Graz University of Technology

Institut für Betonbau
Lessingstraße 25
A-8010 Graz, Austria
betonbau@tugraz.at

Analytische Berücksichtigung viskoelastischer Betoneigenschaften bei der Ermittlung der Zwangsspannungen von erhärtenden Betonbauteilen unter teilweiser Verformungsbehinderung

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplomingenieurs

eingereicht am

Institut für Betonbau
der
Technischen Universität Graz

im
Wintersemester 2012/13

Verfasser: Peter Joachim Heinrich, BSc
Evangelimanngasse 21/12
A-8010 Graz, Austria
peter.heinrich@student.tugraz.at

Betreuer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Viet Tue Nguyen
mitbetreuender Assistent: Dipl.-Wirtsch.-Ing. Dirk Schlicke

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources and resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Déclaration sur l'honneur

Je déclare sur l'honneur avoir rédigé mon mémoire seul. Je n'ai pas utilisé d'autres sources ou ressources que celles mentionnées et j'ai noté les paragraphes que j'ai empruntés à ces sources.

Graz, Oktober 2012
Ort, Datum

Peter Joachim Heinrich

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei *allen* bedanken, die mich während meines Studiums und besonders während der Zeit des Schreibens der vorliegenden Arbeit begleitet haben, mir mit Rat und Tat zur Seite standen und mir sonst Stütze in geistiger, freundschaftlicher, kollegialer und finanzieller Form waren.

Zu allererst gebührt der namentliche Dank meinen beiden Eltern, *Elisabeth* und Baumeister Dipl.-Ing. *Manfred Heinrich*, ohne denen es mir nicht möglich gewesen wäre, eine fundierte Ausbildung zu erhalten, sowohl auf gymnasialer als auch akademischer Ebene. Ich danke Euch dafür von ganzem Herzen!

Besonderer Dank gilt auch meinen Diplomarbeitsbetreuern Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. *Nguyen Viet Tue* und Herrn Dipl.-Wirtsch.-Ing. *Dirk Schlicke* sowie Frau Dipl.-Ing. *Katrin Turner*, BSc. Ich bedanke mich vor allem für ihr Engagement, für die hervorragende Unterstützung bei der Arbeit an dieser Diplomarbeit und überhaupt für die Möglichkeit, diese Arbeit am Institut für Betonbau verfassen zu können. Auch wenn es bei manchen Fachdiskussionen manchmal länger gedauert hat, bis bei mir der buchstäbliche „Groschen gefallen“ ist, sei hier nochmals für ihre Geduld und den motivatorischen Zuspruch gedankt.

Was wäre ein Studium ohne den dazugehörigen Phasen, die landläufig als „studieren“ oftmals schmunzelnd bezeichnet werden. Hier bedanke ich mich für die nette Gemeinschaft im Verkehrswesenzeichensaal, vor allem für die geselligen Runden. Besonders hervorheben möchte ich hierbei meine Freunde Dipl.-Ing. *Hans Georg Leitinger*, BSc, *Ivo Ioannis Raissakis*, BSc und Dipl.-Ing. *Hanns Golo Schinner*, BSc. Ich sage „Danke!“ für die lustige Zeit, die ich mit Euch verbringen durfte. Ohne Euch wäre es mir wohl nicht gelungen, das Studium in dieser kurzen Zeit zu schaffen. Ich werde vor allem die Zeit, die ich mit Hanns ein Semester in Lyon verbringen durfte in guter Erinnerung behalten.

Ein „Danke!“ und „Schmollis!“ gilt auch den Mitgliedern meiner katholischen österreichischen Hochschulverbindung, e.s.v. *K.Ö.St.V. Traungau Graz im ÖCV* sowie meiner Urkorporation e.v. *K.Ö.St.V. Riegersburg zu Fürstenfeld im MKV*. An die heiteren und intellektuellen Abende werde ich mich auch im „Philisterland“ gerne zurückerinnern. Ein besonderer Dank gilt hierbei meinem „Mentor“ und guten Freund, dem Vorsitzenden des Altherrenlandesbundes Steiermark, Rechtsanwalt Mag. Dr. *Arno R. Lerchbaumer*, der mir oft in schwierigen Entscheidungen mit Rat und Tat zur Seite stand und mir stets ein wahrer Freund und Bruder bleiben wird.

Danken möchte ich auch meinen Freunden, denen ich seit der Volks- und Mittelschulzeit verbunden bin. Hier möchte ich vor allem meinen besten Freund *Matthias Glatz* hervorheben, der für mich immer ein offenes Ohr hat(te) und mich oft – beim geistigen Luftschlösserbau – mit einer aufrichtigen Ehrlichkeit auf den Boden der Tatsachen zurück holt(e).

Nicht unerwähnt sollen meine Großeltern *Margarethe* und Tischlermeister im (Un)ruhestand *Alois Pfeiffer* bleiben. – Die vielen Tage und schönen Stunden, die ich bei und mit Euch verbringen durfte, werde ich immer im Herzen mit mir tragen.

Zu guter Letzt gebührt ein großes „Dankeschön!“ dem Fürstenfelder Literat und Latein- und Deutschprofessor Oberstudienrat Mag. Dr. *Maximilian J. Hiti*, der sich bereit erklärt hat, diese Arbeit korrekturzulesen. Ich danke Dir dafür!

DANKE!

Kurzfassung

In der Tragwerksplanung wird Beton i.d.R. als elastischer Baustoff betrachtet, d.h. Spannung und Verformung hängen über das HOOKEsche Gesetz zusammen. Beton besitzt allerdings auch viskoelastische Eigenschaften: der Verformungszustand eines bestimmten Spannungsniveaus ändert sich dabei mit der Zeit. Insbesonders im jungen Alter ist ein ausgeprägtes viskoelastisches Verhalten zu beobachten. Insgesamt hat es einen deutlichen Einfluss auf das Verhalten von Betonbauteilen unter Beanspruchung.

In der Regel werden nur die beiden Extremfälle Kriechen oder Relaxation getrennt voneinander betrachtet. In der Realität können die für den jeweiligen Extremfall erforderlichen Randbedingungen aber nicht immer erfüllt werden. Es liegen somit gemischte Systeme vor, die einer so genannten teilweisen Verformungsbehinderung unterliegen. In diesem Fall ist die Beschreibung der viskoelastischen Betoneigenschaften auf Grundlage der konventionellen Definitionen (Kriechen = Verformungsänderung bei konstanter Spannung bzw. Relaxation = Spannungsänderung bei konstanter Verformung) nicht ohne weiteres möglich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Berechnungsalgorithmus auf Grundlage eines inkrementellen Ansatzes nach [Nietner, 2009], [Nietner et al., 2011] und [Schlicke und Tue, 2012] erarbeitet, der eine Berücksichtigung des kombinierten Auftretens beider Effekte auf analytischer Ebene ermöglicht. Dem Ansatz selbst liegt ein beliebig wählbares Kriechmodell zugrunde. Für die hier getätigten Betrachtungen wird dabei das Kriechmodell aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] herangezogen. Der betrachtete Beton befindet sich zusätzlich im Zustand der Erhärtung, d.h. seine Festigkeitseigenschaften ändern sich ständig mit fortschreitender Zeit. Als Belastung wird von einer Zwangsbeanspruchung ausgegangen, die infolge der auf den Bauteil wirkenden Hydratationswärme als Temperatureinwirkung hervorgerufen wird.

Der Berechnungsalgorithmus wurde anschließend mittels der Nachrechnung eines Versuchs überprüft. Hierbei konnte gezeigt werden, dass die Berechnungsergebnisse die gemessenen Daten in einer befriedigenden Weise widerspiegeln.

Schlüsselwörter: junger Beton, früher Zwang, Viskoelastizität, Kriechen, Relaxation, Kriechkurven, Materialmodell, Versuchsnachrechnung, Parameterstudie, Sensitivitätsanalyse

Abstract

In structural design, concrete is generally considered as an elastic building material. This means that tension and deformation are related to each other by HOOKE's law. However concrete has also viscoelastic characteristics: the deformation state of a certain stress level changes with time. Especially in early age a distinctive viscoelastic behaviour is observable. Overall it has an obvious influence on the behaviour of concrete construction parts under strain.

In general, only the both extreme cases creep or relaxation are considered separately. The boundary conditions that are required for the respective extreme case cannot always be achieved in reality. Therefore, mixed systems exist which are subjected to a so-called partial constraint. In this case, the description of the concretes viscoelastic characteristics with conventional definitions (creep = deformation due to constant stress resp. relaxation = change in the state of stress due to constant deformation) is not by implication possible.

In this thesis a calculation algorithm is developed that allows the consideration of the combined appearance of both effects in analytic level, which is based on an incremental approach by [Nietner, 2009], [Nietner et al., 2011] and [Schlicke und Tue, 2012]. The approach itself rests upon an arbitrary creep-model. In this thesis, the creep-model taken from [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] is used. Additionally, the considered concrete is in the state of hardening. This means that its physical properties change permanently with proceeding time. The applied compulsion load is caused by the heat of hydration that impacts the construction part itself.

The model has been verified with data retained from an experiment. It could be shown that the calculation results reflect the measured data in a satisfying way.

Keywords: early aged concrete, early constraint, viscoelasticity, creep, relaxation, creep curves, recalculation, parametric study, sensitivity analysis

Sommaire

Dans la conception des charpentes, on considère le béton en général comme un matériau élastique. C'est-à-dire que la tension et la déformation sont régies entre elles par la loi de Hooke. En effet, le béton a aussi des propriétés viscoélastiques : l'état de déformation d'un certain niveau de tension se modifie avec le temps. On observe, particulièrement sur le béton jeune, un comportement viscoélastique prononcé. Dans l'ensemble cette propriété a une forte influence sur le comportement rhéologique du béton armé.

D'habitude on ne s'intéresse qu'aux deux cas extrêmes, fluage et relaxation. En réalité il n'est pas possible de remplir les conditions limites nécessaires aux cas extrêmes respectifs. C'est-à-dire que l'on a affaire en réalité à des systèmes mixtes qui sont influencés par un empêchement partiel de la déformation. Dans ce cas, il est impossible de décrire les phénomènes de viscoélasticité à partir des seules définitions conventionnelles (d'abord le fluage : déformation sous l'effet d'une contrainte constante, puis la relaxation : variation de la contrainte sous l'effet d'une déformation maintenue constante).

Dans ce mémoire, un algorithme de calcul est élaboré qui repose sur une approche de [Nietner, 2009], [Nietner et al., 2011] et [Schlicke und Tue, 2012] et qui permet une considération d'apparition des deux effets combinés dans un plan analytique. Cette approche repose sur un modèle à choisir librement et décrivant l'état de fluage. Ce document repose sur un modèle de fluage basé sur les normes utilisées en Autriche [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009]. Par ailleurs, le béton considéré est en cours de prise, c'est-à-dire que ses capacités se modifient progressivement au fil du temps. Les champs de contraintes, imposés au matériau, le sont par une différentielle de température qui découle de l'hydratation du béton (réaction exothermique).

La qualité de l'algorithme de calcul a été alors vérifiée à l'aide d'un recalage expérimental. Il a été démontré que les résultats des calculs permettant d'approcher les données mesurées de manière satisfaisante.

Mots-clés : béton jeune, mémoire des contraintes, viscoélasticité, fluage, relaxation, courbes de fluage, modèle du matériau, recalage expérimental, étude paramétrique, analyse de sensibilité

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis **XII**

1 Einleitung **2**
1.1 Einführung in die Thematik und Problemstellung . . . 2
1.2 Zielsetzung und Vorgangsweise bzw. Methodik . . . 3
1.3 Aufbau und Gliederung der Arbeit . . . 4
1.4 Verwendete Begriffe . . . 5

2 Temperatur, Festigkeitsentwicklung und Schwinden von erhärtendem Beton **6**
2.1 Hydratationsprozess . . . 6
2.1.1 Hydratationsgrad . . . 6
2.1.2 Reife . . . 8
2.2 Hydratationswärme . . . 8
2.3 Festigkeitsentwicklung . . . 8
2.4 Schwinden . . . 9
2.4.1 Autogenes Schwinden . . . 10
2.4.2 Trocknungsschwinden . . . 10

3 Viskoelastisches Verhalten von Beton **12**
3.1 Allgemeines . . . 12
3.1.1 Physikalische Ursachen . . . 12
3.1.2 Einflüsse auf das viskoelastische Verhalten von Beton . . . 13
3.1.3 Kriechen und Relaxation unter einstufiger Belastung . . . 14
3.1.4 Kriechen und Relaxation unter mehrstufiger Belastung . . . 15
3.2 Zeitlicher Verlauf und Größe des Kriechens . . . 15
3.3 Verschiedene Theorien zur Beschreibung des Kriechens . . . 17
3.3.1 Fließen mit Alterung . . . 17
3.3.2 Summenansatz . . . 18
3.3.3 Produktansatz . . . 19
3.4 Regelung nach ÖNORM EN 1992-1-1 . . . 20
3.4.1 Formelmäßige Ermittlung der Größe und des zeitlichen Verlaufs des Kriechens 20
3.5 Zusammenhang von Kriechen und Relaxation . . . 23
3.5.1 Lösung nach Trost – Allgemeine Bestimmungsgleichung . . . 23

4 Bestimmung von Zwangsspannungen auf Grundlage der Elastizitätstheorie **26**
4.1 Statisches System unter vollem Zwang . . . 26
4.1.1 Bestimmung der aus einer Temperaturbelastung resultierenden Spannung . . . 26
4.2 Statisches System unter teilweisem Zwang . . . 28
4.2.1 Bestimmung der aus einer Temperaturbelastung resultierenden Spannung . . . 28

5 Bestimmung von Zwangsspannungen unter Berücksichtigung von Viskoelastizität **30**
5.1 Mathematische Formulierung . . . 30
5.1.1 Kriechinkremente . . . 31
5.1.2 Globalspannung im System unter Berücksichtigung der Steifigkeitsentwicklung 32

5.2 Mathematische Formulierung der Belastungsgeschichte . . . 33
5.3 Belastung (Spannungszunahme) . . . 34
5.4 Entlastung (Spannungsabnahme) . . . 35
5.5 Spannungsnulldurchgang . . . 37
5.6 Keine zusätzliche äußere Belastungsänderung . . . 38

6 Wirkungsweise des Berechnungsmodells anhand ausgewählter Verformungseinwirkungen 39
6.1 Vorbemerkungen . . . 39
6.2 Temperatureinwirkung mit konstantem Verlauf ab dem Maximum . . . 42
6.2.1 Einstufige Temperaturänderung . . . 42
6.2.2 Lineare Temperaturzunahme . . . 44
6.2.3 Sigmoidale Temperaturzunahme . . . 46
6.3 Temperatureinwirkung mit Rückgang . . . 49
6.3.1 Sprunghafter Rückgang ab dem Maximum . . . 49
6.3.2 Kontinuierlicher Rückgang ab dem Maximum . . . 53
6.4 Einfluss von Unstetigkeiten in der Temperaturänderung . . . 59
6.5 Beobachtungen . . . 61

7 Verifikation der Berechnungsergebnisse anhand von Ergebnissen eines Zwangversuchs 62
7.1 Versuchsaufbau . . . 62
7.2 Versuchsergebnisse . . . 63
7.2.1 Temperatureinwirkung . . . 63
7.2.2 Zwangsspannungen . . . 64
7.3 Eingangsgrößen der Berechnung . . . 66
7.3.1 Rahmensteifigkeit . . . 66
7.3.2 Hydratationsgrad . . . 67
7.3.3 Festigkeitsentwicklung . . . 68
7.3.4 Verformungseinwirkung . . . 69
7.3.5 Kriechen . . . 70
7.4 Berechnungsergebnisse . . . 73
7.4.1 Spannung . . . 73
7.4.2 Verformung . . . 73
7.4.3 Verlauf des E-Moduls und des Behinderungsgrades . . . 74
7.4.4 Viskoelastisches Potential . . . 74
7.5 Diskussion . . . 75
7.6 Einfluss ausgewählter Parameter – Vergleichsrechnungen . . . 77
7.6.1 Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens . . . 77
7.6.2 Einfluss des autogenen Schwindens . . . 79
7.6.3 Einfluss der Herabsetzung der Kriechfähigkeit . . . 81
7.6.4 Einfluss der Umgebungsluftfeuchtigkeit . . . 83
7.6.5 Zusammenfassung . . . 86

8 Zusammenfassung und Ausblick 88

A Zusammenhang von Kriechen und Relaxation – Verfahren von Trost 90
A.1 Superpositionsprinzip . . . 90
A.2 Lösung nach Trost . . . 91

B Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens mittels rheologischer Modelle 93
B.1 Rheologische Grundelemente . . . 93
B.1.1 Hookesches Grundelement . . . 93
B.1.2 Newtonsches Grundelement . . . 94

B.2 Rheologische Grundkörper 94
B.2.1 KELVIN-Körper 94
B.2.2 MAXWELL-Körper 95
B.3 Erweiterung der rheologischen Grundkörper um Grundelemente 96

Literaturverzeichnis **103**

Abkürzungsverzeichnis

Allgemeine Abkürzungen

Abb.	Abbildung
abh.	abhängig
Abschn.	Abschnitt
altern.	alternativ
Anh.	Anhang
ausg.	ausgenommen
bel.	beliebig
BM	Braunschweiger-Modell
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
const.	konstant
CSH	Calciumsilikathydrat
d.h.	das heißt
etc.	et cetera (lat. und andere)
Exp.	Exponent
FEM	Finite Element Methode
ggf.	gegebenenfalls
Glg.	Gleichung
i.d.R.	in der Regel
Kap.	Kapitel
n.	nach
o.ä.	oder ähnlich
resp.	respektive
S.	Seite
s.	siehe
s.a.	siehe auch
sog.	so genannt
Tab.	Tabelle
teilw.	teilweise
TU	Technische Universität
u.a.	unter anderem
VBA	Visual Basic for Applications
vgl.	vergleiche
w/z-Wert	Wasser/Zement-Wert

z.B. ..... zum Beispiel
z.T. ..... zum Teil

Lateinische Großbuchstaben als Formelzeichen

$\overline{T_{\text{sig}}}$ ..... Teilfunktion zur Ermittlung eines sigmoidalen Temperaturverlaufs
A ..... Auflagerreaktionskraft
A_{c} ..... Querschnittsfläche
E ..... Elastizitätsmodul, E-Modul
E_{∞} ..... theoretischer Endwert des E-Moduls
E_{28} ..... E-Modul nach 28-Tagen
E_{ct1} ..... Zugelastizitätsmodul bei einem Hydratationsgrad von 1,0 (mit BM)
$E_{ct}(\alpha)$ ..... Zugelastizitätsmodul in Abhängigkeit vom Hydratationsgrad (mit BM)
F ..... (einwirkende) Kraft
F_{H} ..... allgemeine horizontale Kraft
I ..... Komplianz bzw. Compliance-Funktion (altern. Bezeichnung)
J ..... Komplianz- bzw. Compliance-Funktion
N ..... Normalkraft
N_{Beton} ..... Normalkraft im Beton
N_{Feder} ..... Normalkraft in einer Feder
N_{Rahmen} ..... Normalkraft im Rahmen
Q ..... Wärmemenge
Q_{∞} ..... Wärmemenge bei $t \to \infty$
R ..... Relaxationsmodul
RH ..... relative Luftfeuchte der Umgebungsluft
RH_0 ..... Bezugsgröße der relativen Luftfeuchte
T ..... (konstante) Temperatureinwirkung
T_{lin} ..... Funktion zur Ermittlung eines linearen Temperaturverlaufs
T_{sig} ..... Funktion zur Ermittlung eines sigmoidalen Temperaturverlaufs
$X_i(\alpha)$ ..... mit dem BM ermittelte Größe abh. vom Hydratationsgrad
X_{i1} ..... Größe für das BM bei einem Hydratationsgrad von 1,0

Lateinische Kleinbuchstaben als Formelzeichen

$\Delta\ell_{\text{Feder}}$ ..... Längenänderung einer Feder
$\Delta\ell_{\text{Temperatur}}$ ..... Längenänderung infolge einer einwirkenden Temperatur
$\Delta\ell_{\text{Zwang}}$ ..... Längenänderung infolge einer wirkenden Zwangkraft
ℓ ..... bel. Länge eines Dehnstabelements
ℓ_0 ..... ursprüngliche Länge
k_{F} ..... Federsteifigkeit
a ..... Modellparameter für Hydratationsgradansatz nach Jonasson
$a(\ldots)$ ..... Behinderungsgrad
b ..... Modellparameter für Hydratationsgradansatz nach Jonasson bzw. Breite des Betonquerschnitts

$f(\ldots)$ ..... vom Alter unabhängige Zeitfunktion
f_{c1} ..... Betondruckfestigkeit bei einem Hydratationsgrad von 1,0 (BM)
$f_{ck,28}$ ..... charakteristische Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen
$f_{ck,cube}$ ..... charakteristische Betonwürfeldruckfestigkeit
f_{ck} ..... charakteristische Zylinderdruckfestigkeit
f_{cmo} ..... Bezugsgröße von $10\,\mathrm{N/mm^2}$
f_{cm} ..... mittlere Betondruckfestigkeit
f_{ct1} ..... Betonzugfestigkeit bei einem Hydratationsgrad von 1,0 (BM)
$f_{ct}(\alpha)$ ..... Betonzugfestigkeit, abhängig vom Hydratationsgrad (BM)
$f_c(\alpha)$ ..... Betondruckfestigkeit, abhängig vom Hydratationsgrad (BM)
$g(\vartheta)$ ..... bel. temperaturabhängige Reifefunktion
h ..... Höhe des Betonquerschnitts
h_0 ..... wirksame Bauteildicke
h_1 ..... Bezugsgröße
k_σ ..... Spannungs-Festigkeitsverhältnis
k_n ..... werkstoffabhängiger Alterungsfaktor
m ..... Hydratationsgrad (altern. Bezeichnung)
t ..... Zeit; auch bel. Zeitpunkt der Erstbelastung
t_0 ..... bel. Zeitpunkt der Erstbelastung (altern.: t_1)
t_1 ..... bel. Zeitpunkt der Erstbelastung (altern.: t_0)
$t_{0,eff}$ ..... An Festigkeitsentwicklung angepasstes Betonalter bei Belastungsbeginn
$t_{0,T}$ ..... Temperaturangepasstes Betonalter bei Belastungsbeginn
t_{eff} ..... wirksames Betonalter (altern.: τ_w)
t_E ..... Entlastungszeitpunkt
t_T ..... Temperaturangepasstes Betonalter
t_i ..... bel. Belastungszeitpunkt
t_k ..... bel. Betrachtungszeitpunkt
u ..... Querschnittsumfang

Griechische Großbuchstaben

Δ ..... Differenz, Änderung oder Unterschied bzw. In- oder Dekrement der unmittelbar darauffolgenden Größe

Griechische Kleinbuchstaben

α ..... Beiwert zur Berücksichtigung der Auswirkungen der verwendeten Zementart
$\alpha(\ldots)$ ..... Hydratationsgrad
α_0 ..... Hydratationsgrad am Beginn der Festigkeitsentwicklung
α_T ..... Temperaturausdehnungskoeffizient
α_i ..... Korrekturfaktoren zur Berücksichtigung des Einflusses der Betondruckfestigkeit
α_{dsi} ..... Beiwert zur Berücksichtigung der Zementart bei Trocknungsschwinden
$\beta(f_{cm})$ ..... Beiwert zur Berücksichtigung der Betondruckfestigkeit
$\beta(t_0)$ ..... Beiwert zur Berücksichtigung des Betonalters bei Belastungsbeginn

β_{as} ..... Zeitfunktion des autogenen Schwindens
β_c ..... Zeitfunktion des Kriechens
β_{ds} ..... Funktion zur zeitlichen Beschreibung des Trocknungsschwindens
β_H ..... Faktor zur Berücksichtigung der relativen Luftfeuchte und der Bauteildicke
β_{RH} ..... Funktion zur Berücksichtigung der Umgebungsluftfeuchtigkeit bei Trocknungsschwinden
$\Delta\sigma_i^{entl.}$ ..... entlastendes Spannungsinkrement
$\Delta\varphi$ ..... Kriechinkrement
η ..... NEWTONsche Viskosität eines Stoffes; Dämpferviskosität
η_E ..... Parameter für die Beschreibung der E-Modul-Entwicklung nach dem Braunschweiger Modell
η_{fct} ..... Modellparameter der Betonzugfestigkeit bei BM
η_{fc} ..... Modellparameter der Betondruckfestigkeit bei BM
η_i ..... bel. Modellparameter bei BM
ψ ..... Relaxationszahl bzw. Relaxationsfunktion
ρ ..... Relaxationsbeiwert nach TROST
σ ..... Spannung
$\sigma^{elast.}$ ..... elastische (Gesamt)spannung
σ^{gesamt} ..... Gesamtspannung an einem bel. Zeitpunkt
$\sigma^{visko.}$ ..... viskoelastische (Gesamt)spannung
σ_c ..... Betonspannung
$\sigma_i(t_i)$ ..... Eine zu einem Zeitpunkt t_i aufgetretene Spannung direkt zum Zeitpunkt ihres Auftretens
$\sigma_i(t_k)$ ..... Eine zu einem Zeitpunkt t_i aufgetretene Spannung, zu einem Betrachtungszeitpunkt t_k
τ_k ..... wirksames Betonalter t_{eff} (altern. t_{eff})
τ_w ..... wirksames Betonalter
ε ..... Dehnung
ε_i^{real} ..... freie Dehnung
$\varepsilon_{as}(t)$ ..... zeitlicher Verlauf der autogenen Schwinddehnung
ε_{ca} ..... autogene Schwinddehnung
ε_{cc} ..... Dehnungsanteil infolge Kriechen
ε_{cd} ..... Trocknungsschwinddehnung
ε_{ci} ..... elastischer Dehnungsanteil
ε_{cs} ..... Gesamtschwinddehnung
ε_c ..... Gesamtdehnung aus Kriechdehnung und elastischer Dehnung
$\varepsilon_{cd,0}$ ..... Grundwert der Trocknungsschwinddehnung
$\varepsilon_{cd,\infty}$ ..... Endwert der Trocknungsschwinddehnung
φ ..... Kriechzahl bzw. Kriechfunktion
φ_0 ..... Grundkriechzahl
φ_D ..... Druckkriechzahl
$\varphi_{f,a}$ ..... Anteil irreversibler Verformungen kurz nach Belastungsbeginn
$\varphi_{f,gr}$ ..... Anteil des Grundfließens
$\varphi_{f,tr}$ ..... Anteil des Trocknungsfließens

φ_{f} ..... irreversibler Kriechanteil aus Fließen
φ_{nl} ..... nichtlineare rechnerische Kriechzahl
φ_{RH} ..... Kriechzahl unter Berücksichtigung der relativen Luftfeuchte
φ_{v} ..... reversibler Kriechanteil aus verzögerter Elastizität
φ_{Z} ..... Zugkriechzahl
ϑ ..... Temperatur
$\vartheta^{\mathrm{ad}}(t_i)$ ..... adiabatische Temperatur zu einem beliebigen Zeitpunkt t_i
$\vartheta_{\infty}^{\mathrm{ad}}$ ..... adiabatische Temperatur bei $t \to \infty$

1 Einleitung

1.1 Einführung in die Thematik und Problemstellung

Besonders bei erhärtenden Betonbauteilen mit hohen Dichtheitsanforderungen (sog. Weiße Wannen) führt die Beurteilung von auftretenden Zwangsbeanspruchungen immer wieder zu Diskussionen. In diesem Bereich hat sich daher in den letzten Jahren eine rege Forschungstätigkeit etabliert, um diese Zwangszustände sowohl messtechnisch als auch rechnerisch mittels numerischer Methoden (z.B. FEM) zu erfassen. Untersuchungen haben allerdings gezeigt, dass praxisübliche Formulierungen den Einfluss der zeitabhängigen Materialeigenschaften des Betons nicht immer zutreffend abbilden können. Dies führt zu einer nicht realitätsnahen Einschätzung der tatsächlich im Bauteil auftretenden Spannungszustände. In der vorliegenden Arbeit wird ein inkrementeller Ansatz erarbeitet, um die im Betonbauteil resultierenden Spannungen unter der Berücksichtigung der zeitabhängigen Betoneigenschaften wirklichkeitsnah ermitteln zu können [Nietner et al., 2011, S. 169].

Beton ist ein Baustoff, der starkes viskoelastisches Verhalten aufweist. Dieses äußert sich unter Belastung als zusätzliche zeitabhängige Verformung, die neben der sofort einsetzenden elastischen auftritt. Diese zeitabhängigen Verformungen sind von der im betrachteten Betonelement vorhandenen Spannung abhängig und werden als *Kriechen* bezeichnet. Werden diese Verformungen behindert, so kommt es aufgrund des viskoelastischen Betonverhaltens zu einer Spannungsabnahme, die als *Relaxation* bekannt ist.

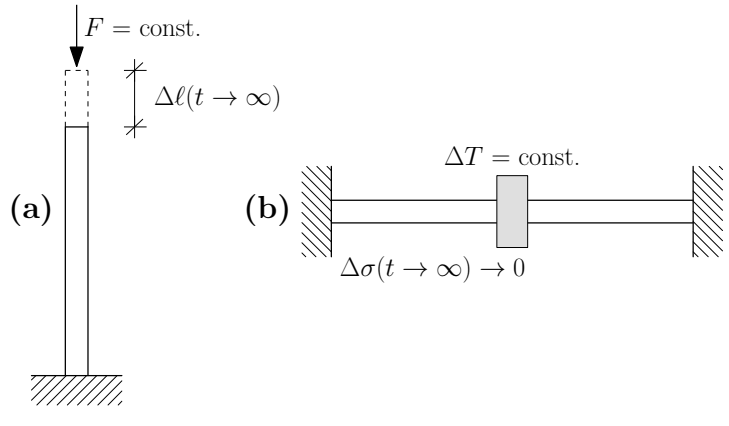


Abbildung 1.1: Kriechen einer Kragstütze (a) und Relaxation eines eingespannten Balkens (b) bei „idealen“ Randbedingungen

Isoliert betrachtet treten diese viskoelastischen Effekte gemäß ihrer Definition unter idealen Randbedingungen zu Tage: für Kriechen wird eine vollständige Verformungsfreiheit vorausgesetzt, für Relaxation eine vollständige Verformungsbehinderung. In der Realität liegen diese Randbedingungen allerdings nicht vor – es kommt aufgrund der endlichen Steifigkeit der behindernden, also angrenzenden Bauteile, viel mehr zu einer Mischform, der so genannten *teilweisen Verformungsbehinderung.*

Kriechverformung und Spannungsabbau infolge Relaxation treten bei einer teilweisen Verformungsbehinderung daher gemeinsam und unter gegenseitiger Beeinflussung auf. Die im System

vorherrschende Spannung wird infolge Relaxation reduziert, wodurch auch die damit verbundenen Kriechverformungen herabgesetzt werden. Für die praktische Anwendung hat sich, um diesem Zusammenhang Rechnung tragen zu können, der so genannte Relaxationsbeiwert nach Trost etabliert. Dieser Beiwert gilt allerdings nur für Betrachtungen, in denen von einem nahezu unveränderlichen Elastizitätsmodul ausgegangen werden kann. Des Weiteren ist er abhängig vom Grad der Behinderung, welcher ebenfalls keiner großen Schwankung unterliegen darf, um damit zuverlässige Ergebnisse erzielen zu können (s.a. Abschn. 3.5.1, vgl. [Trost, 1967a, S. 234]).

In der vorliegenden Arbeit soll vor allem die Spannungsentwicklung in einem Bauteil verfolgt werden, welches sich im Zustand der Erhärtung befindet. Das heißt, dass sämtliche, zur Berechnung erforderliche Parameter einer zeitlichen Veränderung unterliegen. Es wird somit notwendig, die aus den viskoelastischen Betoneigenschaften folgende Spannungsantwort abhängig von der Steifigkeit bzw. dem Hydratationsfortschritt des Bauteils zu betrachten. Das das Kriechvermögen bestimmende so genannte viskoelastische Potential ändert sich auch mit dem Hydratationsfortschritt.

Die auf den betrachteten Bauteil wirkende Belastung in Form einer Temperatureinwirkung stammt aus der Hydratationswärme des Bauteils selbst. Die Änderung der Temperatureinwirkung erfolgt somit nicht sprunghaft, sondern ist ebenfalls von der Zeit abhängig. Dies macht eine Verfolgung sämtlicher Einwirkungen und Betoneigenschaften über die Zeit notwendig, um die Spannungsantwort bestimmen zu können. Zusätzlich beeinflusst der globale Systemspannungszustand die Spannungsermittlung, was eine Fallunterscheidung der Temperaturänderungen hinsichtlich Be- und Entlastung bzw. Temperaturkonstanz erfordert.

1.2 Zielsetzung und Vorgangsweise bzw. Methodik

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine mechanisch konsistente und anwendungsfreundliche Möglichkeit zu finden bzw. vorzustellen, um die Spannungsantwort unter der Berücksichtigung aller im Vorhergehenden genannten Effekte bestimmen zu können. Unumgänglich bleibt eine zeitdiskrete Betrachtung, was den Berechnungsaufwand für eine Kontrollrechnung per Hand zunichte macht. Dieses Modell soll zudem so praxistauglich sein, dass es ohne größere Schwierigkeiten softwaretechnisch implementiert werden kann.

Bei der Modellbildung wird besonders darauf Wert gelegt, dass keinerlei Relaxationsfunktionen bekannt sein müssen. In der Praxis ist es i.d.R. schwierig, Relaxationszahlen und -funktionen zu bestimmen, weshalb hierzu wenige brauchbare Versuchsergebnisse vorliegen. Wohl aber gibt es verschiedene Ansätze zur Beschreibung des Kriechens und den damit verbundenen Kriechfunktionen und -zahlen. Bei den hier vorgestellten Untersuchungen soll von bereits bekannten Kriechfunktionen mechanisch korrekt auf die Spannungsrelaxation geschlossen werden.

Zunächst werden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, um den erhärtenden Beton analytisch beschreiben zu können. Zusätzlich werden grundlegende Unterscheidungsmerkmale bestehender Ansätze sowie grundlegende Theorien zur Beschreibung des Kriechens vorgestellt. In weiterer Folge wird dann das in der aktuellen Fassung der [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] verankerte Kriechmodell beschrieben, da es die Grundlage für sämtliche weitere Betrachtungen bildet.

In einem weiteren Schritt erfolgt die eigentliche mechanische Modellbildung eines Systems unter teilweiser Verformungsbehinderung: ein aus einem Temperaturinkrement resultierendes Spannungsinkrement soll über die Zeit verfolgt und dessen Abbau infolge der Kombination aus Kriechen und Relaxation beschrieben werden. Dabei müssen sämtliche vorher beschriebene zeitabhängige Eigenschaften des erhärtenden Betons Eingang in die Betrachtung finden. Liegt nun ein Modell vor, das

den Spannungsabbau eines Inkrements beschreiben kann, so ist es möglich den globalen Systemspannungszustand mittels Summation zu bestimmen, welcher dann den weiteren Berechnungsweg beeinflusst.

Um das mathematisch und mechanisch formulierte Modell auf dessen Plausibilität und Richtigkeit zu prüfen, soll mit diesem ein Versuch nachgerechnet werden. Bei diesem Versuch wurden sämtliche Größen wie Spannungen, Verformungen, Temperatureinwirkung, etc. gemessen. Das Modell sollte dann auf einen Spannungsverlauf führen, der dem gemessenen in einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit nahekommt.

Die Wirkungsweise, sowie Plausibilität und Konsistenz des Modells soll zusätzlich durch die Durchführung einer Parameterstudie und Berechnung verschiedener Fallbeispiele unterschiedlicher Temperatureinwirkungen untersucht werden. Das Ziel ist es, die Auswirkungen sämtlicher Parameter festzustellen, die vor allem in der normativen Bestimmung der Kriechkurven Eingang finden. Die Fallbeispiele sollen unter anderem die Auswirkungen von (teils akademischen) „Extremsituationen“ hinsichtlich der Temperaturbelastung aufzeigen, wie beispielsweise das Auftreten plötzlicher Temperatur*sprünge.*

1.3 Aufbau und Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in drei Teile gegliedert: Im ersten Teil wird nach einer allgemeinen Einführung in die Thematik bzw. der Definition und Erklärung einiger verwendeter Begriffe (Kap. 1) auf die analytische Beschreibung der Eigenschaften von erhärtendem Beton (Kap. 2) eingegangen.

Der zweite Teil beinhaltet einen Überblick über Theorien zur Beschreibung von Kriechen bzw. dem Rückschluss auf die damit in Zusammenhang stehende Relaxation sowie die Vorstellung des Kriechmodells aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] (Kap. 3). Darüber hinaus wird das statische System für sämtliche weiteren Betrachtungen untersucht und wichtige Größen wie der Behinderungsgrad hergeleitet (Kap. 4). Dieser Teil umfasst somit die grundlegenden mechanischen Zusammenhänge welche dann mit dem Kriechmodell verknüpft werden, um einen Ansatz zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens eines teilweise gezwängten Systems zu erhalten (Kap. 5).

Der dritte Teil dieser Arbeit befasst sich mit der Wahl der Parameter des im Versuch verwendeten Betons bzw. mit der Nachrechnung der gemessenen Spannungen unter Verwendung des zuvor aufgestellten und beschriebenen Ansatzes. Die Wirkungsweise des Ansatzes wird zunächst mittels „Fallbeispielen“ (ausgewählte Temperaturverläufe als Einwirkung) gezeigt (Kap. 6). Dadurch sollen die Auswirkungen der unterschiedlichen Belastungen auf den Gesamtspannungs- und -verformungsverlauf bzw. auf den Verlauf des viskoelastischen Potentials dargelegt werden. Im folgenden Kapitel (Kap. 7) werden der eigentliche Versuch nachgerechnet und die Eingangsgrößen sämtlicher Modellansätze (z.B. Hydratationsgrad) bestimmt und vorgestellt. Nach der Versuchsnachrechnung werden einzelne Parameter herausgegriffen und diese variiert, um deren Auswirkungen im Rahmen einer Parameterstudie näher betrachten zu können (Kap. 7). Den Abschluss bildet eine Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse (Kap. 8).

Im darauf folgenden Anhang sind Theorien bzw. Zusammenhänge angegeben, die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht unbedingt notwendig sind, dem interessierten Leser jedoch einen tieferen Einblick in die Thematik geben. So wird beispielsweise auf die Herleitung des Relaxationsbeiwertes nach Trost (Anh. A) oder auf die Formulierung der viskoelastischen Betoneigenschaften mittels rheologischer Modelle (Anh. B) eingegangen.

Um die erforderlichen Berechnungen durchführen zu können, wurde das hier vorgestellte Modell mittels VisualBasic for Applications (VBA) als ein Macro in einer Microsoft® Excel Arbeitsmappe

implementiert. Auf die Programmierung selbst wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen. Die aus der Berechnung stammenden Daten wurden anschließend mit *gnuplot* graphisch aufbereitet.

1.4 Verwendete Begriffe

Zum besseren Verständnis und zur Vermeidung von Unklarheiten sind nachfolgend einige Begriffe zusammengetragen worden, welche im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Diese Begriffe stellen dabei keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit, sondern werden lediglich im Rahmen dieser Arbeit benutzt.

Behinderte Dehnung
: Die behinderte Dehnung ist jene Dehnung, welche spannungswirksam ist, also zu Spannungen führt. Sie ist in Glg. 5.2 angegeben.

Dekrement
: Der Betrag, um den eine schrittweise veränderliche Größe vermindert wird.

Elastische Lösung
: Unter dem Begriff der elastischen Lösung wird im Folgenden der ohne Kriecheffekte ermittelte zeitabhängige Verlauf der Gesamtspannung verstanden. Etwaige auftretende Schwindeffekte sind in der elastischen Lösung jedoch stets berücksichtigt. Die elastische Lösung ergibt sich aus der Summation der durch die Temperaturinkremente hervorgerufenen initialen Spannungsinkremente $\Delta\sigma_i(t_i)$. Diese unterliegen nicht den Kriecherscheinungen und sind über den gesamten Betrachtungszeitraum ab dem Zeitpunkt ihres Auftretens konstant.

Freie Dehnung
: Die freie Dehnung bezeichnet jene Dehnung bzw. jene Summe von Dehnungsinkrementen, die messtechnisch festgestellt werden kann. Sie kann direkt aus dem bereits angesprochenen Modell zur Bestimmung des Spannungszustandes unter der Berücksichtigung viskoelastischer Eigenschaften ermittelt werden. Dadurch ist sie von der Spannung entkoppelt und steht so auf der Seite der „Materialeigenschaft“ (s.a. Abschn. 7.5).

Globalspannung (elastisch, viskoelastisch)
: Der Begriff der elastischen bzw. viskoelastischen Globalspannung bezeichnet die elastische bzw. viskoelastische Gesamtspannung zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Inkrement
: Der Betrag, um den eine schrittweise veränderliche Größe erhöht wird.

Verschiebung/Verformung (elastisch, viskoelastisch)
: Mit elastischer bzw. viskoelastischer Verschiebung ist jeweils die Gesamtverschiebung zu einem Zeitpunkt gemeint, die spannungswirksam ist. Allgemein wird hier darunter die Längenänderung bzw. das Inkrement der Längenänderung verstanden, welches sich aus der Multiplikation des Dehnungsinkrements mit der Ursprungslänge ergibt.

Viskoelastische Lösung
: Unter dem Begriff der viskoelastischen Lösung wird im Folgenden der mit Kriecheffekten ermittelte zeitabhängige Verlauf der Gesamtspannung verstanden. Die Berechnung erfolgt mit der in Glg. 5.9 angegebenen Formulierung.

Viskoelastisches Potential
: Das viskoelastische Potential bzw. auch als Kriechdehnung bezeichnet, ist jene Größe, die die Kriechverformung und damit die -fähigkeit eines Spannungsinkrementes beschreibt bzw. aufsummiert die Kriechfähigkeit der Gesamtspannung angibt.

2 Temperatur, Festigkeitsentwicklung und Schwinden von erhärtendem Beton

In der vorliegenden Arbeit kommt vor allem der Entwicklung der zeitabhängigen Materialeigenschaften von Beton eine entscheidende Rolle zu. Speziell werden im folgenden Abschnitt jene Eigenschaften des erhärtenden Betons besprochen, die wesentlich an der Entwicklung der resultierenden Spannungen im später betrachteten System beteiligt sind. Diese können grob unterteilt werden: einerseits in die Beschreibung des *Hydratationsprozesses* sowie die damit korrespondierende Beschreibung der Temperaturentwicklung und die daraus resultierenden Auswirkungen auf das Alter des Betons; andererseits in die Beschreibung der *zeitlichen Entwicklung* des E-Moduls, wo die eben erwähnten Formulierungen berücksichtigt werden müssen. Zur Beschreibung dieser zeitabhängigen Eigenschaften existiert eine Vielzahl von Ansätzen. Im Folgenden werden jene Ansätze erläutert, die in die in dieser Arbeit vorgelegten Untersuchungen ihren Eingang gefunden haben. Weiterführende und tiefergehende Informationen können den Arbeiten und Untersuchungen von [Gutsch, 1998] oder [Laube, 1990] entnommen werden.

Letztendlich müssen die Beanspruchungen (Zwangsspannungen), die das später betrachtete System erfährt, von einem Beton aufgenommen werden, dessen mechanischen Eigenschaften sich zum Zeitpunkt der Belastung erst entwickeln. Ohne eindeutige Angaben über die zeitliche Entwicklung dieser Eigenschaften machen zu können ist es unmöglich die auftretenden Zwangsspannungen zu berechnen.

2.1 Hydratationsprozess

Allgemein versteht man unter dem Hydratationsprozess die chemische Reaktion der Zementminerale mit dem Anmachwasser. Diese Reaktion ist exotherm und sehr komplex. Während der Hydratation geht das ursprüngliche, leicht zu verarbeitende, weiche bis flüssige Gemisch in einen erhärtenden Feststoff über. Der letztendlich entstehende Feststoff weist dann die für seinen Einsatz in diversen Bemessungsaufgaben erforderlichen Festigkeitseigenschaften auf. Der Vorgang der Hydratation läuft in mehreren Phasen ab, welche gleitend ineinander übergehen. Die Dauer bzw. der Ablauf dieser Phasen ist von diversen Parametern abhängig. Den größten Einfluss hierzu haben die chemische Zusammensetzung und Granulometrie des Zements bzw. der Zusatzstoffe sowie die Erhärtungstemperatur und der w/z-Wert. Verwiesen sei an dieser Stelle auf [Gutsch, 1998] und [Laube, 1990], welche sich mit der Thematik des Hydratationsprozesses eingehendst auseinandersetzen.

Für die nachfolgende Betrachtung kommt dem zeitlichen Verlauf der Hydratation eine große Bedeutung zu. Er kann über die Prozessgröße *Hydratationsgrad* beschrieben werden. Weitere Einflüsse auf die Prozessgeschwindigkeit durch die Betontemperatur können mit dem Konzept der *Reife* erfasst werden.

2.1.1 Hydratationsgrad

Der *Hydratationsgrad* (in der Literatur auch als *Reife-* oder *Reaktionsgrad* bezeichnet) ist ein Wert, der den Fortschritt der Hydratation zu einem bestimmten Zeitpunkt angibt. Er ist zeitabhängig und

kommt mit zunehmendem Alter zum Stillstand, da mit wachsender Dicke der CSH-Schicht um das Zementkorn der Diffusionsweg der Wassermoleküle in das Korninnere zunimmt (vgl. [Laube, 1990, S. 13]). Der Hydratationsgrad drückt aus, wie viel der gesamten Zementmenge zu einem bestimmten Zeitpunkt bereits hydratisiert ist, allerdings kann die hydratisierte Zementmenge nicht gemessen werden. Dies hat zur Folge, dass darauf nur über die Eigenschaften geschlossen werden kann, die in direktem Zusammenhang mit dem Hydratationsfortschritt stehen (vgl. [Gutsch, 1998, S. 16]). Für den Hydratationsgrad existieren mehrere Definitionen, welche in [Laube, 1990] und [Gutsch, 1998] nachgesehen werden können. Zur Beschreibung des Hydratationsgrades liegen weiters mehrere empirische Ansätze vor, da eine analytische Herleitung aus der Chemie derzeit noch nicht möglich ist. Der Hydratationsgrad stellt dementsprechend eine theoretische Größe dar, die eine Vielzahl von Eigenarten des Materialverhaltens in einer Zahl vereint[1].

In der Literatur wird der Hydratationsgrad oftmals mit m bzw. α bezeichnet, wobei α häufiger anzutreffen ist und auch in dieser Arbeit zur Anwendung kommt.

Die gebräuchlichste Definition des Hydratationsgrades ist das Verhältnis der bis zum betrachteten Zeitpunkt t freigesetzten Hydratationswärmemenge zur gesamten Hydratationswärmemenge bei vollständig abgeschlossener Hydratation, vgl. Glg. 2.1. Die hier zugrundeliegende Wärmeentwicklung kann experimentell durch die *adiabate*[2] *Temperaturmessung* in einem *Kalorimeter*[3] für jeden Beton ermittelt werden.

$$\alpha(t) = \frac{Q(t)}{Q_\infty} = \frac{\Delta\vartheta^{\mathrm{ad}}(t)}{\Delta\vartheta^{\mathrm{ad}}_\infty} \qquad \text{wobei } 0 \leq \alpha(t) \leq 1{,}0 \tag{2.1}$$

Der Hydratationsgrad von $\alpha = 1{,}0$ kann theoretisch nie bzw. erst nach ein paar Jahren oder Jahrzehnten erreicht werden. Es ist allerdings schon viel früher ein Zustand erreicht, ab dem der Hydratationsprozess als quasi abgeschlossen betrachtet werden kann. Die Wärmeproduktion selbst ist nach wenigen Tagen bereits vollständig abgeschlossen. Anders verhält es sich hingegen mit den mechanischen Parametern wie E-Modul und Zug- bzw. Druckfestigkeit. Diese verändern sich über einen noch wesentlich längeren Zeitraum hinweg (vgl. [Eierle und Schikora, 2000b, S. 16]).

