

Michael ROYER

Aktuarielle Analyse der  
Risikomarge unter Solvency II  
im Bereich der  
Schaden/Unfall-Versicherung

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



Technische Universität Graz

Betreuer:

O.Univ.-Prof Dr.phil. Robert TICHY

Institut für Analysis und Computational Number Theory

Graz, im Dezember 2012

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....  
.....  
(Unterschrift)

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....  
date  
.....  
(signature)

# Vorwort

Derzeit durchlebt die Versicherungsbranche im Rahmen der Solvabilitätsregeln unter Solvency II einen kompletten Umbruch. Entsprechend den jüngsten Entwicklungen in der Finanz- und Versicherungsbranche soll im Zuge des Solvency II Projekts der Europäischen Union eine 'richtige' Messung und Handhabung von Risiken erreicht werden. Dazu werden gezielt Regelungen für die Bewertung von Forderungen und Verbindlichkeiten, einschließlich versicherungstechnischer Rückstellungen aufgestellt. Die versicherungstechnischen Rückstellungen bestehen aus einem sogenannten "besten Schätzwert" und einer Risikomarge.

Der Fokus dieser Diplomarbeit liegt in der Untersuchung der Risikomarge und der unter Solvency II vorgeschlagenen Methoden zu deren Berechnung.

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Robert Tichy und Herrn Doktor Markus Hofer bedanken, die mich bei meiner Diplomarbeit unterstützt, mir mit wertvollen Hinweisen und Tipps zur Seite gestanden und als Betreuer meiner Arbeit fungiert haben.

Mein Dank geht auch an Herrn Dr. Jürgen Hartinger, der mir dieses äußerst interessante Thema vorgeschlagen hat und mich mit seinen Anregungen sehr gut weitergeholfen hat.

Meinen besonderen und tiefen Dank möchte ich meinen Eltern aussprechen, die mir mein Studium ermöglicht haben und mit aufbauenden Worten für mein seelisches Wohl gesorgt haben.

Nicht zuletzt möchte ich all meinen Freunden danken, die mich während dieser Zeit unterstützt und für die nötige Ablenkung gesorgt haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Solvency II</b>	<b>7</b>
1.1	Einleitung . . . . .	7
1.2	Umsetzung von Solvency II . . . . .	8
1.3	Grundlagen . . . . .	9
1.4	SCR . . . . .	10
1.4.1	Grundstruktur . . . . .	10
1.4.2	Standardformel . . . . .	11
1.4.3	Interner Ansatz . . . . .	13
1.5	Versicherungstechnische Rückstellungen unter Solvency II . . . . .	14
1.5.1	Allgemeines . . . . .	14
1.5.2	Best Estimate . . . . .	16
1.5.3	Risikomarge . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Grundlagen Risikomarge</b>	<b>18</b>
2.1	Zielsetzungen der Risikomarge . . . . .	18
2.1.1	Schutz des Versicherungsnehmers . . . . .	19
2.1.2	Preis der Gefahrentragung - Veräußerungspreis . . . . .	26
2.2	Gewünschte Eigenschaften . . . . .	26
2.3	Mögliche Ansätze für die Risikomarge . . . . .	27
2.3.1	Historische Entwicklung . . . . .	28
2.4	Diskussion der Ansätze . . . . .	29
2.4.1	Quantilsmethoden . . . . .	29
2.4.2	Standardabweichung . . . . .	30
2.4.3	CoC-Methode . . . . .	30
2.4.4	Diskontierungsmethoden . . . . .	31
2.5	Prämienkalkulationsprinzipien . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Die Cost-of-Capital Methode</b>	<b>36</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	36
3.2	Vereinfachte Methoden - Simplifications . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Stochastische Analyse der CoC-Methode</b>	<b>41</b>
4.1	Annahmen . . . . .	41
4.2	Schadenreservierung . . . . .	41
4.2.1	Grundlagen . . . . .	41
4.2.2	Klassische Notation . . . . .	42
4.2.3	Basismethode: Chain-Ladder(CL) Verfahren . . . . .	44
4.2.4	Die Schadenabwicklung . . . . .	46
4.3	Mathematische Beschreibung der Simplifications . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Analyse von Risikomargemodellen</b>	<b>51</b>
5.1	Modell 1: Ansatz von Salzmann und Wüthrich . . . . .	51
5.1.1	Bayes'sches Chain Ladder Modell . . . . .	52
5.1.2	Gamma-Gamma Bayes Chain Ladder Modell . . . . .	54
5.1.3	Der Parameter Update Prozess . . . . .	55
5.1.4	Schätzung des Gesamtschadens . . . . .	56
5.1.5	CoC-Marge . . . . .	57
5.1.6	Vorbereitungen . . . . .	58
5.1.7	Vollständige Risikomargeberechnung . . . . .	61
5.1.8	Simplification <i>S1.1</i> . . . . .	64
5.1.9	Simplification <i>S1.2</i> . . . . .	66
5.1.10	Simplification <i>S2</i> . . . . .	67
5.1.11	Simplification <i>S3</i> . . . . .	69
5.2	Modell 2: Risikomargemodell basierend auf dem "stochastischen Re-Reserving" . . . . .	70
5.2.1	Modellannahmen . . . . .	70
5.2.2	Berechnung der Risikomarge . . . . .	70
5.2.3	Simplification <i>S1</i> . . . . .	75
5.2.4	Simplification <i>S2</i> . . . . .	75
5.2.5	Simplification <i>S3</i> . . . . .	75
5.3	Modell 3: Risikomargeberechnung mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverzerrung . . . . .	77
5.3.1	Modellannahmen . . . . .	78
5.3.2	Best Estimate Reserveberechnung . . . . .	79
5.3.3	Risikoadjustierte Reserven und Risikomarge . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Datenbeispiele</b>	<b>84</b>
6.1	Modell 1 aus Kapitel 5.1 . . . . .	84
6.1.1	Diskussion der Resultate . . . . .	85
6.2	Modell 2 aus Kapitel 5.2 . . . . .	89
6.2.1	Diskussion der Resultate . . . . .	89
6.3	Zusammenfassung . . . . .	91

<b>A Verteilungen</b>	<b>i</b>
A.1 Die Gammaverteilung . . . . .	i
A.2 Die stetige Gleichverteilung . . . . .	i

# Kapitel 1

## Solvency II

Als Hauptquelle für den Inhalt des ersten Kapitels wurden insbesondere die von der EU ausgehende Richtlinie 2009/138/EG [17] und die von CEIOPS<sup>1</sup> erarbeiteten QIS5 Technical Specifications [6] verwendet. Als weiterführende Literatur dienten die Bücher [3], [8], [18] und [23].

### 1.1 Einleitung

Solvency II bezeichnet ein Projekt der europäischen Kommission, welches den europäischen Versicherern umfangreiche Solvabilitätsvorschriften auferlegt. Solvabilität bzw. Solvenz bezeichnet die Fähigkeit eines Unternehmens seinen finanziellen Pflichten nachzukommen. Dazu braucht das Unternehmen genügend hohes Solvabilitäts- bzw. Eigenkapital. Die seit 1. Jänner 2004 geltenden unter Solvency I bekannten Vorschriften werden dabei tiefgreifend überarbeitet.

Mit dieser Reform wird für alle EU Mitgliedsstaaten eine gemeinsame Solvabilitäts- bzw. Rechtsgrundlage angestrebt, um die Ausübung des Versicherungsgeschäfts im gesamten Binnenmarkt zu ermöglichen bzw. transparenter zu gestalten.

Die derzeit geltenden statischen Solvabilitätsvorschriften, welche großteils auf Schaden- bzw. Prämienvolumen basieren, werden durch ein umfassendes risikobasiertes System ersetzt. Ziel ist es die Risiken eines Unternehmens zu identifizieren, quantifizieren und daraus die Höhe des Eigenkapitals zu bestimmen. Das berechnete Eigenkapital soll einen ungünstigen Verlauf der auf

---

<sup>1</sup>Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors - ein unabhängiger Ausschuss für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung. Die Funktion von CEIOPS wird seit dem 1. Januar 2011 von EIOPC (European Insurance and Pensions Committee - Europäischer Ausschuss für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung) übernommen

das Unternehmen einwirkenden Risiken bzw. extreme Ereignisse decken. Jene Unternehmen, die im Zuge ihrer Geschäftstätigkeit größere Risiken eingehen, müssen ein entsprechend höheres Eigenkapital bereitstellen. Im Vordergrund von Solvency II steht das Anliegen den Versicherungsnehmer und Anspruchsberechtigten einen angemessenen Schutz zu bieten. Des Weiteren wird die Schaffung eines stabilen und fairen Versicherungsmarktes angestrebt.

## 1.2 Umsetzung von Solvency II

Die Umsetzung von Solvency II erfolgt mit Hilfe des sogenannten Lamfalussy-Verfahrens. Dieses dient der Beschleunigung und Vereinfachung des EU-Gesetzgebungsprozesses. Das Lamfalussy-Verfahren setzt sich aus folgenden vier Stufen zusammen:

Im Zuge der ersten Stufe entstand eine von der EU entlassene Rahmenrichtlinie ([17]), welche die rechtlichen Vorschriften zu Solvency II regelt. Sie enthält die grundsätzlichen Prinzipien und Normen. Gemäß aktuellem Zeitplan muss die Richtlinie bis zum 01.01.2014 in nationales Recht umgesetzt werden.

Auf Basis der Rahmenrichtlinie wurden in Form der zweiten Stufe die technischen Details erarbeitet, die detaillierter auf die technische Umsetzung der Richtlinie eingehen.

In der dritten Stufe wurden von EIOPA<sup>2</sup> Empfehlungen, Richtlinien und Standards für die in Stufe zwei vorgegebenen Durchführungsbestimmungen erarbeitet. Ziel ist es hierbei für eine konsistente Durchsetzung auf europäischer Ebene zu sorgen. Die entstehenden Leitlinien sind als solche rechtlich nicht bindend, doch die Aufsichtsbehörden sind verpflichtet, alle erforderlichen Anstrengungen zu unternehmen um diesen Leitlinien nachzukommen. Stufe vier regelt die Aufsicht bzgl. Umsetzung in den Mitgliedsstaaten.

Im Laufe der Jahre wurden Feldstudien (QIS(quantitative impact studies)-Studien) zusammen mit sogenannten Technical Specifications (die aktuellste Ausgabe ist [6]) ausgesandt und kontinuierlich überarbeitet. Das Ziel der Feldstudien war es, die Angemessenheit der in den Technical Specifications vorgeschlagenen Berechnungsmethoden zu testen, die Praktikabilität zu überprüfen und aufbauend auf den Ergebnissen Adaptierungen vorzunehmen. Die Versicherungsunternehmen haben durch die Teilnahme an den Studien die Möglichkeit sich auf die endgültige Umsetzung vorzubereiten. Dabei können die dazu nötigen Umstellungen und Aufwendungen im Unternehmen

---

<sup>2</sup>European Insurance and Occupational Pensions Authority - Europäische Aufsichtsbehörde für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung



getestet werden. Im Jahr 2010 wurde die letzte von insgesamt sechs (fünf internationale und eine nationale) Studien durchgeführt.

## 1.3 Grundlagen

Die Grundstruktur von Solvency II entspricht in etwa dem 3-Säulen-Ansatz unter Basel II<sup>3</sup>. Im Gegensatz zur Bankenbranche steht bei Solvency II das ganzheitliche Risikoprofil und nicht die Einzelrisiken im Vordergrund. Die Grundelemente teilen sich in folgende Bereiche:

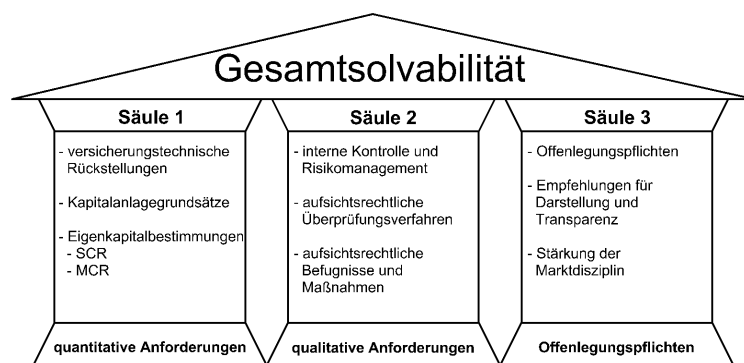


Abbildung 1.1: Die 3-Säulen-Struktur von Solvency II

- Säule 1

Die erste Säule widmet sich den quantitativen Fragestellungen aus Solvency II. Sie enthält das Regulativ zur marktnahen Bewertung von Aktiva und Passiva, versicherungstechnischen Rückstellungen und den tatsächlich vorhandenen Eigenmitteln. Weiters wird die Berechnung des SCR (solvency capital requirement) und des MCR (minimum capital requirement) detailliert angeführt. Das MCR stellt die minimale Höhe des Eigenkapitals dar, deren Unterschreitung ein nicht mehr annehmbares Risiko für Versicherungsnehmer zur Folge hat und aufsichtsrechtliche Maßnahmen, wie beispielsweise den Entzug der Konzession, mit sich bringt. Das SCR bezeichnet das Zielsolvvenzkapital, welches als angemessene Sicherheit für Versicherungsnehmer, die Zahlungsverpflichtungen bei einer sehr ungünstigen Entwicklung der Risiken gewährleisten soll.

<sup>3</sup>Gesamtheit der Solvabilitätsvorschriften im Bereich des Bankenwesens

- Säule 2  
Die zweite Säule beschreibt die qualitativen Anforderungen an die Versicherungsunternehmen. Eine EU-weite Harmonisierung der aufsichtsrechtlichen Überprüfungsverfahren steht hierbei im Vordergrund. Unter anderem muss der Versicherer das Vorhandensein einer Geschäfts- und Risikostrategie, einer adäquaten Aufbau- und Ablauforganisation und eines internen Steuerungs- und Kontrollsystems gewährleisten; bspw. in Form einer angemessenen Qualifikation der Vorstände. Zudem muss eine interne Revision und ein Notfallplan vorhanden sein.
- Säule 3  
Zusätzlich zur Quantifizierung des Solvenzkapitals und anschließender Sicherstellung eines angemessenen Risikomanagements ist schließlich eine entsprechende Berichterstattung des Unternehmens notwendig. Die Anforderungen dazu werden in Säule 3 geregelt. Dazu gehören Offenlegungs- und Transparenzvorschriften. Ziel ist es den Aufsichtsbehörden und Versicherungsnehmern ein umfassendes Bild der Risiken des Versicherers zu vermitteln und die Marktdisziplin zu stärken.

## 1.4 SCR

### 1.4.1 Grundstruktur

Laut [17] gilt für die Höhe der Eigenkapitals (SCR):

” ...die Solvenzkapitalanforderung sollte bei dem ökonomischen Kapital angesetzt werden, das Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen halten müssen, um sicherzustellen, dass es höchstens in einem von 200 Fällen zur Insolvenz kommen kann oder diese Unternehmen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5% in den kommenden zwölf Monaten weiterhin in der Lage sein werden, ihren Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern und Begünstigten nachzukommen. ”

Als dazu nötiges Risikomaß wird der VaR (Value at Risk; siehe Definition 2.4.1) vorgegeben.

Für die Berechnung des SCR ist eine von der EIOPA erarbeitete Standardformel (siehe [17]) vorgesehen.

## 1.4.2 Standardformel

Die Standardformel umfasst alle wesentlichen Risiken des Unternehmens und teilt sie in einzelne (Risiko-)Module bzw. Submodule ein. Pro Risikomodul  $i$  wird ein eigenes  $SCR_i$  berechnet. Das gesamte SCR des Unternehmens setzt sich schließlich aus den einzelnen  $SCR_i$ s zusammen.

Der Hauptbestandteil des SCR ist das BSCR (Basissolvenzkapital). Das BSCR bildet gemeinsam mit den Größen  $Adj^4$  und  $SCR_{op}$ <sup>5</sup> das gesamtheitliche SCR. Das BSCR gliedert sich wiederum in folgende Bereiche:

- Lebensversicherungstechnisches Risikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_1$ ),
- Nichtlebensversicherungstechn. Risikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_2$ ),
- Krankenversicherungstechn. Risikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_3$ ),
- Marktrisikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_4$ ),
- Ausfallsrisikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_5$ ),
- Immaterielle Vermögenswerte Risikomodul (Kapitalerfordernis  $SCR_6$ ).

Diese teilen sich abermals in mehrere Submodule auf. Der genauere Aufbau ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Für jedes Untermodul muss ein bestimmtes Kapitalerfordernis berechnet werden. Das BSCR wird schließlich folgendermaßen bestimmt:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq 6} \text{Korr}_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}.$$

Beim Aggregieren der Untermodule werden vordefinierte Korrelationen  $\text{Korr}_{i,j}$  verwendet. Da die Korrelationen mit Ausnahme von  $\text{Korr}_{i,i}$ , wobei  $1 \leq i \leq 6$ , allesamt kleiner als eins sind, entsteht ein Diversifikationseffekt<sup>6</sup>. Es gilt:

$$\sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq 6} \text{Korr}_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} < \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq 6} SCR_i \cdot SCR_j} = \sum_{1 \leq i \leq 6} SCR_i.$$

---

<sup>4</sup>Anpassung für den risikoabsorbierenden Effekt der versicherungstechnischen Rückstellungen und latenten Steuern

<sup>5</sup>Kapitalerfordernis für das operationelle Risiko

<sup>6</sup>Diversifikation bezeichnet jenen Effekt, der dazu führt, dass die Aggregation von mehreren Risikogrößen zu einem Risiko führt, welches kleiner ist als die Summe der einzelnen Risiken.

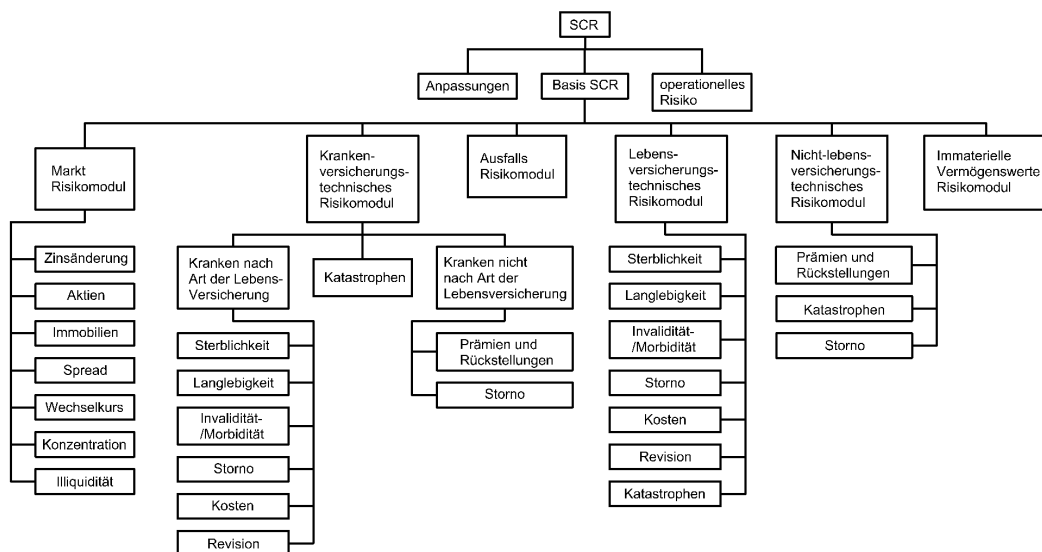


Abbildung 1.2: Standardformel

Neben dem SCR wird auch das MCR<sup>7</sup> bestimmt, welches die unterste Schwelle des Eigenkapitalbedarfs darstellt. Die Höhe des MCR entspricht dem VaR der Basiseigenmittel zu einem Konfidenzniveau von 85% über ein Jahr. Die zulässige Höhe des MCR muss zumindest 25%, darf aber maximal 45% der Höhe des SCR betragen. Die genaueren Vorgehensweisen bei der Berechnung des Kapitalerfordernisses in den einzelnen Modulen sind in den QIS 5 Technical Specifications [6] zu finden.

Der Fokus dieser Diplomarbeit richtet sich auf das Modul der Nichtlebensversicherung.

Dieses Modul setzt sich aus den folgenden Risiken zusammen (Definition laut Solvency II Rahmenrichtlinie [17]):

- Prämienrisiko:

” Risiko eines Verlustes oder einer nachteiligen Veränderung des Werts der Verbindlichkeiten, das sich aus Schwankungen in Bezug auf das Eintreten, die Häufigkeit und die Schwere der versicherten Ereignisse und in Bezug auf das Eintreten und den Betrag der Schadenabwicklung ergibt.”

<sup>7</sup>Minimum Capital Requirement - minimales Kapitalerfordernis

- Reserverisiko:

” Risiko eines Verlustes oder einer nachteiligen Veränderung des Werts der Versicherungsverbindlichkeiten, das sich aus Schwankungen in Bezug auf das Eintreten, die Häufigkeit und die Schwere der versicherten Ereignisse und in Bezug auf das Eintreten und den Betrag der Schadenabwicklung ergibt.”

- Naturkatastrophenrisiko:

” Risiko eines Verlustes oder einer nachteiligen Veränderung des Werts der Versicherungsverbindlichkeiten, das sich aus einer signifikanten Ungewissheit in Bezug auf die Preisfestlegung und die Annahmen bei der Rückstellungsbildung für extreme oder außergewöhnliche Ereignisse ergibt.”

### 1.4.3 Interner Ansatz

Im Allgemeinen ist ein Versicherungsunternehmen nicht dazu verpflichtet sich an den Standardansatz zu halten. Die Versicherungsunternehmen können interne Modelle für die Berechnung von einem oder mehreren Risikomodulen oder Untermodulen verwenden.

Interne Modelle bedürfen einer Genehmigung der Aufsicht. Die dazu nötigen Anforderungen beziehen sich auf die statistischen Qualitätsstandards, Kalibrierungsstandards, Zuordnung von Gewinnen und Verlusten, Validierungs- und Dokumentationsstandards. Genauere Details sind in [17] zu finden.

Der Vorteil eines internen Modells ist, dass eine höhere Risikosensibilität erreicht werden kann, falls das Risikoprofil des betreffenden Versicherungsunternehmens wesentlich von den der Berechnung mit der Standardformel zugrunde liegenden Annahmen abweicht (vgl. mit Artikel 119 in [17] ).

## 1.5 Versicherungstechnische Rückstellungen unter Solvency II

### 1.5.1 Allgemeines

Zweck der versicherungstechnischen Rückstellungen ist es, die dauernde Erfüllung der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen gewährleisten zu können. Was die Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen betrifft, so ergibt sich aus [17] folgende Vorgabe:

” Der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen sollte daher dem Betrag entsprechen, den das Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen zahlen müsste, wenn es seine vertraglichen Rechte und Pflichten unverzüglich an ein anderes Unternehmen übertragen würde. Somit sollte der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen dem Betrag entsprechen, den ein anderes Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen (Referenzunternehmen) erwartungsgemäß benötigen würde, um die zugrunde liegenden Versicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen zu übernehmen und zu erfüllen. ”

Gleichzeitig wird eine Marktkonformität gefordert und eine Konsistenz mit den internationalen Entwicklungen im Rechnungslegungs- und Aufsichtswesen (vgl. IFRS<sup>8</sup>). Bilanziert werden die Rückstellungen schließlich mit dem Fair Value bzw. Zeitwert.

In der Regel entspricht der Fair Value dem Marktpreis der Verpflichtungen aus dem Versicherungsvertrag. Da Versicherungsverträge am Markt im Allgemeinen nicht handelbar sind und Marktpreise demzufolge nicht immer existieren, muss ein eigenes Verfahren zur Bewertung der Verbindlichkeiten verwendet werden. Dieses Verfahren unterliegt folgender hierarchischer Struktur (Genauere Ausführungen zur Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen sind in [18] zu finden):

1. Falls für die Verbindlichkeiten ein aktiver Markt vorhanden ist, werden sie nach dem 'Mark to Market-Prinzip' mit dem Marktpreis bewertet. Dieses Vorgehen liefert jedoch keine aussagekräftigen Ergebnisse, falls der entsprechende Markt nicht liquide genug ist bzw. die vorliegenden Marktwerte in ihrer Qualität nicht zuverlässig sind. Grundvoraussetzung ist in dieser Hinsicht ein vollständiger und fairer Markt.

---

<sup>8</sup>International Financial Reporting Standards: Internationale Rechnungslegungsvorschriften für Unternehmen. Für nähere Informationen siehe [10]

2. Für den Fall, dass kein Marktpreis beobachtbar ist, wird der Fair Value von vergleichbaren Verbindlichkeiten verwendet. Dazu muss der Verlauf und die Höhe der Cashflows möglichst übereinstimmen.
3. Falls keine vergleichbaren Finanztitel vorhanden sind, werden für die Ermittlung des Fair Value wissenschaftliche Bewertungsmodelle in Form eines hypothetischen Marktwertes (Present Value) in Gebrauch genommen. Hierbei spricht man vom 'Mark to Model'-Prinzip. Dazu wird der Barwert aller zukünftigen Cash-flows [Best Estimate (BE) (vgl. Kapitel 1.5.2)] berechnet. Zuzüglich eines Sicherheitszuschlages [Risikomarge (RM) (vgl. Kapitel 1.5.3)] ergibt sich der Wert der Verbindlichkeit.

