



Wolfgang Pickl, BSc

Eigenwertprobleme zur Fluid–Struktur–Interaktion

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technomathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach

Dr. Gerhard Unger

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Aufgabenstellung	7
1.1 Lineare Elastizitätstheorie	7
1.2 Lineare Akustik	10
1.3 Geometrischer Zusammenhang von Struktur und Fluid	11
1.4 Kopplungsbedingungen	12
1.5 Gekoppeltes Problem	12
2 Analyse der Modelle der Elastizität und der Akustik	13
2.1 Operatoren	13
2.2 Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren auf Hilberträumen	15
2.3 Funktionenräume	17
2.4 Bilinearformen des FSI–Eigenwertproblems	22
2.5 Darstellung für den Druck im Fluid	24
2.6 Randintegraloperatoren	25
2.7 Variationsformulierung des FSI–Eigenwertproblems	30
3 Näherungsmethoden	35
3.1 Galerkin–Bubnov–Formulierung	35
3.2 Finite Elemente	37
3.3 Randelemente	39
3.4 Diskrete Formulierung des FSI–Eigenwertproblems	41
3.5 Konvergenz des diskreten Problems	45
4 Verallgemeinertes Matrix–Eigenwertproblem	51
4.1 Grundlegende Eigenschaften	51
4.2 Eigenwertlöser	54
4.2.1 Arnoldi–Verfahren	55
4.2.2 Lanczos–Verfahren	58
5 Numerische Ergebnisse	61
5.1 Arnoldi	62
5.1.1 Verfeinerungslevel 1	64
5.1.2 Verfeinerungslevel 2	65
5.2 Lanczos	66
5.2.1 Verfeinerungslevel 1	67

5.2.2	Verfeinerungslevel 2	68
5.3	Vergleich der Verfahren	69

1 Aufgabenstellung

Im ersten Kapitel, das sich größtenteils an [6, 8, 15] orientiert, werden die Modelle der linearen Elastizitätstheorie und der linearen Akustik dargestellt sowie auf deren Kopplung eingegangen. Abschließend wird das resultierende gekoppelte Eigenwertproblem für ein dreidimensionales Gebiet angeführt.

1.1 Lineare Elastizitätstheorie

Die Kinematik, siehe [6, Abs. 5.4], ermöglicht die Beschreibung zeitlich veränderlicher Körper. Der zeitliche Verlauf eines Materiepunktes \mathbf{x} eines Körpers Ω_S wird durch die Abbildung $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$, genannt Trajektorie oder Bahnkurve von \mathbf{x} , beschrieben.

Definition 1.1. Sei $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes (offenes und zusammenhängendes) Lipschitz-Gebiet, das dem unverformten Festkörper (Referenzkonfiguration, $t = t_0$) entspricht. Der Rand $\partial\Omega_S$ sei stückweise glatt. Eine Abbildung $\boldsymbol{\phi} : (t_0, T) \times \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt \mathcal{C}^1 -Deformation wenn gilt:

1. $\boldsymbol{\phi}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega_S$.
2. Für fixes $t \in (t_0, T)$ ist $\boldsymbol{\phi}(t, \cdot)$ bijektiv auf Ω_S , d.h. es existiert die Inverse $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ auf der deformierten Konfiguration.
3. Der Deformationsgradient $\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ ist eine stetige Abbildung.
4. $\boldsymbol{\phi}$ ist orientierungserhaltend, d.h. $\det(\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega_S$ und für alle $t \in (t_0, T)$.

Definition 1.2. Die Abbildung $\mathbf{u} : (t_0, T) \times \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x},$$

heißt Verschiebungsfeld des Gebietes Ω_S .

Das **Reynoldsche Transporttheorem** stellt einen Zusammenhang zwischen der Eulerschen (\mathbf{y} -Koordinaten) und der Lagrangeschen Betrachtungsweise (\mathbf{x} -Koordinaten) eines Kontrollvolumens her:

Satz 1.3. [6, Satz 5.4](Reynoldsches Transporttheorem)

Sei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die eine physikalische Größe beschreibt, und sei $\boldsymbol{\phi}(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine \mathcal{C}^1 -Deformation. Dann gilt für alle beschränkten Kontrollvolumina $\omega(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{y}) + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} (f(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y})) \right] d\mathbf{y},$$

mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t, \mathbf{y}) = \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t)$.

Die bestimmenden Gleichungen der Kinematik beruhen auf den **Erhaltungssätzen** für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie, siehe [6, Abs. 5.5]. Für die lineare Elastizitätstheorie wird das Axiom der **Impulserhaltung** benötigt, das besagt, dass die Änderung des Impulses gleich der Summe der angreifenden (Volums- und Oberflächen-) Kräfte ist, d.h.

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{y}) v_i(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{y}) f_i(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\omega(t)} \tau_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{n}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } i = 1, \dots, 3, \quad (1.1)$$

wobei f_i den Kräften, τ_i den Komponenten des Cauchyschen Spannungsvektors τ , ϱ der Massendichte und \mathbf{n} dem äußeren Normalenvektor entsprechen.

Durch Anwenden des Reynoldsschen Transporttheorems auf die Impulserhaltung (1.1) erhält man die **Cauchyschen Bewegungsgleichungen** (in differenzieller Form)

$$\varrho(t, \mathbf{y}) \frac{d}{dt} v_i(t, \mathbf{y}) = \varrho(t, \mathbf{y}) f_i(t, \mathbf{y}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_k} T_{ik}(t, \mathbf{y}) \quad \text{für } i = 1, \dots, 3, \quad (1.2)$$

wobei die Beziehung $\tau_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = \sum_{k=1}^3 T_{ik}(t, \mathbf{y}) n_k$ für den symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor \mathbf{T} gilt.

Unter der Annahme eines **inkompressiblen** Materials, d.h. $\varrho(t, \mathbf{y}) = \varrho_S = \text{const}$ für alle $t \in (t_0, T)$, folgen aus den Gleichungen (1.2) die Gleichgewichtsgleichungen (in Lagrangeschen Koordinaten)

$$\varrho_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \varrho_S \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S, t \in (t_0, T). \quad (1.3)$$

Um den Spannungstensor \mathbf{T} in Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} zu beschreiben wird ein **Materialgesetz** benötigt.

Definition 1.4. Die Abbildung $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, definiert durch

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, 3, \quad (1.4)$$

heißt *linearisierter Verzerrungstensor*.

Definition 1.5. Die Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, definiert durch

$$\sigma(\varepsilon(\mathbf{u})) = \lambda_L \operatorname{tr} \varepsilon \cdot \mathbf{I} + 2\mu_L \varepsilon, \quad (1.5)$$

heißt *linearisierter Spannungstensor*. Dabei werden mit

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_L = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

die Laméschen Elastizitätskonstanten bezeichnet, welche bestimmt werden durch den Elastizitätsmodul $E > 0$ und die Querkontraktionszahl (Poissonzahl) $\nu \in (0, \frac{1}{2})$.

Das sogenannte **Hooksche Gesetz** (1.5), siehe [15, Abs. 4.2], gilt für ein homogenes, isotropes und elastisches Material.

Werden die Kräfte \mathbf{f} in den Gleichgewichtsgleichungen (1.3) zu Null gesetzt und der Cauchysche Spannungstensor \mathbf{T} durch den linearisierten Spannungstensor σ aus (1.5) approximiert, d.h.

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \approx \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \sigma(\varepsilon(\mathbf{u})),$$

ergibt sich aus (1.3) die Gleichung

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) = -\varrho_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S, t \in (t_0, T).$$

Für einen zeitharmonischen Ansatz für \mathbf{u} , d.h.

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})),$$

mit der Kreisfrequenz ω , folgt daraus (nach Weglassen des $\hat{}$ -Symbols)

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \varrho_S \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S.$$

Werden für das homogene, isotrope und elastische Material in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ mit der Dichte $\varrho_S > 0$ und dem Rand $\partial\Omega_S$ die Neumann-Randbedingungen

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega_S$$

gefordert, so folgt das sogenannte **Lamé-Eigenwertproblem** mit Neumann-Randbedingungen für die Struktur Ω_S : Gesucht sind das vektorwertige Verschiebungsfeld $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ und die Kreisfrequenz $\omega \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichungen

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \varrho_S \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad (1.6a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega_S, \quad (1.6b)$$

erfüllt werden. Es sei angemerkt, dass das Lamé-Eigenwertproblem (1.6a)–(1.6b) 6 Null-Eigenwerte aufweist, welche die freien Translationen und freien Rotationen in bzw. um die 3 Koordinatenachsen repräsentieren, siehe z.B. [19, Abs. 1.2].

1.2 Lineare Akustik

In diesem Abschnitt, der sich an [8, Abs. 1.1] orientiert, werden die bestimmenden Gleichungen für das akustische Medium angegeben. Bei einer akustischen Welle (Schall) handelt es sich um kleine Schwankungen des Drucks $p(t, \mathbf{x})$ im akustischen Fluid $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$, welches unbeschränkt und inkompressibel, d.h. $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_F = \text{const}$, sei.

Nach [8, Abs. 1.1.2] wird die Ausbreitung einer Welle im Fluid beschrieben durch die Wellengleichung

$$\Delta_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F \text{ und } t \in (t_0, T) \quad (1.7)$$

mit dem unbekanntem Druck $p(t, \mathbf{x})$ und der (als Materialparameter bekannten) Schallgeschwindigkeit $c \in \mathbb{R}_+$ im Fluid.

Wird ein zeitharmonischer Ansatz für p gewählt, d.h.

$$p(t, \mathbf{x}) = \text{Re}(e^{-i\omega t} \hat{p}(\mathbf{x})),$$

mit der Kreisfrequenz ω , so folgt aus (1.7) (nach Weglassen des $\hat{}$ -Symbols) die **Helmholtz-Gleichung** im Frequenzbereich

$$\Delta p(\mathbf{x}) + \kappa^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad (1.8)$$

mit der Wellenzahl

$$\kappa := \frac{\omega}{c}.$$

Da Ω_F als unbeschränkt angenommen wird und nur physikalisch kausale Lösungen zugelassen werden sollen (keine Wellen werden im Unendlichen reflektiert), muss eine zusätzliche Forderung gestellt werden, die **Sommerfeldsche Abstrahlbedingung**, siehe [8, Abs. 1.1.3]:

$$p = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad i\kappa p - \frac{dp}{dr} = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| = r \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Hier bezeichnet $\frac{dp}{dr} = \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \nabla p\right)$ die radiale Ableitung.

Es wird im Folgenden nur der Niederfrequenzbereich, d.h. $\kappa \ll 1$, betrachtet. Daher wird $\kappa = 0$ gesetzt und die Helmholtz-Gleichung (1.8) vereinfacht sich (versehen mit negativem Vorzeichen) zur **Laplace-Gleichung**

$$-\Delta p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F. \quad (1.10)$$

Als Abstrahlbedingung für die Laplace-Gleichung wird dann

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

gefordert, siehe auch [12, Abs. 1].

1.3 Geometrischer Zusammenhang von Struktur und Fluid

Für das Eigenwertproblem der **Fluid–Struktur–Interaktion** (kurz: FSI), das aus der linearen Elastizitätstheorie und der linearen Akustik sowie deren Kopplung resultiert, wird nun eine geometrische Einteilung der beiden Gebiete (Struktur, Fluid) festgelegt.

Definition 1.6. Die Struktur sei durch das beschränkte Lipschitz–Gebiet $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ mit der Dichte $\rho_S > 0$ gegeben. Der Rand des Gebietes sei stückweise glatt und disjunkt zerlegt in einen inneren Rand Γ_N und einen äußeren Rand Γ , d.h. $\partial\Omega_S = \Gamma \cup \Gamma_N$. Das Fluid sei gegeben durch das nach außen hin unbeschränkte Gebiet $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$ mit der Dichte $\rho_F > 0$ und dem Rand $\partial\Omega_F = \Gamma$. Die Struktur Ω_S werde von außen vollständig vom Fluid Ω_F umgeben. Daher ist $\Gamma = \bar{\Omega}_S \cap \bar{\Omega}_F$ der sogenannte Kopplungsrand der beiden Gebiete.

Zur Veranschaulichung dient das in Abbildung 1.1 dargestellte Beispiel einer dreidimensionalen, sphärischen Schale (einer hohlen Kugel mit einer im Vergleich zum Durchmesser dünnen, äußeren Hülle).

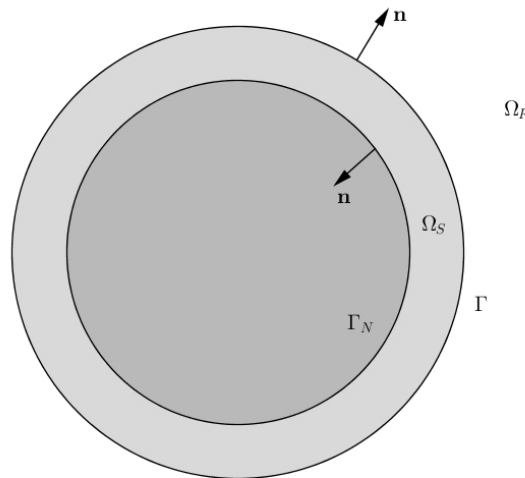


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Gebiete Ω_S und Ω_F für eine sphärische Schale

1.4 Kopplungsbedingungen

Auf dem Kopplungsrand Γ der wie in Definition 1.6 beschriebenen Gebiete Ω_S und Ω_F werden zwei Transmissionsbedingungen benötigt. Diese lauten nach [12, Abs. 1] wie folgt:

1. Die Verschiebung in Normalenrichtung ist gleich der Normalenableitung des Drucks, d.h.

$$\varrho_F \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} p(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma,$$

mit der Kreisfrequenz ω .

2. Die Spannungen in Normalenrichtung entsprechen dem negativen Druck in Normalenrichtung, d.h.

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

1.5 Gekoppeltes Problem

Abschließend wird das FSI–Eigenwertproblem für die Gebiete $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$, die wie in Definition 1.6 gegeben seien, angegeben: Gesucht sind das vektorwertige Verschiebungsfeld $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, der Druck $p \neq 0$ und die Kreisfrequenz $\omega \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichungen

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \varrho_S \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad (1.12a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (1.12b)$$

$$-\Delta p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad (1.12c)$$

die Transmissionsbedingungen auf dem Kopplungsrand

$$\varrho_F \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} p(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.13a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.13b)$$

und die Abstrahlbedingung

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

erfüllt werden.

2 Analyse der Modelle der Elastizität und der Akustik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Analyse der Modelle der linearen Elastizitätstheorie und der linearen Akustik erläutert. Es werden wichtige Sätze der Funktionalanalysis benötigt sowie geeignete Operatoren und Funktionenräume eingeführt um letztlich eine schwache Lösung des im vorigen Kapitel hergeleiteten FSI–Eigenwertproblems erklären zu können.

2.1 Operatoren

Die Definitionen und Lemmata dieses Abschnitts, der [19, Kap. 3] folgt, werden verwendet um eine Variationsformulierung des FSI–Eigenwertproblems (1.12a)–(1.14) angeben zu können.

Für diesen Abschnitt sei X ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und der induzierten Norm $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$.

Definition 2.1. Eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lineares, stetiges Funktional, falls gilt:

- $F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$ für alle $u, v \in X$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- $\exists c \geq 0 : |F(v)| \leq c\|v\|_X$ für alle $v \in X$.

Definition 2.2. Der Dualraum X' von X ist der Raum aller linearen, stetigen Funktionale auf X und ist versehen mit der Norm

$$\|F\|_{X'} := \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|F(v)|}{\|v\|_X}.$$

Das Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\langle F, v \rangle := F(v)$$

und erfüllt die Ungleichung

$$\langle F, v \rangle \leq \|F\|_{X'} \|v\|_X.$$

Nach dem Darstellungssatz von Fréchet–Riesz, siehe [21, Thm. V.3.6], lässt sich der Dualraum eines Hilbertraums mit sich selbst identifizieren, man schreibt $X \cong X'$.

Definition 2.3. Der lineare Operator $A : X \rightarrow X'$ heißt

- beschränkt, wenn eine Konstante $c_2^A > 0$ existiert, sodass

$$\|Av\|_{X'} \leq c_2^A \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in X \text{ gilt,}$$

- X -elliptisch, wenn eine Konstante $c_1^A > 0$ existiert, sodass

$$\langle Av, v \rangle \geq c_1^A \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in X \text{ gilt.}$$

Definition 2.4. Die Norm des linearen, beschränkten Operators $A : X \rightarrow X'$, genannt Operatornorm, ist definiert durch

$$\|A\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_{X'}}{\|v\|_X} = \sup_{\|v\|_X=1} \|Av\|_{X'}.$$

Dem Operator $A : X \rightarrow X'$ kann eine Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet werden durch

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle \quad \text{für } u, v \in X.$$

Es gilt auch die Umkehrung nach dem folgenden Lemma:

Lemma 2.5. Sei die beschränkte Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|a(u, v)| \leq c_2^a \|u\|_X \|v\|_X \quad \text{für alle } u, v \in X$$

gegeben. Dann existiert für jedes $u \in X$ ein Element $Au \in X'$, sodass gilt

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \text{für alle } v \in X.$$

Weiters ist der durch die Bilinearform induzierte Operator $A : X \rightarrow X'$ linear und beschränkt mit

$$\|Au\|_{X'} \leq c_2^a \|u\|_X \quad \text{für alle } u \in X.$$

Zum Beweis des Lemmas sei auf [19, Lemma 3.1] verwiesen.