Um den Verlauf des Hydratationsgrades rechnerisch beschreiben zu können liegen verschiedene Ansätze vor, welche oftmals mathematisch vollkommen unterschiedlich aufgebaut sind. Graphisch aufgetragen führen sie häufig auf einen – zumindest innerhalb des Gültigkeitsbereiches – sehr ähnlichen Kurvenverlauf. In der vorliegenden Arbeit wird zur mathematischen Beschreibung des Verlaufs des Hydratationsgrades der in Glg. 2.2 angegebene Ansatz nach Jonasson verwendet.

$$\alpha(t_{\mathrm{eff}}) = e^{\left[\mathrm{b}\cdot\ln\left(1+\frac{t_{\mathrm{eff}}}{\tau_{\mathrm{k}}}\right)^{\mathrm{a}}\right]} \tag{2.2}$$

Die Größen τ_{k}, a und b sind frei wählbare Modellparameter, welche experimentell bestimmt werden müssen. τ_{k} ist auch unter dem Begriff „Zeitkonstante“ bekannt. Der Jonassonsche Ansatz basiert auf einem Ansatz von Byfors. Dieser formuliert die Hydratation als Funktion des Alters. Jonasson verbessert diesen Ansatz indem er die Zeitkonstante τ_{k} einführt. Diese Zeitkonstante kann in die jeweils verwendete Zeiteinheit umgerechnet werden, wodurch der Ansatz selbst dimensionsrein wird. Die Parameter a und b sind dimensionslos und gänzlich unabhängig von der verwendeten Zeiteinheit.

[1] Ein jeder Chemiker würde wohl den Kopf schütteln, dass eine Vielzahl von Materialparametern durch eine einzige Zahl abgebildet wird, jedoch ist diese Vorgangsweise für die bauingenieurwissenschaftlichen Betrachtungen hinreichend genau.

[2] Eine adiabatische Zustandsänderung bezeichnet einen Vorgang, der ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet.

[3] Ein Kalorimeter ist ein Messgerät (oder eine Apparatur), mit dem die Wärmemenge bestimmt werden kann, die bei chemischen, physikalischen oder biologischen Prozessen aufgenommen oder frei wird.

2.1.2 Reife

Einen großen Einfluss auf den zeitlichen Fortschritt der Hydratation hat die Betontemperatur als solche, welche u.a. neben äußeren Einwirkungen durch die Hydratationswärme beeinflusst wird. Dieser Einfluss wird mit dem „wirksamen (effektiven) Betonalter“ t_{eff} berücksichtigt. Die Funktion zur Berechnung des wirksamen Betonalters ist auch unter dem Begriff *Reifefunktion* anzutreffen. Das wirksame Betonalter stellt somit eine fiktive Zeitgröße dar, die es möglich macht, eine einheitliche Bezugsgröße für unterschiedliche Hydratationsbedingungen zu erhalten. Wie später gezeigt, ist diese Größe nach [Eierle und Schikora, 2000b, S. 16] so definiert, „[...] *dass ein isotherm ablaufender Prozess bei* $\vartheta = const. = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ *nach der realen Zeit* $t = \tau_{\mathrm{w}}$ *denselben Reaktionsfortschritt erreicht hat, wie der betrachtete beliebige Prozess nach der Zeit* $t \neq \tau_{\mathrm{w}}$ [...]“. Die Zeitachse wird somit so verzerrt, dass die Zusammenhänge eines äquivalenten isothermen Referenzprozesses bei $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ gelten. Allgemein wird τ_{w} als Integral einer temperaturabhängigen Reifefunktion $g(\vartheta)$ über die reale Zeit t definiert:

$$\tau_{\mathrm{w}}(t) = \int g(\vartheta)\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

In den in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungen wird eine auf der Arrhenius-Funktion beruhende Modifikation der Reifefunktion nach Freiesleben et al. verwendet. Diese entspringt Jonasson et al., der sie gemeinsam mit Glg. 2.2 vorschlägt (vgl. [Eierle und Schikora, 2000b, S. 19]). Die Modifikation besteht in einer Formulierung der Aktivierungsenergie, die zwar weiterhin temperaturabhängig ist, jedoch ohne Fallunterscheidung auskommt:

$$t_{\mathrm{eff}} = \tau_{\mathrm{w}} = \int \exp\left[5300 \cdot \left(\frac{30}{\vartheta + 10}\right)^{0{,}45} \cdot \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta}\right)\right] \mathrm{d}t \tag{2.4}$$

Die Größe ϑ ist dabei die aktuelle Temperatur des betrachteten Zeitpunkts, welche über die Dauer ihrer Einwirkung $\mathrm{d}t$ summiert wird.

2.2 Hydratationswärme

Die Hydratationswärme ist die im Erhärtungsprozess des Betons frei werdende Wärme, deren Größe sowie der zeitliche Verlauf mit dem diese Wärme im System freigesetzt wird mit der bereits vorgestellten Untersuchungsmethode bestimmt werden kann. Für die weiteren Betrachtungen wird diese Größe einerseits zur Bestimmung der Reife des Betons und zum anderen als Verformungseinwirkung im betrachteten System berücksichtigt.

2.3 Festigkeitsentwicklung

Die Festigkeitsentwicklung des erhärtenden Betons ist stark an den Hydratationsfortschritt gebunden. Auch wenn nach Abschluss der Hydratation noch eine Nacherhärtung zu beobachten ist, kann in praxisüblichen Fällen die Entwicklung der Festigkeitseigenschaften auf Grundlage des Hydratationsgrades vorgenommen werden.

Für die mathematische Beschreibung der Festigkeitseigenschaften liegen ebenfalls bereits etablierte Ansätze vor. Das Braunschweiger Stoffmodell wurde aus der Beobachtung heraus entwickelt, dass die Zug- und Druckfestigkeit bzw. der E-Modul mit dem Hydratationsgrad zunehmen. Für die Eigenschaften der zentrischen Zug- und Druckfestigkeit sowie des Zugelastizitätsmoduls hat es seine

Gültigkeit für das mittlere Verhalten. [Rostásy und Krauß, 2001, S. 17] geben das Braunschweiger-Modell in allgemeiner Form an:

$$X_i(\alpha) = X_{i1} \cdot \left[\frac{\alpha(t) - \alpha_0}{1 - \alpha_0}\right]^{\eta_i} \tag{2.5}$$

Hierbei ist $X_i(\alpha)$ die Eigenschaft zu einem bestimmten Zeitpunkt t, wo der Hydratationsgrad $\alpha(t)$ vorliegt. X_{i1} hingegen gibt die Eigenschaft für einen Hydratationsgrad von $\alpha = 1$ an und ist somit ein theoretischer Endwert. Dieser kann über den in der Norm verankerten 28-Tage-Wert unter Laborbedingungen für die jeweilige Eigenschaft bestimmt werden. Es gilt:

$$X_{i1} = \left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha(t=28\,\mathrm{d}) - \alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^{\eta_i}}\right] \cdot X_{i,t=28\,\mathrm{d}} \tag{2.6}$$

Der zeitliche Verlauf von $\alpha(t)$ kann mit dem vorgestellten Modell beschrieben werden. Dabei bewegt sich der Hydratationsgrad α innerhalb von $0 \leq \alpha \leq 1$. Hingegen beschreibt α_0 den Hydratationsgrad zu Beginn der Festigkeitsentwicklung. Diese Größe (oft auch als α_{crit} bezeichnet) gibt das Ende der „dormant phase“, den Übergang von flüssig zu fest, an. Dieser Wert kann durch Regression bestimmt werden. Selbiges gilt auch für E_∞, einem Wert, bei dem eine vollständige Hydratation ($\alpha(t) = 1{,}0$) vorliegt (vgl. [Gutsch, 1998, S. 28], [Röhling, 2005, S. 122]). Zur Bestimmung von α_0 gibt [Röhling, 2005, S. 123] den Zusammenhang $\alpha_0 = (0{,}35 \text{ bis } 0{,}40) \cdot w/z$ in Abhängigkeit vom w/z-Wert an. Des Weiteren ist α_0 betonspezifisch und u.a. abhängig von der Art und Menge der Bindemittel resp. Betonzusatzmittel.

Der Exponent η_i ist von der Eigenschaft abhängig, die beschrieben werden soll. Die jeweiligen, der einschlägigen Literatur zu entnehmenden, Exponenten wurden durch Auswertung umfangreicher Versuche gewonnen, können allerdings auch betonspezifisch über Versuchsdaten angepasst werden.

Für die spezifischen Eigenschaften Zugfestigkeit, Druckfestigkeit und E-Modul gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$f_{\mathrm{ct}}(\alpha) \approx f_{\mathrm{ct1}} \cdot \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}\right)^{\eta_{\mathrm{fct}}} \tag{2.7a}$$

$$f_{\mathrm{c}}(\alpha) \approx f_{\mathrm{c1}} \cdot \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}\right)^{\eta_{\mathrm{fc}}} \tag{2.7b}$$

$$E_{\mathrm{ct}}(\alpha) \approx E_{\mathrm{ct1}} \cdot \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}\right)^{\eta_{\mathrm{E}}} \tag{2.7c}$$

2.4 Schwinden

Schwinden ist eine Materialeigenschaft des Betons, die sich unabhängig von der Last äußert. Die Ursachen und Abläufe sowie die wesentlichen Einflussparameter auf die entstehenden Schwinddehnungen sind weitgehend geklärt (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 83]). Man unterscheidet dabei das sogenannte *autogene Schwinden* vom *Trocknungsschwinden*. Die rechnerische Gesamtschwinddehnung $\varepsilon_{\mathrm{cs}}$ ist die Summe der beiden getrennt zu erfassenden Anteile, es gilt Glg. 2.8:

$$\varepsilon_{\mathrm{cs}}(t,t_{\mathrm{s}}) = \varepsilon_{\mathrm{ca}}(t) + \varepsilon_{\mathrm{cd}}(t,t_{\mathrm{s}}) \tag{2.8}$$

2.4.1 Autogenes Schwinden

Autogenes Schwinden wird durch den mit der Hydratation verbundenen Wasserentzug hervorgerufen. Es ist abhängig von der Zementart bzw. der Betonfestigkeit und vom tatsächlichen (effektiven) Alter des Betons. In der Literatur wird oft der Terminus „chemisches Schwinden“ verwendet. Der Anteil, den autogenes Schwinden zur gesamten Schwinddehnung beiträgt, wird auch als „Schrumpfdehnung“ bezeichnet. Gemäß [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] ist die auftretende autogene Schwinddehnung eine lineare Funktion der Betonfestigkeit. Ihre zeitabhängige Entwicklung ist in Glg. 2.9 angegeben:

$$\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t) = \beta_{\mathrm{as}}(t) \cdot \varepsilon_{\mathrm{ca}}(\infty) \tag{2.9}$$

Der Endwert der autogenen Schwinddehnung $\varepsilon_{\mathrm{ca}}(\infty)$ ist normgemäß durch folgenden Zusammenhang gegeben:

$$\varepsilon_{\mathrm{ca}}(\infty) = 2{,}5 \cdot (f_{\mathrm{ck}} - 10) \cdot 10^{-6} \tag{2.10}$$

Die vom *effektiven* Beonalter abhängige Funktion zur zeitlichen Beschreibung der Schwinddehnung ist im aktuellen Normenwerk mit Glg. 2.11 festgelegt:

$$\beta_{\mathrm{as}}(t) = 1 - e^{\left[-0{,}2 \cdot \left(\frac{t}{t_1}\right)^{0{,}5}\right]} \tag{2.11}$$

Der Faktor t_1 stellt wiederum eine Bezugsgröße von 24 Stunden dar, wenn das effektive Betonalter $t = t_{\mathrm{eff}}$ auch in Stunden angegeben wird. Laut [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] ist $t = t_{\mathrm{eff}}$ in Tagen anzugeben. Entgegen der normativen Festlegung einer Zeitfunktion $\beta_{\mathrm{as}}(t)$ wird bei den hier angestellten Betrachtungen als „Zeitfunktion“ der Hydratationsgradverlauf $\alpha(t_{\mathrm{eff}})$ angesetzt. Letztendlich ergibt sich für die Berechnung der spannungswirksamen autogenen Schwinddehnung $\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t)$ zu einem Zeitpunkt $t = t_{\mathrm{eff}}$ Glg. 2.12:

$$\varepsilon_{\mathrm{ca}} = \alpha(t_{\mathrm{eff}}) \cdot 2{,}5 \cdot (f_{\mathrm{ck}} - 10) \cdot 10^{-6} \tag{2.12}$$

Für jeden Zeitschritt kann daraus das Inkrement der spannungswirksamen autogenen Schwinddehnung $\Delta\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_i)$ berechnet werden. Für dieses gilt $\Delta\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_i) = \varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_i) - \varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_{i-1})$.

2.4.2 Trocknungsschwinden

Damit Trocknungsschwinden auftritt, ist ein Feuchteunterschied (Feuchtegradient) zur Umgebung erforderlich. Wie das Trocknungskriechen ist das Trocknungsschwinden demnach mit der Form des Bauteils und – im Gegensatz zum autogenen Schwinden – dem Feuchteangebot der Umgebung verbunden. Mit dem Beginn der Austrocknung d.h. mit dem Ende der Nachbehandlung des Betons setzt auch das Trocknungsschwinden ein. Sämtliche so entstehende Diffusionsprozesse können auch in umgekehrter Richtung ablaufen: durch Wasseraufnahme nimmt das Betonvolumen zu. Dieser Vorgang wird als *Quellen* bezeichnet. Durch Quellen können aufgetretene Trocknungsschwinddehnungen nur zum Teil kompensiert werden, da sie nur teilweise reversibel sind (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 83]).

Gemäß Glg. (3.8) in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] gilt für den Endwert der Trocknungsschwinddehnung folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_{\mathrm{cd},\infty} = k_{\mathrm{h}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{cd},0} \tag{2.13}$$

Die zeitabhängige Entwicklung der Trocknungsschwinddehnung hingegen kann mit Glg. 2.14 beschrieben werden:

$$\varepsilon_{\mathrm{cd}}(t) = \beta_{\mathrm{ds}}(t,t_{\mathrm{s}}) \cdot k_{\mathrm{h}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{cd},0} \tag{2.14}$$

Die Funktion $\beta_{\mathrm{ds}}(t,t_{\mathrm{s}})$ beschreibt den zeitlichen Verlauf des Trocknungsschwindens. Sie ist gegeben durch Glg. 2.15. Für $t \to \infty$ wird $\beta_{\mathrm{ds}}(\infty,t_{\mathrm{s}}) = 1{,}0$.

$$\beta_{\mathrm{ds}}(t,t_{\mathrm{s}}) = \frac{\left(\frac{t-t_{\mathrm{s}}}{t_1}\right)}{\left(\frac{t-t_{\mathrm{s}}}{t_1}\right) + 0{,}04 \cdot \sqrt{h_0^3}} \tag{2.15}$$

Der Koeffizient k_{h} ist abhängig von der rechnerischen Größe h_0 (in Millimetern), welche sich aus dem Verhältnis der doppelten Querschnittsfläche zu dem der Trocknung ausgesetzten Umfang (der Teilflächen) ergibt:

$$\text{Koeffizient } k_{\mathrm{h}} = \begin{cases} 1{,}0 & \text{für} \quad h_0 = 100 \\ 0{,}85 & \text{für} \quad h_0 = 200 \\ 0{,}75 & \text{für} \quad h_0 = 300 \\ 0{,}70 & \text{sonst} \quad h_0 \geq 500 \end{cases} \tag{2.16}$$

Die Zeitgrößen t und t_{s} müssen jeweils in Stunden angegeben werden, wenn t_1 wiederum mit 24 Stunden festgelegt ist. t stellt dabei das Alter des Betons zum betrachteten Zeitpunkt und t_{s} das Alter des Betons zu Beginn des Trocknungsschwindens (oder des Quellens) dar. Allenfalls markiert t_{s} den Zeitpunkt des Endes der Nachbehandlung.

Für den Grundwert des Trocknungsschwindens $\varepsilon_{\mathrm{cd},0}$ gelten die angeführten Formeln aus Anhang B.2 in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009]. Er kann nach Glg. 2.17 bestimmt werden:

$$\varepsilon_{\mathrm{cd},0} = 0{,}85\left[(220 + 110 \cdot \alpha_{\mathrm{ds1}}) \cdot \exp\left(-\alpha_{\mathrm{ds2}} \cdot \frac{f_{\mathrm{cm}}}{f_{\mathrm{cmo}}}\right)\right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{\mathrm{RH}} \tag{2.17}$$

Für den Faktor β_{RH} gilt der in Glg. 2.18 angegebene Zusammenhang. Hierin ist RH die relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung in Prozent und RH_0 eine Bezugsgröße von 100 %.

$$\beta_{\mathrm{RH}} = 1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3\right] \tag{2.18}$$

Die Beiwerte α_{ds1} und α_{ds2} dienen zur Berücksichtigung der Zementart. Sie ergeben sich in deren Abhängigkeit zu:

$$\text{Zementart} = \begin{cases} \mathrm{S} & \alpha_{\mathrm{ds1}} = 3 \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathrm{ds2}} = 0{,}13 \\ \mathrm{N} & \alpha_{\mathrm{ds1}} = 4 \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathrm{ds2}} = 0{,}12 \\ \mathrm{R} & \alpha_{\mathrm{ds1}} = 6 \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathrm{ds2}} = 0{,}11 \end{cases} \tag{2.19}$$

Die Größe f_{cm} ist die mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons in $\mathrm{N/mm^2}$ und $f_{\mathrm{cmo}} = 10\,\mathrm{N/mm^2}$.

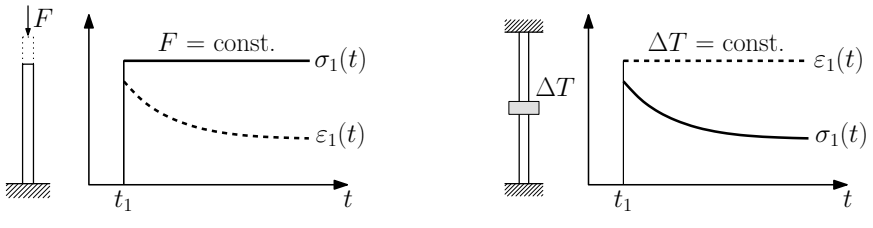
Wie auch im Vorhergehenden beim autogenen Schwinden angeführt, ergibt sich das Inkrement der Trocknungsschwinddehnung analog zu $\Delta\varepsilon_{\mathrm{cd}}(t_i) = \varepsilon_{\mathrm{cd}}(t_i) - \varepsilon_{\mathrm{cd}}(t_{i-1})$.

3 Viskoelastisches Verhalten von Beton

3.1 Allgemeines

Viskoelastizität ist eine Materialeigenschaft und beschreibt die zeitabhängige Änderung des Verformungszustandes unter Beanspruchung. Im Falle von Beton ist diese Eigenschaft bekannt bzw. kann experimentell bestimmt werden und äußert sich in einem Bauteil sowohl als Kriechen als auch Relaxation.

Unter dem Begriff *Kriechen* versteht man die Änderung der Verformung (Dehnung) des Betons unter konstanter Last (Spannung). *Relaxation* hingegen bezeichnet die Änderung der Spannung unter einer konstanten Verformung (Dehnung).



(a) Kriechen (b) Relaxation

Abbildung 3.1: Viskoelastische Effekte bei einstufiger Belastung – schematische Darstellung

Die aufgrund viskoelastischer Eigenschaften im System hervorgerufenen Effekte sind außerdem abhängig von der Belastungsgeschichte. Man unterscheidet hier grundlegend zwischen einer *einstufigen* Belastung und einer Spannungs*geschichte*.

Insgesamt sind die Auswirkungen von Viskoelastizität bei erhärtendem Beton deutlich ausgeprägter als bei bereits erhärtetem Beton. Mit zunehmender Alterung geht das viskoelastische Potential gegen Null. Bisherige Untersuchungen zum viskoelastischen Verhalten von Beton stützen sich meist auf Formen des Druckkriechens. Relaxationsversuche bereiten experimentelle Schwierigkeiten, dementsprechend wenig Ergebnisse angestellter Relaxationsversuche sind vorhanden. In der Praxis werden Auswirkungen infolge Relaxation i.d.R. aus dem Kriechverhalten abgeleitet.

3.1.1 Physikalische Ursachen

Nach [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 73] ist der Zusammenhang der lastabhängigen Verformungen, besonders jene des Zementsteins, komplex und noch nicht vollständig geklärt. Einig ist sich die Literatur nur dahingehend, dass zeitabhängig ablaufende Verformungen und Umlagerungen in der Mikrostruktur (Feuchteumlagerungen bzw. Gelversetzungen im Porenraum der Zementsteinmatrix) das viskoelastische Materialverhalten hervorrufen (vgl. [Röhling, 2005, S. 127], [Nietner, 2009, S. 40]). Insbesondere die CSH-Phasen des Zementsteins und das in den Poren lagernde Wasser haben einen maßgeblichen Einfluss auf das viskoelastische Verhalten (vgl. [Gutsch, 1998, S. 148]).

Da das viskoelastische Verhalten des Zementsteins trotz umgehender Untersuchungen bisher nicht schlüssig durch die physikalisch-chemische Strukturveränderung erklärt werden kann ist es theoretisch schwierig zu beschreiben und wird daher oft experimentell/phänomenologisch erfasst und in Abhängigkeit verschiedener Parameter beschrieben (vgl. [Gutsch, 1998, S. 149]): Versuchsergebnisse des Verformungsverhaltens werden in Abhängigkeit von Erhärtungszeit oder -zustand durch physikalisch plausible Funktionen angenähert. Viskose Eigenschaften werden zudem immer häufiger mit (komplizierten) rheologischen Modellen beschrieben, welche aus Reihen- und/oder Parallelschaltungen von Hooke-, Newton-, Maxwell und Kelvin-Körpern o.ä. aufgebaut sind (vgl. [Röhling, 2005, S. 128] bzw. Anh. B).

3.1.2 Einflüsse auf das viskoelastische Verhalten von Beton

Im Folgenden werden kurz die wesentlichen Einflussparameter auf das viskoelastische Verhalten von Beton verallgemeinert besprochen. Unterschieden wird dabei zwischen *inneren* und *äußeren* Parametern (vgl. [Gutsch, 1998, S. 149]):

Die Zusammensetzung des Betons, Zementart, Art und Eigenschaften der Zuschläge, w/z-Wert und die Festigkeit werden als *innere Parameter* zusammengefasst. *Äußere Parameter* hingegen umfassen die relative Feuchtigkeit der Umgebung, Temperatur, Betonalter bei Belastungsbeginn, Geometrie des Bauteils sowie den Belastungsgrad.

Mit einer Zunahme der Kriechverformung ist zu rechnen, wenn

- der Zementgehalt bzw. das Zementsteinvolumen größer ist,
- der Zuschlaganteil und Elastizitätsmodul des Zuschlages gesunken sind,
- der w/z-Wert größer ist,
- die Festigkeit kleiner ist,
- die Belastung größer ist,
- die relative Feuchtigkeit der Umgebung gesunken ist und der Beton austrocknet,
- die (während der Belastungsstufe konstante) Temperatur größer ist und
- das Alter bei Belastungsbeginn kleiner (= geringerer Hydratationsgrad) ist (vgl. [Gutsch, 1998, S. 149], [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 74]).

Im Hinblick auf die verwendete Zementart und deren Einfluss gibt es unterschiedliche Aussagen und verschiedene Versuchsergebnisse sowie normative Festlegungen, die sich hier teilweise widersprechen. Der im derzeitigen Normenwerk ([ÖNORM EN 1992-1-1, 2009]) verankerte Kriechansatz, welcher auf dem [CEB-FIP MODEL CODE 1990, 1993] basiert, berücksichtigt beispielsweise die Versuchsergebnisse von Weigler/Karl, wo festgestellt wurde, dass schnell erhärtende Zemente ein schnelleres Erreichen eines größeren Hydratationsgrads bewirken und die Kriechverformung kleiner wird (vgl. [Gutsch, 1998, S. 149]).

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass das Kriechvermögen bei höherfestem Beton eingeschränkt ist, was auf die höhere Festigkeit und die dadurch verringerte Porosität in Verbindung mit dem geringen w/z-Wert zurückzuführen ist (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 74]).

Bei Druckspannungen von $0{,}3 \leq \sigma \leq 0{,}5 \cdot f_{\mathrm{ck}}$ wird von linearer Viskoelastizität ausgegangen (vgl. [Gutsch, 1998, S. 150]) – Kriechdehnung und kriecherzeugende Spannung sind dann proportional, man spricht von *linearem* Kriechen. In [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] wird diesem Umstand mit einer Begrenzung der Druckspannung auf $0{,}45 \cdot f_{\mathrm{ck}}$ im Gebrauchszustand Rechnung getragen. Für den Zeitraum der Betonerhärtung ist über den Einfluss von nichtlinearem Kriechen wenig bekannt.

3.1.3 Kriechen und Relaxation unter einstufiger Belastung

Kriechen

Die Gesamtdehnung infolge Kriechen wird allgemein aus der Summe einer elastischen Dehnung $\varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i)$, welche durch eine (konstante) Spannung $\sigma(t_i)$ hervorgerufen wird, und der Kriechdehnung $\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)$ berechnet. Die Kriechdehnung ist dabei abhängig vom *Belastungs*zeitpunkt t_i und vom *Betrachtungs*zeitpunkt t_k:

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}(t_k,t_i) = \varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i) + \varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i) \tag{3.1}$$

Bei linearem Kriechen werden die auftretenden Kriechdehnungen $\varepsilon_{\mathrm{cc}}$ als Vielfaches der elastischen Kurzzeitdehnung $\varepsilon_{\mathrm{ci}}$ beschrieben. Dies erfolgt über die so genannte *Kriechzahl*, welche für jeden Betrachtungszeitpunkt nach der *Kriechfunktion* bestimmt werden kann:

$$\varphi(t_k,t_i) = \frac{\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)}{\varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i)}, \tag{3.2}$$

wobei für die *Kriechdehnung* gilt:

$$\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i) = \varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i) \tag{3.3}$$

Das elastische Dehnungsäquivalent $\varepsilon_{\mathrm{ci}}$ ist abhängig von der belastenden Spannung, sowie vom E-Modul seines Auftretens und kann über das HOOKEsche Gesetz ermittelt werden:

$$\varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i) = \frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} \tag{3.4}$$

Unter Verwendung der Kriechfunktion kann Glg. 3.1 dann geschrieben werden als:

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}(t_k,t_i) = \varepsilon_{\mathrm{ci}}(t_i) \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_i)\big] = \frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_i)\big] \tag{3.5}$$

Die gesamte spannungsinduzierte Dehnung unter der Wirkung einer konstanten Belastung wird häufig durch die so genannte *Komplianz-* oder *Compliance*-Funktion $J(t_k,t_i)$ ausgedrückt. In der Literatur ist sie manchmal auch als $I(t_k,t_i)$ anzutreffen. Glg. 3.5 ergibt sich sodann zu

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}(t_k,t_i) = \sigma(t_i) \cdot J(t_k,t_i), \tag{3.6}$$

wobei die Compliance-Funktion mit

$$J(t_k,t_i) = \frac{1 + \varphi(t_k,t_i)}{E(t_i)} \tag{3.7}$$

angegeben wird.

Relaxation

Wie bereits erwähnt äußert sich die infolge Relaxation auftretende Spannungsänderung unter einer konstanten Dehnung. Die *Relaxationsfunktion* ergibt sich aus dem Quotienten der verbleibenden (zeitabhängigen) Spannung $\sigma(t_k,t_i)$ gegenüber der Spannung direkt zum Zeitpunkt der Belastung $\sigma(t_i)$. Sie ist damit formal definiert wie die Kriechfunktion.

$$\psi(t_k,t_i) = \frac{\sigma(t_k,t_i)}{\sigma(t_i)} \tag{3.8}$$

Für ein zum Zeitpunkt t_i aufgebrachtes belastendes Spannungs- bzw. ein damit korrespondierendes Dehnungsinkrement $\varepsilon(t_i)$ kann Glg. 3.8 umgeschrieben werden in:

$$\sigma(t_k,t_i) = \sigma(t_i) \cdot \psi(t_k,t_i) = \varepsilon(t_i) \cdot E(t_i) \cdot \psi(t_k,t_i) \tag{3.9}$$

Analog zu Glg. 3.7 kann der so genannte Relaxationsmodul $R(t_k,t_i)$ geschrieben werden als:

$$R(t_k,t_i) = E(t_i) \cdot \psi(t_k,t_i) \tag{3.10}$$

Unter dem Relaxationsmodul versteht man einen durch Relaxation beeinflussten wirksamen Elastizitätsmodul.

3.1.4 Kriechen und Relaxation unter mehrstufiger Belastung

Liegt eine mehrstufige Belastung, also eine Belastungsgeschichte vor, so wird die Bestimmung der Auswirkungen viskoelastischer Eigenschaften komplizierter. Die Grundlage bilden die im vorhergehenden besprochenen Zusammenhänge bei einstufiger Belastung. Zu beliebigen Zeitpunkten treten nun Sprünge in der Belastung auf, die gegenüber der zum Auftrittszeitpunkt eines Sprunges im System vorhandenen Gesamtspannung be- oder entlastend wirken. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen wird stets von einer Belastungsgeschichte ausgegangen und später detaillierter besprochen.

Allgemein ist festzuhalten, dass jedes auftretende Belastungsinkrement vom Auftrittszeitpunkt über den gesamten Zeitpunkt der Betrachtung des Systems verfolgt werden muss. Einen großen Einfluss hat der Auftrittszeitpunkt selbst und auch der globale Systemspannungszustand. Dieser entscheidet, wie das neue Belastungsinkrement zu behandeln ist. Der globale Systemspannungszustand kann mittels Superposition bestimmt werden, die oftmals sehr komplex ist. Eine Kontrollrechnung per Hand ist daher nahezu unmöglich und überdies mit einem großen Zeitaufwand verbunden.

3.2 Zeitlicher Verlauf und Größe des Kriechens

Der zeitliche Verlauf des Kriechens wird in der Literatur (z.B. [Gutsch, 1998, S. 151], [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 79]) in drei Phasen unterteilt. Die Abgrenzung dieser Phasen erfolgt dabei nach der Kriechgeschwindigkeit, also der Geschwindigkeit der Dehnungsänderung. Das Kriechen wird dabei in *primäres*, *sekundäres* und *tertiäres* Kriechen unterschieden und ist in Abb. 3.2 schematisch dargestellt.

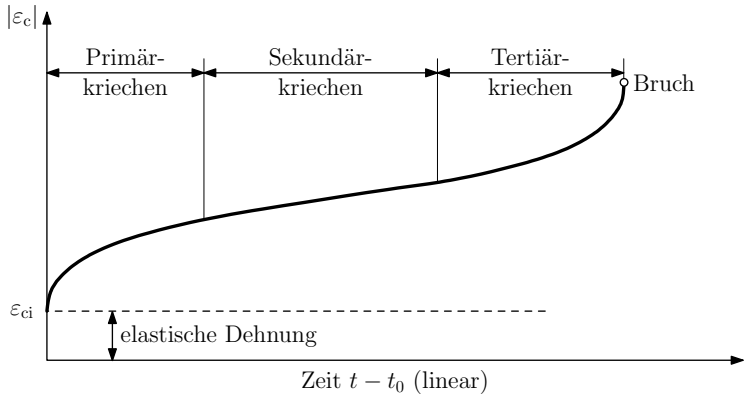


Abbildung 3.2: Zeitabhängige Phasen der Kriechverformung unter (hoher) konstanter Spannung nach [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 79]

Primäres Kriechen tritt häufig unter Gebrauchslast auf, wogegen oberhalb der Gebrauchsspannungen Effekte des sekundären oder tertiären Kriechens hervorgerufen werden. Primäres Kriechen ist charakterisiert durch eine kontinuierliche Abnahme der Dehnungszunahme. Unter sekundärem Kriechen ist die Zunahme der Dehnung nahezu konstant; bei tertiärem Kriechen steigt sie überproportional an. Tertiäres Kriechen kann unter Umständen auch zum so genannten Kriechbruch führen. Sämtliche weitere Betrachtungen gehen nun vom Fall des primären Kriechens aus, da dieser aufgrund der Begrenzung der Gebrauchsspannungen i.d.R. maßgebend ist.

Bei der Entwicklung eines theoretischen Modells zur Beschreibung von Kriechen muss darauf geachtet werden, dass die Funktion die gemessene Kriechdehnung bestmöglich beschreibt. Um den zeitlichen Verlauf des Kriechens funktionell erfassen zu können sind deshalb die folgenden Bedingungen einzuhalten ([Gutsch, 1998, S. 152]):

– Die Funktion der Kriechdehnung soll für den Zeitraum $t_k - t_i = 0$ definiert sein:

$$\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k - t_i = 0) = 0 \tag{3.11}$$

– Mit steigender Dauer der Beanspruchung, soll die Kriechdehnung monoton zunehmen:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)}{\mathrm{d}t_k} \geq 0 \tag{3.12}$$

– Die Geschwindigkeit des Kriechens (= Dehnungszunahme) soll mit steigender Dauer der Beanspruchung monoton abnehmen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)}{\mathrm{d}{t_k}^2} \leq 0 \tag{3.13}$$

Wird der Effekt des Rückkriechens (Kriechdehnung nach vollständiger Entlastung) berücksichtigt, so ist zum Entlastungszeitpunkt $t_{\mathrm{E}} > t_i$ folgendes zu beachten (vgl. [Gutsch, 1998, S. 152]):

– Nach der vollständigen Entlastung zum Zeitpunkt t_{E} darf die Kriechdehnung nicht ihr Vorzeichen wechseln:

$$\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i) \geq 0 \text{ für } t_k \geq t_{\mathrm{E}} \tag{3.14}$$

– Nach der vollständigen Entlastung zum Zeitpunkt $t_k \geq t_{\mathrm{E}}$ soll die Kriechdehnung monoton abnehmen:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)}{\mathrm{d}t_k} \leq 0 \tag{3.15}$$

– Außerdem soll nach der vollständigen Entlastung auch die Kriechgeschwindigkeit monoton abnehmen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_{\mathrm{cc}}(t_k,t_i)}{\mathrm{d}{t_k}^2} \geq 0 \tag{3.16}$$

3.3 Verschiedene Theorien zur Beschreibung des Kriechens

Um die Auswirkungen des Kriechens beschreiben zu können, existieren verschiedene Ansätze. Man kann beispielsweise zwischen drei grundlegenden Arten von Kriechtheorien unterscheiden, die in

- Fließen mit Alterung,
- Summen- und
- Produktansatz

unterteilt werden können (vgl. [Gutsch, 1998, S. 154]).

[Röhling, 2005, S. 128] zufolge existieren Unterschiede in Bezug auf Kriechen unter Druck- bzw. Zugbeanspruchung. Hier ist die Forschung allerdings geteilter Meinung: so gibt es Versuchsergebnisse, die zeigen, dass im jungen Alter die lineare Kriechverformung bei Druck- bzw. Zugbeanspruchung annähernd übereinstimmt ([Iwaki et al., 1983], [Gutsch, 2001], [Ozawa und Morimoto, 2000], [Wiens und Müller, 2000]). Anderen Untersuchungen zufolge ist das Zugkriechen um 20 % geringer ([Henning, 1987], [Morabito, 1994]), wogegen weitere Versuche zu umgekehrten Ergebnissen ([Rostásy und Alda, 1976]) führten und noch eine Gruppe Unterschiede von bis zu 40 % darlegt. [Röhling, 2005, S. 128] empfiehlt allgemein ein Verhältnis von Druck- zu Zugkriechen mit $\frac{\varphi_D}{\varphi_Z} \approx 0{,}80$ anzunehmen. Die auftretenden Unterschiede zwischen Zug- und Druckkriechen finden jedoch meist keine explizite Abbildung. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass bei gleichem relativen Lastniveau (= Verhältnis Last / Festigkeit) dasselbe Kriechverhalten auftritt. Die Modellierung des Kriechverhaltens kann damit auf Grundlage des globalen Spannungszustands durchgeführt werden. Das Relaxationsverhalten eines Lastinkrements ergibt sich dann je nach Spannungsvorzeichen aus der unterschiedlichen Zug- und Druckfestigkeit des Betons zum jeweiligen Zeitpunkt (vgl. [Nietner, 2009, S. 97]).

3.3.1 Fließen mit Alterung

Fließen ist ein Begriff, der das plastische Verhalten eines Materials beschreibt: Fließen bedeutet Dehnungszunahme bei konstanter Spannung. Um das Kriechen nach der Theorie „Fließen mit Alterung“ beschreiben zu können, wird zum Zeitpunkt der frühestmöglichen Belastung eine ideale Kriechkurve vorausgesetzt. Diese ideale Kriechkurve ist auch unter dem Namen Whitneysche Idealkurve bekannt. Die Whitneyschen Idealkurven sind unabhängig vom Zeitpunkt der Lastaufbringung (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 79]).

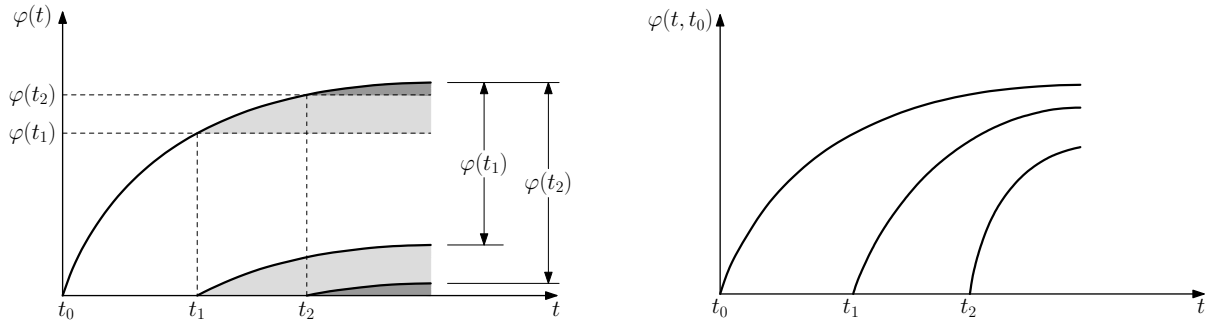
Aus der Idealkurve können Kriechkurven zu einem späteren Belastungszeitpunkt $t_i > 0$ errechnet werden. Für diese gilt:

$$\varphi(t_k,t_i) = \varphi(t_k,t_0) - \varphi(t_i,t_0) \tag{3.17}$$

Man kann sich spätere, nach Glg. 3.17 berechnete, Kriechkurven relativ anschaulich als auf der Ordinate verschobene Idealkurven vorstellen.

Mit den so gewonnenen späteren Kriechkurven kann die Abnahme der Kriechverformung mit zunehmendem Alter bei Erstbelastung abgebildet werden. Der Ansatz bringt allerdings einen nicht unerheblichen Nachteil mit sich (vgl. [Gutsch, 1998, S. 154]): Durch das Verschieben der Idealkurve kann die Kriechverformung, die irreversibel ist, bei Betonen mit *hohem* Erstbelastungsalter nicht zutreffend beschrieben werden. Liegt eine Spannungsgeschichte vor und wird das Superpositionsprinzip angewendet, so führt bei einer Spannungssteigerung ein auf diesem Prinzip basierender Kriechansatz zu einer Unterschätzung der Kriechverformung. Im Widerspruch zu Versuchen geht so die Kriechdehnung bei Belastung eines alten Betons gegen Null (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 80]).

Bei dem in Versuchen zu beobachtenden viskoelastischen Materialverhalten beginnt die Kriechgeschichte für jede aufgebrachte Beanspruchung erneut, wobei sich die Kriechfähigkeit mit dem Alter verringert. Beim Belastungsbeginn kommt es außerdem zu einem anfänglichen raschen Anstieg derselben.



(a) Idealkurve nach WHITNEY

(b) Kriechkurve für ein viskoelastisches Material, das der Alterung unterliegt

Abbildung 3.3: Gegenüberstellung: unterschiedliche Ansätze für Kriechkurven bei einem alternden Material nach [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 80]

Abb. 3.3 stellt die Idealkurve nach WHITNEY den für Beton charakteristischen Kriechkurven gegenüber. Die im Vorhergehenden erwähnten Unterschiede sind deutlich zu erkennen. Als ersten Belastungszeitpunkt $t_0 = 0$ wird hierbei der Zeitpunkt zum Beginn der Festigkeitsentwicklung unterstellt.

3.3.2 Summenansatz

Nach [Gutsch, 1998, S. 156] lautet die allgemeine Form des Summenansatzes:

$$\varphi(t_k,t_i) = \varphi_{\mathrm{v}}(t_k - t_i) + \varphi_{\mathrm{f}}(t_k - t_i) \tag{3.18}$$

Dabei ist $\varphi_{\mathrm{v}}(t_k - t_i)$ der reversible Kriechanteil aus verzögerter Elastizität (s. Abschn. 3.3.3) und $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k - t_i)$ der irreversible Anteil aus Fließen. Dieser Summenansatz wurde aus experimentellen Beobachtungen abgeleitet.

Da bei gleichzeitiger Austrocknung eines hinsichtlich Kriechen untersuchten Körpers festgestellt wurde, dass es unter diesen Umgebungsbedingungen zu größeren Kriechverformungen kommt, wird die irreversible Fließverformung φ_{f} oftmals in die Anteile des so genannten Grundfließen $\varphi_{\mathrm{f,gr}}(t_k - t_i)$ und Trocknungsfließen $\varphi_{\mathrm{f,tr}}(t_k - t_i)$ aufgespalten. Schnell auftretende irreversible Verformungen kurz nach Belastungsbeginn sollten durch einen Term $\varphi_{\mathrm{f,a}}(t_k - t_i)$ berücksichtigt werden, wie es auch in dem CEB-Modell von 1978 der Fall ist. Mit diesem zusätzlichen Faktor ergibt sich dann die Kriechfunktion als Summenansatz zu:

$$\varphi(t_k,t_i) = \varphi_{\mathrm{v}}(t_k - t_i) + \underbrace{\varphi_{\mathrm{f,a}}(t_k - t_i) + \varphi_{\mathrm{f,gr}}(t_k - t_i) + \varphi_{\mathrm{f,tr}}(t_k - t_i)}_{\text{irreversibler Anteil } \varphi_{\mathrm{f}}(t_k - t_i)} \tag{3.19}$$

Ein auf diesem Summenansatz basierender Kriechansatz war beispielsweise in der abgelösten Normengeneration (z.B. DIN 4772) enthalten. Dieser wurde in den aktuellen Normengenerationen (z.B. DIN 1045-1 und [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] vgl. dazu Abschn. 3.4) durch einen Produktansatz ersetzt, da die additive Verknüpfung mit Nachteilen verbunden ist: So wird der Verlauf der Fließdehnung und der vom Belastungsalter t_i abhängige Absolutwert durch die gleiche Funktion beschrieben, was u.a. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 75] kritisieren.

3.3.3 Produktansatz

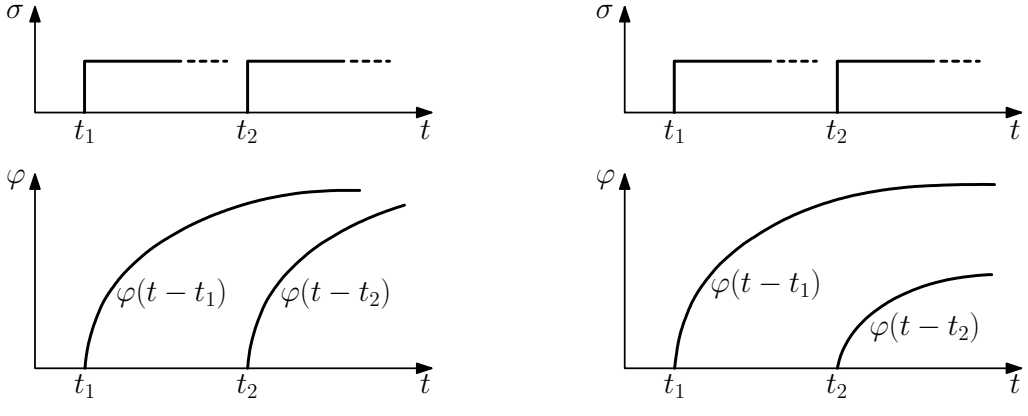
Ein Produktansatz ist nach [Gutsch, 1998, S. 155] in allgemeiner Form gegeben mit:

$$\varphi(t_k,t_i) = k_n \cdot f(t_k - t_i) \tag{3.20}$$

Der Faktor $k_n \leq 1$ beschreibt dabei einen werkstoffabhängigen Alterungsfaktor. $f(t_k - t_i)$ ist eine Zeitfunktion, die unabhängig vom Alter angegeben werden kann.

Wenn der Alterungsfaktor k_n als konstant angenommen wird, dann sind die mit Glg. 3.20 berechneten Kriechkurven deckungsgleich und von ihrem Belastungszeitpunkt t_i unabhängig. Man spricht vom Fall der *verzögerten Elastizität* (vgl. [Gutsch, 1998, S. 155]).

Da in der Realität die Kriechverformungen mit zunehmendem Erstbelastungsalter abnehmen, muss der Faktor k_n in Abhängigkeit vom Belastungsalter t_i formuliert werden: $k_n = f(t_i)$. Daraus ergeben sich Kriechkurven, die affin sind. Der Vorgang des Kriechens unter einem zeitlich veränderlichen werkstoffabhängigen Alterungsfaktor wird deshalb auch als *affines Kriechen* bezeichnet.



(a) Kriechkurven bei „verzögerter Elastizität“ (k_n = const.)

(b) Affine Kriechkurven eines alternden Materials ($k_n = f(t_i)$)

Abbildung 3.4: Gegenüberstellung: verzögerte Elastizität und affines Kriechen nach [Gutsch, 1998, S. 158]

Affine Kriechkurven sind in Abb. 3.3(b) und Abb. 3.4(b) dargestellt. Verzögerte Elastizität kann auch als Sonderfall des affinen Kriechens verstanden werden. In Abb. 3.4 sind die Belastungszeitpunkte als t_1,t_2,... und ein beliebiger Betrachtungszeitpunkt als t angegeben.

Die Vorteile von Produktansätzen liegen in der einfach handzuhabenden Berücksichtigung von Einflussparametern auf das Kriechen wie z.B. Erstbelastungsalter, Feuchtigkeit, Temperatur, Betonrezeptur o.ä. Diese können durch den (zeitabhängigen) Faktor k_n gut in den Ansatz aufgenommen werden.
Nachteilig ist die Verwendung von Produktansätzen, wenn die Kriechdehnung mit dem Superpositionsprinzip bestimmt wird und eine Vollentlastung (Spannungssprung mit umgekehrtem Vorzeichen) betrachtet wird: Es kommt zu einem rechnerischen Anstieg der Kriechdehnung, was im Gegensatz zu den experimentell ermittelten Ergebnissen und den in Abschn. 3.2 – konkret in Glg. 3.14 bis Glg. 3.16 – geforderten Eigenschaften des zeitlichen Verlaufs steht (vgl. [Gutsch, 1998, S. 155]). Der Fehler tritt bei vollständiger Entlastung umso früher auf, je geringer das Alter bei Erstbelastung und je kürzer die Beanspruchungsdauer ist. Er kann nur vermieden werden, wenn der Faktor k_n und die Zeitfunktion $f(t_k - t_i)$ aufeinander abgestimmt sind, was u.a. mit einer Beschreibung des Kriechverhaltens als eine Reihenschaltung von KELVIN-Elementen möglich wird (vgl. Abschn. B.1).

Untersuchungen haben ergeben, dass bei Verwendung des Produktansatzes die affinen Kriechkurven zur Beschreibung des Kriechens am besten geeignet sind. Dessen alleinige Betrachtung durch Fließeigenschaften oder verzögerter Elastizität ist nicht ausreichend (vgl. [Gutsch, 1998]).

Zur Beschreibung des Kriechverhaltens bzw. der -kurven existieren einige in der Praxis eingesetzte Modelle. Als Beispiel sei hier das Modell von Laube/Gutsch [Breitenbücher, 1989], das auf Maxwell-Ketten basierende B3-Modell [Bažant und Wu, 1974], oder das in Abschn. 3.4 beschriebene Kriechmodell aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] genannt. [Nietner et al., 2011] führt Beispiele an, in der die viskoelastische Betrachtung von Zwangsspannungen einer Bodenplatte mit diesen Kriechmodellen erfolgt und die Ergebnisse gegenübergestellt sind. In [Nietner, 2009] werden weitere Kriechmodelle vorgestellt, zu einer allgemeinen und einheitlichen Darstellung kombiniert und Vergleichsrechnungen vorgelegt. Für weitere Informationen hinsichtlich der Voraussetzungen zur Anwendung eines bestimmten Kriechmodells und dessen Eigenschaften sei darauf verwiesen.