Die versicherungstechnischen Rückstellungen werden nach einzelnen Geschäftszweigen unterteilt und berechnet. Die Geschäftszweige [Lines of Business (LoBs)] sind in [6] spezifiziert und teilen die Versicherungsverträge in homogene Risikogruppen ein. Der Bereich der Nichtlebensversicherung wird in 12 Zweige unterteilt. Dazu gehören u.a. der Zweig der Einkommenssicherung, Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung, Feuer- und Sachversicherung, Rechtsschutzversicherung und Haftpflichtversicherung.

Die versicherungstechnischen Rückstellungen bestimmen den Großteil der Passiva in der sogenannten Solvency II-Bilanz. Unter Solvency II werden sowohl Aktiva als auch Passiva marktkonform bewertet. Folgendes Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen Marktwert der Aktiva & Passiva und des Solvenzkapitals bzw. deren Aufteilung:

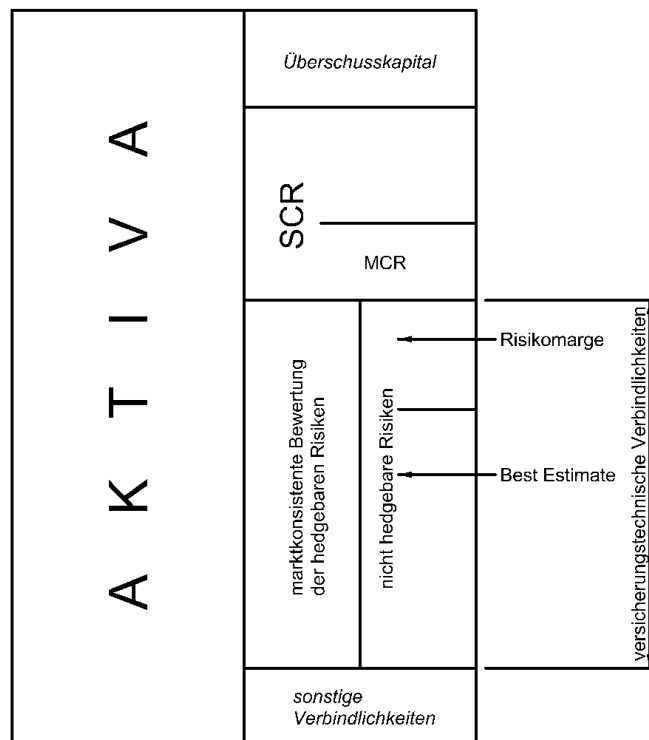


Abbildung 1.3: Solvency II Bilanz

### 1.5.2 Best Estimate

Die Berechnung des Best Estimate erfolgt mithilfe eines Cash-Flow-Modells. Dieses ergibt sich als wahrscheinlichkeitsgewichtete Summe aller zukünftigen mit der Versicherung zusammenhängenden diskontierten Zahlungsströme. Durch das Diskontieren wird der Zeitwert des Geldes miteinbezogen. Als Zinssatz wird eine risikofreie Zinskurve verwendet, die von der Versicherungsaufsicht ermittelt und einheitlich vorgegeben wird. Für die Cashflow-Projektionen werden alle ein- und ausgehenden Zahlungsströme, die über die gesamte Laufzeit der Versicherungsverbindlichkeiten anfallen, miteinbezogen.



### 1.5.3 Risikomarge

Die Risikomarge stellt einen Sicherheitszuschlag dar, der die Unsicherheiten in den zukünftigen Cash-Flows des Best Estimate kompensieren soll. Die Bewertung des Best Estimate und der Risikomarge hat in den meisten Fällen gesondert zu erfolgen. Die separate Berechnung hat nur dann nicht zu erfolgen, falls die zukünftigen Zahlungsströme mit Hilfe von Finanzinstrumenten verlässlich reproduzierbar sind.

Bei einer gesonderten Bewertung der Risikomarge wird der CoC-Ansatz<sup>9</sup> (vgl. Kapitel 3) vorgeschlagen. Laut [17] soll die Risikomarge jene Kapitalkosten ausdrücken, die für das Versicherungsunternehmen zum Halten des benötigten Solvenzkapitals anfallen, welches für die Bedeckung der Versicherungsverpflichtungen (über die gesamte Laufzeit) erforderlich ist.

Das nötige Solvenzkapital soll laut [6] folgende Risiken beinhalten:

- das versicherungstechnische Risiko,
- das unvermeidbare Marktrisiko,
- das Gegenparteiausfallsrisiko (in Bezug auf Rückversicherungsverträge und Zweckgesellschaften),
- das operationelle Risiko.

---

<sup>9</sup>Cost of Capital Approach - Kapitalkostenansatz

# Kapitel 2

## Grundlagen Risikomarge

Wie bereits erläutert bezeichnet die Risikomarge einen Bestandteil bei der Bewertung von Verbindlichkeiten. In Form eines Aufschlags wird sie zum Best Estimate ('besten Schätzwert') der Verbindlichkeiten hinzugefügt. Die Notwendigkeit dieses Aufschlags kann sowohl aus einer mathematischen als auch aus einer ökonomischen Sichtweise motiviert werden.

Die mathematische Sichtweise lässt sich mit Hilfe der Ruintheorie erläutern. Dazu diene insbesondere das Buch "Stochastic Processes for Insurance and Finance" von Rolsky et al. [19]. Die ökonomische Motivation der Risikomarge wurde großteils dem Paper "Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimates and Risk Margins" der IAA (International Actuarial Association) [9] entnommen. Als weiterführende Literatur dienten die Bücher [1], [12] und [15].

### 2.1 Zielsetzungen der Risikomarge

Um das Wesen der Risikomarge besser zu verstehen, ist es nötig näher auf die Eigenart eines Versicherungsvertrages, die Grundlage der Risikomarge, einzugehen.

Beim Abschluss eines Versicherungsvertrags kommt es zu einem Austausch von Prämien und Leistungen. Der Versicherte zahlt dem Versicherer regelmäßig oder einmalig Prämien um bei Eintritt eines spezifizierten, ungewissen Ereignisses, das entweder ihn als Person oder sein Eigentum gefährdet, durch entsprechende (finanzielle) Leistungen seitens des Versicherers geschützt zu werden.

Die Motive der beiden Vertragspartner hinsichtlich des Vertragsabschlusses werden wie folgt beschrieben:

1. Die Sicht des Versicherungsnehmers: Der Versicherungsnehmer ist Risiken ausgesetzt, die in ihrer Häufigkeit, zeitlichem Auftreten und Schwere zufällig sind. Da dieser entweder die Möglichkeit nicht besitzt die Kosten bei Eintreten eines entsprechenden Ereignisses zu tragen oder sie nicht tragen möchte, wird er die Risiken an ein Versicherungsunternehmen übertragen.
2. Die Sicht des Versicherers: Der Versicherer besitzt im Gegensatz dazu die Möglichkeiten diese Risiken durch vielfältige Risikomanagement-techniken zu kontrollieren. Dazu gehören insbesondere das Zusammenschließen von ähnlichen Risiken, das Diversifizieren der Risiken über mehrere Risikogruppen, das Rückversichern und das Verbriefen von Risiken.

Im Sinne der eben vorgestellten Perspektiven gibt es zwei Ansätze für die Bestimmung der Höhe der Risikomarge:

Der erste Ansatz stellt den *Schutz des Versicherungsnehmers* in den Vordergrund und der zweite stellt die Risikomarge in Form einer *Rückstellung für die Kosten bzw. den Preis der Gefahrentragung* dar.

### 2.1.1 Schutz des Versicherungsnehmers

Aus aufsichtsrechtlicher Sicht hat das Versprechen auf Leistungserbringung seitens der Versicherer gegenüber ihren Versicherten höchste Priorität. Zu diesem Zweck werden Methoden und Annahmen, die bei der Bewertung von Verpflichtungen eine große Rolle spielen, von der Aufsicht kontrolliert. Aufsichtsrechtliche Bilanzkontrollen schreiben für gewöhnlich vor, dass Rechte und Verpflichtungen auf einer konservativen Basis bewertet werden sollen. Ungünstige Abweichungen der erwarteten Schadenzahlungen, die unter Eintritt eines ungünstigen Ereignisses zu erwarten sind, müssen gedeckt sein. Die Aufsichtsbehörden fordern von den Versicherern ein gewisses Maß an Kapital, um die Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern mit einer hohen Wahrscheinlichkeit sichern zu können.

Um ihren Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern nachgehen zu können, sind die Versicherungsunternehmen gefordert die Prämiensätze so hoch anzusetzen, dass die kumulierten Prämieinnahmen die erwartete Schadenhöhe übersteigen. Diese Bedingung ist auch bekannt als Net Profit Condition.

Der folgende Abschnitt aus dem Themengebiet der Ruintheorie zeigt (aus mathematischer Sicht), dass diese Bedingung für die Prämienhöhe erforderlich ist, damit das Versicherungsunternehmen keinen sicheren Ruin erleidet.

## Nachweis der Net Profit Condition - Ruintheorie

Die Ruintheorie beschäftigt sich mit der Analyse des Kapitalverlaufs eines Versicherers. Dieser wird als stochastischer Prozess (dem sogenannten Reserveprozess) in folgender Form modelliert:

$$\begin{aligned}R(0) &= u, \\R(t) &= u + \Pi(t) - X(t),\end{aligned}$$

wobei  $R(t)$  den Reserveprozess,  $u$  das Startkapital,  $\Pi(t)$  den Prämienprozess und  $X(t)$  den Schadenverlauf bezeichnet.

Im Folgenden wird der Reserveprozess im klassischen Risikomodell, dem Cramér-Lundberg Modell, vorgestellt:

### Risikomodell in stetiger Zeit

Es seien gegeben:

- Eine Folge von strikt positiven Zufallsvariablen  $s_1, s_2, \dots$  mit  $0 < s_1 < s_2 < \dots$  an deren Realisation ein Schaden auftritt (Schadenszeiten),
- die dazugehörigen positiven Schadenshöhen  $U_1, U_2, \dots$  als Folge von unabhängigen und identisch verteilten (iid) Zufallsvariablen,
- die anfängliche Schadenreserve  $u \geq 0$  und
- die konstante Prämienrate  $\beta > 0$  des Schadenprozesses  $\Pi(t)$ , der als lineare Funktion  $\Pi(t) = \beta t$  festgelegt wird.

Der kumulierte Schadenprozess  $X(t)$  wird folgendermaßen konstruiert:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \mathbb{1}(s_k \leq t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$$

mit

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(s_k \leq t).$$

Der Reserveprozess  $R(t)$  ist gegeben als:

$$R(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$$

mit dem Schadenüberschussprozess

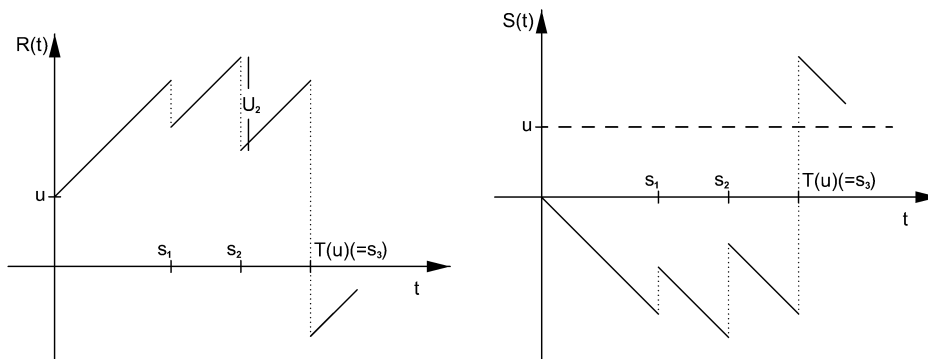
$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i - \beta t.$$

Der Ruinzeitpunkt  $T(u)$  wird definiert als

$$T(u) = \min\{t : R(t) < 0\},$$

i.e. der erste Zeitpunkt an dem die Reserve negativ ist.

In folgenden Diagrammen sind jeweils ein Verlauf der Prozesse  $R(t)$  und  $S(t)$  dargestellt:



## Net Profit Condition

Dieser Abschnitt liefert jene Bedingung, die notwendig ist um einen sicheren Ruin (i.e.  $\mathbb{P}(T(u) < \infty) = 1$ ) zu vermeiden. Vorbereitend dazu werden folgende Definitionen und Lemmas benötigt:

**Definition 2.1.1** Eine Menge  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ , wobei  $\mathcal{P}(X)$  die Potenzmenge einer Menge  $X$  bezeichnet, heißt eine  $\sigma$ -Algebra, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$ ,
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

**Definition 2.1.2** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $\sigma$ -Algebren mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  dann heißt  $\mathcal{B}$  Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ .

**Definition 2.1.3** • Eine aufsteigende Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$  heißt Filtration.

- Ein stochastischer Prozess  $X(t)$  heißt an die Filtration  $\mathcal{F}$  adaptiert, wenn  $X(t)$  für alle  $t \geq 0$   $\mathcal{F}(t)$ -messbar ist.

**Definition 2.1.4** Ein stochastischer Prozess  $X(t)$  heißt Martingal bzgl. einer Filtration  $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ , wenn  $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$  für alle  $t \geq 0$  und

- $X(t)$  ist adaptiert,
- $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}(s)) = X(s)$  fast sicher für alle  $0 \leq s \leq t$ .

**Definition 2.1.5** Ein Supermartingal ist ein adaptierter und integrierbarer stochastischer Prozess für den gilt:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s \quad \text{für alle } s < t$$

**Definition 2.1.6** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration  $\mathcal{F}$ . Eine Zufallsvariable  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  heißt Stoppzeit (bzgl.  $\mathcal{F}$ ), wenn

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

**Definition 2.1.7** Sei  $Y_1, Y_2, \dots$  eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen. Die Folge  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  mit  $S_0 = 0$  wird als Random Walk bezeichnet.

**Lemma 2.1.1** Sei  $Y_1, Y_2, \dots$  eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen. Es gilt, dass  $(Y_n, Y_{n-1} + Y_n, \dots, Y_1 + \dots + Y_n)$  gleich verteilt ist wie  $(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + \dots + Y_n)$  für alle  $n = 1, 2, \dots$

*Beweis:* siehe [19].

**Lemma 2.1.2** Sei  $\mathcal{F}$  eine Filtration,  $\{X_n\}$  ein Martingal bzgl.  $\mathcal{F}$  und  $\tau$  eine Stoppzeit mit

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty.$$

Weiters gelte

$$\mathbb{E}(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}) \leq c \quad \text{f.s.} \quad (2.1)$$

für eine Konstante  $c < \infty$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

*Beweis:* siehe [19].

**Lemma 2.1.3 Waldsche Identität**

Sei  $\{S_n\}$  ein Random Walk mit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ , wobei  $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$  und  $\{\mathcal{F}_n^Y\}$  eine Filtration. Falls  $\tau$  eine Stoppzeit bezüglich der Filtration  $\{\mathcal{F}_n^Y\}$  ist und falls  $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ , dann gilt

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[Y]. \quad (2.2)$$

*Beweis:* siehe [19]

Für den Reserveprozess an den Schadeneintrittszeitpunkten  $s_j, j = 1, 2, \dots$  gilt:

$$\begin{aligned} R(0) &= u, \\ R(s_j) &= u + \sum_{i=1}^j (\beta T_i - U_i), \end{aligned}$$

wobei  $T_1 = s_1$  und  $T_i := s_i - s_{i-1}$  für  $i \geq 2$ . Es sei  $Y_i = \beta T_i - U_i$  für  $i = 1, 2, \dots$  und  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Damit sind die  $Y_i$  iid und  $\{S_n\}$  ein Random Walk.

Mithilfe dieser Darstellung kann im Satz 2.1.1 die Net Profit Condition bewiesen werden.

Mit  $\nu^+$  wird die erste Eintrittszeit des Random Walks  $\{S_n\}$  in die positive Halbachse  $(0, \infty)$  bezeichnet:

$$\nu^+ = \min\{n > 0 : S_n > 0\},$$

wobei  $\nu^+ = \infty$  falls  $S_n \leq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Analog definiert man:

$$\nu^- = \min\{n > 0 : S_n \leq 0\},$$

wobei  $\nu^- = \infty$  falls  $S_n > 0$  für alle  $n = 1, 2, \dots$

Weiters sei  $\{\nu_n^+, n \in \mathbb{N}\}$  eine Folge definiert durch

$$\nu_{n+1}^+ = \min\{j > \nu_n^+ : S_j > S_{\nu_n^+}\},$$

wobei  $\nu_0^+ = 0$  und  $\nu_1^+ = \nu^+$ .

**Satz 2.1.1** a) falls  $\mathbb{E}[Y_1] > 0$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ .

b) falls  $\mathbb{E}[Y_1] < 0$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ .

c) falls  $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ , dann gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ .

*Beweis.*

a) Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \mathbb{E}[Y_1]$$

mit Wahrscheinlichkeit 1. Für  $\mathbb{E}[Y_1] > 0$  gilt daher  $S_n \rightarrow \infty$  mit Wahrscheinlichkeit 1.

b) Für  $\mathbb{E}[Y_1] < 0$  gilt analog zu Punkt a)  $S_n \rightarrow -\infty$  mit Wahrscheinlichkeit 1.

c) Sei  $\mathbb{E}[Y] = 0$  und man definiere

$$N = \begin{cases} \min\{n : S_n = \max_{j \geq 0} S_j\} \\ \infty, \quad \text{falls } \max_{j \geq 0} S_j = \infty. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}(N < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{S_j < S_n \forall 0 \leq j \leq n-1\} \cap \{S_l \leq S_n, \forall l > n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\sum_{k=j+1}^n Y_k > 0 \forall j = 0, 1, \dots, n-1\} \cap \{\sum_{k=n+1}^j Y_k \leq 0, \forall j > n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{k=j+1}^n Y_k > 0 \forall j = 0, 1, \dots, n-1) \times \mathbb{P}(\sum_{k=n+1}^j Y_k \leq 0, \forall j > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n > 0, Y_n + Y_{n-1} > 0, \dots, \sum_{k=1}^n Y_k > 0) \times \mathbb{P}(S_j \leq 0, \forall j \geq 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 > 0, Y_1 + Y_2 > 0, \dots, \sum_{k=1}^n Y_k > 0) \mathbb{P}(\nu^+ = \infty), \end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichheit Lemma 2.1.1 verwendet wurde.

Somit gilt

$$1 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu^- > n) \mathbb{P}(\nu^+ = \infty) = \mathbb{E}[\nu^-] \mathbb{P}(\nu^+ = \infty). \quad (2.3)$$



Man nehme an, dass  $\mathbb{P}(\nu^+ = \infty) > 0$ . Dann folgt aus (2.3), dass  $\mathbb{E}[\nu^-] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu^- > n) < \infty$ . Daher folgt mit Hilfe der Waldschen Identität (siehe (2.2))  $\mathbb{E}[S_{\nu^-}] = \mathbb{E}[\nu^-]\mathbb{E}[Y_1] = 0$ . Da  $S_{\nu^-} \leq 0$  nach Definition gilt  $S_{\nu^-} = 0$  mit Wahrscheinlichkeit 1. Dies führt zu einem Widerspruch, da  $\mathbb{P}(S_{\nu^-} < 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 < 0) > 0$  falls  $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ . Daher ist  $\mathbb{P}(\nu^+ < \infty) = 1$ , i.e. die Zufallsvariable  $S_{\nu^+}$  ist wohldefiniert und  $S_{\nu^+} > 0$  nach Definition. Nun betrachte man die komplette Folge  $\{S_{\nu_n^+}, n \in \mathbb{N}\}$ . Mit dem selben Argument wie zuvor erhält man  $\mathbb{P}(\nu_n^+ < \infty) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und, dass

$$\{S_{\nu_{n+1}^+} - S_{\nu_n^+}, n \in \mathbb{N}\}$$

eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen ist, die nach Definition strikt positiv sind. Insbesondere gilt  $\mathbb{E}[S_{\nu^+}] > 0$ . Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen erhält man

$$\frac{1}{n} S_{\nu_n^+} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (S_{\nu_{k+1}^+} - S_{\nu_k^+}) \rightarrow \mathbb{E}[S_{\nu^+}] > 0 \text{ fast sicher}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\nu_n^+} = \infty$ , i.e.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ . Der Beweis, dass  $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$  ist analog. Man betrachtet hierbei nur den gespiegelten Random Walk  $\{-S_n\}$  mit  $\mathbb{E}[-Y_1] = 0$ .  $\square$

**Korollar 2.1.1** *Es gilt:*

$$\beta > \frac{\mathbb{E}[U_1]}{\mathbb{E}[T_1]} \Leftrightarrow \mathbb{P}(T(u) < \infty) < 1.$$

*Beweis:*

Folgt aus Satz 2.1.1 und der Identität  $E[Y_1] = \mathbb{E}[\beta T_1 - U_1]$ .  $\square$

Für einen Versicherer zeigt sich, dass er den Prämiensatz so hoch anzusetzen hat, dass die Prämie (pro Zeiteinheit) nicht nur gleich hoch, sondern echt größer als die erwartete Schadenhöhe (pro Zeiteinheit) ist, um einen sicherer Ruin zu vermeiden (unabhängig vom Startkapital  $u$ ). Im Sinne der Ruintheorie ist es somit nötig die Prämie als erwarteten Schaden zuzüglich einem risikogerechten Sicherheitszuschlag anzusetzen.

### 2.1.2 Preis der Gefahrentragung - Veräußerungspreis

Nach Vorschlag des IASB(2007)<sup>1</sup> soll die Risikomarge so bestimmt werden, dass der Best Estimate plus Risikomarge den Veräußerungswert darstellen sollte. Der Veräußerungswert entspricht jenem Wert, den ein Versicherer (am Stichtag) für den Transfer seiner verbleibenden vertraglichen Rechte und Verpflichtungen an ein anderes Unternehmen zahlen müsste.

Falls ein liquider Markt für Versicherungsverpflichtungen existiert, dann wäre ein angemessener Veräußerungswert am Markt beobachtbar. Der Veräußerungswert - bestimmt durch die Preisbeobachtungen - würde selbstverständlich eine Rückstellung beinhalten, die den Preis für die Gefahrentragung aus Sicht des Marktes widerspiegelt.

In vielen Fällen können Versicherungscashflows durch handelbare Finanzinstrumente, wie Wertpapiere oder Derivate, repliziert werden und daher mit dem Marktpreis ähnlicher Cashflows bewertet werden. Bei der Berechnung eines Marktpreises ist es für gewöhnlich nicht möglich den Wert in die erwarteten diskontierten Cashflows und die Risikomarge zu zerlegen.

Versicherungsrisiken wie Sterblichkeit und Kränklichkeit sind als solche am Markt nicht beobachtbar. Sie werden daher als nicht hedgebar betrachtet. Die IAIS<sup>2</sup> und IASB schlagen vor, dass der Wert der Verpflichtungen von nicht hedgebaren Risiken durch ein Modell bestimmt werden sollte, das sich aus drei Basiskomponenten zusammensetzt: der Schätzung des zukünftigen vertraglichen Cashflows, dem Diskontierungssatz, der den Zeitwert des Geldes widerspiegelt und der Risikomarge.

Das bekannteste Modell, das bei der Bewertung von risikobehafteten Anlagemöglichkeiten zur Rate gezogen wird ist das 'Capital Asset Pricing Model'. Für nähere Informationen dazu siehe [2] bzw. [15].

## 2.2 Gewünschte Eigenschaften

Der IASB und IAIS haben folgende Eigenschaften als wünschenswert definiert:

- Je weniger über den Best Estimate bekannt ist, desto höher sollte die dazugehörige Risikomarge sein.
- Risiken mit einer geringeren Häufigkeit und höherem Schwernisgrad

---

<sup>1</sup>International Accounting Standards Board: bezeichnet ein Gremium von Rechnungslegungsexperten

<sup>2</sup>International Association of Insurance Supervisors. Die IAIS mit Sitz in Basel ist die globale Organisation der Versicherungsaufsichtsbehörden.

sollen grundsätzlich eine höhere Risikomarge haben als Risiken mit hoher Häufigkeit und niedrigerem Schwernisgrad.

- Ähnliche Risiken mit einer langen Vertragsdauer sollen eine höhere Risikomarge haben als jene mit einer kürzeren Vertragsdauer.
- Risiken mit einer leptokurtischen ('heavy tailed') Verteilung sollen höhere Risikomargen haben als jene mit einer 'light tailed'-Verteilung.
- Sobald aufkommende Erfahrung(-swerte) die Unsicherheit reduzieren, sollen Risikomargen sinken (und vice versa).

## 2.3 Mögliche Ansätze für die Risikomarge

Als grundlegende Ansätze für die Berechnung der Risikomarge können folgende Methoden angesehen werden:

1. Quantilsmethoden:
  - Konfidenzintervalle oder Überschreitungswahrscheinlichkeiten (VaR - Value at Risk, siehe Definition 2.4.1)
  - CVaR (Conditional Value at Risk, siehe Definition 2.4.2) als Alternative zum VaR
  - Verwendung der zweiten oder höheren Ordnungen der Risikoverteilung
2. CoC(Cost of Capital)-Methode
3. Diskontierungsmethoden
4. Explizite Annahmen
5. konservative Annahmen im Best Estimate, was zu einer impliziten Risikomarge führt

Wie die einzelnen Ansätze historisch in Erscheinung getreten sind, wird im folgenden Kapitel skizziert.

### 2.3.1 Historische Entwicklung

Risikomargen basierend auf expliziten bzw. impliziten Annahmen werden von der Aufsicht bei der Bewertung von Verbindlichkeiten von Versicherungen schon seit längerer Zeit in Betracht gezogen.