Nach [21, Def. III.4.1] gilt der folgende Satz:

Satz 2.6. Zum beschränkten, linearen Operator $A : X \rightarrow X'$ gibt es einen eindeutig bestimmten, sogenannten adjungierten Operator $A^* : X \rightarrow X'$, sodass

$$\langle Au, v \rangle = \langle A^*v, u \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X \text{ gilt.}$$

Definition 2.7. Sei $X \cong X'$. Nach [21, Def. V.5.3] heißt der lineare und beschränkte Operator $A : X \rightarrow X'$ selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ ist, d.h. wenn

$$\langle Au, v \rangle = \langle Av, u \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X \text{ gilt.}$$

Die folgenden Eigenschaften lassen sich von der Bilinearform auf den Operator übertragen:

Korollar 2.8. *Aus der Symmetrie der Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, d.h.*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in X,$$

folgt die Selbstadjungiertheit des Operators $A : X \rightarrow X'$, d.h.

$$\langle Au, v \rangle = \langle Av, u \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Beweis. $\langle Au, v \rangle = a(u, v) = a(v, u) = \langle Av, u \rangle$ für alle $u, v \in X$. □

Korollar 2.9. *Aus der X -Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgt die X -Elliptizität des Operators $A : X \rightarrow X'$ mit der Elliptizitätskonstante c_1^a von $a(\cdot, \cdot)$.*

Beweis.

$$\langle Av, v \rangle = a(v, v) \geq c_1^a \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in X.$$

□

2.2 Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren auf Hilberträumen

In diesem Abschnitt, [21, Kap. VI] folgend, werden Eigenschaften der Eigenwerte von kompakten, selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen angeführt. Da für Operatoren A auf unendlichdimensionalen Hilberträumen die Forderung

$$\lambda I - A \text{ ist nicht injektiv}$$

nicht äquivalent sein muss zu

$$\lambda I - A \text{ ist nicht surjektiv,}$$

wird eine allgemeinere Definition des Eigenwerts eines Operators benötigt.

Für diesen Abschnitt sei X ein Hilbertraum. Da $X \cong X'$ gilt, wird der Einfachheit halber der Dualraum auch mit X bezeichnet. Sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer, beschränkter Operator und $A^* : X \rightarrow X$ der zu A adjungierte Operator.

Definition 2.10. *Die Resolventenmenge von A ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow X \text{ existiert und ist linear und beschränkt}\}.$$

Definition 2.11. *Das Spektrum von A ist*

$$\sigma_s(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Definition 2.12. Das Punktspektrum von A ist

$$\sigma_p(A) = \{\lambda : \lambda I - A \text{ ist nicht injektiv}\} \subset \sigma_s(A).$$

Die Elemente von $\sigma_p(A)$ heißen Eigenwerte von A . Ein $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$ heißt Eigenvektor (bzw. Eigenfunktion wenn X ein Funktionenraum ist) zum Eigenwert λ . Das Paar (λ, x) wird dann Eigenpaar genannt.

Nach [21, Def. II.3.1] gilt:

Definition 2.13. Seien X und Y normierte Räume. Ein linearer und beschränkter Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel in X relativkompakt in Y ist.

Für selbstadjungierte Operatoren gilt nach [21, Kor. VII.1.2]:

Lemma 2.14. Sei A ein selbstadjungierter Operator. Dann ist $\sigma_s(A) \subset \mathbb{R}$.

Aus [21, Lemma VI.3.1 (d)] folgt:

Lemma 2.15. Ist A ein selbstadjungierter Operator, dann haben verschiedene Eigenwerte orthogonale Eigenvektoren.

Für kompakte Operatoren gilt nach [21, Thm. VI.2.5]:

Satz 2.16. Sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer, beschränkter und kompakter Operator.

- Ist X unendlichdimensional, so ist $0 \in \sigma_s(A)$.
- Die (eventuell leere) Menge $\sigma_s(A) \setminus \{0\}$ ist höchstens abzählbar.
- Jedes $\lambda \in \sigma_s(A) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von A und der zugehörige Eigenraum $\ker(\lambda I - A)$ ist endlichdimensional.
- $\sigma_s(A)$ besitzt keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt.

Schließlich lautet der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren, siehe z.B. [21, Thm. VI.3.2]:

Satz 2.17. Sei $A : X \rightarrow X$ linear, beschränkt, selbstadjungiert und kompakt. Dann existieren ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass jedes $x \in X$ geschrieben werden kann als

$$x = y + \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

mit $y \in \ker A = \{x \in X : Ax = 0\}$. Es folgt

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei sind die λ_k die von Null verschiedenen Eigenwerte von A und e_k die zugehörigen Eigenvektoren. Außerdem gilt $\|A\| = \sup_k |\lambda_k|$.

2.3 Funktionenräume

Damit eine schwache Lösung des FSI–Eigenwertproblems (1.12a)–(1.14) erklärt werden kann, werden in diesem Abschnitt, der sich an [19, Kap. 2] orientiert, die dafür benötigten Funktionenräume eingeführt.

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Multiindex mit dem Betrag $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und der Fakultät $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Weiters gilt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Damit lässt sich die partielle Ableitung einer hinreichend oft differenzierbaren reellwertigen Funktion v schreiben als

$$D^\alpha v(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} v(x_1, \dots, x_n).$$

Definition 2.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist:

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$ der Raum der auf Ω beschränkten und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen versehen mit der Norm

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha v(\mathbf{x})|,$$

- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(\Omega)$ der Raum der auf Ω beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen,
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega\}$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, wobei der Träger von v definiert ist durch

$$\text{supp } v := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

- $L_2(\Omega)$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω . Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

und der dadurch induzierten Norm

$$\langle v, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{für } v \in L_2(\Omega),$$

ist $L_2(\Omega)$ ein Hilbertraum.

Die Definitionen obiger Räume sind in [19, Abs. 2.1] zu finden.

Definition 2.19. [19, Abs. 2.2] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, wenn v bezüglich jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ integrierbar ist. Man schreibt dann $v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$, wobei $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ den Raum der lokal integrierbaren Funktionen auf Ω bezeichne.

Definition 2.20. [19, Abs. 2.2] (Schwache Ableitung, verallgemeinerte Ableitung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, α ein Multiindex und $u, v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$. Dann heißt $v(\mathbf{x}) := D^\alpha u(\mathbf{x})$ schwache oder verallgemeinerte α -te Ableitung von u falls

$$\int_{\Omega} v \varphi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Definition 2.21. [19, Abs. 2.2] (Sobolev-Norm, Sobolev-Raum)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definiert

$$\|v\|_{W_2^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

eine Norm und durch Vervollständigung von $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ bezüglich dieser Norm wird der Sobolev-Raum

$$W_2^k(\Omega) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_2^k(\Omega)}}$$

erklärt.

Die Sobolev-Norm und der zugehörige Sobolev-Raum können für positive, reellwertige Exponenten verallgemeinert werden, siehe auch [19, Abs. 2.2]:

Definition 2.22. (Sobolev-Slobodeckii-Norm)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $0 < s \in \mathbb{R}$ mit $s = k + \kappa$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$. Dann wird die Sobolev-Slobodeckii-Norm definiert durch

$$\|v\|_{W_2^s(\Omega)}^2 := \|v\|_{W_2^k(\Omega)}^2 + |v|_{W_2^k(\Omega)}^2$$

mit der Halbnorm

$$|v|_{W_2^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\kappa}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Der zugehörige Sobolev-Raum wird analog zu oben erklärt durch

$$W_2^s(\Omega) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_2^s(\Omega)}}.$$

Außerdem gilt nach [19, Abs. 2.2]: $W_2^s(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W_2^s(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{W_2^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^\alpha u(\mathbf{x}) - D^\alpha u(\mathbf{y}))(D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\kappa}} d\mathbf{x} d\mathbf{y},$$

wobei

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

und $s = k + \kappa$, $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $\kappa \in (0, 1)$ gilt. Des weiteren ist $W_2^k(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (2.1) für $k \in \mathbb{N}_0$.

Die Sobolev–Räume können alternativ auch mittels der Fourier–Transformation von Distributionen eingeführt werden. Es sei hierfür auf [19, Abs. 2.4] verwiesen. Die dann mit $H^s(\Omega)$ bezeichneten Räume sind allerdings nur unter bestimmten Voraussetzungen an das Gebiet Ω zu den Räumen $W_2^s(\Omega)$ äquivalent.

Die folgende Definition ist [19, Abs. 2.1] entnommen:

Definition 2.23. (*Lipschitz–Gebiet*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $n \geq 2$ und dem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Dann wird Ω Lipschitz–Gebiet genannt, falls der Rand Γ bezüglich einer beliebigen Zerlegung,

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j, \quad \Gamma_j := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \chi_j(\xi) \text{ für } \xi \in \tau_j \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\}, \quad (2.2)$$

stückweise durch eine Lipschitz–stetige Funktion dargestellt werden kann, d.h. falls Konstanten $L_j > 0$ existieren, sodass

$$|\chi_j(\xi) - \chi_j(\eta)| \leq L_j |\xi - \eta| \text{ für alle } \xi, \eta \in \tau_j, j = 1, \dots, m, \text{ gilt.}$$

Die Parameterbereiche τ_j und die Randstücke Γ_j seien dabei offen.

Nach [19, Satz 2.6] gilt:

Satz 2.24. Für ein Lipschitz–Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind $W_2^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$ für alle $s > 0$ äquivalent.

Es werden folgende Bezeichnungen getroffen:

- $H_0^s(\Omega) := \mathring{W}_2^s(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_2^s(\Omega)}}$,
- für $s < 0$: $W_2^s(\Omega) := \left[\mathring{W}_2^{-s}(\Omega) \right]'$ mit der Norm, gemäß Definition 2.2,

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in \mathring{W}_2^{-s}(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_{W_2^{-s}(\Omega)}}.$$

Im Folgenden werden **nur Lipschitz–Gebiete** betrachtet und deshalb die Sobolev–Räume von nun an mit $H^s(\Omega)$ bezeichnet.

Da die Randbedingung (1.12b) und die Transmissionsbedingungen (1.13a)–(1.13b) Funktionen auf dem Rand eines Gebietes beschreiben, werden an dieser Stelle wie in [19, Abs. 2.5] **Sobolev–Räume auf Mannigfaltigkeiten** eingeführt.

Für ein beschränktes Lipschitz–Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, sei der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ durch eine beliebige und überlappende stückweise Parametrisierung wie in (2.2) gegeben.

Bezüglich dieser Zerlegung sei eine **Partition der Eins** mit nicht negativen Abschneidefunktionen $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{x}) = 1 \text{ für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_j.$$

Damit kann eine auf dem Rand Γ definierte Funktion dargestellt werden durch

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m v_j(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

mit $v_j(\mathbf{x}) := \varphi_j(\mathbf{x})v(\mathbf{x})$. Mit der Parametrisierung (2.2) folgt

$$v_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \varphi_j(\chi_j(\xi))v(\chi_j(\xi)) =: \tilde{v}_j(\xi) \text{ für } \xi \in \tau_j \subset \mathbb{R}^{n-1}, j = 1, \dots, m.$$

Um Sobolev-Räume auf $\tau_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ für die Funktionen $\tilde{v}_j(\xi)$ einführen zu können, muss wegen der Kettenregel vorausgesetzt werden, dass die entsprechenden Ableitungen von $\chi_j(\xi)$ existieren. Für Lipschitz-stetige χ_j können daher Sobolev-Räume $H^s(\tau_j)$ für $0 \leq s \leq 1$ erklärt werden. Diese werden nun wie in [19, Abs. 2.5] definiert:

Definition 2.25. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dann ist der Sobolev-Raum $H^s(\Gamma)$ für $0 \leq s \leq 1$ definiert durch

$$H^s(\Gamma) := \left\{ v : \|v\|_{H_\chi^s(\Gamma)} < \infty \right\}$$

versehen mit der Norm

$$\|v\|_{H_\chi^s(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^m \|\tilde{v}_j\|_{H^s(\tau_j)}^2 \right)^{1/2}.$$

Es gilt nach [19, Lemma 2.2]:

Lemma 2.26. Für $s = 0$ ist die Norm

$$\|v\|_{L_2(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} |v(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \right)^{1/2}$$

zur $\|\cdot\|_{H_\chi^0(\Gamma)}$ -Norm äquivalent.

Außerdem ist für $s \in (0, 1)$ nach [19, Abs. 2.5] die Sobolev-Slobodeckii-Norm, gegeben durch

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} := \left(\|v\|_{L_2(\Gamma)}^2 + |v|_{H^s(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

mit der Halbnorm

$$|v|_{H^s(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1+2s}} ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} \right)^{1/2},$$

zur $\|\cdot\|_{H_\chi^s(\Gamma)}$ -Norm äquivalent.

Sobolev-Räume für negative Exponenten können nach [19, Abs. 2.5] wie folgt definiert werden:

Definition 2.27. Für $s < 0$ wird $H^s(\Gamma)$ erklärt als Dualraum von $H^{-s}(\Gamma)$, d.h.

$$H^s(\Gamma) := [H^{-s}(\Gamma)]'$$

versehen mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} := \sup_{0 \neq w \in H^{-s}(\Gamma)} \frac{|\langle v, w \rangle_\Gamma|}{\|w\|_{H^{-s}(\Gamma)}}$$

bezüglich dem Dualitätsprodukt

$$\langle v, w \rangle_\Gamma := \int_\Gamma v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})ds_{\mathbf{x}}.$$

Des Weiteren sind zur Beschreibung von Funktionen am Rand eines Gebietes der Spuoperator und die Konormalenableitung von Nöten.

Definition 2.28. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann ist die innere Spur definiert durch

$$\gamma_0^{int}v(\mathbf{x}) := \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} v(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

und die äußere Spur durch

$$\gamma_0^{ext}v(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} v(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Da im FSI-Eigenwertproblem (1.12a)–(1.14) vektorwertige Funktionen auftreten, wird die vektorwertige Spur folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{int}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \left(\gamma_0^{int}v_1(\mathbf{x}), \gamma_0^{int}v_2(\mathbf{x}), \gamma_0^{int}v_3(\mathbf{x}) \right)^T \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \gamma_0^{ext}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \left(\gamma_0^{ext}v_1(\mathbf{x}), \gamma_0^{ext}v_2(\mathbf{x}), \gamma_0^{ext}v_3(\mathbf{x}) \right)^T \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definition 2.29. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$, auf dem fast überall der äußere Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, gegeben sei. Für das FSI-Eigenwertproblem (1.12a)–(1.14) ist die vektorwertige innere beziehungsweise äußere Konormalenableitung gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta^{int}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \sigma(\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \eta^{ext}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \sigma(\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Einen Zusammenhang zwischen den Sobolev-Räumen im Gebiet Ω und denen auf dem Rand $\partial\Omega$ stellen die folgenden beiden Sätze her, siehe auch [19, Satz 2.9, Satz 2.10]:

Satz 2.30. (*Spursatz*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann ist für $\frac{1}{2} < s \leq 1$ der Operator

$$\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (2.3)$$

linear, beschränkt und stetig und es existiert eine Konstante $c_T > 0$, sodass

$$\|\gamma_0^{int} v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_T \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^s(\Omega)$$

gilt.

Satz 2.31. (*Inverser Spursatz*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann besitzt für $\frac{1}{2} < s \leq 1$ der durch (2.3) definierte Spuroperator eine stetige Rechtsinverse

$$\mathcal{E} : H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^s(\Omega) \quad (2.4)$$

mit $\gamma_0^{int} \mathcal{E} w = w$ für alle $w \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|\mathcal{E} w\|_{H^s(\Omega)} \leq c_{IT} \|w\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \text{für alle } w \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

mit einer Konstante $c_{IT} > 0$.

2.4 Bilinearformen des FSI–Eigenwertproblems

In diesem Abschnitt, der [19, Abs. 4.2] folgt, werden zwei Bilinearformen hergeleitet, die für die variationelle Formulierung des FSI–Eigenwertproblems (1.12a)–(1.14) benötigt werden. Da im dreidimensionalen Problem vektorwertige Funktionen auftreten, werden vektorwertige Funktionenräume erklärt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\Omega_S) &:= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : v_i \in H^1(\Omega_S), i = 1, 2, 3\}, \\ \mathbf{L}_2(\Omega_S) &:= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : v_i \in L_2(\Omega_S), i = 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Normen lauten

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}^2 := \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{H^1(\Omega_S)}^2, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}^2 := \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L_2(\Omega_S)}^2.$$

Betrachtet wird nun die i -te Komponente der Gleichung (1.12a). Nach Multiplikation mit einer Testfunktion $v_i \in C_0^\infty(\Omega_S)$ und anschließender Integration über Ω_S sowie mittels partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho_S \omega^2 \int_{\Omega_S} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_S} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega_S} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma \cup \Gamma_N} \sum_{j=1}^3 n_j(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) v_i(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Für den linearisierten Verzerrungstensor, siehe Definition 1.4, folgt (durch Summation)

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} u_k(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Per Definition 1.5 des linearisierten Spannungstensors gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \lambda_L \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + 2\mu_L \varepsilon_{ii}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \lambda_L \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + 2\mu_L \varepsilon_{ii}(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= 2\mu_L \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned}$$

Es werden die folgenden zwei symmetrischen Bilinearformen definiert:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_i} v_j(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \varepsilon_{ii}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_S} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 [\lambda_L \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + 2\mu_L \varepsilon_{ii}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))] \varepsilon_{ii}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_S} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 2\mu_L \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \lambda_L \int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + 2\mu_L \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.6}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$.

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_S} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)} \tag{2.7}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$.

Mittels Summation über $i = 1, \dots, 3$ der Gleichung (2.5) folgt damit

$$\varrho_S \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma \cup \Gamma_N} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_j(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) v_i(\mathbf{x})}_{=[\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_x] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})} ds_x \tag{2.8}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$.

Die folgenden zwei Lemmata zeigen die Beschränktheit der Bilinearformen a und b :

Lemma 2.32. Die Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $c_2^a > 0$, sodass

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_2^a \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Zum Beweis des Lemmas sei auf [19, Lemma 4.5] verwiesen.

Lemma 2.33. Die Bilinearform $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $c_2^b > 0$, sodass

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_2^b \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Es wird nun Lemma 2.5 auf die oben definierten Bilinearformen a und b angewandt: Sei $A : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ der durch

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \quad (2.9)$$

definierte lineare, beschränkte Operator mit Beschränktheitskonstante c_2^a . Weiters sei $M : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ der durch

$$\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \quad (2.10)$$

definierte lineare, beschränkte Operator mit Beschränktheitskonstante c_2^b . Nach Korollar 2.8 sind die Operatoren A und M selbstadjungiert.

Die Gleichung (2.8) kann damit umgeschrieben werden zu

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \varrho_S \omega^2 \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Gamma \cup \Gamma_N} [\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_x] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) ds_x \quad \text{für } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S). \quad (2.11)$$

2.5 Darstellung für den Druck im Fluid

In diesem Abschnitt, [19, Abs. 5.1, Abs. 7.5] folgend, wird eine Darstellungsformel für den gesuchten Druck p im Fluid $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$ mit dem Rand Γ angegeben.