3.4 Regelung nach ÖNORM EN 1992-1-1

Der in der aktuellen Normengeneration [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] enthaltene Ansatz zur Ermittlung der *Kriechzahl* ist ein Produktansatz. Dieser geht auf das im [CEB-FIP MODEL CODE 1990, 1993] enthaltene Formelwerk zurück. Dabei werden jene Funktionen multiplikativ verknüpft, die die Auswirkungen der Einflussparameter sowie den zeitlichen Verlauf der Kriechdehnung beschreiben. Die Kriechzahl $\varphi(t,t_0)$ wird hierbei aus der Grundkriechzahl φ_0 und der Funktion des zeitlichen Verlaufs $\beta_c(t,t_0)$ bestimmt. Die Grundkriechzahl ist der Endwert des Kriechens für $t \to \infty$, die Funktion $\beta_c(t,t_0)$ ist für $t_0 = 0$ und für $t \to \infty = 1$. Die Grundgleichung zur Ermittlung der Kriechzahl ist in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] gegeben mit:

$$\varphi(t,t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t,t_0) \tag{3.21}$$

Der Betrachtungszeitpunkt ist in dieser Schreibweise mit t, der Belastungszeitpunkt mit t_0 bezeichnet. Der Ansatz beschreibt das lineare Kriechen und hat seine Gültigkeit für Druckbeanspruchungen bis $\approx 0{,}4 \cdot f_{cm}$. In der Norm wird diesem Umstand durch die Begrenzung der Betonspannung infolge quasiständiger Last im Gebrauchszustand auf $|\sigma_c| \leq 0{,}45 \cdot f_{ck}$ Rechnung getragen. Wird diese Spannung überschritten, so ist die Nichtlinearität des Kriechens zu berücksichtigen. Das Kriechmodell beschreibt Beton als ein alterndes, linear-viskoelastisches Material.

Für erhärtenden Beton ist die Anwendung der Norm nicht ohne weiters möglich, da als Erstbelastungszeitpunkt $t_0 \geq 12\,\text{h}$ gefordert ist und die Begrenzung der Zwangsspannung auf $|\sigma_c| \leq 0{,}45 \cdot f_{ck}$ nicht a priori vorausgesetzt werden kann. Außerdem ist das Modell zur Berechnung der Kriechdehnungen und -spannungen auf den normativen 28-Tages-E-Modul bezogen. Dieser Umstand ist bei einer späteren Verwendung in einem inkrementellen Ansatz zu berücksichtigen.

3.4.1 Formelmäßige Ermittlung der Größe und des zeitlichen Verlaufs des Kriechens

Lineares Kriechen

Die Grundlage zur rechnerischen Abschätzung der Kriechdehnungen bilden verschiedene, zum Planungszeitpunkt bereits bekannte, Parameter. Die Auswirkungen der Porosität des Betongefüges auf Diffusionsprozesse wird über die mittlere Zylinderdruckfestigkeit f_{cm} erfasst. Weitere, zur Berechnung der Kriechdehnungen notwendige, Parameter sind:

- die relative Luftfeuchte der Umgebungsluft RH,
- die wirksame Bauteildicke h_0,

– das Alter des Betons bei Belastungsbeginn t_0 und

– die über den Beiwert α summarisch erfasste Hydratationsgeschwindigkeit des verwendeten Zements.

Die Grundzahl des Kriechens φ_0 ist nach [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] Anhang B, Glg. (B.2) wie folgt zu ermitteln:

$$\varphi_0 = \varphi_{\mathrm{RH}} \cdot \beta(f_{\mathrm{cm}}) \cdot \beta(t_0) \tag{3.22}$$

φ_0 ist aus Elementen, die die Komponenten Trocknungs- und Grundkriechen sowie den Einfluss des Betonalters bei Belastungs*beginn* berücksichtigen, zusammengesetzt. Die Berücksichtigung der Auswirkungen der relativen Luftfeuchte auf die Grundzahl des Kriechens erfolgt mit dem Beiwert φ_{RH}. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 76] haben zur Ermittlung von φ_{RH} die Bezugsgröße RH_0 sowie h_1 eingeführt, welche für RH_0 mit 100 % und für h_1 mit 100 mm festgesetzt ist. Diese Bezugsgrößen werden allerdings durch zusätzliche Faktoren wieder ausgeglichen, sodass die Ermittlung von φ_{RH} ident zu Glg. (B.3) in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] ist:

$$\varphi_{\mathrm{RH}} = \begin{cases} 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0{,}1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} & \text{für } f_{\mathrm{cm}} \leq 35\,\mathrm{N/mm^2} \\ \left(1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0{,}1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right) \cdot \alpha_2 & \text{für } f_{\mathrm{cm}} > 35\,\mathrm{N/mm^2} \end{cases} \tag{3.23}$$

Ein Maß für Geschwindigkeit und Intensität des Austrocknungsprozesses ist die wirksame Bauteildicke h_0, welche in Glg. 3.23 Eingang findet. Sie wird aus dem Verhältnis der doppelten Querschnittsfläche A_{c} zu dem der Trocknung ausgesetzten Querschnittsumfang u berechnet:

$$h_0 = \frac{2 \cdot A_{\mathrm{c}}}{u} \tag{3.24}$$

Der Beiwert zur Berücksichtigung der Auswirkungen der Betondruckfestigkeit, im weitesten Sinn also der Einfluss der Porosität des Betongefüges auf Diffussionsprozesse, $\beta(f_{\mathrm{cm}})$ ist gegeben durch:

$$\beta(f_{\mathrm{cm}}) = \frac{16{,}8}{\sqrt{f_{\mathrm{cm}}}} \tag{3.25}$$

Die Betondruckfestigkeit findet zudem auch in den Korrekturfaktoren α_1, α_2 und α_3 Eingang. Damit wird u.a. die Tatsache berücksichtigt, dass mit steigender Festigkeit (= dichteres Gefüge) die Auswirkungen des Feuchteangebots auf die Kriechfähigkeit verringert sind und dass der Kriechverlauf infolge gebremster Diffusionsprozesse verzögert abläuft. Die Korrekturfaktoren sind festgelegt mit:

$$\alpha_1 = \left(\frac{35}{f_{\mathrm{cm}}}\right)^{0{,}7} \tag{3.26a}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{35}{f_{\mathrm{cm}}}\right)^{0{,}2} \tag{3.26b}$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{\mathrm{cm}}}\right)^{0{,}5} \tag{3.26c}$$

Im [CEB-FIP MODEL CODE 1990, 1993] sind die vorher genannten Faktoren α_i nicht vorhanden. Dies ist dadurch zu begründen, dass der dort verankerte Kriechansatz ursprünglich für normalfeste Betone entwickelt wurde. Die Faktoren α_i wurden im aktuellen Normenwerk eingeführt, um jene Beziehungen auch auf höherfeste Betone anwenden zu können. Damit wird allerdings die Kriechfähigkeit und -geschwindigkeit von Betonen mit Druckfestigkeiten von $f_{\mathrm{cm}} < 35\,\mathrm{N/mm^2}$ überbewertet (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 76]).

Die Auswirkung des Betonalters bei Belastungsbeginn auf die Grundzahl des Kriechens wird durch den Faktor $\beta(t_0)$ berücksichtigt:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0{,}1 + \left(\frac{t_{0,\text{eff}}}{t_1}\right)^{0{,}2}} \tag{3.27}$$

Der Faktor t_1 ist ebenfalls eine in [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 76] angegebene Bezugsgröße. Sie ist festgelegt mit 1 Tag[4].

Sämtliche bisher vorgestellte Beziehungen gelten für normal bzw. schnell erhärtende Zemente. Der Faktor $t_{0,\text{eff}}$ entspricht bei Normalzementen dann dem tatsächlichen Betonalter t_0 bei Belastungsbeginn. Eine mit der Zementart verbundene veränderte Festigkeitsentwicklung kann durch die Anpassung des Betonalters bei Belastungsbeginn in $t_{0,\text{eff}}$ berücksichtigt werden:

$$t_{0,\text{eff}} = t_{0,\text{T}} \cdot \left[\frac{9}{2 + \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{1,2}} + 1\right]^{\alpha} \geq 0{,}5\,\text{Tage} \tag{3.28}$$

Die Größe α in Glg. 3.28 nimmt dabei Bezug auf die verwendete Zementart. Für Zemente der Klasse „S“ ist sie mit -1, für jene der Klasse „N“ mit 0 und für Zemente der Klasse „R“ mit 1 anzusetzen.

Weiters können die Auswirkungen von erhöhten oder verminderten Temperaturen (z.B. infolge einer Wärmebehandlung) auf den Grad der Aushärtung des Betons durch die Anpassung des Betonalters bei Belastungsbeginn über den Faktor t_T in die Berechnung der Kriechzahl Eingang finden:

$$t_\text{T} = \sum_{i=1}^{n} e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13{,}65\right]} \cdot \Delta t_i \tag{3.29}$$

Für Glg. 3.29 ist $T(\Delta t_i)$ die Temperatur in °C im Zeitintervall Δt_i und Δt_i die Zeit, in denen die Temperatur T auf den betrachteten Bauteil einwirkt.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Auswirkungen von erhöhten oder verminderten Temperaturen in Analogie zur Entwicklung der Steifigkeit des Betons über den Ansatz von Jonasson nach Glg. 2.4 berücksichtigt. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass es zu keiner beträchtlichen Abweichung von dem in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] vorgeschlagenen Ansatz (Glg. 3.29) kommt.

Um die gesuchte Kriechzahl $\varphi(t,t_0)$ letztendlich berechnen zu können, muss noch die zeitliche Entwicklung des Kriechens nach Belastungsbeginn $\beta_\text{c}(t,t_0)$ beschrieben werden. Die Funktion selbst ist eine hyperbolische Potenzfunktion und wird wie folgt ermittelt:

$$\beta_\text{c}(t,t_0) = \left(\frac{\frac{t-t_0}{t_1}}{\beta_\text{H} + \frac{t-t_0}{t_1}}\right)^{0{,}3} \tag{3.30}$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sämtliche Zeitpunkte, welche in Glg. 3.30 vorkommen, als temperaturunangepasste Zeitpunkte einzusetzen sind. Weder für t noch für t_0 darf eine Anpassung erfolgen. Der Faktor β_H berücksichtigt die relative Luftfeuchte RH und die Bauteildicke h_0. Die relative Luftfeuchtigkeit ist in % in die Gleichung einzusetzen:

$$\beta_\text{H} = \begin{cases} 1{,}5 \cdot \left[1 + (0{,}012 \cdot RH)^{18}\right] \cdot h_0 + 250 \leq 1500 & \text{für } f_\text{cm} \leq 35 \\ 1{,}5 \cdot \left[1 + (0{,}012 \cdot RH)^{18}\right] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 & \text{für } f_\text{cm} \geq 35 \end{cases} \tag{3.31}$$

[4] Für die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen ist diese Bezugsgröße unerlässlich, da als Betrachtungszeitraum für die meisten Berechnungen ein Bruchteil einer Stunde gewählt wurde. Sie ist deshalb mit 24 Stunden festgesetzt. Es wäre natürlich möglich bei 1 Tag zu bleiben und die Betrachtungen in Bruchteilen von Tagen anzustellen, dies ist allerdings der Übersichtlich- und Nachvollziehbarkeit gerade bei der Betrachtung von jungem Beton nicht unbedingt dienlich.

Nichtlineares Kriechen

Der bisher beschriebene Formelapparat gilt für geringe Spannungen, die den Effekt des Kriechens hervorrufen. Übersteigt – wie bereits erwähnt – die einwirkende Betonspannung zum Belastungszeitpunkt t_0 den Wert $0{,}45 \cdot f_{\mathrm{ck}}(t_0)$, dann ist gemäß [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] Abschn. 3.1.4 die Nichtlinearität des Kriechens zu berücksichtigen. Spannungen in dieser Größenordnung können z.B. durch Vorspannung im sofortigen Verbund hervorgerufen werden, beispielsweise bei vorgefertigten Betonelementen im Bereich der Spannglieder. Die nichtlineare rechnerische Kriechzahl $\varphi_{\mathrm{nl}}(\infty,t_0)$ ist folgendermaßen zu ermitteln:

$$\varphi_{\mathrm{nl}}(\infty,t_0) = \varphi(\infty,t_0) \cdot e^{1{,}5\cdot(k_\sigma - 0{,}45)} \tag{3.32}$$

Das Spannungs-Festigkeitsverhältnis k_σ ergibt sich aus:

$$k_\sigma = \frac{|\sigma_{\mathrm{c}}|}{f_{\mathrm{ck}}(t_0)} \tag{3.33}$$

Dabei ist σ_{c} die kriecherzeugende Spannung und $f_{\mathrm{ck}}(t_0)$ der charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit zum Zeitpunkt der Belastung.

Unter Gebrauchslast ist i.d.R. mit derartig hohen Spannungen nicht zu rechnen. Auch Berechnungen haben gezeigt, dass bei geringer Druckfestigkeit (die sich z.B. erst infolge des Hydratationsprozesses entwickelt) auf die Berücksichtigung der Nichtlinearität verzichtet werden kann. Nichtlineares Kriechen sei hier nur der Vollständigkeit halber angeführt. – In den in dieser Arbeit vorgelegten Untersuchungen bleibt es allerdings unbeachtet, es wird stets von linearem Kriechen ausgegangen.

3.5 Zusammenhang von Kriechen und Relaxation

Die bisherigen Ausführungen lassen vermuten, dass die beiden Effekte von Kriechen und Relaxation ineinander überführbar sind, da sie auf demselben viskoelastischen Werkstoffverhalten beruhen.

In der Vergangenheit wurde beim Baustoff Beton größtenteils der Effekt des Kriechens untersucht (vgl. [Gutsch, 1998, S. 166]). Aufgrund in Bauwerken auftretender Relaxationsprobleme wird in der Praxis mit Hilfe bekannter Kriechfunktionen auf die Relaxation geschlossen. Hierfür existieren verschiedene Möglichkeiten wie: das

- Superpositionsprinzip, die
- Viskoelastizitätstheorie mit rheologischen Modellen, das
- Verfahren von Trost oder der
- Ansatz von Dischinger und Wittmann.

3.5.1 Lösung nach Trost – Allgemeine Bestimmungsgleichung

In seinem Bericht über die Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme führt Trost eine relativ einfach handzuhabende Gleichung an, die den Zusammenhang von Kriechen und Relaxation beschreibt. In ihr tritt auch der so genannte *Relaxationsbeiwert* ρ auf. Dieser Kennwert erfasst die Auswirkung der Alterung auf das Endkriechmaß bei späteren Spannungsstufen. Er ist stets $\leq 1{,}0$ und beschreibt die abgeminderte Kriechfähigkeit, auf die die jeweilige Spannungsänderung trifft. Ist dieser Wert bekannt, so kann die in Glg. 3.34 angeführte Gleichung,

die den Zusammenhang von Kriechen und Relaxation beschreibt, angewendet werden. Für nähere Informationen sei auf Anh. A verwiesen bzw. auf [Trost, 1967a] und [Trost, 1988].

Unter der Berücksichtigung und mittels (mathematischer) Formulierung der Definitionen von Kriechen bzw. Relaxation als Bedingungen können mit dieser Gleichung auch die Sonderfälle der „reinen Relaxation“ bzw. des „reinen Kriechens“ beschrieben werden. Für die weiteren hier dargestellten Betrachtungen wird der Term $\varepsilon_s(t)$, der das Betonschwinden berücksichtigt, vernachlässigt (s.a. Abschn. 2.4).

$$\varepsilon(t_k,t_i) = \frac{\sigma(t_i)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_i)\big] + \frac{\sigma(t_k) - \sigma(t_i)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)\big] + \varepsilon_s(t) \tag{3.34}$$

Aus dieser *allgemeinen Bestimmungsgleichung* lässt sich letztendlich der in Glg. 3.44 angegebene Zusammenhang zur Beschreibung der Spannungsrelaxation ableiten, welcher eine Näherungslösung der in Anh. B näher erläuterten strengen Lösung zur Beschreibung der Spannungsrelaxation darstellt.

Kriechen

Kriechen ist, wie bereits erwähnt, eine viskoelastische Eigenschaft, die sich unter Spannungskonstanz äußert. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, muss für die Änderung der Spannung $\Delta\sigma(t_k,t_i) = \sigma(t_k) - \sigma(t_i) = 0$ gelten. Aus Glg. 3.34 folgt dann:

$$\varepsilon(t_k,t_i) = \frac{\sigma(t_i)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_i)\big] + 0 \tag{3.35}$$

Aus dieser Gleichung ist nun auch die (definitionsgemäß) mit dem Alter steigende Abnahme der Kriechverformung zufolge einer konstanten Ursprungsspannung $\sigma(t_1)$. Glg. 3.35 ist zudem mit dem in Glg. 3.5 gegebenen Zusammenhang ident.

Spannungsrelaxation und Relaxationszahl

Für den Fall der „reinen Relaxation“ muss – gemäß Definition – gefordert werden, dass es zur Spannungsrelaxation stets unter Vorhandensein eines konstanten Dehnungszustands kommt. Dies wird durch die Bedingung $\varepsilon(t_k,t_i) = \frac{\sigma(t_i)}{E_{28}}$, bzw. auch geschrieben als $E_{28} \cdot \varepsilon(t_k,t_i) - \sigma(t_i) = 0$ sichergestellt. Aus Glg. 3.34 folgt damit und mit bekanntem Relaxationsbeiwert:

$$\underbrace{\varepsilon(t_k,t_i) \cdot E_{28}}_{=\sigma(t_i)} = \sigma(t_i) + \sigma(t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i) + \big[\sigma(t_k) - \sigma(t_i)\big] \cdot \big[1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)\big] \tag{3.36}$$

bzw. ergibt sich mit der Bedingung:

$$0 = \sigma(t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i) + \big[\sigma(t_k) - \sigma(t_i)\big] \cdot \big[1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)\big] \tag{3.37}$$

Die Spannungsrelaxation bekommt man aus dem Umformen von Glg. 3.37. Sie ergibt sich dann zu:

$$\frac{\sigma(t_k)}{\sigma(t_i)} = 1 - \frac{\varphi(t_k,t_i)}{1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)} \tag{3.38}$$

Entsprechend der formalen Definition der Kriechzahl (vgl. Glg. 3.2) führt Trost eine die Abnahme der Spannung kennzeichnende Relaxationszahl $\psi(t_k,t_i)$ ein

$$\psi(t_k,t_i) = \frac{\sigma(t_i) - \sigma(t_k)}{\sigma(t_i)}, \tag{3.39}$$

wodurch sich aus Glg. 3.38

$$\frac{\sigma(t_k)}{\sigma(t_i)} = 1 - \psi(t_k,t_i) \tag{3.40}$$

ergibt. Ein weiteres Gleichsetzen von Glg. 3.38 und Glg. 3.40 liefert letztendlich den gesuchten Zusammenhang der Kriechzahl $\varphi(t_k,t_i)$ mit der Relaxationszahl[5] $\psi(t_k,t_i)$:

$$\psi(t_k,t_i) = \frac{\varphi(t_k,t_i)}{1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)} \tag{3.41}$$

Mit der Definition der Relaxationsfunktion aus Glg. 3.8 ergibt sich der Zusammenhang von Kriech- und Relaxationszahl :

$$\psi(t_k,t_i) = 1 - \frac{\varphi(t_k,t_i)}{1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)} \tag{3.42}$$

Der Relaxationsbeiwert liegt allgemein in den Grenzen von $0{,}5 \leq \rho(t_k,t_i) \leq 1{,}0$. Für stetig veränderliche Spannungen wird ein Relaxationsbeiwert mit hinreichender Genauigkeit als konstante Größe von $\rho = 0{,}8$ vorgeschlagen (s. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 81]).

Die Restspannung eines relaxierenden Spannungsinkrements kann aus Glg. 3.38 schlussendlich berechnet werden mit:

$$\sigma(t_k,t_i) = \sigma(t_i) \cdot \left[1 - \frac{\varphi(t_k,t_i)}{1 + \rho(t_k,t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)}\right] \tag{3.43}$$

Hat der Relaxationsbeiwert eine konstante Größe von 1,0, so wird aus Glg. 3.43:

$$\sigma(t_k,t_i) = \sigma(t_i) \cdot \left[1 - \frac{\varphi(t_k,t_i)}{1 + \varphi(t_k,t_i)}\right] = \sigma(t_i) \cdot \frac{1}{1 + \varphi(t_k,t_i)} \tag{3.44}$$

Aus Glg. 3.43 bzw. Glg. 3.44 ist nun erkennbar, dass ein zu einem bestimmten Zeitpunkt t_i auftretendes Spannungsinkrement mit der Zeit infolge Relaxation abnimmt. Die über denselben Zeitraum wirkende Dehnung bleibt konstant, wie anfangs durch die Bedingung gefordert worden ist.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die in Glg. 3.44 angegebene Gleichung eine Näherungslösung für die strenge Lösung von Glg. B.9 darstellt. Trost stellt diese von ihm vorgeschlagene und begründete Näherung in [Trost, 1967a, S. 235] vor und zusätzlich der exakten (strengen) Lösung gegenüber. Der von [Gutsch, 1998, S. 169] angesprochene aufwändige Koeffizientenvergleich zur Lösung von Glg. B.9 entfällt durch das Vorhandensein dieser Näherungslösung. Die mit dieser Gleichung in näherem Zusammenhang stehenden rheologischen Modelle wurden der Vollständigkeit halber in die vorliegende Arbeit mitaufgenommen s. hierfür Anh. B bzw. Anh. A und v.a. die Ausführungen von [Zerna und Trost, 1967], [Gutsch, 1998] und [Trost, 1967a] bzw. [Trost, 1967b].

[5] Hingewiesen sei an dieser Stelle, dass Trost die Relaxationszahl von Glg. 3.8 abweichend definiert. Trost geht in seiner Definition der Relaxationszahl stets vom Verhältnis der infolge Relaxation „verlorengegangenen“ (relaxierten) Spannung zur ursprünglich vorhandenen Spannung aus, wogegen in Glg. 3.8 der Anteil der noch verbleibenden Spannung zur ursprünglich vorhandenen Spannung ins Verhältnis gesetzt wird.

4 Bestimmung von Zwangsspannungen auf Grundlage der Elastizitätstheorie

Zwangsspannungen resultieren aus behinderten Verformungen. Deren Größe ist von der Steifigkeit des Materials abhängig. Grundlegend lassen sie sich über das HOOKEsche Gesetz des einachsigen Spannungszustands bestimmen. Dieses ist allgemein durch Glg. 4.1 gegeben.

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \cdot a \tag{4.1}$$

Die Dehnung ε setzt sich aus der Temperaturdehnung ε_T und der Schwinddehnung ε_cs zusammen. Die Temperaturdehnung ergibt sich aus dem Produkt des Temperaturausdehnungskoeffizienten α_T mit der einwirkenden Temperatur ΔT. Eingesetzt in Glg. 4.1 ergibt sich daraus Glg. 4.2:

$$\sigma = (\alpha_\mathrm{T} \cdot \Delta T + \varepsilon_\mathrm{cs}) \cdot E \cdot a \tag{4.2}$$

Die Variable a ist der so genannte Behinderungsgrad. Er ist ein Maß für die Größe des auf das System wirkenden Zwanges. Auf ihn wird später zurückgekommen.

4.1 Statisches System unter vollem Zwang

Genaugenommen handelt es sich bei dem in Abb. 4.1 dargestellten System um einen Sonderfall eines teilweise gezwängten Systems. Das hier besprochene System ist statisch unbestimmt und weist an beiden Auflagern Festeinspannungen auf. Es wird in weiterer Folge als System unter vollem Zwang bezeichnet und hat einen Behinderungsgrad von $a = 1{,}0$.

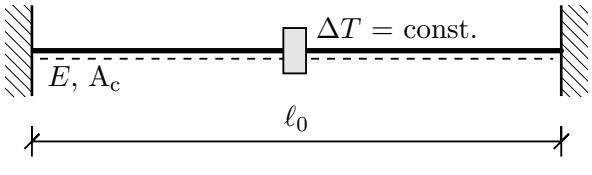


Abbildung 4.1: Statisches System unter vollem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung

An dieser Stelle sei erwähnt, dass sämtliche angestellte Betrachtungen lediglich die resultierenden Normalkräfte betreffen. Momente oder Querkräfte bleiben unberücksichtigt. Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass es zu keinerlei Stabilitätsproblemen kommt und weiters der E-Modul, sowie die Temperaturbelastung zum Zeitpunkt ihres Auftretens konstant sind und die Querschnittsfläche generell unveränderlich ist.

4.1.1 Bestimmung der aus einer Temperaturbelastung resultierenden Spannung

Zur Bestimmung der Schnittkräfte in statisch unbestimmten Systemen gibt es nach der Elastizitätstheorie mehrere Möglichkeiten. Im Folgenden wird von Energiemethoden (z.B. Kraftgrößenmethode)

Abstand genommen; die Betrachtung erfolgt rein unter Zuhilfenahme von aus der Belastung resultierenden Größen und unter der Berücksichtigung der Verformungskompatibilität. In Abb. 4.2 ist das Freikörperbild mit einer resultierenden Lagerreaktion A und der Stabkraft N dargestellt.

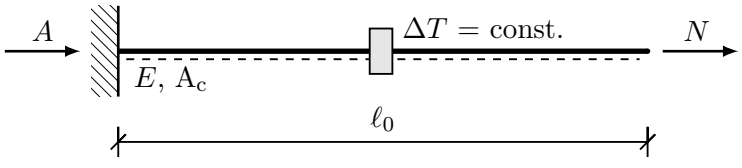


Abbildung 4.2: Statisches System unter vollem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung (Freikörperbild)

Aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ergibt sich:

$$\rightarrow \sum F_H = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -N \tag{4.3}$$

Um die Bedingung der Verformungskompatibilität zu erfüllen, muss die Summe aus der Längenänderung infolge der Temperaturbelastung $\Delta\ell_{\text{Temperatur}}$ und der Längenänderung des Stabes infolge der Stabkraft $\Delta\ell_{\text{Zwang}}$ Null ergeben. Wegen der Einspannung ist eine Verformung am rechten Endauflager nicht möglich:

$$\Delta\ell_{\text{Temperatur}} + \Delta\ell_{\text{Zwang}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.4}$$

Die jeweiligen Terme in Glg. 4.4 ergeben sich weiters zu:

$$\Delta\ell_{\text{Temperatur}} = \alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T \cdot \ell_0 \tag{4.5}$$

$$\Delta\ell_{\text{Zwang}} = \frac{N \cdot \ell_0}{E \cdot A_{\text{c}}} \tag{4.6}$$

Eingesetzt in die Bedingung der Verformungskompatibilität Glg. 4.4 folgt daraus

$$\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T \cdot \ell_0 + \frac{N \cdot \ell_0}{E \cdot A_{\text{c}}} = 0, \tag{4.7}$$

wodurch man nach Umformen die gesuchte Spannungsantwort σ des Systems infolge einer Temperaturbelastung ΔT erhält:

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{c}}} = -\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T \cdot E \tag{4.8}$$

Ist nun die Größe E abhängig von der Zeit, so ändert sich Glg. 4.8 nur geringfügig zu:

$$\sigma(t_i) = \frac{N(t_i)}{A_{\text{c}}} = -\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T \cdot E(t_i) \tag{4.9}$$

Für eine erste Temperaturbelastung $\Delta T > 0$ „antwortet“ das System mit einer (negativen) Druckspannung, für $\Delta T < 0$ mit einer (positiven) Zugspannung. Das System ist spannungsfrei, wenn es keine Belastung erfährt.

4.2 Statisches System unter teilweisem Zwang

In Abb. 4.3 ist das eigentliche System dargestellt, welches betrachtet werden soll. Anstelle der fixen Einspannung an der rechten Seite weist dieses, wie es in Abb. 4.3 ersichtlich ist, eine Feder auf. Das System selbst ist ein Rechenmodell des in Abb. 7.1 dargestellten und in Abb. 7.2 skizzierten Versuchsrahmens. Die Federsteifigkeit k_F ist konstant und darf als bekannt angenommen werden. Die Länge des Stabes ist wie im vorhergehenden Beispiel mit ℓ_0 gegeben. Des Weiteren ist die Querschnittsfläche A_c konstant und der E-Modul zu jedem Zeitpunkt als $E(t_i)$ bekannt. Zum jeweiligen Zeitpunkt t_i einer Laststufe wird die Temperaturbelastung ΔT als eine über den Querschnitt gleichmäßig verteilte, konstante Einwirkung angesehen (s.a. Abschn. 7.2.1).

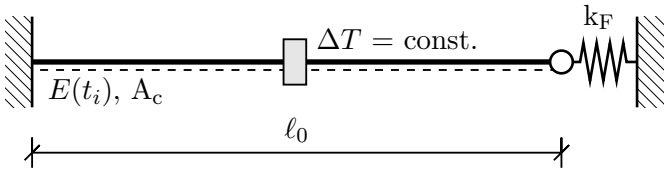


Abbildung 4.3: Statisches System unter teilweisem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung

4.2.1 Bestimmung der aus einer Temperaturbelastung resultierenden Spannung

Das System ist statisch unbestimmt. Wie beim vorhergehenden System erfolgt die Lösung unter der Berücksichtigung von Kompatibilitätsbedingungen. In Abb. 4.4 ist das Freikörperbild des Systems dargestellt.

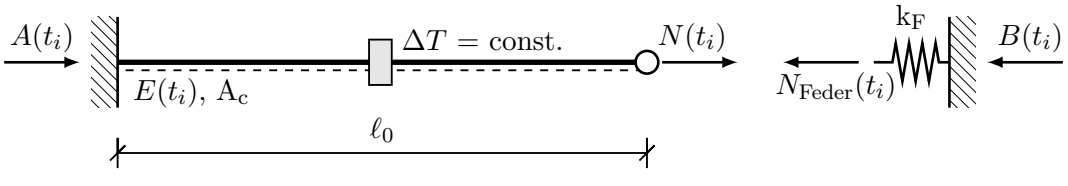


Abbildung 4.4: Statisches System unter teilweisem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung (Freikörperbild)

Aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte ergibt sich:

$$\rightarrow \sum F_H = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A(t_i) = -N(t_i) = N_{\text{Feder}}(t_i) \tag{4.10}$$

Die Stauchung der Feder muss aus Gründen der Verformungskompatibilität dieselbe Größe haben wie die resultierende Horizontalverschiebung des Stabendes. Man erhält diese Verschiebung aus der Summe des Anteils der Stabdehnung, der sich am Stabende infolge der Temperaturbelastung ergibt und der Verschiebung des Stabendes die aus der wirkenden Zwangkraft entsteht. Es kann daher folgende Bedingung formuliert werden:

$$\Delta\ell_{\text{Temperatur}} + \Delta\ell_{\text{Zwang}} \stackrel{!}{=} \Delta\ell_{\text{Feder}} \tag{4.11}$$

Die in Glg. 4.11 enthaltenen Terme sind dabei:

$$\Delta\ell_{\text{Temperatur}} = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot \ell_0 \tag{4.12}$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{Zwang}} = \frac{N(t_i)\cdot\ell_0}{E(t_i)\cdot A_\mathrm{c}} \tag{4.13}$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{Feder}} = \frac{N_{\mathrm{Feder}}(t_i)}{\mathrm{k_F}} \tag{4.14}$$

Unter der Berücksichtigung von Glg. 4.10 ergibt sich für $\Delta\ell_{\mathrm{Feder}}$ aus Glg. 4.14:

$$\Delta\ell_{\mathrm{Feder}} = -\frac{N(t_i)}{\mathrm{k_F}} \tag{4.15}$$

Werden nun diese Terme in die Bedingung der Verformungskompatibilität Glg. 4.11 eingesetzt, so folgt daraus:

$$\alpha_\mathrm{T}\cdot\Delta T\cdot\ell_0 + \frac{N(t_i)\cdot\ell_0}{E(t_i)\cdot\mathrm{A_c}} = -\frac{N(t_i)}{\mathrm{k_F}} \tag{4.16}$$

Die gesuchte, von der Zeit abhängige, Normalkraft $N(t_i)$ ergibt sich durch Umformen letztendlich zu:

$$N(t_i) = \frac{-\alpha_\mathrm{T}\cdot\Delta T\cdot E(t_i)\cdot\mathrm{A_c}}{1+\frac{E(t_i)\cdot\mathrm{A_c}}{\mathrm{k_F}\cdot\ell_0}} \tag{4.17}$$

Vergleicht man Glg. 4.17 mit Glg. 4.9, so ist zu erkennen, dass sich diese lediglich durch einen multiplikativen Term unterscheiden. Dieser Term ist ebenfalls von der Zeit abhängig. Führt man für ihn die Variable $a(t_i)$ ein, so wird Glg. 4.17 zu:

$$N(t_i) = -\alpha_\mathrm{T}\cdot\Delta T\cdot E(t_i)\cdot\mathrm{A_c}\cdot a(t_i) \tag{4.18}$$

Die Variable $a(t_i)$ ist der bereits bekannte *Behinderungsgrad*. Er hängt von der Federsteifigkeit $\mathrm{k_F}$ und von dem aktuellen E-Modul $E(t_i)$ des Systems ab. Ist die Federsteifigkeit $\mathrm{k_F}=\infty$, so unterliegt das System der vollen Zwängung. Der Behinderungsgrad a ergibt sich dann zu 1. Liegt keine Behinderung vor (Federsteifigkeit $\mathrm{k_F}=0$), so ist auch der Behinderungsgrad 0. Das System erfährt demnach keine Zwängung und kann sich ungehindert unter einer Temperaturbelastung verformen. Dadurch kommt es zu keinerlei Spannungsantwort. Der Behinderungsgrad $a(t_i)$ ist gegeben durch:

$$a(t_i) = \frac{1}{1+\frac{E(t_i)\cdot\mathrm{A_c}}{\mathrm{k_F}\cdot\ell_0}} \tag{4.19}$$

Für die zu einem bestimmten Zeitpunkt t_i wirkende Spannung in dem gegebenen statischen System ergibt sich also:

$$\sigma(t_i) = \frac{N(t_i)}{\mathrm{A_c}} = -\alpha_\mathrm{T}\cdot\Delta T\cdot E(t_i)\cdot a(t_i) \tag{4.20}$$

5 Bestimmung von Zwangsspannungen unter Berücksichtigung von Viskoelastizität

In den nachfolgenden Betrachtungen wird die Berücksichtigung von Viskoelastizität in einem zwangsbeanspruchten Bauteil auf Grundlage eines inkrementellen Ansatzes vorgestellt und erarbeitet. Hierbei muss zu jedem beliebigen Zeitpunkt der jeweilige vorhergehende Spannungszustand bekannt sein, weil sich die Berechnung des nächsten Schritts immer auf diesen bezieht. Da zu dem beliebigen Zeitpunkt zudem sämtliche Steifigkeitseigenschaften vorliegen, kann durch die inkrementelle Betrachtung die Spannungsgeschichte im Zeitverlauf bestimmt werden.

Grundlegend basiert der Ansatz auf den Überlegungen von Schlicke bzw. Nietner, die dieser in seiner Dissertation vorstellt und welche z.T. in [Nietner et al., 2011] bzw. [Schlicke und Tue, 2012] publiziert sind. Unter anderem unterscheidet er sich durch die Entkoppelung von Spannung und Verformung. Insbesondere bei der Berücksichtigung des Behinderungsgrads sind hierdurch zusätzliche Überlegungen erforderlich. Die Temperaturgeschichte wird als äußere Einwirkung betrachtet. Ziel zur Formulierung des hier vorgestellten Ansatzes war es, ein Modell zu finden, welches v.a. ohne der direkten Implementierung der in Anh. B vorgestellten rheologischen Grundkörper auskommt[6] und eine Bestimmung des Behinderungsgrades mittels FE-Analyse a priori nicht erforderlich macht. Zudem sollen die Unschärfen umgangen werden, die bei herkömmlichen analytischen Lösungen unter Verwendung des Relaxationsbeiwerts nach Trost entstehen.

5.1 Mathematische Formulierung

Mit der Kenntnis des E-Moduls zu jedem Zeitpunkt sowie der Größe der Federsteifigkeit kann der zeitabhängige Verlauf des Behinderungsgrads ermittelt werden. Zum Zeitpunkt t_i des Auftretens eines Temperaturinkrements ΔT entsteht ein initiales Spannungsinkrement $\Delta\sigma_i(t_i)$. Dieses kann mit Glg. 4.20 bestimmt werden. Der Übersichtlichkeit halber ist das Delta zur Kennzeichnung des jeweiligen auftretenden Spannungsinkrementes weggelassen worden.

$$\sigma_i(t_i) = -\alpha_\mathrm{T} \cdot \Delta T \cdot E(t_i) \cdot a(t_i) \tag{5.1}$$

Aus dieser Spannung kann, unter Anwendung des Hookeschen Gesetzes aus Glg. B.2, die *behinderte* Dehnung $\varepsilon(t_i)$ ermittelt werden zu:

$$\varepsilon(t_i) = \frac{\sigma_i(t_i)}{E(t_i)} = -\alpha_\mathrm{T} \cdot \Delta T \cdot a(t_i) \tag{5.2}$$

Da der Beton viskoelastische Eigenschaften besitzt, kommt es unter dieser Zwängungssituation zu einer zeitabhängigen Verformungsänderung (= Kriechen). Deren Größe lässt sich unter Berücksichtigung vom Zeitpunkt der Spannungsentstehung und Zeitdauer aus den vorgestellten Kriechfunktionen bestimmen. Diese Zunahme der Verformung unterliegt allerdings ebenfalls der Verformungsbehinderung im System. Daraus ergibt sich ein weiterer behinderter Dehnungsanteil. Da das Kriechen der

[6] [Nietner, 2009, S. 88] begründet dies mit der Schwierigkeit der Transformation der messbaren zeitabhängigen makroskopischen Materialeigenschaften (Steifigkeit und Kriechzahl) in die entsprechenden zeitdiskreten Federsteifigkeiten und Dämpferviskositäten. Diese werden benötigt, um überhaupt rheologische Modelle formulieren zu können.

initialen behinderten Dehnung entgegenwirkt (Druck = Verkürzung, Zug = Verlängerung) ist dieser der ursprünglichen behinderten Dehnung entgegengesetzt. Wird nun die ursprüngliche Dehnung mit dem behinderten Anteil des Inkrements der Kriechverformung überlagert, so kommt es zu einer Reduktion derselben. Die bereits im System vorhandene Zwangspannung wird abgebaut (= Relaxation; vgl. [Nietner, 2009, S. 91]). Wie in [Nietner et al., 2011] kann der Abbau wie folgt beschrieben werden. Der Index k kennzeichnet dabei einen *Betrachtungs*zeitpunkt.

$$\varepsilon(t_k) = \varepsilon(t_{k-1}) - a(t_k) \cdot \underbrace{\varepsilon(t_{k-1}) \cdot \Delta\varphi(t_k - t_{k-1},t_i)}_{\text{Kriechdehnungsinkrement}} \tag{5.3}$$

Glg. 5.3 beschreibt damit jene Dehnung, welche an einem bestimmten Betrachtungszeitpunkt t_k auftritt, nachdem das Kriechen in dem dazugehörigen Zeitschritt (von t_{k-1} nach t_k) erfolgt ist. Die gesuchte Spannung kann aus der bereits bekannten Dehnung berechnet werden:

$$\sigma_i(t_k) = \sigma_i(t_{k-1}) + \left[\varepsilon(t_k) - \varepsilon(t_{k-1})\right] \cdot E(t_k) \tag{5.4}$$

Mit Glg. 5.3 kann dann aus Glg. 5.4 der gesuchte Spannungsabbau eines zu einem Zeitpunkt t_i auftretenden Spannungsinkrements $\sigma_i(t_i)$ ausgedrückt werden:

$$\sigma_i(t_k) = \sigma_i(t_{k-1}) - a(t_k) \cdot \varepsilon(t_{k-1}) \cdot \Delta\varphi(t_k - t_{k-1},t_i) \cdot E(t_k) \tag{5.5}$$

5.1.1 Kriechinkremente

Generell kann die analytische Lösung auf Grundlage von jedem Kriechmodell bestimmt werden, das als reine Materialeigenschaft definiert wurde. In den nachfolgenden Betrachtungen wird auf das Modell in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] zurückgegriffen.

Mit dessen Hilfe kann die Kriechverformung (Kriechdehnung, s. Glg. 5.3) bestimmt werden. Wie bereits in Abschn. 3.4 angesprochen, bezieht sich dieses Kriechmodell auf den 28-Tages-Elastizitätsmodul. Neben der Betonfestigkeitsklasse und Umgebungsbedingungen hängt die Größe und die Kriechgeschwindigkeit außerdem stark vom Betonalter zum Belastungszeitpunkt ab. Die Kriechfunktion selbst gibt die Entwicklung der Kriechzahl bzw. des Kriechkoeffizienten über die Zeit wieder. Die Größe der Zunahme einer Kriechzahl innerhalb eines festgelegten Zeitschrittes ist das so genannte *Kriechinkrement* $\Delta\varphi(t_k - t_{k-1},t_i)$. Dieses wird mit der Beziehung aus Glg. 5.6 bestimmt:

$$\Delta\varphi(t_k - t_{k-1},t_i) = \varphi(t_k,t_i) - \varphi(t_{k-1},t_i) \tag{5.6}$$

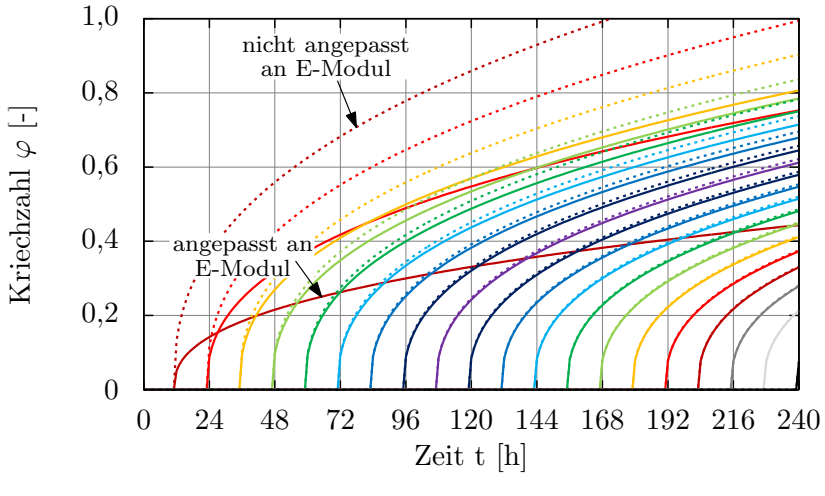


Abbildung 5.1: Exemplarische Darstellung der Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden

In Abb. 5.1 sind verschiedene Kriechkurven exemplarisch dargestellt. Der zur Berechnung dieser Kurven angenommene Beton entspricht dem des Versuchs aus Kap. 7, die Temperatureinwirkung ist willkürlich gewählt. Generell gehört zu jedem Spannungsinkrement eines Auftrittszeitpunkts t_i eine eigene Kriechkurve. Da die Kriechkurven – und damit die daraus resultierenden Inkremente – auf den 28-Tages-E-Modul bezogen wurden, muss für eine inkrementelle Betrachtung auf die tatsächliche E-Modul-Entwicklung rückgerechnet werden. Es gilt:

$$\varphi(t_k,t_i) = \varphi(t_k,t_i) \cdot \frac{E(t_i)}{E_{28}} \tag{5.7}$$

Abb. 5.1 zeigt die maßgebenden Kurven (durchgezogen) im Vergleich zu den skalierten Kurven der Norm (punktiert). Nimmt man nun exemplarisch die Kriechkurve eines Belastungszeitpunkts $t = 12\,\text{h}$, so kann diese inkrementell zerlegt werden. Abb. 5.2 zeigt dies für Zeitschritte von $\Delta t = 12\,\text{h}$. Diese gelten für die auf die E-Modul-Entwicklung rückgerechneten Kriechkurven. Sie gehören zu der ersten – also dunkelroten – Kriechkurve (Belastungszeitpunkt $t_i = 12\,\text{h}$). Den Wert der Kriechzahl zum jeweiligen Zeitpunkt erhält man zurück, wenn die Kriechinkremente bis zu diesem Zeitpunkt summiert werden.

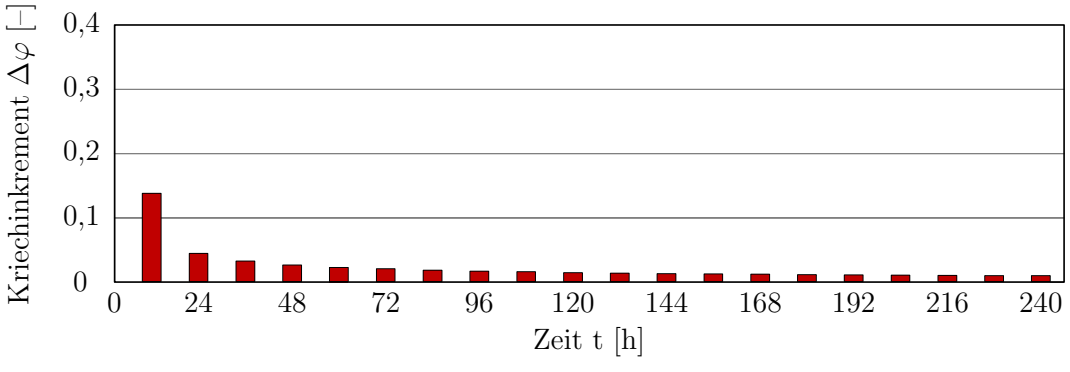


Abbildung 5.2: Darstellung exemplarischer – an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente einer Kriechkurve für Zeitintervalle von 12 Stunden

5.1.2 Globalspannung im System unter Berücksichtigung der Steifigkeitsentwicklung

In Tab. 5.1 ist der Spannungsabbau eines *einzelnen* Spannungsinkrements „ausgeschrieben“. Der Belastungszeitpunkt t_i ist dabei mit t_1 angenommen worden, sämtliche folgende Zeitpunkte sind die Betrachtungszeitpunkte t_k. Da es sich um eine einstufige Belastung handelt ist zu jedem Zeitpunkt t_k auch die Globalspannung bekannt, die dem Wert des Inkrements zu diesem Zeitpunkt entspricht.

Mit der in Glg. 5.8 angegebenen Gleichung kann das Auftreten eines initialen Spannungsinkrements ($k = i$) und der Abbau desselben ($k \neq i$) über einen Zeitraum t_i bis t_k bestimmt werden. Die hier als allgemeine Formel wiedergegebene Gleichung führt bei Anwendung auf die in Tab. 5.1 „ausgeschriebene“ Form. Das dort angegebene Inkrement $\Delta\varepsilon_{\text{cs}}$ ist das jeweilige Inkrement der *Gesamt*schwinddehnung (s.a. Abschn. 2.4), welches neben dem Inkrement der Temperaturdehnung $\Delta\varepsilon_{\text{T}}$ berücksichtigt werden kann.

$$\sigma_i(t_k) = \begin{cases} \left[-\alpha_{\text{T}} \cdot \Delta T_i(t_i) + \Delta\varepsilon_{\text{cs}}\right] \cdot a(t_i) \cdot E(t_i) & \text{falls} \quad k = i \\ \sigma_i(t_{k-1}) - a(t_k) \cdot \varepsilon(t_{k-1}) \cdot \Delta\varphi(t_k - t_{k-1},t_i) \cdot E(t_k) & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.8}$$

Der Übersichtlichkeit halber ist in Glg. 5.8 und in Tab. 5.1 für das Spannungsinkrement wiederum das Δ weggelassen worden. $\sigma_i(t_i)$ steht aber stets für ein Spannungsinkrement, welches infolge eines Temperaturinkrements auftritt.