Dazu gehören die Verwendung von konservativen Sterblichkeitsraten und die Wahl von Diskontierungsfaktoren, die kleiner sind als jene am Markt beobachteten. Verwendung fanden sie bei Lebens- und Krankenversicherungsverträgen.

Diese Anpassungen an die Diskontierungsrate wurden ebenfalls bei der Bewertung aus zukünftigen Schadenzahlungsverpflichtungen in der Sach- und Haftpflichtversicherung verwendet. Das verringerte Diskontieren sollte in etwa den Ausgleich für die fehlende Risikoanpassung darstellen. Zu den bekanntesten Diskontierungsmethoden gehört die Methode zur Berechnung des 'Embedded Value'. Der Embedded Value (EV) eines Unternehmens für ein Geschäftsjahr wird definiert als (siehe [16]):

$$EV = EK + EW + RFB$$

mit

- $EK$  = Eigenkapital des Unternehmens am Ende des Geschäftsjahrs,
- $EW$  = Ertragswert des Bestandes<sup>3</sup>,
- $RFB$  = anrechenbare  $RfB$  (Rückstellung für Beitragsrückerstattung).

Der Gebrauch von Quantilmethoden aus Aufsichtszwecken ist eher in den jüngeren Jahren aufgetreten. Die australische Aufsicht forderte beispielsweise, dass Versicherungsverpflichtungen auf der Basis von Konfidenzintervallen bewertet werden sollten. Diese sollten um eine Mindestanzahl an Standardabweichungen über dem Erwartungswert liegen - als einfache Annäherung an den Wert, den 'ein Marktteilnehmer für vernünftig halten würde'.

Andere Unternehmen wiederum verwendeten Quantile im Anhang zur Bilanz um das Maß an Sicherheit, das sie durch die Margen erreichen, zu beschreiben - unabhängig davon welche Methode bei deren Berechnung verwendet wurde.

Die CoC-Methode, wird seit mehreren Jahren in den Berechnungen des Embedded Value in der Lebensversicherung berücksichtigt. Die CoC-Methode wird auch als Teil des SST<sup>4</sup> beim Bepreisen verschiedener Arten von Versicherungsverträgen verwendet.

---

<sup>3</sup>Der Ertragswert des Bestandes ist definiert als diskontierter Erwartungswert aller Erträge und Aufwendungen der im Bestand vorhandenen Beträge.

<sup>4</sup>Swiss Solvency Test

## 2.4 Diskussion der Ansätze

### 2.4.1 Quantilmethoden

#### Value at Risk (VaR)

**Definition 2.4.1** Sei  $L$  eine Zufallsvariable, die die Wertänderung (Gewinne und Verluste) eines Portfolios beschreibt, wobei positive Werte von  $L$  einen Verlust und negative Werte von  $L$  einen Gewinn bedeuten.  $F_L$  bezeichne die kontinuierliche Verteilungsfunktion von  $L$ . Weiters sei  $\alpha \in (0, 1)$  ein gegebenes Konfidenzniveau.  $\text{VaR}_\alpha(L)$  ist die "kleinste Zahl"  $l$ , sodass  $\mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha$  gilt, i.e.

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(L) &= \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.\end{aligned}$$

Die auf dem VaR basierende Risikomarge (RM) bezeichnet jenen Betrag, der zusätzlich zum erwarteten Wert der Verbindlichkeiten hinzugefügt wird, um in Summe die Verpflichtungen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit decken zu können, i.e.

$$\text{RM} = \text{VaR}_\alpha(L) - \mathbb{E}(L).$$

Ein Nachteil des VaR ist, dass er keine Auskunft darüber gibt, wie groß der Verlust ist, falls  $L > \text{VaR}_\alpha(L)$ .

#### Conditional Value at Risk (CVaR)

**Definition 2.4.2** Sei  $\alpha$  ein vorgegebenes Konfidenzniveau und  $L$  eine Zufallsvariable, die die Wertänderung (Gewinne und Verluste) eines Portfolios beschreibt, wobei positive Werte von  $L$  einen Verlust und negative Werte von  $L$  einen Gewinn bedeuten.  $F_L$  bezeichne die kontinuierlicher Verteilungsfunktion von  $L$ :

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}(L | L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

Die darauf aufbauende Risikomarge erhält man als

$$\text{RM} = \text{CVaR}_\alpha(L) - \mathbb{E}(L).$$

Der Vorteil des CVaR im Vergleich zum VaR ist, dass neben der Verlustwahrscheinlichkeit auch die durchschnittliche Höhe des Verlustes berücksichtigt wird.

## 2.4.2 Standardabweichung

Die Risikomarge kann hierbei in einfacher Form als Vielfaches der Standardabweichung der Verteilung bestimmt werden:

$$\text{RM} = c \sqrt{\text{Var}(L)},$$

wobei  $c > 0$  (vgl. mit Standardabweichungsprinzip im Kapitel 2.5). Ein Nachteil ist, dass die Standardabweichung nur für Verteilungen mit  $\mathbb{E}(L^2) < \infty$  existiert; das heißt sie ist nicht einsetzbar bei leptokurtischen Verteilungen<sup>5</sup>. Weiters ist bei dieser Methode zu bemängeln, dass Gewinne und Verluste die Standardabweichung gleichermaßen beeinflussen.

Ähnliche Risikomargen erhält man, indem man statt der Standardabweichung die Varianz verwendet oder den sogenannten Variationskoeffizienten  $\frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]}$  (vgl. mit Varianzprinzip und modifiziertem Varianzprinzip im Kapitel 2.5).

## 2.4.3 CoC-Methode

Wie der Name bereits erkennen lässt, steht hier die Rolle der Risikomarge in Form von Kosten für das zu tragende Risiko im Vordergrund. Für die Anwendung der CoC-Methode sind das nötige Solvenzkapital und die Kapitalkosten am Stichtag jeder versicherten Periode nötig. Die Risikomarge nach der CoC-Methode wird in [6] folgendermaßen definiert:

$$\text{RM} = \text{CoC} \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{\text{SCR}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

wobei

- $\text{SCR}(t) = \text{SCR}$  für das Jahr  $t$ ,
- $r_t =$  risikoloser Zinssatz mit Fälligkeit  $t$ ,
- $\text{CoC} =$  Cost-of-Capital Rate (Kapitalkostensatz).

Die Risikomarge entspricht demnach dem Barwert der Eigenkapitalkosten, die für die Aufbringung des SCR über die gesamte Laufzeit der versicherungstechnischen Verpflichtungen anfallen. Die Solvency II Rahmenrichtlinie schreibt einen Kapitalkostensatz von 6% vor.

Genauere Ausführungen zu dieser Methode folgen ab Kapitel 3.

---

<sup>5</sup>Die Verteilung einer Zufallsvariable  $X$  ist leptokurtisch, falls

$$\mathbb{P}[X > x] \sim x^{-\alpha} \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ und } \alpha > 0.$$

Die Notation ' $\sim$ ' bezeichnet die asymptotische Äquivalenz von Funktionen

## 2.4.4 Diskontierungsmethoden

Gemäß dieser Methode werden die erwarteten Verbindlichkeiten mit Hilfe einer Größe, die sich aus der risikofreien Zinskurve minus einer bestimmten Adjustierung für das Risiko zusammensetzt, diskontiert. Die Risikomarge lässt sich somit in folgender Form ausdrücken (Annahme: die Cashflows erfolgen bis zum Jahr  $n$ ):

$$\text{RM} = \sum_{i=0}^n \left( \frac{V(i)}{1 + r_{i+1} - a_{i+1}} - \frac{V(i)}{1 + r_{i+1}} \right)$$

wobei

- $V(i)$  = Verbindlichkeiten für das Jahr  $i$ ,
- $r_i$  = risikoloser Zinssatz mit Fälligkeit  $i$ ,
- $a_i$  = Risikoadjustierung im Jahr  $i$ .

In fortschrittlicheren Methoden hängt die Risikoadjustierung von der Versicherungssparte oder von der Verteilung des Risikos ab (vgl. mit [9]).

Eine Methode legt als Risikoadjustierung gerade die risikofreie Zinskurve selbst fest (i.e.  $a_i = r_i$  für  $i = 0, \dots, n$ ). Das bedeutet, dass keine Diskontierung bei der Bemessung der Verbindlichkeit vorgenommen wird.

### Explizite Annahmen

Diese Kategorie der Risikomargen zeichnet sich dadurch aus, dass sie explizit bestimmt werden. Im Gegensatz dazu wird die Risikomarge bspw. bei Diskontierungsraten in impliziter Form in anderen Komponenten berücksichtigt. Spezialfälle sind Risikomargen, die separat berechnet werden ohne die einzelnen Risiken getrennt zu betrachten. Als einfachste Möglichkeit für eine explizite Berechnung bietet es sich an einen fixen Prozentsatz des Best Estimate als Risikomarge zu verwenden (siehe Kapitel 3.2 S4; vgl. mit Erwartungswertprinzip im Kapitel 2.5). Fortgeschrittenere Methoden machen das Risiko von der Versicherungssparte und der versicherten Periode abhängig.

## 2.5 Prämienkalkulationsprinzipien

Die Prinzipien in der Prämienkalkulation bieten ein plausibles Fundament für eine weitere Herangehensweise bei der Bewertung von Verbindlichkeiten und des damit verbundenen Risikozuschlags. Im Mittelpunkt steht die Ermittlung einer fairen Prämie für die Versicherung eines Risikos. Der erste intuitive Gedanke die Prämie als Erwartungswert des Verlustes festzulegen muss auf Grund der Erkenntnisse aus Kapitel 2.1.1 verworfen werden. Ansonsten führt dies auf lange Sicht mit Wahrscheinlichkeit 1 zu Ruin - egal wie hoch die ursprüngliche Reserve ist. Die Aufgabe besteht darin 'vernünftige' Prämienkalkulationsmethoden zu bestimmen.

Unter einem Prämienkalkulationsprinzip versteht man im Allgemeinen ein Funktional  $\Pi$ , das einer Zufallsvariablen  $X$  eine reelle Zahl  $P$  zuordnet, i.e.  $P = \Pi(X)$ . Im Folgenden bezeichne das Funktional  $\Pi(X)$  die Prämie für ein Risiko  $X$ .  $Y$  sei ein weiteres beliebiges Risiko unabhängig von  $X$ . Zu den gewünschten Eigenschaften der Prämie  $\Pi$  gehören:

1. *kein ungerechtfertigter Sicherheitszuschlag*: für alle Konstanten  $a \geq 0$  gilt  $\Pi(a) = a$ ,
2. *Angemessenheit*:  $\Pi(X) \leq \max[X]$ ,
3. *Proportionalität*: für alle Konstanten  $a \geq 0$ ,  $\Pi(aX) = a\Pi(X)$ ,
4. *Subadditivität*:  $\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$ ,
5. *Additivität*:  $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$ ,
6. *Konsistenz*: für alle Konstanten  $a \geq 0$ ,  $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$ ,
7. *(stochastische) Monotonie*: aus  $X \leq Y$  fast sicher (f.s.) folgt, dass  $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$ .

Zu den bekanntesten Prämienkalkulationsprinzipien gehören:

- *Erwartungswertprinzip*: Für beliebige  $c \geq 0$  sei

$$\Pi(X) = (1 + c)\mathbb{E}[X],$$

vorausgesetzt  $\mathbb{E}[X] < \infty$ . Für  $c = 0$  entspricht dies dem Nettoprämienprinzip. Der Nachteil dieses Prinzips ist, dass die Variabilität des zugrunde liegenden Risikos nicht miteinbezogen wird.

Für die folgenden Prinzipien sei  $c > 0$ :



- *Varianzprinzip*

$$\Pi(X) = \mathbb{E}[X] + c \operatorname{Var}[X],$$

- *Standardabweichungsprinzip:*

$$\Pi(X) = \mathbb{E}[X] + c\sqrt{\operatorname{Var}[X]},$$

- *Modifiziertes Varianzprinzip:*

$$\Pi(X) = \begin{cases} \mathbb{E}[X] + c \frac{\operatorname{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]} & \text{falls } \mathbb{E}[X] > 0 \\ 0 & \text{falls } \mathbb{E}[X] = 0 \end{cases},$$

- *Exponentialprinzip:*

$$\Pi(X) = c^{-1} \log \mathbb{E}[e^{cX}].$$

Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Eigenschaften für die einzelnen Prämienkalkulationsprinzipien erfüllt sind (für den Spezialfall, dass das zusätzlich auftretende Risiko  $Y$  unabhängig von  $X$  ist):

Prämienkalkulationsprinzip \ Eigenschaft	1	2	3	4	5	6	7
Erwartungswertprinzip	×	✓	✓	✓	✓	×	✓
Varianzprinzip	✓	×	×	✓	✓	✓	×
Standardabweichungsprinzip	✓	×	✓	✓	×	✓	×
modifiziertes Varianzprinzip	✓	×	✓	✓	×	×	×
Exponentialprinzip	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓

Tabelle 2.1: Prämienkalkulationsprinzipien und ihre Eigenschaften

*Beweis der Eigenschaften 1-7 aus Tabelle 2.1:* Die Beweise werden exemplarisch für das Varianzprinzip und das Exponentialprinzip durchgeführt. Die weiteren Beweise erfolgen analog oder sind trivial.

Varianzprinzip:

1.  $\Pi(a) = \mathbb{E}(a) + c \operatorname{Var}(a) = a + 0 = a$ .  $\square$
2. Konstruktion eines Gegenbeispiels: Sei  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  (vgl. mit Definition A.2) und  $c = 12$ . Dann gilt:

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + c \operatorname{Var}(X) = \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{2} > 1 = \max[X]. \quad \square$$

3.

$$\begin{aligned}\Pi(aX) &= \mathbb{E}(aX) + c \operatorname{Var}(aX) = a\mathbb{E}(X) + a^2 c \operatorname{Var}(X) \\ &\neq a\mathbb{E}(X) + a c \operatorname{Var}(X) = a\Pi(X). \quad \square\end{aligned}$$

4. folgt aus 5.  $\square$

5. Aufgrund der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  gilt:

$$\begin{aligned}\Pi(X + Y) &= \mathbb{E}(X + Y) + c \operatorname{Var}(X + Y) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + c(\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)) \\ &= \Pi(X) + \Pi(Y). \quad \square\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\Pi(X + a) &= \mathbb{E}(X + a) + c \operatorname{Var}(X + a) \\ &= \mathbb{E}(X) + a + c \operatorname{Var}(X) = \Pi(X) + a. \quad \square\end{aligned}$$

7. Konstruktion eines Gegenbeispiels: Sei  $X \sim \mathcal{U}(0, 12)$ ,  $Y \sim \mathcal{U}(12, 13)$  und  $c = 1$ . Dann gilt  $X \leq Y$  fast sicher und

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + c \operatorname{Var}(X) = 6 + \frac{12^2}{12} = 18 > 12\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \Pi(Y). \quad \square$$

Exponentialprinzip:

1.  $\Pi(a) = c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{ca}) = c^{-1} \log(e^{ca}) = c^{-1} ca = a. \quad \square$

2. Wegen 7. gilt:

$$X \leq \max[X] =: M \quad \Rightarrow \quad \Pi(X) \leq \Pi(M) \stackrel{1.}{=} M = \max[X]. \quad \square$$

3.

$$\begin{aligned}a\Pi(X) &= ac^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX}) = c^{-1} \log([\mathbb{E}(e^{cX})]^a) \\ &\neq c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{acX}) = \Pi(aX). \quad \square\end{aligned}$$

4. folgt aus 5.

5.

$$\begin{aligned}\Pi(X + Y) &= c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{c(X+Y)}) = c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX} e^{cY}) \\ &= c^{-1} \log[\mathbb{E}(e^{cX})\mathbb{E}(e^{cY})] = c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX}) + c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cY}) \\ &= \Pi(X) + \Pi(Y). \quad \square\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\Pi(X + a) &= c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{c(X+a)}) = c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX} e^{ca}) \\ &= c^{-1} \log[\mathbb{E}(e^{cX}) e^{ca}] = c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX}) + c^{-1} \log e^{ca} \\ &= \Pi(X) + a. \quad \square\end{aligned}$$

7. Aufgrund der Monotonie von  $f(z) = e^{cz}$  und  $g(z) = c^{-1} \log(z)$  gilt:

$$\begin{aligned}X \leq Y \text{ f.s.} &\Rightarrow e^{cX} \leq e^{cY} \Rightarrow \mathbb{E}(e^{cX}) \leq \mathbb{E}(e^{cY}) \\ &\Rightarrow c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cX}) \leq c^{-1} \log \mathbb{E}(e^{cY}). \quad \square\end{aligned}$$

# Kapitel 3

## Die Cost-of-Capital Methode

### 3.1 Grundlagen

Dieses Kapitel untersucht den laut Solvency II Rahmenrichtlinie [17] für die Berechnung der Risikomarge vorgeschlagenen Cost-of-Capital-Ansatz.

Gemäß dem Veräußerungsprinzip wird ein Transferszenario simuliert (vgl. mit der Vorgabe für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen aus Kapitel 1.5.1 Absatz 2). Dabei werden die bestehenden Verpflichtungen an ein anderes Unternehmen, dem Referenzunternehmen (RU), transferiert. Um die Verpflichtungen decken zu können, benötigt das Referenzunternehmen einen gewissen Betrag an Eigenmitteln. Die Kosten für die Bereitstellung der Eigenmittel gilt als Basis für die Bewertung der Risikomarge.

Zu beachten ist, dass das Referenzunternehmen keine neuen Verträge abschließt, sondern nur die bestehenden Verpflichtungen übernimmt. Die Details des Transferszenarios werden in [6] genauer erläutert.

Taxativ werden die einzelnen Transferdetails aufgelistet. Dazu gehören:

- Das Portfolio der Versicherungsverpflichtungen wird von einem anderen Versicherungsunternehmen übernommen.
- Das Referenzunternehmen hat vor dem Transfer weder Versicherungs- bzw. Rückversicherungsverpflichtungen noch ein Eigenkapital.
- Nach dem Transfer stellt das Referenzunternehmen das nötige Eigenkapital zur Verfügung (welches dem SCR entspricht), das die Versicherungsverpflichtungen über die gesamte restliche Gültigkeitsdauer sicherstellt.
- Das SCR des Referenzunternehmens erfasst:

- das dem Geschäftszweig zugrunde liegende versicherungstechnische Risiko,
- das unvermeidbare Marktrisiko,
- das aus Verträgen mit Rückversicherungen und Zweckgesellschaften resultierende Kreditrisiko,
- das operationelle Risiko.

Die weiteren Transferdetails, die für die folgenden mathematischen Berechnungen keine Relevanz darstellen, sind in [6] zu finden.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$ , i.e. zum Zeitpunkt des Transfers stattet sich das Referenzunternehmen mit der benötigten Menge an Eigenkapital (E) aus, i.e.

$$E_{RU}(0) = SCR_{RU}(0)$$

wobei

- $E_{RU}(0)$  = Menge an geeignetem Eigenkapital, welches vom Referenzunternehmen zum Zeitpunkt  $t = 0$  aufgebracht wird,
- $SCR_{RU}(0)$  = SCR zum Zeitpunkt  $t = 0$ , wie es für das Referenzunternehmen berechnet wird.

Die Kosten für die Bereitstellung des Eigenkapitals entsprechen der Kapitalkostenrate multipliziert mit der Höhe an Eigenkapital. Die Eigenmittel des Referenzunternehmens müssen für alle zukünftigen Jahre bereitgestellt werden. Es wird angenommen, dass der Transfer der Versicherungsverpflichtungen sofort geschieht. Die gesamte Risikomarge erhält man schließlich wie folgt:

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{E_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \quad (3.1)$$

wobei

- RM = Risikomarge,
- $SCR_{RU}(t)$  = SCR für das Jahr  $t$ ,
- $r_t$  = risikoloser Zinssatz mit Fälligkeit  $t$ ,
- $CoC$  = Kapitalkostensatz (Cost-of-Capital Rate).

RM entspricht demnach dem Barwert der Eigenkapitalkosten, die für die Aufbringung des SCR über die gesamte Laufzeit der versicherungstechnischen Verpflichtungen anfallen.

Das unvermeidbare Marktrisiko<sup>1</sup> wird grundsätzlich nur dann miteinbezogen, wenn das Risiko signifikant ist. Laut [6] kann das Risiko für die Nichtlebens-Versicherung aufgrund der kurzen Laufzeiten auf 0 gesetzt werden.

Weiters erhält man aus [6] die Vorgabe, dass die Risikomarge für das Prämien- und Reserverisiko nicht getrennt berechnet werden sollte.

Der Kapitalkostensatz entspricht einer jährlichen Rate auf das Kapitalerfordernis. Die Rate bezeichnet hierbei nicht die totale Rendite des Kapitals sondern den Aufschlag auf die risikolose Zinsrate (i.e. Rendite minus risikolose Zinsrate) und wird unter Solvency II mit 6% festgelegt.

Die Risikomarge ist gesondert pro Geschäftszweig (LoB) zu berechnen. Dazu wird im ersten Schritt die Risikomarge für das gesamte Versicherungsgeschäft des Unternehmens berechnet, wobei die Diversifikation zwischen den einzelnen Zweigen berücksichtigt wird. Im zweiten Schritt wird die Risikomarge den einzelnen LoBs zugeordnet.

## 3.2 Vereinfachte Methoden - Simplifications

Vereinfachte Methoden kommen dann zu tragen, wenn die CoC-Methode in der eben vorgestellten Form nicht vollständig durchführbar ist. Dies ist dann der Fall, wenn es dem Versicherungsunternehmen beispielsweise nicht möglich sein sollte die Projektionen der zukünftigen SCRs auszuführen. Dazu werden vier sogenannte 'Simplifications' vorgestellt. Diese sind in hierarchischer Form aufgelistet, beginnend mit den komplexeren und risikosensibleren Methoden bis hin zu den sehr simplen rein faktorbasierten Methoden. Grundsätzlich liegt es an den Unternehmen aus diesen Methoden diejenige zu wählen, die für deren Geschäft geeignet ist und deren Risiko angemessen widerspiegelt.

Bei der Wahl einer vereinfachten Methode lautet die Fragestellung für

---

<sup>1</sup>Das unvermeidbare Marktrisiko bezieht sich auf eine Unausgeglichenheit im Asset-Liability Management. Eine solche Unausgeglichenheit existiert beispielsweise, falls die Restlaufzeit der Finanzinstrumente niedriger ist als die Restlaufzeit der Versicherungsverpflichtungen. Dies führt schließlich zu einem Kapitalerfordernis in Bezug auf das Zinsrisiko, das damit besteht.

das Unternehmen, ob und inwiefern es in der Lage ist das gesamte SCR zu projizieren. Dazu ist zu überlegen, wie sich die Berechnungen auswirken, falls die relevanten Subrisiken separat projiziert werden.

Gemäß diesen Überlegungen werden für die Berechnung der Risikomarge folgende vereinfachende Methoden (Simplifications [S1 – S4]) vorgegeben (nach Einfachheit geordnet):

- Berechnung aller zukünftigen SCRs ohne Vereinfachung.
- Vereinfachung Level 1: Approximation der individuellen Risiken oder Subrisiken innerhalb aller oder einzelner Module/Submodule, welche für die Berechnung der zukünftigen SCRs verwendet werden (Simplification S1).

Eine allgemeine Methode kann unter diesen Vorgaben nicht angegeben werden. Je nach zugrundeliegendem Modell muss individuell untersucht werden, wie man die Simplification ansetzen kann.

- Vereinfachung Level 2: Approximation des gesamten SCR für jedes zukünftige Jahr, z.B.: durch Verwendung eines proportionalen Ansatzes (Simplification S2).

Eine unter dem Level 2 angeführte mögliche Simplification basiert auf der Annahme, dass die zukünftigen SCRs proportional zum Best Estimate der versicherungstechnischen Rückstellungen des relevanten Jahres sind. Gemäß dieser Vorgabe errechnet sich das nötige SCR im Jahr  $t$  wie folgt:

$$SCR_{RU}(t) = \frac{SCR_{RU}(0)}{BE_{netto}(0)} \cdot BE_{netto}(t), \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

wobei  $BE_{netto}$  den Best Estimate der versicherungstechnischen Rückstellung nach Abzug des Rückversicherungsanteils bezeichnet.

Dieser Ansatz setzt voraus, dass auch alle anderen relevanten Komponenten, wie Marktrisiko, Ausfallsrisiko, operationelles Risiko, ... in Relation zum Best Estimate konstant bleiben.

- Vereinfachung Level 3: Schätzung aller zukünftigen SCRs auf einmal, z.B. durch Verwenden einer Approximation basierend auf dem Durationansatz (Simplification S3).

Eine repräsentative Methode unter Level 3 ist ein Ansatz, der die modifizierte Duration der Verpflichtungen miteinbezieht. Dabei ergibt sich

die Risikomarge mittels:

$$CoCM = \frac{CoC}{1 + r_1} \cdot Dur_{mod}(0) \cdot SCR_{RU}(0),$$

wobei  $Dur_{mod}(0)$  (vgl. mit Kapitel 4.3) die modifizierte Duration<sup>2</sup> der Versicherungsverpflichtungen des Referenzunternehmens nach Abzug der Rückversicherungsabgaben bezeichnet (zum Zeitpunkt 0).

Wie bei der vorangehenden Simplification basiert diese Methode auf verschiedenen Annahmen bzgl. den einzelnen Komponenten des SCR (siehe [6]).