Für das Laplace–Problem

$$-\Delta p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F$$

ist nach [19, Abs. 5.1] die Fundamentallösung des Laplace–Operators in \mathbb{R}^3 gegeben durch

$$U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.12)$$

Nach [19, Abs. 7.5] lautet die Darstellungsformel im Fluid:

$$p(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} \gamma_{0,\mathbf{y}}^{ext} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_1^{ext} p(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_0^{ext} p(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F. \quad (2.13)$$

2.6 Randintegraloperatoren

In diesem Abschnitt, der sich an [19, Kap. 6] orientiert, werden Randintegraloperatoren eingeführt mit denen die Darstellung (2.13) umformuliert werden kann, und die in weiterer Folge auf ein System von **Randintegralgleichungen** zur Beschreibung des Akustik-Problems führen. Im Folgenden bezeichne $U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung des Laplace-Operators in \mathbb{R}^3 wie in (2.12).

Für $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ist das **Einfachschichtpotential** $\tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_S)$, definiert durch

$$(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})w(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S \cup \Omega_F, \quad (2.14)$$

ein beschränkter, linearer Operator. Nach [19, Lemma 6.3] ist (2.14) eine schwache Lösung der Laplace-Gleichung

$$-\Delta(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S \cup \Omega_F.$$

Durch Anwenden des äußeren Spurooperators wird der beschränkte, lineare Operator

$$V := \gamma_0^{ext}\tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

erklärt. Es existiert, siehe [19, Lemma 6.4], eine Darstellung als schwach singuläres Integral, d.h. für $w \in L_{\infty}(\Gamma)$ ist

$$(Vw)(\mathbf{x}) = \gamma_0^{ext}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})w(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Nach [19, Satz 6.5] gilt die $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität

$$\langle Vw, w \rangle_{\Gamma} \geq c_1^V \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } w \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (2.16)$$

mit einer Konstante $c_1^V > 0$.

Für $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ ist das **Doppelschichtpotential** $W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_S)$, definiert durch

$$(Wv)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} [\gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext}U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})]v(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S \cup \Omega_F, \quad (2.17)$$

ein beschränkter, linearer Operator. Nach [19, Lemma 6.7] ist (2.17) eine schwache Lösung der Laplace-Gleichung

$$-\Delta(Wv)(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S \cup \Omega_F.$$

Die Anwendung des äußeren Spurooperators ergibt den beschränkten, linearen Operator

$$\gamma_0^{ext}W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

mit der Darstellung

$$\gamma_0^{ext}(Wv)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + (Kv)(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.18)$$

im Sinne von $H^{1/2}(\Gamma)$. Hier ist

$$(Kv)(\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: |\mathbf{y}-\mathbf{x}| \geq \varepsilon} [\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma,$$

siehe [19, Lemma 6.8], und

$$\sigma(\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2(n-1)\pi} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\mathbf{y} \in \Omega_S: |\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.19)$$

siehe [19, Lemma 6.5]. Ist der Rand Γ hinreichend glatt, d.h. wenigstens differenzierbar, in einer Umgebung eines Punktes $\mathbf{x} \in \Gamma$, so folgt aus (2.19), dass $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ für fast alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ gilt. Weiters gilt nach [19, Abs. 6.6.4], dass $(\sigma I + K)(1)(\mathbf{x}) = 0$ ist für $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Für $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ definiert nach [19, Lemma 4.3] die innere Konormalenableitung des Einfachschichtpotentials einen beschränkten, linearen Operator

$$\gamma_1^{int} \tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

der nach [19, Lemma 6.5] dargestellt werden kann durch

$$\gamma_1^{int}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})w(\mathbf{x}) + (K'w)(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.20)$$

im Sinne von $H^{-1/2}(\Gamma)$. Dabei wird der beschränkte, lineare Operator

$$K' : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \quad (2.21)$$

der gegeben ist durch

$$(K'w)(\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: |\mathbf{y}-\mathbf{x}| \geq \varepsilon} [\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] w(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma,$$

als **adjungierter Doppelschichtpotentialoperator** bezeichnet.

Für $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ definiert die äußere Konormalenableitung des Doppelschichtpotentials einen beschränkten, linearen Operator

$$D := -\gamma_1^{ext} W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

der als **hypersingulärer Operator** bezeichnet wird und dessen Darstellung als Cauchy-Hauptwertintegral für eine stetige Dichtefunktion v gegeben ist durch

$$\begin{aligned} (Dv)(\mathbf{x}) &:= -\gamma_1^{ext}(Wv)(\mathbf{x}) = - \lim_{\Omega_F \ni \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} n_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}(Wv)(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= - \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{x}}^{ext} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})] ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die durch den hypersingulären Operator erklärte Bilinearform ist gegeben durch

$$\langle Du, v \rangle_\Gamma = - \int_\Gamma v(\mathbf{x}) \gamma_{1,\mathbf{x}}^{ext} \int_\Gamma \gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} ds_{\mathbf{x}} \quad \text{für } u, v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (2.23)$$

Sei $\Gamma = \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k$ eine stückweise glatte, geschlossene Oberfläche und seien u, v global stetige Funktionen auf Γ , die auf den Kurvenstücken Γ_k differenzierbar seien. Dann gilt nach [19, Satz 6.4] im \mathbb{R}^3 die zu (2.23) äquivalente Darstellung

$$\langle Du, v \rangle_\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\text{curl}_\Gamma u(\mathbf{y}) \cdot \text{curl}_\Gamma v(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}}, \quad (2.24)$$

wobei $\text{curl}_\Gamma u(\mathbf{x}) := n(\mathbf{x}) \times \nabla \tilde{u}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \Gamma$ die Oberflächenrotation der skalaren Funktion u bezeichne und \tilde{u} eine geeignet gewählte Fortsetzung von u sei.

Nach [19, Abs. 6.5] kann gezeigt werden, dass der Kern des hypersingulären Operators den konstanten Funktionen entspricht: Sei $p(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv 1$. Dann folgt mit der Darstellungsformel (2.13) und mit der Definition des Doppelschichtpotentials (2.17)

$$1 = \int_\Gamma \gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} U^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = (W1)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega_F.$$

Anwenden der (mit negativem Vorzeichen versehenen) äußeren Konormalenableitung auf obige Gleichung ergibt mit der Definition des hypersingulären Operators (2.22)

$$0 = - \lim_{\Omega_F \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} n_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} (W1)(\tilde{\mathbf{x}}) = (D1)(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Daher kann D nicht elliptisch auf ganz $H^{1/2}(\Gamma)$ sein. Nach [19, Folgerung 6.4] gilt jedoch das folgende Resultat:

Lemma 2.34. *Der hypersinguläre Operator D ist $H^{1/2}(\Gamma)$ -semi-elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Dv, v \rangle_\Gamma \geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (2.25)$$

mit einer Konstante $\bar{c}_1^D > 0$.

Die Elliptizität von D kann in geeignet gewählten Faktorräumen gewährleistet werden, wie zum Beispiel im Raum der auf Eins orthogonalen $H^{1/2}(\Gamma)$ -Funktionen

$$H_{**}^{1/2}(\Gamma) := \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle v, 1 \rangle_\Gamma = 0 \right\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H_{**}^{1/2}(\Gamma)} := \left\{ |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\langle v, 1 \rangle_\Gamma|^2 \right\},$$

die nach dem *Normierungssatz von Sobolev*, siehe z.B. [19, Satz 2.2], eine äquivalente Norm in $H^{1/2}(\Gamma)$ definiert. Für ein $v \in H_{**}^{1/2}(\Gamma)$ folgt dann aus (2.25)

$$\langle Dv, v \rangle_\Gamma \geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 = \bar{c}_1^D \left\{ |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\langle v, 1 \rangle_\Gamma|^2 \right\} = \bar{c}_1^D \|v\|_{H_{**}^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq c_1^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

mit einer Konstante $c_1^D > 0$, also die $H_{**}^{1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität von D .

Um den hypersingulären Operator in der Praxis umzusetzen, wird der **modifizierte hypersinguläre Operator** $\tilde{D} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ durch die Bilinearform

$$\langle \tilde{D}w, v \rangle_\Gamma := \langle Dw, v \rangle_\Gamma + \alpha \langle w, 1 \rangle_\Gamma \langle v, 1 \rangle_\Gamma \quad \text{für } v, w \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (2.26)$$

mit (einem geeignet zu wählenden) $\alpha \in \mathbb{R}_+$ erklärt. Der Operator \tilde{D} ist beschränkt und aufgrund der $H_{**}^{1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität von D auch $H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch wegen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}v, v \rangle_\Gamma &= \langle Dv, v \rangle_\Gamma + \alpha |\langle v, 1 \rangle_\Gamma|^2 \\ &\geq \tilde{c}_1^D |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \alpha |\langle v, 1 \rangle_\Gamma|^2 \\ &\geq \min\{\tilde{c}_1^D, \alpha\} \{ |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + |\langle v, 1 \rangle_\Gamma|^2 \} \\ &= \min\{\tilde{c}_1^D, \alpha\} \|v\|_{H_{**}^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq \tilde{c}_1^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

mit einer Konstante $\tilde{c}_1^D > 0$. Nach dem *Lemma von Lax–Milgram*, siehe [19, Satz 3.2], ist daher der modifizierte hypersinguläre Operator invertierbar, d.h. es existiert die stetige Inverse

$$\tilde{D}^{-1} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad (2.27)$$

und diese ist beschränkt, d.h. es gilt

$$\|\tilde{D}^{-1}w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \frac{1}{\tilde{c}_1^D} \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (2.28)$$

Da der hypersinguläre Operator D und damit auch der modifizierte hypersinguläre Operator \tilde{D} selbstadjungiert ist, was aus der Symmetrie der Bilinearform (2.24) bzw. (2.26) folgt, gilt nach [19, Lemma 3.3] die $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität von \tilde{D}^{-1} ,

$$\langle \tilde{D}^{-1}w, w \rangle_\Gamma \geq \frac{1}{\tilde{c}_2^D} \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } w \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (2.29)$$

mit einer Konstante $\tilde{c}_2^D > 0$.

Einen Zusammenhang zwischen der inneren und der äußeren Spur sowie der inneren und äußeren Konormalenableitung des Einfachschichtpotentials bzw. Doppelschichtpotentials liefern die folgenden zwei Lemmata:

Lemma 2.35. *Es gelten die beiden Sprungrelationen für das Einfachschichtpotential*

$$\begin{aligned} \gamma_0^{ext}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) - \gamma_0^{int}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \gamma_1^{ext}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) - \gamma_1^{int}(\tilde{V}w)(\mathbf{x}) &= -w(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

Für einen Beweis des Lemmas sei auf [19, Lemma 6.6] verwiesen.

Lemma 2.36. *Es gelten die beiden Sprungrelationen für das Doppelschichtpotential*

$$\begin{aligned} \gamma_0^{ext}(Wv)(\mathbf{x}) - \gamma_0^{int}(Wv)(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \gamma_1^{ext}(Wv)(\mathbf{x}) - \gamma_1^{int}(Wv)(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

Für einen Beweis des Lemmas sei auf [19, Lemma 6.9] verwiesen.

Mit dem Einfachschichtpotential (2.14) und dem Doppelschichtpotential (2.17) lautet die Darstellung (2.13) daher

$$p(\mathbf{x}) = -(\tilde{V}\gamma_1^{ext}p)(\mathbf{x}) + (W\gamma_0^{ext}p)(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F. \quad (2.30)$$

Die beiden Potentiale (2.14) und (2.17) erfüllen außerdem die Abstrahlbedingung (1.14), siehe z.B. [11].

Um aus (2.30) Randintegralgleichungen abzuleiten, werden die äußere Spur γ_0^{ext} und die äußere Konormalenableitung γ_1^{ext} angewandt. Mit (2.15) und (2.18) ergibt sich

$$\gamma_0^{ext}p(\mathbf{x}) = -(V\gamma_1^{ext}p)(\mathbf{x}) + [\sigma(\mathbf{x}) + K]\gamma_0^{ext}p(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Mit der Sprungrelation des Einfachschichtpotentials, der Definition des hypersingulären Operators und der Darstellung (2.20) folgt

$$\begin{aligned} \gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) &= \gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) - \gamma_1^{int}(\tilde{V}\gamma_1^{ext}p)(\mathbf{x}) - (D\gamma_0^{ext}p)(\mathbf{x}) \\ &= \gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})\gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) - (K'\gamma_1^{ext}p)(\mathbf{x}) - (D\gamma_0^{ext}p)(\mathbf{x}) \\ &= [1 - \sigma(\mathbf{x}) - K']\gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) - (D\gamma_0^{ext}p)(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

Es resultiert schließlich das System von Randintegralgleichungen

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{ext}p \\ \gamma_1^{ext}p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma I + K & -V \\ -D & [1 - \sigma]I - K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{ext}p \\ \gamma_1^{ext}p \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Anstelle des hypersingulären Operators D wird nun der modifizierte hypersinguläre Operator \tilde{D} verwendet. Damit kann unter Zuhilfenahme des inversen Operators \tilde{D}^{-1} aus der zweiten Randintegralgleichung von (2.31) die Darstellung

$$\gamma_0^{ext}p(\mathbf{x}) = -\tilde{D}^{-1}(\sigma I + K')\gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.32)$$

gewonnen werden. Hierbei wird der Operator $T : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, definiert durch

$$T := \tilde{D}^{-1}(\sigma I + K'), \quad (2.33)$$

als **Poincaré–Steklov–Operator** bezeichnet.

Einsetzen von (2.32) in die erste Randintegralgleichung von (2.31) ergibt

$$\gamma_0^{ext}p(\mathbf{x}) = -[V + (\sigma I + K)\tilde{D}^{-1}(\sigma I + K')]\gamma_1^{ext}p(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Damit stellt $T : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, gegeben durch

$$T = V + (\sigma I + K)\tilde{D}^{-1}(\sigma I + K'), \quad (2.34)$$

die äquivalente, symmetrische Variante des Poincaré–Steklov–Operators dar. Es wird später gezeigt, dass eine symmetrische Approximation dieses Operators $H^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptisch ist.

2.7 Variationsformulierung des FSI–Eigenwertproblems

In diesem Abschnitt, der sich an [12, Abs. 3] orientiert, wird eine variationelle Formulierung des FSI–Eigenwertproblems (1.12a)–(1.14) hergeleitet.

Gegeben seien die Gebiete $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ und $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$ wie in Definition 1.6. Betrachtet wird das FSI–Eigenwertproblem (im Frequenzbereich): Finde $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $p \neq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \varrho_S \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_S, \quad (2.35a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_x = \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (2.35b)$$

$$-\Delta p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_F, \quad (2.35c)$$

gilt und sodass die Transmissionsbedingungen auf dem Kopplungsrand

$$\varrho_F \omega^2 \gamma_0^{int} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_x = \varrho_F \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_x = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} p(\mathbf{x}) = \gamma_1^{ext} p \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.36a)$$

$$\eta^{int} \mathbf{u} = \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_x = -p(\mathbf{x}) \mathbf{n}_x = -(\gamma_0^{ext} p) \mathbf{n}_x \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.36b)$$

erfüllt werden, wobei \mathbf{n}_x der äußere Normalenvektor bezüglich Ω_S ist. Außerdem sei die Abstrahlbedingung (1.14) zu erfüllen.

Für die variationelle Formulierung des FSI–Eigenwertproblems (2.35a)–(2.36b) werden vektorwertige Funktionenräume benötigt:

$$\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : v_i \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), i = 1, 2, 3\},$$

$$\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) := \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : v_i \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), i = 1, 2, 3\}.$$

Die zugehörigen Normen lauten

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 := \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 := \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Es wird nun das folgende Dualitätsprodukt definiert:

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{w} \rangle_\Gamma := \int_\Gamma \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) ds_x \quad \text{für alle } \mathbf{t} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \mathbf{w} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \quad (2.37)$$

Wegen der Neumann–Randbedingung (2.35b) verschwindet das Randintegral auf Γ_N in Gleichung (2.11). Mit den in Kapitel 2.4 erklärten Operatoren A und M und insbesondere wegen der Gleichung (2.11) folgt daher für (2.35a)–(2.36b) die variationelle Formulierung: Gesucht $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \varrho_S \omega^2 \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \eta^{int} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.} \quad (2.38)$$

Mit den in Kapitel 2.6 hergeleiteten Randintegralgleichungen und den Transmissionsbedingungen (2.36a)–(2.36b) kann die Unbekannte p des Akustik-Problems mit der Unbekannten \mathbf{u} des Struktur-Problems gekoppelt werden: Die erste Randintegralgleichung von (2.31) lautet

$$\gamma_0^{ext} p = \left(\frac{1}{2} I + K \right) \gamma_0^{ext} p - V \gamma_1^{ext} p.$$

Zusammen mit den Transmissionsbedingungen (2.36b) und (2.36a) folgt aus (2.38)

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \varrho_S \omega^2 \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle -(\gamma_0^{ext} p) \mathbf{n}, \gamma_0^{int} \mathbf{v} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= -\left\langle \gamma_0^{ext} p, \gamma_0^{int} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= -\left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) \gamma_0^{ext} p - V \gamma_1^{ext} p, \gamma_0^{int} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma} \quad (2.39) \\ &= -\left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) \gamma_0^{ext} p, \gamma_0^{int} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \varrho_F \omega^2 \left\langle V(\gamma_0^{int} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), \gamma_0^{int} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$.

Die zweite Randintegralgleichung von (2.31) ist gegeben durch

$$\gamma_1^{ext} p = -D \gamma_0^{ext} p + \left(\frac{1}{2} I - K' \right) \gamma_1^{ext} p.$$

In variationeller Form und mit der ersten Transmissionsbedingung (2.36a) ergibt dies für $\gamma_0^{ext} p \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle D \gamma_0^{ext} p, q \right\rangle_{\Gamma} + \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K' \right) \gamma_1^{ext} p, q \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \left\langle D \gamma_0^{ext} p, q \right\rangle_{\Gamma} + \varrho_F \omega^2 \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K' \right) (\gamma_0^{int} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), q \right\rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } q \in H^{1/2}(\Gamma). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Um die variationellen Formulierungen (2.39)–(2.40) in Operatorgleichungen überzuführen, werden die folgenden Operatoren benötigt:

$$\begin{aligned} N : \mathbf{H}^1(\Omega_S) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & \mathbf{u} &\mapsto \iota^* \tilde{N} \mathbf{u}, \\ N^* : H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)', & \mathbf{u} &\mapsto \tilde{N}^* \iota \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

mit den Einbettungen

$$\begin{aligned} \iota : H^{1/2}(\Gamma) &\hookrightarrow L_2(\Gamma), & u &\mapsto u, \\ \iota^* : L_2(\Gamma) &\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & u &\mapsto u, \end{aligned} \quad (2.42)$$

und mit

$$\begin{aligned} \tilde{N} : \mathbf{H}^1(\Omega_S) &\rightarrow L_2(\Gamma), & \mathbf{u} &\mapsto \gamma_0^{int} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \\ \tilde{N}^* : L_2(\Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Lemma 2.37. [10, Lemma 2.44] Der Operator \tilde{N} aus (2.43) ist stetig.