Tabelle 5.1: Tabellarische Darstellung des Abbaus eines Spannungsinkrements

t_k	ΔT_i	$a(t_k)$	Spannung
t_1	ΔT_1	$a(t_1)$	$\varepsilon(t_1) = -\alpha_T \cdot \Delta T_1 \cdot a(t_1)$ $\sigma_1(t_1) = -\alpha_T \cdot \Delta T_1 \cdot a(t_1) \cdot E(t_1)$
t_2	(ΔT_1)	$a(t_2)$	$\varepsilon(t_2) = \varepsilon(t_1) - a(t_2) \cdot \varepsilon(t_1) \cdot \Delta\varphi(t_2 - t_1, t_0)$ $\sigma_1(t_2) = \sigma_1(t_1) - a(t_2) \cdot \varepsilon(t_1) \cdot \Delta\varphi(t_2 - t_1, t_0) \cdot E(t_2)$
t_3	(ΔT_1)	$a(t_3)$	$\varepsilon(t_3) = \varepsilon(t_2) - a(t_3) \cdot \varepsilon(t_2) \cdot \Delta\varphi(t_3 - t_2, t_0)$ $\sigma_1(t_3) = \sigma_1(t_2) - a(t_3) \cdot \varepsilon(t_2) \cdot \Delta\varphi(t_3 - t_2, t_0) \cdot E(t_3)$
t_4	(ΔT_1)	$a(t_4)$	$\varepsilon(t_4) = \varepsilon(t_3) - a(t_4) \cdot \varepsilon(t_3) \cdot \Delta\varphi(t_4 - t_3, t_0)$ $\sigma_1(t_4) = \sigma_1(t_3) - a(t_4) \cdot \varepsilon(t_3) \cdot \Delta\varphi(t_4 - t_3, t_0) \cdot E(t_4)$
⋮	⋮	⋮	⋮

5.2 Mathematische Formulierung der Belastungsgeschichte

Liegt eine Temperaturgeschichte und damit eine Spannungsgeschichte als Einwirkung vor, so kann die Globalspannung im System unter Voraussetzung der Anwendbarkeit des Superpositionsprizips bestimmt werden. Im System befinden sich nun n parallel initiierte Spannungsinkremente, die jeweils ihr eigenes viskoelastisches Verhalten aufweisen. Glg. 5.8 gilt für jedes einzelne Inkrement und muss bis zum Betrachtungszeitpunkt t_k, an dem die Globalspannung ermittelt werden soll, berechnet werden. Die sich zu einem Betrachtungszeitpunkt t_k im System befindende viskoelastische bzw. auch elastische Gesamtspannung erhält man durch Summation sämtlicher zu diesem Zeitpunkt noch vorhandenen Spannungsinkremente. Mit Glg. 5.8 ergibt sich für einen Erstbelastungszeitpunkt $t_i = 1$:

$$\sigma^{\text{gesamt}}(t_k) = \sum_{t_i=1}^{n} \Delta\sigma_i(t_k) \tag{5.9}$$

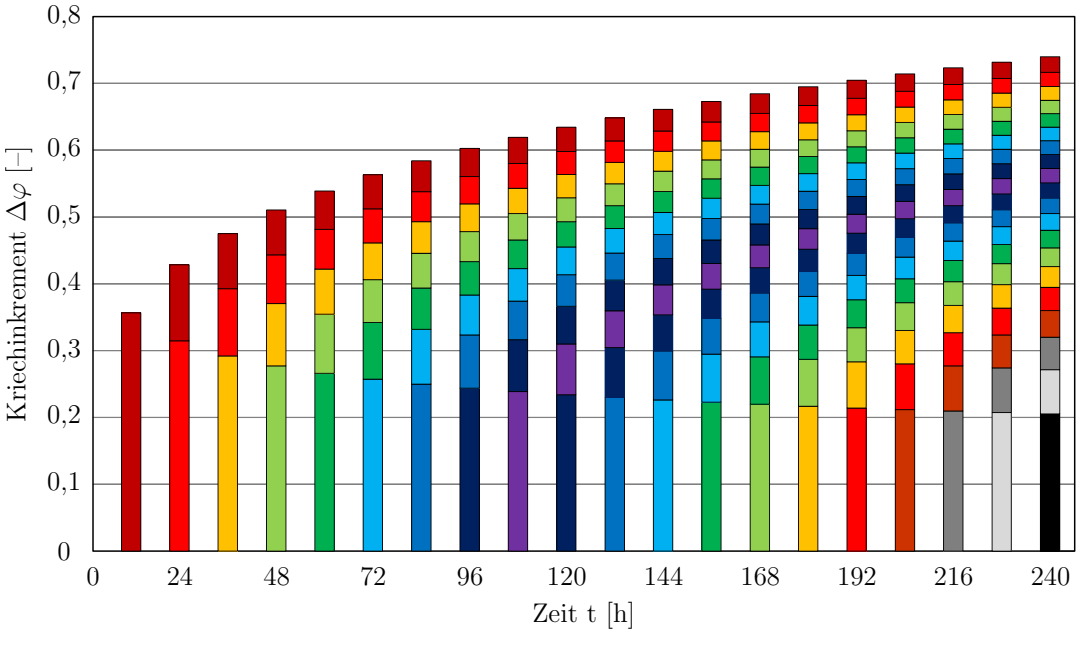


Abbildung 5.3: Darstellung exemplarischer – nicht an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente mehrerer Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden

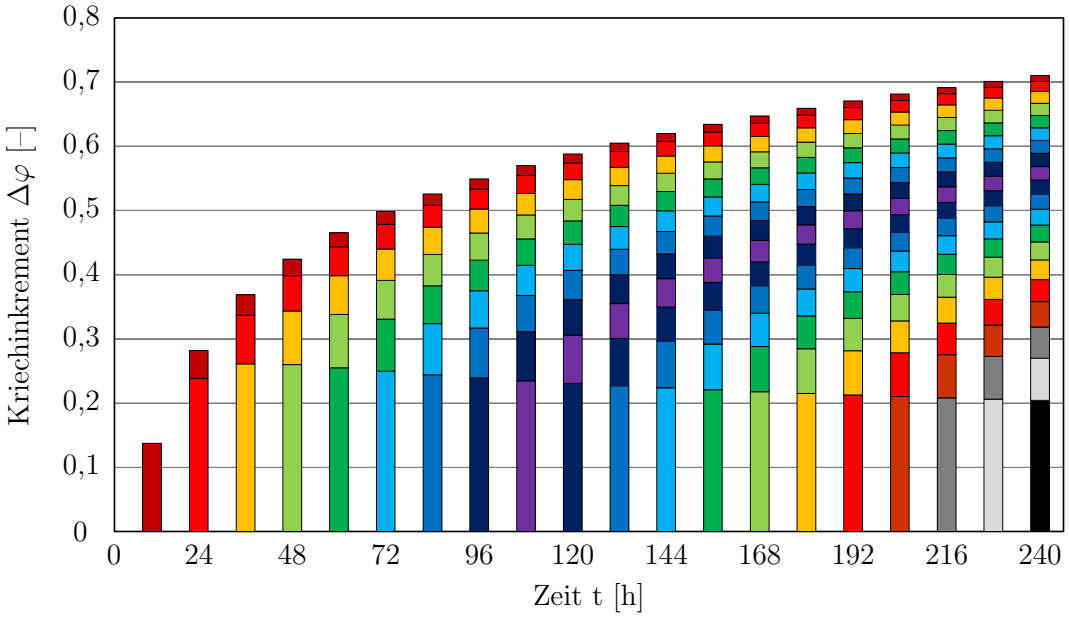


Abbildung 5.4: Darstellung exemplarischer – an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente mehrerer Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden

In Abb. 5.3 und Abb. 5.4 sind die Kriechinkremente dargestellt, die zu den in Abb. 5.1 geplotteten Kriechkurven gehören. Im Gegensatz zu Abb. 5.2 tritt nun zu jedem Zeitpunkt, ab dem eine Kriechkurve vorhanden ist, ein Spannungsinkrement auf. Dieses muss nun über die Zeit verfolgt und anschließend mit den restlichen superponiert werden. Deutlich erkennbar ist die mit steigendem Alter abnehmende Kriechfähigkeit.

Nach [Tue et al., 2007], [Schlicke und Tue, 2010a] und [Schlicke und Tue, 2010b] ist die Berücksichtigung des Globalspannungszustandes von großer Bedeutung und die eigentlichen Berechnungen sind streng an diesen zu koppeln. Nach [Tue et al., 2007] sind die folgenden vier Fälle bei der Berechnung der globalen Systemspannungsantwort zu unterscheiden:

- Belastung (Spannungszunahme)
- Entlastung (Spannungsabnahme)
- Keine zusätzliche äußere Belastungsänderung
- Spannungsnulldurchgang

Im Folgenden werden diese Fälle näher betrachtet. Die Ermittlung des jeweiligen auftretenden be- oder entlastenden initialen Spannungsinkrements, welches noch keinen viskoelastischen Erscheinungen ($k = i$) unterliegt, erfolgt stets nach Glg. 5.8.

5.3 Belastung (Spannungszunahme)

Wird davon ausgegangen, dass sich das Ausgangssystem im Gleichgewicht befindet und keine Eigenspannungen vorhanden sind, d.h. dass die globale Systemspannung zu Beginn = 0 ist, so erfährt das System durch das erste auftretende Temperaturinkrement eine Belastung. Die Richtung (positives oder negatives Temperaturinkrement) hat hier zunächst keine Bedeutung – jedes hervorgerufene Spannungsinkrement belastet das System. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass es sich bei einer anfänglichen Temperatursteigerung um eine Druckspannungs- (negatives Vorzeichen) und bei

einem anfänglichen Absinken der Temperatur um eine Zugspannungsantwort (positives Vorzeichen) handelt.

Es wird nun davon ausgegangen, dass das System – analog zur Versuchsnachrechnung – zunächst eine Druckspannungszunahme erfährt. Hinsichtlich der Vorzeichenkonvention sei an dieser Stelle in Erinnerung gerufen, dass der zu einer Druckspannung führende Temperaturanstieg eine Ausdehnung des Versuchskörpers (positives Vorzeichen des Dehnungsinkrements) und die zu einer Zugspannung führende Temperaturabnahme eine Verkürzung (negatives Vorzeichen des Dehnungsinkrements) mit sich bringt.

Der Fall der Belastung ist der am einfachsten handzuhabende: Die globale viskoelastische Systemspannungsantwort ergibt sich durch Summation direkt aus Glg. 5.9. Zur Berechnung der globalen elastischen Systemspannungsantwort kann ebenfalls Glg. 5.9 herangezogen werden, die sinngemäß gilt. In Abb. 5.5 ist der Weg zur Ermittlung der Gesamtspannung im Falle einer nur aus belastenden Inkrementen bestehenden Spannungsgeschichte schematisch dargestellt. Die elastische Gesamtspannung $\sigma^{\text{elast.}}(t)$ ist als strichdoppelpunktierte blaue Linie, die viskoelastische Gesamtspannung $\sigma^{\text{visko.}}(t)$ als rote strichpunktierte Linie gezeichnet.

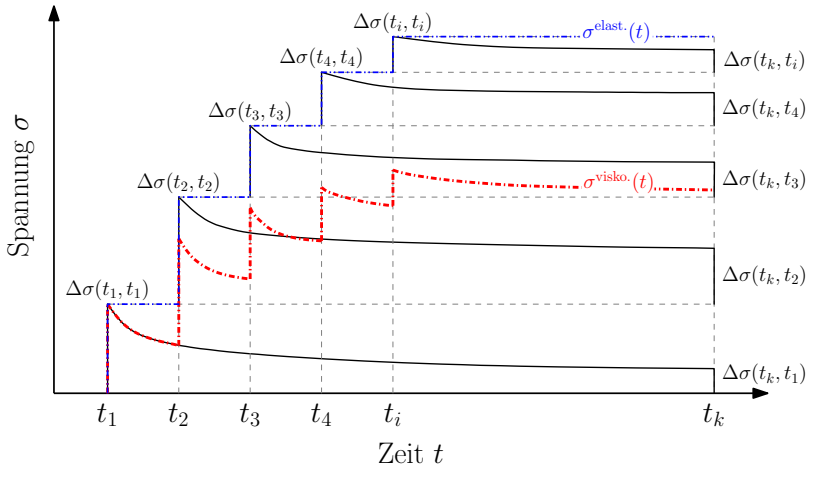


Abbildung 5.5: Superposition der Zwangszustände in erhärtendem Beton mit zunehmender Steifigkeit, hervorgerufen durch Temperaturänderung (schematische Darstellung nach [Nietner et al., 2011])

5.4 Entlastung (Spannungsabnahme)

Der Fall der Entlastung tritt ein, wenn ein Spannungsinkrement mit entgegengesetztem Vorzeichen zum globalen Systemspannungszustand auftritt. Voraussetzung dabei ist, dass das entlastende Spannungsinkrement betragsmäßig *kleiner* als der globale Systemspannungszustand ist. Wäre diese Bedingung nicht eingehalten, so würde es sich um den Fall des Spannungsnulldurchgangs handeln.

Zur Ermittlung der globalen elastischen Systemspannungsantwort kann wiederum von Glg. 5.9 ausgegangen werden. Über das neu hinzukommende entlastende Spannungsinkrement darf summiert werden. Bedingt durch das entgegengesetzte Vorzeichen zum bisherigen globalen Systemspannungszustand ergibt sich daraus die Abnahme der elastischen Globalspannung. Das System wird also entlastet.

Zur Ermittlung der globalen viskoelastischen Systemspannungsantwort müssen weitere Überlegungen angestellt werden. Als Ausgangszustand liegt nun ein System vor, welches zu einem beliebigen Zeitpunkt eine Entlastung erfährt. Bis zu diesem Zeitpunkt sind im System n unterschiedliche Spannungsinkremente aufgetreten, welche sich infolge viskoelastischer Eigenschaften (Glg. 5.8 für $k \neq i$)

vermindert haben. Zum Zeitpunkt der Betrachtung ist im System eine Spannungsgeschichte bestehend aus n Spannungsinkrementen vorhanden, die im Vergleich zu den ursprünglich aufgebrachten n initialen Spannungsinkrementen geringer ist.

Diese Spannungsgeschichte wird nun zufolge des entlastenden Spannungsinkrements vermindert. Zur Verminderung der Spannungsgeschichte existieren mehrere Möglichkeiten. [Schlicke und Tue, 2012, S. 4] geben beispielsweise eine gute Näherung an, bei der das entlastende Spannungsinkrement anteilsmäßig auf alle noch vorhandenen Inkremente verteilt wird, wodurch deren Kriechfähigkeit abnimmt und sämtliche Inkremente betragsmäßig geringer „weiterkriechen“ bis sie Null erreichen und so keine Berücksichtigung mehr in der Berechnung finden. Dadurch erhält man hinreichend genaue Ergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit wird von der Überlegung ausgegangen, dass ein wie auch immer geartetes physikalisches System ständig bestrebt ist, das für sich energetisch günstigste Niveau zu erreichen. Das energetisch günstigste Niveau liegt dann vor, wenn die Kriechfähigkeit des Systems – sprich das viskoelastische Potential – ein Minimum hat. Der attraktivste Zustand ist für das System das Gleichgewicht, letztlich der spannungsfreie Zustand. Dieser wird erreicht, wenn durch das entlastende Spannungsinkrement die noch vorhandenen n Inkremente „energetisch günstig“ abgebaut werden. Es muss mit jenem noch vorhandenen Inkrement begonnen werden, welches sich zum jeweiligen Zeitpunkt am energetisch günstigsten Niveau befindet d.h. welches das geringste viskoelastische Potential aufweist. So nimmt dann auch das gesamte viskoelastische Potential ab, was zu einer verminderten Kriechfähigkeit führt. Dies ist beim Fall eines sprunghaften Temperaturrückganges gut zu beobachten: nach dem Temperatursprung erfolgt der Rückgang der Gesamtspannung langsamer als zuvor (s.a. Abschn. 6.3.1). Sollten zwei Inkremente der Spannungsgeschichte zum Entlastungszeitpunkt zufälligerweise dieselbe Größe haben, so wird das ältere der beiden zuerst abgebaut.

Solange ein noch vorhandenes belastendes Inkrement betragsmäßig *kleiner* als das entlastende Inkrement ist, wird das entlastende Inkrement um den Betrag des noch vorhandenen Inkrements reduziert. Dadurch verringert sich das entlastende Inkrement, und das noch vorhandene Inkrement wird zu Null gesetzt. Tritt nun der Fall ein, dass das nun *verringerte* entlastende Inkrement betragsmäßig *kleiner* ist als ein noch vorhandenes Inkrement, so wird das vorhandene Inkrement um das verbleibende verringerte entlastende Inkrement reduziert. Dadurch verringert sich die Kriechfähigkeit (das viskoelastische Potential nimmt ab) des noch vorhandenen, nunmehr verringerten, Inkrements, wodurch dieses wiederum wie oben weiterkriecht.

Dieser beschriebene Vorgang wird für jedes entlastende Spannungsinkrement $\Delta\sigma_i^{\text{entl.}}$ wiederholt; die Ermittlung der globalen viskoelastischen Systemspannungsantwort kann letztendlich über die Summation aus Glg. 5.9 erfolgen. Sämtliche zu summierende noch vorhandene Spannungsinkremente sind dann entweder in ihrer – der Viskoelastizität unterlegenen – ursprünglichen Größe vorhanden, zu Null gesetzt oder vermindert worden.

In eine Formel zusammengefasst gilt demnach für ein aus einer Spannungsgeschichte noch vorhandenes Spannungsinkrement $\sigma_i(t_k)$ zu einem beliebigen Betrachtungszeitpunkt t_k der in Glg. 5.10 gegebene Zusammenhang. Zur einfacheren Lesbarkeit ist dabei das Delta des belastenden Spannungsinkrementes aus der Spannungsgeschichte weggelassen worden.

$$\sigma_i(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{und} \quad \Delta\sigma_i^{\text{entl.}} = \Delta\sigma_i^{\text{entl.}} - \sigma_i(t_k) \quad \text{falls } |\sigma_i(t_k)| < \left|\Delta\sigma_i^{\text{entl.}}\right| \\ \sigma_i(t_k) - \Delta\sigma_i^{\text{entl.}} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sonst} \end{cases} \tag{5.10}$$

Der eben beschriebene Fall der Berechnung beim Auftreten eines durch eine Temperaturänderung hervorgerufenen entlastenden Spannungsinkrements ist in Abb. 5.6 schematisch dargestellt. Die elastische Gesamtspannung $\sigma^{\text{elast.}}(t)$ ist als strichdoppelpunktierte blaue Linie, die viskoelastische Gesamtspannung $\sigma^{\text{visko.}}(t)$ als rote strichpunktierte Linie gezeichnet.

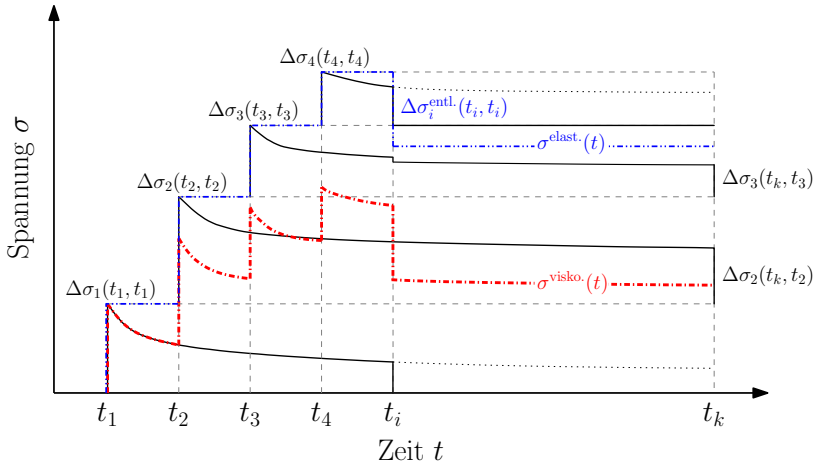


Abbildung 5.6: Superposition der Zwangszustände in erhärtendem Beton mit zunehmender Steifigkeit beim Auftreten eines durch eine Temperaturänderung hervorgerufenen entlastenden Spannungsinkrements (schematische Darstellung)

Für die elastischen Spannungsinkremente, die in Abb. 5.6 aufgetragen sind, gilt: $\Delta\sigma_4(t_4,t_4) < \Delta\sigma_3(t_3,t_3) < \Delta\sigma_1(t_1,t_1) < \Delta\sigma_2(t_2,t_2)$. Bis zum Auftrittszeitpunkt t_i des entlastenden Spannungsinkrements $\Delta\sigma_i^{\text{entl.}}(t_i,t_i)$ haben sich die vorhergehenden Spannungsinkremente aufgrund der Viskoelastizität verringert. Die Reihenfolge der nach der Größe geordneten Elemente zum Zeitpunkt t_i ist dann: $\Delta\sigma_1(t_i,t_1) < \Delta\sigma_4(t_i,t_4) < \Delta\sigma_3(t_i,t_3) < \Delta\sigma_2(t_i,t_2)$.

Soll nun die vorhandene Spannung zum Zeitpunkt t_i berechnet werden, wird mit dem kleinsten noch vorhandenen Spannungsinkrement $\Delta\sigma_1(t_i,t_4)$ begonnen. Die Differenz $\Delta\sigma_i^{\text{entl.}}(t_i,t_i) - \Delta\sigma_1(t_i,t_1)$ aus dem entlastenden und dem kleinsten noch vorhandenen Spannungsinkrement führt auf eine Restspannung, die größer als das nächstgrößere Spannungsinkrement $\Delta\sigma_4(t_i,t_4)$ ist. Wird diese Restspannung um $\Delta\sigma_4(t_i,t_4)$ verringert, so bleibt dann eine Restspannung zurück, die kleiner als das nächstgrößere Spannungsinkrement $\Delta\sigma_3(t_i,t_3)$ ist. Das Spannungsinkrement $\Delta\sigma_3(t_i,t_3)$ wird dann um diese kleine Restspannung vermindert und kriecht dann mit einer infolge der nun geringeren Spannung herabgesetzten Kriechfähigkeit ab dem Zeitpunkt t_i bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t_k weiter. Die beiden bereits „verrechneten“ Spannungsinkremente werden ab t_i zu Null gesetzt. Aufgrund seiner Größe bleibt das Inkrement $\Delta\sigma_2(t_i,t_2)$ unangetastet und kann ungehindert bis zum beliebigen Zeitpunkt t_k weiterkriechen.

5.5 Spannungsnulldurchgang

Zu einem Spannungsnulldurchgang kommt es, wenn das entlastende Spannungsinkrement betragsmäßig *größer* ist, als die zum Auftrittszeitpunkt des Inkrements vorhandene Systemspannung.

Sobald der Nullspannungszustand durchschritten wird, beginnt die Spannungsgeschichte auf der anderen Seite mit entgegengesetztem Vorzeichen erneut. Alles was bisher an Spannung im System vorhanden war hat keine Relevanz mehr für alle weiteren Betrachtungen ab dem Nulldurchgang. Das Erstbelastungsinkrement der nun neu beginnenden Spannungsgeschichte errechnet sich aus der Differenz des entlastenden Spannungsinkrements und der globalen Systemspannung:

$$\sigma_i(t_i) = \sigma^{\text{gesamt}}(t_i) - \Delta\sigma_i^{\text{entl.}} \tag{5.11}$$

5.6 Keine zusätzliche äußere Belastungsänderung

Der Fall „keine zusätzliche äußere Belastungsänderung“ tritt dann ein, wenn das System keine Spannungsänderung infolge äußerer Verformungseinwirkungen erfährt (konstante Temperatur, kein Schwinden). Es kommt also zu keinem neuen Spannungsinkrement infolge „externer“ Einwirkung. Allerdings werden sämtliche im System vorhandenen Spannungsinkremente ungehindert weiterkriechen, bis es zu einer erneuten Spannungsänderung kommt.

6 Wirkungsweise des Berechnungsmodells anhand ausgewählter Verformungseinwirkungen

6.1 Vorbemerkungen

Dieses Kapitel zeigt die Wirkungsweise des Berechnungsmodells anhand ausgewählter Verformungseinwirkungen. Hierfür wird ein teilweise gezwängter Betonstab sowohl im Erhärtungszeitraum wie auch im erhärteten Zustand betrachtet. Damit wird die Funktionsweise des Ansatzes für den gesamten Lebenszyklus eines Bauteils gezeigt.

Die Materialeigenschaft des Betons sowie der Zwängungsgrad des Bauteils entsprechen hierbei stets der im nachfolgenden Kapitel gezeigten Versuchsnachrechnung. Die Temperatureinwirkungen hingegen sind theoretisch. Abb. 6.1 zeigt das betrachtete System schematisch.

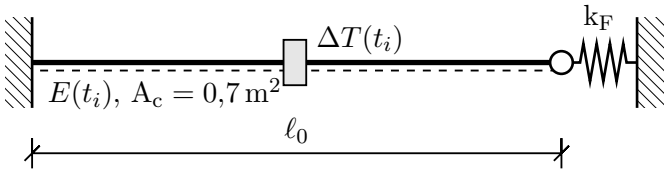
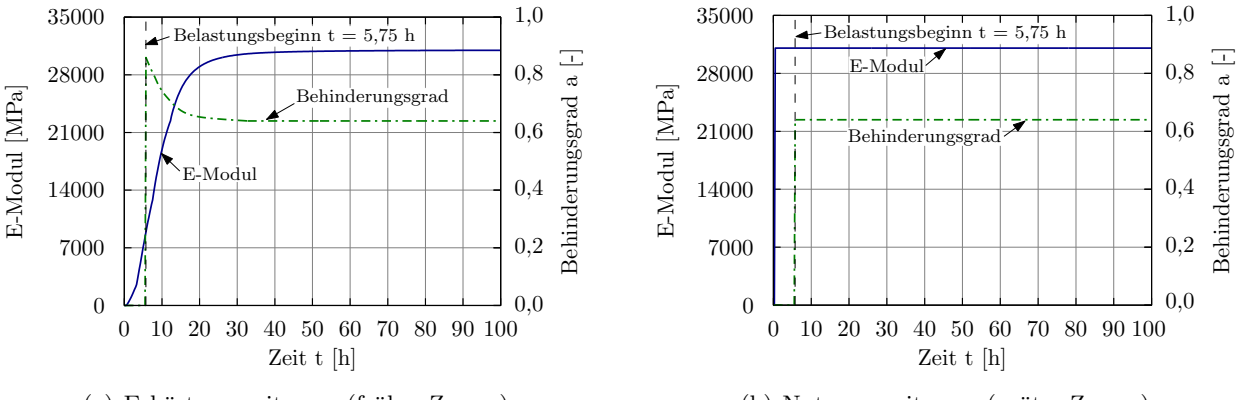


Abbildung 6.1: Betrachtetes System

Wie bereits erwähnt, wird nachfolgend der Zeitraum der Betonerhärtung (früher Zwang) und auch der Nutzungszeitraum (später Zwang) betrachtet. Beide Szenarien unterscheiden sich hierbei nicht nur durch den hinterlegten E-Modul, sondern auch durch den Behinderungsgrad, der davon beeinflusst wird. Abb. 6.2 verdeutlicht dies.



(a) Erhärtungszeitraum (früher Zwang)

(b) Nutzungszeitraum (später Zwang)

Abbildung 6.2: E-Modul und Behinderungsgrad für die betrachteten Szenarien

Aufgrund der Kopplung von Temperatur im Bauteil und Festigkeitsentwicklung des Betons ist für jedes Temperaturszenario im Erhärtungszeitraum eine eigene Steifigkeitsentwicklung sowie die Er-

mittlung des Behinderungsgrads seperat berechnet worden. Da diese Betrachtung nur die Wirkungsweise des Modells zeigt, wurde auf eine explizite Abbildung von Schwindeinwirkungen verzichtet. Generell können diese aber als zusäztliche Temperatureinwirkung integriert werden. Einer Unterscheidung zwischen Druck- und Zugkriechen wird ebenfalls nicht vorgenommen. In Tab. 6.1 sind die Parameter der nachstehenden Berechnungen angegeben. Diese bleiben unverändert – variiert wird, wie erwähnt, lediglich die Temperatureinwirkung.

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der wichtigsten Berechnungsparameter

	Parameter	**Formelzeichen**	**Größe**	**Einheit**
	Bezugszeitraum	t_0	24	[h]
Geometrie	Versuchskörperlänge	ℓ_0	3,70	[m]
	Bruttoquerschnittsfläche	A_c	700	[cm^2]
	Der dem Trocknen ausgesetzter Umfang	U	1,00	[m]
	Rahmensteifigkeit	k_F	1050000	[kN/m]
Materialeigenschaften	Kritischer Hydratationsgrad	α_0	0,13	–
	Effektives Betonalter zu Beginn	t_{eff}	3	[h]
	Exponent der Steifigkeitsentwicklung	η_E	1,4	–
	Temperaturausdehnungskoeffizient von Beton	α_T	10^{-5}	–
	Faktor zur Berücksichtigung der Zementart (Zementklasse N)	α	0	–
	Würfeldruckfestigkeit	$f_{ck,cube}$	28,88	[MPa]
	28-Tages-E-Modul (aus ÖNORM EN 1992-1-1, 2009)	E_{28}	31000	[MPa]
	Theoretischer Endwert des E-Moduls	E_∞	31053	[MPa]
Viskoelastizität	Zeitpunkt der Erstbelastung (reale Zeit)	t_0	5,75	[h]
	Erster Folgezeitpunkt	t_1	6,00	[h]
	Umgebungsluftfeuchtigkeit	RH	50	[%]
	Einflussfaktor der Geometrie	h_0	140	[m]
	Einflussfaktor der Betondruckfestigkeit	$\beta(f_{ck,cube})$	3,126	–
	Einflussfaktor der Luftfeuchtigkeit	φ_{RH}	1,963	–
	Einflussfaktor des Erstbelastungszeitpunkts	$\beta(t_0)$	1,089	–
	Faktor	β_H	460,021	–
	Zeitfaktor	$\beta_c(t_1,t_0)$	0,118	–
	Exponent zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs	–	0,20	–
	Faktor zur (vielfachen) Berücksichtigung des autogenen Schwindens	–	1,00	–
	Faktor zur Anpassung der Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang der Globalspannung	–	0,75	–

Auf den folgenden Seiten sind die angesetzten Temperatureinwirkungen und die Berechnungsergebnisse dargestellt. Bei den Temperatureinwirkungen handelt es sich um Verläufe, die von (teilw. zusammengesetzten) stetigen Funktionen beschrieben werden, u.a. um die Auswirkung auf den recht sensiblen Verlauf des viskoelastischen Potentials zu zeigen.

Mit Ausnahme des letzten Beispiels haben sämtliche Temperatureinwirkungen eine Ausgangstemperatur von 20 °C und ihr Temperaturmaximum von 70 °C ist nach 30 (realen) Stunden erreicht. Die weiteren Eigenschaften werden bei der jeweiligen Einwirkung näher besprochen.

Berechnet wurden stets die elastische und die viskoelastische Spannungsantwort, die elastische und

die viskoelastische Gesamtverformung sowie das viskoelastische Potential. Die jeweiligen Kriechkurven bzw. Kriechinkremente ergeben sich wie in Abb. 5.1 und Abb. 5.3 exemplarisch gezeigt. Bedingt durch die Steifigkeitsentwicklung sowie der Wahl der Schrittweite weichen sie davon ab. Sie werden nicht gesondert dargestellt.

Die Kurvenbezeichnung in der nachfolgenden Ergebnisdarstellung ist Abb. 6.4 und Abb. 6.5 zu entnehmen: Eine durchgezogene schwarze Linie kennzeichnet stets das elastische Berechnungsergebnis unter der Annahme eines konstanten E-Moduls. Das viskoelastische Berechnungsergebnis mit Annahme eines konstanten E-Moduls ist als schwarz strichlierte Linie dargestellt. Wird hingegen von einem zeitlich veränderlichen E-Modul ausgegangen, so sind die Linien rot dargestellt. Eine punktierte rote Linie kennzeichnet dabei das elastische und eine strichpunktierte rote Linie das viskoelastische Berechnungsergebnis. Wie in Abb. 6.6 wird das viskoelastische Potential unter der Verwendung eines konstanten E-Moduls als schwarze durchgezogene Linie verdeutlicht; mit veränderlichem E-Modul ist dieses dunkelgrün strichliert gezeichnet.

6.2 Temperatureinwirkung mit konstantem Verlauf ab dem Maximum

Zunächst wird eine einstufige Temperaturänderung gezeigt, um den Spannungsabbau zufolge Viskoelastizität zeigen zu können. Ab dem Temperatursprung gibt es keine Änderung mehr in der Belastung, wohl aber in den Berechnungsergebnissen.

6.2.1 Einstufige Temperaturänderung

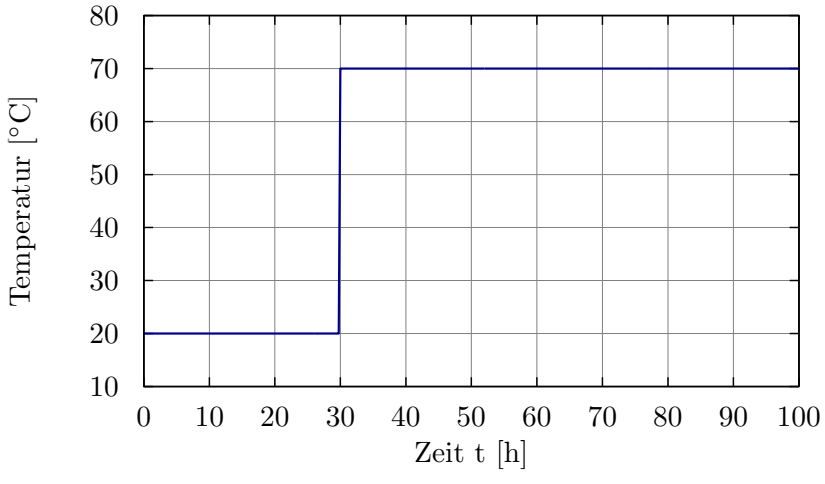


Abbildung 6.3: Einstufige Temperatureinwirkung

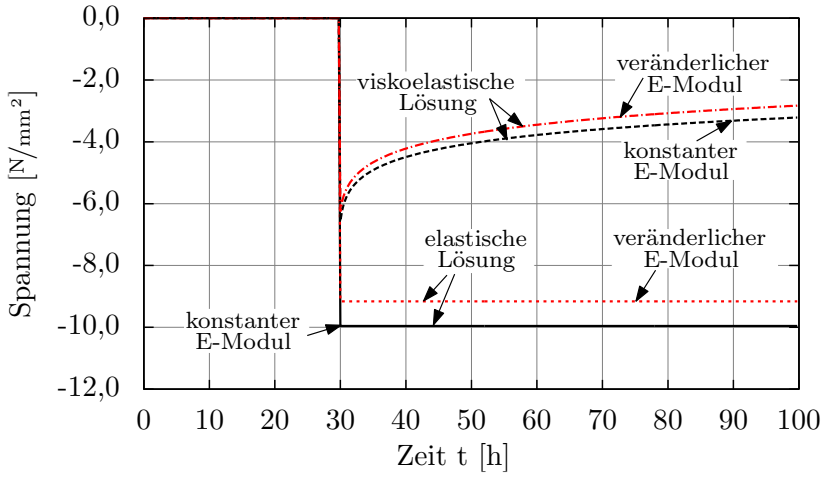


Abbildung 6.4: Spannungen bei einstufiger Temperatureinwirkung

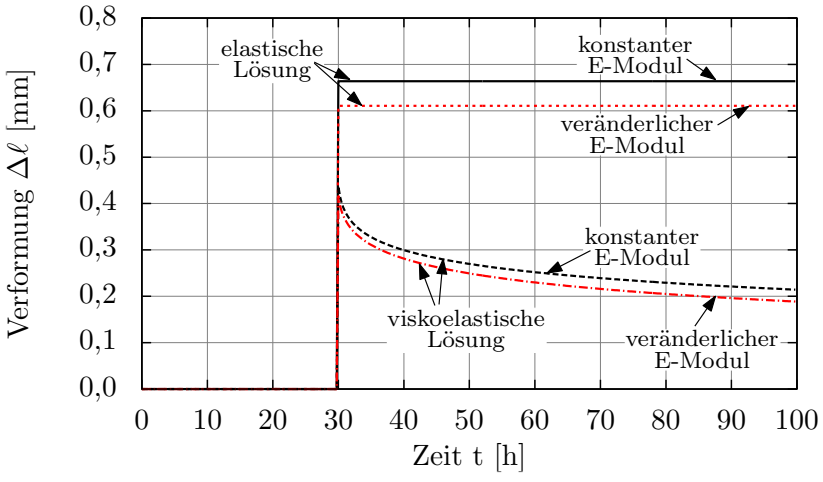


Abbildung 6.5: Verformungsergebnis bei einstufiger Temperatureinwirkung

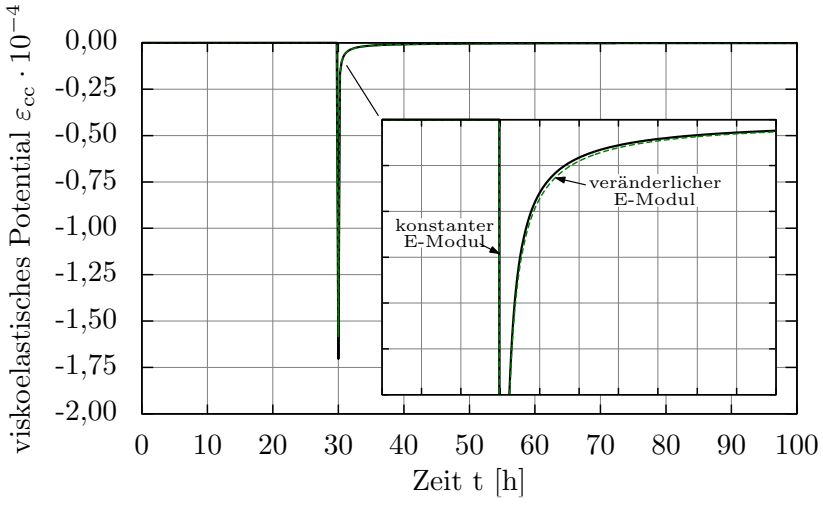


Abbildung 6.6: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei einstufiger Temperatureinwirkung

Für die einstufige Temperaturänderung wurde ein verhältnismäßig großes Temperaturinkrement bei $t = 30\,\text{h}$ als ein Sprung von 20 °C auf 70 °C betrachtet. Diese sprunghafte Temperaturzunahme führt zu einer sprunghaften Spannungsantwort. Wird die Viskoelastizität des jungen Betons berücksichtigt, so beträgt die Spannungsantwort gegenüber der elastischen Lösung ca. 60 %. Wird die Temperatur anschließend konstant gehalten, so kommt es infolge Viskoelastizität zu einem weiteren Rückgang der Spannung. Aufgrund des Zusammenhangs von Spannung und Dehnung in teilweise gezwängten Systemen verhält sich die Verformungsantwort des Betonkörpers (Abb. 6.5) affin zur Spannung.

Das viskoelastische Potential hat sein Maximum zum Zeitpunkt der einsetztenden Temperaturbelastung und fällt anschließend relativ rasch ab. Das belastende Inkrement ist hier relativ groß, dadurch ist auch ein anfänglich hohes viskoelastisches Potential vorhanden. Je höher es ist, umso stärker ist auch die Kriechfähigkeit. Dazu kommt, dass das erste Belastungsinkrement stets die größten Kriechzahlen mit sich bringt, wodurch der rasche Rückang des viskoelastischen Potentials begünstigt wird.

Der Unterschied zwischen frühem Zwang und spätem Zwang ist in diesem Fall (und in den folgenden Fällen) nicht sehr deutlich, da die punktuelle Temperaturänderung erst auftritt, wenn die

Erhärtung beinahe abgeschlossen ist und sich beide Szenarien somit kaum unterscheiden. Die Auswirkung eines veränderlichen E-Moduls wird in allen Abbildungen deutlich: je höher er (und damit der Behinderungsgrad) ist, umso mehr Spannung ist auch im System vorhanden.

6.2.2 Lineare Temperaturzunahme

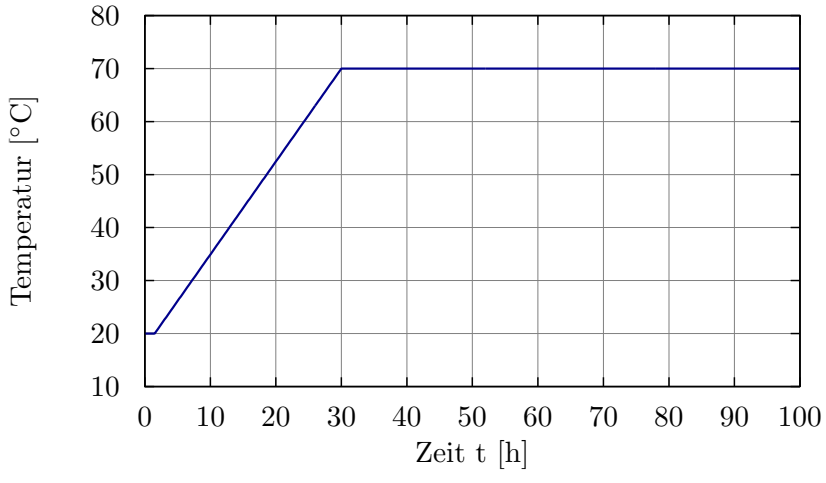


Abbildung 6.7: Lineare Temperatureinwirkung

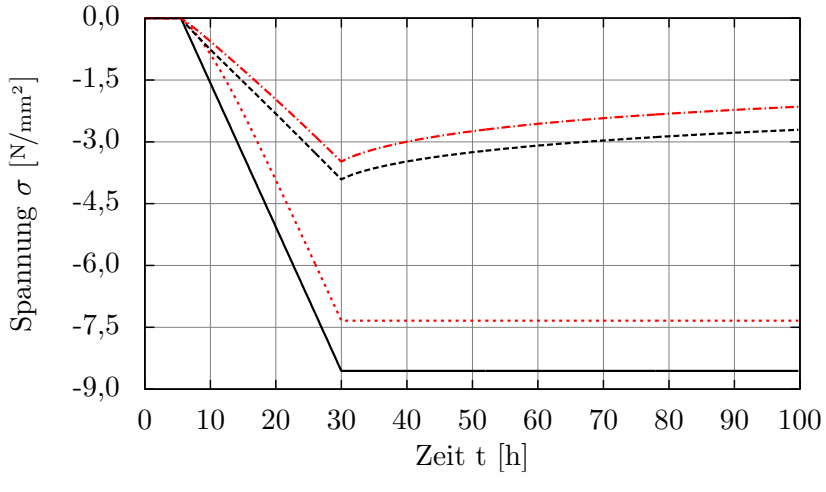


Abbildung 6.8: Spannungsergebnis bei einer linearen Temperatureinwirkung

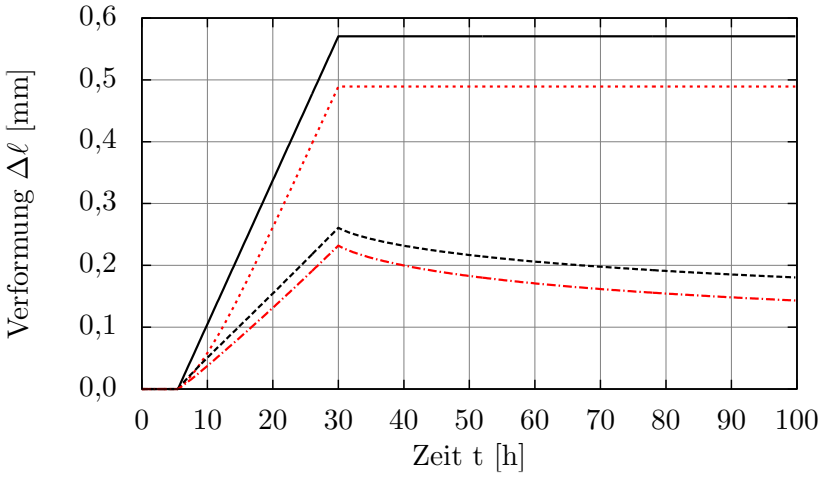


Abbildung 6.9: Verformungsergebnis bei einer linearen Temperatureinwirkung

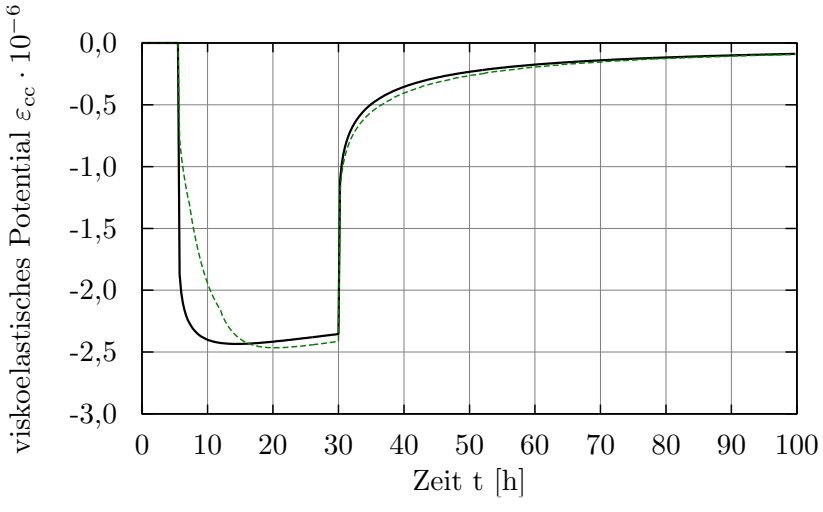


Abbildung 6.10: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei einer linearen Temperatureinwirkung

Abb. 6.7 zeigt eine zunächst linear verlaufende Temperatureinwirkung, die beim Erreichen des Temperaturmaximums konstant bleibt. Im Bereich $1{,}75\,\text{h} \leq t < 31\,\text{h}$ steigt die Temperatur kontinuierlich mit $\Delta\text{T} \approx 0{,}439\,^{\circ}\text{C}$ alle 0,25 Stunden an. In Glg. 6.1 ist die der Einwirkung zugrundeliegende Funktionsgleichung angegeben.

$$T_{\text{lin}}(t) = \begin{cases} 20 & \text{falls} \quad 0 \leq t < 1{,}75 \\ \frac{25}{14{,}25} \cdot t + \left(70 - 30 \cdot \frac{25}{14{,}25}\right) & \text{falls} \quad 1{,}75 \leq t \leq 30 \\ 70 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.1}$$

Das Spannungs- und Verformungsergebnis (Abb. 6.8 und Abb. 6.9) ist bei der Annahme einer linearen Temperatursteigerung zu erwarten: wird die Temperatur gesteigert, so führt dies zu einer Spannungszunahme. Die Verformung ist affin dazu. Das Maximum der beider Ergebnisse fällt mit dem Temperaturmaximum zusammen und tritt bei $t = 30\,\text{h}$ auf.

Am Betrachtungsende verbleibt (viskoelastisch) weniger Spannung im System, als beim Fall der einstufigen Belastung, obwohl zum selben Zeitpunkt $t = 30\,\text{h}$ dasselbe Temperaturniveau vorliegt (s. Abb. 6.8). Dies ist damit zu begründen, dass es infolge der linearen Temperatursteigerung schon

früher Spannungsinkrementen kommt, welche der Viskoelastizität unterliegen und demzufolge abnehmen. Zum Zeitpunkt $t = 30\,\mathrm{h}$ liegt daher bereits eine geringere Globalspannung vor. Aufgrund der geringeren Spannung ist das in Abb. 6.8 dargestellte viskoelastische Potential ebenfalls etwas kleiner, wobei sich dessen Verlauf als interessant erweist:

In Abb. 6.10 ist erkennbar, dass das Maximum des viskoelastischen Potentials nicht mit dem Temperaturmaximum zusammenfällt. Dies ist auf den Rückgang des jeweiligen mit den Belastungsstufen verbundenen einzelnen Potentialinkrements zurückzuführen. Das Kriechvermögen am Zeitpunkt der Maximaltemperatur ist demzufolge geringer als beim vorhergehenden Beispiel, da das gesamte viskoelastische Potential aufgrund der zurückgehenden Inkremente kleiner ist. Gibt es keine weiteren Temperaturinkremente (ab $t = 30\,\mathrm{h}$), so fällt es ebenfalls relativ rasch ab.