- Vereinfachung Level 4: Approximation der Risikomarge als fixen Prozentsatz des Best Estimate (Simplification *S4*).

Die Risikomarge unter Level 4 lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$CoCM = \alpha_{lob} \cdot BE_{netto}(0),$$

wobei  $\alpha_{lob}$  einen fixen Prozentsatz für den gegebenen Geschäftszweig bezeichnet. Dieser wird von [6] vorgegeben und variiert je nach Sparte zwischen 4% und 17%.

---

<sup>2</sup>Die Duration bezeichnet eine Sensitivitätskennzahl für Versicherungsverbindlichkeiten. Sie stellt die gewichtete Durchschnittszeit aus den Cashflows der Verbindlichkeiten dar. Die modifizierte Duration bezeichnet eine verwandte Methode der Duration.



# Kapitel 4

## Stochastische Analyse der CoC-Methode

### 4.1 Annahmen

Für die Anwendung der CoC-Methode werden in den nachstehenden Abschnitten folgende Vereinfachungen getroffen:

- Das SCR umfasst nur das versicherungstechnische Risiko.
- Es werden keine Rückversicherungsformen berücksichtigt.
- Der risikolose Zinssatz wird auf 0 gesetzt.

Dieses Kapitel widmet sich der exakten mathematischen Analyse der CoC-Methode. Aus Veranschaulichungsgründen wird die CoC-Methode nur für das Reserverisiko im Rahmen von Schadenreservierungsmethoden näher erläutert. Das Prämienrisiko kann in analoger Weise behandelt werden. Als Grundlage für dieses Kapitel diene insbesondere das Buch "Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance" von Wüthrich und Merz [22].

### 4.2 Schadenreservierung

#### 4.2.1 Grundlagen

Da Schäden im Allgemeinen nicht im selben Jahr, in dem sie auftreten abgewickelt werden, sondern zum Teil einen längeren Schadenverlauf mit sich bringen, muss die Versicherung ausreichend Reserven hinterlegen um die zukünftigen (Teil-)Zahlungen decken zu können. Ein typischer Schadenverlauf hat folgende Form:

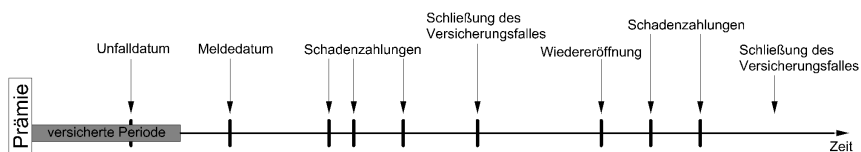


Abbildung 4.1: Typischer zeitlicher Verlauf eines Schadens im Nichtlebensversicherungsbereich

Wie aus der Skizze ersichtlich gibt es im Grunde drei Ursachen, warum ein Schaden nicht sofort abgewickelt werden kann. Ein Grund ist, dass es zu einer Verzögerung der Schadenmeldung kommt (Zeitdifferenz zwischen dem Schadeneintritt und der Meldung des Schadens an das Versicherungsunternehmen). Die Verzögerung kann zum Teil mehrere Jahre dauern, insbesondere in der Haftpflichtversicherung.

Nach der Schadenmeldung können mehrere Jahre vergehen, bevor der Schaden endgültig abgewickelt ist. Die Abwicklung variiert je nach Versicherungszweig stark, besonders wenn die Umstände die zum Schaden geführt haben noch nicht gänzlich geklärt sind.

In weiterer Folge kann es passieren, dass ein geschlossener Schadenfall wieder neu geöffnet werden muss aufgrund von neuen Entwicklungen.

## 4.2.2 Klassische Notation

Dieses Unterkapitel widmet sich der klassischen Schadenreservierungsnotation samt Definitionen und Bezeichnungsweisen. Im Allgemeinen werden die Schäden in Form von sogenannten Schadenabwicklungsdreiecken studiert. Diese beschreiben die Schäden entlang zweier Achsen:

Es gelten folgende Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 i \in \{0, \dots, I\} &= \text{Unfalljahr (vertikale Achse),} \\
 j \in \{0, \dots, J\} &= \text{Abwicklungsjahr (horizontale Achse),}
 \end{aligned}$$

wobei  $I$  das aktuelle Schadenjahr und  $J$  das letzte Abwicklungsjahr ist. Hierbei steckt implizit die Annahme, dass ein Schaden spätestens nach  $J$  Jahren abgewickelt ist. Weiters wird vorausgesetzt, dass  $I \geq J$ .  $X_{i,j}$  bezeichnet die Höhe aller Schadenzahlungen im Abwicklungsjahr  $j$  für das Unfalljahr  $i$ . Die

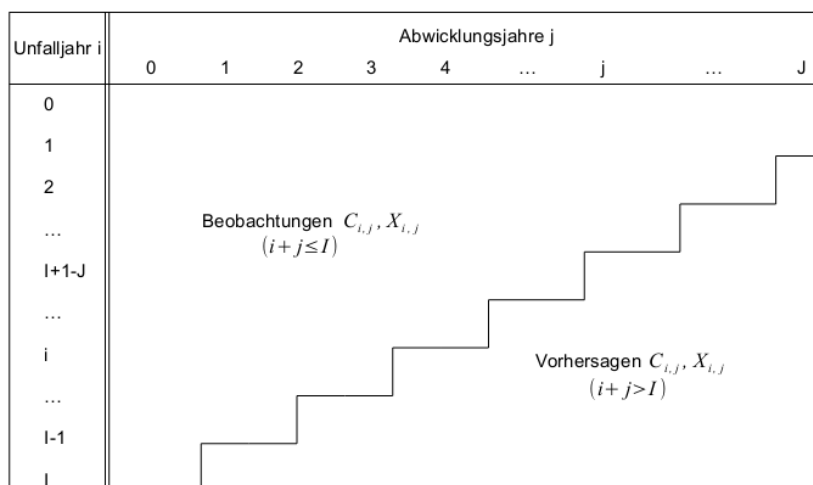


Abbildung 4.2: Schadenabwicklungsdreieck

kumulierten Schadenzahlungen werden bezeichnet mit

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$$

und es sei

$$\mathcal{B}_j = \{C_{i,k}; i+k \leq I, k \leq j\}.$$

die Menge der Beobachtungen bis zur Abwicklungsperiode  $j$  zum Zeitpunkt  $I$ .

Die inkrementellen Schadenzahlungen  $X_{i,j}$  wie auch die kumulierten Schadenzahlungen  $C_{i,j}$  sind jene Größen, die im Schadendreieck (siehe Figur 4.2) betrachtet werden. Zum Zeitpunkt  $I$  wird die Schadenabwicklungstabelle in zwei Dreiecke aufgeteilt: Das obere Dreieck beinhaltet die Beobachtungen  $X_{i,j}$  mit  $i+j \leq I$  und das untere Dreieck enthält die Schätzungen bzw. Vorhersagewerte der ausstehenden Zahlungen  $X_{i,j}$  mit  $i+j > I$ . Die Information des oberen Dreiecks wird beschrieben durch

$$\mathcal{D}_I = \{X_{i,j} : i+j \leq I, 0 \leq j \leq J\}$$

und jene Information des unteren Dreiecks, das noch zu schätzen ist

$$\mathcal{D}_I^c = \{X_{i,j} : i+j > I, i \leq I, j \leq J\}.$$

Die einzelnen Rechnungsjahre sind entlang der Diagonale mit der Indizierungsvorschrift  $i + j = k, k \geq 0$  gegeben. Die inkrementellen Schäden im Abrechnungsjahr  $k \geq 0$  werden bezeichnet mittels

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{i,j}.$$

$C_{i,J}$  bezeichnet die ultimative Schadenhöhe für das Unfalljahr  $i$  und die ausstehenden Schadenverpflichtungen für das Unfalljahr  $i$  zum Zeitpunkt  $j$  sind gegeben durch

$$R_{i,j} = \sum_{k=j+1}^J X_{i,k} = C_{i,J} - C_{i,j}.$$

$R_{i,j}$  werden auch als Schadenreserven bezeichnet und müssen geschätzt werden.

### 4.2.3 Basismethode: Chain-Ladder(CL) Verfahren

Das CL-Verfahren gehört zu den geläufigsten und gleichzeitig einfachsten in der Praxis verwendeten Verfahren für die Schätzung der Schadenreserven. In diesem Kapitel wird das verteilungsfreie CL-Verfahren vorgestellt.

#### Modellannahmen 4.2.1 Verteilungsfreies Chain-Ladder Modell

- Die kumulativen Zahlungen  $C_{i,j}$  verschiedener Unfalljahre  $i$  sind unabhängig.
- Es existieren Abwicklungsfaktoren  $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$  und Varianzparameter  $\sigma_0, \dots, \sigma_{J-1} > 0$  so, dass für alle  $0 \leq i \leq I$  und alle  $1 \leq j \leq J$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] &= \mathbb{E}[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}, \\ \text{Var}[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] &= \text{Var}[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Zu erwähnen ist, dass die beiden Annahmen nur die ersten beiden Momente der  $(C_{i,j})_{j \geq 0}$  betreffen - nicht jedoch die explizite Verteilung. Ein Modell, welches diese Modellannahmen erfüllt wird als erweitertes Mackmodell bezeichnet (siehe [11]).

**Lemma 4.2.1** *Unter den Modellannahmen 4.2.1 gilt*

$$\mathbb{E}[C_{i,J}|D_I] = \mathbb{E}[C_{i,J}|C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} f_{I-i} \cdots f_{J-1}$$

für alle  $1 \leq i \leq I$ .

*Beweis: siehe [22]*

Für bekannte CL-Faktoren  $f_j$  ergibt sich die Vorhersage für die ausstän-  
digen Schadenverpflichtungen des Unfalljahres  $i$  basierend auf  $\mathcal{D}_I$  mittels

$$\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - C_{i,I-i} = C_{i,I-i}(f_{I-i} \cdots f_{J-1} - 1).$$

Dieser Ausdruck wird auch als Best Estimate-Reserve (BE-Reserve) für das  
Unfalljahr  $i$  zum Zeitpunkt  $I$  (basierend auf der Information  $\mathcal{D}_I$  und be-  
kannten CL-Faktoren) bezeichnet. Da die CL-Faktoren im Allgemeinen nicht  
bekannt sind, müssen sie geschätzt werden. Die Parameter  $f_j$  und  $\sigma_j$  mit  
 $j = 0, \dots, J - 1$  werden wie folgt geschätzt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, \\ \hat{\sigma}_j^2 &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2. \end{aligned}$$

Der CL-Schätzer für  $\mathbb{E}[C_{i,j}|\mathcal{D}_I]$  ist gegeben durch

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \cdots \hat{f}_{j-1}$$

für  $i + j > I$ .

Nachdem die Schätzer eingeführt sind, ist es nun nötig eine Aussage über die  
Qualität des Schätzers zu machen. Für diesen Zweck wird der msep (mean  
squared error of prediction) eingesetzt.

Man nehme an  $\hat{X}$  sei ein  $\mathcal{D}$ -messbarer Schätzer für  $\mathbb{E}[X|\mathcal{D}]$  und ein  $\mathcal{D}$ -  
messbarer Schätzer für  $X$ .

**Definition 4.2.1** *Der bedingte msep des Schätzers  $\hat{X}$  für  $X$  ist definiert  
durch*

$$\text{msep}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X}) = \mathbb{E}[(\hat{X} - X)^2|\mathcal{D}].$$

Für den  $\mathcal{D}$ -messbaren Schätzer  $\hat{X}$  gilt:

$$\text{msep}_{X|\mathcal{D}}(\hat{X}) = \text{Var}(X|\mathcal{D}) + (\hat{X} - \mathbb{E}[X|\mathcal{D}])^2. \quad (4.1)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (4.1) ist die sogenannte bedingte  
Prozessvarianz (stochastischer Fehler oder auch Prozessfehler genannt), die  
die Variation innerhalb des stochastischen Modells beschreibt. Der zweite  
Term bezeichnet den Fehler der Parameterschätzung, der die Unsicherheit in  
der Schätzung der Parameter und der (bedingten) Erwartung beschreibt.

#### 4.2.4 Die Schadenabwicklung

Im Verlauf der Schadenabwicklung steht sukzessive immer mehr Information zur Verfügung. Die zukünftige Information zum Zeitpunkt  $k$  (wobei  $k = 0, \dots, J$ ) ist gegeben durch

$$\mathcal{D}_{I+k} = \{C_{i,j}; i+j \leq I+k, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}.$$

Im Mittelpunkt steht die Schätzung der ausstehenden Schadenzahlungen ( $\hat{=}$  Reserve) für das Unfalljahr  $i$  zum Zeitpunkt  $k$ , definiert durch  $C_{i,J} - C_{i,I-i+k}$  (man nehme an, dass  $I+k \leq i+J$ ). Zum Zeitpunkt  $k$  werden diese durch die Schadenreserven

$$\hat{R}_i^{(k)} = \hat{C}_{i,J}^{(k)} - C_{i,I-i+k}$$

geschätzt, wobei

$$\hat{C}_{i,J}^{(k)} = \mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}]$$

und

$$\hat{R}^{(k)} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i^{(k)}.$$

Von Jahr zu Jahr ist immer mehr Information in Form von Schadendaten vorhanden und die Vorhersagen müssen gemäß der neuesten vorhandenen Information angepasst werden. Dazu werden sukzessive die BE Schätzungen der ultimativen Schäden  $C_{i,J}$ , i.e.

$$\hat{C}_{i,J}^{(0)}, \hat{C}_{i,J}^{(1)}, \dots, \hat{C}_{i,J}^{(J+i-I-1)}, \hat{C}_{i,J}^{(J+i-I)} = C_{i,J}$$

betrachtet.

Deren Inkremente bestimmen das sogenannte (einjährige) Schadenabwicklungsergebnis [CDR (claims development result)]. Diese stehen unter der Solvency II-Richtlinie im Fokus der Berechnungen.

**Definition 4.2.2** Für das Rechnungsjahr  $k$  und Unfalljahr  $i$  wird das CDR definiert durch

$$\text{CDR}_i(k) = \hat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \hat{C}_{i,J}^{(k)}.$$

$\text{CDR}_i(k)$  enthält die aktuellste Information, die zum Zeitpunkt  $k$  (für das Unfalljahr  $i$ ) verfügbar ist. Insbesondere wird der Informationszuwachs  $\mathcal{D}_{I+k-1} \rightarrow \mathcal{D}_{I+k}$  beschrieben. Es bezieht sich auf die Änderung in der Gewinn- und Verlustrechnung (GuV) im Rechnungsjahr  $k$ . Ein negatives CDR bedeutet ein negatives Ergebnis in der GuV und hat zur Folge, dass zusätzliches Kapital benötigt wird. Die Berechnung der Risikomarge ist dazu nötig um sich vor möglichen Defiziten der Einjahres CDR's zu schützen. Daher ist es nötig die

Folge der CDR's zu analysieren. Für ein gegebenes Unfalljahr  $i$  betrachte man

$$\text{CDR}_i(1), \dots, \text{CDR}_i(J + i - I),$$

wobei

$$\text{CDR}_i(k) = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \widehat{R}_i^{(k-1)} - (X_{i,I-i+k} + \widehat{R}_i^{(k)}) \quad (4.2)$$

und  $X_{i,I-i+k} = C_{i,I-i+k} - C_{i,I-i+k-1}$  die inkrementellen Zahlungen für das Unfalljahr  $i$  im Rechnungsjahr  $k$  bezeichnet.

Das gesamte CDR für ein bestimmtes Rechnungsjahr ergibt sich als

$$\text{CDR}(k) = \sum_{i=0}^I \text{CDR}_i(k).$$

Die Schwankungen des CDR um 0 können durch den msep in folgender Weise beschrieben werden (vgl. [13]):

$$\begin{aligned} \text{msep}_{\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \mathbb{E} \left[ (\text{CDR}_i(1) - 0)^2 \middle| \mathcal{D}_I \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,J}^{(1)})^2 \middle| \mathcal{D}_I \right]. \end{aligned}$$

Unter dem verteilungsfreien Mackmodell (siehe Modellannahmen 4.2.1) gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{msep}}_{\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I}(0) &= (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 \left[ \frac{(\widehat{\sigma}_{I-i}^{(0)})^2 / (\widehat{f}_{I-i}^{(0)})^2}{C_{i,I-i}} + \frac{(\widehat{\sigma}_{I-i}^{(0)})^2 / (\widehat{f}_{I-i}^{(0)})^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}} \frac{(\widehat{\sigma}_j^{(0)})^2 / (\widehat{f}_j^{(0)})^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right] \end{aligned}$$

und weiters für das gesamte  $\mathcal{D}_I$ -messbare CDR

$$\begin{aligned} \widehat{\text{msep}}_{\text{CDR}(1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \sum_i \widehat{\text{msep}}_{\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I}(0) + 2 \sum_{i < l} \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \widehat{C}_{l,J}^{(0)} \left[ \frac{(\widehat{\sigma}_{I-i}^{(0)})^2 / (\widehat{f}_{I-i}^{(0)})^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}} \frac{(\widehat{\sigma}_j^{(0)})^2 / (\widehat{f}_j^{(0)})^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right]. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Für jedes weitere Jahr  $k = 1, \dots, I$  und  $i > k$  ergibt sich das  $\text{CDR}_i$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mse}}_{\text{P}_{\text{CDR}_i(k+1)|\mathcal{D}_{I+k}}}(0) &= (\widehat{C}_{i,J}^{(k)})^2 \left[ \frac{(\widehat{\sigma}_{I+k-i}^{(k)})^2 / (\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)})^2}{C_{i,I+k-i}} \right. \\ &+ \frac{(\widehat{\sigma}_{I+k-i}^{(k)})^2 / (\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)})^2}{\sum_{l=0}^{i-1} C_{l,I+k-i}} \\ &+ \left. \sum_{j=I+k-i+1}^{J-1} \frac{C_{I+k-j,j}}{\sum_{l=0}^{I+k-j} C_{l,j}} \frac{(\widehat{\sigma}_j^{(k)})^2 / (\widehat{f}_j^{(k)})^2}{\sum_{l=0}^{I+k-j-1} C_{l,j}} \right] \end{aligned}$$

und weiters für das gesamte  $\mathcal{D}_{I+k}$ -messbare CDR

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mse}}_{\text{P}_{\text{CDR}(k+1)|\mathcal{D}_{I+k}}}(0) &= \sum_i \widehat{\text{mse}}_{\text{P}_{\text{CDR}_i(k+1)|\mathcal{D}_{I+k}}}(0) \\ &+ 2 \sum_{i < l} \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \widehat{C}_{l,J}^{(k)} \left[ \frac{(\widehat{\sigma}_{I+k-i}^{(k)})^2 / (\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)})^2}{\sum_{l=0}^{i-1} C_{l,I+k-i}} \right. \\ &+ \left. \sum_{j=I+k-i+1}^{J-1} \frac{C_{I+k-j,j}}{\sum_{l=0}^{I+k-j} C_{l,j}} \frac{(\widehat{\sigma}_{j+k}^{(k)})^2 / (\widehat{f}_{j+k}^{(k)})^2}{\sum_{l=0}^{I+k-j-1} C_{l,j}} \right]. \quad (4.4) \end{aligned}$$

$\widehat{\sigma}_{j+k}^{(k)}$  und  $\widehat{f}_{j+k}^{(k)}$  bezeichnen die  $\mathcal{D}_{I+k}$ -messbaren Schätzungen für  $\sigma_{j+k}$  und  $f_{j+k}$ .



### 4.3 Mathematische Beschreibung der Simplifications

Mithilfe der vorgestellten Größen und Ausdrücke lässt sich das  $\text{SCR}(t)$  (in der CoC-Formel) auf mathematische Weise ausdrücken. Es gilt

$$\text{SCR}(t) = \rho(\text{CDR}(t+1)|\mathcal{D}_{I+t}). \quad (4.5)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho$  ein Risikomaß, wie z.B. der in [17] vorgeschlagene VaR oder die Varianz. In den ersten beiden Modellen wird die Risikomarge mithilfe der CoC-Methode in dieser Form berechnet.

- $S_1$ : Für vereinfachende Methoden aus  $S_1$  gibt es keine einheitlichen Vorgaben für deren Umsetzungen. Je nach verwendetem Modell werden individuelle Teilrisiken bzw. Teilmodule in einer bestimmten Form vereinfacht.

Beispielsweise wird das  $\text{SCR}(t)$  insofern approximiert, dass die gegebene Information  $\mathcal{D}_{I+t}$  durch  $\mathcal{D}_I$  ersetzt wird, i.e.

$$\rho(\text{CDR}(t+1)|\mathcal{D}_{I+t}) \rightarrow \rho(\text{CDR}(t+1)|\mathcal{D}_I).$$

- $S_2$ : In der vereinfachenden Methode  $S_2$  werden die  $\text{SCR}(t)$  mit  $t = 0, \dots, J-1$  in folgender Form vereinfacht ( $I+t \leq i+J$ ):

$$\text{SCR}(t) = \text{SCR}(0) \frac{\mathbb{E}(\widehat{R}^{(t)})}{\widehat{R}^{(0)}},$$

wobei

$$\frac{\mathbb{E}(\widehat{R}^{(t)})}{\widehat{R}^{(0)}} = \sum_{i=I+t+1-J}^I \frac{\mathbb{E}(\widehat{R}_i^{(t)})}{\widehat{R}^{(0)}} = \sum_{i=I+t+1-J}^I \frac{\mathbb{E}[\widehat{C}_{i,J}^{(t)} - C_{i,I-i+t}]}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}}.$$

Für die gesamte Risikomarge gilt schließlich:

$$\begin{aligned} RM &= c \sum_{t=0}^{J-1} \text{SCR}(t) = c \text{SCR}(0) \sum_{t=0}^{J-1} \frac{\sum_{i=I+t+1-J}^I \mathbb{E}[\widehat{C}_{i,J}^{(t)} - C_{i,I-i+t}]}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}} \\ &= c \text{SCR}(0) \sum_{t=1}^J \frac{\sum_{i=I+t-J}^I \mathbb{E}[\widehat{C}_{i,J}^{(t-1)} - C_{i,I-i+t-1}]}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}} \end{aligned}$$

Der Ausdruck muss mittels Simulation ausgewertet werden, da  $\mathbb{E}[\widehat{R}_i^{(t)}] = \mathbb{E}[\widehat{C}_{i,J}^{(t)} - C_{i,I-i+t}]$  eine ( $\mathcal{D}_{I+t}$ -messbare) Zufallsvariable ist.

- $S_3$ : Die Methode  $S_3$  wurde erstmals von Ohlsson und Lauzenings [14] beschrieben. Hierbei betrachtet man ein Abwicklungsmuster  $p_1, \dots, p_J$ , wobei  $\sum_t p_t = 1$ . Dieses wird in Form von BE-Reserven ähnlich wie in der vorherigen Methode aus dem Schadendreieck  $\mathcal{D}_I$  gewonnen. Für  $p_k$  mit  $k = 1, \dots, J$  gilt ( $I + k \leq i + J$ ):

$$p_k = \sum_{i=I+k-J}^I \frac{\widehat{C}_{i,I-i+k}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-i}}.$$

Dabei bezeichnet  $\sum_{k=t}^J p_k$  jenen Teil des Abwicklungsmusters, der zu Beginn des Jahres  $t - 1$  übrig ist. Als Approximation für  $SCR(t - 1)$  ergibt sich

$$SCR(t - 1) \approx SCR(0) \cdot \sum_{k=t}^J p_k.$$

Als Risikomarge erhält man somit

$$\begin{aligned} RM &= c SCR(0) \sum_{t=1}^J \sum_{k=t}^J p_k \\ &= c SCR(0) \sum_{t=1}^J \sum_{k=t}^J \sum_{i=I+k-J}^I \frac{\widehat{C}_{i,I-i+k}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-i}} \\ &\stackrel{I+k \leq i+J}{=} c SCR(0) \sum_{t=1}^J \frac{\sum_{i=I+t-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i+t-1}^{(0)}}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}}. \end{aligned}$$

- $S_4$ : Die Methode  $S_4$  lässt sich in folgender Form ausdrücken:

$$RM = \alpha_{LoB} \widehat{R}^{(0)},$$

wobei  $\alpha_{LoB}$  einen Prozentsatz darstellt, der je nach Sparte einen Wert zwischen 4% und 17% annimmt.

# Kapitel 5

## Analyse von Risikomargemodellen

Dieses Kapitel widmet sich der genaueren Analyse von drei sehr aktuellen, mathematisch konsistenten Modellen zur Berechnung der Risikomarge.

Bei den ersten beiden Modellen handelt es sich um Ansätze basierend auf der CoC-Methode. In den folgenden zwei Abschnitten werden die beiden Modelle genauer vorgestellt und es werden die Simplifications unter diesen Modellen hergeleitet.

Im dritten Abschnitt wird ein weiteres Modell vorgestellt, dessen Ansatz zur Risikomargenberechnung ökonomisch motiviert ist. Dazu wird die Technik der Wahrscheinlichkeitsverzerrung eingesetzt. Zu bemerken ist, dass dieses Modell nicht auf dem gemäß [17] geforderten CoC-Ansatz basiert, sondern als interessante Alternative zu sehen ist.

Im letzten Abschnitt folgt schließlich eine Analyse der ersten beiden Modelle anhand eines Datenbeispiels. Dabei werden die verschiedenen Simplifications wie auch Modelle untereinander verglichen.