Beweis. Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{N}\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma)}^2 &= \|\gamma_0^{int}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{int}u_i n_i|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{int}u_i|^2 \sum_{i=1}^3 |n_i|^2 ds_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{int}u_i|^2 ds_{\mathbf{x}} = \|\gamma_0^{int}\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma)}^2 \leq \|\gamma_0^{int}\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Wegen dem Spursatz 2.30 (für $s = 1$) gilt

$$\|\gamma_0^{int}\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq c_T \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}$$

und daher folgt die Beschränktheit des Operators \tilde{N} . Da der Operator offensichtlich linear ist, folgt die Stetigkeit von \tilde{N} . \square

Korollar 2.38. [10, Korollar 2.45] Die Operatoren N und N^* aus (2.41) sind kompakt.

Beweis. Nach [7, Theorem 4.2.2] ist die Einbettung ι aus (2.42) kompakt. Es folgt wegen dem Satz von Schauder, siehe [21, Satz III.4.4], dass ι^* kompakt ist. Da die Komposition von stetigen und kompakten Operatoren wieder kompakt ist, siehe z.B. [21, Satz II.3.2b], und wegen der in Lemma 2.37 gezeigten Stetigkeit von \tilde{N} , ist der Operator N kompakt. Aus dem Satz von Schauder folgt dann die Kompaktheit des Operators N^* . \square

Die variationelle Formulierung (2.39) lautet daher als Operatorgleichung

$$A\mathbf{u} - \varrho_S\omega^2 M\mathbf{u} + N^*\left(\frac{1}{2}I + K\right)\gamma_0^{ext}p - \varrho_F\omega^2 N^*V N\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

und die Variationsformulierung (2.40) lautet in Operatorschreibweise

$$D\gamma_0^{ext}p + \varrho_F\omega^2\left(\frac{1}{2}I + K'\right)N\mathbf{u} = 0.$$

Daraus ergibt sich für das FSI-Eigenwertproblem (2.35a)–(2.36b) die Formulierung: Gesucht $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\gamma_0^{ext}p \in H^{1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} A - \varrho_S\omega^2 M - \varrho_F\omega^2 N^*V N & N^*\left(\frac{1}{2}I + K\right) \\ \varrho_F\omega^2\left(\frac{1}{2}I + K'\right)N & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \gamma_0^{ext}p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

gilt.

Für den Rest dieses Abschnitts wird der Einfachheit halber $p := \gamma_0^{ext}p$ definiert.

Wie in Kapitel 2.6 erwähnt, sind die konstanten Funktionen im Kern von D und von $(\frac{1}{2}I + K)$ enthalten. Das bedeutet, wenn $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$ das System (2.44) erfüllt, dann erfüllt auch $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}$ mit $\tilde{p} := p + c$, $c = \text{konstant}$, das System (2.44). Anstelle des hypersingulären Operators D wird nun der modifizierte hypersinguläre Operator \tilde{D} , siehe (2.26), verwendet und \tilde{p} so skaliert, dass

$$\langle \tilde{p}, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

gilt. Dies ist äquivalent zu: wähle die Konstante c so, dass

$$\langle p, 1 \rangle_\Gamma = -\langle c, 1 \rangle_\Gamma$$

gilt. Die zu (2.44) äquivalente Formulierung mit dem modifizierten hypersingulären Operator lautet: Gesucht $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\tilde{p} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} A - \varrho_S \omega^2 M - \varrho_F \omega^2 N^* V N & N^* \left(\frac{1}{2} I + K \right) \\ \varrho_F \omega^2 \left(\frac{1}{2} I + K' \right) N & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

gilt.

Mit Hilfe des in Kapitel 2.6 definierten Poincaré–Steklov–Operators T kann eine *Schur–Komplement–Formulierung* von (2.45), hergeleitet werden. Da der modifizierte hypersinguläre Operator \tilde{D} invertierbar ist, folgt aus der zweiten Gleichung von (2.45)

$$\tilde{p} = -\varrho_F \omega^2 \tilde{D}^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K' \right) N \mathbf{u}.$$

Eingesetzt in die erste Gleichung von (2.45) ergibt dies eine, zum FSI-Eigenwertproblem (2.35a)–(2.36b) äquivalente, Formulierung: Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\lambda := \omega^2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$A \mathbf{u} = \lambda \left(\varrho_S M + \varrho_F N^* \left[V + \left(\frac{1}{2} I + K \right) \tilde{D}^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K' \right) \right] N \right) \mathbf{u} \quad (2.46)$$

gilt.

Mit der symmetrischen Darstellung des Poincaré–Steklov–Operators (2.34)

$$T = V + \left(\frac{1}{2} I + K \right) \tilde{D}^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K' \right)$$

lautet die äquivalente, symmetrische Variationsformulierung von (2.46): Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \left[\varrho_S \langle M \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \varrho_F \langle N^* T N \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \right] \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \quad (2.47)$$

gilt.

3 Näherungsmethoden

In diesem Kapitel wird ein Näherungsverfahren erklärt um die im vorigen Kapitel hergeleitete kontinuierliche Variationsformulierung des FSI-Eigenwertproblems zu diskretisieren und somit in ein endlichdimensionales Matrix-Eigenwertproblem umzuformen. Um dies zu bewerkstelligen werden finite Elemente und Randelemente eingeführt.

3.1 Galerkin–Bubnov–Formulierung

Beim Galerkin–Bubnov–Verfahren, siehe [19, Abs. 8.1], werden gleiche Ansatz- und Testräume verwendet. Sei \mathbf{X} ein Hilbertraum. Es sei das Eigenwertproblem, gesucht $\mathbf{u} \in \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{X} \quad (3.1)$$

gilt, gegeben. Die Operatoren $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ und $B : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ seien linear, beschränkt sowie selbstadjungiert, A sei \mathbf{X} -elliptisch und B sei positiv, d.h. $\langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Es sei eine Familie von konformen Ansatzräumen

$$\mathbf{X}_M := \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset \mathbf{X}$$

mit $M \in \mathbb{N}$ gegeben. Jedes Element $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M$ hat bezüglich dieser Basis die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{u}_M = \sum_{k=1}^M u_k^M \varphi_k. \quad (3.2)$$

Die Galerkin–Bubnov–Variationsformulierung von (3.1) lautet: Gesucht $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{0\}$ und $\lambda_M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle = \lambda_M \langle B\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \text{ gilt.} \quad (3.3)$$

Mit dem Ansatz (3.2) und wegen der Linearität der Operatoren A und B folgt

$$\sum_{k=1}^M u_k^M \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle = \lambda_M \sum_{k=1}^M u_k^M \langle B\varphi_k, \varphi_l \rangle \quad \text{für alle } l = 1, \dots, M.$$

Mit den Notationen

$$A_M[l, k] := \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle, \quad B_M[l, k] := \langle B\varphi_k, \varphi_l \rangle \quad k, l = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

für die Matrizen $A_M, B_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ folgt das zu (3.3) äquivalente, endlichdimensionale Matrix–Eigenwertproblem: Finde Eigenvektoren $u^M = (u_1^M, \dots, u_M^M)^T \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_M \in \mathbb{R}$, sodass

$$A_M u^M = \lambda_M B_M u^M$$

gilt.

Da jedem beliebigen Vektor $v^M \in \mathbb{R}^M$ durch

$$\mathbf{v}_M = \sum_{k=1}^M v_k^M \boldsymbol{\varphi}_k \in \mathbf{X}_M$$

eindeutig eine Funktion zugeordnet werden kann, gilt die folgende Identität zwischen Matrix– und Operatorschreibweise:

$$\begin{aligned} (A_M u^M, v^M) &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M A_M[l, k] u_k^M v_l^M = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle A \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle u_k^M v_l^M \\ &= \left\langle A \sum_{k=1}^M u_k^M \boldsymbol{\varphi}_k, \sum_{l=1}^M v_l^M \boldsymbol{\varphi}_l \right\rangle = \langle A \mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle \quad \text{für alle } u^M, v^M \in \mathbb{R}^M, \mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M. \end{aligned}$$

Analog gilt die obige Identität für die Matrix B_M und den Operator B . Es werden daher folgende Eigenschaften von den Operatoren auf die Matrizen übertragen:

- Aus der Selbstadjungiertheit des Operators $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ folgt die Symmetrie der Matrix $A_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ wegen

$$(A_M u^M, v^M) = \langle A \mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle = \langle \mathbf{u}_M, A \mathbf{v}_M \rangle = (u^M, A_M v^M) \quad (3.5)$$

für alle $u^M, v^M \in \mathbb{R}^M$ und $\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M$. Analog folgt die Symmetrie der Matrix $B_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$.

- Aus der \mathbf{X} –Elliptizität des Operators $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ folgt die positive Definitheit der Matrix $A_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ wegen

$$(A_M v^M, v^M) = \langle A \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_M \rangle \geq c_1^a \|\mathbf{v}_M\|_{\mathbf{X}}^2 \quad (3.6)$$

für alle $v^M \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \subset \mathbf{X}$ und mit einer positiven Konstante c_1^a .

Um die Konvergenz der Näherung $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M$ des diskreten Problems (3.3) gegen den Eigenvektor $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ des kontinuierlichen Problems (3.1) zu sichern, muss der Ansatzraum \mathbf{X}_M die *Approximationseigenschaft*

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{X}} \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{X}} = 0 \quad (3.7)$$

erfüllen. Es werden daher in den folgenden beiden Abschnitten konforme Ansatzräume, für welche die Eigenschaft (3.7) nachgewiesen werden kann, angegeben.

3.2 Finite Elemente

Da ein Eigenvektor des FSI–Eigenwertproblems (2.47) ein Element des $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ ist, wird in diesem Abschnitt, der sich an [19, Kap. 9] orientiert, ein lokal polynomialer, endlichdimensionaler Ansatzraum \mathbf{X}_M erklärt, der ein Teilraum des $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ ist und der die Approximationseigenschaft (3.7) erfüllt.

Sei $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $\{\mathcal{T}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Unterteilungen, d.h.

$$\bar{\Omega}_S = \bar{\mathcal{T}}_N = \bigcup_{k=1}^{n(N)} \bar{\tau}_k$$

mit den finiten Elementen τ_k , die hier als Tetraeder gegeben seien. Eine Unterteilung \mathcal{T}_N heißt *zulässig*, wenn für 2 verschiedene, abgeschlossene Elemente $\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_j \in \mathcal{T}_N, k \neq j$, gilt, dass deren Durchschnitt $\bar{\tau}_k \cap \bar{\tau}_j$ entweder leer ist oder aus einem Knoten, einer Kante oder einer Seitenfläche der Tetraeder besteht. Eine nicht zulässige Unterteilung würde sogenannte hängende Knoten beinhalten. Im Folgenden wird nur von zulässigen Unterteilungen ausgegangen.

Es werden nun Kenngrößen eines finiten Elements τ_k angegeben:

- Das Volumen ist

$$\Delta_k := \int_{\tau_k} d\mathbf{x}.$$

- Die lokale Maschenweite ist

$$h_k := (\Delta_k)^{\frac{1}{3}}.$$

- Der Durchmesser ist

$$d_k := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tau_k} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

- Der Radius r_k ist der Radius der größten in τ_k enthaltenen Kugel.
- Die globale Maschenweite ist

$$h_{fem} = h_{max} := \max_{k=1, \dots, n(N)} h_k.$$

- Das Minimum der lokalen Maschenweite ist

$$h_{min} := \min_{k=1, \dots, n(N)} h_k.$$

Die finiten Elemente $\tau_k \in \mathcal{T}_N$ heißen *formregulär*, falls eine von der Unterteilung \mathcal{T}_N unabhängige Konstante c_F existiert, sodass

$$d_k \leq c_F r_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n(N) \text{ gilt.}$$

Die Folge von Unterteilungen $\{\mathcal{T}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ heißt *global gleichmäßig*, falls eine von $N \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c_G \geq 1$ existiert, sodass

$$\frac{h_{max}}{h_{min}} \leq c_G$$

gilt.

Sei nun \mathcal{T}_N eine zulässige, formreguläre Unterteilung von Ω_S und bezeichne $\{x_k\}_{k=1}^{M_S}$ die Menge aller Knoten von \mathcal{T}_N . Der Ansatzraum $\mathbf{X}_M \subset \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ wird gewählt als $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S)$, dem Raum der *stückweise linearen* und *global stetigen* Funktionen auf Ω_S , siehe z.B. [19, Abs. 9.3]. (Der Index h bezeichne den Diskretisierungsparameter, der bei der Verfeinerung der Unterteilung des Gebietes gegen 0 strebt.) Für eine zulässige Unterteilung von $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Basis dieses Ansatzraumes gegeben durch

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dimension des Ansatzraumes entspricht dabei gerade der Anzahl der Knoten der Unterteilung, d.h. $\dim \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S) = M_S$. Es gilt damit für eine beliebige Funktion $v_h \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S)$ die Darstellung

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_S} v_k \varphi_k(\mathbf{x}).$$

Da ein Eigenvektor von (2.47) allerdings ein Element des $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ ist, müssen vektorwertige Ansatzfunktionen definiert werden. Die Basis φ_k wird zur Basis $\boldsymbol{\varphi}_k$ wie folgt erweitert, siehe auch [10, Abs. 3.1]:

$$\boldsymbol{\varphi}_{3k+j} := \varphi_k \mathbf{e}_j \quad \text{für } k \in \{1, \dots, M_S\}, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.8)$$

wobei die Vektoren \mathbf{e}_j den kanonischen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 entsprechen. Der Ansatzraum des $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ sei demzufolge mit $\mathbf{X}_M := \text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_k\}$ gegeben. Eine Funktion $\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M$ lässt sich darstellen durch

$$\mathbf{v}_M(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_S} \sum_{j=1}^3 \hat{v}_{3k+j}^M \boldsymbol{\varphi}_{3k+j}(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Wie in Kapitel 3.1 erläutert, ist für die Konvergenz einer Näherung $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M$ gegen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ des kontinuierlichen Problems (2.47) die Approximationseigenschaft

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)} \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} = 0$$

notwendig. Nach [19, Satz 9.2] gilt für den Ansatzraum $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S)$:

Satz 3.1. *Sei \mathcal{T}_N eine zulässige, formreguläre Unterteilung von Ω_S . Sei $u \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)$ mit $s \in [\nu, 2]$ und mit $\nu \in \{0, 1\}$. Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S)} \|u - v_h\|_{\mathbf{H}^\nu(\mathcal{T}_N)} \leq ch_{fem}^{s-\nu} |u|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)}$$

mit einer positiven Konstante c .

Der Satz kann auch auf den vektorwertigen Ansatzraum $\mathbf{X}_M \subset \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ angewandt werden:

Korollar 3.2. *Sei \mathcal{T}_N eine zulässige, formreguläre Unterteilung von Ω_S . Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)$ mit $s \in [\nu, 2]$ und mit $\nu \in \{0, 1\}$. Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^\nu(\mathcal{T}_N)} \leq \bar{c} h_{fem}^{s-\nu} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)}$$

mit einer positiven Konstante \bar{c} .

Beweis. Sei $\mathbf{v}_M(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{v}_h^j(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{v}_h^j(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{M_S} \hat{v}_{3k+j}^M \boldsymbol{\varphi}_{3k+j}(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, 3$. Dann gilt per Definition der vektoriellen $\mathbf{H}^\nu(\mathcal{T}_N)$ -Norm und mit Satz 3.1

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^\nu(\mathcal{T}_N)} &= \inf_{\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_S)} \left(\sum_{j=1}^3 \|u_j - \mathbf{v}_h^j\|_{\mathbf{H}^\nu(\mathcal{T}_N)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^3 \bar{c}_j^2 h_{fem}^{2(s-\nu)} |u_j|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\max_{j=1, \dots, 3} \{\bar{c}_j^2\} h_{fem}^{2(s-\nu)} \sum_{j=1}^3 |u_j|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \max_{j=1, \dots, 3} \{\bar{c}_j\} h_{fem}^{s-\nu} \left(\sum_{j=1}^3 |u_j|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \bar{c} h_{fem}^{s-\nu} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_N)} \end{aligned}$$

mit $\bar{c} = \max_{j=1, \dots, 3} \{\bar{c}_j\}$. □

3.3 Randelemente

Da im FSI-Eigenwertproblem (2.47) auch Randintegrale (auf dem Kopplungsrand Γ) auftreten, werden in diesem Abschnitt, der sich an [19, Kap. 10] orientiert, Randelemente eingeführt. Wegen $\gamma_0^{ext} p \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ wird ein endlichdimensionaler Ansatzraum \mathbf{Y}_M erklärt, der ein Teilraum des $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ ist und der die Approximationseigenschaft

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\gamma_0^{ext} p \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \inf_{q_M \in \mathbf{Y}_M} \|\gamma_0^{ext} p - q_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} = 0 \quad (3.10)$$

erfüllt.

Die Folge $\{\mathcal{T}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ von Unterteilungen bei der Zerlegung des Gebietes Ω_S , s. Kapitel 3.2, impliziert eine Folge $\{\Sigma_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ von Unterteilungen, die den Kopplungsrand Γ in Dreiecke, die Randelemente σ_l , zerlegt. Sei also

$$\Gamma = \bar{\Sigma}_N = \bigcup_{l=1}^{m(N)} \bar{\sigma}_l.$$

Bemerkung 3.3. Es ist nicht notwendig, die gleiche Folge von Unterteilungen sowohl für das Gebiet als auch für den Rand zu verwenden. In dieser Arbeit wird allerdings diese Variante angewandt.