6.2.3 Sigmoidale Temperaturzunahme

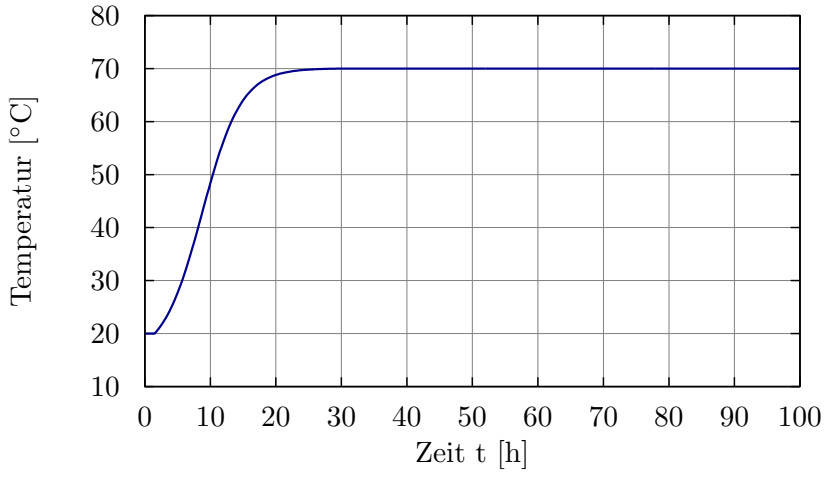


Abbildung 6.11: Sigmoidale Temperatureinwirkung

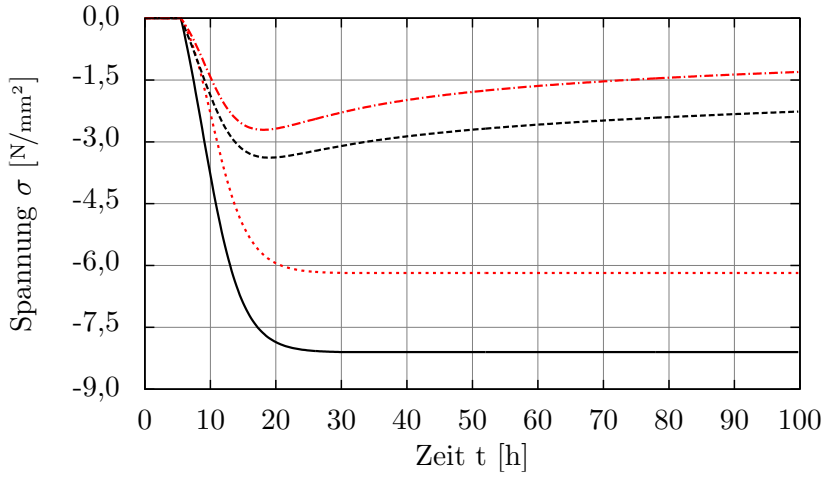


Abbildung 6.12: Spannungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturanstieg

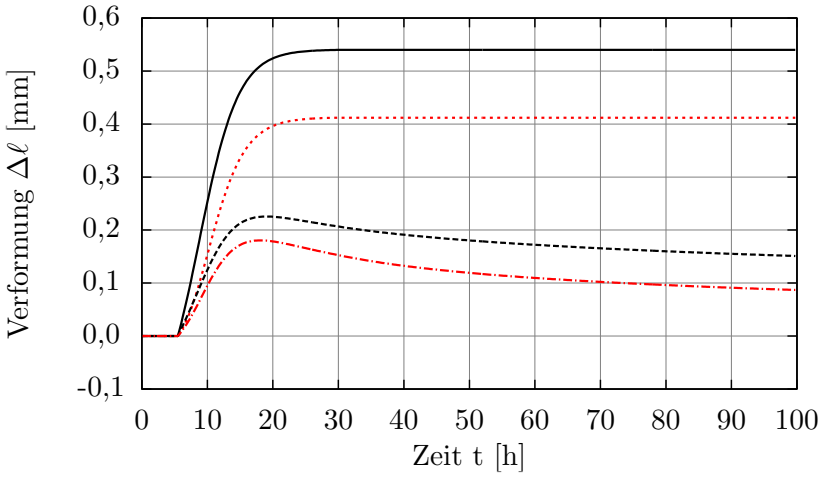


Abbildung 6.13: Verformungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturanstieg

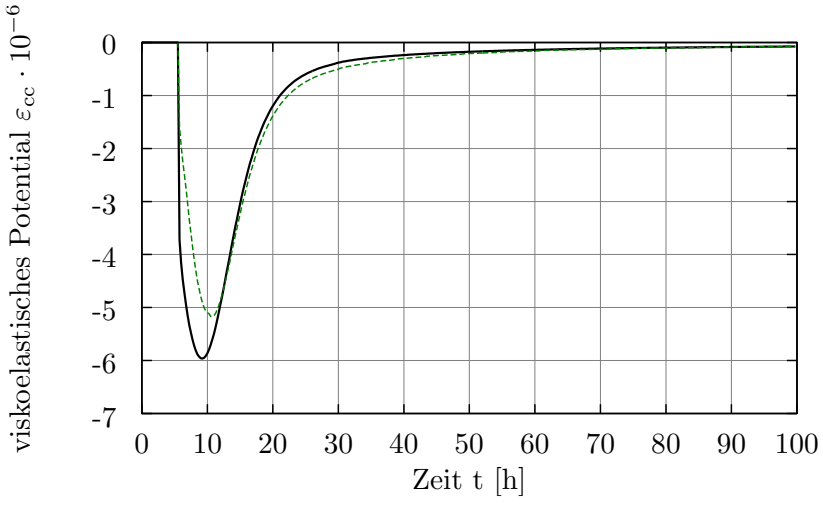


Abbildung 6.14: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei sigmoidalem Temperaturanstieg

In Abb. 6.11 ist ein Temperaturverlauf dargestellt, dessen Form jener der Versuchsnachrechnung nahekommen soll. Zurückgeriffen wurde dabei auf eine so genannte *Sigmoidfunktion*, welche im Bereich $1{,}75\,\text{h} \leq t < 31\,\text{h}$ die in Abb. 6.11 aufgetragenen Werte liefert. Glg. 6.2 ist die zum Graphen gehörende Funktion.

$$T_{\text{sig}}(t) = \begin{cases} 20 & \text{falls} \quad 0 \leq t < 1{,}75 \\ \underbrace{15{,}5 + \dfrac{70 - 15{,}5}{1 + \exp\left[\frac{-(t-1{,}75+7)}{3}\right]}}_{\overline{T_{\text{sig}}}(t)} + (70 - \overline{T_{\text{sig}}}(29{,}75)) & \text{falls} \quad 1{,}75 \leq t < 30 \\ 70 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.2}$$

Bei der Darstellung des Verlaufs der Gesamtspannung in Abb. 6.12 bzw. -verformung in Abb. 6.13 ist ein deutlicher Unterschied zu erkennen, jenachdem ob ein konstanter oder veränderlicher E-Modul unterstellt wird. In der elastischen Lösung zeigt sich das Spannungsmaximum einhergehend zur Temperatureinwirkung beim Temperaturmaximum. Interessant ist nun die festzustellende Tatsache, dass das Maximum der viskoelastischen Lösung schon viel früher auftritt, als es das Temperaturmaximum vermuten ließe.

Dies ist vor allem mit dem Temperaturzuwachs zu begründen, welcher sich im Falle der Sigmoidfunktion ändert: Ab $t \approx 10\,\mathrm{h}$ führt jedes weitere Temperaturinkrement zu einem geringeren Zuwachs der Spannung, da die Kriechverformung des vorhergehenden Inkrements zu diesem Zeitpunkt nahezu gleich der Verformung aus der Temperatureinwirkung des aktuellen Inkrements ist. Wenn der Fall eintritt, dass jedes weitere Temperaturinkrement zu einer Temperaturdehnung führt, die geringer als die jeweilige vorhergehende Kriechdehnung ist, so nimmt dann die Gesamtdehnung und damit die Spannung im System ab, obwohl sich das System noch unter Belastung befindet.

Bei einer linearen Temperatureinwirkung wächst die Temperatur hingegen immer im selben Maße an, wodurch auch das viskoelastische Potential kontinuierlich steigt. Jedes weitere Inkrement wirkt dessen Rückgang entgegen. – Der Verlauf des viskoelastischen Potentials in Abb. 6.14 zeigt, dass dieses bereits in der Belastungsphase merklich zurückgeht, da die Zunahme der Temperatureinwirkung und damit der -dehnung mit fortschreitender Zeit abnimmt. Würde die Temperatur im selben Maße weiter steigen, so würden die daraus resultierenden zusätzlichen Temperaturdehnungen dem Abbau des viskoelatsischen Potentials entgegen wirken und wie in Abb. 6.10 zu einem geringeren Rückgang desselben führen.

Ist der Zeitpunkt der Temperaturkonstanz erreicht, so wird das System wiederum „sich selbst“ überlassen, was unweigerlich zur bereits bekannten Verformungs- und Spannungsabnahme aufgrund der viskoelastischen Eigenschaften führt.

6.3 Temperatureinwirkung mit Rückgang

Für die im folgenden gezeigten Beispiele ist bis zum Temperaturrückgang stets dieselbe Temperaturzunahme angenommen worden. Sie wird durch die in Glg. 6.2 gegebene Sigmoidfunktion beschrieben.

6.3.1 Sprunghafter Rückgang ab dem Maximum

Drei kleinere Temperatursprünge

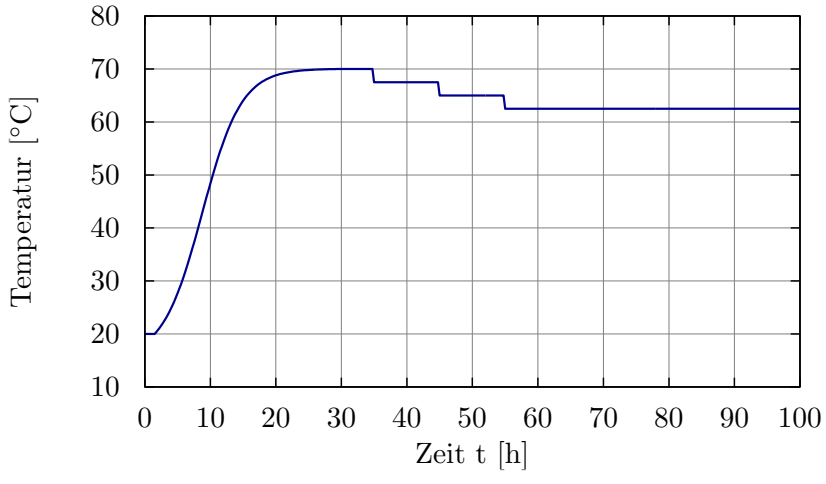


Abbildung 6.15: Sprunghafter 3-stufiger Temperaturrückgang

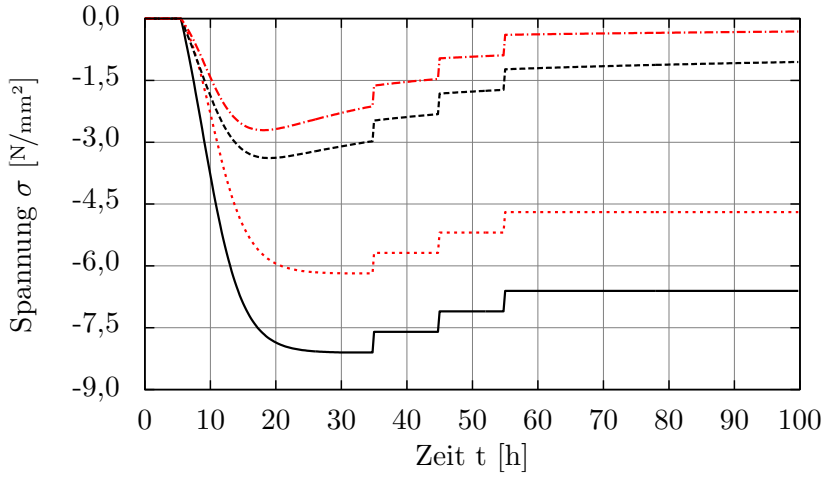


Abbildung 6.16: Spannungsergebnis bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

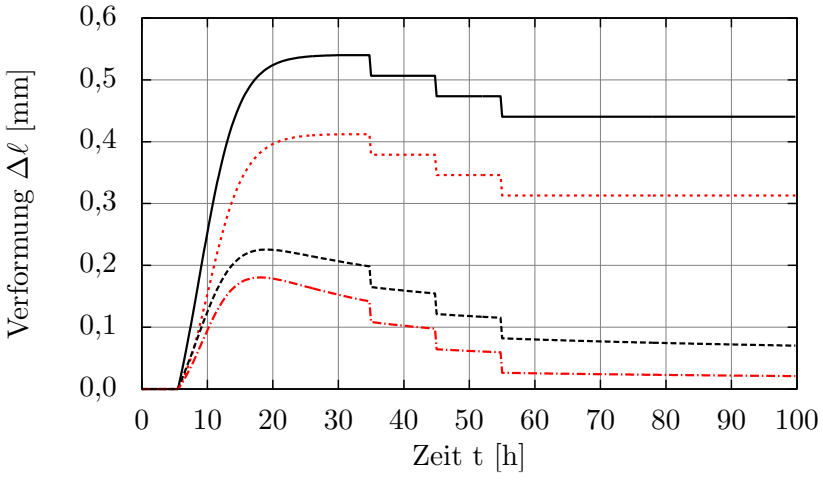


Abbildung 6.17: Verformungsergebnis bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

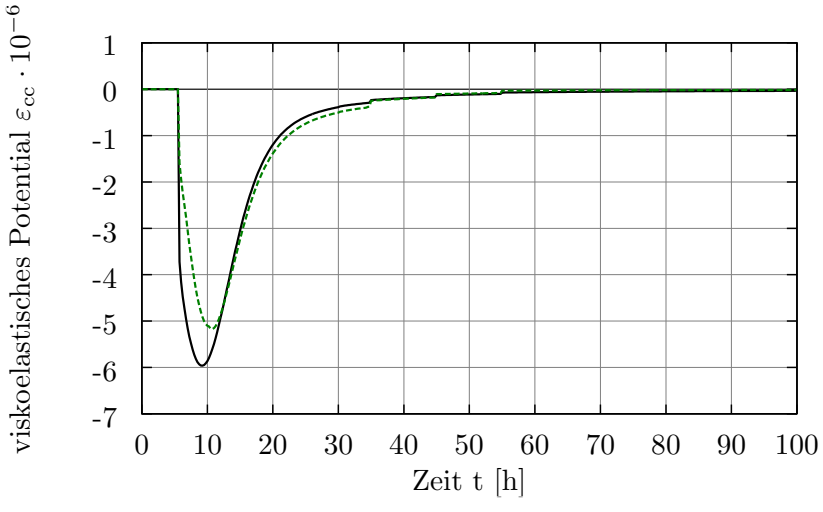


Abbildung 6.18: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

In Abb. 6.15 ist ein Belastungsbeispiel dargestellt, das zu den Zeitpunkten $t = 35\,\text{h}$, $t = 45\,\text{h}$ und $t = 55\,\text{h}$ einen sprunghaften Temperaturrückgang aufweist. Nach einem Temperatursprung bleibt die Temperatur bis zum jeweils folgenden Sprung konstant. Ein Temperatursprung hat hier eine Größe von $\Delta\text{T} = 2{,}5\,^{\circ}\text{C}$. Im Bereich $30\,\text{h} \leq t < 35\,\text{h}$ ist die Temperatur konstant.

Abb. 6.16 zeigt gut, dass eine Spannungsänderung zu einem veränderten Kriechverhalten führt. Vergleicht man die Spannungsstufen mit dem vor $t = 30\,\text{h}$ bzw. nach $t = 55\,\text{h}$ vorhandenen Spannungsverlauf, so ist erkennbar, dass eine höhere Spannung zu einer höheren Kriechverformung führt und damit zu einem stärkeren Spannungsabbau. Je geringer die verbleibende Spannung ist, umso geringer ist das sich daraus ergebende Kriechen und umso länger verbleibt Spannung im System. Die Temperatursprünge zeigen sich auch im viskoelastischen Potential (Abb. 6.18), da dieses definitionsgemäß mit der jeweils im System vorhandene Dehnung zusammenhängt.

Vier größere Temperatursprünge

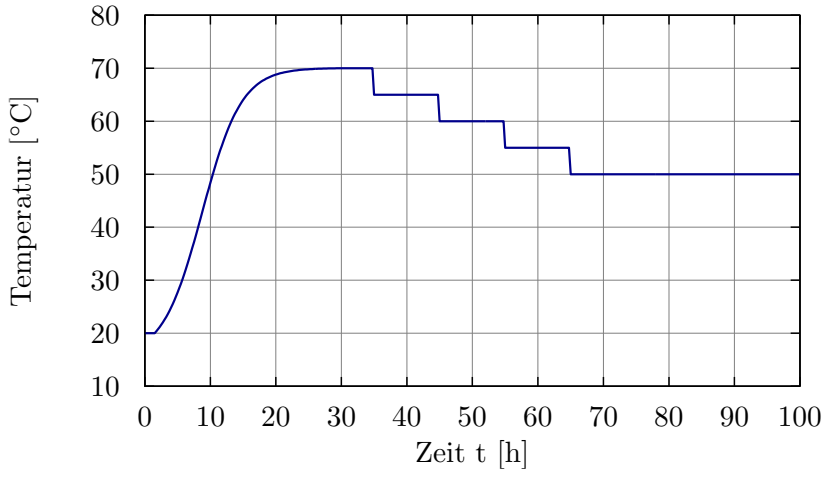


Abbildung 6.19: Sprunghafter 4-stufiger Temperaturrückgang

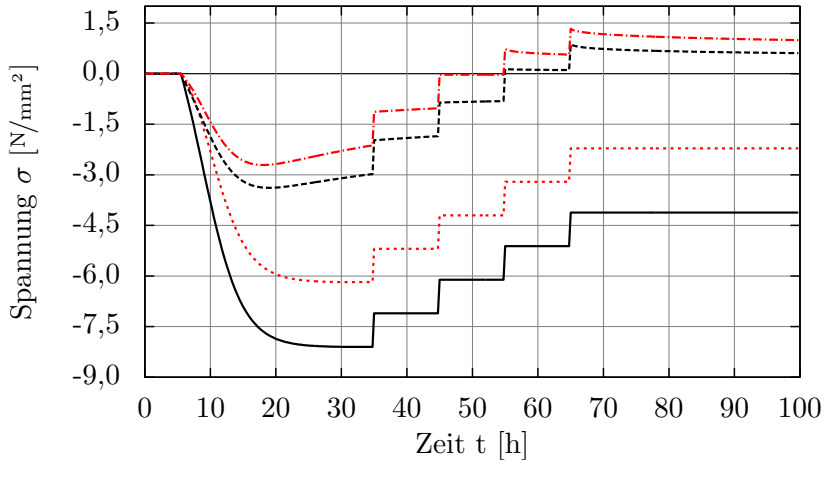


Abbildung 6.20: Spannungsergebnis bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

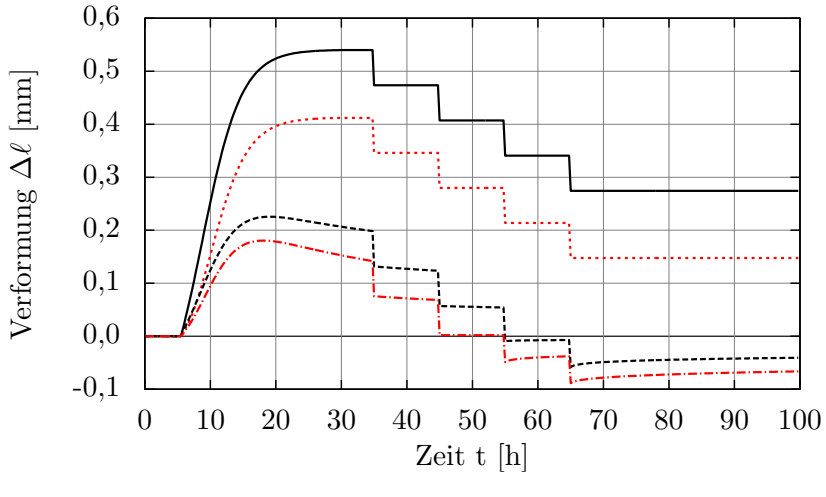


Abbildung 6.21: Verformungsergebnis bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

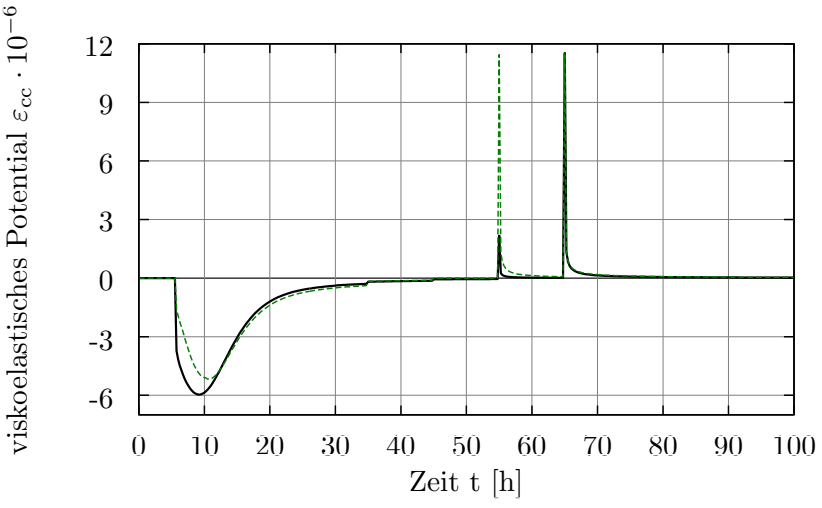


Abbildung 6.22: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang

Abb. 6.19 zeigt ein Belastungsbeispiel, welches dem vorhergehenden sehr ähnlich ist. Zu den Zeitpunkten $t = 35\,\text{h}$, $t = 45\,\text{h}$, $t = 55\,\text{h}$ und $t = 65\,\text{h}$ weist es jeweils einen sprunghaften Temperaturrückgang auf. Nach einem Temperatursprung bleibt die Temperatur bis zum jeweils folgenden Sprung konstant. Ein Temperatursprung hat hier eine Größe von $\Delta\text{T} = 5{,}0\,^{\circ}\text{C}$ und ist somit doppelt so groß wie im vorhergehenden Beispiel. Die Temperaturzunahme wird durch die in Glg. 6.2 gegebene Sigmoidfunktion beschrieben, im Bereich $30\,\text{h} \leq t < 35\,\text{h}$ ist die Temperatur konstant.

Dieses Beispiel soll einen Nulldurchgang der Gesamtspannung während eines Sprunges zeigen, sodass der darauffolgende Sprung auf das System belastend wirkt. Sämtliche bereits beim vorhergehenden Beispiel beschriebene Feststellungen gelten auch hier. Der Unterschied in der Größe des Sprunges des viskoelastischen Potentials bei $t = 55\,\text{h}$ bzw. $t = 65\,\text{h}$ der dargestellten Verläufe ist mit der Größe der vorhandenen Spannung zu begründen. Für einen veränderlichen E-Modul tritt bei $t = 55\,\text{h}$ bereits ein größeres belastendes Spannungsinkrement auf, als es für den konstanten E-Modul der Fall ist.

Besonders wird hier die Notwendigkeit der Berücksichtigung viskoelastischer Effekte deutlich: während man mit einer elastischen Berechnung nur Druckspannungen als Spannungsantwort erhält, erfährt das System eigentlich schon Zugbeanspruchungen. Durch die Berücksichtigung viskoelastischer Effekte könnte nun beispielsweise eine mögliche Rissbildung (z.B. beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit) vorausgesagt und vorbeugende Maßnahmen wie die Anordnung von zusätzlicher rissebeschränkender Bewehrung getroffen werden.

6.3.2 Kontinuierlicher Rückgang ab dem Maximum

In den folgenden Beispielen kommt es in der Einwirkung nach dem Erreichen des Temperaturmaximums zu einem Rückgang. Dieser erfolgt nun nicht wie in den vorhergehenden Beispielen sprunghaft, sondern stetig – linear, parabolisch und sigmoidal.

Linearer Temperaturrückgang

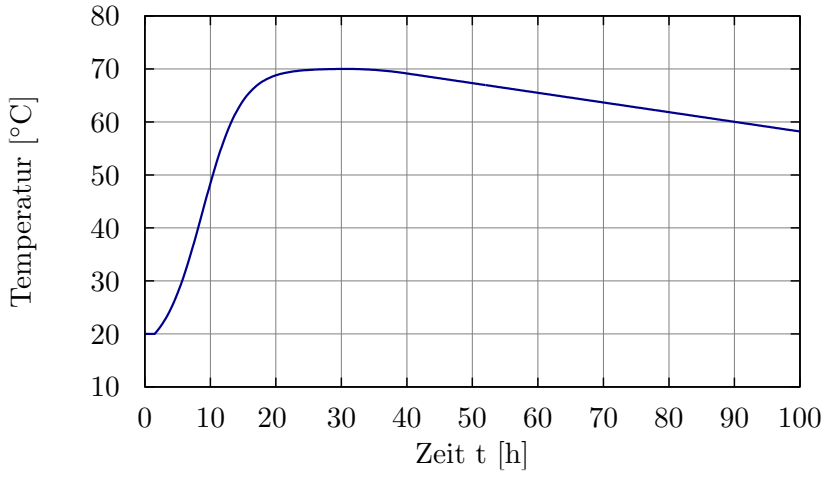


Abbildung 6.23: Linearer Temperaturrückgang

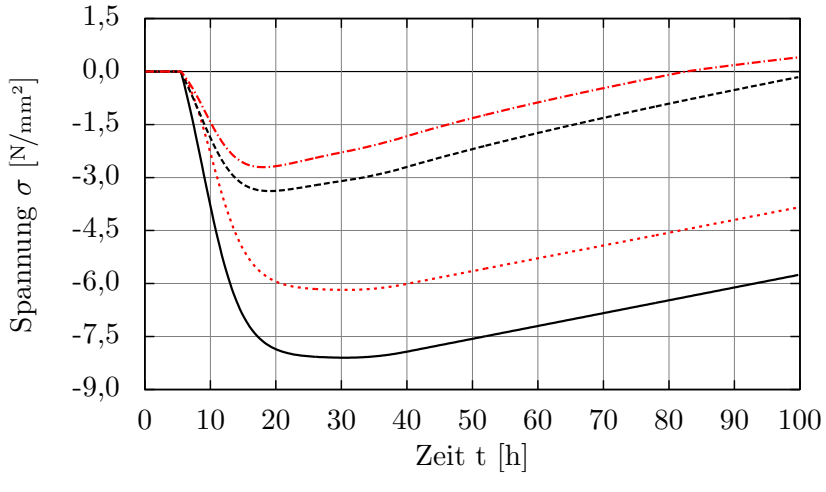


Abbildung 6.24: Spannungsergebnis bei linearem Temperaturrückgang

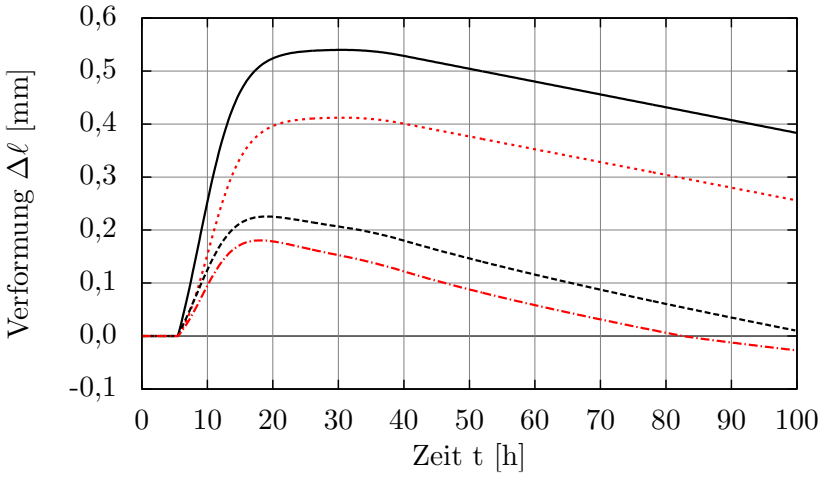


Abbildung 6.25: Verformungsergebnis bei linearem Temperaturrückgang

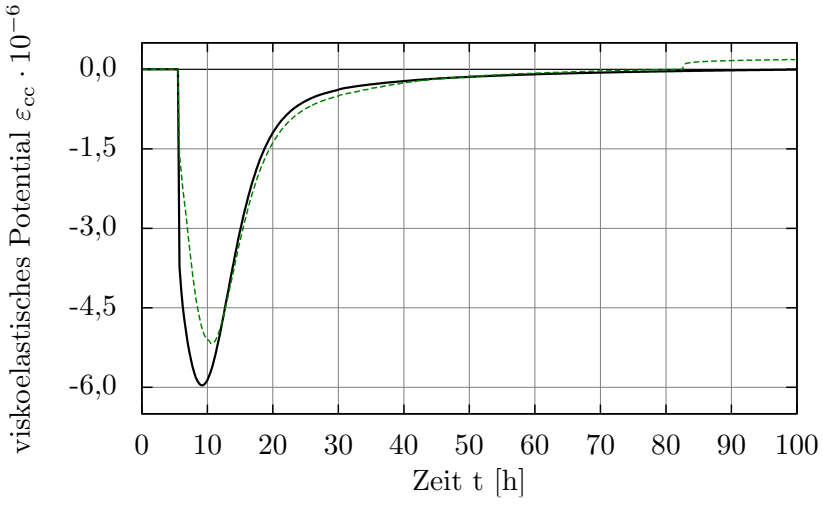


Abbildung 6.26: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei linearem Temperaturrückgang

Der in Abb. 6.23 dargestellte Temperaturverlauf setzt sich ab dem Zeitpunkt des Temperaturrückganges bei $t = 31\,\text{h}$ (= erstes Temperaturdekrement) aus einem Parabelstück als Übergangsbogen und einer linearen Funktion zusammen. Das Parabelstück wurde eingeführt, um eine möglichst kontinuierliche Temperatureinwirkung ohne Knicke unterstellen zu können. Die Funktion, die diesen Verlauf beschreibt ist in Glg. 6.3 angegeben.

$$T(t_i) = \begin{cases} T_{\text{sig}}(t_i) & \text{falls} \quad 0 \leq t_i < 30 \\ 70 & \text{falls} \quad 30 \leq t_i < 30{,}75 \\ 70 - 0{,}01 \cdot (t_i - 30{,}75)^2 & \text{falls} \quad 30{,}75 \leq t_i \leq 40 \\ T(t_{i-1}) - \left[T(t_{i-2}) - T(t_{i-1})\right] & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.3}$$

Der vor allem in der viskoelastischen Lösung sichtbare, im Bereich $20\,\text{h} < t \leq 40\,\text{h}$ (Abb. 6.24) auftretende, „Knick“ stammt von dem Temperaturplateau bzw. dem darauffolgenden parabelförmigen Übergangsbogen. Ein kontinuierlicherer Verlauf hätte sich aus der Verwendung anderer Funktionen (z.B. auf Klothoidenbasis) zur Beschreibung der Temperatureinwirkung bzw. aus dem Verzicht der Einführung eines Temperaturplateaus ergeben.

Quadratischer Temperaturrückgang

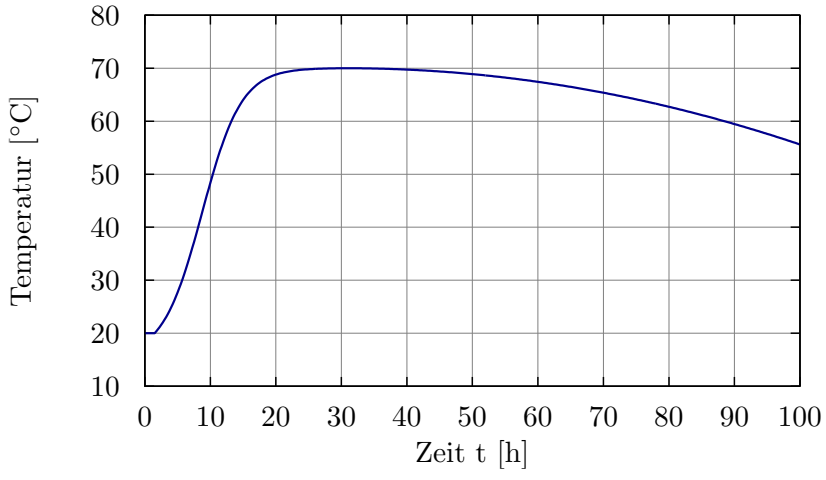


Abbildung 6.27: Parabolischer Temperaturrückgang

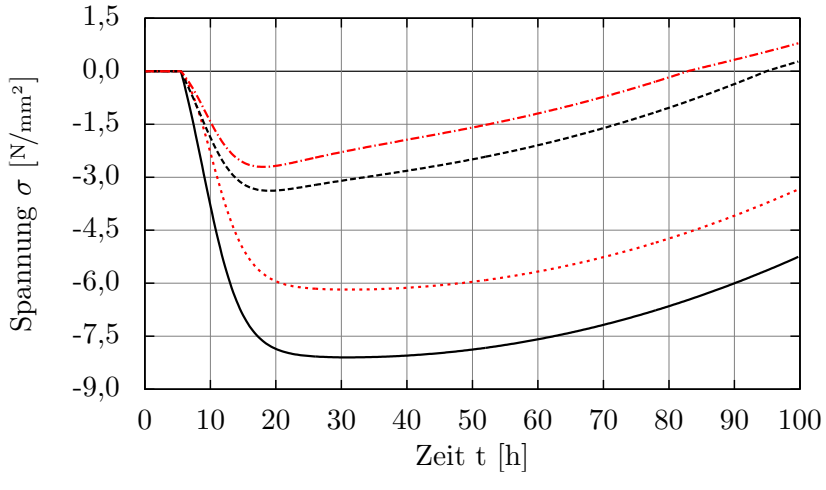


Abbildung 6.28: Spannungsergebnis bei parabolischem Temperaturrückgang

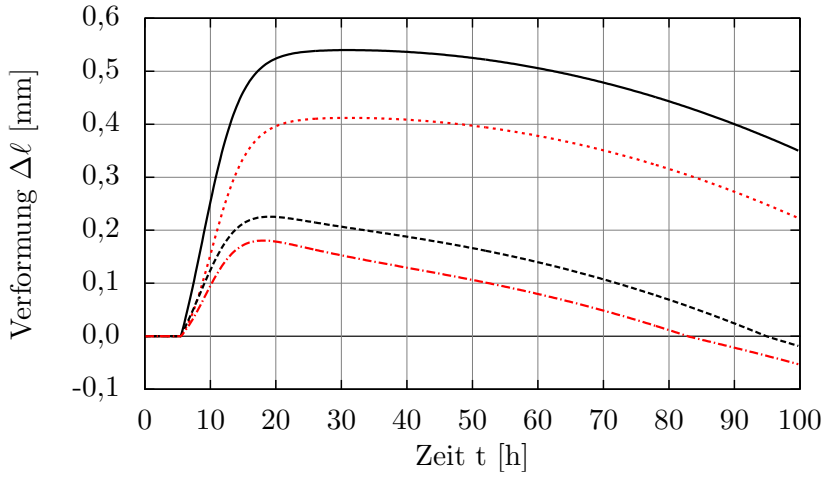


Abbildung 6.29: Verformungsergebnis bei parabolischem Temperaturrückgang

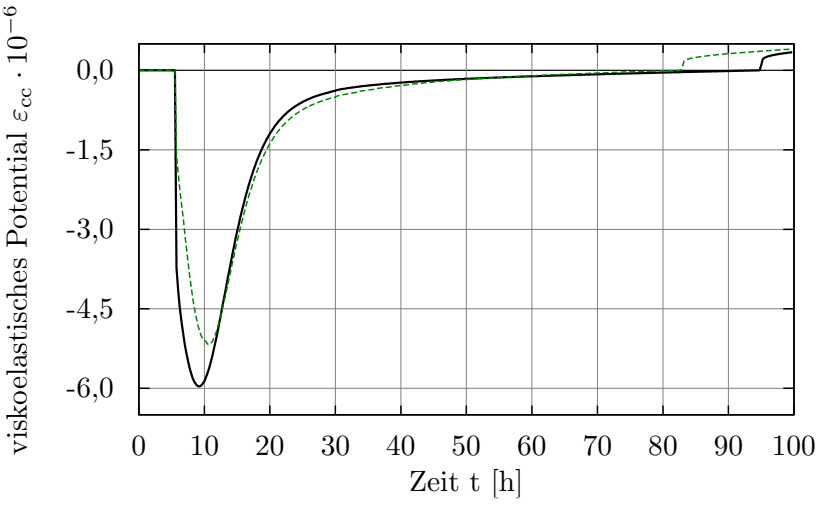


Abbildung 6.30: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei parabolischem Temperaturrückgang

In Abb. 6.27 ist ein Temperaturverlauf dargestellt, der ab $t = 31\,\mathrm{h}$ (= erstes Temperaturdekrement) quadratisch abnimmt. Die anfängliche Sigmoidfunktion geht dann vom Plateau des Spannungsmaximums in einen konvexen Parabelast über. In Glg. 6.4 ist die Gleichung dieser Temperatureinwirkung angegeben.

$$T(t) = \begin{cases} T_{\mathrm{sig}}(t) & \text{falls} \quad 0 \leq t < 30 \\ 70 & \text{falls} \quad 30 \leq t < 30{,}75 \\ 70 - 0{,}003 \cdot (t - 30{,}75)^2 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.4}$$

Der in Abb. 6.28 im Bereich $t = 20\,\mathrm{h} < t \leq 40\,\mathrm{h}$ sichtbare „Knick“ (eigentlich eine linksgekrümmte Kurve, die, um zur später folgenden Rechtskrümmung zu gelangen, bei ca. $t = 30\,\mathrm{h}$ einen Wendepunkt besitzt) ergibt sich wiederum aus dem vorhandenen Temperaturplateau.

Sigmoidaler Temperaturrückgang

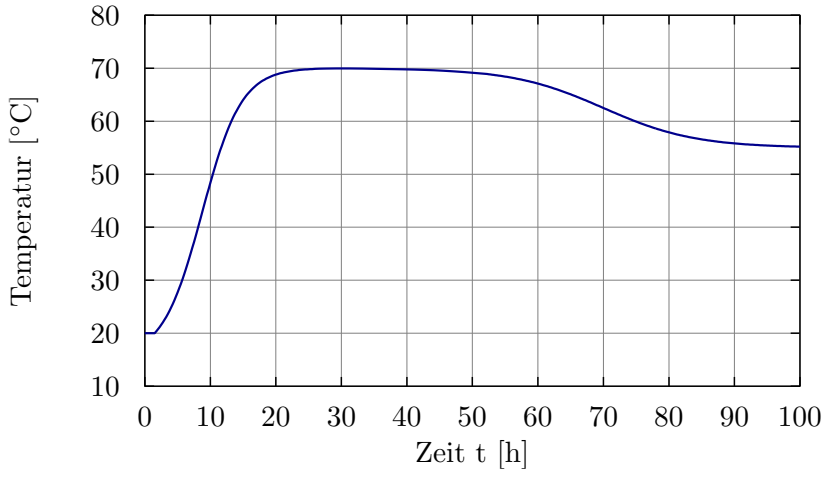


Abbildung 6.31: Sigmoidaler Spannungsrückgang

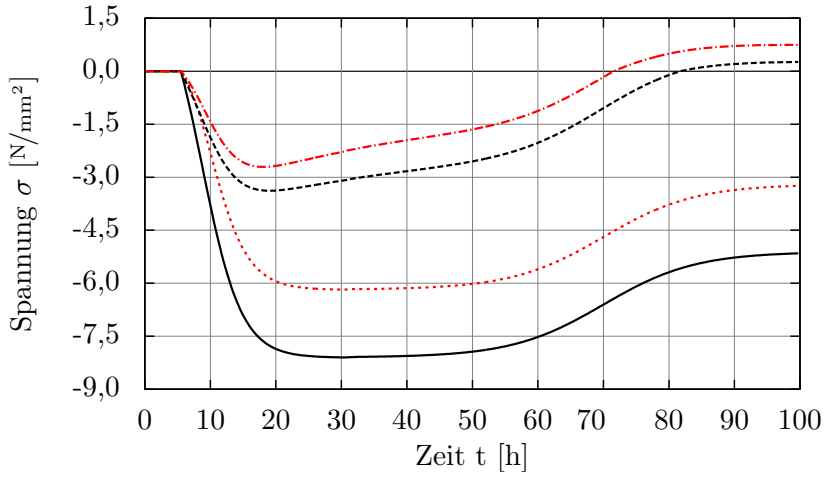


Abbildung 6.32: Spannungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturrückgang

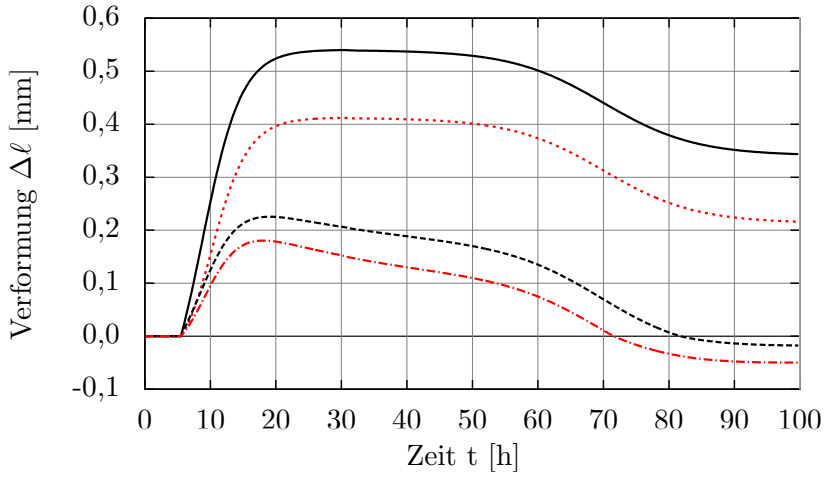


Abbildung 6.33: Verformungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturrückgang

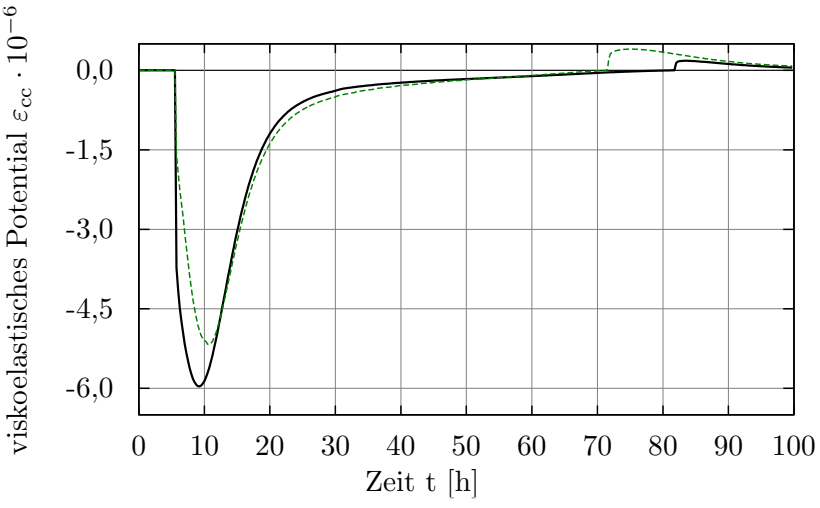


Abbildung 6.34: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei sigmoidalem Temperaturrückgang

Abb. 6.31 zeigt eine weitere Temperatureinwirkung. Diese setzt sich aus zwei Sigmoidfunktionen zusammen, die sich nur in der Wahl der Parameter unterscheiden, aber auf derselben Funktion basieren. In Glg. 6.5 ist die dieser Belastungsform zugrundeliegende Funktion angegeben.

$$T(t) = \begin{cases} T_{\text{sig}}(t) & \text{falls} \quad 0 \leq t < 30 \\ 70 & \text{falls} \quad 30 \leq t \leq 30{,}75 \\ 70 + \frac{55-70}{1+\exp\left[\frac{(-t+70)}{7}\right]} & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.5}$$

Der in den viskoelastischen Lösungen in Abb. 6.32 und Abb. 6.33 im Bereich $20\,\text{h} < t \leq 40\,\text{h}$ zu sehende „Bauch“ ist auf die geringe Temperaturzunahme in diesem Bereich zurückzuführen. Es liegt kein ausgeprägtes Temperaturplateau vor, allerdings ist die aus der Temperatureinwirkung resultierende zusätzliche Spannung geringer als die infolge Viskoelastizität abgebaute. Der Rückgang der Temperaturzunahme verstärkt gewissermaßen diesen Effekt, führt jedoch gleichzeitig zu einem verringerten Kriechvermögen.

6.4 Einfluss von Unstetigkeiten in der Temperaturänderung

Nachfolgend wird die Auswirkung von unsteten Temperaturverläufen gezeigt. Dies ist erforderlich, um die in der Realität zu beobachtenden Temperaturänderungen, die oft auch kleinste Sprünge aufweisen, rechnerisch richtig erfassen zu können.

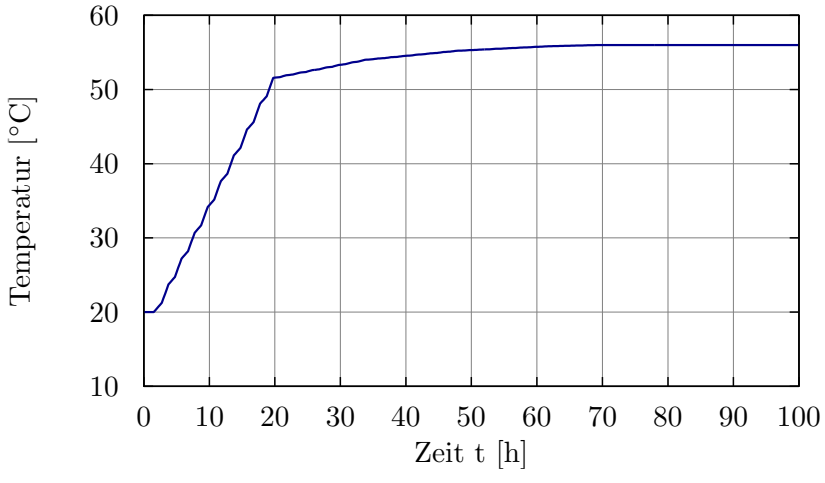


Abbildung 6.35: Unstetiger Temperaturanstieg

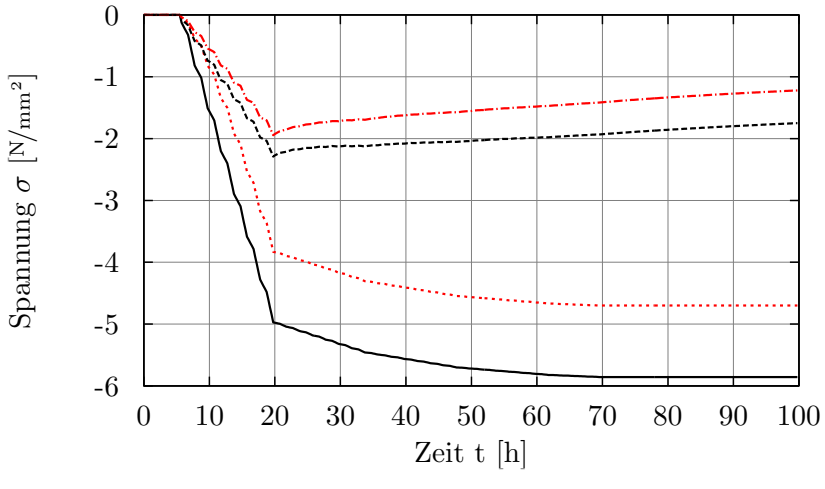


Abbildung 6.36: Spannungsergebnis bei unstetigem Temperaturanstieg

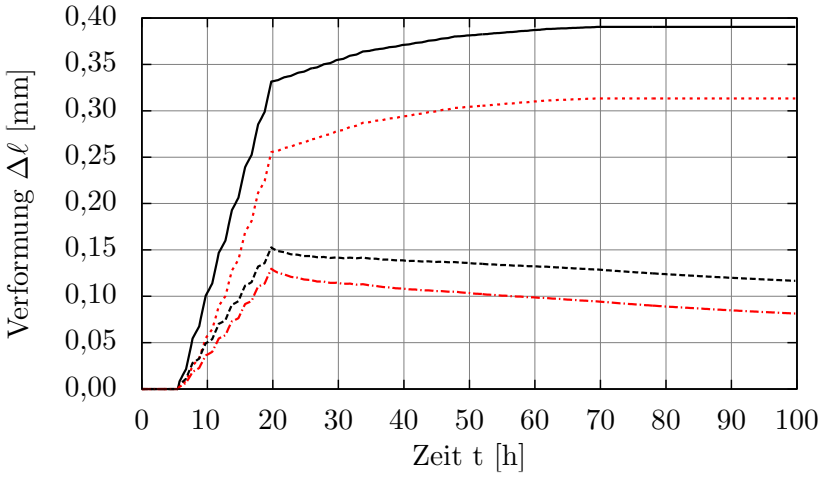


Abbildung 6.37: Verformungsergebnis bei unstetigem Temperaturanstieg

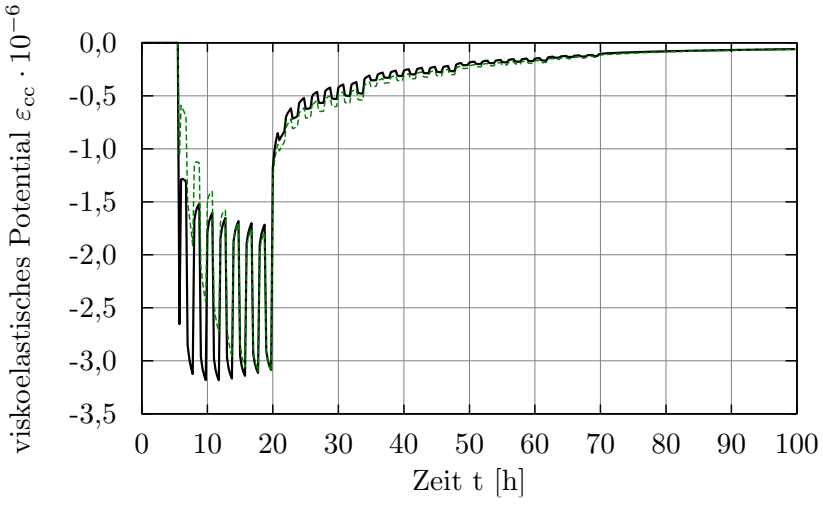


Abbildung 6.38: Verlauf des viskoelastischen Potentials bei unstetigem Temperaturanstieg

Der letzte zu betrachtende Belastungsfall ist in Abb. 6.35 dargestellt. Das erste Temperaturinkrement tritt bei $t = 1{,}75\,\text{h}$ auf. Dabei nimmt die Temperatur bis $t = 3\,\text{h}$ alle $0{,}25\,\text{h}$ mit $\Delta T = 0{,}25\,°C$ zu. Ab $t = 3\,\text{h}$ steigt die Temperatur bis $t = 4\,\text{h}$ um jeweils $\Delta T = 0{,}62\,°C$ alle 0,25 Stunden. Dieser Wechsel erfolgt sundenweise, d.h. ab $t = 4\,\text{h}$ ist $\Delta T = 0{,}25\,°C$, ab $t = 5\,\text{h}$ ist $\Delta T = 0{,}62\,°C$, ...

