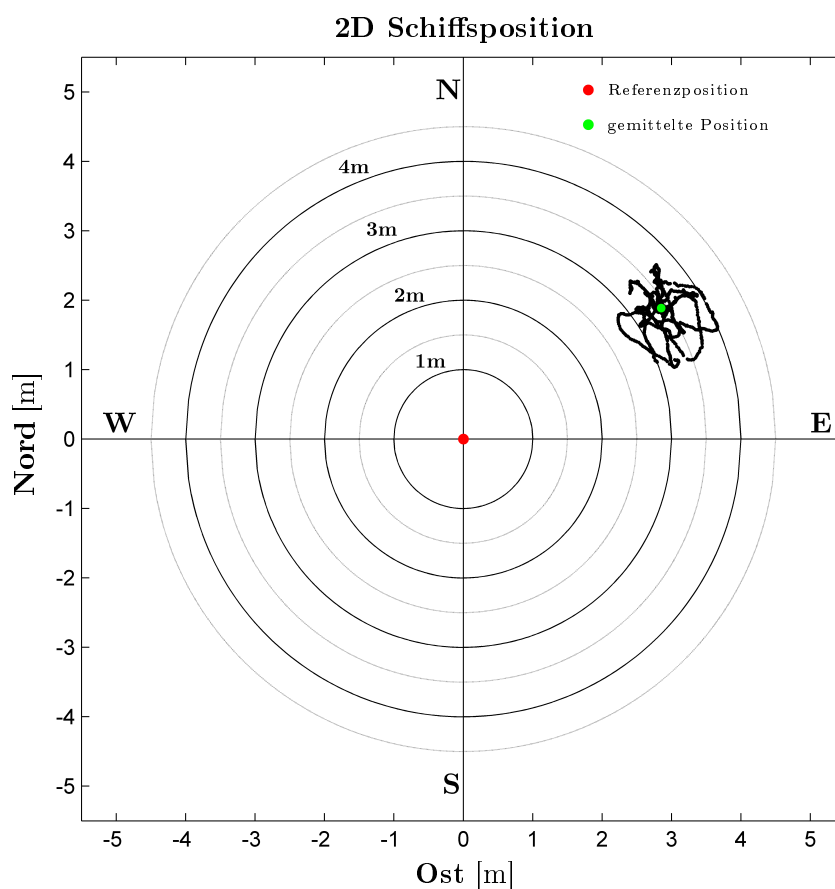


Abbildung 9.2: 2D Schiffsposition

Wie in Abbildung 9.2 zu erkennen, weist die berechnete Position eine geringe Genauigkeit auf, jedoch eine sehr gute Präzision. Tabelle 9.3 zeigt die mittlere Abweichung zur Referenzposition und deren Standardabweichungen in Nord- und Ostkomponente.

Tabelle 9.3: 2D-Schiffsposition

\bar{n} [m]	\bar{e} [m]	σ_n [m]	σ_e [m]
1,8	2,8	0,3	0,3

9.2 Evaluierung der berechneten Doppeldifferenzen

In der erfolgten Evaluierung des VNS wurden insgesamt vier Satelliten beobachtet. Exemplarisch dargestellt die Zeitreihe einer doppeldifferenzierten Trägerphase; siehe 9.3(oben). Die zweite Abbildung stellt die Asynchronität der beiden Empfänger dar; ausgedrückt durch den Parameter δt_A^B . Die Basis ist durch den Buchstaben A und der Rover durch B verdeutlicht. Wie Abbildung 9.3(unten) zeigt, beträgt $\delta t_A^B < 0$ oder $\delta t_A^B = 0$. Aufgrund des Vorzeichens und aus dem Wert 500ms kann daraus geschlossen werden, dass der Rover nicht bei jeder Messepoche die Daten an die Prozessoreinheit sendet.

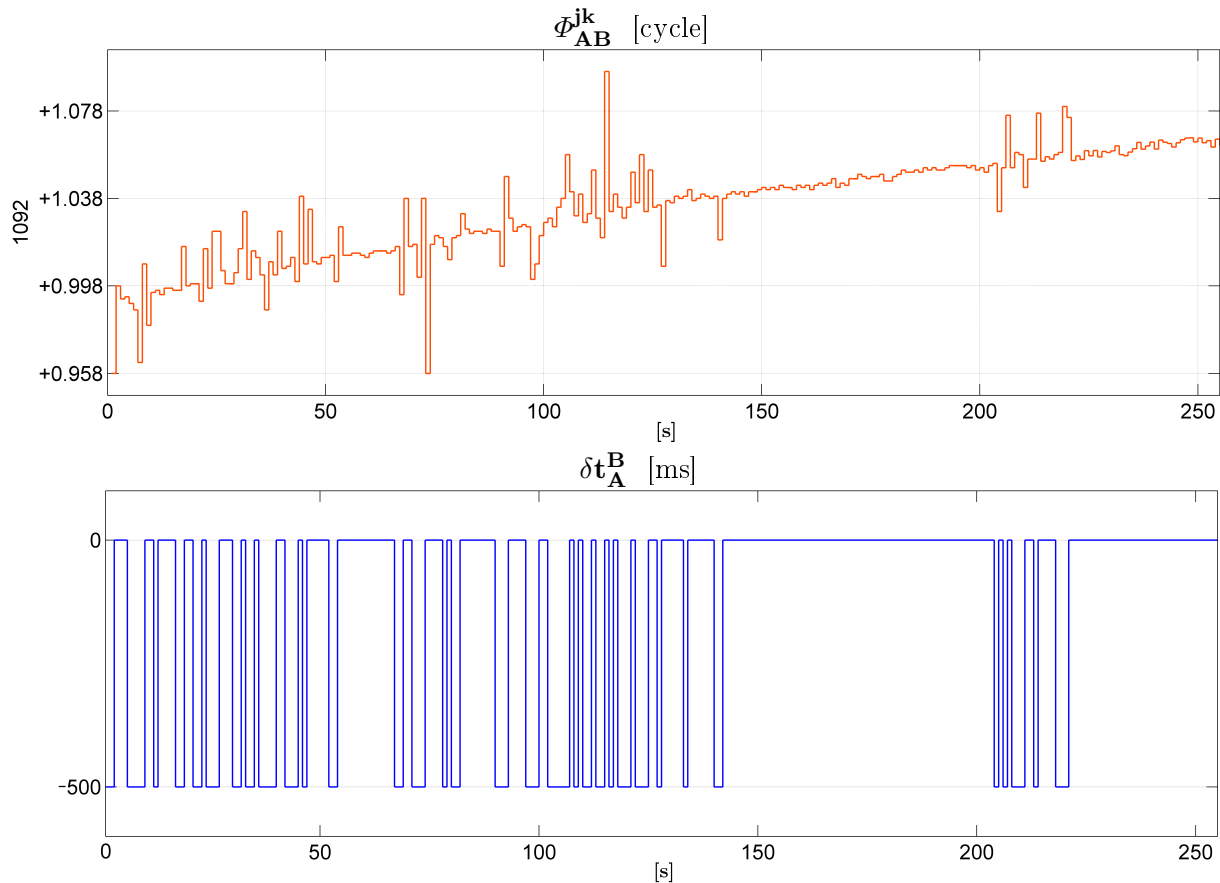


Abbildung 9.3: Berechnete Doppeldifferenz der Trägerphase (oben); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)

Aufgrund des Vorzeichens müssen die einzelnen Trägerphasen über die gesamten Messepochen rekonstruiert werden. Wie in Abschnitt 7.4.2 erklärt wurde, ist die Größe des Parameters δt_A^B wesentlich für die Genauigkeit der Rekonstruktion. Der Effekt des resultierenden Fehlers durch die Rekonstruktion in Φ_{AB}^{jk} ist deutlich erkennbar. Die doppeldifferenzierte Trägerphase ist bei $\delta t_A^B = 0$ um ein Vielfaches glatter, als bei der rekonstruierten Phasenlage. Die Fixierung der Ambiguitäten geschieht genau dann, wenn innerhalb von 3 Epochen die Empfänger synchron die Trägerphase beobachten. Genauere Analysen dieses Effekts wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt.