Eine Unterteilung Σ_N des Randes Γ heißt *zulässig*, wenn für zwei verschiedene, abgeschlossene Randelemente $\bar{\sigma}_l, \bar{\sigma}_i \in \Sigma_N, l \neq i$, gilt, dass deren Durchschnitt $\bar{\sigma}_l \cap \bar{\sigma}_i$ entweder leer ist oder aus einem Knoten oder einer Kante besteht. Da die Unterteilung \mathcal{T}_N für die finiten Elemente aus Kapitel 3.2 bereits zulässig war, ist auch die Unterteilung Σ_N für die Randelemente σ_l zulässig.

Ähnlich zu den finiten Elementen werden Kenngrößen eines Randelements σ_l definiert:

- Die Fläche ist

$$\Delta_l := \int_{\sigma_l} ds_{\mathbf{x}}.$$

- Die lokale Maschenweite ist

$$h_l := (\Delta_l)^{\frac{1}{2}}.$$

- Der Durchmesser ist

$$d_l := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma_l} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

- Der Radius r_l ist der Radius des größten in σ_l enthaltenen Kreises.
- Die globale Maschenweite ist

$$h_{bem} = h_{max} := \max_{l=1, \dots, m(N)} h_l.$$

- Das Minimum der lokalen Maschenweite ist

$$h_{min} := \min_{l=1, \dots, m(N)} h_l.$$

Analog können die Eigenschaften der *Formregularität* und der *globalen Gleichmäßigkeit* auf die Randelemente übertragen werden: Die Randelemente $\sigma_l \in \Sigma_N$ heißen *formregulär*, falls eine von der Randzerlegung Σ_N unabhängige Konstante c_B existiert, sodass

$$d_l \leq c_B r_l \quad \text{für alle } l = 1, \dots, m(N) \text{ gilt.}$$

Die Folge von Unterteilungen $\{\Sigma_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ heißt *global gleichmäßig*, falls eine von $N \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $c_G \geq 1$ existiert, sodass

$$\frac{h_{max}}{h_{min}} \leq c_G$$

gilt.

Sei nun Σ_N eine zulässige, formreguläre Zerlegung von Γ und bezeichne $\{x_k\}_{k=1}^{M_I}$ die Menge aller Knoten, die auf Γ liegen. Der Ansatzraum $Y_M \subset H^{1/2}(\Gamma)$ wird gewählt als $\mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma)$, dem Raum der *stückweise linearen* und *global stetigen* Funktionen auf Γ , siehe z.B. [19, Abs. 10.2]. Für eine zulässige Unterteilung von Γ ist eine Basis dieses Ansatzraumes gegeben durch

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dimension des Ansatzraumes entspricht der Anzahl der Knoten der Unterteilung, d.h. $\dim \mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma) = M_I$. Es gilt für eine beliebige Funktion $q_M \in Y_M = \mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma)$ die Darstellung

$$q_M(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_I} q_k^M \varphi_k(\mathbf{x}).$$

Nach [19, Satz 10.3] erfüllt der Ansatzraum $\mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma)$ die Approximationseigenschaft (3.10):

Satz 3.4. *Sei Σ_N eine zulässige, formreguläre Unterteilung des hinreichend glatten Randes Γ . Sei $p \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\nu, 2]$ und $\nu \in [0, 1]$. Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{q_M \in Y_M} \|p - q_M\|_{H^\nu(\Gamma)} \leq ch_{bem}^{s-\nu} |p|_{H^s(\Gamma)}$$

mit einer positiven Konstante c .

3.4 Diskrete Formulierung des FSI–Eigenwertproblems

Mit den in Kapitel 3.2 und 3.3 erklärten endlichdimensionalen Räumen \mathbf{X}_M und Y_M kann die Galerkin–Bubnov–Variationsformulierung des FSI–Eigenwertproblems (2.44) angegeben werden: Gesucht $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p_M \in Y_M \setminus \{0\}$ und $\lambda_M := \omega^2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\langle \begin{pmatrix} A - \varrho_S \lambda_M M - \varrho_F \lambda_M N^* V N & N^* \left(\frac{1}{2} I + K \right) \\ \varrho_F \lambda_M \left(\frac{1}{2} I + K' \right) N & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ p_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

für alle $\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M$ und $q_M \in Y_M$ gilt. Seien $n := \dim \mathbf{X}_M$ und $m := \dim Y_M$. Dann werden die folgenden Matrizen definiert um das System (3.11) in ein äquivalentes, algebraisches Matrix–Eigenwertproblem umzuformen:

$$\begin{aligned}
A_{FE}[l, k] &:= \langle A\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle_{\Omega_S} = \lambda_L \int_{\Omega_S} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_l d\mathbf{x} + 2\mu_L \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_k) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_l) d\mathbf{x}, \\
M_{FE}[l, k] &:= \langle M\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle_{\Omega_S} = \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_l d\mathbf{x}, \\
V_{BE}[l, k] &:= \langle N^* V N \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle_{\Omega_S} = \int_{\Gamma} (V \gamma_0^{int} \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \mathbf{n}) (\gamma_0^{int} \boldsymbol{\varphi}_l \cdot \mathbf{n}) ds_{\mathbf{x}}, \\
M_{BE}[l, j] &:= \langle N^* \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle_{\Omega_S} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_j \gamma_0^{int} \boldsymbol{\varphi}_l \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}}, \\
K_{BE}[l, j] &:= \langle N^* K \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle_{\Omega_S} = \int_{\Gamma} K \boldsymbol{\varphi}_j \gamma_0^{int} \boldsymbol{\varphi}_l \cdot \mathbf{n} ds_{\mathbf{x}}, \\
D_{BE}[i, j] &:= \langle D \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} D \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_i ds_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

für $k, l = 1, \dots, n$ und für $i, j = 1, \dots, m$. Für diese Matrizen gilt daher

$$\begin{aligned}
A_{FE} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & A_{FE}^T &= A_{FE}, \\
M_{FE} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & M_{FE}^T &= M_{FE}, \\
V_{BE} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & V_{BE}^T &= V_{FE}, \\
M_{BE} &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\
K_{BE} &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\
D_{BE} &\in \mathbb{R}^{m \times m}, & D_{BE}^T &= D_{BE}.
\end{aligned}$$

Damit lautet das zu (3.11) äquivalente Matrix–Eigenwertproblem: Gesucht sind die Eigenvektoren $\underline{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $\underline{p} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\underline{0}\}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} A_{FE} - \varrho_S \lambda M_{FE} - \varrho_F \lambda V_{BE} & \left(\frac{1}{2} M_{BE} + K_{BE} \right) \\ \varrho_F \lambda \left(\frac{1}{2} M_{BE}^T + K_{BE}^T \right) & D_{BE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

gilt.

Die diskrete Variationsformulierung des FSI–Eigenwertproblems (2.45) lautet: Gesucht $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p_M \in Y_M \setminus \{0\}$ und $\lambda_M = \omega^2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\langle \begin{pmatrix} A - \varrho_S \lambda_M M - \varrho_F \lambda_M N^* V N & N^* \left(\frac{1}{2} I + K \right) \\ \varrho_F \lambda_M \left(\frac{1}{2} I + K' \right) N & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ p_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

für alle $\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M$ und $q_M \in Y_M$ gilt.

Mittels des Poincaré–Steklov–Operators (2.34)

$$T = V + \left(\frac{1}{2}I + K\right)\tilde{D}^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K'\right) : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

kann eine zu (3.13) äquivalente, symmetrische, diskrete Variationsformulierung angegeben werden: Gesucht $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\lambda_M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle = \lambda_M \left[\varrho_S \langle M\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle + \varrho_F \langle N^*TN\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle_\Gamma \right] \quad \text{für alle } \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \quad (3.14)$$

gilt.

Die Matrix der Approximation des Poincaré–Steklov–Operators

$$T_{BE}[l, k] = \langle N^*TN\varphi_k, \varphi_l \rangle_\Gamma \quad \text{für } k, l = 1, \dots, n$$

kann jedoch nicht direkt berechnet werden, da die Inverse des Operators \tilde{D} nicht explizit vorliegt. Es wird daher eine symmetrische Approximation des kontinuierlichen Operators T erklärt:

Für ein $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ folgt mit der symmetrischen Darstellung (2.34)

$$Tw = Vw + \left(\frac{1}{2}I + K\right)\tilde{D}^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K'\right)w = Vw + \left(\frac{1}{2}I + K\right)v$$

mit $v = \tilde{D}^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K'\right)w \in H^{1/2}(\Gamma)$, d.h. $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems

$$\langle \tilde{D}v, \tau \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w, \tau \right\rangle \quad \text{für alle } \tau \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Mit dem konformen Ansatzraum $Y_M = \mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ kann durch die Galerkin–Variationsformulierung

$$\langle \tilde{D}v_h, \tau_h \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w, \tau_h \right\rangle \quad \text{für alle } \tau_h \in Y_M$$

eine Näherungslösung $v_h \in Y_M$ bestimmt werden. Die symmetrische Approximation $\tilde{T} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ des Poincaré–Steklov–Operators T wird dann definiert durch

$$\tilde{T}w = Vw + \left(\frac{1}{2}I + K\right)v_h. \quad (3.15)$$

Analog zu [19, Lemma 12.4] lässt sich das folgende Lemma beweisen:

Lemma 3.5. *Die symmetrische Approximation \tilde{T} (3.15) des Poincaré–Steklov–Operators T (2.34) ist*

- beschränkt, d.h. es gilt

$$\|\tilde{T}w\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{c}_2^T \|w\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } w \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

mit einer positiven Konstante \tilde{c}_2^T und

- $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptisch, d.h. es gilt

$$\langle \tilde{T}w, w \rangle_{\Gamma} \geq \tilde{c}_1^T \|w\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } w \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

mit einer positiven Konstante \tilde{c}_1^T .

Weiters gilt die Fehlerabschätzung

$$\|(T - \tilde{T})w\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq c \inf_{w_h \in \mathcal{S}_h^1(\Sigma_N, \Gamma)} \|Tw - w_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$$

mit einer positiven Konstante c .

Die Approximation \tilde{T} aus (3.15) führt daher auf eine approximative, symmetrische, diskrete Variationsformulierung des FSI-Eigenwertproblems: Gesucht $\tilde{\mathbf{u}}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\tilde{\lambda}_M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\tilde{\mathbf{u}}_M, \tilde{\mathbf{v}}_M \rangle = \tilde{\lambda}_M \left[\varrho_S \langle M\tilde{\mathbf{u}}_M, \tilde{\mathbf{v}}_M \rangle + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N \tilde{\mathbf{u}}_M, \tilde{\mathbf{v}}_M \rangle_{\Gamma} \right] \quad \text{für alle } \tilde{\mathbf{v}}_M \in \mathbf{X}_M \quad (3.16)$$

gilt.

Die Matrix des modifizierten, hypersingulären Operators \tilde{D} wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{BE}[i, j] &:= \langle \tilde{D}\varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma} = \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma} + \alpha \langle \varphi_j, 1 \rangle_{\Gamma} \langle \varphi_i, 1 \rangle_{\Gamma} \\ &= \int_{\Gamma} D\varphi_j \varphi_i ds_{\mathbf{x}} + \alpha \Delta_j \Delta_i \end{aligned}$$

für $i, j = 1, \dots, m$ und mit einem $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Es gilt

$$\tilde{D}_{BE} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \tilde{D}_{BE}^T = \tilde{D}_{BE}.$$

Da der modifizierte, hypersinguläre Operator \tilde{D} invertierbar ist, ist auch die Matrix \tilde{D}_{BE} invertierbar. Im Diskreten lässt sich daher die symmetrische Approximation \tilde{T} des Poincaré–Steklov–Operators definieren durch

$$T_{BE} := V_{BE} + \left(\frac{1}{2} M_{BE} + K_{BE} \right) \tilde{D}_{BE}^{-1} \left(\frac{1}{2} M_{BE} + K_{BE}^T \right).$$

Es gilt

$$T_{BE} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad T_{BE}^T = T_{BE}.$$

Es folgt das zu (3.16) äquivalente Matrix-Eigenwertproblem: Gesucht sind die Eigenvektoren $\underline{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda' \in \mathbb{R}$, sodass

$$A_{FE}\underline{u} = \lambda' \left[\varrho_S M_{FE}\underline{u} + \varrho_F T_{BE}\underline{u} \right] \quad (3.17)$$

gilt.

3.5 Konvergenz des diskreten Problems

In diesem Abschnitt, der sich an [4, Kap. 7, Kap. 9] orientiert, werden Kriterien für die Konvergenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen des diskreten Problems gegen die Eigenwerte und Eigenfunktionen des kontinuierlichen Problems angeführt. Anstelle des ursprünglichen, kontinuierlichen Eigenwertproblems (2.47) wird das kontinuierliche Eigenwertproblem mit der symmetrischen Approximation \tilde{T} (3.15) betrachtet: Gesucht $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \hat{\lambda} \left[\varrho_S \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \right] \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \quad (3.18)$$

gilt. Das zugehörige diskrete Eigenwertproblem lautet: Gesucht $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\tilde{\lambda}_M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle A\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle = \tilde{\lambda}_M \left[\varrho_S \langle M\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M \rangle_\Gamma \right] \quad \text{für alle } \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \quad (3.19)$$

gilt.

In Kapitel 2.4 wurden die zwei symmetrischen, beschränkten Bilinearformen a und b definiert, für die gilt:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S). \end{aligned}$$

Sei $\tilde{b}(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \varrho_S \langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$$

definierte symmetrische Bilinearform und sei $\tilde{B} : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ der dadurch induzierte selbstadjungierte Operator, d.h.

$$\langle \tilde{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S).$$

Sei $\tilde{a}(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$$

definierte symmetrische Bilinearform und sei $\tilde{A} : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ der dadurch induzierte selbstadjungierte Operator, d.h.

$$\langle \tilde{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S).$$

Es wird nun ein zum Eigenwertproblem (3.18) äquivalentes, verschobenes Variationsproblem betrachtet: Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\tilde{\lambda} := \hat{\lambda} + 1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{\lambda} \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \quad (3.20)$$

gilt. Das Analogon zur diskreten Variationsformulierung (3.19) lautet: Gesucht sind $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\bar{\lambda}_M := \tilde{\lambda}_M + 1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) = \bar{\lambda}_M \tilde{b}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \quad (3.21)$$

gilt.

Den Grund für die Verschiebung des Problems liefern die Eigenschaften der Bilinearform \tilde{a} :

Lemma 3.6. *Die Bilinearform $\tilde{a}(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $c_2^{\tilde{a}} > 0$, sodass*

$$|\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_2^{\tilde{a}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 2.32, Lemma 2.33 und Lemma 3.5 sowie wegen der Beschränktheit der Komposition der beschränkten Operatoren N^* , \tilde{T} und N . \square

Um die $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ -Elliptizität von \tilde{a} zeigen zu können, wird die *Zweite Kornsche Ungleichung*, siehe [19, Satz 4.8], benötigt:

Satz 3.7. *Sei $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega_S$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass*

$$\int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}^2 \geq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}^2 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Lemma 3.8. *Die Bilinearform $\tilde{a}(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ -elliptisch, d.h. es existiert eine Konstante $c_1^{\tilde{a}} > 0$, sodass*

$$\tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq c_1^{\tilde{a}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}^2 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Beweis. Für $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ folgt mit Lemma 3.5 und Satz 3.7

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \tilde{b}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \underbrace{\lambda_L \int_{\Omega_S} [\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}}_{\geq 0} + 2\mu_L \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \varrho_S \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)} + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \\ &\geq 2\mu_L \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} + \varrho_S \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}^2 + \varrho_F \tilde{c}_1^T \underbrace{\|N \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2}_{\geq 0} \\ &\geq \min\{2\mu_L, \varrho_S\} \left[\int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}^2 \right] \\ &\geq \min\{2\mu_L, \varrho_S\} c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}^2. \end{aligned}$$

\square

Lemma 3.9. [10, Lemma 2.33] Der Operator $M : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ ist kompakt.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass das Bild der Einheitskugel $B(0, 1) \subset \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ unter M relativkompakt in $\mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ ist. Sei das Bild von $B(0, 1)$ unter M gegeben durch

$$\text{Im} := \{M\mathbf{u} : \mathbf{u} \in B(0, 1)\}.$$

Sei (c_n) eine Folge in Im . Zu zeigen ist, dass eine konvergente Teilfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)'}$ existiert. Da c_n ein Element von Im ist, existiert ein $\mathbf{u}_n \in B(0, 1)$, sodass $M\mathbf{u}_n = c_n$ gilt. Aus dem *Einbettungssatz in Sobolev-Räumen*, siehe [1, Satz 8.9 (2)], folgt, dass die Einbettung von $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ nach $\mathbf{L}_2(\Omega_S)$ kompakt ist. Daher existiert eine $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}$ -konvergente Teilfolge $(\mathbf{u}_{n'})$ mit Grenzwert $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega_S)$. Die Folge $(c_{n'}) := (M\mathbf{u}_{n'})$ ist somit eine Teilfolge von (c_n) . Es ist noch zu zeigen, dass die Folge $(c_{n'})$ in $\mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ konvergiert. Für $c := M\mathbf{u}$ folgt mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$\begin{aligned} \|c_{n'} - c\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)'} &= \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)} \frac{|\langle M(\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}} \\ &= \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)} \frac{\left| \int_{\Omega_S} (\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}) \mathbf{v} d\mathbf{x} \right|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}} \leq \|\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)} \end{aligned}$$

Für $n' \rightarrow \infty$ strebt daher $\|c_{n'} - c\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)'}$ gegen 0. \square

Lemma 3.10. Der Operator $\tilde{B} : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)'$ ist kompakt.

Beweis. Aus der Linearität und der Beschränktheit des Operators \tilde{T} folgt seine Stetigkeit. In Kapitel 2.7 wurde gezeigt, dass die Operatoren N^* und N kompakt sind, siehe Korollar 2.38. Da die Komposition von stetigen und kompakten Operatoren wieder kompakt ist, siehe [21, Satz II.3.2b], und wegen der in Lemma 3.9 gezeigten Kompaktheit von M folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.11. Die Bilinearform $\tilde{b}(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbb{R}$ ist positiv.