Bei $t = 20\,\text{h}$ ändert sich allerdings der Temperaturanstieg. Die Zunahme erfolgt nun viertelstündlich mit $\Delta T = 0{,}025\,°C$ im stündlichen Wechsel mit $\Delta T = 0{,}062\,°C$. Der nächste Wechsel erfolgt bei $t = 34\,\text{h}$. Die viertelstündliche Temperaturzunahme beträgt dann halb so viel: $\Delta T = 0{,}0125\,°C$ im stündlichen Wechsel mit $\Delta T = 0{,}031\,°C$. Zum Zeitpunkt $t = 48\,\text{h}$ kommt es zu einem erneuten Wechsel in der Temperaturzunahme. ΔT beträgt dann mit $0{,}00625\,°C$ bzw. $\Delta T = 0{,}0155\,°C$ wiederum um die Hälfte weniger. Der letzte Wechsel tritt bei $t = 62\,\text{h}$ auf. Die nochmals um die Hälfte reduzierte Temperaturzunahme wechselt dann mit $\Delta T = 0{,}003125\,°C$ bzw. $\Delta T = 0{,}00775\,°C$. Ab dem Zeitpunkt $t = 69{,}75\,\text{h}$ wird die Temperatur mit $56\,°C$ konstant gehalten.

Ab dem Zeitpunkt $t = 34\,\text{h}$ liegt ein optisch nahezu linearen Eindruck der Temperatureinwirkung vor, was auf die Wahl der Temperaturinkremente zurückzuführen ist. Dadurch soll gezeigt werden, dass Messkurven, die einen optisch glatten Eindruck machen, durchaus zu Unstetigkeiten im Verlauf des viskoelastischen Potentials führen können. Dies ist in Abb. 6.38 deutlich zu sehen. Gut erkennbar

ist wiederum, dass bei $t = 20\,\mathrm{h}$ die Kriechverformungen größer als die mit der Temperatur in Zusammenhang stehenden weiteren Verformungen sind, was sich einerseits im Abbau der Spannungen (Abb. 6.36) und der Dehnungen (Abb. 6.37), andererseits im Verlauf des viskoelastischen Potentials (Abb. 6.38) zeigt.

6.5 Beobachtungen

Im Vorhergehenden wurden einige Temperatureinwirkungen und deren Auswirkung auf die Spannungs- und Dehnungsantwort sowie auf den Verlauf des viskoelastischen Potentials gezeigt. Daraus lassen sich einige Beobachtungen ableiten und zusammenfassen:

Zu bemerken ist, dass sich der Verlauf der Temperatureinwirkung i.d.R. direkt in der elastischen Lösung (v.a. mit konstantem E-Modul) widerspiegelt. – In der viskoelastischen Lösung ist dies nur zum Teil der Fall, da die Temperatureinwirkung und die resultierenden Spannungen bzw. Dehnungen gerade im Bereich der Belastung (Temperaturzunahme) merkbar divergieren. So tritt das Spannungsmaximum bedingt durch Viskoelastizität früher auf, als es das Temperaturmaximum vermuten ließe.

Für den Bereich der Entlastung ist anzumerken, dass die Form des Temperaturverlaufs mit jener der viskoelastischen Lösung größtenteils übereinstimmt, eine Ähnlichkeit beider Verläufe ist meist gegeben. Die Begründung liegt hierbei einerseits in dem in dieser Arbeit in Abschn. 5.4 vorgestellten Weg des Spannungsabbaus, andererseits in den Temperaturdekrementen, die in den gezeigten Beispielen alle 0,25 Stunden auftreten. Aufgrund des aus einem Temperaturdekrement resultierenden entlastenden Spannungsinkrements wird die Gesamtspannung reduziert, was zu einem verminderten Kriechvermögen führt. Dies hat wiederum zur Folge, dass die danach verbleibende Spannungsgeschichte weniger schnell abgebaut wird, wodurch die Form der Temperaturentlastung weitgehend erhalten bleibt. Das infolge einer verminderten Spannungseinwirkung herabgesetzte Kriechvermögen und der damit verbundene langsamere Spannungsabbau ist gut aus den Beispielen mit den Temperatursprüngen ersichtlich.

Abschließend sei auf die Auswirkungen auf das viskoelastische Potential eingegangen: bereits eine geringe Änderung in der Temperatureinwirkung führt zu einer merklichen Änderung desselben. Dies stützt unter anderem die Behauptung, dass das viskoelastische Potential eine sensible Größe darstellt. Vor allem aber hat das letzte Beispiel gezeigt, dass eine Temperatureinwirkung, die optisch den Eindruck eines monoton steigenden Verlaufs macht, nicht immer monoton steigend sein muss. So kommt es beispielsweise auch zu den in der späteren Versuchsnachrechnung und darauffolgenden Parameterstudie im Verlauf des viskoelastischen Potentials sichtbaren Diskontinuitäten („Zacken“). Durch die hier vorgestellten Beispiele kann somit festgehalten werden, dass der Verlauf der Temperatureinwirkung auch eine große Auswirkung auf das viskoelastische Potential hat.

7 Verifikation der Berechnungsergebnisse anhand von Ergebnissen eines Zwangversuchs

7.1 Versuchsaufbau

Im Rahmen der Forschungsarbeiten am Institut für Betonbau der Technischen Universität Graz werden derzeit in Zusammenarbeit mit der Deutschen Bundesanstalt für Wasserbau Versuche an einem eigens entwickelten Rahmensystem durchgeführt. Die Messergebnisse zeigen die Spannungs- und Verformungsgeschichte eines erhärtenden Betonbauteils. Zur Verifikation des Berechnungsmodells wird nun ein Versuch der Vorversuchsserie nachgerechnet. Der verwendete Rahmen ist in Abb. 7.1 abgebildet und schematisch in Abb. 7.2 dargestellt. In den Abbildungen ist der Prüfkörper sowie die Lage der Kraftmessdosen zu erkennen. Die Messung der Temperaturentwicklung des Betonkörpers erfolgte an zwei Punkten: im Kern bzw. an der Außenseite.

Abbildung 7.1: Versuchsrahmen und Messeinrichtung

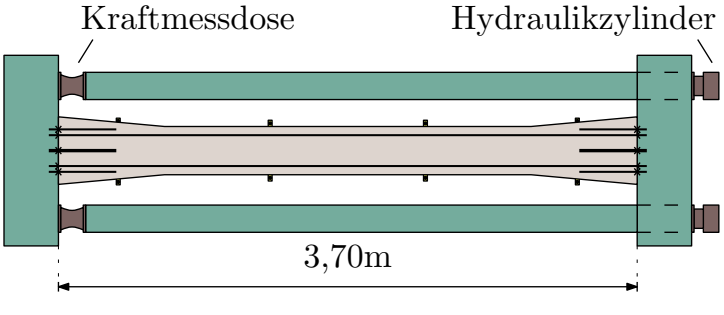


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung des Versuchsrahmens (Draufsicht) samt Messeinrichtung

Einzelheiten zur Wirkungsweise dieses Versuchsaufbaus sind den kommenden Publikationen zu diesem Forschungsprojekt zu entnehmen. Für diese Arbeit sind lediglich der Behinderungsgrad des Systems und die Materialeigenschaften des Betons von Bedeutung. Die Materialeigenschaften wurden auf Grundlage einer kleinen Begleitversuchsserie ermittelt, die Anhaltswerte für die Materialeigenschaften des erhärteten Betons lieferte. In Tab. 7.1 sind die relevanten Abmessungen des Versuchskörpers angeführt:

Tabelle 7.1: Hauptabmessungen des Versuchskörpers

Parameter		**Größe**	**Einheit**
Versuchskörperlänge	ℓ	3,70	[m]
Querschnittsbreite	b	0,25	[m]
Querschnittshöhe	h	0,25	[m]
Nettoquerschnittsfläche	A_n	0,0625	[m^2]
Bruttoquerschnittsfläche	A_c	0,0700	[m^2]

7.2 Versuchsergebnisse

7.2.1 Temperatureinwirkung

Die Temperatur des Betonkörpers wurde sowohl im Kern, wie auch am Querschnittsrand in der Mitte des Bauteils gemessen. Beide Messgrößen erlauben die Ermittlung des konstanten Temperaturanteils, so, wie es das in Kap. 5 vorgestellte Modell zur Berechnung der Spannungen voraussetzt.

Diese Ermittlung erfolgte auf Grundlage der in [Eierle und Schikora, 2000a] gegebenen Zerlegung unter Annahme einer parabelförmigen Verteilung des nichtlinearen Anteils. Abb. 7.3 zeigt diese Vorgehensweise für eine beliebige Verteilung.

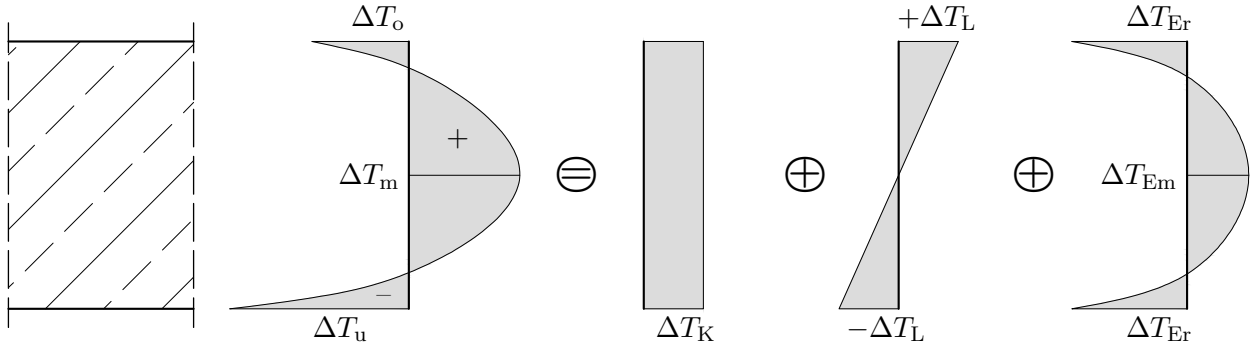


Abbildung 7.3: Allgemeiner Temperaturverlauf über einen Betonquerschnitt

Für die jeweiligen Temperaturanteile gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\Delta T_K = \frac{4 \cdot \Delta T_m + \Delta T_o + \Delta T_u}{6} \qquad \Delta T_L = \frac{\Delta T_o - \Delta T_u}{2} \tag{7.1}$$

$$\Delta T_{Er} = \frac{\Delta T_o + \Delta T_u - 2 \cdot \Delta T_m}{3} \qquad \Delta T_{Em} = -\frac{\Delta T_{Er}}{2} \tag{7.2}$$

Im Versuch kann davon ausgegangen werden, dass die gemessene Randtemperatur an der Querschnittsober- und -unterseite dieselbe ist. Somit ist für die Spannung im Versuchskörper nur der konstante Temperaturanteil maßgebend. Er ergibt sich aus der in Glg. 7.3a angegebenen Formulierung.

Da die Randtemperatur in der Ecke aufgezeichnet wurde, ist diese Formel zu der in Glg. 7.3b angegebenen Gleichung modifiziert worden.

$$\Delta T_{\mathrm{N}} = \Delta T_{\mathrm{K}} = \frac{4 \cdot \Delta T_{\mathrm{m}} + 2 \cdot \Delta T_{\mathrm{o}}}{6} \tag{7.3a}$$

$$\Delta T_{\mathrm{N}} = \Delta T_{\mathrm{K}} = \frac{4 \cdot \Delta T_{\mathrm{m}} + \Delta T_{\mathrm{o}}}{5} \text{ bzw. inkrementell } \Delta(\Delta T_{\mathrm{N}}) = \Delta T_{\mathrm{K}} = \frac{4 \cdot \Delta T_{\mathrm{m}} + \Delta T_{\mathrm{o}}}{5} \tag{7.3b}$$

In Abb. 7.4 ist die gemessene Kern- und Randtemperatur sowie der in der Berechnung zu Grunde liegende konstante Anteil der Temperatur dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass der konstante Temperaturanteil zwischen den gemessenen Verläufen liegt, sich jedoch fast mit dem Kerntemperaturverlauf deckt. Zudem zeigt Abb. 7.5 einen vergrößerten Ausschnitt der in Abb. 7.4 wiedergegebenen Verläufe.

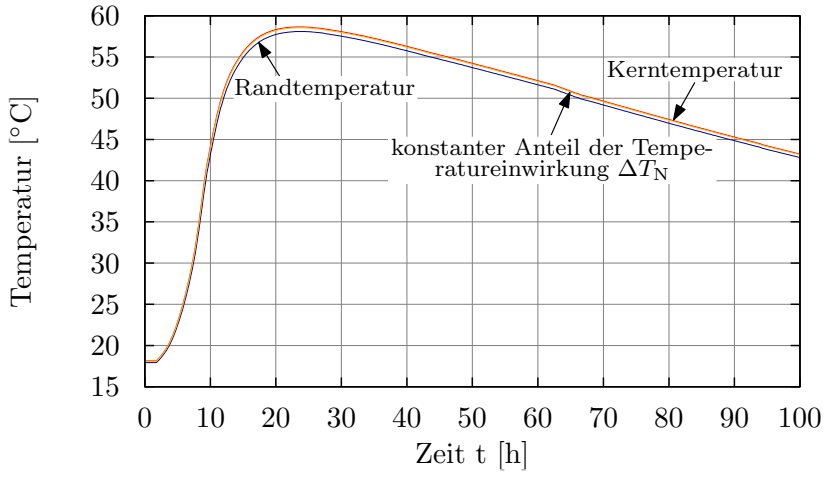


Abbildung 7.4: Konstanter Temperaturanteil ΔT_{N} sowie Temperatur im Punkt (Kern und Rand)

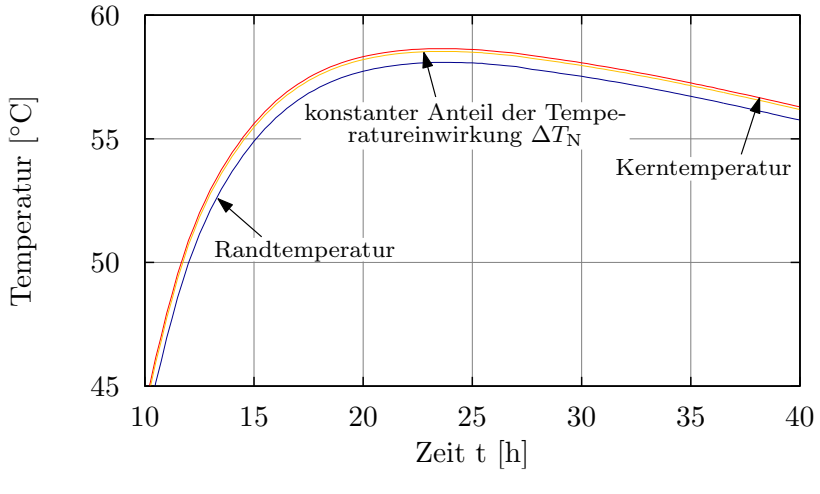


Abbildung 7.5: Konstanter Temperaturanteil ΔT_{N} sowie Temperatur im Punkt (Kern und Rand; Ausschnitt)

7.2.2 Zwangsspannungen

Die Zwangkraft im Betonstab wurde mittels Kraftmessdosen im geschlossenen Rahmensystem bestimmt. Dem Kräftegleichgewicht zufolge muss die Rahmenkraft der Betonkraft entsprechen. Nun wurde die miteinbetonierte Bewehrung, zur Vermeidung des Durchhängens, allerdings vorgespannt,

was eine vorerst vorherrschende Druckkraft im Rahmen zur Folge hat. Aufgrund des Einflusses der Einbausituation des Stabes im Rahmen beginnt die Wechselwirkung von Betonstab und Stahlrahmen ab $t = 5{,}75\,\text{h}$. Zu diesem Zeitpunkt hat der verwendete Beton den Beginn der Festigkeitsentwicklung bereits erreicht, sodass die Kraft im Betonstab ab $t = 5{,}75\,\text{h}$ abgebaut wird.

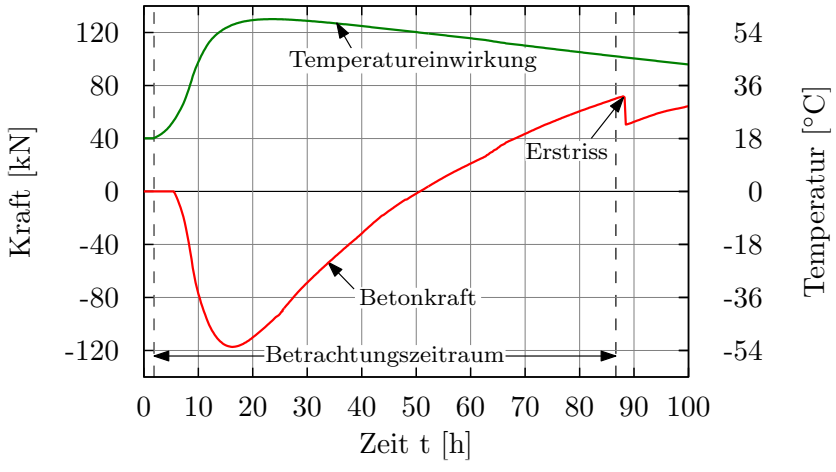


Abbildung 7.6: Temperatureinwirkung und Verlauf der Betonkraft

In Abb. 7.6 ist der Verlauf der Temperatureinwirkung und der Betonkraft dargestellt. Es gilt:

$$N_{\text{Beton}}(t_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad 0 \leq t < 5{,}75 \\ \left[N_{\text{Rahmen}}(t_i) - N_{\text{Rahmen}}(t_{i-1})\right] + N_{\text{Beton}}(t_{i-1}) & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.4}$$

Der so berechnete Betonkraftverlauf kann nun durch Divison mit der Querschnittsfläche in einen Spannungsverlauf umgerechnet werden. Dieser ist für den Vergleich mit den Ergebnissen der Nachrechnung maßgebend. Der Vergleich bezieht sich auf den Zeitraum von Betoneinbau bis $t = 88{,}25\,\text{h}$. Danach kommt es zur Rissbildung im Beton, was einen weiteren Forschungsschwerpunkt am Institut für Betonbau der Technischen Universität Graz ausmacht und in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird. Diese Arbeit bezieht sich auf den Zwangkraftabbau im ungerissenen Beton.

Als Abschluss des Abschnittes der Messergebnisse ist eine Gegenüberstellung der einwirkenden Temperatur ΔT_{N} und die aus der Betonkraft berechnete Spannung in Abb. 7.7 gegeben.

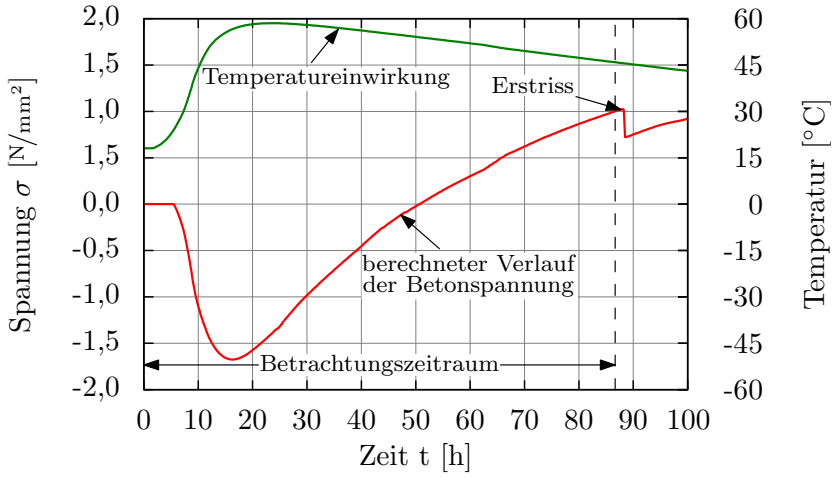


Abbildung 7.7: Temperatureinwirkung und berechneter Betonspannungsverlauf

7.3 Eingangsgrößen der Berechnung

In Tab. 7.2 sind sämtliche Parameter zusammengefasst die in die Berechnung Eingang finden.

Tabelle 7.2: Zusammenfassung der wichtigsten Berechnungsparameter

	Parameter	Formelzeichen	Größe	Einheit
	Bezugszeitraum	t_0	24	[h]
Geometrie	Versuchskörperlänge	ℓ_0	3,70	[m]
	Bruttoquerschnittsfläche	A_c	700	[cm^2]
	Der dem Trocknen ausgesetzter Umfang	U	1,00	[m]
	Rahmensteifigkeit	k_F	1050000	[kN/m]
Materialeigenschaften	Kritischer Hydratationsgrad	α_0	0,13	–
	Effektives Betonalter zu Beginn	t_{eff}	3	[h]
	Exponent der Steifigkeitsentwicklung	η_E	1,4	–
	Temperaturausdehnungskoeffizient von Beton	α_T	10^{-5}	–
	Faktor zur Berücksichtigung der Zementart (Zementklasse N)	α	0	–
	Würfeldruckfestigkeit	$f_{ck,cube}$	28,88	[MPa]
	28-Tages-E-Modul (aus ÖNORM EN 1992-1-1, 2009)	E_{28}	31000	[MPa]
	Theoretischer Endwert des E-Moduls	E_∞	31053	[MPa]
Viskoelastizität	Zeitpunkt der Erstbelastung (reale Zeit)	t_0	5,75	[h]
	Zeitpunkt der Erstbelastung (temperaturangepasste Zeit)	$t_{0,eff}$	8,785	[h]
	Erster Folgezeitpunkt	t_1	6,00	[h]
	Umgebungsluftfeuchtigkeit	RH	50	[%]
	Einflussfaktor der Geometrie	h_0	140	[m]
	Einflussfaktor der Betondruckfestigkeit	$\beta(f_{ck,cube})$	3,126	–
	Einflussfaktor der Luftfeuchtigkeit	φ_{RH}	1,963	–
	Einflussfaktor des Erstbelastungszeitpunkts	$\beta(t_0)$	1,089	–
	Faktor	β_H	460,021	–
	Zeitfaktor	$\beta_c(t_1,t_0)$	0,118	–
	Exponent zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs	–	0,20	–
	Faktor zur (vielfachen) Berücksichtigung des autogenen Schwindens	–	1,00	–
	Faktor zur Anpassung der Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang der Globalspannung	–	0,75	–

7.3.1 Rahmensteifigkeit

Mittels einer Prüfung des Rahmens konnte sein Kraft-Verformungs-Diagramm ermittelt werden. Mit dem HOOKEschen Federgesetz kann man daraus die Steifigkeit k_F des Rahmens berechnen. Diese ist einerseits zur Bestimmung des Behinderungsgrades nach Glg. 4.19 erforderlich, andererseits kann damit von einer Kraft im Rahmen bzw. im Betonbauteil auf eine (u.a. auch gemessene) Verformung

zurückgerechnet werden. Die Rahmensteifigkeit k_F ergibt sich zu:

$$k_F = \frac{\text{Kraft [kN]}}{\text{Verformung [m]}} \approx 1050000\,\text{kN/m} \tag{7.5}$$

7.3.2 Hydratationsgrad

Hydratationsgrad aus Kalorimetrie

Zur Bestimmung der Regressionsparameter, welche für die Anwendung des Hydratationsgradansatzes nach JONASSON erforderlich sind, wurde ein Teil des verwendeten Betons einer quasi-adiabatischen Kalorimetrie unterzogen. Daraus konnte die adiabatische Temperaturentwicklung des Betons abgeleitet und auch die maximale Temperatur bestimmt werden. Der Hydratationsgrad ergibt sich aus der in Glg. 2.1 angegebenen Definition. Wird der so erhaltene Verlauf des Hydratationsgrads α über die real vergangene Zeit t aufgetragen, erhält man den *adiabatischen* Hydratationsgradverlauf. Trägt man α hingegen über die temperaturangepasste Zeit t_{eff} auf, so ergibt sich daraus der Hydratationsgradverlauf *isotherm*. In Abb. 7.8 sind diese beiden Verläufe gegenübergestellt.

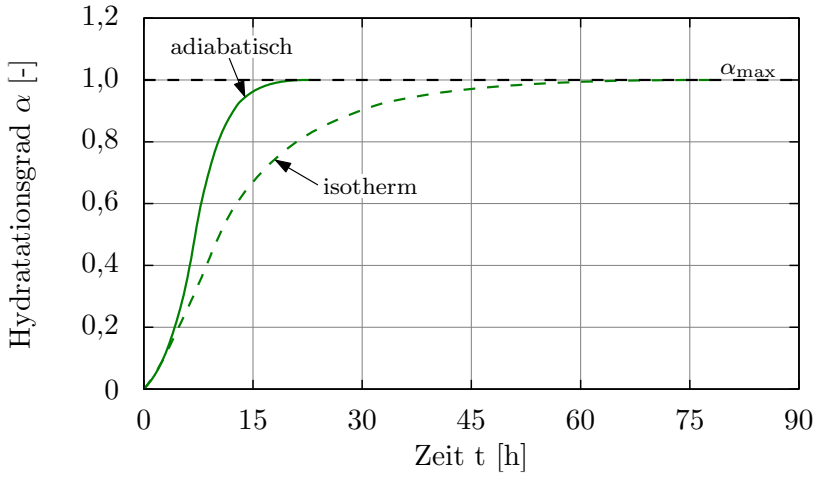


Abbildung 7.8: Adiabatischer und isothermer Hydratationsgradverlauf aus Kalorimetrie

Modellbildung

Zur rechnerischen Beschreibung und der Notwendigkeit der Kenntnis für die programmtechnische Verwendung des Hydratationsgradverlaufs ist auf das in Glg. 2.2 vorgestellte Modell nach JONASSON zurückgegriffen worden. Da der in Abb. 7.8 dargestellte gemessene Hydratationsgradverlauf mit einem Satz der Parameter a, b und τ_k nur bedingt beschrieben werden kann ist – zur Erhöhung der Genauigkeit – der Hydratationsgradverlauf in vier Bereiche geteilt worden. Eine iterative Bestimmung hat dabei auf die in Glg. 7.6 angegebenen Parameter geführt. Die hinterlegte wirksame Prozesstemperatur t_{eff} errechnet sich nach der von JONASSON vorgeschlagenen Funktion, welche in Glg. 2.4 angegeben ist.

Das (effektive) Betonalter wurde in der Berechnung weiters mit der Größe von 3 Stunden zu Beginn der realen Zeitzählung ($t = 0$) festgelegt. Dies, da – aufgrund des Transports vom Betonwerk zum

Labor für konstruktiven Ingenieurbau – ein Teil der Liegezeit des Betons bis zum Einbau bereits verstrichen war. Für den Verlauf des Hydratationsgrads gilt letztendlich:

$$\alpha(t_{\text{eff}}) = e^{\left[\text{b}\cdot\ln\left(1+\frac{t_{\text{eff}}}{\tau_{\text{k}}}\right)^{\text{a}}\right]} \begin{cases} a=-1{,}04; b=-1{,}24; \tau_{\text{k}}=4{,}00 & \text{falls} \quad 0{,}00 \leq \alpha(t_{\text{eff}}) \leq 0{,}27 \\ a=-3{,}15; b=-8{,}17; \tau_{\text{k}}=1{,}28 & \text{falls} \quad 0{,}27 \leq \alpha(t_{\text{eff}}) \leq 0{,}60 \\ a=-2{,}71; b=-0{,}37; \tau_{\text{k}}=9{,}00 & \text{falls} \quad 0{,}60 \leq \alpha(t_{\text{eff}}) \leq 0{,}82 \\ a=-4{,}88; b=-2{,}34; \tau_{\text{k}}=5{,}30 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.6}$$

In Abb. 7.9 ist der rechnerisch ermittelte Verlauf des Hydratationsgrades dem mittels Messung bestimmten gegenübergestellt. Der kritische Hydratationsgrad ist nach den Ergebnissen früherer Untersuchungen mit $\alpha_{\text{crit}} = 0{,}13$ angenommen worden. Diese Annahme wird durch die in Abschn. 7.3.3 beschriebene rechnerische Abbildung des Verlaufs des E-Moduls bestätigt. Die in Abb. 7.9 im Bereich $0 \leq \alpha_{\text{crit}} \leq 0{,}13$ festzustellende Abweichung des gemessenen vom modellierten Hydratationsgrad hat demzufolge keinen Einfluss auf die Güte der Berechnungsergebnisse.

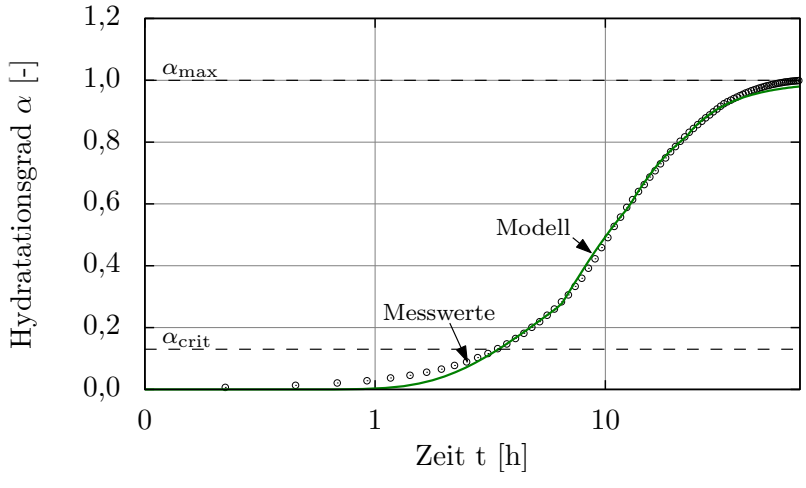


Abbildung 7.9: Gemessener und modellierter Hydratationsgrad über realer Zeit t (logarithmisch)

7.3.3 Festigkeitsentwicklung

Die Beschreibung der Festigkeitsentwicklung folgt nach dem Braunschweiger-Modell. Die entsprechende Bestimmungsgleichung des Verlaufs der Entwicklung des E-Moduls ist mit Glg. 2.7c gegeben. Der Freiwert $\eta_{\text{E}} = 1{,}4$ ist dabei aus den E-Modulwerten ermittelt worden, welche über die gemessenen Druckfestigkeiten bestimmt worden sind. Wie bereits erwähnt, wurde der Parameter des kritischen Hydratationsgrades α_0 bzw. α_{crit} anhand der Messergebnisse zur Bestimmung der E-Modulentwicklung bzw. mittels Erfahrungswerten festgelegt. Für die der Versuchsnachrechnung zugrundeliegende E-Modulentwicklung ergibt sich somit Glg. 2.7c zu:

$$E(\alpha) \approx E_{\infty} \cdot \left(\frac{\alpha - 0{,}13}{1 - 0{,}13}\right)^{1{,}4} \tag{7.7}$$

Der theoretische Endwert der E-Modulentwicklung E_{∞} ergibt sich aus Glg. 2.6. Mit den entsprechenden Zahlenwerten eingesetzt, liefert die Gleichung dann den gesuchten Wert:

$$E_{\infty} = \left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha(t=28\,\text{d})-0{,}13}{1-0{,}13}\right)^{1{,}4}}\right] \cdot 31000 = 31053\,\text{MPa} \tag{7.8}$$

In Abb. 7.10 ist der der Versuchsnachrechnung zugrundeliegende Verlauf des E-Moduls dargestellt.

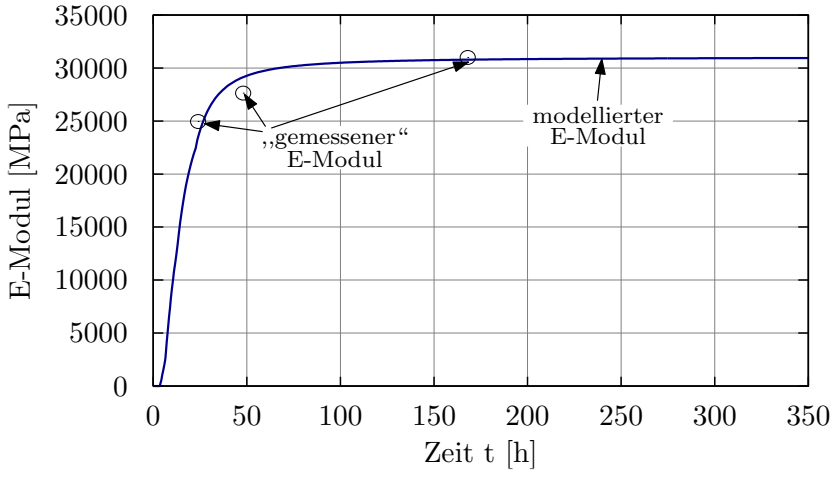


Abbildung 7.10: Gemessener und modellierter E-Modul über realer Zeit t

Jene Messpunkte, die in Abb. 7.10 als Kreise dargestellt sind, sind die Werte des „gemessenen“ E-Moduls zu den jeweiligen Zeitpunkten. Da es sich bei diesem Versuch um die Vorversuchsserie handelt, mussten die gezeigten Stützstellen auf Basis der vorhandenen Messdaten der *Würfel*druckfestigkeit ermittelt werden. Zurückgegriffen wurde dabei auf den in Glg. 7.9 angegebenen Zusammenhang. Die dort benötigte Größe E_{28} ist der in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] angegebene Wert für einen Beton C25/30. Da beim verwendeten Beton bereits nach 7 Tagen annähernd die in der Norm vorgeschlagene 28-Tagesdruckfestigkeit festgestellt worden ist, ist für die in Glg. 7.9 benötigte 28-Tagesdruckfestigkeit $\mathrm{f}_{\mathrm{ck},28}$ der gemessene Wert nach 7 Tagen herangezogen worden. In Tab. 7.3 sind die gemessenen Druckfestigkeiten und der damit korrespondierende – mit Glg. 7.9 berechnete – E-Modul wiedergegeben. Der E-Modul bei $t = 168\,\mathrm{h} = 7\,\mathrm{d}$ ist dabei der nach Norm zu erwartende E-Modul nach 28 Tagen, der sich dort bedingt durch die Berechnung ergibt.

$$E(t) = \sqrt{\frac{f_{\mathrm{ck}}(t)}{\mathrm{f}_{\mathrm{ck},28}}} \cdot \mathrm{E}_{28} \tag{7.9}$$

Tabelle 7.3: Messwerte der Druckfestigkeit und äquivalenter E-Modul

Zeit t **[h]**	**Würfeldruckfestigkeit** $f(t)_{\mathrm{ck,cube}}$ **[MPa]**	**E-Modul** $E(t)$ **[MPa]**
24	18,71	24952
48	22,96	27641
168	28,88	31000

7.3.4 Verformungseinwirkung

Zur Berechnung des Spannungsabbaus infolge Viskoelastizität wird auf den in Kap. 5 vorgestellten Ansatz zurückgegriffen. Neben dem konstanten Temperaturanteil ΔT_{N} ist zusätzlich das autogene Schwinden als Verformungseinwirkung zu berücksichtigen. Demgegenüber kann das Wirken von Trocknungsschwinden aufgrund geeigneter Nachbehandlungsmaßnahmen im Betrachtungszeitraum ausgeschlossen werden. Die Ausgangsgleichung Glg. 5.8 zur Berechnung des initialen Spannungsinkrements bzw. des Spannungsabbaus wird deshalb um die autogene Schwinddehnung erweitert.

Das Inkrement der Gesamtschwinddehnung $\Delta\varepsilon_{\mathrm{cs}}$ ist durch das Inkrement der autogenen Schwinddehnung $\Delta\varepsilon_{\mathrm{ca}}$ zu ersetzen, welches mit dem in Abschn. 2.4 vorgestellten Formelapparat[7] ermittelt werden kann. Letztendlich ergibt sich das den Abbau eines Spannungsinkrementes beschreibende und der Versuchsnachrechnung zugrundeliegende Formelkonstrukt zu dem in Glg. 7.10 angegebenen:

$$\sigma_i(t_k) = \begin{cases} \left[-\alpha_{\mathrm{T}} \cdot \Delta T_i(t_i) + \Delta\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_i)\right] \cdot a(t_i) \cdot E(t_i) & \text{falls } k = i \\ \sigma_i(t_{k-1}) - a(t_k) \cdot \varepsilon(t_{k-1}) \cdot \Delta\varphi(t_k - t_{k-1}, t_i) \cdot E(t_k) & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.10}$$

Der Übersichtlichkeit halber ist in Glg. 7.10 für das Spannungsinkrement das Delta weggelassen worden. $\sigma_i(t_i)$ steht aber stets für ein Spannungsinkrement, welches infolge eines Temperaturinkrements auftritt.

7.3.5 Kriechen

Um die Parameter für das der Versuchsrechnung zugrundeliegende Kriechmodell nach [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] sinnvoll wählen zu können, müssen zunächst die Auswirkungen der wesentlichen Eingangsgrößen untersucht werden. Die Grundkriechzahl φ_0 setzt sich normgemäß aus einem Beiwert zur Berücksichtigung der relativen Luftfeuchte, einem Beiwert zur Berücksichtigung der Betondruckfestigkeit und einem Beiwert zur Berücksichtigung des Betonalters bei Belastungsbeginn zusammen (s.a. Abschn. 3.4). In diesem der eigentlichen Nachrechnung vorausgehenden Abschnitt werden jene Eingangsgrößen und deren Abhängigkeit und Auswirkung in Bezug auf den Versuchsstand näher betrachtet. Zum besseren Verständnis bzw. der Nachvollziehbarkeit ist auf die mögliche Temperaturanpassung des Zeitpunktes des Belastungsbeginns verzichtet worden.

Einfluss der relativen Luftfeuchte φ_{RH}

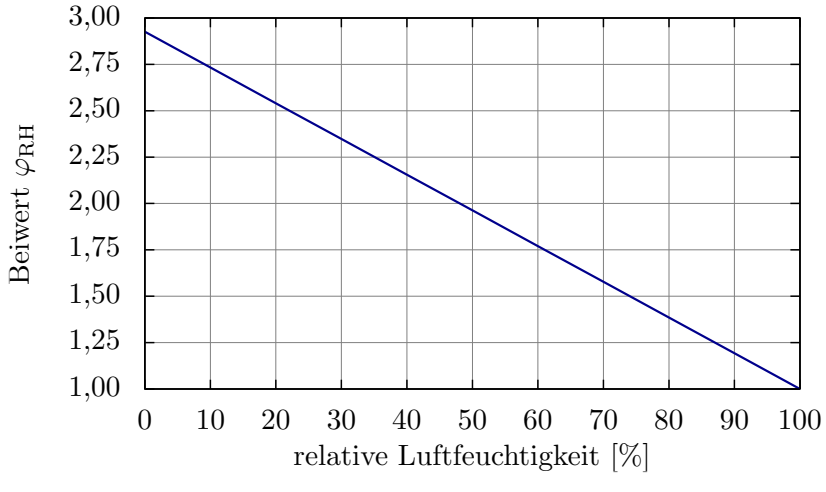


Abbildung 7.11: Abhängikgeit des Beiwerts φ_{RH} von der rel. Luftfeuchtigkeit für Betone ($f_{\mathrm{cm}} \leq 35\,\mathrm{N/mm^2}$)

In Abb. 7.11 ist die Abhängigkeit des Beiwerts φ_{RH} für Betone mit $f_{\mathrm{cm}} \leq 35\,\mathrm{N/mm^2}$ von der relativen Luftfeuchtigkeit dargestellt. Dabei zeigt sich, dass dieser Beiwert aufgrund seiner Linearität stark veränderlich ist und in weiterer Folge einen starken Einfluss auf die Größe der Endkriechzahl φ_0 hat.

[7] An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass entgegen der in [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] vorgeschlagenen Funktion $\beta_{\mathrm{as}}(t)$ aus Glg. 2.11 zur zeitlichen Beschreibung des autogenen Schwindens, als „Zeitfunktion" der Verlauf des Hydratationsgrades $\alpha(t_{\mathrm{eff}})$ aus Glg. 7.6 angesetzt wird.

Besonders für erhärtenden Beton, der sich in einer Schalung befindet, ist dieser Faktor schwierig einzuschätzen. Sämtliche normative Empfehlungen hinsichtlich der Anwendung und Anwendbarkeit des dort verankerten Kriechansatzes gelten für Langzeitverhalten. Dabei wird i.d.R. davon ausgegangen, dass der betrachtete Beton bereits einen Großteil seiner Endfestigkeit erreicht und der Hydratationsvorgang nahezu abgeschlossen ist. Für den hier vorliegenden zu untersuchenden sehr jungen Beton wird daher der Beiwert φ_{RH} für sämtliche folgende Berechnungen mit $\varphi_{\mathrm{RH}} = 2{,}0$ festgesetzt. Ein Beiwert dieser Größe ergäbe sich aus einer herrschenden relativen Luftfeuchtigkeit von $\approx 48\,\%$.

Einfluss der Betondruckfestigkeit $\beta(f_{\mathrm{cm}})$

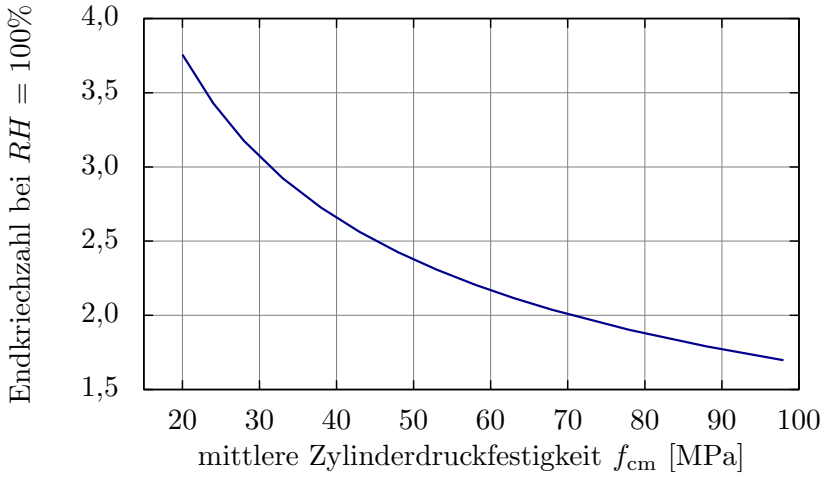


Abbildung 7.12: Abhängigkeit der Endkriechzahl φ_0 (f. $RH = 100\,\%$) von der mittleren Zylinderdruckfestigkeit f_{cm}

Abb. 7.12 zeigt die Abhängigkeit der Endkriechzahl φ_0 (Umgebungsluftfeuchtigkeit $100\,\%$) von der mittleren Zylinderdruckfestigkeit f_{cm} nach 28 Tagen. Zur Darstellung des Verlaufs der Endkriechzahl in Abhängigkeit von der mittleren Zylinderdruckfestigkeit wurden dafür die Werte der Norm herangezogen. In der Norm ist der hier als „Endkriechzahl bei $RH = 100\,\%$“ bezeichnete Faktor als Beiwert $\beta(f_{\mathrm{cm}})$ anzutreffen.

Die vorliegenden Messwerte der Würfeldruckfestigkeit des Betons unterliegen einer relativ großen Streuung.

Für eine erste Abschätzung des Parametersatzes des Kriechmodelles ist von einer Druckfestigkeit von $\approx 29\,\mathrm{MPa}$ ausgegangen worden. Diese Druckfestigkeit führt dann auf eine Endkriechzahl (f. $RH = 100\,\%$) bzw. $\beta(f_{\mathrm{ck,cube}})$ von 3,12. Der Vollständigkeit halber ist anzumerken, dass für die Berechnung selbst als Betondruckfestigkeit der durch Messung ermittelte Wert von $f_{\mathrm{ck,cube}} = 28{,}88\,\mathrm{MPa}$ verwendet worden ist. Diese Änderung bedingt, dass für φ_{RH} der entsprechende Wert einer Umgebungsluftfeuchtigkeit von $50\,\%$ angenommen wurde um entsprechende Ergebnisse zu erzielen, die sich bei $\varphi_{\mathrm{RH}} = 2{,}0$ und $f_{\mathrm{ck,cube}} = 29\,\mathrm{MPa}$ ergeben haben. – Die Auswirkungen auf das Berechnungsergebnis dieser Änderung sind allerdings vernachlässigbar.

Einfluss des Belastungszeitpunktes $\beta(t_0)$

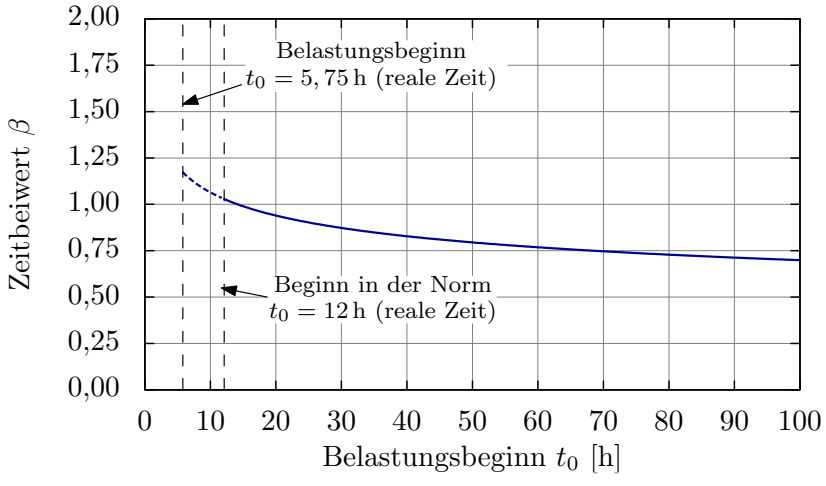


Abbildung 7.13: Abhängigkeit des Zeitbeiwertes β vom Zeitpunkt der Belastung t_0

In Abb. 7.13 ist die Abhängigkeit des Zeitbeiwertes $\beta(t_0)$ vom Belastungszeitpunkt dargestellt. Die hier gegebene Darstellung gilt für die real verstrichene Zeit t, so wie das Kriechverhalten auch in der Realität beobachtet wird.

Die strichlierte Linie bei $t_0 = 5{,}75$ in Abb. 7.13 markiert die erste Belastungsstufe. Die Markierungslinie bei $t = 12$ stellt den in der Norm festgelegten frühestmöglichen Zeitpunkt der Anwendung dar. Entgegen der Eingrenzung des verwendeten Kriechmodells auf Zeiträume mit Betonalter $t > 12$ h, wurde dieses hier schon für frühere Zeitpunkte angewendet.