### 5.1 Modell 1: Ansatz von Salzmann und Wüthrich

Dieses Kapitel wendet sich dem von Salzmann und Wüthrich im Paper "Cost-of-Capital Margin for a General Insurance Liability Runoff" [20] erarbeiteten Modell für die Risikomarge zu.

Das Paper behandelt den ersten streng mathematischen, mehrperiodigen Cost-of-Capital Ansatz für einen allgemeinen Verlauf von Versicherungsverpflichtungen (innerhalb des Chain Ladder Rahmens).

Die Schadenreservierung wird im Rahmen eines Bayes'schen CL Modells beschrieben (vgl. Gisler und Wüthrich [4]). Dieses bietet einen einheitlichen

Ansatz zur Berücksichtigung der sukzessiven Informationsgewinnung in jedem Rechnungsjahr.

### 5.1.1 Bayes'sches Chain Ladder Modell

Im Rahmen eines Bayes'schen CL Modells wird angenommen, dass die unbekannt CL-Faktoren  $f_j, j = 0, \dots, J - 1$  Realisierungen von unabhängigen, reellwertigen Zufallsvariablen  $\tilde{F}_j$  sind. Es sei

$$\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{J-1})$$

der Zufallsvektor der  $\tilde{F}_j$  und

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{J-1})$$

eine Realisation von  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Im Bayes'schen CL-Modell wird weiters angenommen, dass gegeben  $\tilde{\mathbf{F}}$  die Modellannahmen 4.2.1 erfüllt sind.

Die individuellen Schadenabwicklungsfaktoren werden definiert durch  $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$  für  $j = 1, \dots, J$ . Die kumulierten Zahlungen  $C_{i,j}$  sind dabei gegeben durch

$$C_{i,j} = C_{i,0} \prod_{m=1}^j F_{i,m}.$$

Der Prozess  $(C_{i,j})_{j=0, \dots, J}$  besitzt als Startwert die erste Zahlung  $C_{i,0}$  und die  $F_{i,j}$  bezeichnen die multiplikativen Veränderungen.

#### Modellannahmen 5.1.1 Bayes'sches Chain Ladder Modell

- *Bedingt auf  $\tilde{\mathbf{F}}$  sind die Zufallsvariablen  $C_{i,j}$  unabhängig für die verschiedenen Unfalljahre  $i \in \{0, \dots, I\}$ .*
- *Die bedingte Verteilung von  $F_{i,j}$  gegeben  $\tilde{\mathbf{F}}$  und  $\mathcal{B}_{j-1}$  hängt nur von  $C_{i,j-1}$  ab und es gilt, dass*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_{i,j} | \tilde{\mathbf{F}}, \mathcal{B}_{j-1}] &= \tilde{F}_{j-1}, \\ \text{Var}[F_{i,j} | \tilde{\mathbf{F}}, \mathcal{B}_{j-1}] &= \frac{\sigma_j^2(\tilde{F}_{j-1})}{C_{i,j-1}}. \end{aligned}$$

- *$\{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{J-1}\}$  sind unabhängig.*

Im Folgenden wird der Bayes Schätzer des ultimativen Schadens hergeleitet.

**Definition 5.1.1** Ein Schätzer  $\widehat{Z}$  einer Zufallsvariablen  $Z$  ist zumindest so gut wie ein Schätzer  $\widetilde{Z}$ , falls

$$\mathbb{E}\left[(\widehat{Z} - Z)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(\widetilde{Z} - Z)^2\right].$$

**Satz 5.1.1** Sei  $Z$  eine Zufallsvariable und  $\mathbf{X}$  ein Zufallsvektor von Beobachtungen. Dann ist der beste Schätzer von  $Z$ :

$$Z^{Bayes} = \mathbb{E}[Z|\mathbf{X}].$$

$Z^{Bayes}$  wird bezeichnet als Bayes-Schätzer von  $Z$ .  $Z^{Bayes}$  minimiert den bedingten quadratischen Fehler, i.e.

$$Z^{Bayes} = \arg \min_{\widehat{Z}} \mathbb{E}\left[(\widehat{Z} - Z)^2\right].$$

Im Bayes Modell ist der beste Schätzer für den ultimativen Schaden  $C_{i,J}$

$$C_{i,J}^{Bayes} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{J-1} F_j^{Bayes}.$$

## Bayes'sche Inferenz

- Es seien  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  die Realisierungen des Datenvektors  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$
- Sei  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  der Parametervektor mit Werten in  $\Theta$  und  $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  die Dichtefunktion des Datenvektors gegeben  $\boldsymbol{\theta}$ .

Die Priori Verteilung bezeichnet die Verteilung der Parameter vor der Beobachtung des Datenvektors  $\mathbf{X}$ . Die Dichte der Priori Verteilung von  $\boldsymbol{\theta}$  wird bezeichnet mit  $p(\boldsymbol{\theta})$ .

Die Posteriori Verteilung ist die Verteilung der Parameter nach Beobachtung der Daten, i.e.

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{X})} \stackrel{\text{proportional}}{\propto} \stackrel{\text{bzgl. } \boldsymbol{\theta}}{f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})},$$

wobei  $f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X})$  und  $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X})$  die Likelihoodfunktion bezeichnet und

$$f(\mathbf{X}) = \int_{\Theta} f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}.$$

Mit Hilfe der Posteriori Verteilung lässt sich der Posteriori Erwartungswert von  $\boldsymbol{\theta}$  folgendermaßen bestimmen:

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \int_{\Theta} \boldsymbol{\theta}f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})d\boldsymbol{\theta}.$$

### 5.1.2 Gamma-Gamma Bayes Chain Ladder Modell

Im folgenden Modell wird angenommen, dass die zugrunde liegenden Abwicklungsfaktoren durch die Zufallsvariablen  $\Theta_1^{-1}, \dots, \Theta_J^{-1}$  beschrieben werden.

#### Modellannahmen 5.1.2 Gamma-Gamma Bayes Chain Ladder Modell

- Bedingt auf  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_J)$ 
  - sind die kumulativen Zahlungen  $C_{i,j}$  unabhängig für verschiedene Unfalljahre  $i$ .
  - sind  $C_{i,0}, F_{i,1}, \dots, F_{i,J}$  unabhängig mit (vgl. mit Definition A.1)

$$F_{i,j} | \Theta \sim \Gamma(\sigma_j^{-2}, \Theta_j \sigma_j^{-2}) \quad \text{für } j = 1, \dots, J,$$

wobei die  $\sigma_j$ 's gegebene positive Priori Konstanten sind.

- $C_{i,0}$  und  $\Theta$  sind unabhängig.
- $\Theta_1, \dots, \Theta_J$  sind unabhängig mit  $\Theta_j \sim \Gamma(\gamma_j, f_j(\gamma_j - 1))$  mit Priori Parameter  $f_j > 0$  und  $\gamma_j > 2$ .

Das Gamma-Gamma Bayes CL Modell gehört zur Exponentialfamilie (siehe Bühlmann und Gisler [4]). Für Modelle aus der Exponentialfamilie lässt sich die Posteriori Verteilung von  $\Theta$ , gegeben die Beobachtungen  $F_{i,j}$ , explizit berechnen (siehe [4]). Für die meisten anderen Modelle sind nur numerische Lösungen verfügbar (vgl. mit [20]).

Bedingt auf  $\Theta$  erhält man ein CL-Modell mit den ersten beiden Momenten gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{i,j} | \Theta, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] &= \mathbb{E}[C_{i,j-1} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} | \Theta, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] \\ &= C_{i,j-1} \mathbb{E}[F_{i,j} | \Theta] = C_{i,j-1} \Theta_j^{-1}, \\ \text{Var}(C_{i,j} | \Theta, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}) &= \text{Var}(C_{i,j-1} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} | \Theta, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}) \\ &= C_{i,j-1}^2 \text{Var}(F_{i,j} | \Theta) = C_{i,j-1}^2 \sigma_j^2 \Theta_j^{-2}. \end{aligned}$$

Hierbei spielt  $\Theta_j^{-1}$  die Rolle des CL-Faktors. Weiters gilt für die Momente von  $\Theta_j$  (siehe [20])

$$\mathbb{E}[\Theta_j^{-1}] = f_j, \quad \mathbb{E}[\Theta_j^{-2}] = f_j^2 \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j - 2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(\Theta_j^{-1}) = f_j^2 \frac{1}{\gamma_j - 2}$$

Um die Existenz der zweiten Momente zu sichern muss gelten, dass  $\gamma_j > 2$ .

### 5.1.3 Der Parameter Update Prozess

Zum Zeitpunkt  $k$  ist die Information  $\mathcal{D}_{I+k}$  vorhanden und es sind die ausstehenden Schadenzahlungsverpflichtungen  $C_{i,J} - C_{i,I-i+k}$  zu schätzen. Das Modell muss gemäß der neuen Information im Schadenabwicklungsprozess sukzessive angepasst werden. Der folgende Satz beschreibt den 'Parameter Update Prozess' für die Posteriori Verteilung von  $\Theta_j$ .

**Satz 5.1.2** *Unter den Modellannahmen 4.2.1 ergibt sich, dass die Posteriori Verteilungen der  $\Theta_j$  bedingt auf  $\mathcal{D}_{I+k}$  unabhängige Gammaverteilungen sind mit Parameter*

$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_j + \frac{((I+k-j) \wedge I) + 1}{\sigma_j^2} \quad \text{und} \quad c_j^{(k)} = f_j(\gamma_j - 1) + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{(I+k-j) \wedge I} F_{i,j}.$$

*Beweis:* Es sei  $p_i$  die Verteilung von  $C_{i,0}$ . Dann gilt für die gemeinsame Verteilung von  $(\Theta, \mathcal{D}_{I+k})$ :

$$\begin{aligned} p(\Theta, \mathcal{D}_{I+k}) &= p(\Theta | \mathcal{D}_{I+k}) p(\mathcal{D}_{I+k}) = p(\mathcal{D}_{I+k} | \Theta) p(\Theta) = \\ &\prod_{i+j \leq I+k} \frac{(\Theta_j \sigma_j^{-2})^{\sigma_j^{-2}}}{\Gamma(\sigma_j^{-2})} F_{i,j}^{\sigma_j^{-2}-1} \exp\{-\Theta_j \sigma_j^{-2} F_{i,j}\} \\ &\times \prod_{j=1}^J \frac{(f_j(\gamma_j - 1))^{\gamma_j}}{\Gamma(\gamma_j)} \Theta_j^{\gamma_j-1} \exp\{-f_j(\gamma_j - 1)\Theta_j\} \prod_{i=0}^I p_i(C_{i,0}). \end{aligned}$$

Daher gilt für die Posteriori Dichte von  $\Theta$  gegeben  $\mathcal{D}_{I+k}$  folgendes Resultat:

$$p(\Theta | \mathcal{D}_{I+k}) \propto \prod_{j=1}^J \Theta_j^{\gamma_j + \frac{(I+k-j) \wedge I + 1}{\sigma_j^2} - 1} \exp\left[-\left(f_j(\gamma_j - 1) + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{(I+k-j) \wedge I} F_{i,j}\right) \Theta_j\right]$$

Dies sind unabhängige Dichtefunktionen einer Gammaverteilung, was den Satz beweist.  $\square$

**Korollar 5.1.1** *Unter den Annahmen von Satz 5.1.2 erhält man*

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\Theta_j^{-1} | \mathcal{D}_{I+k}] = \frac{c_j^{(k)}}{\gamma_j^{(k)} - 1} = \alpha_j^{(k)} \overline{F}_j^{(k)} + (1 - \alpha_j^{(k)}) f_j, \\ \mathbb{E}[\Theta_j^{-2} | \mathcal{D}_{I+k}] &= \frac{(c_j^{(k)})^2}{(\gamma_j^{(k)} - 1)(\gamma_j^{(k)} - 2)} = (\widehat{f}_j^{(k)})^2 \frac{\gamma_j^{(k)} - 1}{\gamma_j^{(k)} - 2}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{F}_j^{(k)} &= \frac{1}{((I+k-j) \wedge I) + 1} \sum_{i=0}^{(I+k-j) \wedge I} F_{i,j}, \\ \alpha_j^{(k)} &= \frac{((I+k-j) \wedge I) + 1}{((I+k-j) \wedge I) + 1 + \sigma_j^2(\gamma_j - 1)}.\end{aligned}$$

In rekursiver und entsprechend praktikabler Form lautet der Parameter Update Prozess wie folgt:

**Korollar 5.1.2** Für  $k \geq 1$  und  $j \geq k$  gilt

$$\hat{f}_j^{(k)} = a_j^{(k)} F_{I+k-j,j} + (1 - a_j^{(k)}) \hat{f}_j^{(k-1)},$$

wobei

$$a_j^{(k)} = (I + k - j + 1 + \sigma_j^2(\gamma_j - 1))^{-1}.$$

*Beweis:* folgt aus Korollar 5.1.1.

#### 5.1.4 Schätzung des Gesamtschadens

Der folgende Satz liefert die Best Estimate Schätzung der ultimativen Schadenzahlung  $C_{i,J}$  im Bayes'schen CL-Modell

**Satz 5.1.3** Man nehme an die Annahmen von Satz 5.1.2 gelten. Der Schätzer von  $C_{i,J}$  mit minimaler bedingter Varianz (gegeben  $\mathcal{D}_{I+k}$ ) ist gegeben durch  $\hat{C}_{i,j}^{(k)} = \mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}]$ . Für  $I+k < i+J$  erhält man

$$\hat{C}_{i,j}^{(k)} = \mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}] = C_{i,I-i+k} \prod_{j=I-i+k+1}^J \hat{f}_j^{(k)}.$$

*Beweis:* Folgt aus Satz 5.1.1 und der Posteriori Unabhängigkeit der  $\Theta_j$ .

Zu beachten ist, dass im Bayes CL-Modell die CL-Faktoren  $\hat{f}_j^{(k)}$  gewichtete Durchschnitte der Priori Parameter  $f_j$  und der Beobachtungen  $\bar{F}_j^{(k)}$  sind. Für nicht-informative Priori Parameter (i.e.  $\gamma_j \rightarrow 1$  und daher  $\alpha_j^{(k)} \rightarrow 1$ ) erhält man einen CL-Faktor Schätzer  $\hat{C}_{i,j}^{(k)}$ , der nur von den Beobachtungen  $\bar{F}_j^{(k)}$  abhängt.

Im weiteren Verlauf werden nun die Unsicherheiten in den CDRs charakterisiert. Das folgende Korollar besagt, dass die BE Schätzungen ein Martingal bilden.



**Korollar 5.1.3** *Unter den Modellannahmen 5.1.2 gilt*

$$\mathbb{E}[\text{CDR}_i(k)|\mathcal{D}_{I+k-1}] = 0.$$

*Weiters gilt, dass die CDR's unkorreliert sind, i.e. für  $k \geq 1, l \leq J$  und  $m < \max(k, l)$  gilt, dass*

$$\mathbb{E}[\text{CDR}_i(k) \text{CDR}_i(l)|\mathcal{D}_{I+m}] = 0.$$

### 5.1.5 CoC-Marge

Für das Unfalljahr  $i$  bestimmt  $\text{CDR}_i(k)$  die Menge, die aufzuwenden ist, um die Schadenreserven anzupassen. Daraus ergibt sich die BE Reserve für das Rechnungsjahr  $k$ . Als Schutz gegen Defizite bzgl. der CDRs im Rechnungsjahr  $k$  wird ein Risikomaß  $\rho_k$  gewählt. Sei  $c > 0$  die CoC Rate, dann ergibt sich als aufsichtsrechtlicher Preis für den Schutz gegenüber einer ungünstigen Entwicklung  $c\rho_k$ .

Folglich muss das Versicherungsunternehmen zuzüglich zu den Schadenreserven  $\widehat{R}_i^{(k)}$  Reserven für den CoC-Cashflow

$$c\rho_{k+1}, \dots, c\rho_{J+i-I}$$

bilden. Man nehme an, dass  $\widehat{\text{CoC}}_i^{(k)}$  die Reserven bezeichnen, die die aggregierten CoC-Cashflows  $c\rho_{k+1}, \dots, c\rho_{J+i-I}$  decken. Folglich erhält man die risikoadjustierten Schadenreserven zum Zeitpunkt  $k$  (basierend auf der Information  $\mathcal{D}_{I+k}$ ) durch

$$\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} = \widehat{R}_i^{(k)} + \widehat{\text{CoC}}_i^{(k)}.$$

$\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}$  kann man hierbei als marktkonsistenten Preis für die ausstehenden Verbindlichkeiten in einem unvollständigen Markt sehen bzw. als Preis des Risikos zu dem die ausstehenden Verpflichtungen an ein anderes Unternehmen zum Zeitpunkt  $k$  übertragen werden können.

Im Folgenden wird ein ganzheitlicher Ansatz  $\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}$  zur Berechnung der Schadenreserve vorgestellt. Anschließend werden die vereinfachten Ansätze aus Kapitel 3.2 unter diesem Modell untersucht. Dazu werden jeweils 2 Modelle  $S1.1$  und  $S1.2$  aus dem Level 1 und jeweils ein Modell für die weiteren Levels ( $S2, S3$  und  $S4$ ) vorgestellt.

### 5.1.6 Vorbereitungen

Für  $I + k \leq J + i$  und  $i, k \geq 1$  werden die Konstanten

$$\beta_{i,k} = (\sigma_{I+k-i}^2 + 1) \frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 1}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 2} \prod_{j=I+k-i+1}^J \left[ (a_j^{(k)})^2 \left( (\sigma_j^2 + 1) \frac{\gamma_j^{(k-1)} - 1}{\gamma_j^{(k-1)} - 2} - 1 \right) + 1 \right]$$

und

$$\delta_{i,k} = \beta_{i,k} \left[ a_{I+k-i}^{(k)} + (1 - a_{I+k-i}^{(k)}) (\sigma_{I+k-i}^2 + 1)^{-1} \frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 2}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 1} \right]$$

definiert.

Wegen

$$(\sigma_j^2 + 1) > 1, \gamma_j^{(k-1)} > 2 \text{ und } \frac{\gamma_j^{(k-1)} - 1}{\gamma_j^{(k-1)} - 2} > 1 \quad \forall j, k$$

sieht man leicht, dass  $\beta_{i,k} > 1$  und da die  $a_j^{(k)}$ 's und  $\gamma_j^{(k)}$ 's (wie an Ihrer Darstellung ersichtlich (siehe Satz 5.1.2)) nicht von den Beobachtungen  $C_{i,j}$  abhängen, gilt dies auch für  $\beta_{i,k}$ .

Dies ist eine wesentliche Eigenschaft der Modellannahmen 5.1.2, die in den weiteren Herleitungen nötig ist.

Korollar 5.1.3 impliziert, dass die ganze Unsicherheit betrachtet vom Zeitpunkt 0 in einzelne Einjahres-Unsicherheiten für verschiedene Rechnungsjahre aufgeteilt werden kann. Dies geschieht wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(C_{i,J} | \mathcal{D}_I) &= \text{Var} \left( \sum_{k=1}^{J+i-I} \text{CDR}_i(k) \middle| \mathcal{D}_I \right) = \sum_{k=1}^{J+i-I} \text{Var}(\text{CDR}_i(k) | \mathcal{D}_I) \\ &= \sum_{k=1}^{J+i-I} \mathbb{E}[\text{CDR}_i^2(k) | \mathcal{D}_I] = \sum_{k=1}^{J+i-I} \mathbb{E}[\text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} | \mathcal{D}_{I+k-1}) | \mathcal{D}_I]. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit wurde die Unkorreliertheit der CDR's verwendet.

**Satz 5.1.4** *Unter den Modellannahmen 5.1.2 erhält man, für  $I + k \leq J + i$*

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} | \mathcal{D}_{I+k-1}) &= (\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)})^2 (\beta_{i,k} - 1), \\ \text{Var}(\text{CDR}_i(k) | \mathcal{D}_I) &= (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j} (\beta_{i,k} - 1). \end{aligned}$$

*Beweis:* Für  $I + k \leq J + i$  gilt

$$\text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} | \mathcal{D}_{I+k-1}) = \text{Var}\left(C_{i,I+k-i} \prod_{j=I+k-i+1}^J \widehat{f}_j^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right).$$

Mithilfe von Korollar 5.1.2 lassen sich die CL-Schätzer  $\widehat{f}_j^{(k)}$  folgendermaßen darstellen:

$$\widehat{f}_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} \overline{F}_j^{(k)} + (1 - \alpha_j^{(k)}) f_j = a_j^{(k)} F_{I+k-j,j} + (1 - a_j^{(k)}) \widehat{f}_j^{(k-1)}.$$

Daraus folgt, dass  $\widehat{f}_j^{(k)}$  gegeben  $\mathcal{D}_{I+k-1}$  nur in  $F_{I+k-j,j}$  zufällig ist. Aufgrund der Posteriori Unabhängigkeit von  $\Theta_1, \dots, \Theta_J$  gegeben  $\mathcal{D}_{I+k-1}$  und der Tatsache, dass alle involvierten Zufallsvariablen nur von verschiedenen Unfalljahren und Abwicklungsjahren abhängen, sieht man, dass  $C_{i,I+k-i}, \widehat{f}_{I+k-i+1}^{(k)}, \dots, \widehat{f}_J^{(k)}$  unabhängig sind, gegeben  $\mathcal{D}_{I+k-1}$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left( C_{i,I+k-i} \prod_{j=I+k-i+1}^J \widehat{f}_j^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1} \right) \\ &= \mathbb{E} [ C_{i,I+k-i}^2 | \mathcal{D}_{I+k-1} ] \prod_{j=I+k-i+1}^J \mathbb{E} \left[ (\widehat{f}_j^{(k)})^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1} \right] \\ & \quad - \mathbb{E} [ C_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1} ]^2 \prod_{j=I+k-i+1}^J \mathbb{E} [ \widehat{f}_j^{(k)} | \mathcal{D}_{I+k-1} ]^2 \\ &= C_{i,I+k-i-1}^2 \left( \mathbb{E} [ F_{i,I+k-i}^2 | \mathcal{D}_{I+k-1} ] \prod_{j=I+k-i+1}^J \mathbb{E} \left[ (\widehat{f}_j^{(k)})^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1} \right] \right. \\ & \quad \left. - \prod_{j=I+k-i}^J (\widehat{f}_j^{(k-1)})^2 \right). \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [ F_{i,I+k-i}^2 | \mathcal{D}_{I+k-1} ] &= \mathbb{E} [ \mathbb{E} [ F_{i,I+k-i}^2 | \Theta, \mathcal{D}_{I+k-1} ] | \mathcal{D}_{I+k-1} ] \\ &= \mathbb{E} [ \text{Var} ( F_{i,I+k-i} | \Theta ) + \mathbb{E} [ F_{i,I+k-i} | \Theta ]^2 | \mathcal{D}_{I+k-1} ] \\ &= (\sigma_{I+k-i}^2 + 1) \mathbb{E} [ \Theta_{I+k-i}^{-2} | \mathcal{D}_{I+k-1} ] \\ &= (\sigma_{I+k-i}^2 + 1) (\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)})^2 \frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 1}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ (\widehat{f}_j^{(k)})^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1} \right] &= \text{Var} (\widehat{f}_j^{(k)} \mid \mathcal{D}_{I+k-1}) + (\widehat{f}_j^{(k-1)})^2 \\
&= (a_j^{(k)})^2 \text{Var} (F_{I+k-j,j} \mid \mathcal{D}_{I+k-1}) + (\widehat{f}_j^{(k-1)})^2 \\
&= (\widehat{f}_j^{(k-1)})^2 \left[ (a_j^{(k)})^2 \left( (\sigma_j^2 + 1) \frac{\gamma_j^{(k-1)} - 1}{\gamma_j^{(k-1)} - 2} - 1 \right) + 1 \right].
\end{aligned}$$

Dies beweist die erste Behauptung des Satzes. Weiters gilt

$$\text{Var}(\text{CDR}_i(k) \mid \mathcal{D}_I) = \mathbb{E}[\text{CDR}_i^2(k) \mid \mathcal{D}_I] = \mathbb{E}[\text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \mid \mathcal{D}_{I+k-1}) \mid \mathcal{D}_I].$$

Daraus folgt (zusammen mit der ersten Behauptung des Satzes), dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \mid \mathcal{D}_{I+k-1}) \mid \mathcal{D}_I] &= (\beta_{i,k} - 1) \mathbb{E} \left[ (\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)})^2 \middle| \mathcal{D}_I \right] \\
&= (\beta_{i,k} - 1) \mathbb{E} \left[ \text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} \mid \mathcal{D}_{I+k-2}) + (\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)})^2 \middle| \mathcal{D}_I \right].
\end{aligned}$$

Der Satz folgt durch Iteration des Arguments.  $\square$

Aus Satz 5.1.4 folgt:

**Korollar 5.1.4 Aggregierte einjährige Risiken.** *Unter den Modellannahmen 5.1.2 erhält man*

$$\begin{aligned}
\text{Var}(C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I) &= \text{Var} \left( \sum_{k=1}^{J+i-I} \text{CDR}_i(k) \middle| \mathcal{D}_I \right) = (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 \left[ \prod_{k=1}^{J+i-I} \beta_{i,k} - 1 \right] \\
&= (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 \left[ \prod_{j=I-i+1}^J \left( (\sigma_j^2 + 1) \frac{\gamma_j^{(0)} - 1}{\gamma_j^{(0)} - 2} \right) - 1 \right].
\end{aligned}$$

*Beweis:* siehe [20].