9.3 Evaluierung der float Basislinie

Der entstandene Fehler, resultierend aus der Rekonstruktion der Phasenlage, wird auch in der geschätzten float Basislinie ersichtlich, siehe Abbildung 9.4.

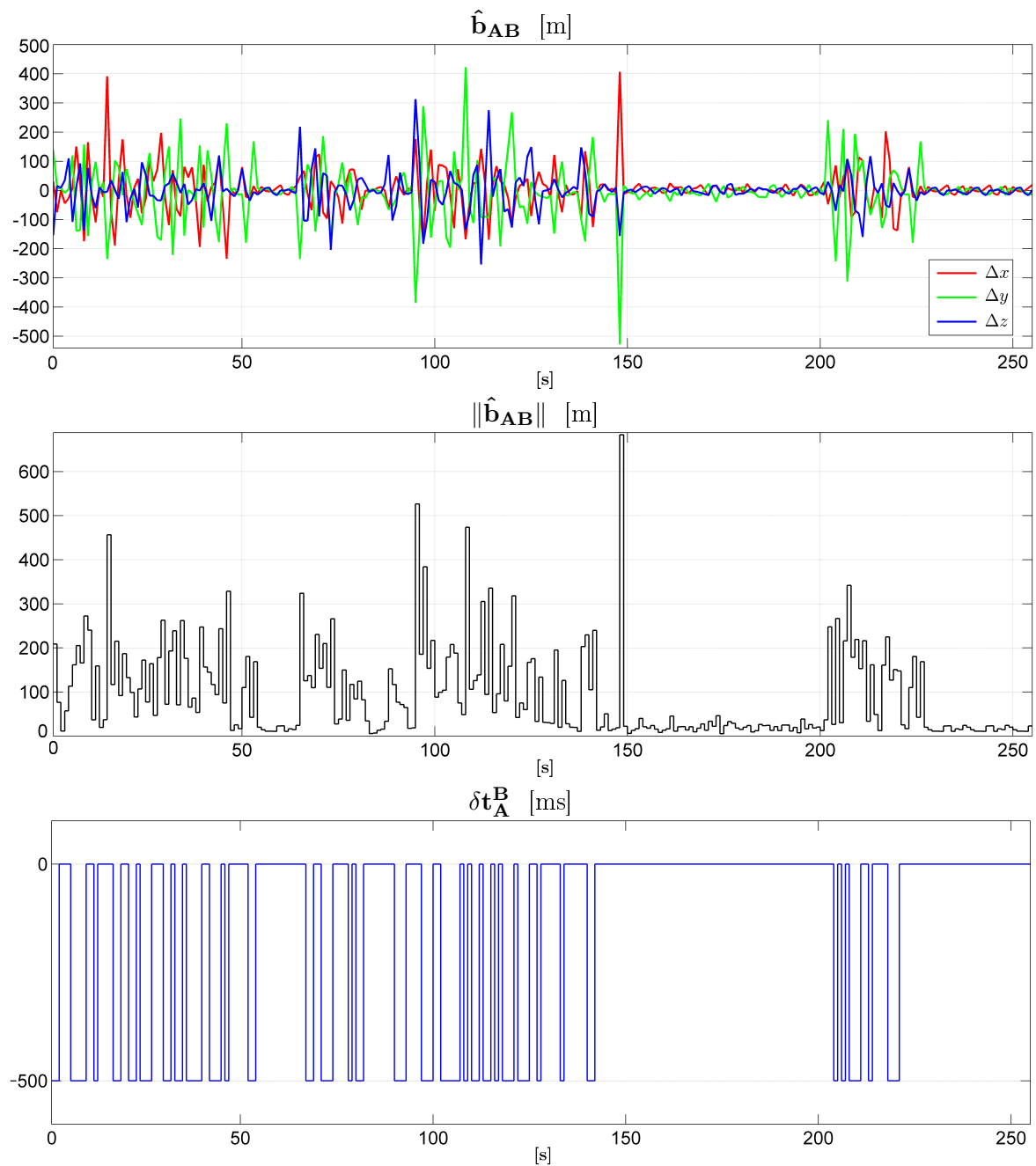


Abbildung 9.4: float Basislinienkomponenten (oben); float Basislinienlänge (mittig); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)

Muss die Trägerphase weder extrapoliert noch rekonstruiert werden, so entsteht zugleich ein glatter Verlauf der Basislinie, wie Abbildung 9.4 zeigt.

9.4 Zeitreihe der fixierten Ambiguitäten

Wie zuvor erwähnt, erfolgt die Fixierung der Ambiguitäten nur dann, wenn die Basislinienlänge unter der iterierten Schranke liegt und zugleich $\delta t_A^B = 0$ beträgt. Abbildung 9.5 (oben) zeigt das zeitliche Verhalten der exemplarisch dargestellten doppel-differenzierten Ambiguität N_{AB}^{jk} . Deutlich ist in Abbildung 9.5 (mittig) zu erkennen, zu welchem Zeitpunkt die LAMBDA-Methode die Ambiguitäten fixiert. Innerhalb der Initialisierungsphase erfolgt die Fixierung sieben Mal.

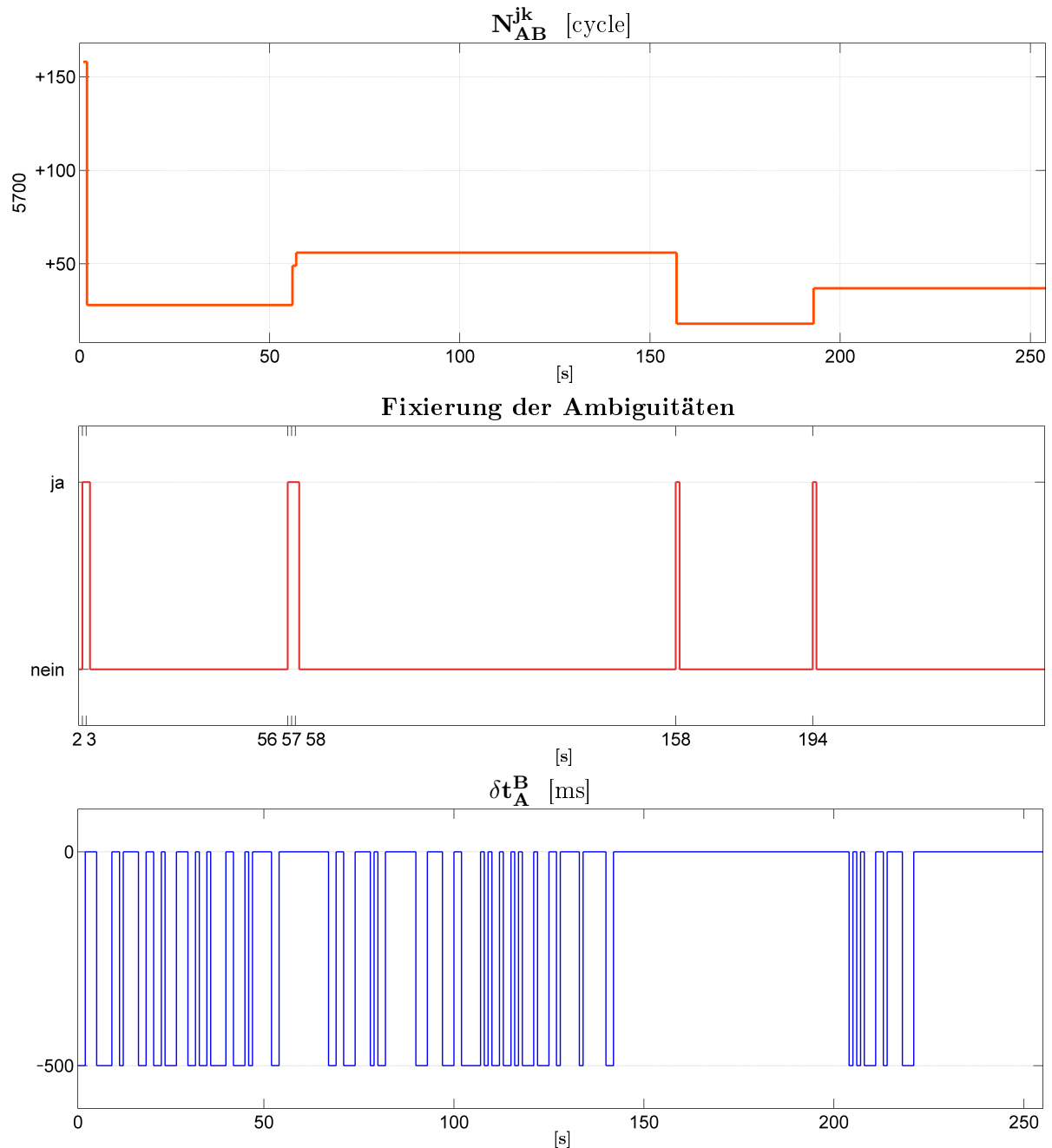


Abbildung 9.5: Doppel-differenzierte Ambiguität N_{AB}^{jk} (oben); Zeitpunkt der Fixierung (mittig); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)

9.5 Evaluierung der fixierten Basislinie

Gemäß Formel 9.1 wird die fixierte Basislinie \check{b}_{AB} nach jeder Fixierung der Ambiguitäten berechnet. Durch den Korrekturterm $\Delta\hat{b}_{AB}$ können die resultierenden Fehler in der float Basislinie, welche bei der Rekonstruktion der Trägerphase auftreten, reduziert werden; siehe Abbildung 9.6 (oben). Die Differenz zwischen float und fixierten Ambiguitäten ($\hat{N} - \check{N}$) verhält sich wie ein Skalierungsfaktor, um das System zu glätten. Die Metrik des Korrekturterms $\Delta\hat{b}_{AB}$ wird durch die Varianz-Kovarianzmatrizen definiert.

$$\check{b}_{AB} = \hat{b}_{AB} - \underbrace{\mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{N}}\mathbf{Q}_{\hat{N}}^{-1}}_{\Delta\hat{b}_{AB}}(\hat{N} - \check{N}) \quad (9.1)$$

Die Erfolgsrate einer jeden Fixierung ist aus Tabelle 9.4 zu entnehmen. Deutlich erkennbar ist, dass die erste Fixierung die größte Erfolgsrate zeigt.

Wie Tabelle 9.4 zeigt, verringert sich die fixierte Basislinie nach jeder Fixierung. Die Erfolgsrate der Fixierung ist abhängig von der Qualität der Fixierung durch die LAMBDA-Methode. Die Analyse zur Qualität der Ambiguitäten-Fixierung wurde in dieser Arbeit nicht behandelt.

Tabelle 9.4: Erfolgsrate der Fixierung

Iteration	$\ \check{\mathbf{b}}_{AB}\ $ [m]	Erfolgsrate
1	76,22	-
2	11,55	84,8 %
3	11,26	2,5 %
4	10,98	2,4 %
5	10,33	5,9 %
6	8,14	21,2 %
7	7,57	6,8 %

Nach der 7. Iteration wird die iterative Initialisierungsphase abgebrochen, da \check{b}_{AB} der definierten approximierten Basislinie entspricht.

Nach der Initialisierungsphase wird diese Basislinie herangezogen, um das fixierte Heading zu bestimmen. Tabelle 9.5 zeigt die Zeit der Initialisierungsphase.

Tabelle 9.5: Dauer der iterativen Initialisierungsphase

Iterative Initialisierungsphase	
Dauer	3 Min. 15 Sek.

Empirische Tests haben ergeben, dass diese Dauer variieren kann. Es ist auch möglich, dass die Initialisierung in einer Endlosschleife endet, wenn die Empfänger in allen gemessenen Epochen asynchron laufen.

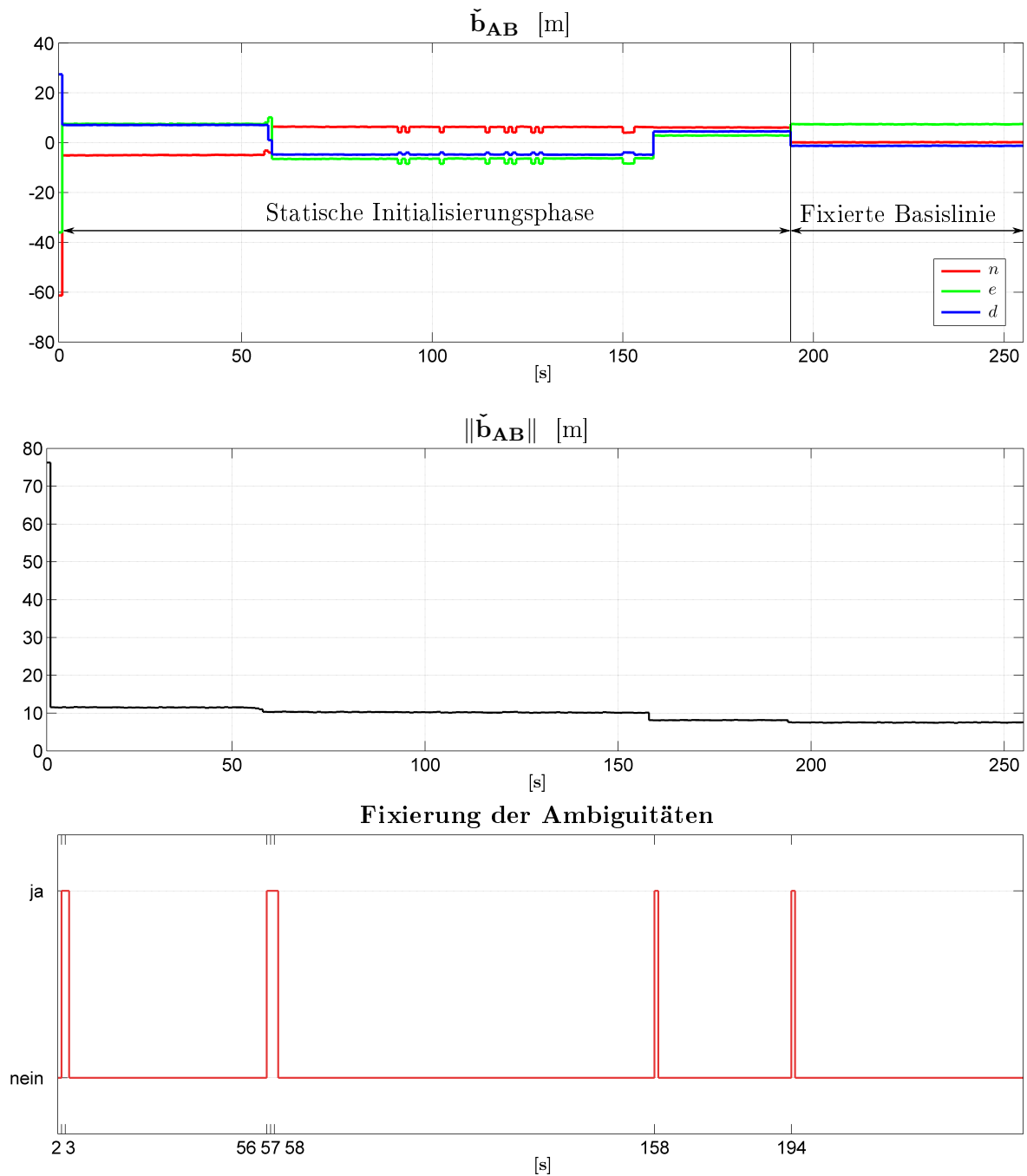


Abbildung 9.6: Fixierte Basislinienkomponenten (oben); fixierte Basislinienlänge (mittig); Zeitpunkt der Fixierung (unten)

9.6 Zeitreihe des Headings innerhalb der Initialisierungsphase

Wird das Heading innerhalb der Initialisierungsphase berechnet, so kann der zeitliche Verlauf des Parameters dargestellt werden, siehe Abbildung 9.7. Nach jeder Fixierung der Basislinie konvergiert das berechnete Heading in Richtung des aus den Pfeilerkoordinaten berechneten Referenzheadings. Dieses Annähern des Headings an den Referenzwert geschieht nicht zwingend von einer Seite. Während der Initialisierungsphasen kann das Heading beliebige Werte annehmen, solange die Initialisierungsphase nicht abgeschlossen ist.

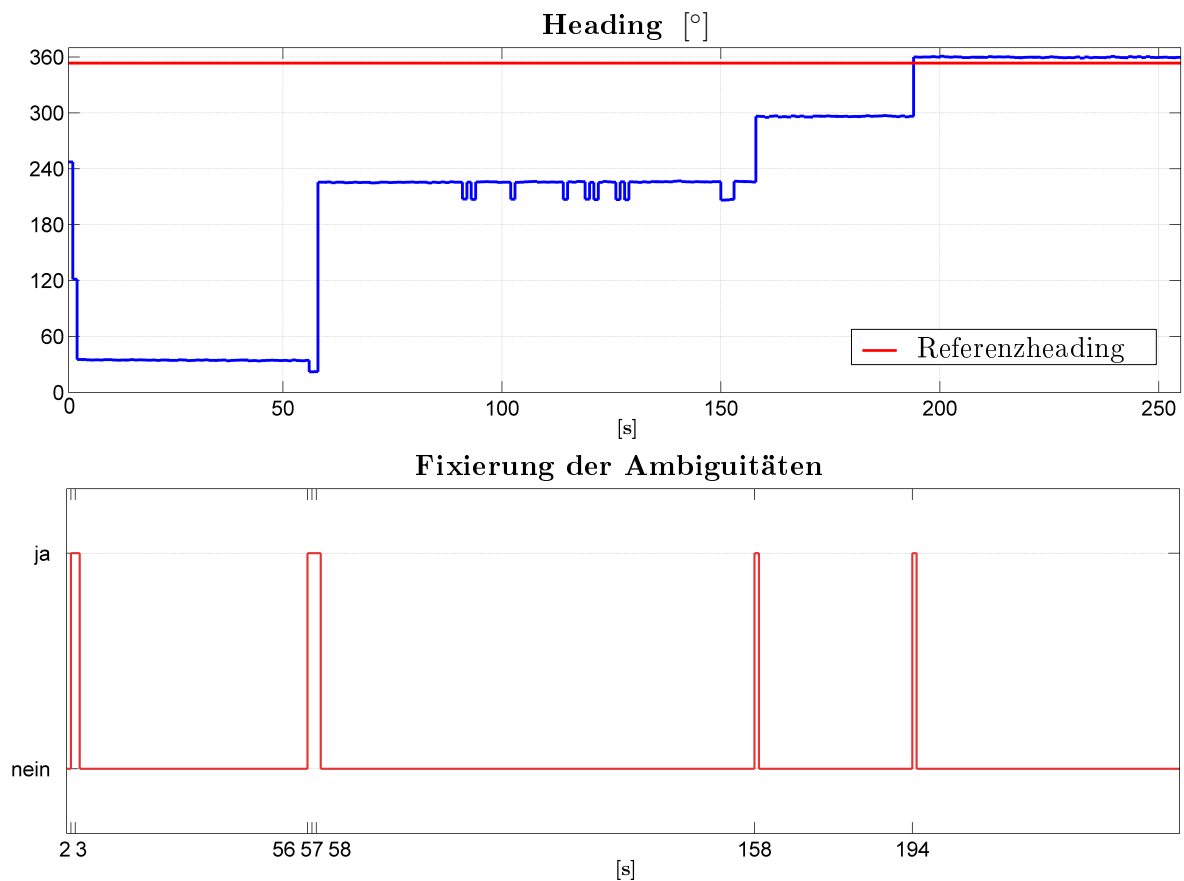


Abbildung 9.7: Zeitliches Verhalten des berechneten Headings (oben); Zeitpunkt der Fixierung (unten)

9.7 Basislinie nach der Initialisierungsphase

Wurde die Basislinie sowie das Heading nach der Initialisierungsphase als fix angenommen, so ergeben sich stochastische Parameter; in Tabelle 9.6 ersichtlich.

Tabelle 9.6: Qualität der Parameter

	$\ \check{\mathbf{b}}_{AB}\ $ [m]	Heading
σ	0,07	0,4°
Spannweite	0,19	1,8°
$\bar{\Delta}$ zu Referenz	0,86	4,4°

Aus Tabelle 9.6 ist zu entnehmen, dass die Präzision der fixierten Basislinie sowie die des fixierten Headings nach der Initialisierungsphase sehr hoch ist.

Die Zeitreihe der fixierten Komponenten und die Basislinie als Differenz zur Referenzlänge nach der Initialisierungsphase sind in Abbildung 9.8 festgehalten.

Nähere Analysen des Verhaltens des Headings nach der Initialisierungsphase wurden nicht durchgeführt.