Beweis. Für $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt wegen der $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität von \tilde{T} (Lemma 3.5)

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \varrho_S \langle M\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \varrho_F \langle N^* \tilde{T} N \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \\ &= \varrho_S \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)} + \varrho_F \langle \tilde{T} N \mathbf{v}, N \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \\ &\geq \varrho_S \underbrace{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_S)}^2}_{>0} + \varrho_F \tilde{c}_1^T \underbrace{\|N \mathbf{v}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

mit den positiven Konstanten $\varrho_S, \varrho_F, \tilde{c}_1^T$. \square

Unter den Voraussetzungen, dass die Bilinearform \tilde{a} $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ -elliptisch (Lemma 3.8) und die Bilinearform \tilde{b} positiv (Lemma 3.11) ist, kann nach [4, Kap. 9] der Lösungsoperator $S : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ definiert werden durch: Gegeben $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$. Dann existiert ein eindeutiges $S\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$, sodass

$$\tilde{a}(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \text{ gilt.}$$

Nach [5, Anm. 8.40 (iii)] ist der Operator S selbstadjungiert und kompakt. Es gilt also nach Lemma 2.14 und Satz 2.16, dass jedes von 0 verschiedene Element von $\sigma_s(S)$ ein Eigenwert von S und reell ist. Weiters gilt, dass $(\tilde{\lambda}, \mathbf{u})$ genau dann Eigenpaar von (3.20) ist, wenn $(\tilde{\lambda}^{-1}, \mathbf{u})$ Eigenpaar von S ist, d.h. $S\mathbf{u} = \tilde{\lambda}^{-1}\mathbf{u}$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\tilde{a}(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \iff \\ \tilde{a}(\tilde{\lambda}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \iff \\ \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \tilde{\lambda}\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S).\end{aligned}$$

Seien $\tilde{\lambda}^{(i)} \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, die Eigenwerte von (3.20). Nach [4, Kap. 9] sind die $\tilde{\lambda}^{(i)}$ positiv und können aufsteigend geordnet werden, d.h.

$$0 < \tilde{\lambda}^{(1)} \leq \tilde{\lambda}^{(2)} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}^{(i)} \leq \dots$$

Es ist möglich, dass ein Eigenwert mehrfach auftritt, dass also

$$\tilde{\lambda}^{(i)} = \dots = \tilde{\lambda}^{(i+j-1)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \text{ und für } j = 1, \dots, \mu^{(i)} \in \mathbb{N}$$

gilt mit der sogenannten *algebraischen Vielfachheit* $\mu^{(i)}$ des Eigenwerts $\tilde{\lambda}^{(i)}$. Sei der *Eigenraum* zum Eigenwert $\tilde{\lambda}^{(i)}$ gegeben durch

$$E^{(i)} := \ker((\tilde{\lambda}^{(i)})^{-1}I - S) := \text{span}\{\mathbf{u}^{(i)}, \dots, \mathbf{u}^{(i+k-1)}\} \quad \text{für } k = 1, \dots, \gamma^{(i)} \in \mathbb{N},$$

wobei die Dimension von $E^{(i)}$ als *geometrische Vielfachheit* $\gamma^{(i)}$ bezeichnet werde. Nach [21, Abs. VI.6] gilt:

Lemma 3.12. *Für selbstadjungierte Operatoren stimmen die geometrische und die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts überein.*

Als Unterraum von $\mathbf{H}^1(\Omega_S)$ ist \mathbf{X}_M auch ein Hilbertraum. Für die Galerkin-Variationsformulierung (3.21) lässt sich daher nach [4, Kap. 7] der diskrete Lösungsoperator $S_M : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)$ erklären durch: Gegeben $\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M$. Dann existiert ein eindeutiges $S_M\mathbf{u}_M \in \mathbf{X}_M$, sodass

$$\tilde{a}(S_M\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) = \tilde{b}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M \text{ gilt.}$$

Da \mathbf{X}_M endlichdimensional ist mit $\dim \mathbf{X}_M = M$, ist auch S_M kompakt. Ist $(\bar{\lambda}_M, \mathbf{u}_M)$ ein Eigenpaar von (3.21), so ist $(\bar{\lambda}_M^{-1}, \mathbf{u}_M)$ ein Eigenpaar von S_M und umgekehrt. Nach [4, Kap. 7] sind die diskreten Eigenwerte $\bar{\lambda}_M^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, M$, positiv und können aufsteigend geordnet werden, d.h.

$$0 < \bar{\lambda}_M^{(1)} \leq \bar{\lambda}_M^{(2)} \leq \dots \leq \bar{\lambda}_M^{(M)}.$$

Analog zu oben sei die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\bar{\lambda}_M^{(i)}$ durch $\mu_M^{(i)}$ gegeben. Sei der Eigenraum zum Eigenwert $\bar{\lambda}_M^{(i)}$ definiert durch

$$E_M^{(i)} := \ker((\bar{\lambda}_M^{(i)})^{-1}I - S) := \text{span}\{\mathbf{u}_M^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_M^{(i+k-1)}\} \quad \text{für } k = 1, \dots, \gamma_M^{(i)} \in \mathbb{N},$$

mit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_M^{(i)}$.

Nach Lemma 3.12 stimmen also die geometrische und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von (3.20) bzw. von (3.21) überein. Im Folgenden wird daher nur mehr von der *Vielfachheit eines Eigenwerts* gesprochen und diese mit $mp(i) := \mu^{(i)} = \gamma^{(i)}$ bzw. (im Diskreten) mit $mp_M(i) := \mu_M^{(i)} = \gamma_M^{(i)}$ bezeichnet.

Als Folgerung von [4, Prop. 7.2] (*Min–Max–Charakterisierung der Eigenwerte*) gilt:

Lemma 3.13. *Der i -te diskrete Eigenwert von (3.21) ist eine obere Schranke des i -ten kontinuierlichen Eigenwerts von (3.20), d.h.*

$$\tilde{\lambda}^{(i)} \leq \bar{\lambda}_M^{(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, M.$$

Nach [4, Prop. 7.4, Bem. 7.5] konvergieren die Eigenwerte und Eigenfunktionen des diskreten Problems (3.21) gegen die des kontinuierlichen Problems (3.20) genau dann, wenn S_M gegen S konvergiert für $M \rightarrow \infty$, d.h. wenn die Normkonvergenz

$$\|S - S_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_S)} \rightarrow 0 \quad \text{für } M \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

gilt. Diese Normkonvergenz ist nach [4, Prop. 7.6, Bem. 7.8] erfüllt.

Nach [4, Thm. 9.12] gilt das Konvergenzresultat für die approximierten Eigenwerte:

Satz 3.14. *Seien $\tilde{\lambda}^{(i)}$ die Eigenwerte von (3.20) und $\bar{\lambda}_M^{(i)}$ die Eigenwerte von (3.21). Dann gilt*

$$\tilde{\lambda}^{(i)} \leq \bar{\lambda}_M^{(i)} \leq \tilde{\lambda}^{(i)} + \tilde{C} \sup_{\mathbf{u} \in E^{(i)}, \|\mathbf{u}\|=1} \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}^2$$

mit einer positiven Konstante \tilde{C} .

Da bei der Zerlegung des Gebietes Ω_S und bei der Zerlegung des Randes Γ die selben Netze verwendet werden, stimmen die Diskretisierungsparameter h_{fem} und h_{bem} überein und werden im Folgenden mit h bezeichnet.

Mit Korollar 3.2 für $s = 2$ ($\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega_S)$ kann bei einem \mathcal{C}^2 -Rand von Ω_S vorausgesetzt werden) und $\nu = 1$ folgt:

Korollar 3.15. *Seien $\tilde{\lambda}^{(i)}$ die Eigenwerte von (3.20) und $\bar{\lambda}_M^{(i)}$ die Eigenwerte von (3.21). Dann gilt für einen hinreichend glatten Rand von Ω_S*

$$|\tilde{\lambda}^{(i)} - \bar{\lambda}_M^{(i)}| \leq \tilde{c} h^2 |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega_S)}^2$$

mit einer positiven Konstante \tilde{c} .

Die Konvergenz der diskreten gegen die kontinuierlichen Eigenfunktionen lässt sich nach [4, Thm. 9.13] folgendermaßen beschreiben:

Satz 3.16. Sei $\mathbf{u}^{(i)}$ eine Eigenfunktion von (3.20) und normiert, $\|\mathbf{u}^{(i)}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} = 1$, mit zugehörigem Eigenwert $\tilde{\lambda}^{(i)}$ mit Vielfachheit $mp(i) \in \mathbb{N}$. Seien weiters $\mathbf{u}_M^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_M^{(i+k-1)}$ die diskreten Eigenfunktionen von (3.21) mit den zugehörigen diskreten Eigenwerten $\bar{\lambda}_M^{(i)} = \dots = \bar{\lambda}_M^{(i+k-1)}$ für $k = 1, \dots, mp_M(i) \in \mathbb{N}$, die gegen $\tilde{\lambda}^{(i)}$ konvergieren. Dann existiert für jedes $i \in \{1, \dots, M\}$ ein

$$\mathbf{w}_M^{(i)} \in \text{span}\{\mathbf{u}_M^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_M^{(i+k-1)}\} \quad \text{für } k = 1, \dots, mp_M(i),$$

sodass

$$\|\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{w}_M^{(i)}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \leq \bar{C} \sup_{\mathbf{u} \in E^{(i)}, \|\mathbf{u}\|=1} \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{X}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)}$$

gilt mit einer positiven Konstante \bar{C} .

Es folgt mit Korollar 3.2 für $s = 2$ und $\nu = 1$:

Korollar 3.17. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.16 und für einen \mathcal{C}^2 -Rand von Ω_S gilt

$$\|\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{w}_M^{(i)}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_S)} \leq \bar{c}h |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega_S)}$$

mit einer positiven Konstante \bar{c} .

Bemerkung 3.18. Es lässt sich zeigen, dass die Differenz zwischen den approximierten Eigenwerten $\tilde{\lambda}_M$ des Problems (3.19) und den exakten Eigenwerten λ des FSI-Eigenwertproblems (2.47) gegen Null geht, denn es gilt

$$|\lambda - \tilde{\lambda}_M| = |(\lambda - \hat{\lambda}) + (\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}_M)| \leq |\lambda - \hat{\lambda}| + |\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}_M| \rightarrow 0$$

da einerseits

$$|\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}_M| \rightarrow 0$$

gilt wegen Korollar 3.15 und andererseits

$$|\lambda - \hat{\lambda}| \rightarrow 0$$

gilt, was mit den Resultaten aus [9] gefolgert werden kann.

4 Verallgemeinertes Matrix–Eigenwertproblem

In diesem Kapitel, das sich an [3, 14, 20] orientiert, wird das verallgemeinerte Matrix–Eigenwertproblem, das aus dem FSI–Eigenwertproblem (3.17) resultiert, angegeben und auf Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht. Anschließend werden zwei Iterationsverfahren, das Arnoldi– und das Lanczos–Verfahren, vorgestellt um dieses Problem numerisch zu lösen.

4.1 Grundlegende Eigenschaften

Das FSI–Eigenwertproblem (3.17) gehört in die Klasse der „Generalized hermitian eigenvalue problems“, siehe [3, Abs. 5.1], im Folgenden GHEP genannt. Es hat die Form: Gesucht sind die Eigenvektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda' \in \mathbb{R}$, sodass

$$A_{FE}x = \lambda' Bx$$

gilt mit den reellen, symmetrischen Matrizen

$$A_{FE} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad B := \varrho_S M_{FE} + \varrho_F T_{BE} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

aus Kapitel 3.4. Aus Lemma 3.11 folgt, dass die Matrix B positiv definit ist.

Analog zur verschobenen, diskreten Variationsformulierung (3.21) wird aufgrund der in Kapitel 3.5 gezeigten Konvergenzresultate im Folgenden ein verschobenes Matrix–Eigenwertproblem betrachtet: Gesucht sind die Eigenvektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda := \lambda' + 1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$Ax = \lambda Bx \tag{4.1}$$

gilt mit der (wegen Lemma 3.8) positiv definiten Matrix

$$A := A_{FE} + B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Definition 4.1. [20, Abs. 6.7] Zwei Matrix–Paare (A, B) und (\tilde{A}, \tilde{B}) heißen äquivalent, falls nichtsinguläre Matrizen U und V existieren, sodass

$$\tilde{A} = UAV \quad \text{und} \quad \tilde{B} = UB$$

gilt.

Es folgt $\tilde{A} - \lambda\tilde{B} = U(A - \lambda B)V$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.2. *Seien (A, B) und (\tilde{A}, \tilde{B}) äquivalente Matrix–Paare mit $\tilde{A} = UAV$ und $\tilde{B} = UB V$. Dann gilt: (λ, x) ist ein Eigenpaar von (A, B) , genau dann wenn $(\lambda, V^{-1}x)$ ein Eigenpaar von (\tilde{A}, \tilde{B}) ist.*

Beweis. Es gilt

$$U(A - \lambda B) \overbrace{VV^{-1}}^I x = (\tilde{A} - \lambda\tilde{B})V^{-1}x = 0.$$

Dies ist äquivalent zu $(A - \lambda B)x = 0$ da U nach Voraussetzung nichtsingulär ist. Die Umkehrung folgt analog. \square

Für die symmetrischen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und positiv definites B wird das Matrix–Paar (A, B) *symmetrisch–definit* genannt.

Nach [20, Thm. 1.4.7] existiert die (eindeutige) *Cholesky–Zerlegung* von B , d.h.

$$B = R^T R,$$

mit der nichtsingulären, oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Durch die Äquivalenztransformation $U = R^{-T}, V = R^{-1}$ wird das GHEP (4.1) auf Standardform gebracht: Gesucht sind $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{A}y = \lambda y \tag{4.2}$$

gilt mit der symmetrischen Matrix $\tilde{A} := R^{-T}AR^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und mit $y = Rx$. Es ist also

$$\tilde{B} = R^{-T}BR^{-1} = R^{-T}(R^T R)R^{-1} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und nach Lemma 4.2 stimmen die Eigenwerte von (4.1) und (4.2) überein.

Nach [20, Cor. 5.4.21] gilt:

Lemma 4.3. *Eine reelle, symmetrische $(n \times n)$ –Matrix besitzt genau n reelle, orthonormale Eigenvektoren.*

Seien y_1, \dots, y_n die reellen und bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts orthonormalen Eigenvektoren der Matrix \tilde{A} . Nach Lemma 4.2 sind dann $x_1 = R^{-1}y_1, \dots, x_n = R^{-1}y_n$ die Eigenvektoren von (4.1), die orthonormal bezüglich des B –Skalarprodukts sind, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (x_i, x_j)_B &= (R^{-1}y_i, R^{-1}y_j)_B = (BR^{-1}y_i, R^{-1}y_j) \\ &= \left(R^T \overbrace{RR^{-1}}^I y_i, R^{-1}y_j \right) = \left(y_i, \overbrace{RR^{-1}}^I y_j \right) = \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also, dass das symmetrisch-definite Matrix-Paar (A, B) genau n B -orthonormale Eigenvektoren x_1, \dots, x_n mit zugehörigen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt. Des weiteren gilt für die Eigenvektoren des GHEP (4.1)

$$(x_i, x_j)_A = (Ax_i, x_j) = (\lambda_i Bx_i, x_j) = \lambda_i (x_i, x_j)_B = \lambda_i \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Definition 4.4. Der Rayleigh-Quotient zum GHEP (4.1) ist gegeben durch

$$\rho(x) := \frac{(x, x)_A}{(x, x)_B} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Daher ergibt der Rayleigh-Quotient ausgewertet in einem Eigenvektor x_j gerade den zugehörigen Eigenwert λ_j .

Da neben der Matrix B auch die Matrix A des GHEP (4.1) positiv definit ist, ist $\rho(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stets positiv.

Das *Min-Max-Prinzip von Courant-Fisher*, siehe [14, Thm. 1.9], liefert die folgende Charakterisierung der Eigenwerte von (4.1):

Satz 4.5. Es gilt

$$\lambda_j = \min_{\substack{\dim(\mathcal{U})=j \\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n}} \max_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ x \neq 0}} \rho(x) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

bzw. die äquivalente Darstellung

$$\lambda_j = \max_{\substack{\dim(\mathcal{U})=n-j+1 \\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n}} \min_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ x \neq 0}} \rho(x) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt, dass für den kleinsten bzw. größten Eigenwert von (4.1) gilt:

$$\lambda_1 = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \rho(x), \quad \lambda_n = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \rho(x).$$

Damit können die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des GHEP (4.1) aufsteigend sortiert werden, d.h.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

4.2 Eigenwertlöser

In diesem Abschnitt werden zwei iterative Löser vorgestellt, die zur Klasse der **Krylov–Unterraum-Verfahren** gehören und hier wie in [3, 14] beschrieben werden.

Es seien die kleinsten, positiven Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, und die zugehörigen Eigenvektoren $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des GHEP (4.1) gesucht. Um die Konvergenzgeschwindigkeit der im Folgenden betrachteten iterativen Verfahren zu erhöhen wird eine Spektral–Transformation des FSI–Eigenwertproblems (3.17) durchgeführt. Das transformierte Problem lautet in Standard–Form: Gesucht sind die Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \dots \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenvektoren $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von

$$Cy = \mu y \quad (4.3)$$

mit $C = B(A - \eta B)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y = Bx$, $\mu = (\lambda - \eta)^{-1}$. Der sogenannte *Shift* (aus dem Englischen: Verschiebung) $\eta \in \mathbb{R}_+$ wird nahe an einem gesuchten Eigenwert von (4.1) gewählt, sodass schnelle Konvergenz gegen diesen erwartet werden kann. Eine solche Variante wird **shift–and–invert**–Strategie genannt.