### 5.1.7 Vollständige Risikomargeberechnung

Dieser Abschnitt beschreibt einen Ansatz, der versucht möglichst jedes Risiko bei der Berechnung vollständig zu berücksichtigen. Der vorliegende Ansatz beinhaltet insbesondere die Unsicherheit der CoC-Cashflows  $c\rho_k$  selbst. Dazu ist eine rekursive Berechnung nötig - basierend auf einer Rückwärtsinduktion. Für ein fixes Unfalljahr  $i > I - J$  ist das letzte Rechnungsjahr gegeben durch  $J + i - I$ . Zuerst werden die Reserven für den CoC-Cashflow durch  $\widehat{CoC}_i^{(J+i-I)} = 0$  initialisiert. Für  $k = 0, \dots, J + i - I - 1$  werden die risikoadjustierten Schadenreserven definiert durch

$$\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} = \widehat{R}_i^{(k)} + \mathbb{E} \left[ \widehat{CoC}_i^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right] + c\rho_{i,k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{R}_i^{(k)} + \widehat{CoC}_i^{(k)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_{i,k+1} &= \phi \text{Var} \left( \widehat{R}_i^{(k+1)} + X_{i,I-i+k+1} + \widehat{CoC}_i^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2} \\ &= \phi \text{Var} \left( \text{CDR}_i(k+1) + \left( \mathbb{E} \left[ \widehat{CoC}_i^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right] - \widehat{CoC}_i^{(k+1)} \right) \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

und  $\phi$  eine fixe positive Konstante bezeichnet, die das Sicherheitsniveau bestimmt.

Es wird also ein geeignetes Risikomaß für das erste Rechnungsjahr gewählt, welches bestimmt wird durch ein Vielfaches der Standardabweichung.

Man beachte, dass das Risikomaß  $\rho_{i,k+1}$  die Unsicherheit des CDR in den Schaden-Cashflows  $X_{i,j}$  berücksichtigt wie auch jene in den CoC-Cashflows  $c\rho_{i,j}$ ,  $j \geq k + 1$ . Die gesamte Reserve des CoC-Cashflows zum Zeitpunkt 0 ist gegeben durch  $\widehat{CoC}_i^{(0)}$ .

Für  $k = 1, \dots, J + i - I$  definiere man

$$b_{i,k} = 1 + c\phi(\beta_{i,k} - 1)^{1/2}.$$

**Satz 5.1.5** Die CoC-Reserven zum Zeitpunkt  $k = 0, \dots, J + i - I - 1$  sind gegeben durch

$$\widehat{CoC}_i^{(k)} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \left( \prod_{m=k+1}^{J+i-I} b_{i,m} - 1 \right).$$

*Beweis:* Die CoC-Reserven werden induktiv berechnet. Für  $k = J + i - I - 1$  erhält man (siehe Satz 5.1.4)

$$\begin{aligned} \widehat{CoC}_i^{(J+i-I-1)} &= 0 + c\rho_{i,J+i-I} = c\phi \text{Var} \left( \text{CDR}_i(J+i-I) \middle| \mathcal{D}_{J+i-1} \right)^{1/2} \\ &= c\phi \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I-1)} (\beta_{i,J+i-I} - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung für  $k = J + i - I - 1$ .

Induktionsschritt: Man nehme an die Behauptung gelte für  $k + 1$ . Dann gilt, dass

$$\widehat{\text{CoC}}_i^{(k)} = \mathbb{E}[\widehat{\text{CoC}}_i^{(k+1)} | \mathcal{D}_{I+k}] + c\rho_{i,k+1} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \left( \prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1 \right) + c\rho_{i,k+1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_{i,k+1} &= \phi \text{Var} \left( \text{CDR}_i(k+1) + \left( \mathbb{E}[\widehat{\text{CoC}}_i^{(k+1)} | \mathcal{D}_{I+k}] - \widehat{\text{CoC}}_i^{(k+1)} \right) | \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2} \\ &= \phi \text{Var} \left( \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} + \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} \left( \prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1 \right) \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2}, \\ &= \phi \prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} \text{Var} \left( \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} | \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} \phi (\beta_{i,k+1} - 1)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Satz 5.1.4 verwendet wurde.  $\square$

Schließlich ergibt sich für die Risikomarge zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} \text{RM}_i &= \mathbb{E}[\widehat{\text{CoC}}_i^{(1)} | \mathcal{D}_I] + c\rho_{i,1} \\ &= \widehat{\text{CoC}}_i^{(0)} = \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \left( \prod_{k=1}^{J+i-I} b_{i,k} - 1 \right) \end{aligned}$$

**Satz 5.1.6** *Aggregierte risikoadjustierte Risikomarge*

$$\text{RM} = \widehat{\text{CoC}}^{(0)},$$

wobei man  $\widehat{\text{CoC}}^{(0)}$  durch folgende Rekursion erhält ( $k = 0, \dots, J - 1$ ):

$$\widehat{\text{CoC}}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left( \widehat{\text{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right) + c\rho_{k+1}$$

und

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &= \phi \text{Var} \left( \text{CDR}(k+1) + \left( \mathbb{E}[\widehat{\text{CoC}}^{(k+1)} | \mathcal{D}_{I+k}] - \widehat{\text{CoC}}^{(k+1)} \right) | \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2} \\ &= \phi \text{Var} \left( \sum_{i=I+k+1-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} + \widehat{\text{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Beweis:* siehe [20].

Die Berechnung der Schadenreserven in geschlossener Form ist nicht möglich (siehe [20]).

Durch Vernachlässigen der Diversifikationseffekte kann jedoch in einfacher Weise folgende obere Schranke angegeben werden:

$$\text{RM} \leq \sum_{i=I+1-J}^I \text{RM}_i.$$

Eine verbesserte Schranke, die die Diversifikation zwischen den Unfalljahren berücksichtigt (vgl. mit [20]), bietet folgender Satz

**Satz 5.1.7** *Für  $c\phi < 1$  gilt*

$$\text{RM} \leq \sum_{k=1}^J (1 + (\sqrt{2} - 1) c \phi)^{k-1} c \rho_k^{(S1.2)},$$

wobei  $\rho_k^{(S1.2)}$  das Risikomaß der Methode *S1.2* bezeichnet und im Kapitel 5.1.9 vorgestellt wird.

*Beweis:* siehe [20].

### 5.1.8 Simplification S1.1

Im Vergleich zum vorherigen Modell wird hierbei die Unsicherheit der CoC-Cashflows  $c\rho_k$  als Teilrisiko in den Berechnungen vernachlässigt. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass das Risikomaß  $\rho_k$   $\mathcal{D}_{I+k-1}$ -messbar sein soll. Man beachte, dass auf Grund von Satz 5.1.4 gilt:

$$\text{Var}(\text{CDR}_i(k)|\mathcal{D}_{I+k-1}) = \text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}|\mathcal{D}_{I+k-1}) = (\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)})^2 (\beta_{i,k} - 1).$$

Folglich wird das entsprechende Risikomaß definiert als

$$\rho_{i,k}^{(S1.1)} = \phi \text{Var}(\text{CDR}_i(k)|\mathcal{D}_{I+k-1})^{1/2} = \phi \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} (\beta_{i,k} - 1)^{1/2}.$$

Entsprechend der Darstellung (4.5) wird hier als Risikomaß  $\rho = \phi\sqrt{\text{Var}}$  verwendet. Man beachte, dass die CoC-Marge  $c\rho_{i,k}^{(S1.1)}$   $\mathcal{D}_{I+k-1}$ -messbar ist und deren Höhe zum Zeitpunkt 0 noch geschätzt werden muss. Die risikoadjustierten Schadenreserven für  $\rho_{i,k}^{(S1.1)}$  erhält man dabei wie folgt:

$$\text{RM}_i^{(S1.1)} = c \sum_{k=1}^{J+i-I} \mathbb{E} \left[ \rho_{i,k}^{(S1.1)} \middle| \mathcal{D}_I \right] = c\phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \sum_{k=1}^{J+i-I} (\beta_{i,k} - 1)^{1/2}.$$

**Korollar 5.1.5** *Es gilt*

$$\text{RM}_i^{(S1.1)} \leq \text{RM}_i.$$

Der Grund für diese Relation ist, dass die Risikomarge im ganzheitlichen Ansatz eine zusätzliche Risikokomponente (die Unsicherheit der CoC-Cashflows) berücksichtigt und daher einen höheren Wert ergibt.

**Satz 5.1.8** *Aggregierte risikoadjustierte Risikomarge*

$$\text{RM}^{(S1.1)} = c \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^J \rho_k^{(S1.1)} \middle| \mathcal{D}_I \right], \quad (5.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_k^{(S1.1)} &= \phi \text{Var}(\text{CDR}(k)|\mathcal{D}_{I+k-1})^{1/2} = \phi \text{Var} \left( \sum_{i=I+k-J}^I \text{CDR}_i(k) \middle| \mathcal{D}_{I+k-1} \right)^{1/2} \\ &= \phi \left[ \sum_{i=I+k-J}^I (\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)})^2 \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j} (\beta_{i,k} - 1) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i < m} \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} \widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} \prod_{j=1}^{k-1} \delta_{i,j} (\delta_{i,k} - 1) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$



*Beweis:* siehe [20].

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (5.1) kann nicht in geschlossener Form berechnet werden.

### 5.1.9 Simplification S1.2

Im Vergleich zum vorhergehenden Modell wird anstatt der  $\mathcal{D}_{I+k}$ -Messbarkeit des Risikomaßes  $\rho_k$  nur noch die  $\mathcal{D}_I$ -Messbarkeit verlangt. Das Risikomaß  $\rho_{i,k}^{(S1.2)}$  in diesem zweiten Ansatz lautet nach Satz 5.1.4 wie folgt

$$\rho_{i,k}^{(S1.2)} = \phi \operatorname{Var}(\operatorname{CDR}_i(k)|\mathcal{D}_I)^{1/2} = \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}^{1/2} (\beta_{i,k} - 1)^{1/2}.$$

Die Unsicherheit der CDR's für jedes Rechnungsjahr wird vom Zeitpunkt 0 aus betrachtet. Die  $\mathcal{D}_I$ -messbare Risikomarge zum Zeitpunkt 0 für das Risikomaß  $\rho_{i,k}^{(S1.2)}$  lautet

$$\operatorname{RM}_i^{(S1.2)} = c \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \sum_{k=1}^{J+i-I} \left( \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}^{1/2} \right) (\beta_{i,k} - 1)^{1/2}.$$

**Korollar 5.1.6** *Es gilt*

$$\operatorname{RM}_i^{(S1.1)} \leq \operatorname{RM}_i^{(S1.2)}.$$

*Beweis:* siehe [20].

**Satz 5.1.9** *Aggregierte risikoadjustierte Risikomarge*

$$\operatorname{RM}^{(S1.2)} = c \sum_{k=1}^J \rho_k^{(S1.2)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_k^{(S1.2)} &= \phi \operatorname{Var}(\operatorname{CDR}(k)|\mathcal{D}_I)^{1/2} = \phi \operatorname{Var}\left( \sum_{i=I+k-J}^I \operatorname{CDR}_i(k) \middle| \mathcal{D}_I \right)^{1/2} \\ &= \phi \left[ \sum_{i=I+k-J}^I (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j} (\beta_{i,k} - 1) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i < m} \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \widehat{C}_{m,J}^{(0)} \prod_{j=1}^{k-1} \delta_{i,j} (\delta_{i,k} - 1) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

*Beweis:* siehe [20].

### 5.1.10 Simplification $S2$

Dieser Abschnitt untersucht jene Vereinfachungsmethode aus Level 2, in der die zukünftigen SCRs gemäß den Vorgaben aus Kapitel 4.3 approximiert werden:

$$RM^{S2} = c \text{SCR}(0) \sum_{t=1}^J \frac{\sum_{i=I+t-J}^I \mathbb{E}[\widehat{C}_{i,J}^{(t-1)} - C_{i,I-i+t-1}]}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}},$$

wobei  $\text{SCR}(0) = \phi \text{Var}(\text{CDR}(1)|\mathcal{D}_I)^{1/2}$ .

**Satz 5.1.10** *Unter den Modellannahmen 5.1.2 gilt (für  $I+1 \leq J+i$ ):*

$$\text{Var}(\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I) = \text{Var}(\widehat{C}_{i,J}^{(1)}|\mathcal{D}_I) = (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 (\beta_{i,1} - 1).$$

*Beweis:* Folgt aus Satz 5.1.4.

Die erwarteten ausständigen Schadenzahlungsverbindlichkeiten zum Zeitpunkt  $k$  sind gegeben durch

$$p_i^{(k)} = \mathbb{E}\left[\widehat{R}_i^{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k)} - C_{i,I-i+k}\right].$$

Die Folge  $p_i^{(0)}, \dots, p_i^{(J+i-I-1)}, p_i^{(J+i-I)} = 0$  beschreibt den erwarteten Verlauf der ausständigen Schadenzahlungsverpflichtungen zum aktuellen Zeitpunkt. Dieser Ausdruck kann nicht explizit bestimmt werden und muss mithilfe der Monte-Carlo Simulation berechnet werden.

Die Grundidee der Monte Carlo Methode ist es, den Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$  einer Zufallsvariablen  $X$  durch das arithmetische Mittel  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(\omega)$  zu approximieren, wobei  $N \in \mathbb{N}$  und  $X_i(\omega)$  die Realisierungen von  $N$  unabhängigen Experimenten bezeichnen, welche alle dieselbe Verteilung wie  $X$  besitzen.

Diese Methode wird bei der Berechnung der Simplification anhand eines praktischen Beispiels im Kapitel 6 verwendet.

Das Risikomaß im Rechnungsjahr  $k$  wird schließlich folgendermaßen angesetzt

$$\begin{aligned} \rho_{i,k}^{(S2)} &= \frac{p_i^{(k-1)}}{p_i^{(0)}} \phi \text{Var}(\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I)^{1/2} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - C_{i,I-i+k-1}\right]}{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}} \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} (\beta_{i,1} - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die risikoadjustierte Risikomarge zum Zeitpunkt 0 ist schließlich gegeben durch

$$\text{RM}_i^{(S2)} = c \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} (\beta_{i,1} - 1)^{1/2} \sum_{k=1}^{J+i-I} \frac{\mathbb{E} \left[ \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - C_{i,I-i+k-1} \right]}{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}}.$$

**Satz 5.1.11** *Aggregierte risikoadjustierte Risikomarge*

$$\text{RM}^{(S2)} = c \rho_1^{(S2)} \sum_{k=1}^J \frac{\sum_{i=I+k-J}^I \mathbb{E} \left[ \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - C_{i,I-i+k-1} \right]}{\sum_{i=I+1-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}},$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_1^{(S2)} &= \phi \text{Var}(\text{CDR}(1) | \mathcal{D}_I)^{1/2} = \phi \text{Var} \left( \sum_{i=I+1-J}^I \text{CDR}_i(1) \middle| \mathcal{D}_i \right)^{1/2} \\ &= \phi \left[ \sum_{i=I+1-J}^I (\widehat{C}_{i,J}^{(0)})^2 (\beta_{i,1} - 1) + 2 \sum_{I+1-J \leq i < m \leq I} \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \widehat{C}_{m,J}^{(0)} (\delta_{i,1} - 1) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

*Beweis:* siehe [20].

### 5.1.11 Simplification S3

Dieser Abschnitt untersucht die Risikomargeberechnung unter Level 3:

$$RM^{S3} = c \text{SCR}(0) \sum_{t=1}^J \frac{\sum_{i=I+t-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i+t-1}^{(0)}}{\sum_{l=I+1-J}^I \widehat{C}_{l,J}^{(0)} - C_{l,I-l}^{(0)}},$$

wobei  $\text{SCR}(0) = \phi \text{Var}(\text{CDR}(1)|\mathcal{D}_I)$ .

Die erwarteten ausstandigen Schadenzahlungsverbindlichkeiten zum Zeitpunkt  $k$  ausgehend vom Zeitpunkt 0 sind gegeben durch

$$r_i^{(k)} = \mathbb{E} \left[ \widehat{R}_i^{(k)} \middle| \mathcal{D}_I \right] = \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k}^{(0)}.$$

Demnach beschreiben  $r_i^{(0)}, \dots, r_i^{(J+i-I-1)}, r_i^{(J+i-I)} = 0$  den erwarteten Verlauf der ausstandigen Schadenzahlungsverpflichtungen betrachtet vom Zeitpunkt 0. Die Berechnung des Risikomaßes im Rechnungsjahr  $k$  basiert nahezu auf dem gleichen proportionalen Ansatz wie im vorigen Kapitel:

$$\rho_{i,k}^{(S3)} = \frac{r_i^{(k-1)}}{r_i^{(0)}} \phi \text{Var}(\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I)^{1/2} = \frac{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}^{(0)}} \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} (\beta_{i,1} - 1)^{1/2}$$

und

$$\rho_{i,1}^{(S3)} = \phi \text{Var}(\text{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I)^{1/2} = \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} (\beta_{i,1} - 1)^{1/2}.$$

Die risikoadjustierten Schadenreserven zum Zeitpunkt 0 sind damit gegeben durch

$$RM_i^{(S3)} = \widehat{R}_i^{(0)} + c \phi \widehat{C}_{i,J}^{(0)} (\beta_{i,1} - 1)^{1/2} \sum_{k=1}^{J+i-I} \frac{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}^{(0)}}.$$

**Satz 5.1.12** *Aggregierte risikoadjustierte Risikomarge*

$$RM^{(S3)} = c \rho_1^{(S2)} \sum_{k=1}^J \frac{\sum_{i=I+k-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\sum_{i=I+1-J}^I \widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}^{(0)}}.$$

*Beweis:* siehe [20].

## 5.2 Modell 2: Risikomargemodell basierend auf dem "stochastischen Re-Reserving"

In diesem Kapitel wird ein simulationsbasierter Ansatz für die Berechnung der Risikomarge präsentiert. Dazu wird das sogenannte stochastische Re-Reserving Verfahren verwendet, welches die Bestimmung der empirischen Wahrscheinlichkeitsverteilung des einjährigen Schadenabwicklungsergebnisses (siehe Kapitel 4.2.4) ermöglicht. Dies bildet schließlich die Basis für die Risikomargeberechnung.

Als Vorlage für dieses Kapitel dient der Artikel "The Multi-Year Non-Life Insurance Risk" von Diers, Eling, Kraus und Linde [5].

### 5.2.1 Modellannahmen

Als zugrundeliegendes Reservierungsmodell dient das verteilungsfreie Mackmodell (siehe 4.2.1).

Der CL-Algorithmus wird verwendet für die Schätzung der Schadenreserven. Die verwendeten Bezeichnungen stimmen durchwegs mit jenen aus Kapitel 4 überein.

Im Folgenden sei  $I = J$ .

### 5.2.2 Berechnung der Risikomarge

Die  $CDR(k)$ 's werden sukzessive für  $k = 1, \dots, I$  berechnet. Das Verfahren lässt sich mithilfe der Definition des Schadenabwicklungsergebnisses erläutern:

$$CDR_i(k) = \widehat{R}_i^{(k-1)} - \left( X_{i,I-i+k} + \widehat{R}_i^{(k)} \right). \quad (5.2)$$

Zu Beginn jedes Rechnungsjahres  $k - 1$  wird die aktuelle Schadenreserve  $\widehat{R}_i^{(k-1)}$  berechnet. Anschließend werden die neu auftretenden Schäden im aktuellen Rechnungsjahr mit Hilfe des Bootstrap-Verfahrens (für nähere Informationen siehe England und Verrall [7]) simuliert. Unter Verwendung dieser neuen Information wird schließlich die Reserve zu Beginn des nächsten Kalenderjahres  $k$  berechnet. Diese drei Werte ergeben in Form der Gleichung (5.2) das Schadenabwicklungsergebnis im Rechnungsjahr  $k$ . Das  $SCR(k)$  erhält man schließlich durch Anwendung des empirischen VaR auf die simulierten  $CDR(k)$ s. Die Risikomarge ergibt sich mittels (3.1).

Die Berechnungsschritte für die Quantifizierung der  $CDR(k)$ s sind in der Abbildung 5.1 dargestellt.

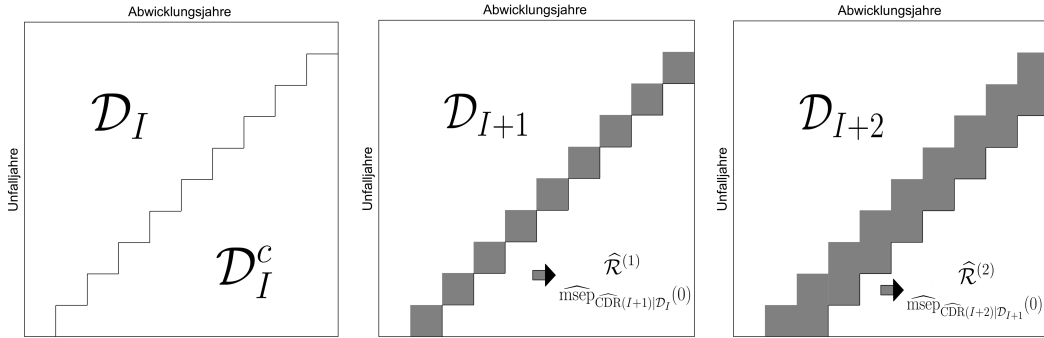


Abbildung 5.1: Das Re-Reservingverfahren

Im Folgenden wird die Vorgehensweise aus mathematischer Sicht näher erläutert.

- **Schritt 1: Berechnung der Eingangsschadenreserve**

Im ersten Schritt wird ein Schätzer für die Eingangsschadenreserve basierend auf den vergangenen Beobachtungen  $\mathcal{D}_I$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  berechnet. Für diesen Zweck wird der CL-Algorithmus verwendet.

Es gilt:

$$\widehat{R}^{(0)} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i^{(0)}$$

mit

$$\widehat{R}_i^{(0)} = \widehat{C}_{i,I}^{(0)} - C_{i,I-i},$$

wobei

$$\widehat{C}_{i,I}^{(0)} = C_{i,I-i} \cdot \widehat{f}_{I-i}^{(0)} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{I-2}^{(0)} \cdot \widehat{f}_{I-1}^{(0)}$$

mit

$$\widehat{f}_k^{(0)} = \frac{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}}.$$

- **Schritt 2: Simulation der kumulierten Schadenzahlungen**

Im zweiten Schritt werden sukzessive die kumulierten Schadenzahlungen für das folgende Kalenderjahr simuliert - beginnend vom Zeitpunkt  $t = 0$  bis alle Zahlungen abgewickelt sind (bei  $t = I - 1$ ). Die Schadenzahlungen jedes Kalenderjahres  $t = k$ , die sich als 'neue' Diagonale im Schadendreieck abtragen lassen erhält man folgendermaßen:

$$D^k = \sum_{i=k+1}^I X_i^k,$$

wobei

$$X_i^k = C_{i,I-i+k+1} - C_{i,I-i+k}.$$

Für die Simulation der neuen Schadenzahlungen muss zu Beginn ein klar spezifiziertes statistisches Modell festgelegt werden. Zu diesem Zweck wird das erweiterte Mackmodell (siehe Modellannahmen 4.2.1) verwendet. Aus den Annahmen im erweiterten Mackmodell für  $C_{i,j}$  ergeben sich folgende Identitäten für die individuellen Abwicklungsfaktoren  $f_{i,j} = C_{i,j+1}/C_{i,j}$ :

$$\mathbb{E}[f_{i,j}|C_{i,j}] = \mathbb{E}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}|C_{i,j}\right] = \frac{1}{C_{i,j}}\mathbb{E}[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = \frac{1}{C_{i,j}}f_j C_{i,j} = f_j$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(f_{i,j}|C_{i,j}) &= \text{Var}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}|C_{i,j}\right) = \frac{1}{C_{i,j}^2} \text{Var}(C_{i,j+1}|C_{i,j}) \\ &= \frac{1}{C_{i,j}^2} \sigma_j^2 C_{i,j} = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}. \end{aligned}$$

Die  $(C_{i,j})_{j \geq 0}$  werden in Form eines diskreten Markovprozesses modelliert und mehrere Pfade simuliert. Ein Markovprozess ist folgendermaßen definiert:

**Definition 5.2.1** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(S, \mathcal{B})$  ein Messraum und  $I$  eine Indexmenge. Ein stochastischer Prozess  $X(t)$  mit  $t \in I$  ist genau dann ein Markovprozess, falls für alle  $n > 1, t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \in I, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$  mit  $\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) > 0$  gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n).$$

Dies bedeutet insbesondere, dass jedes  $C_{i,j}$  nur von seinem 'Vorgänger'  $C_{i,j-1}$  abhängt.

Weiters ist es nötig für die Simulation eine geeignete zugrundeliegende Verteilung für die  $C_{i,j}$  zu bestimmen. Passende Verteilungen sind laut [5] beispielsweise die Normalverteilung, die Gamma- oder die Lognormalverteilung. Im Folgenden wird die Normalverteilung als zugrundeliegende Verteilung gewählt (vgl. mit [5]).

In diesem Fall werden die zukünftigen Schadenzahlungen folgendermaßen simuliert:

$$C_{i,k+1}|C_{i,k} \sim \mathcal{N}(\hat{f}_k^* \cdot C_{i,k}, \hat{\sigma}_k^2 \cdot C_{i,k}), \quad (5.3)$$



wobei der Mittelwert und die Varianz der Verteilung mithilfe der 'Pseudoabwicklungsfaktoren'  $\hat{f}_k^*$  und der geschätzten Varianzparameter  $\hat{\sigma}_k^2$  ermittelt werden.