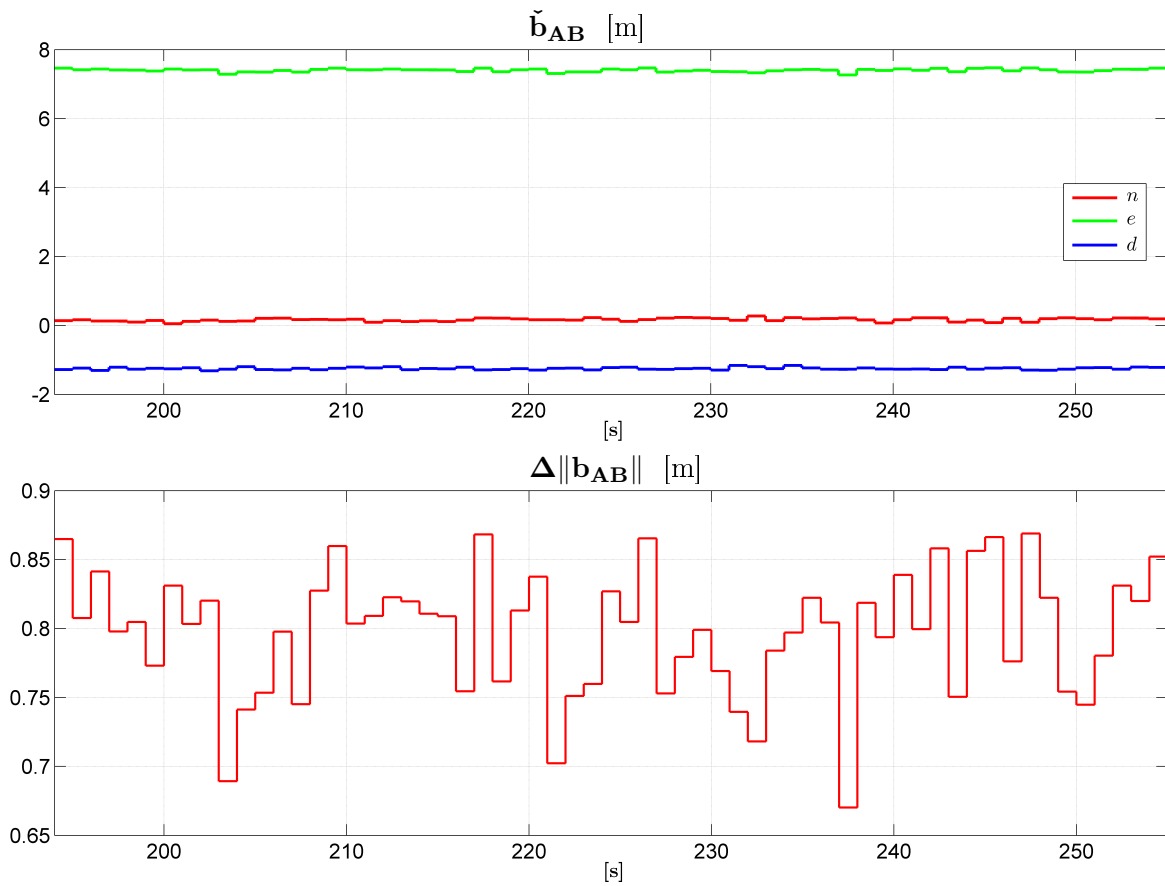


Abbildung 9.8: Verlauf der Basislinienkomponenten nach der endgültigen Fixierung (oben); Differenz der fixierte Basislinienlänge zur Referenz, ebenfalls nach endgültiger Fixierung (unten)

Der Verlauf der Differenz des Headings mit dem berechneten Referenzheading ist Abbildung 9.9 zu entnehmen.

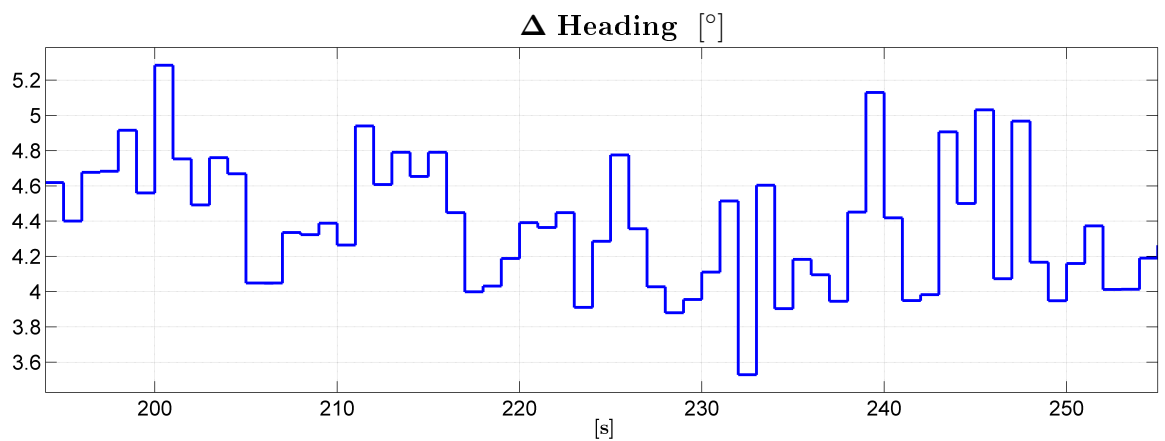


Abbildung 9.9: Verlauf des fixierten Headings nach der Initialisierungsphase

9.8 Vergleich VNS mit HEADNAV-System der TCA

Das bei der Firma TeleConsult Austria GmbH entwickelte HEADNAV-System berechnet das Heading eines Schiffs zum einen aus den Informationen von Drehratensensoren und zum anderen aus GPS Daten. Analog wurde bei HEADNAV relative Positionierung verwendet, um die Basislinie zu bestimmen, wobei zwei u-blox Empfänger (TIM-LH) zum Einsatz kamen [vgl. Troger, 2008, S.53].

Für die Verwendung des GPS-Headings musste dieser Parameter bei HEADNAV aufgrund der Fixierung der Ambiguitäten initialisiert werden. Dieser Vorgang führt die Prozessoreinheiten der Geräte aus. Nach der Initialisierungsphase konnte über 2h das statische Heading prozessiert werden. Der Vergleich der Systeme wird in Tabelle 9.7 verdeutlicht.

Tabelle 9.7: Vergleich des statischen GPS Headings beider Systeme

System	$\ \tilde{\mathbf{b}}_{\text{AB}}\ $	σ_{Heading}
HEADNAV	1,0 m	0,2°
low-cost VNS	6,7 m	0,4°

Das HEADNAV-System besticht durch die wesentlich kürzere Basislinie, sowie auch durch die geringe Streuung des Headings. Das low-cost VNS weist eine doppelt so große Streuung auf, jedoch muss hier darauf hingewiesen werden, dass die Beobachtungszeit nur einen Bruchteil der statischen Messung des HEADNAV-Systems ausmacht.

9.9 Fazit der iterativen Initialisierungsphase

Die in dieser Arbeit verwendete Variante der Initialisierungsphase stellt eine alternative Form der Initialisierung dar, insbesondere bei Empfängern mit kinematischen Anwendungen, die nicht ständig synchron arbeiten.

Die Bedingungen, zu welchem Zeitpunkt die Ambiguitäten-Fixierung mittels einer geeigneten Methode erfolgt, sind variierbar. Genauso können die Kovarianzen der float Ambiguitäten herangezogen werden. Sind die Kovarianzen der Ambiguitäten klein, so sind sie nicht stark korreliert und das Messrauschen ist gering. Die Wahrscheinlichkeit für die Fixierung der wahren Ambiguitäten ist somit höher, da der Ambiguitätensuchraum nicht extrem in die Länge gezogen wird.

Der große Nachteil besteht darin, dass die Initialisierungsdauer nicht vor Messbeginn festgelegt werden kann. Weiters zeigten empirische Tests, dass es durchaus vorkommen kann, wegen andauernder Asynchronität der Beobachtungen, keine Fixierung der Basislinie zu bewerkstelligen. Die Basislinie innerhalb der Initialisierungsphase kann nicht für die Bestimmung des Headings herangezogen werden.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Ein low-cost GPS VNS kann durch die Bestimmung von Position, Geschwindigkeit und Kurs realisiert werden. Verschiedene Methoden zur Realisierung, sowie die Durchführung zur Bestimmung dieser Parameter sind in gegenständlicher Arbeit niedergeschrieben. Diese stellt im Kernpunkt die Softwareentwicklung und das Konzept eines VNS dar. Insbesondere die Initialisierungsphase und die Synchronisierung der Empfängerdaten wurden anschaulich analysiert.

Es sei auch darauf hingewiesen, dass die Prozessierung der Parameter in Echtzeitanwendungen sich als nicht trivial herausstellten. Das Fazit der einzelnen Parameter des VNS im nachfolgenden Abschnitt gezeigt:

10.1 Zusammenfassung

10.1.1 Schiffsposition

Die Schiffsposition kann auf Basis des C/A-Codes durch eine Einzelpunktbestimmung eruiert werden. Zusätzlich wird durch die Verwendung eines Klobucharmodells die Ionosphäre modelliert.

Die u-blox Empfänger können die Empfängerposition selbst berechnen. Diese Position wird zusätzlich durch eine Kalmanfilterung geglättet und durch EGNOS verbessert. Aufgrund dieser Tatsache wurde diese bereits vorprozessierte Position für die Schiffsposition verwendet. Wie die Analysen zeigten, weist diese Position im statischen Fall eine Abweichung zur Referenzposition von 3 m auf, allerdings mit einer sehr hohen Präzision.

10.1.2 Geschwindigkeit

Das VNS konnte nur im statischen Fall getestet werden. Aus diesem Grund konnte die Schiffsgeschwindigkeit nicht evaluiert werden.

10.1.3 Heading

Die Vor- und Nachteile mehrerer Konzepte zur Bestimmung des Headings in Echtzeit wurden dargestellt und die Methoden der einzelnen Verfahren erklärt. Das Hauptaugenmerk lag indessen bei der Initialisierung der relativen Positionierung, um das Heading zu fixieren.

Aufgrund der asynchronen Datenübermittlung vom Empfänger an die Prozessoreinheit, musste eine geeignete Methode zur Synchronisierung der Beobachtungen verwendet werden. Es stellte

sich heraus, dass durch die Dopplerverschiebung die Trägerphase rekonstruiert werden kann. Durch einen modifizierten stufenweisen Ausgleich konnte eine kontinuierliche Bestimmung der Basislinie gewährleistet werden. Zusätzlich wird durch diese Vorgehensweise das berechnete Heading geglättet.

Im Zuge dieser Arbeit wurde die Initialisierung nur statisch evaluiert, die Software so entwickelt, dass auch dynamisch initialisiert werden kann. Die iterative Initialisierung macht es möglich, auch bei zeitweise asynchronen Trägerphasenbeobachtungen die Ambiguitäten trotzdem zu fixieren.

10.2 Ausblick

Um das VNS wesentlich zu verbessern, wäre es angebracht die Einleseroutine zu optimieren. Dadurch sinkt die Wahrscheinlichkeit, die Trägerphase über Epochen rekonstruieren zu müssen. Dies würde die Qualität der Extrapolation bzw. Rekonstruktion der Trägerphasen um einiges steigern. Auch wenn diese Methodik die Messung der Trägerphase über Epochen nicht ersetzen kann, stellt sie eine Alternative dar, um Empfänger zu synchronisieren. Ein weiterer Vorteil einer verbesserten Einleseroutine ist, dass während der Initialisierungsphase mehrere Epochen zur Fixierung der Ambiguitäten herangezogen werden können. Durch das Einbeziehen mehrerer Epochen, können die Ambiguitäten aufgrund der Änderung der Satellitenkonstellation besser gelöst werden. Dadurch erhöht sich die Erfolgsrate der Basislinie und es verkürzt sich die interaktive Initialisierungsphase. Eine Erweiterung der LAMBDA-Methode wäre vor der Fixierung ein wide-laning anzuwenden, um die Wellenlänge künstlich zu vergrößern und somit das Fixieren zu vereinfachen.

Ein Nachteil der LAMBDA-Methode ist, dass alle Ambiguitäten neu fixiert werden müssen, sollte ein Satellit während der Messung hinzukommen.

Um das Heading zusätzlich zu glätten, muss eine Filterung vorgenommen werden. Diese Erweiterung ist zwingend vorzunehmen bei einer dynamischen Evaluierung des Systems. Die Qualität der Geschwindigkeitsbestimmung ist gänzlich unbekannt, da in dieser Arbeit nicht dynamisch evaluiert wurde.

Alle genannten Erweiterungen sind erforderliche Bedingungen, um die Marktreife für das low-cost GPS VNS zu erlangen.

Anhang A

Berechnung von Satellitenpositionen

Folgender Algorithmus für GPS-Ephemeridendaten kann für die Berechnung von Satellitenpositionen im erdfesten Äquatorsystem verwendet werden, siehe Tabelle A.2. Die in Tabelle A.1 ersichtlichen Parameter entstammen aus der GPS ICD, 2006.

Tabelle A.1: GPS Parameter

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
GM	Geozentrische Gravitationskonstante (WGS84)	$3,986005 \cdot 10^{14}$	$[m^3/s^2]$
ω_E	Erdrotationsgeschwindigkeit (WGS84)	$7,2921151467 \cdot 10^{-5}$	$[rad/s]$
π_{GPS}	Kreiszahl (GPS exakt)	3.1415926535898	[]
c	Lichtgeschwindigkeit im Vacuum	299792458	$[m/s]$
E	Lineare Exzentrizität	-	$[m]$
e	Erste numerische Exzentrizität	-	[]

Tabelle A.2: Berechnungsalgorithmus für Satellitenpositionen nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008

Formel	Beschreibung
$a = (\sqrt{a})^2$	große Bahnhalbachse
$n_0 = \sqrt{GM/a^3}$	berechnete mittlere Bewegung des Satelliten
$n = n_0 + \Delta n$	korrigierte mittlere Bewegung des Satelliten
$M_k = M_0 + nt_k$	mittlere Anomalie
$E_k = M_k + e \sin(E_k)$	ekzentrische Anomalie (durch Iteration)
$\tan(\nu_k) = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin(E_k)}{\cos(E_k - e)}$	wahre Anomalie
$u_k = \omega_0 + \nu_k$	Argument der Breite
$\delta u_k = C_{uc} \cos(2u_k) + C_{us} \sin(2u_k)$	Korrektur des Arguments der Breite
$\delta r_k = C_{rc} \cos(2u_k) + C_{rs} \sin(2u_k)$	Korrektur des Bahnradius
$\delta i_k = C_{ic} \cos(2u_k) + C_{is} \sin(2u_k)$	Korrektur der Inklination

Fortsetzung Tabelle A.2 - Berechnungsalgorithmus für Satellitenpositionen nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008

Formel	Beschreibung
$\delta\omega_k = \omega_k + \delta u_k$	Korrektur des Arguments des Perigäums
$r_k = a(1 - e \cos(E_k)) + \delta r_k$	korrigierter Bahnradius
$i_k = i_0 + \dot{i}t_k + \delta i_k$	korrigierte Inklination
$l_k = l_0 + \dot{\Omega}t_k - \omega_E(t - t_0)$	korrigierte Rektaszension des aufsteigenden Knotens
$x_k = r_k \cos(\omega_k + \nu_k)$	x-Koordinate in der Bahnebene
$y_k = r_k \sin(\omega_k + \nu_k)$	y-Koordinate in der Bahnebene
$X_k = x_k \cos(l_k) - y_k \sin(l_k) \cos(i_k)$	x_1^e -Koordinate der berechneten Satellitenposition
$Y_k = x_k \sin(l_k) + y_k \cos(l_k) \cos(i_k)$	x_2^e -Koordinate der berechneten Satellitenposition
$Z_k = y_k \sin(i_k)$	x_3^e -Koordinate der berechneten Satellitenposition

Anhang B

Berechnung von Azimut und Elevation

Formeln B.1 bis B.3 zeigen die Transformation des Differenzvektors $\vec{\varrho}_r^s(t)$ in ein topozentrisches Horizontsystem.

$$n(t) = -\Delta x_r^s(t) \sin(\varphi(t)) \cos(\lambda(t)) - \Delta y_r^s(t) \sin(\varphi(t)) \sin(\lambda(t)) + \Delta z_r^s(t) \cos(\varphi(t)) \quad (\text{B.1})$$

$$e(t) = -\Delta x_r^s(t) \sin(\lambda(t)) + \Delta y_r^s(t) \cos(\lambda(t)) \quad (\text{B.2})$$

$$u(t) = +\Delta x_r^s(t) \cos(\varphi(t)) \cos(\lambda(t)) + \Delta y_r^s(t) \cos(\varphi(t)) \sin(\lambda(t)) + \Delta z_r^s(t) \sin(\varphi(t)) \quad (\text{B.3})$$

Aus Formeln B.4 und B.5 können *Azimut* und *Zenitdistanz* berechnet werden. Für den Elevationswinkel ϵ wird von der Zenitdistanz $\frac{\pi}{2}$ abgezogen.

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{e(t)}{n(t)} \quad (\text{B.4})$$

$$\sin(z(t)) = \frac{u(t)}{\sqrt{n^2(t) + e^2(t) + u^2(t)}} \quad (\text{B.5})$$

Anhang C

Modellierung von Ionosphäre und Troposphäre

C.1 Ionosphärische Refraktion

Die Navigationsnachricht der GPS Satelliten enthält neben den Ephemeriden auch 8 Parameter für das Klobuchar Modell. Folgender Algorithmus zeigt, wie aus einem Azimut a , der Zenitdistanz z und den Klobucharparametern α_{0-3} und β_{0-3} der Korrekturterm Δ_{iono} berechnet werden kann. Sämtliche Winkel entsprechen Halbwinkeln. Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der Ionosphäre sind mit φ_{IP} und λ_{IP} definiert.

Tabelle C.1: Broadcast Ionosphärenmodell nach Leick, 1995, S.302

Schritt	Berechnung
1.	$F = 1 + 16 \cdot (0,53 - z)^2$
2.	$\Psi = \frac{0,0137}{1 + 0,11} - 0,022$
3.	$\varphi_{IP} = \begin{cases} \varphi + \Psi \cos(a) & \text{für } \varphi_{IP} \leq 0,416 \\ 0,416 & \text{für } \varphi_{IP} > 0,416 \\ -0,416 & \text{für } \varphi_{IP} < -0,416 \end{cases}$
4.	$\lambda_{IP} = \lambda + \frac{\Psi \sin(a)}{\cos(\varphi_{IP})}$
5.	$\Phi = \varphi_{IP} + 0.064 \cos(\lambda_{IP} - 1.617)$
6.	$t = \begin{cases} \lambda_{IP} \cdot 4.32 \cdot 10^4 + t_k & \text{für } 0 \leq t < 86400 \\ \lambda_{IP} \cdot 4.32 \cdot 10^4 + t_k - 86400 & \text{für } t \geq 86400 \\ \lambda_{IP} \cdot 4.32 \cdot 10^4 + t_k + 86400 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

Fortsetzung Tabelle C.1 - Broadcast Ionosphärenmodell nach Leick, 1995, S.302

Schritt	Berechnung
7.	$x = \frac{2\pi_{GPS} \cdot (t_k - 50400)}{P}$
8.	$P = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 \beta_n \cdot \Phi^n & \text{für } P \geq 72000 \\ 72000 & \text{für } P < 72000 \end{cases}$
9.	$A = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 \alpha_n \cdot \Phi^n & \text{für } P \geq 0 \\ 0 & \text{für } P < 70 \end{cases}$
10.	$\Delta_{iono} = \begin{cases} c \cdot F \left[5 \cdot 10^{-9} + A \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right] & \text{für } x < 1.57 \\ c \cdot F(5 \cdot 10^{-9}) & \text{für } x > 1.57 \end{cases}$

C.2 Troposphärische Refraktion

Um die Refraktion der Troposphäre $\Delta_{tropo}(\epsilon)$ reduzieren zu können, kann ein Modell nach Hopfield angewandt werden. Durch die Verwendung von Standardwerten der Temperatur T , Luftdruck p , und dem partiellen Wasserdampfdruck e , kann ein trockener Anteil $\Delta_{tropo}^{dry}(\epsilon)$, sowie ein feuchter Anteil $\Delta_{tropo}^{wet}(\epsilon)$ der Troposphäre ermittelt werden. Werden beide Anteile addiert, so erhält man den Korrekturterm $\Delta_{tropo}(\epsilon)$. Formeln C.1 bis C.3 wurden aus Hofmann-Wellenhopf et al., 2008, S.132 entnommen.

$$\Delta_{tropo}(\epsilon) = \Delta_{tropo}^{dry}(\epsilon) + \Delta_{tropo}^{wet}(\epsilon) \quad (\text{C.1})$$

$$\Delta_{tropo}^{dry}(\epsilon) = \frac{10^{-6}}{5} \cdot \frac{77,64}{\sin(\sqrt{(E^2 + 6,25)})} \cdot \frac{p}{T} \cdot [40136 + 148,72(T - 273,15)] \quad (\text{C.2})$$

$$\Delta_{tropo}^{wet}(\epsilon) = \frac{10^{-6}}{5} \cdot \frac{-12,96T + 3,718 \cdot 10^5}{\sin(\sqrt{(E^2 + 2,25)})} \cdot \frac{e}{T^2} 11000 \quad (\text{C.3})$$

Anhang D

Modifizierter bubble-sort

Der modifizierte bubble-sort Algorithmus ordnet nicht nur die Elevationswinkel chronologisch in absteigender Reihenfolge, sondern schreibt jedem Satelliten einen Index zu.

Durch sequentielles Vertauschen der Elevationswinkel, kann zugleich ein Index zu jeder Elevation zugewiesen werden:

```
for (i = n-1) to (i > 0), i-
  for (k = 0) to (k < i), k++
    if (Elevation[k] < Elevation[k+1])
      swp1 = Elevation[k];
      swp2 = PRN[k];

      Elevation[k] = Elevation[k+1];
      PRN[k] = PRN[k+1];

      Elevation[k+1] = swp1;
      PRN[k+1] = swp2;
    end
  end
end
```

Der Parameter n beschreibt die Anzahl der vorhandenen Satelliten.

Anhang E

Meridiankonvergenz

Bei der Abbildung von geodätischen Linien entspricht die Gerade einer gekrümmten Linie. Um das in einem topozentrischen Horizontsystem bestimmte Heading mit dem Referenz-Heading vergleichen zu können, muss die Meridiankonvergenz berücksichtigt werden:

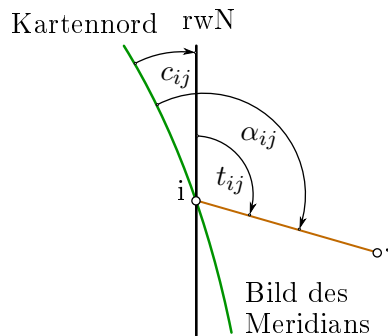


Abbildung E.1: Meridiankonvergenz

$$\begin{aligned}
 c = & \frac{t_f}{N_f} y_{GK} + \frac{t_f}{3N_f^3} (-1 - t_f^2 + \eta_f^2 + 2\eta_f^4) y_{GK}^3 \\
 & + \frac{t_f}{N_f^5} (2 + 5t_f^2 + 3t_f^4 + 2\eta_f^2 + t_f^2 \eta_f^2) y_{GK}^5 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{E.1}$$

Tabelle E.1: Beschreibung der Hilfsgrößen

Parameter	Bezeichnung
φ_f	Fusspunktsbreite für die Abszisse x
$N_f = \frac{a^2}{b\sqrt{1+n_f^2}}$	Normalkrümmungsradius für φ_f
$\eta_f^2 = e'^2 \cos(\varphi_f)$	Hilfsgröße
$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$	Zweite numerische Exzentrizität
$t_f = \tan(\varphi_f)$	Hilfsgröße
y_{GK}	y-Koordinate der Gauß-Krüger Abbildung

Abbildungsverzeichnis

2.1	Nordrichtungen, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.103]	6
2.2	Kartesische und ellipsoidische Koordinaten, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.24]	9
2.3	Beobachtungen im Topozentrischen Horizontsystem, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.22]	10
2.4	Rotationswinkel im Objektkoordinatensystem, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.27]	11
2.5	Zusammenhang der Äquatorsysteme, modifiziert nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2003, S.21]	12
3.1	Prinzip der Satellitengestützten Positionierung, modifiziert nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.4	16
3.2	Satellitengestützte Positionierung	18
4.1	Prinzip der Trägerphasenbeobachtung	26
4.2	Einfachdifferenzen	27
4.3	Doppeldifferenzen	28
4.4	Beobachtete Trägerphasen	33
5.1	Suchraum für die Fixierung in der Koordinatendomäne in Gitterform [vgl. Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.222]	37
5.2	Suchraum aufgespannt durch $Q_{\hat{a}}$	39
5.3	Dekorrelation des Ambiguitätensuchraums, modifiziert nach Teunissen and Kleusen-berg, 1998, S.365	42
5.4	Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit des Suchraumvolumens [de Jonge C. Tibe-rius, 1996, S.30]	43
5.5	Vergleich der Suchräume	48
5.6	Suchraum und Suchintervall, [Teunissen and Kleusen-berg, 1998, S.339]	49
5.7	Integer-Kandidaten im Suchraum und deren Suchraumgröße	51
6.1	Fahrtgeschwindigkeit	53
6.2	Änderung des Headings eines Schiffs	55
6.3	Berechnung des Headings	56
7.1	u-blox EVK-6T	58
7.2	Prozessoreinheit	59

7.3	geodätische Antenne	60
7.4	Extrapolation der Trägerphase durch Dopplermessungen	62
8.1	Ablauf der Ephemeriden Akquirierung	65
8.2	Bestimmung der Schiffposition	66
8.3	Design-Matrix	67
8.4	Ablauf der Initialisierungsphase	69
9.1	Anordnung des VNS	71
9.2	2D Schiffposition	72
9.3	Berechnete Doppeldifferenz der Trägerphase (oben); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)	73
9.4	float Basislinienkomponenten (oben); float Basislinienlänge (mittig); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)	74
9.5	Doppeldifferenzierte Ambiguität N_{AB}^{jk} (oben); Zeitpunkt der Fixierung (mittig); Asynchronitätsparameter δt_A^B (unten)	75
9.6	Fixierte Basislinienkomponenten (oben); fixierte Basislinienlänge (mittig); Zeitpunkt der Fixierung (unten)	77
9.7	Zeitliches Verhalten des berechneten Headings (oben); Zeitpunkt der Fixierung (unten)	78
9.8	Verlauf der Basislinienkomponenten nach der endgültigen Fixierung (oben); Differenz der fixierte Basislinienlänge zur Referenz, ebenfalls nach endgültiger Fixierung(unten)	79
9.9	Verlauf des fixierten Headings nach der Initialisierungsphase	79
E.1	Meridiankonvergenz	89

Tabellenverzeichnis

3.1	Einteilung der Parameter	19
3.2	Elevationsabhängigkeit des UERE, Quelle: Troger, 2009, S.10	22
4.1	Parameter der Trägerphasenbeobachtung	26
5.1	Beschreibung der Parameter	38
5.2	Klassifizierung der Suchraumdimensionen	39
5.3	Beschreibung der Indizes	45
5.4	Intervalldefinitionen für den Suchraum	47
5.5	Suchintervalle für die sequentiell bedingte Suche kleinster Quadrate	49
7.1	Systemspezifikationen EVK-6T [ublox, 2011]	58
7.2	Systemspezifikationen der Prozessoreinheit	59
7.3	Systemspezifikationen der Antennen	60
8.1	Übertragene Daten der Empfänger	64
9.1	Referenzparameter	70
9.2	Systemdefinitionen	71
9.3	2D-Schiffsposition	72
9.4	Erfolgsrate der Fixierung	76
9.5	Dauer der iterativen Initialisierungsphase	76
9.6	Qualität der Parameter	78
9.7	Vergleich des statischen GPS Headings beider Systeme	80
A.1	GPS Parameter	83
A.2	Berechnungsalgorithmus für Satellitenpositionen nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008	83
C.1	Broadcast Ionosphärenmodell nach Leick, 1995, S.302	86
E.1	Beschreibung der Hilfsgrößen	89

Literaturverzeichnis

- ISO 31-1. *EG-Richtlinie über das Messwesen*. ISO 31-1. International Standardization Organization, 1992.
- H. Bartsch. *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. Fachbuchverlag Leipzig, München Wien, 2004.
- P. de Jonge C. Tiberius. *The LAMBDA-Method for integer ambiguity estimation: implementation aspects*. Publications of the Delft Geodetic Computing Centre, Delft University of Thechnology, NL, 1996.
- P.J.G. Teunissen P.J. de Jonge C.C. J. M. Tiberius. The least squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation spans. *Delft Geodetic Computing Centre (LGR)*, 1995.
- DoD Department of Defense. *Global positioning system – standard positioning service performance standard*. US Assistant for GPS, Positioning and Navigation, Department of Defence, Washington DC 20301-6000, 2001.
- Q.P. Chu E. De Weerd, E. van Kampen and J.A. Mulder. New Approach for Integer Ambiguity Resolution using Interval Analysis. *Navigation - Journal of the Institute of Navigation*, 55(4): 293–307, 1998.
- DI J. Fleckl. PRÄZISIONSBESTIMMUNG DES PRÜFFELDES DACH, STEYRERGASSE 30 ZUR ÜBERPRÜFUNG VON GEODÄTISCHEN INSTRUMENTEN. Master's thesis, Institut für Ingenieurgeodäsie und Messsysteme, Technische Universität Graz, 2007.
- DI M. Gaggl. *Die Lösung der Phasenambiguitäten für GNSS-2: Möglichkeiten und Methoden*. Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Technische Universität Graz, 2004.
- GPS ICD. *NAVSTAR GLOBAL POSITIONING SYSTEM - Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces, INTERFACE SPECIFICATION*. El Segundo, CA 90245-4659, 2006.
- D. Gross, W. Hauger, B. Schnell, and J. Schröder. *Technische Mechanik 3 - Kinetik*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- B. Hofmann-Wellenhof, K. Legat, and M. Wieser. *Navigation – principles of positioning and guidance*. Springer, Wien New York, 2003.
- B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and E. Wasle. *GNSS – global navigation satellite systems. GPS, GLONASS, Galileo & more*. Springer, Wien New York, 2008.

- P. Joosten. *The LAMBDA-Method: MATLAB Implementation*. Mathematical Geodesy and Positioning Civil Engineering and Geosciences Institute, Delft University of Technology, NL, 2001.
- E.D. Kaplan. *Understanding GPS - Principles and Applications*. Artech House Publishers, Boston London, 1996.
- Kowoma. www.kowoma.de, 2012. URL <http://www.kowoma.de>.
- A. Leick. *GPSs satellite surveying*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990.
- A. Leick. *GPS satellite surveying (2nd Edition)*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.
- D. Maier. *Motorflug - Theorie und Praxis*. Druckerei Ludwig Auer, Donauwörth, 1993.
- W Niemeier. *Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden, 2. Auflage*. De Gruyter, Berlin, 2008.
- G.H. Schildt. *Satellitennavigation - GPS, GLONASS und GALILEO*. LYK - Informationstechnik GmbH, Wien, 2008.
- G. Seeber. *Satellitengeodäsie - Grundlagen, Methoden und Anwendungen*. de Gruyter, Berlin New York, 1989.
- G. Strang and K. Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley - Cambridge Press, United States of America, 1997.
- G. Giorgi P.J.G. Teunissen. On the Time To Fix for Single Frequency GNSS Based Attitude Determination. *International Global Navigation Satellite System Society, IGNSS Symposium 2009*.
- P.J.G. Teunissen and A. Kleusenber. *GPS for Geodesy*. Springer, Berlin Heidelberg, 1998.
- A. Thompson and B.N. Taylor. Guide for the Use of the International System of Units (SI). *NIST Special Publication 811*, 2008.
- P. Joosten C. Tiberius. LAMBDA: FAQ's. *GPS Solutions*, Volume 6 - Number 1-2, 2002.
- DI M. Troger. *Low-cost Headingbestimmung in der Binnenschiffahrt*. Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Technische Universität Graz, 2008.
- M. Troger. IEGLO - Computation of a GPS accuracy parameter derived from NMEA data. *TeleConsult Austria GmbH*, 1.1, 2009.
- ublox. *u-blox 6 Receiver Description*. ICD, u-blox AG, Thalwil, Schweiz, 2011.
- JM. Zogg-Weber. Empfangsmodule für GPS - Grundlagen zu GPS und DGPS sowie technische Daten kommerzieller Module. *Elektronik*, Heft 25, 2000.