Es ist zu beachten, dass die Matrix C im Allgemeinen *nicht* hermitesch bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts und das explizite Aufstellen (Berechnen der Inversen, Matrix–Matrix–Multiplikation) numerisch aufwendig ist. Allerdings ist C symmetrisch bzgl. des B^{-1} –Skalarprodukts, denn es folgt unter Ausnutzung der Symmetrie von A, B und damit der Symmetrie von $(A - \eta B)^{-1}$ die Identität

$$\begin{aligned} (Cx, y)_{B^{-1}} &= ((A - \eta B)^{-1}x, y) = (x, (A - \eta B)^{-T}y) = (x, (A - \eta B)^{-1}y) \\ &= (Bx, (A - \eta B)^{-1}y)_{B^{-1}} = (x, B^T(A - \eta B)^{-1}y)_{B^{-1}} \\ &= (x, B(A - \eta B)^{-1}y)_{B^{-1}} = (x, Cy)_{B^{-1}} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Für den vorliegenden Fall des verschobenen Eigenwertproblems (4.1) sind die Matrizen A_{FE} und M_{FE} dünn besetzt und die Matrix T_{BE} ist im Allgemeinen voll besetzt. Eine Matrix–Vektor–Multiplikation (MVM) mit $(A - \eta B)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A = A_{FE} + B \quad \text{und} \quad B = \varrho_S M_{FE} + \varrho_F T_{BE}$$

wird folgendermaßen realisiert: Die Matrix $\tilde{A} := A_{FE} - \eta \varrho_S M_{FE}$ ist dünn besetzt und kann daher effizient faktorisiert (invertiert) werden. Diese Faktorisierung wird hier bestimmt mittels des „Parallel Sparse Matrix Linear Solver Package“, kurz PARDISO, siehe [16, 17, 18] bzw. <http://www.pardiso-project.org/>. Es handelt sich dabei um eine robuste, speichereffiziente, high-performance Software zum Lösen von großen, dünn besetzten linearen Gleichungssystemen.

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ gesucht und $f \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Anstatt

$$u = (A - \eta B)^{-1} f = (\tilde{A} - \eta \rho_F T_{BE})^{-1} f$$

zu berechnen, wird das lineare Gleichungssystem

$$(\tilde{A} - \eta \rho_F T_{BE})u = f$$

mittels des GMRES-Verfahrens, siehe [13, Abs. 6.5], zur residualen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ gelöst. Mit der PARDISO-Inversen \tilde{A}^{-1} lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$(I - \eta \rho_F \tilde{A}^{-1} T_{BE})u = \tilde{A}^{-1} f. \quad (4.4)$$

In den im Folgenden beschriebenen Eigenwertlösern ist die MVM mit $(A - \eta B)^{-1}$ ein Mal pro Iteration auszuführen und daher auch der GMRES-Algorithmus ebenso oft anzuwenden. In den numerischen Ergebnissen wird auf die dafür benötigte Rechenzeit hingewiesen.

Weiters ist zu beachten, dass die Matrix der BEM-Diskretisierung

$$T_{BE} = V_{BE} + \left(\frac{1}{2} M_{BE} + K_{BE} \right) \tilde{D}_{BE}^{-1} \left(\frac{1}{2} M_{BE} + K_{BE}^T \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

nicht explizit aufgestellt wird, da diese vollbesetzt ist, sondern nur Matrix-Vektor-Multiplikationen mit den Teilmatrizen ausgeführt werden. Die Inverse der Matrix $\tilde{D}_{BE} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ wird hier mittels einer LAPACK- („Linear Algebra Package“) -Methode (via LU-Zerlegung), siehe [2] bzw. http://www.netlib.org/lapack/explore-html/df/da4/dgetri_8f.html bestimmt.

4.2.1 Arnoldi-Verfahren

Es seien die Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \dots \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenvektoren $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des transformierten Problems (4.3) gesucht. Das Arnoldi-Verfahren, das sich eines modifizierten Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsprozesses bedient, kann auf allgemeine, nicht-hermitesche Eigenwertprobleme angewendet werden. Es erzeugt eine Folge von Hessenberg-Matrizen $H_j \in \mathbb{R}^{j \times j}$, deren Eigenwerte die Eigenwerte des Problems (4.3) bei wachsendem $j \in \mathbb{N}$ approximieren. Ausgehend von einem Startvektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ wird eine orthogonale Basis des Krylov-Unterraums

$$\mathcal{K}^j(C, y_0) = \text{span}\{y_0, Cy_0, C^2y_0, \dots, C^{j-1}y_0\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$$

aufgebaut. Sei $V_j = [v_1, \dots, v_j] \in \mathbb{R}^{n \times j}$ die Matrix dieser Basisvektoren. Sei weiters die Hessenberg-Matrix H_j gegeben durch

$$H_j = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1j} \\ h_{21} & h_{22} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & h_{j-1,j} \\ & & h_{j,j-1} & h_{jj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{j \times j}.$$

Ein Pseudo-Code des Arnoldi-Algorithmus, vgl. auch [14, Algorithmus 6.2], sieht wie folgt aus:

Arnoldi shift–and–invert

```

1 Wähle Startvektor  $v_1 = y_0$  mit  $\|y_0\|_2 = 1$ .
2 for  $j = 1, \dots, m$ 
3    $w = Bv_j$ 
4    $w = (A - \eta B)^{-1}w$  //PARDISO, GMRES
5   for  $i = 1, \dots, j$ 
6      $h_{ij} = (w, v_i)$ 
7      $\tilde{w} = w - h_{ij}v_i$ 
8   end for
9   if  $\|\tilde{w}\|_2 < 0.7\|w\|_2$  //Reorthogonalisierung
10    for  $i = 1, \dots, j$ 
11       $\tilde{h}_{ij} = (\tilde{w}, v_i)$ 
12       $h_{ij} = h_{ij} + \tilde{h}_{ij}$ 
13       $w = \tilde{w} - h_{ij}v_i$ 
14    end for
15  else
16     $w = \tilde{w}$ 
17  end if
18   $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ 
19  Falls  $h_{j+1,j} = 0 \rightarrow$  STOP
20   $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$ 
21 end for
22 Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von  $H_j$ 

```

Bemerkung 4.6. Die Matrix $\tilde{A} = A_{FE} - \eta \varrho_S M_{FE}$ wird bereits vor der Schleife – also nur *einmal* – faktorisiert, während für die MVM in Zeile 4 einmal *pro* Iteration das GMRES–Verfahren aufgerufen wird.

Bemerkung 4.7. Da das Gram–Schmidt–Orthogonalisierungsverfahren numerisch instabil ist, muss ggf. in Zeile 9–14 der neue Basisvektor v_{j+1} nochmals gegen die zuvor berechneten Basisvektoren v_1, \dots, v_j reorthogonalisiert werden.

Bemerkung 4.8. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Hessenberg–Matrix H_j erfolgt hier mittels einer LAPACK–Methode, siehe [2] bzw. http://www.netlib.org/lapack/explore-html/d8/d66/dhseqr_8f.html

Als Folgerung von [14, Proposition 6.5] gilt:

Lemma 4.9. *Angenommen der Arnoldi shift–and–invert Algorithmus bricht nicht ab vor dem m -ten Schritt. Dann bilden die Vektoren $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine orthonormale Basis des Krylov–Unterraums $\mathcal{K}^m(C, y_0)$.*

Eine Aussage über den Abbruch des Algorithmus (in exakter Arithmetik) kann nach [14, Proposition 6.7] gewonnen werden:

Lemma 4.10. *Der Arnoldi–Algorithmus bricht nach j Schritten ab (d.h. $h_{j+1,j} = 0$) genau dann, wenn der Startvektor y_0 eine Linearkombination aus j Eigenvektoren ist. Außerdem ist dann der Unterraum \mathcal{K}^j invariant unter C und die approximierten Eigenwerte und Eigenvektoren sind exakt.*

Wegen [14, Proposition 6.6] gilt in jedem Iterationsschritt $j = 1, \dots, m$ des Arnoldi-Prozesses die Relation

$$CV_j = V_j H_j + h_{j+1,j} v_{j+1} e_j^T \quad (4.5)$$

mit dem kanonischen Einheitsvektor e_j . Multiplikation von links mit V_j^T ergibt wegen der Orthonormalität der Vektoren $\{v_1, \dots, v_j\}$

$$V_j^T C V_j = H_j.$$

Das bedeutet, falls $(\xi_i^{(j)}, s_i^{(j)})$ ein Eigenpaar von H_j ist, für das

$$H_j s_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} s_i^{(j)} \quad (4.6)$$

gilt, dann ist $(\mu_i = \xi_i^{(j)}, y_i = V_j s_i^{(j)})$ ein approximatives Eigenpaar des Problems (4.3) bzw. ist $(\lambda_i = \frac{1}{\xi_i^{(j)}} + \eta, x_i = B^{-1} V_j s_i^{(j)})$ ein approximatives Eigenpaar des GHEP (4.1). Der obere Index (j) bezeichnet hier die aktuelle Iterationszahl.

Aus praktischer Sicht ist es hilfreich, die Norm des Residuums in jeder Iteration berechnen zu können um ein Kriterium für den Abbruch des Algorithmus festzulegen. Nach [14, Proposition 6.8] gilt:

Lemma 4.11. *Sei $(\xi_i^{(j)}, s_i^{(j)})$ ein Eigenpaar von H_j und $(\xi_i^{(j)}, y_i = V_j s_i^{(j)})$ ein approximatives Eigenpaar des Problems (4.3). Dann gilt*

$$(C - \xi_i^{(j)} I) y_i = h_{j+1,j} e_j^T s_i^{(j)} v_{j+1}$$

und daher

$$\|(C - \xi_i^{(j)} I) y_i\|_2 = h_{j+1,j} |e_j^T s_i^{(j)}|.$$

Beweis. Multiplikation der Gleichung (4.5) von rechts mit $s_i^{(j)}$ ergibt

$$C V_j s_i^{(j)} = V_j H_j s_i^{(j)} + h_{j+1,j} v_{j+1} e_j^T s_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} V_j s_i^{(j)} + h_{j+1,j} e_j^T s_i^{(j)} v_{j+1}$$

und daraus folgt

$$\left\| \underbrace{C V_j s_i^{(j)}}_{=y_i} - \xi_i^{(j)} \underbrace{V_j s_i^{(j)}}_{=y_i} \right\|_2 = h_{j+1,j} |e_j^T s_i^{(j)}| \underbrace{\|v_{j+1}\|_2}_{=1}.$$

□

Im j -ten Iterationsschritt ($j = 1, \dots, m$) kann also das i -te Residuum ($i = 1, \dots, j$) in der Euklidischen Norm aus dem Produkt von $h_{j+1,j}$ und dem Absolutbetrag des j -ten (letzten) Eintrags des Eigenvektors $s_i^{(j)}$ von H_j berechnet werden. In der Praxis wird der Arnoldi-Algorithmus abgebrochen, entweder sobald *alle* Residuen im j -ten Schritt die vorgegebene Genauigkeit (z.B. $\varepsilon = 10^{-12}$) erreichen, oder nach einer fixen Anzahl an Iterationsschritten $m \in \mathbb{N}$.

4.2.2 Lanczos–Verfahren

Es seien die Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \dots \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenvektoren $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des transformierten Problems (4.3) gesucht. Das Lanczos–Verfahren, siehe [3, Abs. 5.5], kann als eine Vereinfachung der Arnoldi–Methode auf selbstadjungierte Eigenwertprobleme verstanden werden. An die Stelle der Hessenberg–Matrizen H_j tritt dann eine Folge von Tridiagonalmatrizen $T_j \in \mathbb{R}^{j \times j}$, deren Eigenwerte die Eigenwerte des Problems (4.3) approximieren.

Im Lanczos–Prozess wird, ausgehend von einem Startvektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$, in jedem Schritt $j = 1, \dots, m$ eine Spalte der Basis $V_j = [v_1, \dots, v_j] \in \mathbb{R}^{n \times j}$ des Krylov–Unterraums

$$\mathcal{K}^j(C, y_0) = \text{span}\{y_0, Cy_0, C^2y_0, \dots, C^{j-1}y_0\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$$

aufgebaut. Pro Iteration werden 2 Matrix–Vektor–Multiplikationen benötigt, eine mit B und eine mit $(A - \eta B)^{-1}$. Bei der *shift–and–invert*–Strategie des Lanczos–Verfahrens wird die Basis V_j gemäß der Rekursion

$$B(A - \eta B)^{-1}V_j = V_jT_j + re_j^T \quad \text{für } j = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

konstruiert mit der reellen, symmetrischen Tridiagonalmatrix

$$T_j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{j-1} & \\ & & & \beta_{j-1} & \alpha_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{j \times j}$$

und mit dem Residuum $r = \beta_j v_{j+1}$. Wird V_j bezüglich B^{-1} orthonormalisiert, d.h.

$$V_j^T B^{-1}V_j = I_j \quad \text{für } j = 1, \dots, m, \quad (4.8)$$

so folgt nach Multiplikation von (4.7) von links mit $V_j^T B^{-1}$ und wegen $V_j^T B^{-1}v_{j+1} = 0$

$$V_j^T (A - \eta B)^{-1}V_j = T_j \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Bei der Orthonormalisierung (4.8) muss B^{-1} nicht explizit berechnet werden. Dies geschieht implizit durch Aufstellen einer B –orthonormalen Basis W_j , d.h.

$$W_j^T B W_j = I_j \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Mit (4.8) folgt daher $V_j = B W_j$ und wegen der Symmetrie von B auch $V_j^T W_j = I_j$. Falls $(\xi_i^{(j)}, s_i^{(j)})$ ein Eigenpaar von T_j ist, d.h.

$$T_j s_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} s_i^{(j)} \quad (4.9)$$

gilt, dann ist $(\mu_i = \xi_i^{(j)}, y_i = V_j s_i^{(j)})$ ein approximatives Eigenpaar des Problems (4.3) bzw. ist $(\lambda_i = \frac{1}{\xi_i^{(j)}} + \eta, x_i = W_j s_i^{(j)})$ ein approximatives Eigenpaar des GHEP (4.1).

Der obere Index (j) steht für den aktuellen Iterationsschritt.

Das i -te Residuum ($i = 1, \dots, j$) im j -ten Schritt ($j = 1, \dots, m$) berechnet sich mit (4.7) und wegen $C = B(A - \eta B)^{-1}$, $y_i = V_j s_i^{(j)}$, $r = \beta_j v_{j+1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} r_i^{(j)} &= C y_i - \mu_i^{(j)} y_i = B(A - \eta B)^{-1} V_j s_i^{(j)} - \xi_i^{(j)} V_j s_i^{(j)} \\ &= V_j T_j s_i^{(j)} + r e_j^T s_i^{(j)} - \xi_i^{(j)} V_j s_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} V_j s_i^{(j)} + \beta_j v_{j+1} e_j^T s_i^{(j)} - \xi_i^{(j)} V_j s_i^{(j)} \\ &= \beta_j s_{j,i}^{(j)} v_{j+1}. \end{aligned}$$

Hier ist $s_{j,i}^{(j)}$ der j -te Eintrag des Vektors $s_i^{(j)}$ und daher ein Skalar.

Der Lanczos-Algorithmus wird nach Schritt j abgebrochen entweder sobald *alle* ($i = 1, \dots, j$) Residuen $r_i^{(j)}$ die vorgegebene Genauigkeit (z.B. $\varepsilon = 10^{-12}$) in einer geeigneten Norm erfüllen oder nach einer fixen Anzahl an Iterationen $m \in \mathbb{N}$. Aufgrund der B^{-1} -Orthonormalität der Basis V_j kann als Abbruchkriterium das Residuum in der B^{-1} -Norm gewählt werden, denn es gilt

$$\|r_i^{(j)}\|_{B^{-1}} = |\beta_j s_{j,i}^{(j)}| \quad \text{für } i = 1, \dots, j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.10)$$

Es wird nun ein Pseudo-Code der Methode, siehe [3, Algorithmus 5.5], angegeben:

Lanczos shift-and-invert

```

1 Setze Startvektor  $r = y_0$ , berechne  $q = Br$  und  $\beta_0 = \|r\|_B$ .
2 for  $j = 1, \dots, m$ 
3    $w_j = r/\beta_{j-1}$ ,  $v_j = q/\beta_{j-1}$ 
4    $r = (A - \eta B)^{-1} v_j$  //PARDISO, GMRES
5    $r = r - w_{j-1} \beta_{j-1}$ 
6    $\alpha_j = (r, v_j)$ 
7    $r = r - w_j \alpha_j$ 
8   Falls notwendig, führe Reorthogonalisierung bzgl.
9      $B$ -Skalarprodukt durch:  $r = r - (r, w_i)_B w_i$  für  $i = 1, \dots, j - 1$ 
10   $q = Br$ 
11   $\beta_j = \|r\|_B$ 
12  Berechne Eigenpaar  $(\xi_i^{(j)}, s_i^{(j)})$  von  $T_j$  für  $i = 1, \dots, j$ 
13  Überprüfe Abbruchkriterium nach (4.10):
14    Falls  $|\beta_j s_{j,i}^{(j)}| \leq \varepsilon$  für alle  $i = 1, \dots, j \rightarrow$  STOP
15 end for
16 Berechne approximierte Eigenwerte  $\lambda_i \approx \frac{1}{\xi_i^{(j)}} + \eta$  für  $i = 1, \dots, j$ 
17 Ggf.: Berechne approx. Eigenvektoren  $x_i \approx W_j s_i^{(j)}$  für  $i = 1, \dots, j$ 

```

Bemerkung 4.12. Die Matrix $\tilde{A} = A_{FE} - \eta \varrho_S M_{FE}$ wird bereits vor der Schleife – also nur *einmal* – faktorisiert, während für die MVM in Zeile 4 einmal *pro* Iteration das GMRES-Verfahren aufgerufen wird.

Bemerkung 4.13. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Tridiagonalmatrix T_j erfolgt hier mittels einer LAPACK-Methode, siehe [2] bzw. http://www.netlib.org/lapack/explore-html/d7/d48/dstev_8f.html

Bemerkung 4.14. Die Reorthogonalisierung in Zeile 8–9 ist dann notwendig, wenn die Basisvektoren w_j aufgrund von Rundungsfehlern in der Gleitkommaarithmetik ihre B –Orthogonalität zueinander verlieren. Dies kann zur Folge haben, dass bereits gefundene Eigenwerte erneut berechnet werden und die Konvergenz gegen die gesuchten Eigenwerte verloren geht.

Bemerkung 4.15. Die hier angewendete Variante der Reorthogonalisierung wird „volle Reorthogonalisierung“ genannt, vgl. [3, Abs. 4.4.4], da der Vektor r gegen alle zuvor berechneten Vektoren w_1, \dots, w_{j-1} B –orthogonalisiert wird. Bei der Implementierung des Lanczos–Verfahrens und Anwendung auf das GHEP (4.1) wurde die volle Reorthogonalisierung ausgeführt, sobald der Vektor r die B –Orthogonalität zur Genauigkeit von 10^{-12} verletzt.