Auswirkung auf die Grundkriechzahl φ_0

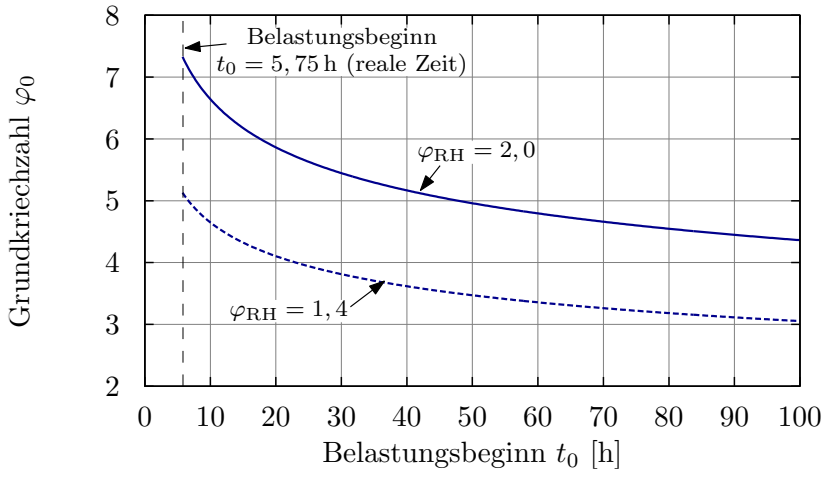


Abbildung 7.14: Abhängigkeit der Grundkriechzahl φ_0 von der Luftfeuchte φ_{RH}, der Druckfestigkeit $\beta(f_{cm})$ und vom Zeitpunkt des Belastungsbeginns $\beta(t_0)$

In der in Abb. 7.14 gegebenen Abbildung sind die Auswirkungen der im Vorhergehenden genannten Parameter auf die Grundkriechzahl φ_0 dargestellt. Die Grundkriechzahlen für unterschiedliche Belastungszeitpunkte sind dabei für den festgelegten Parameter zur Berücksichtigung der Luftfeuchte

φ_{RH} für $\varphi_{RH} = 2{,}0$ und $\varphi_{RH} = 1{,}4$ geplottet. Dies verdeutlicht unter anderem den bereits erwähnten starken Einfluss der Umgebungsluftfeuchte auf die Grundkriechzahl.

7.4 Berechnungsergebnisse

7.4.1 Spannung

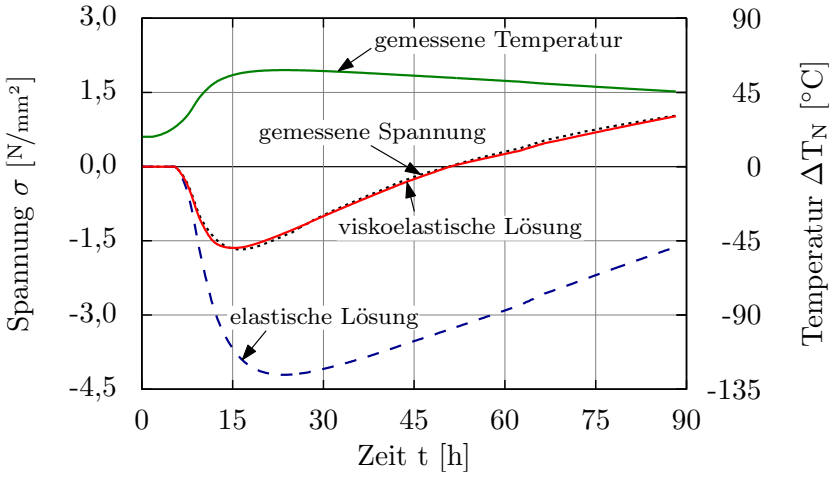


Abbildung 7.15: Temperaturentwicklung und gemessener/berechneter Gesamtspannungsverlauf

7.4.2 Verformung

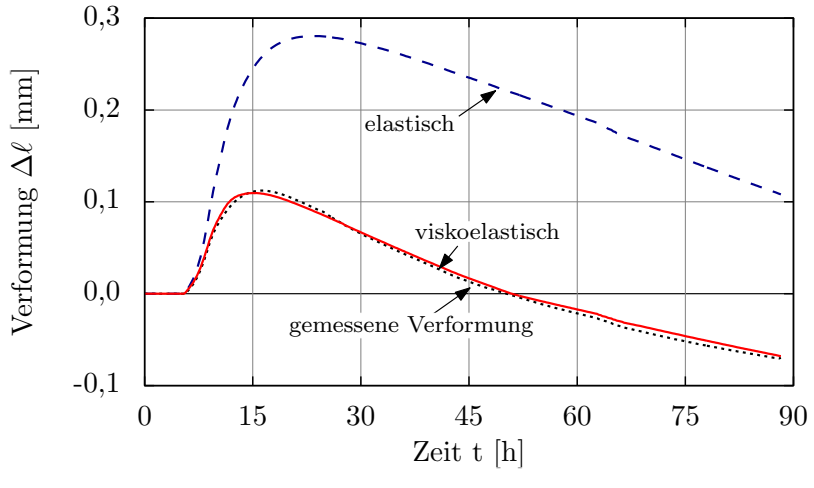


Abbildung 7.16: Gemessener bzw. berechneter Gesamtverformungsverlauf

7.4.3 Verlauf des E-Moduls und des Behinderungsgrades

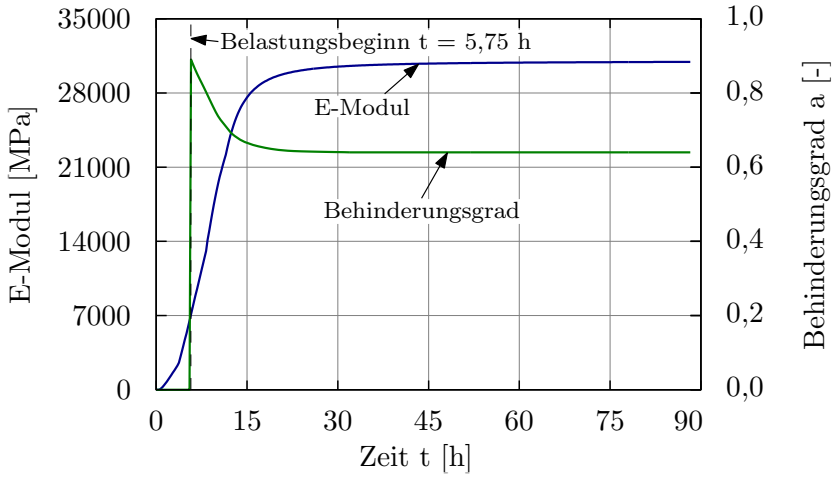


Abbildung 7.17: E-Modul und Behinderungsgrad

7.4.4 Viskoelastisches Potential

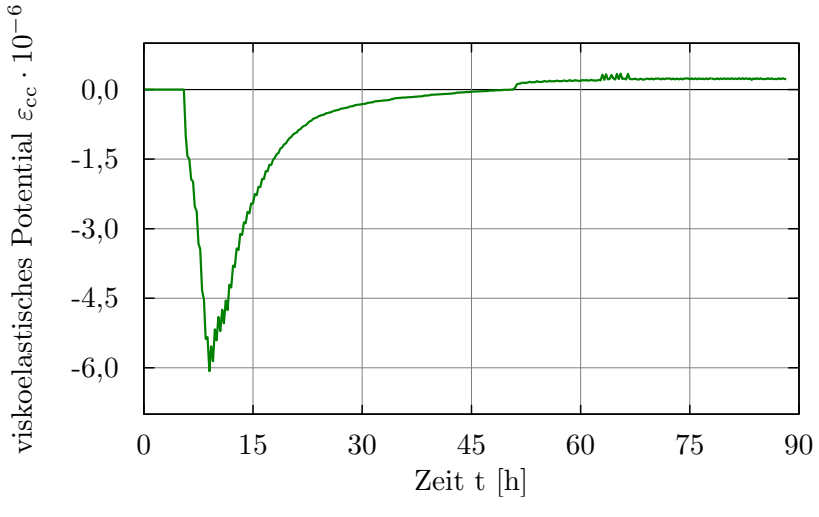


Abbildung 7.18: Verlauf des viskoelastischen Potentials

7.5 Diskussion

Wie in Abb. 7.15 zu erkennen ist, erreicht der entwickelte Berechnungsablauf unter Anwendung des beschriebenen Materialmodells eine gute Näherung zur gemessenen Spannung. Es ist vor allem deutlich, dass die Berücksichtigung von viskoelastischen Eigenschaften nicht vernachlässigt werden darf, da die elastische Lösung sehr stark von der Messung abweicht und nicht immer auf der sicheren Seite liegt.

Es ist auch erkennbar, dass das elastische Spannungsergebnis direkt an die Temperaturentwicklung gekoppelt ist: kommt es zum Temperaturmaximum, liegt dort auch das Spannungsmaximum. Der gemessene Verlauf bzw. die viskoelastische Lösung legt dar, dass in der Realität das Spannungsmaximum früher eintritt. Dies hat zur Folge, dass beispielsweise Risse infolge der so auftretenden Zwangsbeanspruchung früher entstehen würden, als es eine eventuelle elastische Kontrollrechnung vermuten ließe.

Wie in Abb. 7.16 ersichtlich, sind die gemessene und berechnete viskoelastische Verformung auch gut übereinstimmend. Bei dieser Verformung handelt es sich um die direkt mit dem Materialgesetz bestimmte Größe (= freie Dehnung). Der Abbau eines initialen Dehnungsinkrements $\Delta\varepsilon_i^{\mathrm{real}}(t_k)$ führt analog zu Glg. 7.10 auf Glg. 7.11. Der Übersichtlichkeit halber ist auch hier für das Dehnungsinkrement der freien Dehnung das Delta weggelassen worden. $\varepsilon_i^{\mathrm{real}}(t_k)$ steht aber immer für ein Dehnungsinkrement, welches wie auch ein Spannungsinkrement infolge eines Temperaturinkrements auftritt.

$$\varepsilon_i^{\mathrm{real}}(t_k) = \begin{cases} \left[1 - a(t_i)\right] \cdot \left[-\alpha_{\mathrm{T}} \cdot \Delta T(t_i) + \Delta\varepsilon_{\mathrm{ca}}(t_i)\right] & \text{falls } k = i \\ \varepsilon_i^{\mathrm{real}}(t_{k-1}) + \left[1 - a(t_k)\right] \cdot \underbrace{\varepsilon(t_{k-1}) \cdot \Delta\varphi(t_k - t_{k-1}, t_i)}_{\text{Kriechdehnungsinkrement}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.11}$$

Der hier als Kriechdehnungsinkrement bezeichnete Term, ist dabei ident zu dem bereits bekannten aus Glg. 5.3.

In Abb. 7.17 ist der Behinderungsgrad dem Verlauf des E-Moduls gegenübergestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass der Behinderungsgrad definitionsgemäß stark von der E-Modulentwicklung abhängig ist und sich äquivalent zu diesem asymptotisch einem Endwert nähert. Für den Zeitbereich $0 \leq t \leq 5{,}5$ ist der Behinderungsgrad mit 0 festgesetzt worden, da sich der Beton hier noch ungehindert verformen kann (s.a. Abschn. 7.2.2).

An dieser Stelle sei auch der Umstand erwähnt, dass bei der Nachrechnung festgestellt wurde, dass die Genauigkeit des berechneten Spannungsverlaufs *nach* dem Nulldurchgang der globalen Systemspannungsantwort verbessert wird, wenn man eine verminderte Kriechfähigkeit unterstellt. Dies stützt unter anderem die in Abschn. 3.3 erwähnte Behauptung von Röhling, dass ein Unterschied zwischen Druck- und Zugkriechen existiert. Die hier vorgestellten Untersuchungen haben gezeigt, dass das Zugkriechen *geringer* als das Druckkriechen ist. Die Kriechfähigkeit bzw. die jeweils zu erwartende Endkriechzahl φ_0 wurde dementsprechend ab $t = 52{,}5$ um 25 % herabgesetzt ($\varphi_0 = 0{,}75 \cdot \varphi_0$).

Schlussendlich ist in Abb. 7.18 der Verlauf des viskoelastischen Potentials dargestellt. Es gibt die Kriechfähigkeit bzw. das Kriechvermögen und -verhalten aus der Spannungsgeschichte wieder. Dabei ist u.a. festzustellen, dass das viskoelastische Potential am Größten ist, wenn die im System vorhandene Spannung maximal ist. Es ist umso geringer, je geringer die kriecherzeugende Spannung bzw. die Summe der kriecherzeugenden Spannungsinkremente wird. Das viskoelastische Potential selbst ist im Vorhergehenden auch als *Kriechdehnung* (bzw. *-sinkrement*) bezeichnet worden. Es ist also die Summation des Produkts des zeitlichen Verlaufs des aus Glg. 5.3 bzw. Glg. 7.11 zu gewinnenden Inkrements der Kriechzahl $\Delta\varphi$ und der im System vorhandenen Dehnung ε: $\varepsilon\Delta\varphi$. Der nicht unmittelbar aus den Diagrammen nachvollziehbare unstetige Verlauf des viskoelastischen Potentials in den

Bereichen $8 \leq t \leq 13$ und $62 \leq t \leq 68$ lässt sich auf die Temperatureinwirkung zurückführen. Obwohl die Temperatureinwirkung optisch den Anschein einer „glatten“ Kurve macht ist diese nicht immer im selben Maße streng monoton steigend und weist an vielen Stellen „Knicke“ auf. Dies führt u.a. zu den Zacken in den genannten Bereichen. Wird beispielsweise die Temperatureinwirkung durch eine stetige und streng monoton steigende Funktion (z.B. Polynom 9-ten Grades) angenähert, so weist das viskoelastische Potential qualitativ denselben Verlauf wie die Funktion auf. Für die Auswirkung der Temperatureinwirkung hat sich gezeigt, dass das viskoelastische Potential ob seiner Größenordnung eine recht „sensible“ Größe darstellt. Diesbezüglich sei auf die in Kap. 6 vorgestellten „Fallbeispiele“ verwiesen, in denen die Auswirkungen der Temperatureinwirkung auf sämtliche Größen deutlich wird. Die Temperatureinwirkung wurde um die „unscheinbaren Zacken“ nicht bereinigt, da ein geschlossenes Messystem vorliegt und sich deren Auswirkung in allen gemessenen Kurven wiederfinden lässt.

Zusammenfassend ist somit festzuhalten, dass mit den in diesem Kapitel vorgestellten Modellierungen einzelner Materialeigenschaften, mit dem Materialmodell selbst und der Umsetzung früherer Überlegungen zum Einfluss des Globalspannungszustandes das Messergebnis in einer guten und mechanisch schlüssigen Näherung bestimmt werden kann. Nachfolgend wird der Einfluss und die Sensitivität ausgewählter Eingangsgrößen untersucht.

7.6 Einfluss ausgewählter Parameter – Vergleichsrechnungen

Im folgenden Abschnitt sollen nun gegenüber der Versuchsnachrechnung einzelne Parameter variiert werden, um zu zeigen wie sich deren Änderung auf das Berechnungsergebnis auswirkt bzw. welchen Einfluss der jeweilige Parameter hat. Jedem Abschnitt geht dabei eine tabellarische Darstellung des geänderten Parameters voran. Am Ende folgt eine kurze Zusammenfassung bzw. Diskussion des Berechnungsergebnisses.

Die hier vorgelegten Betrachtungen betreffen dabei nicht das Material an sich. Einer Variation wurden somit nur jene Parameter unterzogen, die sich auf den Spannungsauf- bzw. -abbau auswirken, jedoch nicht aus der Modellierung der Festigkeit herrühren. Als Belastung ist in jeder der nachstehenden Untersuchungen die bereits aus der Versuchsnachrechnung bekannte Temperaturentwicklung herangezogen worden. Die Entwicklung des E-Moduls ist ebenfalls der Versuchsnachrechnung entnommen worden; sämtliche Ergebnisse sind daher *nicht* allgemeingültig, sondern stehen stets in direktem Zusammenhang mit der Modellierung des im Versuch verwendeten Betons. Ebenfalls der Versuchsnachrechnung folgend, ist das effektive Betonalter zum Einbringungszeitpunkt mit $t_{\text{eff}} = 3$ Stunden angesetzt worden.

Zur Darstellung sei bemerkt, dass sämtliche Kurven gleichen Linientyps bzw. gleicher Farbe zusammengehören. Das Ergebnis der Messung ist zu Vergleichszwecken in den Diagrammen als dickere schwarz punktierte Linie dargestellt, wo Messergebnisse vorlagen. Die Versuchsnachrechnung aus dem vorhergehenden Abschnitt ist stets als dickere rote durchgezogene Linie erkennbar.

7.6.1 Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens

Für die im Folgenden dargestellten Berechnungsergebnisse ist der Exponent der Zeitfunktion des Kriechens verändert worden. Dieser ist normgemäß mit 0,3 festgelegt. In Tab. 7.4 sind die für diese Berechnung veränderten Parameter angegeben.

Tabelle 7.4: Variierter Exponent der Zeitfunktion des Kriechens

Parameter	Beschreibung	Größe	Einheit
–	Exponent der Zeitfunktion $\beta_c(t,t_0)$ des Kriechens (Norm)	0,30	–
–		0,25	–
–	Versuchsnachrechnung	0,20	–
–		0,15	–

Spannung

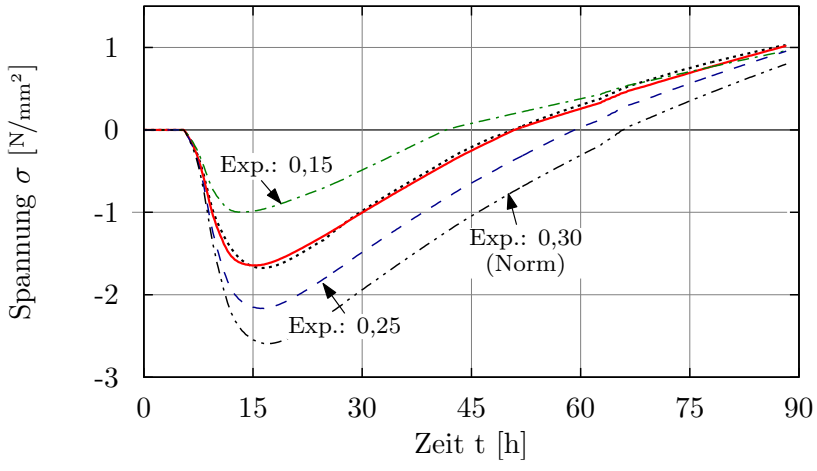


Abbildung 7.19: Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das Spannungsergebnis

Verformung

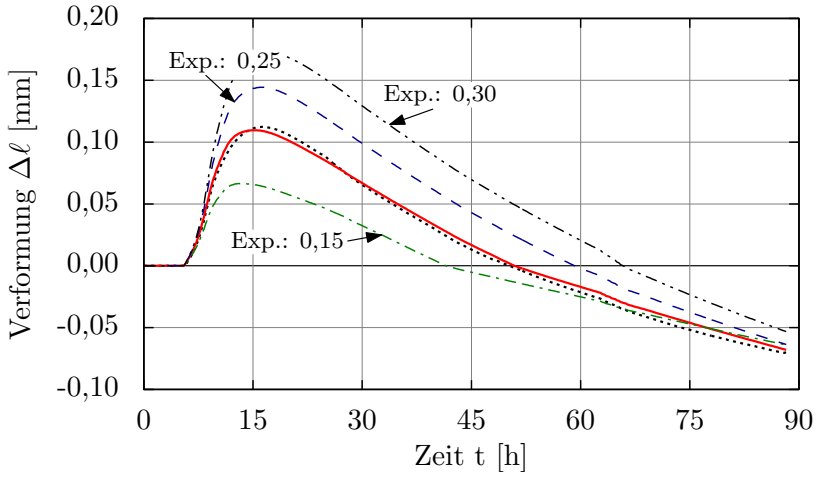


Abbildung 7.20: Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das Verformungsergebnis

Viskoelastisches Potential

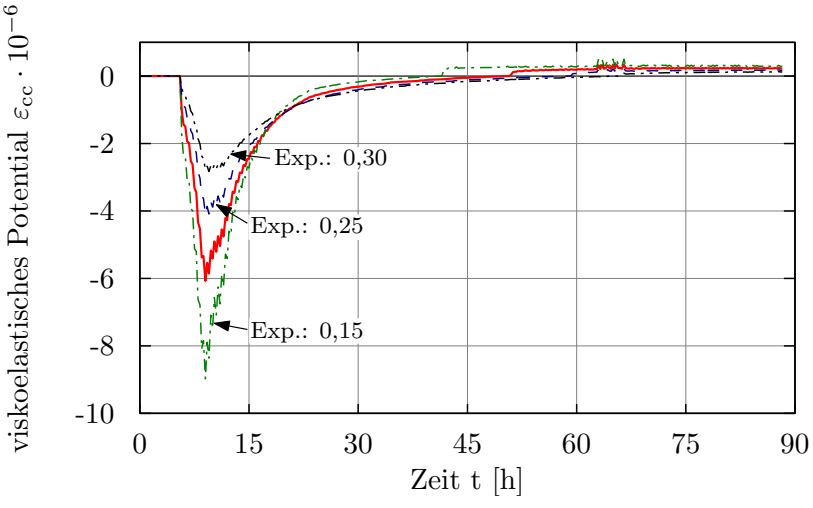


Abbildung 7.21: Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das viskeolastische Potential

Betrachtet man Abb. 7.19, so ist erkennbar, dass der Exponent der Zeitfunktion des Kriechens einen großen Einfluss auf die Spannungsentwicklung hat. Je größer der Exponent gewählt wird, umso größer ist die berechnete Spannung, da der Kriechvorgang langsamer erfolgt. Des Weiteren ist erkennbar, dass es bei Anwendung des normativ vorgeschlagene Wertes zu einem im Vergleich zur Messung großen Spannungsaufbau kommt. Es ist daher naheliegend den Exponenten für den hier vorhandenen Beton abzumindern. Zusätzlich liegen mit [Tue et al., 2007], [Tue et al., 2009] und [Schlicke und Tue, 2009] Ergebnisse anderer Untersuchungen vor, die ebenfalls einen Exponenten $< 0{,}3$ ansetzen.

7.6.2 Einfluss des autogenen Schwindens

Weiters soll der Einfluss des autogenen Schwindens untersucht werden. Dabei sind Berechnungen durchgeführt worden, in denen das autogene Schwinden einerseits unberücksichtigt bleibt und andererseits verdoppelt worden ist. In Tab. 7.5 sind die für diese Untersuchung abgeänderten Parameter angegeben.

Tabelle 7.5: Variierter Faktor zum (vielfachen) Berücksichtigen des autogenen Schwindens

Parameter	Beschreibung	Größe	Einheit
-	Faktor zum (vielfachen) Berücksichtigen des autogenen autogenen Schwindens	2,00	–
–	Versuchsnachrechnung	1,00	–
–		0,00	–

Spannung

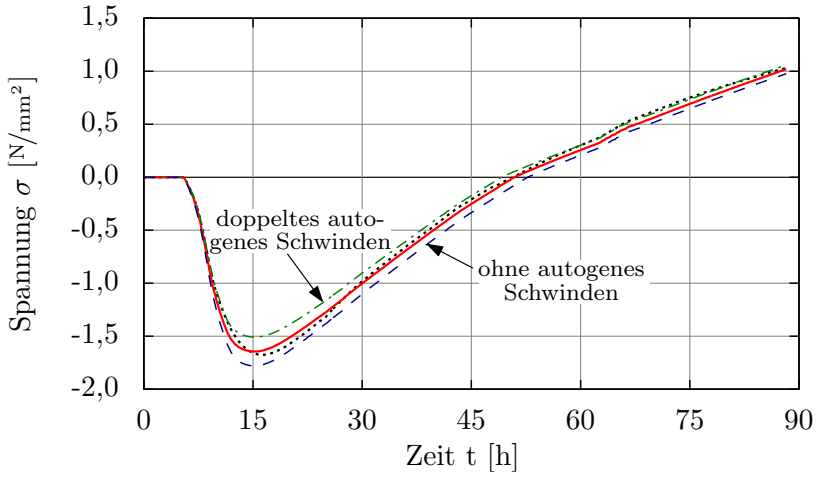


Abbildung 7.22: Einfluss des autogenen Schwindens auf das Spannungsergebnis

Verformung

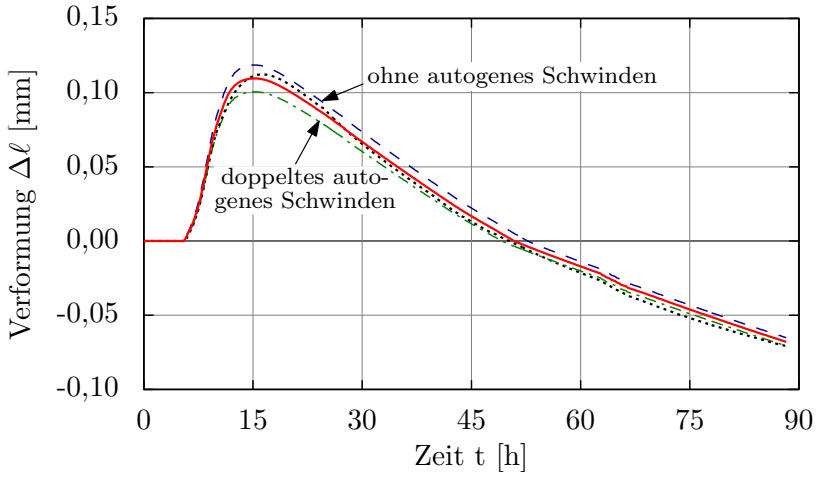


Abbildung 7.23: Einfluss des autogenen Schwindens auf das Verformungsergebnis

Viskoelastisches Potential

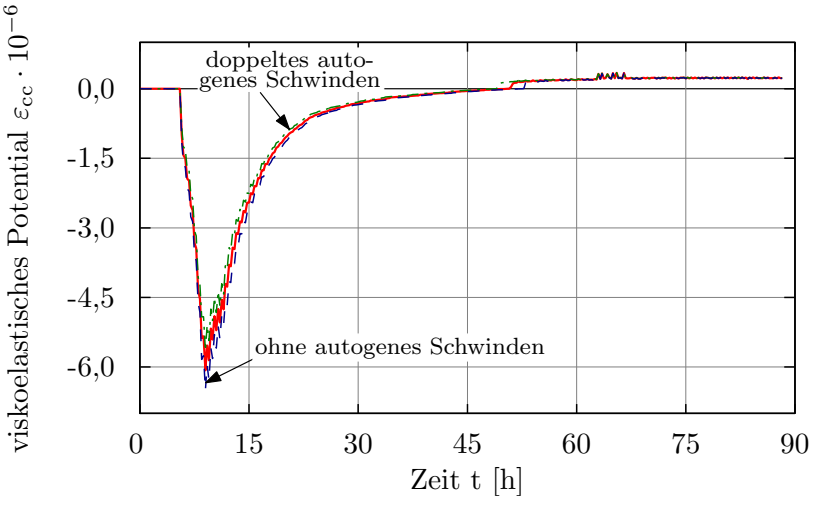


Abbildung 7.24: Einfluss des autogenen Schwindens auf das viskoelastische Potential

In Abb. 7.22 ist zu sehen, dass der Einfluss des autogenen Schwindens bei dem in dieser Arbeit untersuchten Betonkörper einen relativ geringen Einfluss hat. Durch die inkrementelle Betrachtung ist bis ca. $t = 20$ ein Einfluss des Schwindens festzustellen, der sich im weiteren zeitlichen Verlauf der Kurve fortpflanzt. Das autogene Schwinden ist zu diesem Zeitpunkt bereits fast vollständig abgeschlossen, wie es Vergleichsrechnungen gezeigt haben. Durch die Berücksichtigung von autogenem Schwinden kann lediglich im Anfangsbereich (bis ca. $t = 20$) eine bessere Näherung an das Messergebnis erreicht werden.

7.6.3 Einfluss der Herabsetzung der Kriechfähigkeit

Um den Einfluss einer geänderten Kriechfähigkeit im Zugbereich zu untersuchen ist die Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang der globalen Systemspannungsantwort variiert worden. Die geänderten, den Vergleichsrechnungen zugrundeliegenden, Kriechfähigkeiten sind in Tab. 7.6 wiedergegeben.

Tabelle 7.6: Variierter Faktor zum Berücksichtigen der Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang

Parameter	Beschreibung	Größe	Einheit
-	Faktor zur Anpassung der Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang der Globalspannung	1,00	–
–	Versuchsnachrechnung	0,75	–
–		0,50	–

Spannung

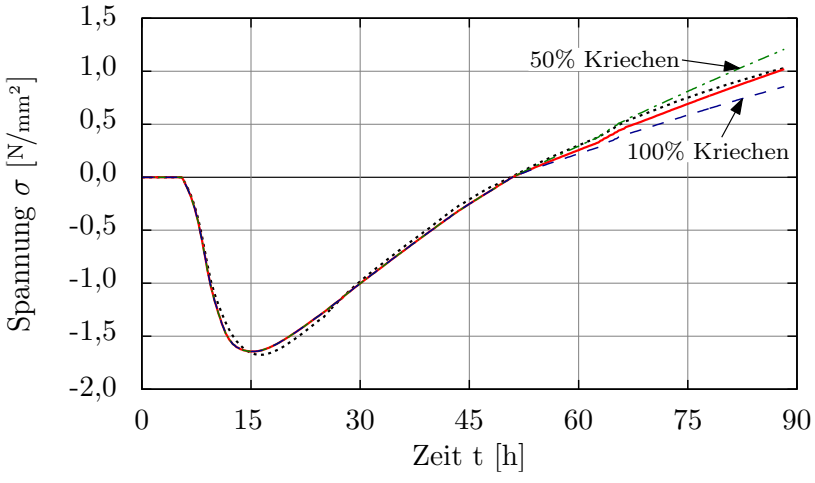


Abbildung 7.25: Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das Spannungsergebnis

Verformung

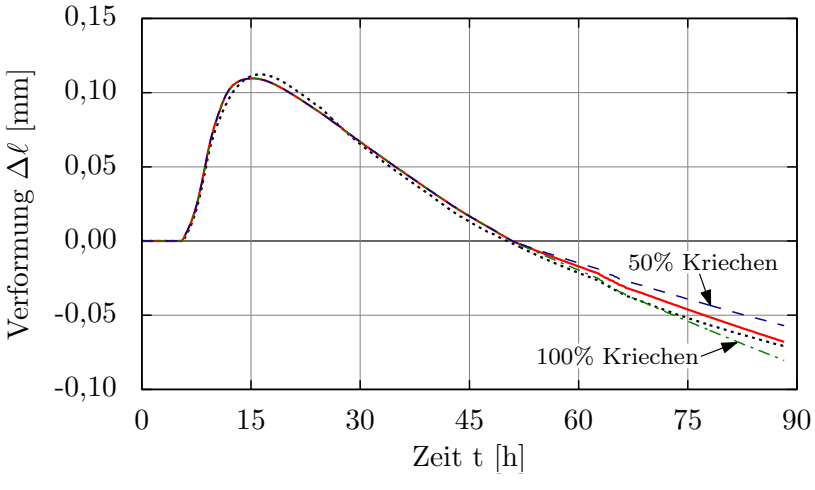


Abbildung 7.26: Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das Verschiebungsergebnis

Viskoelastisches Potential

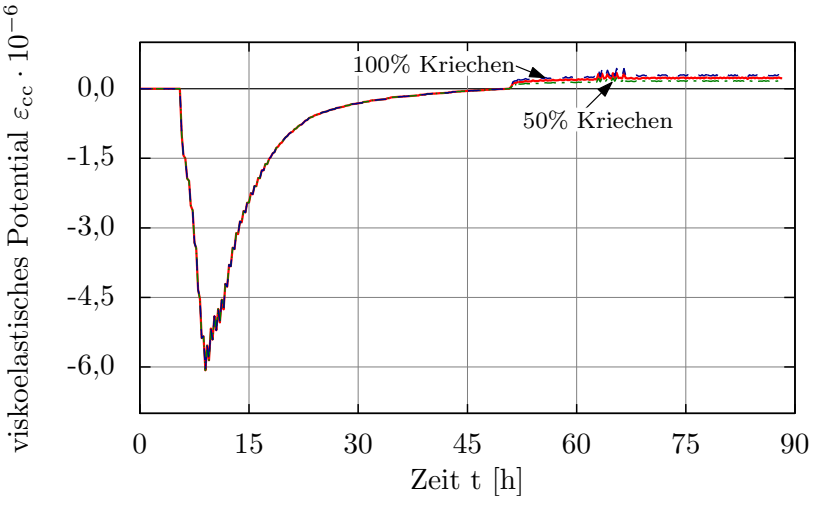


Abbildung 7.27: Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das viskoelastische Potential

Durch eine Reduktion der Endkriechzahl φ_0 nach dem Nulldurchgang (Zugseite) auf 75 % ($= 0{,}75 \cdot \varphi_0$) ihrer ursprünglichen Größe kann eine bessere Annäherung zum Berechnungsergebnis erzielt werden. Wie Abb. 7.25 zeigt, ist ohne Unterscheidung zwischen Druck- und Zugkriechen auf der Zugseite ein zu rascher Spannungsabfall zu verzeichnen. Dieser ist auf die in diesem Zeitraum „voll“ vorhandene Endkriechzahl zurückzuführen. Gut erkennbar ist dieser Umstand auch in Abb. 7.27, welches ein nach dem Nulldurchgang größeres viskoelastisches Potential zeigt.

7.6.4 Einfluss der Umgebungsluftfeuchtigkeit

Um die zu erwartenden starken Auswirkungen der Änderung der Umgebungsluftfeuchtigkeit bzw. der damit direkt verbundenen Größe φ_{RH} zu zeigen, ist dieser Parameter mit den in Tab. 7.7 wiedergegebenen Werten variiert worden.

Tabelle 7.7: Variierter Parameter der Luftfeuchtigkeit

Parameter	Beschreibung	Größe	Einheit
–	Umgebungsluftfeuchtigkeit	90	[%]
–		70	[%]
–	Versuchsnachrechnung	50	[%]
–		30	[%]

Spannung

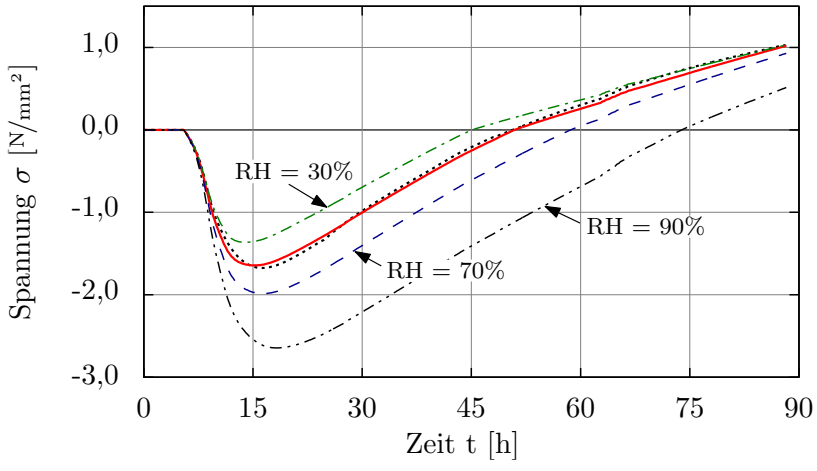


Abbildung 7.28: Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das Spannungsergebnis

Verformung

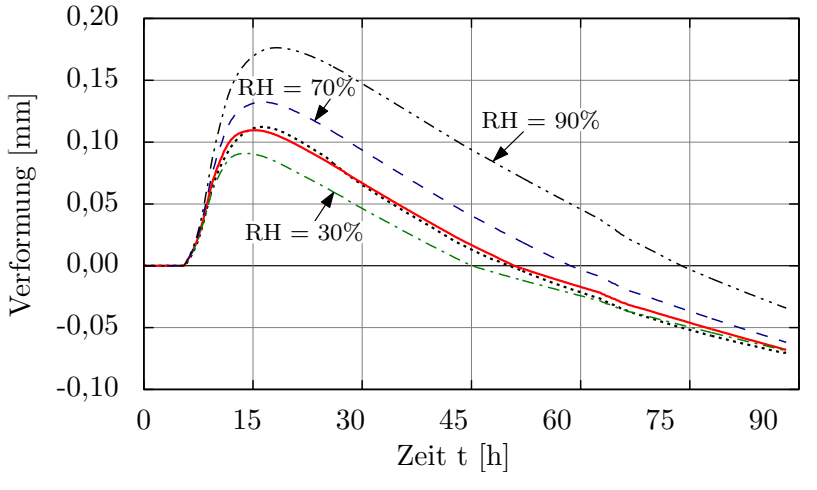


Abbildung 7.29: Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das Verschiebungsergebnis

Viskoelastisches Potential

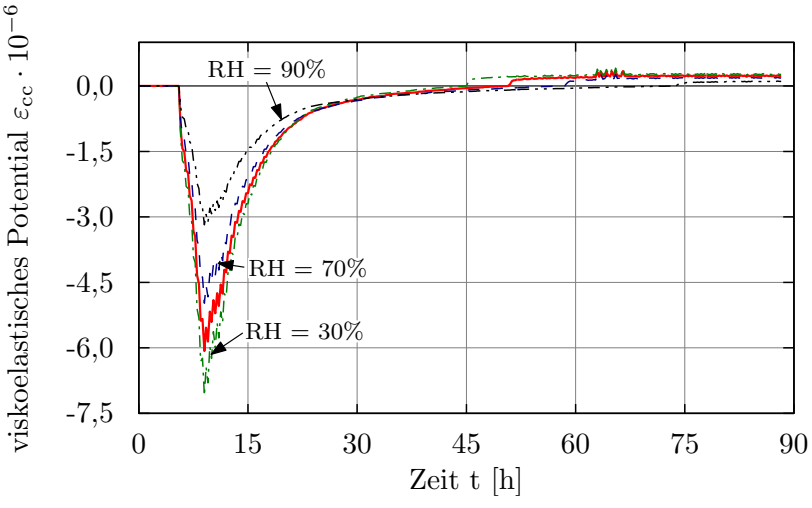


Abbildung 7.30: Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das viskoelastische Potential

Betrachtet man die Abbildungen Abb. 7.28 bis Abb. 7.29, so ist erkennbar, dass die jeweilige angesetzte Umgebungsluftfeuchtigkeit einen nicht unbeträchtlichen Einfluss auf das Kriechverhalten bzw. die daraus resultierende Spannungsantwort hat. Je höher die Umgebungsluftfeuchtigkeit bzw. je geringer φ_{RH} ist, umso größer ist die Spannungsantwort. Wie in Abschn. 3.1.2 bemerkt, sinkt die Kriechfähigkeit mit steigender Umgebungsluftfeuchtigkeit; die Zunahme der Kriechverformung nimmt also ab.

7.6.5 Zusammenfassung

Abschließend sind die sowohl aus der Versuchsnachrechnung als auch in dieser Parameterstudie gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst. Dazu sind die Verläufe einzelner viskoelastischer Gesamtspannungen (Abb. 7.31) sowie Gesamtverformungen (Abb. 7.32) über die Zeit willkürlich herausgegriffen und dem gemessenen Verlauf gegenübergestellt. Die jeweiligen dargestellten Kurven haben sich dabei durch die Abänderung eines *einzelnen* Parameters ergeben. Dieser ist durch die Beschriftung verdeutlicht worden, bzw. kann auch den vorhergehenden Untersuchungen entnommen werden.

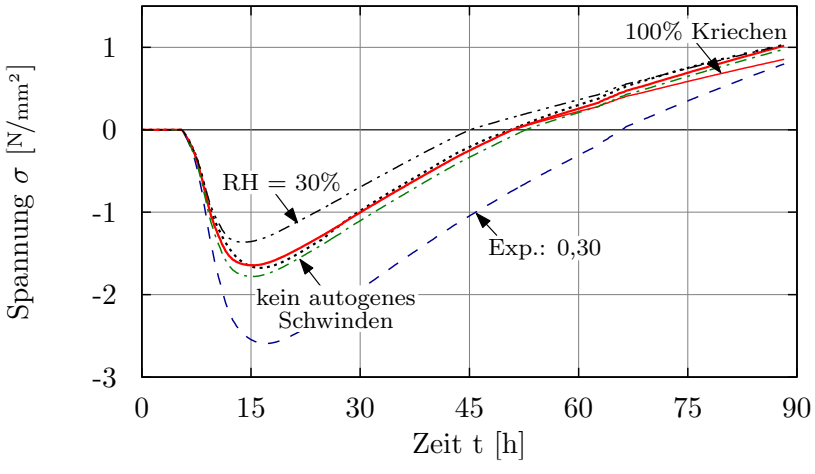


Abbildung 7.31: Ergebnisse der Parameterstudie – Gesamtspannungen

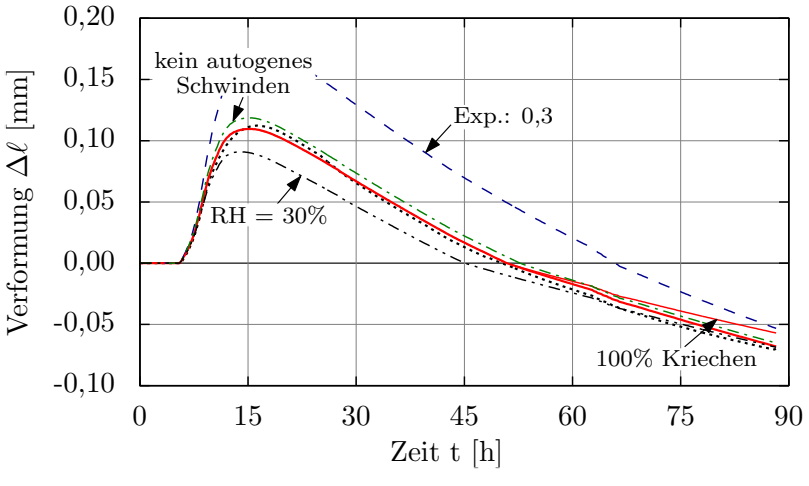


Abbildung 7.32: Ergebnisse der Parameterstudie – Verformungen

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass

- der *Exponent der Zeitfunktion* des Kriechens gemäß [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] mit 0,3 zu groß ist und er für diesen Beton *abgemindert* werden muss,
- die durch *autogenes Schwinden* hervorgerufenen Effekte bei diesem Beton *keinen nennenswerten* Einfluss haben,
- für den betrachteten Versuch ein Unterschied zwischen *Druck- und Zugkriechen* vorliegt, der eine *Unterscheidung* diesbezüglich notwendig macht und

– sich die Umgebungsluftfeuchtigkeit und damit der Faktor φ_{RH} *stark* auf das Berechnungsergebnis auswirkt.

Potential und Anreiz für weitere Untersuchungen gibt eine offengebliebene Frage: Der berechnete Verlauf der viskoelastischen Gesamtspannung zeigt sich im Vergleich zum gemessenen im Bereich $\approx 25 \leq t \leq 52{,}5$ *konkaver*. Dies ist genau der Zeitraum, innerhalb welchem es zu einem Temperaturrückgang kommt, also *Entlastung* herrscht. Nun gilt es zu hinterfragen, ob bei Entlastung weitere – bisher unberücksichtigt gebliebene – Effekte zu berücksichtigen sind. Es wäre beispielsweise denkbar, dass in diesem Bereich die selbstständige Entlastung des Rahmens aufgrund vorherrschender Reibung zwischen dem Eisenrahmen und dem Holzgestell, durch das der Rahmen gestützt wurde, behindert worden ist (s. Abb. 7.1). Diese Behinderung hat dann auf ein geändertes Kriechverhalten in diesem Bereich geführt. Da es sich allerdings lediglich um Messwerte handelt, wäre es auch möglich, dass diese durch etwaige Ungenauigkeiten oder andere Parameter beeinflusst worden sind, was zu den gemessenen Werten geführt hat. Des Weiteren ist das hier vorgestellte Modell eben „bloß“ ein Modell, welches die Realität nur *annähern*, nie jedoch zu 100 % genau *abbilden* kann, sodass diese Abweichung auch auf die Modellierung der Materialkenngrößen (E-Modul, Hydratationsgrad, ...) zurückzuführen sein könnte ...

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Berechnungsalgorithmus entwickelt, der die analytische Bestimmung von Zwangsbeanspruchungen in Betonbauteilen ermöglicht. Auf Grundlage von Verformungseinwirkungen (Temperatur, Schwinden) sowie den mechanischen Betoneigenschaften und des Behinderungsgrades – all das muss a priori bekannt sein – können mit diesem Ansatz die Zwangsspannungen realitätsnah quantifiziert werden. Realitätsnah deshalb, da die viskoelastischen Eigenschaften des Betons unter Berücksichtigung der jüngsten Erkenntnisse zu diesem Thema implementiert wurden. Das Vorgehen selbst ist zeitschrittbasiert und entspricht in seiner Theorie den Überlegungen aus [Tue et al., 2007], [Nietner et al., 2011] und [Schlicke und Tue, 2012]. Die Anwendbarkeit dieser Theorie wurde mit einer umfangreichen Literaturstudie überprüft.

Der Spannungsabbau und die damit einhergehende Kriechverformung unterliegen einem zeitlichen Verlauf. Dies erfordert eine schrittweise Betrachtung. Die Schrittweite muss dabei genügend klein gewählt werden, um die Prämisse einer konstanten Spannung bzw. Verformung für die Phänomene Kriechen und Relaxation rechtfertigen zu können. Zusätzlich muss der Hydratationsvorgang des Betons berücksichtigt werden, was ebenfalls eine schrittweise Betrachtung erfordert. Die mechanischen Betoneigenschaften sind vor allem im jungen Alter stark zeitabhängig und unterliegen dementsprechend einer Veränderung. Sie beeinflussen gemeinsam mit den Festhaltungen des Systems den Grad der Behinderung. Aufgrund der endlichen Steifigkeit angrenzender Bauteile (= Lagerbedingungen im Rechenmodell) stellt sich i.d.R. eine Mischform aus vollständiger Verformungsfreiheit und gänzlicher Verformungsbehinderung ein. Diese wird als teilweise Verformungsbehinderung bezeichnet.

Verfiziert wurde das Berechnungsmodell anhand von Versuchsergebnissen aus aktuell laufenden Forschungsarbeiten am Institut für Betonbau der Technischen Universität Graz. Dabei wurden sämtliche aus dem Versuch gewonnene Materialdaten im Modell berücksichtigt und die Kriecheigenschaften gemäß den Angaben in der aktuellen Fassung der [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] unterstellt. Die Berechnungsergebnisse decken sich mit der Versuchsauswertung in einer für die Verifikation des Modells ausreichenden Genauigkeit. Des Weiteren wurden die Einflussparameter der Kriecheigenschaften des Betons in einer darauffolgenden Studie betrachtet. Als Ergebnis dieser Betrachtung kann zusammenfassend formuliert werden (s. u.a. [Nietner et al., 2011, S. 176]), dass

- viskoelastische Betoneigenschaften in der Berechnung *nicht* vernachlässigt werden dürfen.
- reale Bauteile aufgrund der endlichen Steifigkeit ihrer Festhaltungen einer *teilweisen Verformungsbehinderung* unterliegen, die eine Kombination der viskoelastischen Effekte Kriechen und Relaxation mit sich bringt.
- der Zwangkraftabbau bei teilweiser Verformungsbehinderung vom *Behinderungsgrad* abhängig ist.
- sich der Relaxationsprozess anschaulich ergibt, wenn Kriechen des behinderten Dehnungsanteils im System unterstellt wird. Da die so hervorgerufenen Kriechdehnungsinkremente ebenfalls der Verformungsbehinderung unterliegen und eine entgegengesetzte Zwangkraft erzeugen, ergibt sich bei der Überlagerung der Relaxationseffekt implizit.
- die Kenntnis einer Relaxationsfunktion *nicht* notwendig ist, da sie sich aus der Betrachtung des Dehnstabmodells unter Zugrundelegung eines (beliebigen) Kriechmodells ergibt.

- die gezeigten Zusammenhänge anhand eines Versuches befriedigend verifiziert werden konnten.
- es schwierig ist ein Kriechmodell von vorneherein zu empfehlen (s.a. [Nietner et al., 2011, S. 176]). Mit dem hier willkürlich gewählten Kriechmodell aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009] wurden jedoch gute Ergebnisse erzielt.
- die Implementierung vergleichsweise einfach erfolgen kann und keine speziellen Implementierungen auf der Basis von z.B. rheologischen Modellen notwendig sind, sondern lediglich die zutreffende Beschreibung des Kriechverhaltens unter konstanter Last[8] erforderlich ist.

Um bei größeren Betrachtungszeiträumen und/oder kleineren Schrittweiten die Leistungsfähigkeit der Berechnung aufrecht zu erhalten, sollte(n)

- die Implementierung in einer leistungsstarken Programmierumgebung erfolgen.
- die Kriechzahlen mittels eines Preprocessings im Voraus bestimmt und in einem Zwischenspeicher vorgehalten werden, um diese nicht für jeden Zeitpunkt neu berechnen zu müssen.
- die Affinität der Kriechkurven in Form eines Proportionalitätsfaktors im Sinne eines Vorfaktors ausgenutzt werden. Hierfür sind allerdings weitere Untersuchungen notwendig.
- man vergleichbare Inkremente in Clustern zusammenfassen, um so den Superpositionsaufwand zu minimieren.

Zusammenfassend konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass die analytische Ermittlung der Zwangsspannungen von erhärtenden Betonbauteilen unter Berücksichtigung der viskoelastischen Betoneigenschaften gelingt. Die Güte dieser Berechnung ist hierbei sehr stark abhängig von einer realitätsnahen Abbildung des Systembehinderungsgrads. Dessen Bestimmung ist in keinster Weise trivial, da dieser von vielen (zeitgebundenen) Eingangsgrößen abhängt, die a priori bekannt sein müssen. Im Falle von Systemen, bei denen dieser stets bekannt ist (bspw. der hier betrachtete Versuch oder ein Zugstab) oder Problemstellungen, die auf eine eindimensionale Betrachtung reduziert werden können, ist eine solche Bestimmung ebenfalls auf analytischem Weg möglich. Zur Lösung mehrdimensionaler Probleme sind allerdings numerische Methoden (z.B. FEM) erforderlich.

[8] Damit sind die existierenden Kriechmodelle gemeint, wie beispielsweise das hier verwendete aus [ÖNORM EN 1992-1-1, 2009]. Dieses gilt definitionsgemäß für Bauteile, die reinem Kriechen unterliegen d.h. einer konstanten (Zwangs)spannung ausgesetzt sind.

A Zusammenhang von Kriechen und Relaxation – Verfahren von Trost

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang von Kriechen und Relaxation näher erläutert und insbesondere auf die Lösung nach TROST eingegangen. Speziell soll hier die Ermittlung des zur Anwendung von Glg. 3.34 unerlässlichen Relaxationsbeiwerts ρ herausgegriffen werden. Die Lösung nach TROST stellt eine – vor allem in der Baupraxis gebräuchliche und übliche – Möglichkeit dar, um mit einer bekannten Kriechfunktion auf die Relaxation zu schließen. Neben dem TROSTschen Verfahren existieren weitere Ansätze, auf die in [Gutsch, 1998] eingegangen wird. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in diesem Abschnitt die Einflüsse des Schwindens unbeachtet bleiben.

A.1 Superpositionsprinzip

Mit dem so genannten BOLTZMANNschen Superpositionsprinzip lässt sich die Dehnungsantwort bei vorgegebener Spannungsgeschichte bzw. die Spannungsantwort bei vorgegebener Dehngeschichte unter Berücksichtigung des viskoelastischen Verhaltens von Beton ermitteln. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Gleichungen Glg. A.1 bis Glg. A.4 für ein System gelten, welches Zwangsspannungen während der Erhärtung erfährt und zunächst spannungsfrei ist[9].

Man erhält die Spannungsanwort bei vorgegebener Dehngeschichte durch durch die Aufsummierung von zu unterschiedlichen Belastungszeitpunkten t_i aufgetretenen Spannungssprüngen $\Delta\sigma(t_i)$. Daraus ergibt sich für einen beliebigen Betrachtungszeitpunkt t_k bei einer Erstbelastung zum Zeitpunkt t_1 folgende Gleichung:

$$\varepsilon(t_k,t_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \left[1 + \varphi(t_k,t_i)\right] \tag{A.1}$$

Für die Voraussetzung einer stetig veränderlichen Spannungsgeschichte ergibt sich aus Glg. A.1 die in Glg. A.2 angegebene Integralgleichung:

$$\varepsilon(t_k,t_1) = \int_{t_1}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\sigma(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot \frac{1}{E(t_i)} \cdot \left[1 + \varphi(t_k,t_i)\right] \mathrm{d}t_i \tag{A.2}$$

Zusätzlich zu den angeführten Gleichungen kann die Spannungsantwort für eine vorgegebenen Dehngeschichte unter Berücksichtigung der Relaxation ebenfalls mit dem BOLTZMANNschen Superpositionsprinzip angegeben werden, welche sich dann zu

$$\sigma(t_k,t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varepsilon(t_i) \cdot E(t_i) \cdot \psi(t_k,t_i) \tag{A.3}$$

[9] In [Trost, 1967a] wird von einer Ursprungslast ausgegangen. Die Formulierung des Spannungsabbaus infolge Relaxation ist außerdem etwas anders als hier wiedergegeben: Hier wird mit der Relaxationszahl $\psi(t_k,t_i)$ nach Glg. 3.8 jener Spannungsanteil eines Inkrements bestimmt, der zu einem Zeitpunkt noch vorhanden ist, wogegen TROST von einer Definition der Relaxationsfunktion gemäß Glg. 3.39 ausgeht.

ergibt, wenn eine Relaxationsfunktion $\psi(t_k,t_i)$ bekannt ist (vgl. [Trost, 1967a, S. 233]). Analog geht auch hier Glg. A.3 – unter der Voraussetzung einer stetig veränderlichen Dehnungsgeschichte – in eine Integralgleichung über, welche in Glg. A.4 angegeben ist.

$$\sigma(t_k,t_1) = \int_{t_1}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot E(t_i) \cdot \psi(t_k,t_i)\,\mathrm{d}t_i \tag{A.4}$$

Wird das Superpositionsprinzip der Vollständigkeit halber für eine Spannungsantwort einer vorgegebenen Dehngeschichte nun mit der von Trost gegebenen Definition der Relaxationszahl geschrieben, so ergeben sich aus den Gleichungen Glg. A.3 bzw. Glg. A.4 die Gleichungen Glg. A.5 bzw. Glg. A.6:

$$\sigma(t_k,t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varepsilon(t_i) \cdot E(t_i) \cdot \big[1 - \psi(t_k,t_i)\big] \tag{A.5}$$

$$\sigma(t_k,t_1) = \int_{t_1}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot E(t_i) \cdot \big[1 - \psi(t_k,t_i)\big]\,\mathrm{d}t_i \tag{A.6}$$

A.2 Lösung nach Trost

Unter der Einwirkung von mehreren konstanten Belastungsstufen $\Delta\sigma(t_i)$, welche in den beliebigen Zeitpunkten $t_i < t_\infty$ nachträglich zu einer seit dem Zeitpunkt t_0 wirksamen Ausgangsbeanspruchung $\sigma(t_0)$ (z.B. Eigengewicht) aufgebracht werden, ergibt sich mit dem Superpositionsprinzip und damit Glg. A.1 zu (vgl. [Trost, 1967a, S. 233], [Trost, 1988, S. 5]):

$$\varepsilon(t_k) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_0)\big] + \int_{t_i=t_0}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\sigma(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot \frac{1}{E(t_i)} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_i)\big]\,\mathrm{d}t_i \tag{A.7}$$

Die Größen $\varphi(t_k,t_i)$ bzw. $E(t_i)$ sind dabei zeitabhängige Werkstoffkennwerte. Diese sind zwar aus Versuchsbeobachtungen als Mittelwerte hinreichend genau bekannt, besonders die Kriechfunktionen $\varphi(t_k,t_i)$ entziehen sich jedoch einer handlichen mathematischen Formulierung. Ist der Spannungsverlauf $\sigma(t)$ vorgegeben, so kann $\varepsilon(t)$ mittels einer Quadratur ermittelt werden. Für eine vorgegebene Dehnung $\varepsilon(t)$ ergibt sich die Integralgleichung Glg. A.7 deren Lösung im Allgemeinen aufgrund der unhandlichen Formulierbarkeit der vorher erwähnten Kriechfunktionen nicht möglich ist (vgl. [Trost, 1967a, S. 233], [Trost, 1988, S. 5]). Gemäß Trost ist es vertretbar, den Elastizitätsmodul als *konstant* mit einem Mittelwert anzunehmen, besonders dann, wenn der Beton erst später – und nicht schon im frühen Alter – belastet wird[10]. Mit der Annahme eines konstanten E-Moduls wird Glg. A.7 dann zu Glg. A.8:

$$\varepsilon(t_k) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_0)\big] + \frac{\sigma(t_k) - \sigma(t_0)}{E_{28}} + \frac{1}{E_{28}} \cdot \int_{t_i=t_0}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\sigma(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot \varphi(t_k,t_i)\,\mathrm{d}t_i \tag{A.8}$$

Die unter erzwungenen Verformungen auftretenden Spannungsänderungen können nach Trost „[...] *durch eine zweckmäßige Umwandlung der integralen Form des Superpositionsprinzips in eine algebraische Spannungs-Dehnungs-Beziehung*“ (s. [Trost, 1988, S. 6]) ermittelt werden. Dadurch ist es

[10] Dies ist u.a. auch ein Grund der Forschungsarbeiten an einem neuen Ansatz zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens am Institut für Betonbau der TU Graz.

nun möglich, Relaxationsprobleme zu lösen. Durch eine Substitution des Integralausdrucks ergibt sich aus Glg. A.8 eine vereinfachte algebraische Gleichung Glg. A.9a. Würden Schwinddehnungen berücksichtigt werden, so führt dies zu der in Glg. A.9b angegebenen Addition der Schwinddehnung $\varepsilon_{\mathrm{s}}(t_k)$.

$$\varepsilon(t_k,t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_0)\big] + \frac{\sigma(t_k) - \sigma(t_0)}{E_{28}} + \frac{\sigma(t_k) - \sigma(t_0)}{E_{28}} \cdot \rho(t_k,t_0) \cdot \varphi(t_k,t_0) \tag{A.9a}$$

$$\varepsilon(t_k,t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \varphi(t_k,t_0)\big] + \frac{\sigma(t_k) - \sigma(t_0)}{E_{28}} \cdot \big[1 + \rho(t_k,t_0) \cdot \varphi(t_k,t_0)\big] + \varepsilon_{\mathrm{s}}(t_k) \tag{A.9b}$$

Nun muss allerdings der in Abschn. 3.5.1 bereits erwähnte, um die verminderte Kriechfähigkeit durch die Alterung des Betons bei später aufgebrachten Spannungsstufen ($t_i > t_1$) berücksichtigen zu können, so genannte *Relaxationsbeiwert* $\rho(t_k,t_i)$ definiert werden. Dieser wird in der Literatur auch als *Alterungsbeiwert* („aging coefficient“) bezeichnet. Der Relaxationsbeiwert wird berechnet aus dem Verhältnis des Produkts der aufsummierten Spannungsstufen $\Delta\sigma(t_i)$ mit der zugehörigen Kriechfunktion $\varphi(t_k,t_i)$ zum Produkt aus der bis zum Betrachtungszeitpunkt eingetretenen Spannungsänderung $\sigma(t_k) - \sigma(t_0)$, mit der Kriechzahl $\varphi(t_k,t_0)$, die zur Ursprungsspannung $\sigma(t_0)$ gehört. In Formelschreibweise kann der Relaxationsbeiwert dann mit

$$\rho(t_k,t_0) = \frac{\int\limits_{t_i=t_0}^{t_k} \frac{\mathrm{d}\sigma(t_i)}{\mathrm{d}t_i} \cdot \varphi(t_k,t_i)\,\mathrm{d}t_i}{\big[\sigma(t_k) - \sigma(t_0)\big] \cdot \varphi(t_k,t_0)} = \frac{\sum\limits_{t_i=0}^{t_i\to\infty} \Delta\sigma(t_i) \cdot \varphi(t_k,t_i)}{\sigma(t_k,t_0) \cdot \varphi(t_k,t_0)} \leq 1{,}0 \tag{A.10}$$

angegeben werden, wobei er i.d.R. als konstante Größe von $\rho = 0{,}8$ angenommen wird.

B Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens mittels rheologischer Modelle

B.1 Rheologische Grundelemente

Unter dem Begriff der *Rheologie* wird allgemein eine Wissenschaft verstanden, die sich mit dem Verformungs- und Fließverhalten von Materie beschäftigt. In der Rheologie treffen dabei Teilgebiete der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie sowie der Strömungslehre zusammen. Rheologische Modelle sind – ganz allgemein gesprochen – Modelle, die zur Beschreibung der Verformungseigenschaften von verschiedenen Materialien dienen. Sie existieren neben den analytischen, an Kriechversuchen kalibrierten, Vorhersagemodellen und erwiesen sich als vorteilhaft für numerische Berechnungen (vgl. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 83]).

Als rheologische *Grundelemente* sind die HOOKEsche Feder und der NEWTONsche Dämpfer bekannt. Durch Kombination dieser Grundelemente, beispielsweise durch Reihen- oder Serienschaltung, kann das zeitabhängige Verhalten viskoelastischer Stoffe beschrieben werden. Angewendet werden hier vor allem die Kombinationen der Grundelemente zu so genannten *Grundkörpern*, wie MAXWELL- oder KELVIN-Modellen.

Die mit rheologischen Modellen gewonnenen Stoffgesetze können durch Differentialgleichungen angegeben werden. Eine für beliebige Kombinationen der rheologischen Grundelemente gültige Stoffgleichung in allgemeiner Form lautet dann (vgl. [Gutsch, 1998, S. 157]):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i \varepsilon}{(\mathrm{d}t)^i} = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \frac{\mathrm{d}^k \sigma}{(\mathrm{d}t)^k} \tag{B.1}$$

In Glg. B.1 sind a_i und b_k Materialparameter, welche beim HOOKEschen Federelement der E-Modul E_j und beim NEWTONschen Dämpfungselement die NEWTONsche Viskosität η_j sind.

B.1.1 Hookesches Grundelement

Das HOOKEsche Grundelement ist eine HOOKEsche Feder. Dieses Element dient zur Modellierung elastischer Verformungsanteile, wobei seine charakteristische Größe der Elastizitätsmodul E ist. Wird Linearität und zeitliche Unabhängigkeit vorausgesetzt, so gilt für dieses Element das HOOKEsche Gesetz, welches die bereits bekannte – nur für einen *einachsigen* Spannungszustand geltende – lineare Beziehung zwischen Spannung σ und Dehnung ε herstellt:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{B.2}$$

Das HOOKEsche Grundelement ist in Abb. B.1 dargestellt.

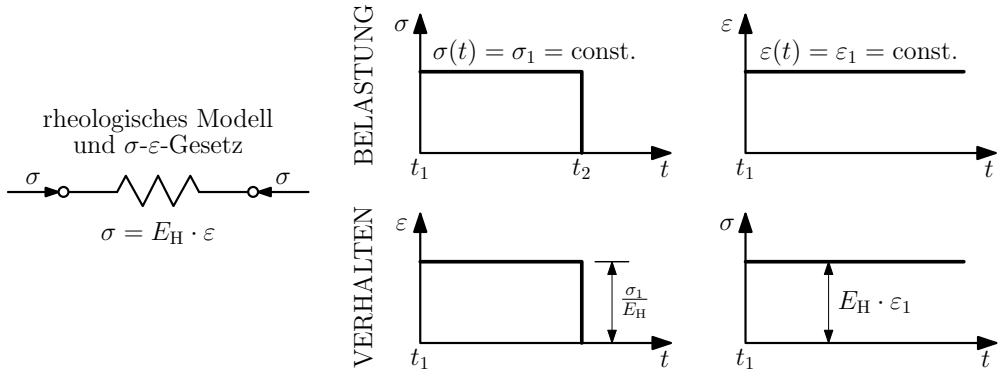


Abbildung B.1: HOOKEsches Federelement mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158]

B.1.2 Newtonsches Grundelement

Das NEWTONsche Grundelement ist der so genannte NEWTONsche Dämpfungszylinder. Es wird verwendet um das zeitabhängige, viskose Verformungsverhalten eines Stoffes zu beschreiben. Zwischen der Spannung σ und Deformationsrate $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ besteht dabei ein linearer Zusammenhang. Das NEWTONsche Dämpfungselement ist in Abb. B.2 dargestellt.

Mit der Verwendung von η als Symbol für die NEWTONsche Viskosität eines Stoffes, kann die für dieses Element gültige Beziehung in eine, dem HOOKEschen Gesetz aus Glg. B.2 ähnliche, Form gebracht werden:

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \qquad \text{mit der Zeitableitung } \dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{B.3}$$

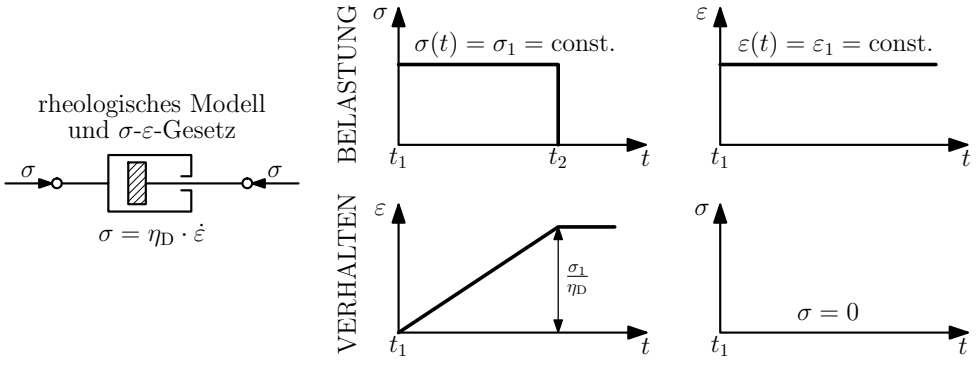


Abbildung B.2: NEWTONsches Dämpfungselement mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158]

B.2 Rheologische Grundkörper

B.2.1 Kelvin-Körper

Ein so genannter KELVIN-Körper (auch KELVIN-Element) besteht aus einer Parallelschaltung eines NEWTONschen Dämpfungselements mit einem HOOKEschen Federelement. Eine einwirkende Kraft

wird bei diesem Element durch eine elastische Verformung (Feder) und durch „innere Reibung“ (Dämpfer) aufgenommen. Eine zu erfüllende Bedingung ist, dass die Deformation beider Elemente gleich groß sein muss (= dieselbe Verformung). Dieser Körper eignet sich zur qualitativen Beschreibung des Betonkriechens: wird eine Spannung konstant gehalten, so kommt es zu einer zeitabhängigen Verformung, die gegen einen Endwert strebt. Tritt eine vollständige Entlastung auf, so ist die zeitabhängige Verformung reversibel. Es ist allerdings nicht möglich, das viskoelastische Verhalten von Beton mit diesem Element allein zu beschreiben. Eine durch eine Spannungsänderung hervorgerufene elastische Verformung kann damit nämlich nicht abgebildet werden. In Abb. B.3 ist erkennbar, dass sich dieses Modell zur Beschreibung der Relaxation überhaupt nicht eignet (vgl. [Gutsch, 1998, S. 159], [Meinhard, 1999, S. 7]).

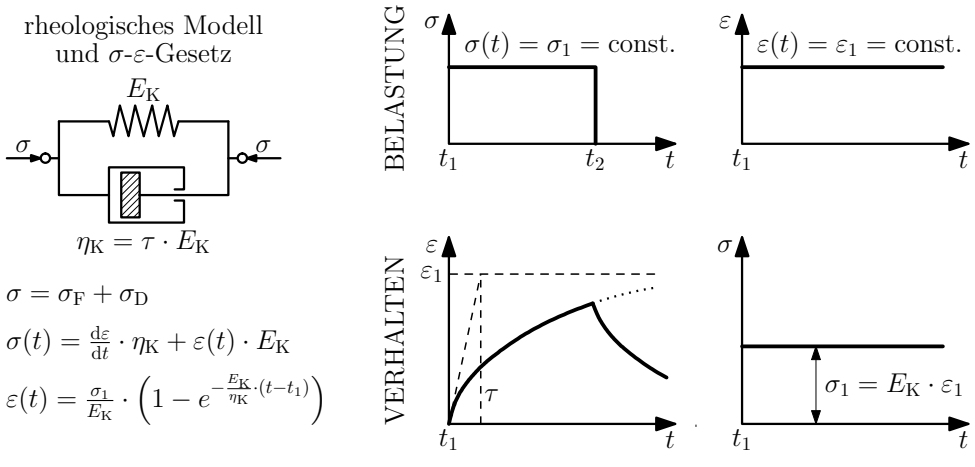


Abbildung B.3: KELVINscher Grundkörper mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158]

B.2.2 Maxwell-Körper

Zur qualitativen Beschreibung des Relaxationsvorganges bietet sich das so genannte MAXWELL-Element an. Der Fließvorgang setzt bei diesem Körper unabhängig von einer Schwellspannung ein. Für eine konstante Spannung $\sigma(t) = \sigma_1 =$ const. kommt es beim MAXWELL-Modell zu einer spontanen elastischen Verformung zufolge dieses Spannungssprunges. Eine linear zunehmende Kriechverformung rührt aus der zeitunabhängigen Dämpferviskosität η her. Wird das Element entlastet, so ist die elastische Verformung reversibel, die Kriechverformung hingegen irreversibel. Ein MAXWELL-Element mit zeitunabhängiger Dämpferviskosität ist demnach zur Beschreibung des Betonkriechens nicht geeignet. Diesem Nachteil kann entgegengetreten werden, in dem man eine Viskosität $\eta(t)$ ansetzt, die von der Zeit abhängig ist. Problematisch ist allerdings, dass die Spannung unter einer konstanten Dehnung (Relaxation) sehr schnell gegen Null strebt. Diese Tatsache deckt sich nicht mit dem Relaxationsverhalten, welches in Versuchen beobachtet wurde. Trotz der Beschreibung der Viskosität durch eine zeitabhängige Funktion wird der Spannungsabfall stets überschätzt. Das Verhalten eines MAXWELL-Körpers ist in Abb. B.4 dargestellt (vgl. [Gutsch, 1998, S. 159]).

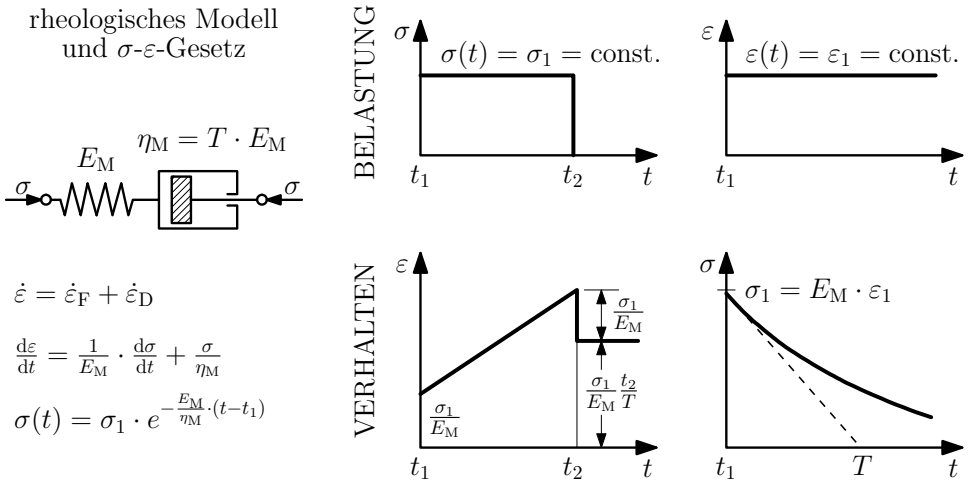


Abbildung B.4: MAXWELLscher Grundkörper mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158]

B.3 Erweiterung der rheologischen Grundkörper um Grundelemente

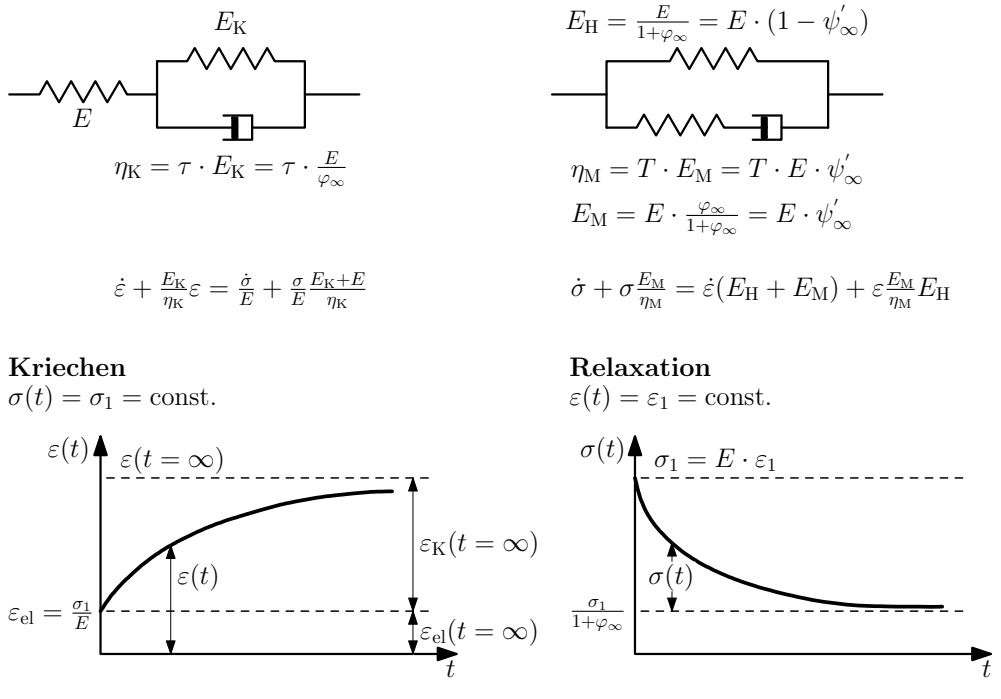


Abbildung B.5: „Erweiterte“ Grundkörper – Beschreibung eines linear viskoelastischen Festkörpers mit rheologischen Modellen, σ-ε-Gesetzen und Verhalten nach [Gutsch, 1998, S. 160]

Wie im Vorhergehenden erläutert wurde eigenen sich die erwähnten Grundkörper isoliert nicht, um das (linear) viskoelastische Verhalten von Beton bzw. eines Festkörpers zutreffend darzustellen. Es wurden daher die Grundkörper von MAXWELL und KELVIN durch Kombinationen mit HOOKEschen oder KELVINschen Grundelementen erweitert, was auf brauchbarere rheologische Modelle führte, wie beispielsweise der KELVIN-VOIGT-Körper (s. [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 38]). Bei der Formulierung der Differentialgleichungen für „erweiterte rheologische Grundkörper“ sind verschiedene

Kopplungsvorschriften einzuhalten. In Abb. B.5 sind rheologische Modelle und Stoffgesetze eines viskoelastischen Festkörpers dargestellt. Mit Grundkörper-Kombinationen, wie sie in Abb. B.5 dargestellt sind, kann das viskoelastische Verhalten noch nicht genau genug beschrieben werden. Es ist daher erforderlich, mehrere KELVIN-Elemente seriell oder mehrere MAXWELL-Elemente parallel zu schalten. Auf diese Weise ergeben sich so genannte KELVIN- oder MAXWELL-Reihen. Diese sind in Abb. B.6 dargestellt (vgl. [Gutsch, 1998, S. 161]).

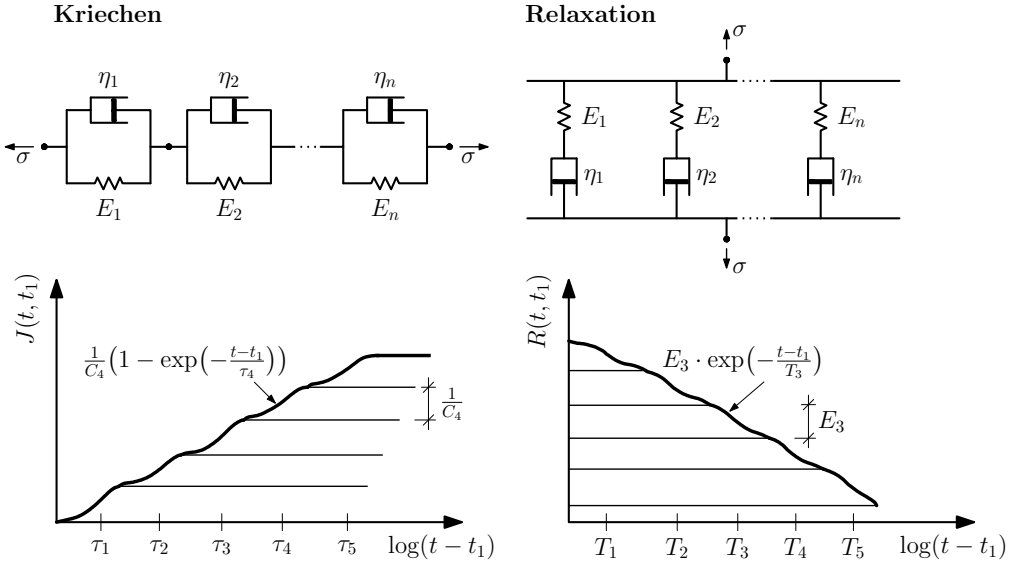


Abbildung B.6: KELVIN- bzw. MAXWELL-Reihen für die Beschreibung von Kriechen und Relaxation nach [Gutsch, 1998, S. 160]

Mit den in Abb. B.5 angegebenen Zusammenhängen, können die dort abgedruckten Differentialgleichungen in die folgende Formen gebracht werden. Für den mit einem HOOKEschen Grundelement in Serie geschaltenen KELVIN-Grundkörper ergibt sich somit:

$$\dot{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\tau}=\frac{\sigma}{E}\cdot\frac{1+\varphi_\infty}{\tau}+\frac{\dot{\sigma}}{E} \tag{B.4}$$

Die Variable τ ist dabei die Retardationszeit, welche mit $\frac{\varphi_\infty\cdot\eta_\mathrm{K}}{E}$ gegeben ist (s. a. Abb. B.5). Für den zu einem HOOKEschen Grundelement parallel geschaltenen MAXWELL-Grundkörper folgt:

$$\dot{\varepsilon}+\varepsilon\frac{1-\overbrace{(1-\psi_\infty)}^{=\psi'_\infty}}{T}=\frac{\sigma}{E}\cdot\frac{1}{T}+\frac{\dot{\sigma}}{E} \tag{B.5}$$

Hierbei stellt T die Relaxationszeit dar, die mit $\frac{\eta_\mathrm{M}}{E\cdot\psi'_\infty}$ gegeben ist (s. a. Abb. B.5).

Die Lösungen der Differentialgleichungen Glg. B.4 bzw. Glg. B.5 sind aufgrund ihrer ähnlichen Form ebenfalls ähnlich. – Für Glg. B.4 ist die Lösung für $\varepsilon(t)$ bei $\sigma(t_1)=\sigma_1=$ const. gegeben durch:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_1}{E_1}\cdot\left[1+\varphi_\infty\cdot\left(1-e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right)\right] \tag{B.6}$$

Für Glg. B.5 hingegen ergibt sich die Lösung für $\sigma(t)$ bei $\varepsilon(t_1)=\varepsilon_1=$ const. mit:

$$\sigma(t)=\sigma_1\cdot\left[1-\psi'_\infty\cdot\left(1-e^{-\frac{t-t_1}{T}}\right)\right] \tag{B.7}$$

Werden nun die erwähnten Grundkörper in Serie bzw. Reihe geschalten, so ergeben sich bei einer Kombination von n KELVIN- oder MAXWELL-Körpern Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Die in Glg. B.6 angeführte Lösung wird dann zu

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_1}{E}\left[1 + \varphi_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_j}}\right)\right], \tag{B.8}$$

wobei $\sum_{j=1}^{n} c_j = 1$ ist und τ_j Retardationszeiten sind. Eine ähnliche Form der Lösung ergibt sich für parallelgeschaltete MAXWELL-Körper:

$$\sigma(t) = \sigma_1 \cdot \left[1 - \psi'_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T_j}}\right)\right], \tag{B.9}$$

wobei $\sum_{j=1}^{n} g_j = 1$ ist, T_j Relaxationszeiten sind und $\psi'_\infty = 1 - \psi_\infty$ ist.

Letztendlich folgt für die gesuchte Kriechfunktion der Reihenschaltung von KELVIN-Elementen aus Glg. B.6:

$$\varphi(t,t_1) = \underbrace{k \cdot f(t-t_1)}_{\text{vgl. Abschn. 3.3.3}} = k \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_j}}\right) \tag{B.10}$$

Die Relaxationsfunktion parallelgeschalteter MAXWELL-Grundkörper ist dann aus Glg. B.7 durch

$$\psi(t,t_1) = \frac{\sigma(t,t_1)}{\sigma(t_1)} = \sum_{j}^{n} g_j \cdot e^{-\frac{t-t_1}{T_j}} \tag{B.11}$$

gegeben.

Auch die in Glg. 3.7 gegebene Compliance-Funktion kann durch eine Reihenschaltung von KELVIN-Elementen ausgedrückt werden. Sie kann dann als

$$J(t,t_1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j(t_1)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_j}}\right) \tag{B.12}$$

dargestellt werden. Der Relaxationsmodul (s. Glg. 3.10) kann analog als eine Parallelschaltung von MAXWELL-Elementen geschrieben werden als:

$$R(t,t_1) = \sum_{j}^{n} E_j(t_1) \cdot e^{-\frac{t-t_1}{T_j}} \tag{B.13}$$

Die Retardationszeit des ersten KELVIN-Grundkörpers $\tau_{j=1}$ sollte sehr klein gewählt werden, beispielsweise mit 10^{-9} Tagen. Für den ersten KELVIN-Grundkörper bedeutet das eine sehr geringe Dämpferviskosität, sodass als Näherung $C_{j=1}(t_1) \approx E(t_1)$ gesetzt werden kann (s. [Gutsch, 1998, S. 162]).

Die in Glg. B.10 bis Glg. B.13 verwendeten Parameter c_j, g_j, τ_j, T_j, C_j und E_j müssen mittels Regression ermittelt werden, wobei Retardations- oder Relaxationszeiten (τ_j bzw. T_j) oftmals als Dekadensprünge dergestalt gewählt werden, dass das j-te KELVIN- oder MAXWELL-Element in der j-ten Dekade anspringt, wie es auch in Abb. B.6 zu sehen ist. Im Hinblick auf die altersabhängige Viskoelastizität müssen die Parameter c_j und g_j sowie auch C_j bzw. E_j in Abhängigkeit vom Erstbelstungsalter formuliert werden.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Kriechen einer Kragstütze (a) und Relaxation eines eingespannten Balkens (b) bei „idealen“ Randbedingungen 2

3.1 Viskoelastische Effekte bei einstufiger Belastung – schematische Darstellung 12
3.2 Zeitabhängige Phasen der Kriechverformung unter (hoher) konstanter Spannung nach [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 79] 15
3.3 Gegenüberstellung: unterschiedliche Ansätze für Kriechkurven bei einem alternden Material nach [Zilch und Zehetmaier, 2010, S. 80] 18
3.4 Gegenüberstellung: verzögerte Elastizität und affines Kriechen nach [Gutsch, 1998, S. 158] 19

4.1 Statisches System unter vollem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung 26
4.2 Statisches System unter vollem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung (Freikörperbild) 27
4.3 Statisches System unter teilweisem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung 28
4.4 Statisches System unter teilweisem Zwang mit konstanter Temperaturbelastung (Freikörperbild) 28

5.1 Exemplarische Darstellung der Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden 31
5.2 Darstellung exemplarischer – an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente einer Kriechkurve für Zeitintervalle von 12 Stunden 32
5.3 Darstellung exemplarischer – nicht an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente mehrerer Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden 33
5.4 Darstellung exemplarischer – an eine E-Modulentwicklung angepasste – Kriechinkremente mehrerer Kriechkurven für Zeitintervalle von 12 Stunden 34
5.5 Superposition der Zwangszustände in erhärtendem Beton mit zunehmender Steifigkeit, hervorgerufen durch Temperaturänderung (schematische Darstellung nach [Nietner et al., 2011]) 35
5.6 Superposition der Zwangszustände in erhärtendem Beton mit zunehmender Steifigkeit beim Auftreten eines durch eine Temperaturänderung hervorgerufenen entlastenden Spannungsinkrements (schematische Darstellung) 37

6.1 Betrachtetes System 39
6.2 E-Modul und Behinderungsgrad für die betrachteten Szenarien 39
6.3 Einstufige Temperatureinwirkung 42
6.4 Spannungen bei einstufiger Temperatureinwirkung 42
6.5 Verformungsergebnis bei einstufiger Temperatureinwirkung 43
6.6 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei einstufiger Temperatureinwirkung 43
6.7 Lineare Temperatureinwirkung 44
6.8 Spannungsergebnis bei einer linearen Temperatureinwirkung 44
6.9 Verformungsergebnis bei einer linearen Temperatureinwirkung 45
6.10 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei einer linearen Temperatureinwirkung 45
6.11 Sigmoidale Temperatureinwirkung 46
6.12 Spannungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturanstieg 46

6.13 Verformungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturanstieg 47
6.14 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei sigmoidalem Temperaturanstieg 47
6.15 Sprunghafter 3-stufiger Temperaturrückgang 49
6.16 Spannungsergebnis bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 49
6.17 Verformungsergebnis bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 50
6.18 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei 3-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 50
6.19 Sprunghafter 4-stufiger Temperaturrückgang 51
6.20 Spannungsergebnis bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 51
6.21 Verformungsergebnis bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 51
6.22 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei 4-stufigem sprunghaftem Temperaturrückgang 52
6.23 Linearer Temperaturrückgang 53
6.24 Spannungsergebnis bei linearem Temperaturrückgang 53
6.25 Verformungsergebnis bei linearem Temperaturrückgang 54
6.26 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei linearem Temperaturrückgang 54
6.27 Parabolischer Temperaturrückgang 55
6.28 Spannungsergebnis bei parabolischem Temperaturrückgang 55
6.29 Verformungsergebnis bei parabolischem Temperaturrückgang 55
6.30 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei parabolischem Temperaturrückgang 56
6.31 Sigmoidaler Spannungsrückgang 57
6.32 Spannungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturrückgang 57
6.33 Verformungsergebnis bei sigmoidalem Temperaturrückgang 57
6.34 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei sigmoidalem Temperaturrückgang 58
6.35 Unstetiger Temperaturanstieg 59
6.36 Spannungsergebnis bei unstetigem Temperaturanstieg 59
6.37 Verformungsergebnis bei unstetigem Temperaturanstieg 60
6.38 Verlauf des viskoelastischen Potentials bei unstetigem Temperaturanstieg 60

7.1 Versuchsrahmen und Messeinrichtung 62
7.2 Schematische Darstellung des Versuchsrahmens (Draufsicht) samt Messeinrichtung . . 62
7.3 Allgemeiner Temperaturverlauf über einen Betonquerschnitt 63
7.4 Konstanter Temperaturanteil ΔT_{N} sowie Temperatur im Punkt (Kern und Rand) . . . 64
7.5 Konstanter Temperaturanteil ΔT_{N} sowie Temperatur im Punkt (Kern und Rand; Ausschnitt) 64
7.6 Temperatureinwirkung und Verlauf der Betonkraft 65
7.7 Temperatureinwirkung und berechneter Betonspannungsverlauf 65
7.8 Adiabatischer und isothermer Hydratationsgradverlauf aus Kalorimetrie 67
7.9 Gemessener und modellierter Hydratationsgrad über realer Zeit t (logarithmisch) . . . 68
7.10 Gemessener und modellierter E-Modul über realer Zeit t 69
7.11 Abhängigkeit des Beiwerts φ_{RH} von der rel. Luftfeuchtigkeit für Betone ($f_{\mathrm{cm}} \leq 35\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$) 70
7.12 Abhängigkeit der Endkriechzahl φ_0 (f. $RH = 100\,\%$) von der mittleren Zylinderdruckfestigkeit f_{cm} 71
7.13 Abhängigkeit des Zeitbeiwertes β vom Zeitpunkt der Belastung t_0 72
7.14 Abhängigkeit der Grundkriechzahl φ_0 von der Luftfeuchte φ_{RH}, der Druckfestigkeit $\beta(f_{\mathrm{cm}})$ und vom Zeitpunkt des Belastungsbeginns $\beta(t_0)$ 72
7.15 Temperaturentwicklung und gemessener/berechneter Gesamtspannungsverlauf 73
7.16 Gemessener bzw. berechneter Gesamtverformungsverlauf 73
7.17 E-Modul und Behinderungsgrad 74
7.18 Verlauf des viskoelastischen Potentials 74
7.19 Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das Spannungsergebnis . . 78
7.20 Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das Verformungsergebnis . 78
7.21 Einfluss des Exponenten der Zeitfunktion des Kriechens auf das viskeolastische Potential 79

7.22 Einfluss des autogenen Schwindens auf das Spannungsergebnis 80
7.23 Einfluss des autogenen Schwindens auf das Verformungsergebnis 80
7.24 Einfluss des autogenen Schwindens auf das viskoelastische Potential 81
7.25 Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das Spannungsergebnis 82
7.26 Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das Verschiebungsergebnis 82
7.27 Einfluss der geänderten Kriechfähigkeit auf das viskoelastische Potential 83
7.28 Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das Spannungsergebnis 84
7.29 Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das Verschiebungsergebnis . . . 84
7.30 Einfluss der geänderten Umgebungsluftfeuchtigkeit auf das viskoelastische Potential . 85
7.31 Ergebnisse der Parameterstudie – Gesamtspannungen 86
7.32 Ergebnisse der Parameterstudie – Verformungen 86

B.1 HOOKEsches Federelement mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158] 94
B.2 NEWTONsches Dämpfungselement mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158] . 94
B.3 KELVINscher Grundkörper mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158] 95
B.4 MAXWELLscher Grundkörper mit rheologischem Modell, σ-ε-Gesetz und Verhalten unter konstanter Spannung bzw. konstanter Dehnung nach [Gutsch, 1998, S. 158] . . . 96
B.5 „Erweiterte“ Grundkörper – Beschreibung eines linear viskoelastischen Festkörpers mit rheologischen Modellen, σ-ε-Gesetzen und Verhalten nach [Gutsch, 1998, S. 160] . . . 96
B.6 KELVIN- bzw. MAXWELL-Reihen für die Beschreibung von Kriechen und Relaxation nach [Gutsch, 1998, S. 160] 97

Tabellenverzeichnis

5.1 Tabellarische Darstellung des Abbaus eines Spannungsinkrements 33

6.1 Zusammenfassung der wichtigsten Berechnungsparameter 40

7.1 Hauptabmessungen des Versuchskörpers 63
7.2 Zusammenfassung der wichtigsten Berechnungsparameter 66
7.3 Messwerte der Druckfestigkeit und äquivalenter E-Modul 69
7.4 Variierter Exponent der Zeitfunktion des Kriechens 77
7.5 Variierter Faktor zum (vielfachen) Berücksichtigen des autogenen Schwindens 79
7.6 Variierter Faktor zum Berücksichtigen der Kriechfähigkeit nach dem Nulldurchgang . 81
7.7 Variierter Parameter der Luftfeuchtigkeit 83

Literaturverzeichnis

Bažant, Z. P. und Wu, S. T. (1974). Rate-type creep law of aging concrete based on maxwell chain. In *Materials and Structures*, S. 45–60. Springer Verlag, Berlin, Deutschland.

Breitenbücher, R. (1989). *Zwangsspannungen und Rissbildung infolge Hydratationswärme.* Dissertation, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München, München, Deutschland.

CEB-FIP MODEL CODE 1990 (1991, 1993). *CEB-FIP MODEL CODE 1990.* Comité Euro-International du Béton, Lausanne, France.

Eierle, B. und Schikora, K. (2000a). Bodenplatten unter frühem Temperaturzwang – Rechenmodelle und Tragverhalten. In *Bauingenieur 75*, S. 671–678. Springer VDI Verlag, Düsseldorf, Deutschland.

Eierle, B. und Schikora, K. (2000b). *Zwang und Rissbildung infolge Hydratationswärme – Grundlagen, Berechnungsmodelle und Tragverhalten.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 512, Beuth Verlag GmbH, Berlin, Deutschland, 1. Auflage.

Gutsch, A.-W. (1998). *Stoffeigenschaften jungen Betons – Versuche und Modelle.* Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.

Gutsch, A.-W. (2001). Properties of early age concrete - experiments and modelling. Conference, RILEM International Conference on Early Age Carcking in Cementitious Systems (EAC '01): Pre-Proceedings, Haifa, Israel.

Henning, W. (1987). *Zwangrißbildung und Bewehrung von Stahlbetonwänden auf steifen Unterbauten.* Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.

Iwaki, R., Natsume, T., Murayama, M., und Onuki, H. (1983). Study on analysis of thermal stress due to heat of hydration in concrete. Report, Kajima Institute of Construction Technology, Tokyo, Japan.

Laube, M. (1990). *Werkstoffmodell zur Berechnung von Temperaturspannungen in massigen Betonbauteilen im jungen Alter.* Dissertation, Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.

Meinhard, H. (1999). *Rheologische Untersuchungen zu Härteeindruckexperimenten im Nanometerbereich.* Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle (Saale), Deutschland.

Morabito, P. (1994). Heat of Hydration. Report, International Symposium on Thermal Cracking in Concrete at Early Ages, München, Deutschland.

Nietner, L. (2009). *Mathematische Formulierung von Werkstoffmodellen für die Berechnung von hydratationsbedingten Zwangspannungen in massigen Betonbauteilen.* Dissertation, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Leipzig, Leipzig, Deutschland.

Nietner, L., Schlicke, D., und Tue, N. V. (2011). Berücksichtigung von Viskoelastizität bei der Beurteilung von Zwangbeanspruchungen erhärtender Massenbetonbauteile. In *Beton- und Stahlbetonbau 106*, S. 169–177. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

ÖNORM EN 1992-1-1 (2009). *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken (Ausgabe: 2009-07-01)*. Österreichisches Normungsinstitut, Wien, Österreich.

Ozawa, M. und Morimoto, H. (2000). Evaluation of creep of high strength concrete at early ages. In *Proceedings of the International Workshop "Control of cracking in Early Age Concrete"*. A. A. Balkema Publishers Rotterdam, Sendai, Japan.

Röhling, S. (2005). *Zwangsspannungen infolge Hydratationswärme*. Verlag Bau+Technik GmbH, Düsseldorf, Deutschland, 1. Auflage.

Rostásy, F. S. und Alda, W. (1976). Untersuchung über das rheologische Verhalten von jungem Beton unter einaxialer Zug- und Druckbeanspruchung. Forschungsbericht, Materialprüfungsanstalt der Universität Stuttgart (Otto-Graf-Institut), Stuttgart, Deutschland.

Rostásy, F. S. und Krauß, M. (2001). *Frühe Risse in massigen Betonbauteilen : Ingenieurmodelle für die Planung von Gegenmaßnahmen*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 520, Beuth Verlag GmbH, Berlin, Deutschland, 1. Auflage.

Schlicke, D. und Tue, N. V. (2009). Untersuchungen zum Rissabstand bei massiven Wand-Fundamentsystemen infolge der Beanspruchung aus Hydratationswärme. Forschungsbericht, König und Heunisch Planungsgesellschaft mbH – Beratende Ingenieure für Bauwesen, Leipzig, Deutschland.

Schlicke, D. und Tue, N. V. (2010a). Approach for Consideration of Viscoelasticity in Time Step Restraint Analyses of Hardening Concrete. Report, 1th International Conference on Numerical Modeling Strategies for Sustainable Concrete Structures, Aix-en-Provence, France.

Schlicke, D. und Tue, N. V. (2010b). Measurement of Thermal Restraint in Hardening Mass Concrete – A new Approach exemplified by a Thick Foundation Slab. Report, 6th Central European Congress on Concrete Engineering, Marianske Lazne, Tschechei.

Schlicke, D. und Tue, N. V. (2012). Approach for Consideration of Viscoelasticity in Time Step FEM based Restraint Analyses of Hardening Concrete. Report, SSCS 2012 – International Conference on Numerical Modeling Strategies for Sustainable Concrete Structures, Aix-en-Provence, France.

Trost, H. (1967a). Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. In *Beton- und Stahlbetonbau 62*, S. 230–238. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

Trost, H. (1967b). Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. In *Beton- und Stahlbetonbau 63*, S. 261–269. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

Trost, H. (1988). Massivbau IV: Ausgewählte Kapitel aus dem Stahlbeton- und Spannbetonbau. Kapitel 1: Auswirkungen des zeitabhängigen Betonverhaltens auf Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl und Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Aachen, Aachen, Deutschland.

Tue, N. V., Schlicke, D., und Bödefeld, J. (2007). Beanspruchungen in dicken Bodenplatten infolge des Abfließens der Hydratationswärme. In *Bautechnik 84*, S. 702–710. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

Tue, N. V., Schlicke, D., und Schneider, H. (2009). Zwangbeanspruchung massiver Kraftwerksbodenplatten infolge der Hydratationswärme. In *Bautechnik 86*, S. 142–149. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

Wiens, U. und Müller, C. (2000). Die puzzolanische Reaktion von Steinkohlenflugasche. In *Beton-Informationen*. Verlag Bau + Technik, Düsseldorf, Deutschland.

Zerna, W. und Trost, H. (1967). Rheologische Beschreibungen des Werkstoffes Beton. In *Beton- und Stahlbetonbau 62*, S. 165–170. Ernst & Sohn, Berlin, Deutschland.

Zilch, K. und Zehetmaier, G. (2010). *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 2. Auflage.