Die Berechnung der  $\hat{f}_k^*$  erfolgt gemäß dem Bootstrap-Verfahren nach England und Verall [7] unter Verwendung einer neuen Menge von sogenannten 'Pseudodaten'. Dazu werden zuerst die skalierten Pearson-Residuen, definiert durch

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

berechnet. Aus der Menge  $\{r_{i,j}; i, j \geq 0\}$  der Residuen wird durch Ziehen mit Zurücklegen eine neue Menge von Bootstrapstichproben  $\{r_{i,j}; i, j \geq 0\}^B$  generiert. Daraus lassen sich die Pseudoabwicklungsfaktoren berechnen mittels:

$$\hat{f}_k^* = f_{i,j}^B = r_{i,j}^B \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{i,j}}} + \hat{f}_j.$$

Nun werden die Schadenzahlungen  $C_{i,j}$  Schritt für Schritt mittels (5.3) simuliert.

Es sei  $Z$  die Anzahl der Simulationsschritte, dann liefert diese Prozedur schließlich  $Z$  verschiedene Abwicklungsmöglichkeiten für das gegebene Schadendreieck.

- **Schritt 3: Bestimmung der empirischen Verteilung der CDR's**  
Für die Berechnung der  $\text{SCR}(t)$ s ist es nötig die empirische Verteilung der CDR's zu berechnen. Das  $\text{SCR}(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  ergibt sich durch Anwendung eines Risikomaßes  $\rho$  auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des einjährigen Schadenabwicklungsergebnisses zum Zeitpunkt  $t + 1$  ( $\text{CDR}(t + 1)$ ) basierend auf allen vergangenen Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t$  ( $\mathcal{D}_{I+t}$ ):

$$\text{SCR}(t) = \rho(\text{CDR}(t + 1) | \mathcal{D}_{I+t}).$$

Hierbei kommt es zu Schwierigkeiten bei der Simulation, da für die Bestimmung der empirischen Verteilungsfunktion von  $\text{CDR}(t)$  ineinander verschachtelte Simulationen notwendig sind. Beispielsweise sind für die Berechnung von  $\text{SCR}(1)$  für jeden Simulationspfad  $z$  weitere  $Z$  Simulationen des einjährigen Schadenabwicklungsergebnisses basierend auf der upgedateten Information  $\mathcal{D}_{I+1}$  nötig, um die zugehörige empirische Verteilungsfunktion herzuleiten. Allgemein führt diese Prozedur zu  $Z^{t+1}$  Iterationen für die Berechnung des  $\text{SCR}(t)$ ,  $t \in \{0, \dots, I - 2\}$ .

Um dieses Problem der verschachtelten Simulationen zu vermeiden, wird die Momentenmethode eingesetzt. Hierbei wird für den Schätzer des ersten Moments der empirischen Verteilung von  $\text{CDR}(t)$  die BE-Reserve verwendet und für den Schätzer des zweiten Moments der bedingte  $\text{msep}$  (siehe Definition 4.2.1) des  $\text{CDR}(t)$  verwendet. Die ersten beiden Momente sind nötig für die Berechnung der Parameter der Verteilung.

Im dritten Schritt werden mit Hilfe der simulierten Zahlungen aus Schritt 2 sukzessive (vom Zeitpunkt  $t = 1$  bis zum Zeitpunkt  $t = I - 1$ ) die BE-Schadenreserven  $\widehat{R}^{(t)}$  und die dazugehörigen Schätzfehler  $\widehat{\text{msep}}_{\widehat{\text{CDR}}^{(t+1)}|\mathcal{D}_t}(0)$  (siehe (4.3) und (4.4)) berechnet. Somit wird für jeden Simulationsschritt  $z$  eine Normalverteilung mit Erwartungswert

$$\sum_{i=k+1}^I \left[ \widehat{R}_i^{(k-1)} - \left( X_{i,I-i+k} + \widehat{R}_i^{(k)} \right) \right]$$

und Varianz gegeben durch

$$\widehat{\text{msep}}_{\widehat{\text{CDR}}(t)|\mathcal{D}_{I+t-1}}(0)$$

ermittelt und mit Hilfe eines Risikomaßes  $\rho$  das zugehörige  $\text{SCR}(t-1)_z$  berechnet.

Das gesamte  $\text{SCR}(t-1)$  wird anschließend approximiert durch Berechnung des Mittelwerts:

$$\widehat{\text{SCR}}(t-1) = \frac{\sum_{i=1}^Z \text{SCR}(t-1)_i}{Z}.$$

Dieser Schritt wird sukzessive bis zur endgültigen Abwicklung zum Zeitpunkt  $t = I - 1$  wiederholt.

Nun kann die Risikomarge durch Einsetzen der  $\widehat{\text{SCR}}(t-1)$ 's in die CoC-Formel berechnet werden.

Dieses Verfahren ist als "stochastisches Re-Reserving" bekannt. Mit steigender Anzahl von Simulationsschritten konvergiert die empirische Verteilung der CDR's gegen die theoretische Verteilung.

Die Risikomarge ergibt sich nun wie folgt:

**Satz 5.2.1** *Risikomargeberechnung*

$$\text{RM} = c \cdot \sum_{t=0}^{I-1} \widehat{\text{SCR}}(t),$$

wobei  $c$  die Kapitalkostenrate bezeichnet.

Als Risikomaß  $\rho$  wird gemäß den Technical Specifications [6] der  $\text{VaR}_{0.995}$  (siehe Definition 2.4.1) verwendet.

### 5.2.3 Simplification S1

In Form eines ersten vereinfachenden Ansatzes gemäß Level 1 der Simplifications (siehe Kapitel 3.2) werden die einzelnen  $\mathcal{D}_{I+k}$ -messbaren Schätzer  $\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{f}_j^{(k)}$  und  $\widehat{\sigma}_j^{(k)}$  durch die  $\mathcal{D}_I$ -messbaren Schätzer  $\widehat{C}_{i,J}^{(0)}, \widehat{f}_j^{(0)}$  und  $\widehat{\sigma}_j^{(0)}$  approximiert. Ansonsten erfolgt die Risikomargeberechnung wie im vollständigen Ansatz.

Sehr gut vergleichbar ist dieser Ansatz mit dem Modell S1.2 aus dem Kapitel 5.1.9, in dem die  $\mathcal{D}_{I+k}$ -messbaren Risikomaße  $\rho_k^{(S1.1)}$  durch  $\mathcal{D}_I$ -messbare Risikomaße  $\rho_k^{(S1.2)}$  ersetzt wurden.

### 5.2.4 Simplification S2

Gemäß Level 2 der Simplifications werden die einzelnen zukünftigen  $\text{SCR}(t)$ s mithilfe des Abwicklungsmusters der zukünftigen simulierten BE-Reserven berechnet ( $t \leq i$ ):

$$RM^{(S2)} = c \widehat{\text{SCR}}(0) \sum_{t=1}^I \frac{\sum_{i=t}^I \mathbb{E}[\widehat{C}_{i,I}^{(t-1)} - C_{i,I-i+t-1}]}{\sum_{l=1}^I \widehat{C}_{l,I}^{(0)} - C_{l,I-l}},$$

wobei  $\widehat{\text{SCR}}(0)$  den Schätzer von  $\text{SCR}(0) = \phi \text{VaR}_{0.995}(\text{CDR}(1)|\mathcal{D}_I)$  bezeichnet.

### 5.2.5 Simplification S3

Entsprechend Level 3 der Simplifications wird das Abwicklungsmuster der zum Zeitpunkt 0 geschätzten BE-Reserven verwendet ( $t \leq i$ ):

$$RM^{(S3)} = c \widehat{\text{SCR}}(0) \sum_{t=1}^I \frac{\sum_{i=t}^I \widehat{C}_{i,I}^{(0)} - C_{i,I-i+t-1}^{(0)}}{\sum_{l=1}^I \widehat{C}_{l,I}^{(0)} - C_{l,I-l}},$$

wobei  $\widehat{\text{SCR}}(0)$  den Schätzer von  $\text{SCR}(0) = \phi \text{VaR}_{0.995}(\text{CDR}(1)|\mathcal{D}_I)$  bezeichnet.

## 5.3 Modell 3: Risikomargeberechnung mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverzerrung

Der folgende Ansatz zur Berechnung der Risikomarge basiert auf der versicherungstechnischen Wahrscheinlichkeitsverzerrung. Mithilfe dieser Technik wird (in mathematisch konsistenter Weise) ein Modell zur Berechnung der Risikomarge entwickelt.

Das Modell ist dem Paper "Risk Margin for a Non-Life Insurance Run-Off" von Wüthrich, Embrechts und Tsanakas ([21]), auf welchem das aktuelle Kapitel basiert, entnommen. Die diversen Beweise aller in diesem Abschnitt vorkommenden mathematischen Sätze, Lemmas, etc. werden nicht behandelt. Diese sind zusammen mit weiteren Ausführungen zum Thema in Wüthrich et al. [21] vorzufinden.

Im Vergleich zu den Modellen aus dem vorigen Kapitel, wird hier ein eher ökonomisch motivierter Ansatz präsentiert. Die Behauptung ist, dass die Risikomarge im Zusammenhang mit der Risikoaversion<sup>1</sup> des Versicherungsunternehmens stehen soll, das den Schutz gegen eine ungünstige Entwicklung anbietet. Diese Risikoaversion kann mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverzerrung modelliert werden und führt zu einer mathematisch gänzlich konsistenten Risikomarge. Risikoadjustierte Größen aus Versicherungscashflows werden berechnet als Erwartungswert nach Modifizierung der verwendeten Wahrscheinlichkeiten. Diese Idee existiert schon länger in der aktuariellen Praxis - insbesondere in der Lebensversicherungsmathematik bei der Konstruktion von Sterbetafeln erster Ordnung aus jenen zweiter Ordnung. Die Sterbetafeln zweiter Ordnung stellen die erwartete Sterbewahrscheinlichkeit dar, während für die Sterbetafeln erster Ordnung ein Sicherheitszuschlag hinzugefügt wird um sicher zu stellen, dass die Versicherungsprämie hoch genug ist.

Diese Idee wird nun im Kontext von Nichtlebensversicherungsverpflichtungen verwendet. Es wird der Verlauf von ausstehenden Versicherungsverpflichtungen in einem CL-Setting studiert. Durch Wahrscheinlichkeitsverzerrung der klassischen CL-Faktoren werden risikoadjustierte CL-Faktoren generiert.

---

<sup>1</sup>Risikoaversion bezeichnet die Eigenschaft eines Marktteilnehmers, bei der Wahl zwischen mehreren Alternativen mit dem gleichen Erwartungswert jene zu wählen, die hinsichtlich des Ergebnisses das geringste Risiko und damit den kleinstmöglichen Verlust besitzt. Dies bedeutet insbesondere, dass der Marktteilnehmer sogar einen sicheren Betrag bevorzugt, der geringer ist, als die zu erwartende unsicher Auszahlung.

### 5.3.1 Modellannahmen

Es wird angenommen, dass ein finaler Zeithorizont  $n = I + J$  gegeben ist und die Cashflows der Schadenzahlungen in diskreter Zeit  $t \in \{0, \dots, n\}$  verlaufen. Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum wird mit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  bezeichnet. Hierbei beschreibt die Filtration  $\mathcal{T}$  den versicherungstechnischen Informationsverlauf, i.e. den Verlauf der anfallenden Schäden.

Die Schäden werden mit  $X_{i,j}$  bezeichnet, wobei  $i \in \{1, \dots, I\}$  die Unfalljahre und  $j \in \{0, \dots, J\}$  die Abwicklungsjahre der Schäden bezeichnen. Weiters wird angenommen, dass  $I \geq J + 1$ . Somit wird der Schaden  $X_{i,j}$  im Rechnungsjahr  $k = i + j$  bezahlt. Daraus folgt der Cashflow der Rechnungsjahre (über alle Unfalljahre  $i \in \{1, \dots, I\}$ )

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{i,j} = \sum_{i=1 \vee (k-J)}^{I \wedge k} X_{i,k-i} = \sum_{j=0 \vee (k-I)}^{J \wedge (k-1)} X_{k-j,j}.$$

Der gesamte Cashflow wird bezeichnet mit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  und die ausstehenden Versicherungsverbindlichkeiten zum Zeitpunkt  $t < n$  sind gegeben durch

$$\mathbf{X}_{(t+1)} = (0, \dots, 0, X_{t+1}, \dots, X_n).$$

Das Ziel ist es nun, den Wert des Cashflows der ausstehenden Versicherungsverbindlichkeiten  $\mathbf{X}_{(t+1)}$  für jedes  $t < n$  zu schätzen. Für die Modellierung der Cashflows  $\mathbf{X}$  wird folgendes Bayes'sche CL-Modell verwendet

**Modellannahmen 5.3.1 (Das Bayes'sche Lognormal CL-Modell)** Es sei

- $\mathcal{T}_t = \sigma\{X_{i,j}; i+j \leq t, i = 1, \dots, I, j = 0, \dots, J\}$  für alle  $t = 1, \dots, I+J$ .
- Bedingt auf  $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_{J-1})$  und  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{J-1})$  gilt:
  - $X_{i,j}$  sind unabhängig für verschiedene Unfalljahre  $i$ ,
  - für die kumulierten Zahlungen  $C_{i,j} = \sum_{l=0}^j X_{i,l}$  gilt

$$\xi_{i,j+1} := \log\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - 1\right) \Big|_{\mathcal{T}_{i+j}, \Phi, \sigma} \sim \mathcal{N}(\Phi_j, \sigma_j^2)$$

für  $j = 0, \dots, J-1$  und  $i = 1, \dots, I$ .

- $\sigma > 0$  ist deterministisch und  $\Phi_j, j = 0, \dots, J-1$ , sind unabhängig mit

$$\Phi_j \sim \mathcal{N}(\phi_j, s_j^2)$$

mit Priori Parameter  $\phi_j$  und  $s_j > 0$  und

- $(X_{1,0}, \dots, X_{I,0})$  und  $\Phi$  sind unabhängig.

### 5.3.2 Best Estimate Reserveberechnung

Die Best Estimate Reserven werden wie folgt definiert:

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(t+1)}) = \sum_{k \geq t+1} \mathbb{E}[X_k | \mathcal{T}_t] = \sum_{k \geq t+1} \sum_{i+j=k} \mathbb{E}[X_{i,j} | \mathcal{T}_t].$$

In diesem Abschnitt werden die Best Estimate Reserven explizit für das Modell mit den Modellannahmen 5.3.1 berechnet. Man nehme an, dass  $t \geq I$ , woraus folgt, dass zum Zeitpunkt  $t$  alle anfänglichen Zahlungen  $X_{i,0}$  für die Unfalljahre  $i \in \{1, \dots, I\}$  getätigt wurden.

Nun erfolgt eine Bayes'sche Inferenz bzgl. des Parameters  $\Phi$  gegeben  $\mathcal{T}_t$ . Dies bedeutet, dass die Posteriori Verteilung von  $\Phi$  zum Zeitpunkt  $t$  berechnet wird. Man erhält:

$$\begin{aligned} f(\Phi | \mathcal{T}_t) &\propto p(\Phi) f(\mathcal{T}_t | \Phi) \\ &= \prod_{j=0}^{J-1} \exp\left\{-\frac{1}{2s_j^2}(\Phi_j - \phi_j)^2\right\} \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^{(t-i) \wedge J} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{j-1}^2}(\xi_{i,j} - \Phi_{j-1})^2\right\}. \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite bezeichnet die Priori-Dichte des Parametervektors  $\Phi$ , der zweite Term ist die Likelihoodfunktion der Beobachtungen gegeben  $\Phi$ . Die Posteriori-Dichte liefert schließlich folgenden Satz:

**Satz 5.3.1** *Unter den Modellannahmen 5.3.1, sind die Posteriori-Parameter von  $\Phi_j$  gegeben  $\mathcal{T}_t$  mit  $t \geq I$ , unabhängig normal verteilte Zufallsvariablen mit*

$$\Phi_j | \mathcal{T}_t \sim \mathcal{N}(\phi_j^{(t)}, (s_j^{(t)})^2)$$

und Posteriori-Parameter

$$\begin{aligned} \phi_j^{(t)} &= (s_j^{(t)})^2 \left[ \frac{\phi_j}{s_j^2} + \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^{(t-j-1) \wedge I} \xi_{i,j+1} \right], \\ (s_j^{(t)})^2 &= \left( \frac{1}{s_j^2} + \frac{(t-j-1) \wedge I}{\sigma_j^2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Satz 5.3.1 impliziert, dass

$$\phi_j^{(t)} = \mathbb{E}[\Phi_j | \mathcal{T}_t] = \beta_j^{(t)} \bar{\xi}_j^{(t)} + (1 - \beta_j^{(t)}) \phi_j$$

mit Mittelwert und Credibility-Gewicht gegeben durch

$$\bar{\xi}_j^{(t)} = \frac{1}{(t-j-1) \wedge I} \sum_{i=1}^{(t-j-1) \wedge I} \xi_{i,j+1} \quad \text{und} \quad \beta_j^{(t)} = \frac{[(t-j-1) \wedge I] s_j^2}{\sigma_j^2 + [(t-j-1) \wedge I] s_j^2}.$$

Daher ist der Posteriori-Erwartungswert von  $\Phi_j$  ein Linearkombination des Mittelwertes  $\bar{\xi}_j^{(t)}$  und des Priori Parameters  $\phi_j$ .  
 Unter Verwendung der Posteriori-Unabhängigkeit und der Normalverteilungseigenschaften von  $\Phi_j$  erhält man das folgende Korollar für die Bayes'schen Schätzer:

**Korollar 5.3.1** *Im Modell 5.3.1 erhält man für  $i + j > t \geq I$*

$$\mathbb{E}[X_{i,j}|\mathcal{T}_t] = C_{i,t-i} \left( \prod_{l=t-i}^{j-2} f_l^{(t)} \right) (f_{j-1}^{(t)} - 1)$$

mit Posteriori Chain Ladder Faktoren

$$f_l^{(t)} = \mathbb{E}[\exp\{\Phi_l + \sigma_l^2/2\} + 1 | \mathcal{T}_t] = \exp\{\phi_l^{(t)} + (s_l^{(t)})^2/2 + \sigma_l^2/2\} + 1.$$

Daraus ergeben sich die Best-Estimate Reserven zum Zeitpunkt  $t \geq I$  folgendermaßen

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(t+1)}) = \sum_{i=t+1-J}^I C_{i,t-i} \sum_{j=t-i+1}^J \left( \prod_{l=t-i}^{j-2} f_l^{(t)} \right) (f_{j-1}^{(t)} - 1).$$

Das folgende Kapitel beschäftigt sich nun mit der Berechnung der Risikomarge, die die Abweichungen der Best Estimate Reserven abdecken soll.

### 5.3.3 Risikoadjustierte Reserven und Risikomarge

Durch Anwendung einer Wahrscheinlichkeitsverzerrung auf die Zahlungen  $X_{i,j}$  werden die sogenannten risikoadjustierten Reserven  $\mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)})$  zum Zeitpunkt  $t$  berechnet. Die Risikomarge zum Zeitpunkt  $t$  wird schließlich als Differenz

$$\text{RM}_t(\mathbf{X}_{(t+1)}) = \mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)}) - \mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(t+1)})$$

definiert, welche unter einem geeignetem Wahrscheinlichkeitsmaß strikt positiv ist.

Die wesentliche Idee dieser Methode ist, dass ein Prozess  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  eingeführt wird, der die Wahrscheinlichkeiten in 'passender' Weise modifiziert.



## Versicherungstechnische Wahrscheinlichkeitsverzerrungen

Eine versicherungstechnische Wahrscheinlichkeitsverzerrung  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  ist ein strikt positives Martingal mit  $\varphi_0 = 1$ . Für einen Cashflow  $\mathbf{X}$  definiere man risikoadjustierte Einheiten durch

$$\lambda_{t,k} = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_k X_k | \mathcal{T}_t].$$

Die risikoadjustierten Reserven ergeben sich schließlich als

$$\mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)}) = \sum_{k \geq t+1} \lambda_{t,k} = \sum_{k \geq t+1} \sum_{i+j=k} \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_k X_{i,j} | \mathcal{T}_t].$$

Für die Wahl von  $\varphi = 1$  stimmen die Best Estimate Reserven und die risikoadjustierten Reserven überein. Für eine geeignete risikoadverse Wahl von  $\varphi$  erhält man eine strikt positive Risikomarge  $\text{RM}_t(X_{(t+1)})$ . Dazu ist es notwendig, dass die  $\varphi_k X_k | \mathcal{T}_t$  positiv korreliert sind, wobei in diesem Fall (unter Verwendung der Martingaleigenschaft von  $\varphi$ ) gilt

$$\lambda_{t,k} = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_k X_k | \mathcal{T}_t] \geq \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_k | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}[X_k | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}[X_k | \mathcal{T}_t].$$

Die positive Korreliertheit führt dazu, dass ungünstige Szenarien eine höhere Wahrscheinlichkeitsmasse besitzen (vgl. mit [21]). Um bzgl. der Risikoaversion eine zeitliche Konsistenz zu besitzen, setzt man voraus, dass  $(\lambda_{t,k})_{t=0, \dots, n}$  ein Supermartingal (siehe Definition 2.1.5) ist. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[\lambda_{t+1,k} - \mathbb{E}[X_k | \mathcal{T}_{t+1}] | \mathcal{T}_t] \leq \lambda_{t,k} - \mathbb{E}[X_k | \mathcal{T}_t].$$

Dies bedeutet, dass die Risikomarge in Erwartung konstant im Zeitverlauf fällt.

## Risikoadjustierte Reserven für das Bayes'sche Chain Ladder Modell

In den vorigen Abschnitten wurde mittels Wahrscheinlichkeitsverzerrung ein allgemeines Konzept für die Berechnung einer positiven Risikomarge erarbeitet. In diesem Abschnitt wird ein explizites Beispiel für eine versicherungstechnische Wahrscheinlichkeitsverzerrung  $\varphi$  gegeben, die für das vorliegende Bayes'sche CL-Modell geeignet ist. Es wird folgende Wahl getroffen:

$$\varphi_n = \prod_{j=1}^J \exp \left\{ \sum_{i=1}^I \alpha_1 \xi_{i,j} + \alpha_2 \Phi_{j-1} - (I\alpha_1 + \alpha_2) \phi_{j-1} - (I\alpha_1 + \alpha_2)^2 \frac{s_{j-1}^2}{2} - I\alpha_1^2 \frac{\sigma_{j-1}^2}{2} \right\},$$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  fixe Konstanten bezeichnen und die Risikoaversion charakterisieren:  $\alpha_1$  bezieht sich auf das Prozessrisiko in  $\xi_{i,j}$  und  $\alpha_2$  auf die Parameterunsicherheit in  $\Phi$ . Schließlich wird die versicherungstechnische Wahrscheinlichkeitsverzerrung  $\varphi$  durch  $\varphi_t = \mathbb{E}[\phi_n | \mathcal{T}_t]$  definiert.

**Lemma 5.3.1**  $\varphi$  ist ein strikt positives Martingal mit  $\phi_0 = 1$ .

**Satz 5.3.2** In Modell 5.3.1 gilt für  $k > t \geq I$  und  $i \in \{k - J, \dots, I\}$ ,

$$\frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_k X_{i,k-i} | \mathcal{T}_t] = C_{i,t-i} \left( \prod_{l=t-i}^{k-i-2} f_l^{(+t)} \right) (f_{k-i-1}^{(+t)} - 1)$$

mit risikoadjustierten CL-Faktoren

$$f_l^{(+t)} = \exp\left\{ \phi_l^{(+t)} + \frac{(s_l^{(+t)})^2}{2} + \frac{\sigma_l^2}{2} \right\} \exp\{(\alpha_2 + [I - (t - l - 1)]\alpha_1)(s_l^{(+t)})^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\} + 1.$$

In Anbetracht von Korollar 5.3.1 und Satz 5.3.2 ergibt sich für  $l \geq t - I$  die Ungleichung  $f_l^{(+t)} \geq f_l^{(+t)}$ . Die Posteriori CL-Faktoren  $f_l^{(+t)}$  liefern die BE Reserven zum Zeitpunkt  $t$ , die risikoadjustierten CL-Faktoren  $f_l^{(+t)}$  liefern risikoadjustierte Reserven, die sowohl das Prozessrisiko in  $\xi_{i,j}$  als auch die Parameterunsicherheit in  $\Phi_j$  berücksichtigen. Die risikoadjustierten Reserven sind schließlich gegeben durch

$$\mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)}) = \sum_{i=t+1-J}^I C_{i,t-i} \sum_{j=t-i+1}^J \left( \prod_{l=t-i}^{j-2} f_l^{(+t)} \right) (f_{j-1}^{(+t)} - 1),$$

woraus man schließlich eine positive Risikomarge  $\text{RM}_t(\mathbf{X}_{(t+1)})$  erhält.

Man beobachtet, dass es relativ leicht ist die risikoadjustierten Reserven im Bayes'schen Lognormal CL-Modell zu berechnen. Der einzige Aufwand besteht darin die CL-Faktoren geeignet zu modifizieren:

$$f_l^{(+t)} = (f_l^{(+t)} - 1) \exp\{(\alpha_2 + [I - (t - l - 1)]\alpha_1)(s_l^{(+t)})^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\} + 1.$$

Die folgende Funktion (mit  $l \geq t - I \geq 0$ )

$$\pi_{l,t}(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\{(\alpha_2 + [I - (t - l - 1)]\alpha_1)(s_l^{(+t)})^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\} \geq 0$$

repräsentiert diese Modifikation bzgl. der Risikoaversionsparameter  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ .

### Erwarteter Verlauf der Risikomarge

In diesem Abschnitt wird der erwartete Verlauf der BE und der risikoadjustierten Reserven vorgestellt. Dazu ist folgendes Lemma nötig:

**Lemma 5.3.2** Für  $l \geq t - I \geq s - I \geq 0$  gilt

$$f_l^{(+t,s)} = \mathbb{E}[f_l^{(+t)} | \mathcal{T}_s] = (f_l^{(s)} - 1)\tau_{l,t}(\alpha_1, \alpha_2) + 1.$$

Man beachte, dass  $\tau_{l,t}(\alpha_1, \alpha_2)$  absteigend in  $t$  ist, woraus die Supermartingaleigenschaft folgt. Weiters gilt folgender Satz:

**Satz 5.3.3** Für  $t > s \geq I$  sind die erwarteten Best-Estimate Reserven gegeben durch

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(t+1)} | \mathcal{T}_s)] = \sum_{i=t+1-J}^I \left[ C_{i,s-i} \sum_{j=t-i+1}^J \prod_{l=s-i}^{j-2} f_l^{(s)} (f_{j-1}^{(s)} - 1) \right]$$

und für die erwarteten risikoadjustierten Reserven gilt

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)} | \mathcal{T}_s)] = \sum_{i=t+1-J}^I \left[ C_{i,s-i} \prod_{l=s-i}^{t-i-1} f_l^{(s)} \cdot \sum_{j=t-i+1}^J \prod_{l=t-i}^{j-2} f_l^{(+t,s)} (f_{j-1}^{(+t,s)} - 1) \right].$$

Der Verlauf der Risikomarge ergibt sich somit durch:

$$\mathbb{E}[\text{RM}_t(\mathbf{X}_{(t+1)}) | \mathcal{T}_s] = \mathbb{E}[\mathcal{R}_t^+(\mathbf{X}_{(t+1)}) | \mathcal{T}_s] - \mathbb{E}[\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(t+1)}) | \mathcal{T}_s].$$

# Kapitel 6

## Datenbeispiele

Dieses Kapitel dient dazu die erarbeiteten CoC-Ansätze in Form der ersten beiden vorgestellten Modelle zur Berechnung der Risikomarge und deren Simplifications anhand eines Datenbeispiels zu illustrieren und analysieren.

Als Eingabedaten sind kumulierte historische Schadenzahlungen in Form eines Schadendreiecks verfügbar (entnommen aus [20]). Zwecks Vergleichbarkeit wird für jedes Modell das gleiche Schadendreieck verwendet (siehe Tabelle 6.2). Je nach Modell sind zusätzlich noch diverse Priori Parameter als Inputdaten nötig.

### 6.1 Modell 1 aus Kapitel 5.1

Neben dem Schadendreieck aus Tabelle 6.2 werden zusätzlich noch die Priori-Werte für die Abwicklungsfaktoren  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_J]$ , die Parameter  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_J]$  und die Standardabweichungen  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_J]$  benötigt. Diese stammen aus dem Paper [20] und sind wie folgt gegeben<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= [1.4500, 1.1100, 1.0750, 1.0700, 1.0650, 1.0630, 1.0600, 1.0500, 1.0400], \\ \boldsymbol{\gamma} &= [2.1, 3.0, 4.1, 4.3, 4.7, 4.8, 5.1, 6.4, 8.89], \\ \boldsymbol{\sigma} &= [0.202, 0.0080, 0.0078, 0.0073, 0.0117, 0.0233, 0.0031, 0.0026, 0.0022].\end{aligned}$$

Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über die Ergebnisse der verschiedenen Ansätze. Die CoC-Rate wurde gemäß den QIS5 Technical Specifications [6]

---

<sup>1</sup>Da der Fokus dieser Arbeit nicht auf der Vorstellung eines Modells sondern auf der Anwendung der Simplifications und deren Vergleich liegt, wird auf die Schätzung der Parameter verzichtet. Für nähere Informationen zur Parameterschätzung in Bayes'schen Modellen siehe [4].

mit 6% fixiert. Die Höhe des Sicherheitsniveaus kann laut [9] durch Kalibrierung der Risikomarge mit marktbasierter Werten (i.e. aktuelle Transferwerte) bestimmt werden. Dies ist jedoch problematisch, da nur wenige zuverlässige und vergleichbare Werte existieren.

Im folgenden Beispiel wurde, gemäß [20],  $\phi = 3\%$  als Sicherheitsniveau gewählt. Die Anzahl der Simulationsdurchläufe beträgt 10.000.

Zu bemerken ist, dass die Wahl der Konstante  $\phi$  keinen Einfluss auf den Vergleich der verschiedenen Methoden hat, da sie in den jeweiligen Formeln zur Risikomargeberechnung nur als multiplikative Konstante vor kommt.

Unfalljahr $i$	Reserven $\widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)}$	Risikomargen für jedes Unfalljahr				
		$RM_i$	$RM_i^{(S1.1)}$	$RM_i^{(S1.2)}$	$RM_i^{(S2)}$	$RM_i^{(S3)}$
1	12.292	173	173	173	173	173
2	22.861	346	345	345	302	302
3	39.369	544	544	544	431	430
4	53.394	1901	1898	1898	3311	3310
5	70.239	2683	2675	2676	2194	2194
6	78.429	2916	2905	2906	1680	1680
7	93.284	3394	3379	3379	2022	2022
8	110.718	3819	3799	3799	2236	2235
9	166.991	4955	4919	4921	4389	4388
Gesamt	647577	20730	20637	20641	16737	16734
aggregierter Fall		(16095)	13658	13659	11703	11701
% der Reserven		2,5	2,11	2,11	1,81	1,81

Tabelle 6.1: Ergebnisse für die Berechnung der vollständigen Risikomarge RM und jene der einzelnen Vereinfachungen  $S1.1$ ,  $S1.2$ ,  $S2$  und  $S3$ . Die Ergebnisse wurden sowohl für die einzelnen Unfalljahre wie auch für den aggregierten Fall berechnet.

Für die Vereinfachung  $S4$  erhält man als gesamte Risikomarge:

$$RM^{(S4)} = 0.10 \cdot \widehat{\mathcal{R}}^{(0)} = 64.757,7$$

wobei 0.10 den Prozentsatz darstellt, der auf die Sparte der allgemeinen Haftpflichtversicherung anzuwenden ist.

### 6.1.1 Diskussion der Resultate

- Beim ersten Blick auf die Ergebnistabelle fällt auf, dass sich die Vereinfachungen  $S_2$  und  $S_3$  stark vom ganzheitlichen Ansatz unterscheiden. Dies ist auch bei Betrachtung der Abbildung 6.1 sehr gut ersichtlich.

Während sie in den Unfalljahren 5 – 9 nicht genügend Schutz bieten, wird die Risikomarge im Jahr 4 klar überschätzt. Der Grund dafür ist, dass die Methoden die Risiken der späteren Jahren (i.e. die Varianz der Schadenabwicklungsergebnisse) nicht miteinbeziehen und die Approximation mit Hilfe der BE-Reserve den Verlauf der Varianzen des CDR nicht adäquat widerspiegeln können.

- Die Methode *S4*, die im Grunde kein abwicklungsspezifisches Risiko miteinbezieht, bietet eine vollkommen unangebrachte Approximation zur Risikomarge. Aufgrund dessen wurde der Prozentsatz (hier 10% für die Sparte der allgemeinen Haftpflichtversicherung), wie man im Ergebnis sieht entsprechend hoch angesetzt, um die Wahrscheinlichkeit einer Unterschätzung des Risikos möglichst klein zu halten. Selbst wenn man den kleinsten Prozentsatz unter allen Sparten verwendet ( 4% in der Sparte "sonstige KFZ-Haftpflichtversicherungszweige") ergibt sich eine Risikomarge von 25.903 und liegt somit immer noch beträchtlich über jenen der anderen Simplifications.

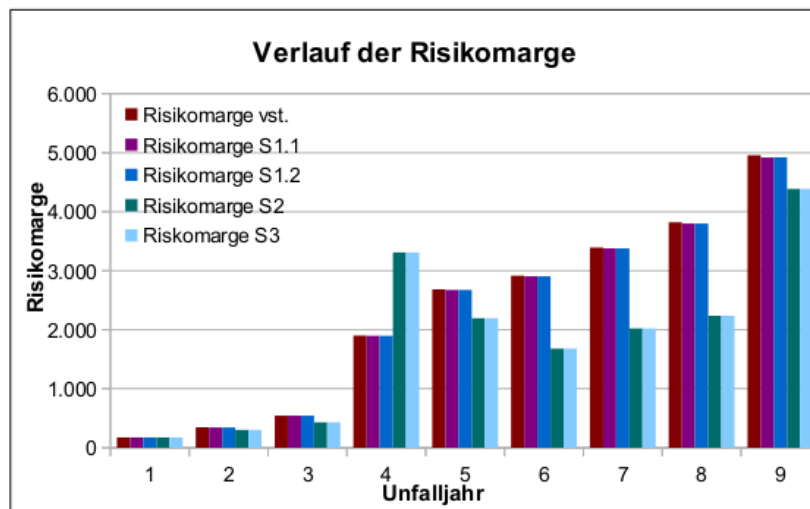


Abbildung 6.1: Schadenabwicklung unter Modell 1 für die verschiedenen CoC-Ansätze.

- Hingegen liefern die Methoden *S1.1* und *S1.2* im Vergleich nur sehr geringe Abweichungen zur vollständigen Berechnung und können als sehr gute Approximation herangezogen werden. Da der Unterschied in den Ergebnissen zwischen diesen beiden Methoden nur sehr gering ist, ist aus praktischen Gründen die Methode *S1.2* vorzuziehen, da

diese einfacher anzuwenden ist. Insbesondere ist für diese Methode die Risikomarge im aggregierten Fall analytisch berechenbar.

- Der ganzheitliche Ansatz ist für jedes Jahr etwas höher als die nächstbesseren beiden Approximationen (vgl. mit Korollar 5.1.5). Der Grund dafür ist, dass hier zusätzlich das Risiko im CoC-Cashflow miteinkalkuliert ist.
- Man erkennt, dass die Methode *S1.2* sogar konservativer ist als *S1.1*, da sie in jedem Jahr wie auch im Gesamten jeweils etwas höher ausfällt (vgl. mit Korollar 5.1.6).
- Die Methode *S3* weist in allen Jahren immer eine geringere Marge auf als die anderen. Insbesondere ist sie auch stets niedriger als die artverwandte Methode *S2*.

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	122.058	183.153	201.673	214.337	227.477	237.968	261.275	276.592	286.337	298.238
1	132.009	193.304	213.733	230.413	243.926	258.877	269.139	284.618	295.745	
2	132.130	186.839	207.919	222.818	237.617	253.623	267.766	284.800		
3	127.767	187.494	207.759	222.644	237.671	256.521	271.515			
4	127.648	179.633	196.260	213.636	229.660	245.968				
5	125.739	181.082	203.281	219.793	237.129					
6	117.470	172.967	190.535	204.086						
7	117.926	172.606	191.108							
8	118.274	171.248								
9	119.932									

Tabelle 6.2: Kumulative Schadenzahlungen  $C_{i,j}$  für die Unfalljahre  $i = 0, \dots, 9$  und Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, 9$ .



## 6.2 Modell 2 aus Kapitel 5.2

Im Gegensatz zu Modell 1 werden hier keine Prioriwerte benötigt, sondern nur das Schadendreieck aus der Tabelle 6.2.

Tabelle 6.3 gibt einen Überblick über die Ergebnisse der verschiedenen Ansätze.

Rechnungsjahr $i$	Reserven $\widehat{\mathcal{R}}(t)^{(0)}$	Verlauf der RM-Cashflows			
		RM( $i$ )	RM <sup>(S1)</sup> ( $i$ )	RM <sup>(S2)</sup> ( $i$ )	RM <sup>(S3)</sup> ( $i$ )
0	646.494	3.096	3.083	3.096	3.096
1	475.900	2.277	2.328	2.280	2.279
2	360.636	1.825	1.871	1.728	1.727
3	264.833	1.534	1.573	1.269	1.268
4	184.763	1.303	1.328	885	885
5	119.073	1.045	1.052	571	570
6	68.598	207	220	329	328
7	32.553	140	147	156	156
8	11.439	86	86	55	55
Gesamt	646.494	11.512	11.689	10.367	10.364
% der Reserven (aggregierter Fall)		1.8%	1.8%	1.6%	1.6%

Tabelle 6.3: Ergebnisse für die Berechnung der vollständigen Risikomarge RM und jene der einzelnen Vereinfachungen  $S1$ ,  $S2$  und  $S3$ . Die Ergebnisse wurden sowohl für die einzelnen Rechnungsjahre wie auch für den aggregierten Fall berechnet.

Für die Vereinfachung  $S4$  erhält man als gesamte Risikomarge gleich wie in Modell 1:

$$\text{RM}^{(S4)} = 0.10 \cdot \widehat{\mathcal{R}}(0)^{(0)} = 64.649,4$$

### 6.2.1 Diskussion der Resultate

- Als Ergebnis für die Höhe der Risikomarge im vollständigen Ansatz ergibt sich der Wert 11.512. Diesem Ergebnis am ähnlichsten kommt die erste Simplification mit einer Risikomarge in der Höhe von 11.689. Im Gegensatz zur ersten Simplification aus Modell 1 ist der Wert der Risikomarge jedoch höher als die ganzheitliche Risikomarge. Dies hängt damit zusammen, dass bei der Berechnung des bedingten msep die  $\mathcal{D}_{I+t}$ -messbaren Schätzer  $\widehat{C}_{i,J}^{(t)}$ ,  $\widehat{f}_j^{(t)}$  und  $\widehat{\sigma}_j^{(t)}$  durch die  $\mathcal{D}_I$ -messbaren Schätzer  $\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$ ,  $\widehat{f}_j^{(0)}$  und  $\widehat{\sigma}_j^{(0)}$  ersetzt wurden. Da für die Berechnung der  $\mathcal{D}_I$ -messbaren Schätzer weniger Daten verwendet werden, entstehen größe-

re Schwankungen bei den geschätzten Parametern und somit auch bei den msep's. Dies wirkt sich schlussendlich bei der Bestimmung des VaR in höheren Ergebnissen für die Risikomarge aus.

- Die Methoden *S2* und *S3* liefern wie im Modell 1 sehr ähnliche Ergebnisse. Deren Unterschiede zur ganzheitlichen Methode sind jedoch insbesondere im Vergleich zur Simplification *S1* beträchtlich höher. Die Ergebnisse der Methode *S2* ist für jedes Schadenjahr und schließlich auch für die gesamte Risikomarge etwas höher als jene für die Simplification *S3* und kann somit als konservativere Methode betrachtet werden.
- Die Berechnung unter dem Modell *S4* erfolgt in gleicher Weise wie im vorigen Beispiel und liefert ein viel zu hohes und eher unbrauchbares Ergebnis.
- Bei Betrachtung der Abbildung 6.2, die den zeitlichen Verlauf der Risikomarge unter den verschiedenen CoC-Ansätzen darstellt, fällt auf, dass die Methoden *S2* und *S3* den charakteristischen Verlauf der Risikomarge im vollständigen Ansatz nicht widerspiegeln. Während die Höhe der Risikomarge im Verlauf der Rechnungsjahre 1 bis 6 im Vergleich zur vollständigen Risikomarge immer stärker abfällt, so erfolgt im Rechnungsjahr 7 erstmals eine Überschätzung der Risikomarge.

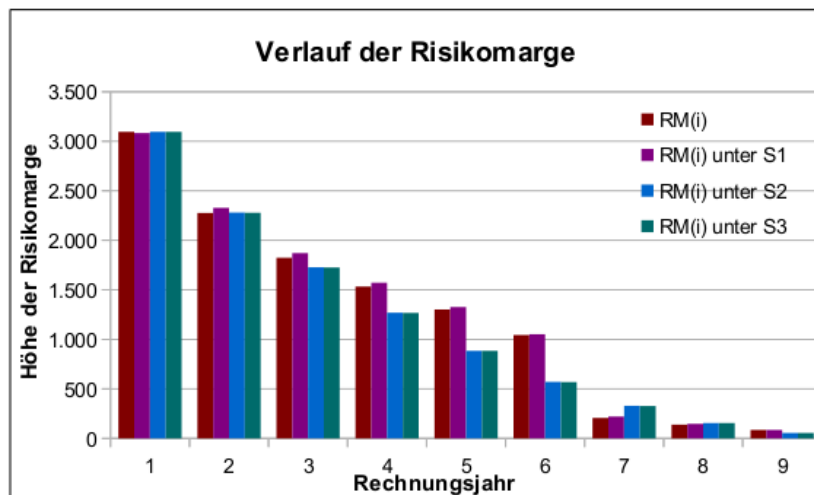


Abbildung 6.2: Verlauf der Risikomargen unter Modell 2 für die verschiedenen CoC-Ansätze

## 6.3 Zusammenfassung

Nach Diskussion der vorgeführten Ansätze, die derzeit den neuesten Stand der Forschung darstellen, werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse bezüglich Verwendung der Simplifications im Rahmen von Solvency II präsentiert. Zu berücksichtigen ist, dass die Empfehlungen und Urteile nur auf Basis der eben vorgestellten Modelle, Beispiele und Beobachtungen gemacht werden (können), jedoch keine absoluten Urteile darstellen sollen:

Falls es dem Versicherungsunternehmen möglich ist die Risikomarge vollständig - mit Berücksichtigung aller potentiellen und messbaren Risiken - zu berechnen, so ist dies im Rahmen eines plausiblen Modells selbstverständlich zu empfehlen. Sollte dies nicht der Fall sein, so stellt die Simplification aus Level 1 eine sehr gute Approximation dar. Insbesondere die Approximation von  $\mathcal{D}_{I+k}$ -messbaren Schätzern oder Risikomaßen durch  $\mathcal{D}_I$ -messbare Schätzer oder Risikomaße führt nur zu kleinen Abweichungen im Vergleich zur vollständigen Berechnung.

Die Simplifications aus Level 2 wie auch jene aus Level 3 führen vergleichsweise zu beträchtlicheren Abweichungen bei der Berechnung der Risikomarge. Es erfolgt meistens eine signifikante Unterschätzung des Risikos bzw. eine Verzerrung des charakteristischen Verlaufs der Risikomarge (siehe Abbildung 6.1 und 6.2). Im Modell 1 war zu beobachten, dass kein durchgehender Trend beim Verlauf der Riskikomarge in Bezug auf die Unfalljahre zu erkennen war. Falls keine Berechnung durch eine Methode aus Level 1 möglich ist, so ist eher die Methode aus Level 3 zu empfehlen, da diese nahezu gleiche Ergebnisse liefert wie jene aus Level 2 aber im Vergleich dazu einfacher zu berechnen und implementieren ist.

Die Methode *S4* ist wie zu erwarten war und auch die Ergebnisse zeigen nicht zu empfehlen. Die Risikomarge wird nur sehr grob geschätzt ohne auf ein Risiko Bezug zu nehmen. Wie die Datenbeispiele zeigen, wurden die Prozentsätze sehr vorsichtig bestimmt, um sicher zu gehen, dass die Risikomarge eher stark überschätzt als unterschätzt wird.

# Abkürzungsverzeichnis

BE .....	Best Estimate
BSCR .....	Basic Solvency Capital Requirement
CDR .....	Claims Development Result
CEIOPS .....	Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors
CL .....	Chain Ladder
CoC .....	Cost of Capital
CVaR .....	Conditional Value at Risk
E .....	Eigenkapital
EIOPA .....	European Insurance and Occupational Pensions Authority
EU .....	Europäische Union
EV .....	Embedded Value
GuV .....	Gewinn- und Verlustrechnung
IAIS .....	International Association of Insurance Supervisors
IASB .....	International Accounting Standards Board
IFRS .....	International Financial Reporting Standards
LoB .....	Line of Business
MCR .....	Minimum Capital Requirement
msep .....	mean squared error of prediction
QIS .....	Quantitative Impact Studies
RM .....	Risikomarge
RU .....	Referenzunternehmen
SCR .....	Solvency Capital Requirement
SST .....	Swiss Solvency Test
VaR .....	Value at Risk

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die 3-Säulen-Struktur von Solvency II . . . . .	9
1.2	Standardformel . . . . .	12
1.3	Solvency II Bilanz . . . . .	16
4.1	Typischer zeitlicher Verlauf eines Schadens im Nichtlebensversicherungsbereich . . . . .	42
4.2	Schadenabwicklungsdreieck . . . . .	43
5.1	Das Re-Reservingverfahren . . . . .	71
6.1	Schadenabwicklung unter Modell 1 für die verschiedenen CoC-Ansätze. . . . .	86
6.2	Verlauf der Risikomargen unter Modell 2 für die verschiedenen CoC-Ansätze . . . . .	90

# Tabellenverzeichnis

2.1	Prämienkalkulationsprinzipien und ihre Eigenschaften . . . . .	33
6.1	Ergebnisse für die Berechnung der vollständigen Risikomarge RM und jene der einzelnen Vereinfachungen $S1.1, S1.2, S2$ und $S3$ . Die Ergebnisse wurden sowohl für die einzelnen Unfalljahre wie auch für den aggregierten Fall berechnet. . . . .	85
6.2	Kumulative Schadenzahlungen $C_{i,j}$ für die Unfalljahre $i = 0, \dots, 9$ und Abwicklungsjahre $j = 0, \dots, 9$ . . . . .	88
6.3	Ergebnisse für die Berechnung der vollständigen Risikomarge RM und jene der einzelnen Vereinfachungen $S1, S2$ und $S3$ . Die Ergebnisse wurden sowohl für die einzelnen Rechnungsjahre wie auch für den aggregierten Fall berechnet. . . . .	89

# Anhang A

## Verteilungen

### A.1 Die Gammaverteilung

**Definition A.1.1** Die Gammaverteilung  $\Gamma(p, b)$  ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definiert, wobei  $b > 0$  und  $p > 0$ .

Sei  $X \sim \Gamma(p, b)$ . Der Erwartungswert von  $X$  ist

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{b}.$$

Die Varianz von  $X$  ist

$$\text{Var}(X) = \frac{p}{b^2}.$$

### A.2 Die stetige Gleichverteilung

**Definition A.2.1** Die stetige Gleichverteilung  $\mathcal{U}(a, b)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Sei  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ . Der Erwartungswert von  $X$  ist

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Die Varianz von  $X$  ist

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2.$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Albrecher H.; Asmussen S.: Ruin probabilities. Singapore [u.a.] : World Scientific, 2010.
- [2] Albrecher H.; Binder A.; Mayer P.: Einführung in die Finanzmathematik. Basel : Birkhäuser Basel, 2009.
- [3] Buckham D.; Wahl J.; Rose S.: Executive's Guide to Solvency 2. The Wiley & SAS business series, 2010.
- [4] Bühlmann H.; Gisler A.: A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer, 2005.
- [5] Diers D.; Eling M.; Kraus C.; Linde M.: The Multi-Year Non-Life Insurance Risk. Working papers on risk management and insurance No. 96, 2011.
- [6] CEIOPS - Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: QIS5 Technical Specifications. Brüssel, Juli 2010.
- [7] England P.; Verrall R.: Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. Annals of Actuarial Science, 2(1), 2002.
- [8] FMA - Österreichische Finanzmarktaufsicht: Solvency II Handbuch - Eine Einführung in das neue europäische Versicherungsaufsichtsrecht. LexisNexis Verlag Wien, 2012.
- [9] IAA - International Actuarial Association: Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimates and Risk Margins. April, 2009.
- [10] Institut der Wirtschaftsprüfer: International Financial Reporting Standards (IFRS) - IDW Textausgabe einschließlich International Accounting Standards (IAS) und Interpretationen. IDW-Verlag, 2009.

- [11] Mack Thomas: Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserves estimates. *Astin Bulletin* 23/2.
- [12] McNeil Alexander J.; Frey R.; Embrechts P.: *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, 2005.
- [13] Merz M.; Wüthrich M.V.: Modelling the claims development result for solvency purposes. *CAS E-Forum*, Fall 2008, 542-568.
- [14] Ohlsson E.; Lauzeningks J.: The one-year non-life insurance risk. Conference Paper, *Astin Colloquium* 2008.
- [15] Perridon L.; Steiner M.: *Finanzwirtschaft der Unternehmung*. 13. Auflage. Vahlen, 2004.
- [16] Richter Rainer: Entwicklung des embedded value 1988/1991. *Blätter der DGVM*, 1995.
- [17] Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität 2).
- [18] Rockel Werner: Market Value Margin für die Fair Value-Bilanzierung versicherungstechnischer Verpflichtungen: Ableitung auf Basis des CAPM. München, 2004.
- [19] Rolski T.; Schmidli H.; Schmidt V.; Teugels J.: *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- [20] Salzmann R.; Wüthrich M.V.: Cost-of-capital margin for a general insurance liability runoff. *Astin Bulletin* 40/2, 2010.
- [21] Wüthrich M.V.; Embrechts P.; Tsanakas A.: Risk Margin for a Non-Life Insurance Run-Off. *Astin Bulletin* 40/2, 2011.
- [22] Wüthrich M.V.; Merz M.: *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. John Wiley & Sons, 2008.
- [23] Zöbisch, Marion: *Solvency 2: Risikoadäquanz von Standardmodellen*. Karlsruhe: VVW, 2009.