Der folgende Satz, siehe [14, Theorem 6.4], erlaubt eine Abschätzung der Differenz zwischen den exakten und den mittels des Lanczos–Verfahrens approximierten Eigenwerten des Eigenwertproblems

$$Mx = \lambda x \quad (4.11)$$

mit der symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Satz 4.16. *Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von (4.11) und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Seien $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_n$ die approximierten Eigenwerte nach j Iterationsschritten des Lanczos–Prozesses. Dann gilt die Ungleichung*

$$0 \leq \xi_i - \lambda_i \leq (\lambda_n - \lambda_1) \left(\frac{\kappa_i \tan \phi_i}{C_{j-1}(1 + 2\zeta_i)} \right)^2$$

mit

$$\kappa_1 = 1 \quad \text{und} \quad \kappa_i = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_n - \xi_k}{\lambda_i - \xi_k} \quad \text{für } i > 1$$

und mit

$$\cos \phi_i = |(x_i, x_0)|$$

mit dem Startvektor x_0 des Lanczos–Prozesses und mit dem Faktor

$$\zeta_i = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_n - \lambda_{i+1}}$$

und dem Tschebyscheff–Polynom $(j - 1)$ –ten Grades $C_{j-1}(\cdot)$.

Bemerkung 4.17. Aus Satz 4.16 lässt sich schließen, dass jene Eigenwerte, die am Rand des Spektrums liegen, und jene, die gut von den anderen isoliert sind, besonders gut approximiert werden, siehe auch [20].

Bemerkung 4.18. Das Konvergenzresultat aus Satz 4.16 lässt sich auch auf das Lanczos–Verfahren für das GHEP (4.1) übertragen. Für Konvergenzaussagen für das Arnoldi–Verfahren sei auf [14, Kap. 6] verwiesen.

5 Numerische Ergebnisse

Das GHEP (4.1) wird nun mit den in Kapitel 4.2 beschriebenen Algorithmen, dem Arnoldi- und Lanczos-Verfahren, gelöst. Die approximierten Eigenwerte $\lambda_h^{(k)}$ werden aufsteigend geordnet graphisch dargestellt. Weiters werden für jedes Verfeinerungslevel L die Anzahl der Freiheitsgrade #FG bei der FE/BE-Diskretisierung, die Anzahl der benötigten Iterationen #IT und die Anzahl k der konvergierten Eigenwerte angegeben. Die maximale Iterationszahl wurde durch 150 begrenzt. Die Rechenzeiten (in Sekunden) $t_{assembly}$ für die Assemblierung der FE/BE-Matrizen, t_{GMRES} für das pro Iteration ein Mal aufgerufene GMRES-Verfahren und $t_{eigensolver}$ für die insgesamt benötigte Zeit des jeweiligen Algorithmus werden ebenso angeführt.

Außerdem werden die Eigenwerte für verschiedene *Shifts* $\eta > 0$, siehe zur Spektral-Transformation (4.3), approximiert.

Es ist zu beachten, dass die Eigenwerte des Ausgangsproblems (1.12a)–(1.14) mit ω^2 bezeichnet wurden und daher η in der Größenordnung des Quadrats der gesuchten Eigenwerte liegt.

Für das Gebiet $\Omega_S \subset \mathbb{R}^3$ wurde eine sphärische Schale (Stahl), die vollständig vom Fluid (Wasser) $\Omega_F \subset \mathbb{R}^3$ umgeben ist, gewählt, siehe auch Abbildung 1.1.

Die Materialparameter sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Dichte } \rho_F &= 1000 \text{ kg/m}^3, \\ \text{Dichte } \rho_S &= 7669 \text{ kg/m}^3, \\ \text{Elastizitätsmodul } E &= 207 \text{ kN/mm}^2, \\ \text{Querkontraktionszahl } \nu &= 0.3. \end{aligned}$$

Es sollen (mindestens) 100 verschiedene Eigenwerte des transformierten Problems

$$Cx = \lambda x$$

mit $C = B(A - \eta B)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ approximiert werden. Die Ergebnisse, die das Arnoldi- und das Lanczos-Verfahren für 2 Verfeinerungslevel in der Diskretisierung, für einen Zufallsstartvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und einer Toleranzgrenze für die Residuen von $\varepsilon = 10^{-12}$ liefern, werden in den folgenden Abschnitten präsentiert.

Bemerkung 5.1. Die Rechenzeiten für die Faktorisierung (Invertierung) der Matrix $\tilde{A} = A_{FE} - \eta \rho_S M_{FE}$ mittels PARDISO sowie die Invertierung der Matrix \tilde{D}_{BE} mittels LAPACK werden in den Ergebnissen nicht angeführt da sie mit je unter 0.5 Sek. keinen wesentlichen Beitrag zur Gesamtzeit leisten.

Bemerkung 5.2. Beim Lösen des linearen Gleichungssystems (4.4) wurde die Anzahl der GMRES-Iterationen durch 200 begrenzt. Die Konvergenz zur residualen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ wurde (sowohl beim Arnoldi- als auch beim Lanczos-Verfahren) bereits nach maximal 43 GMRES-Iterationen auf Level 1 bzw. nach maximal 54 GMRES-Iterationen auf Level 2 erreicht.

5.1 Arnoldi

Tabelle 5.1: Arnoldi für $\eta = 122500 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 350$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 1.0	139	109	100
2	12027	2020	2887	< 21.5	2531	113	100

Tabelle 5.2: Arnoldi für $\eta = 1960000 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 1400$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 2.8	346	120	100
2	12027	2020	2887	< 68.7	7150	108	100

Tabelle 5.3: Arnoldi für $\eta = 3062500 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 1750$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 2.7	292	105	100
2	12027	2020	2887	< 88.9	8839	104	100

Tabelle 5.4: Arnoldi für $\eta = 4.41 \cdot 10^6 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 2100$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 3.1	331	107	100
2	12027	2020	2887	< 112	11189	106	100

Mit Ausnahme des *Shifts* $\eta = 122500$, wo der zeitliche Aufwand für die Assemblierung der FE/BE-Matrizen höher ist als für den Eigenlöser selbst, zeigt sich, dass die meiste Zeit beim Lösen des Gleichungssystems (4.4) (einmal pro Iteration) mittels des GMRES-Verfahrens verbraucht wird. Dies ist auf die sich verschlechternde Kondition

der Matrix $\tilde{A}^{-1} = (A_{FE} - \eta \varrho_S M_{FE})^{-1}$ für wachsende *Shifts* η zurückzuführen. Die Zeiten für die LAPACK-Routine zur Berechnung der Eigenpaare der im Arnoldi-Verfahren auftretenden Hessenberg-Matrizen tragen mit weniger als 0.02 Sek. pro Iteration (für beide Level) nur einen sehr geringen Anteil zur Gesamtrechnzeit bei. An der Anzahl der Iterationen #IT ist zu erkennen, dass der Arnoldi-Algorithmus für die hier verwendeten *Shifts* η bereits vor den maximalen 150 Iterationen abbricht da die vorgegebene Anzahl von 100 gesuchten Eigenwerten erreicht wurde. Die folgenden Plots visualisieren die Eigenwertapproximationen, deren Residuen der vorgegebenen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ genügen, für verschiedene *Shifts* $\eta > 0$ und für zwei Verfeinerungslevel:

5.1.1 Verfeinerungslevel 1

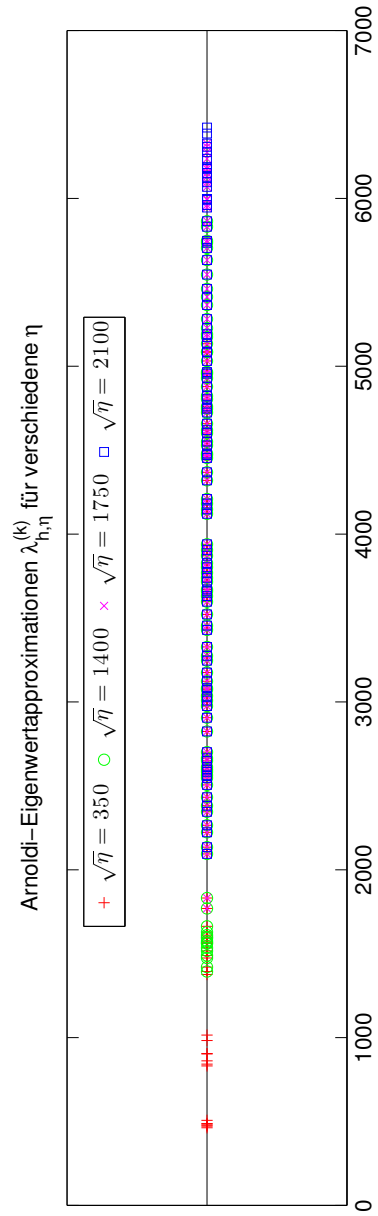


Abbildung 5.1: Arnoldi: Level 1

5.1.2 Verfeinerungslevel 2

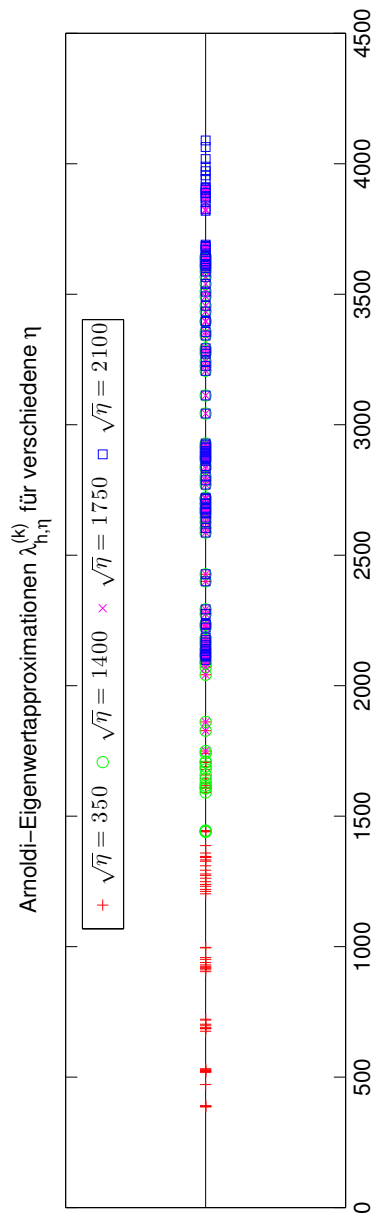


Abbildung 5.2: Arnoldi: Level 2

5.2 Lanczos

Tabelle 5.5: Lanczos für $\eta = 122500 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 350$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 1.1	151	116	100
2	12027	2020	2887	< 22.7	2983	127	100

Tabelle 5.6: Lanczos für $\eta = 1960000 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 1400$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 2.5	424	138	100
2	12027	2020	2887	< 55.5	8660	150	69

Tabelle 5.7: Lanczos für $\eta = 3062500 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 1750$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 2.7	485	145	100
2	12027	2020	2887	< 69.4	10386	150	80

Tabelle 5.8: Lanczos für $\eta = 4.41 \cdot 10^6 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 2100$

L	#FG _{fem}	#FG _{bem}	t _{assembling}	t _{GMRES}	t _{eigensolver}	#IT	k
1	2961	492	279	< 3.4	575	149	100
2	12027	2020	2887	< 86.6	12121	150	54

Das Lanczos–Verfahren liefert für das Level 1 immer 100 Eigenwertapproximationen, deren Residuen die vorgegebene Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ unterschreiten. Auf Level 2 konvergieren nach 150 Iterationen (abhängig vom *Shift* η) zumindest 54 Eigenwerte zur vorgegebenen Genauigkeit. Es müssen also mehrere *Shifts* (geeignet) gewählt werden um eine fixe Anzahl an Eigenwerten zu approximieren.

Die Zeiten für die LAPACK–Routine zur Berechnung der Eigenpaare der im Lanczos–Verfahren auftretenden Tridiagonalmatrizen steuern mit weniger als 0.01 Sek. pro Iteration (für beide Level) nur einen sehr geringen Anteil zur Gesamtrechnzeit bei. Die folgenden Plots visualisieren die Eigenwertapproximationen, deren Residuen der vorgegebenen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ genügen, für verschiedene *Shifts* $\eta > 0$ und für zwei Verfeinerungslevel:

5.2.1 Verfeinerungslevel 1

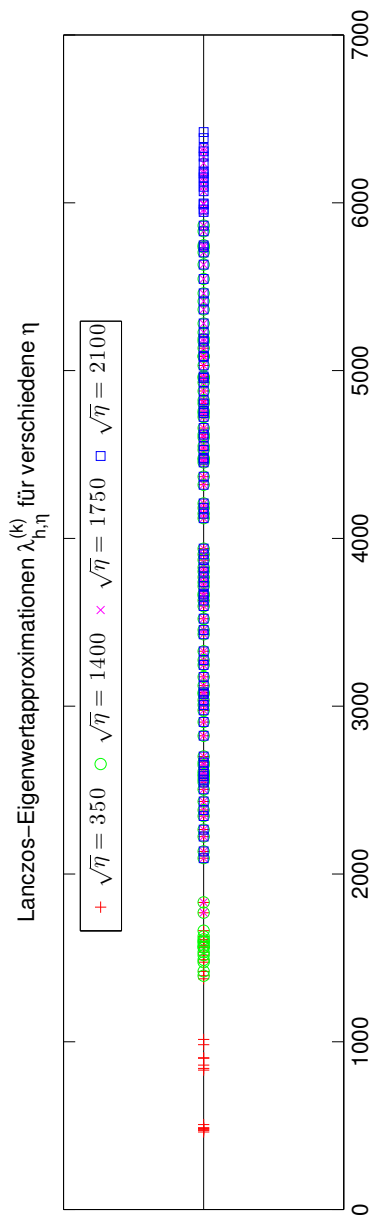


Abbildung 5.3: Lanczos: Level 1

5.2.2 Verfeinerungslevel 2

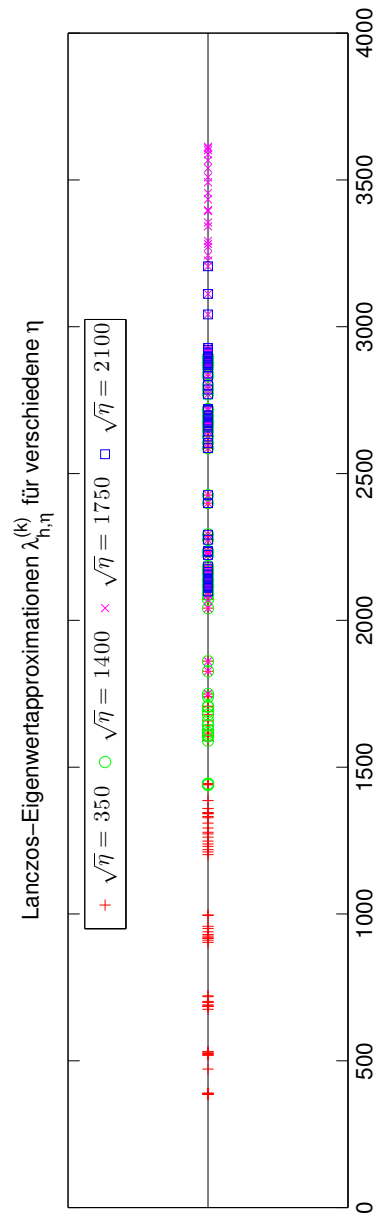


Abbildung 5.4: Lanczos: Level 2

5.3 Vergleich der Verfahren

Ein Vergleich des Arnoldi- mit dem Lanczos-Algorithmus für den *Shift* $\eta = 122500$ zeigt, dass sich der zeitliche Aufwand pro Iteration etwa die Waage hält. (Bei der Anwendung der beiden Verfahren sind jeweils 100 Eigenwerte zur vorgegebenen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-12}$ konvergiert.)

Tabelle 5.9: Arnoldi und Lanczos für $\eta = 122500 \Rightarrow \sqrt{\eta} = 350$

L	$\#FG_{fem}$	$\#FG_{bem}$	$t_{Arnoldi}$	$t_{Lanczos}$	$\#IT_{Arnoldi}$	$\#IT_{Lanczos}$	\tilde{t}_A	\tilde{t}_L
1	2961	492	139	151	109	116	1.28	1.3
2	12027	2020	2531	2983	113	127	22.4	23.5

In Tabelle 5.9 bezeichnen die Parameter \tilde{t}_A und \tilde{t}_L die durchschnittlich benötigte Zeit in Sek. pro Iteration des Arnoldi- bzw. Lanczos-Algorithmus.

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis, 6., überarbeitete Auflage*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edition, 1999.
- [3] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems*. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [4] D. Boffi. *Finite element approximation of eigenvalue problems*. Acta Numerica, 2010.
- [5] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis, 2., korrigierte und überarbeitete Auflage*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [6] C. Eck, H. Garcke, and P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer, Berlin Heidelberg, second edition, 2011.
- [7] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. *Boundary integral equations*. Springer, Berlin, 2008.
- [8] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer, New York, 1998.
- [9] O. Karma. Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. I. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 17(3-4):365–387, 1996.
- [10] A. Kimeswenger. *Akustik–Struktur–Interaktion im zeitharmonischen Bereich*. Masterarbeit, Technische Universität Graz, Juni 2011.
- [11] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [12] G. Of and O. Steinbach. Coupled FE/BE formulations for the fluid–structure interaction. *Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik*, pages 1–8, 2009.
- [13] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, Philadelphia, PA, second edition, 2003.

-
- [14] Y. Saad. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Revised Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 2011.
- [15] M. H. Sadd. *Elasticity, Theory, Applications, and Numerics*. Academic Press, Burlington, MA 01803, 2009.
- [16] O. Schenk, M. Bollhöfer, and R.A. Römer. On large-scale diagonalization techniques for the anderson model of localization. *SIAM Rev.*, 50(1):91–112, Feb 2008.
- [17] O. Schenk, A. Kuzmin, and M. Luisier. Fast methods for computing selected elements of the greens function in massively parallel nanoelectronic device simulations. In F. Wolf, B. Mohr, and D. Mey, editors, *Euro-Par 2013 Parallel Processing*, volume 8097 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 533–544. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [18] O. Schenk, A. Wächter, and M. Hagemann. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Computational Optimization and Applications*, 36(2-3):321–341, 2007.
- [19] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [20] D. S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. John Wiley and Sons, New York, second edition, 2002.
- [21] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature