

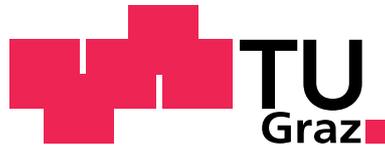
Roswitha RISSNER

# Mittelpunktseigenschaften von Bäumen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades einer  
Diplom-Ingenieurin

Mathematische Computerwissenschaften



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Em.Univ.-Prof. Dr.phil. Rainer E. BURKARD

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Graz, im Dezember 2011

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....

(Unterschrift)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Mittelpunkte eines Graphen</b>	<b>8</b>
2.1	Einführung . . . . .	8
2.2	Der Median . . . . .	9
2.2.1	Algorithmische Bestimmung . . . . .	14
2.3	Das Zentrum . . . . .	15
2.3.1	Das lokale Zentrum . . . . .	15
2.3.2	Das Zentrum in Bäumen . . . . .	16
2.3.3	Beziehungen zwischen Median und Zentrum . . . . .	19
2.4	Der Cent-Dian . . . . .	22
2.5	Radius und Status in Bäumen . . . . .	27
2.5.1	Die untere Schranke . . . . .	33
2.5.2	Die obere Schranke . . . . .	37
2.5.3	Schranken in allgemeinen Graphen . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Minimal zentrale Teilbäume</b>	<b>44</b>
3.1	Einführung . . . . .	44
3.2	Algorithmische Bestimmung . . . . .	58
3.2.1	$S$ -Gewichte und assoziierte Teilbäume . . . . .	60
3.2.2	$S$ -Gültigkeit . . . . .	64
3.2.3	Aktualisierungsschritt . . . . .	66
3.2.4	Auswahl eines Knotens . . . . .	70
3.2.5	Stoppbedingungen . . . . .	83
3.2.6	Korrektheit des Algorithmus . . . . .	91
3.2.7	Laufzeit . . . . .	94
3.2.8	Ein Beispiel . . . . .	97
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

An welchem Standort sollte man ein Krankenhaus platzieren? Welchen Ort wählt man um eine Schule zu bauen? Wie positioniert man Sendemasten um eine optimale Netzabdeckung zu erreichen? Das Auffinden eines oder mehrerer optimaler Standorte in einem Netzwerk, bestehend aus endlich vielen verbundenen Punkten, spielt sowohl in einem breiten Spektrum von Anwendungen, als auch bei vielen theoretischen Fragestellungen eine große Rolle. Zunächst stellt sich die Frage was *optimal* bedeutet. Soll niemand besonders weit vom Krankenhaus entfernt wohnen? Oder soll der durchschnittliche Weg zum Krankenhaus so kurz wie möglich sein? Soll ein Schulbus, der die Kinder abholt, eine möglichst kurze Strecke fahren müssen? Oder soll der Schulweg für kein Kind besonders lange sein? Die Anforderungen an den Standort bestimmen die Bedeutung des Wortes „optimal“ von Fragestellung zu Fragestellung neu. Mithilfe verschiedener Ansätze versucht man die unterschiedlichen Problemstellungen zu modellieren. Trotz ähnlicher Fragestellungen führen diese verschiedenen Modelle zu Lösungen, die sich stark voneinander unterscheiden können.

Plaziert man eine Schule so, dass kein Kind zu weit weg wohnt, ist die Busstrecke dann bereits die kürzest mögliche? Falls nicht, kann man Auskunft darüber geben, um wieviel sich die so erhaltene Strecke von der kürzesten unterscheidet? Gibt es einen Kompromiss der beide Anforderungen berücksichtigt? Es stellt sich also nicht nur die Frage nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden der unterschiedlichen Modelle, sondern auch die nach möglichen „Zwischenlösungen“.

Zu den klassischen Mittelpunktbegriffen, die im Rahmen der Standortoptimierung auf kreisfreien, zusammenhängenden Netzwerken untersucht werden, zählen der *Median* bzw. das *Zentroid* und das *Zentrum*. Hakimi hat in [3] den Begriff des (gewichteten) Medians beziehungsweise Zentrums verallgemeinert, in dem er beliebige Punkte auf Kanten zuließ. In dieser Arbeit

zeigte er, dass sich auch immer ein Median in einem Knoten befindet. Dies trifft im Allgemeinen nicht auf das verallgemeinerte Zentrum zu. Im Jahr darauf veröffentlichte Hakimi seine Arbeit [4], in der er sowohl den Median als auch das Zentrum weiter verallgemeinerte, indem er nicht nur nach einzelnen Punkten, sondern nach  $p$ -elementigen Mengen suchte. Zusammen mit Kariv veröffentlichte er dann in den beiden Arbeiten [11] und [12] algorithmische Zugänge zu beiden Problemstellungen.

Zwischen Median und Zentroid besteht ein starker Zusammenhang. In einem Baum ist ein Knoten sogar genau dann ein Median, wenn er auch im Zentroid ist. Sowohl Hua als auch Goldman haben unabhängig voneinander einen Algorithmus zur Bestimmung des Zentroids angegeben (vgl. [10], [1]).

Goldman setzte sich in [2] mit den Eigenschaften und der Bestimmung des Zentrums auseinander. Er gibt auch Analogien zum gewichteten Fall (nach Hakimi [3]) an. Handler präsentierte in [7] einige interessante Eigenschaften des (ungewichteten) Zentrums eines Baum und nutzte sie um dieses zu berechnen.

Halpern präsentierte in [5] eine Möglichkeit die Eigenschaften des (gewichteten) Medians und des (ungewichteten) Zentrums zu kombinieren, den *Cent-Dian*. Dieser entsteht als Optimallösung einer Konvexkombination der ursprünglichen Zielfunktionen.

Diese Arbeit gibt einen Überblick über die oben genannten Mittelpunktsgbegriffe und ihre Eigenschaften. Neben bereits bekannten Ergebnissen, werden auch einige Eigenschaften und Zusammenhänge präsentiert und an Beispielen verdeutlicht.

Der Status eines Knoten ist die Summe der Abstände dieses Knotens zu jedem anderen Knoten im Graph. Unter dem Status eines Graphen bezeichnet man den minimalen Status eines Knoten dieses Graphen. Der Radius ist das Maximumanalogon des Status. Es wird gezeigt, dass das Extremalverhalten von Radius und Status große Gemeinsamkeiten aufweist. In Abhängigkeit von Knotenanzahl und Maximalgrad werden die beiden jeweils durch die gleichen Graphen minimiert bzw. maximiert.

Weiters wird die Lage von Zentrum und Zentroid in Bezug zueinander untersucht. Motiviert durch die im Allgemeinen sehr unterschiedliche Lage der beiden, beschäftigt sich die Arbeit mit dem Begriff der minimal zentralen Teilbäume. Diese wurde in [14] von Nieminen und Peltola bzw. in [6] von Hamina und Peltola untersucht. Jeder minimal zentrale Teilbaum eines Baumes enthält das Zentrum und mindestens einen Zentroidknoten dieses Baumes. Es wird ein polynomiellen Algorithmus zur Bestimmung eines minimal zentralen Teilbaumes vorgestellt, da nach Kenntnis der Autorin ein solcher bisher nicht bekannt ist.

An dieser Stelle soll noch ein Überblick über den Aufbau dieser Arbeit gege-

ben werden. Kapitel 2 widmet sich den Begriffen Median, Zentroid, Zentrum und Cent-Dian. Nach einer allgemeinen Einführung besprechen wir in Abschnitt 2.2 den Begriff des Medians und des Zentroids und deren Zusammenhang, sowohl im gewichteten als auch im ungewichteten Fall. Am Ende dieses Abschnitts wird auch der Algorithmus nach Goldman [1] zur Berechnung des Zentroids eines Baumes präsentiert.

Der Abschnitt 2.3 widmet sich dem Begriff der Zentrums. Nach einer Wiederholung von bereits bekannten Ergebnissen, werden im Abschnitt 2.3.2 die Resultate aus Handler [7] auf das gewichtete Zentrum übertragen.

Der Abschnitt 2.3.3 ist der unterschiedlichen Lage von Median und Zentrum gewidmet. Mithilfe sehr einfacher Beispiele wird demonstriert, dass diese Punkte übereinstimmen können, dies aber im Allgemeinen nicht müssen. Ferner wird demonstriert, dass der Abstand zwischen den beiden auch groß werden kann.

Motiviert durch die unterschiedliche Lage, beschäftigt sich der Abschnitt 2.4 dem Cent-Dian, einer Konvexkombination von Median und Zentrum. Halpern, der diesen Begriff in [5] einführte, ließ zwar für den Median, nicht aber für das Zentrum, Knotengewichte zu. In dieser Arbeit werden diese Resultate auch auf den Fall eines gewichteten Zentrums übertragen.

Am Ende dieses Kapitels, in Abschnitt 2.5, wird das Extremalverhalten von Radius und Status in Abhängigkeit von Ordnung und Maximalgrad untersucht. Lin, Shang und Zhang haben in [13] Graphen angegeben, die den Status minimieren bzw. maximieren. Hier wird eine neue Beweistechnik vorgestellt, die die bekannten Ergebnisse zeigt und auch auf den Radius anwendbar ist. Mithilfe dieser Methode, die auf einer Transformation des betrachteten Graphen beruht, wird auch ein starker Zusammenhang der beiden Mittelpunktsgbegriffe aufgezeigt.

Die, in Kapitel 2 besprochenen Mittelpunktsgbegriffe beziehen sich auf Eigenschaften einzelner Punkte, während die in Kapitel 3 vorgestellten sich auf die Eigenschaften ganzer Teilbäume beziehen.

Kapitel 3 führt zu Beginn in die Theorie der zentralen Teilbäume ein. Einige der Ergebnisse von Nieminen und Peltola in [14] und Hamina und Peltola [6] werden aufgearbeitet. Der wesentliche Teil dieses Kapitels befasst sich mit der Entwicklung eines polynomiellen Algorithmus zur Bestimmung eines minimal zentralen Teilbaums, der auf komplexen Fallunterscheidungen beruht. Diese Arbeit ist nach Kenntnis der Autorin die erste Abhandlung über einen solchen Algorithmus. Es wird sowohl die Korrektheit gezeigt, als auch die Laufzeit analysiert. Die Funktionsweise des Algorithmus wird am Ende des Kapitels durch ein Beispiel demonstriert.

## Danksagung

Ich möchte in erster Linie meinem Betreuer R. E. Burkard dafür danken, dass er mir dieses Thema vorgeschlagen hat, sowie für die vielen hilfreichen Gespräche, die mir ermöglicht haben, diese Arbeit zu verfassen. Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts für Diskrete Mathematik und Optimierung für ihr Interesse an meiner Arbeit und ihre Hilfestellungen.

# Kapitel 2

## Mittelpunkte eines Graphen

### 2.1 Einführung

Diese Arbeit befasst sich mit Mittelpunktsgreifen in einfachen, zusammenhängenden und ungerichteten Graphen. Der Fokus liegt im Speziellen auf Bäumen. Dennoch wollen wir uns, der Vollständigkeit halber, die vorkommenden Begriffe ganz allgemein auch auf nicht kreisfreien Graphen ansehen. Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher, ungerichteter, zusammenhängender Graph. Die *Ordnung* des Graphen ist die Anzahl seiner Knoten. Auf der Menge der Knoten definieren wir eine Gewichtsfunktion

$$w : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die jedem Knoten des Graphen ein nicht-negatives Gewicht zuordnet. Zusätzlich fordern wir an dieser Stelle, dass eine Gewichtsfunktion  $w$  nicht konstant Null ist. Doch nicht nur die Knoten sollen mit Gewichten versehen werden, auch auf der Menge der Kanten wollen wir eine sogenannte Länge einführen. Daher definieren wir eine Funktion

$$\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_{> 0},$$

die jeder Kante eine strikt positive Länge zuordnen soll. Mithilfe dieser Längen können wir nun eine Distanzfunktion einführen. Ein *kürzester Weg* oder eine *Geodäte* zwischen zwei Knoten  $x$  und  $y$  ist ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$  der sowohl  $x$  als auch  $y$  enthält mit minimaler Summe seiner Kantenlängen. Ist die Wahl der Knoten in einem solchen Pfad eindeutig oder nicht relevant, so wollen wir ihn auch kurz mit  $\mathcal{P}(x, y)$  bezeichnen. Nun können wir eine Distanzfunktion auf der Menge der Knoten einführen, die jedem Paar von Knoten die Länge eines kürzesten Weges zuordnet. Genauer ist die

Distanz von  $x$  nach  $y$  definiert durch

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{e \in E(\mathcal{P}(x, y))} \ell(e)$$

Diese Distanzfunktion ist klarerweise symmetrisch und es gilt  $d(x, x) = 0$  für alle Knoten  $x$ .

Doch nicht nur Knoten des Graphen werden eine Rolle spielen, sondern auch beliebige Punkte auf Kanten. Sei  $(x, y)$  eine Kante in  $G$  und  $0 \leq t \leq \ell(x, y)$  ein beliebiger Wert zwischen Null und der Kantenlänge. Dann ist  $u = t_{(x, y)}$  jener Punkt auf der Kante, der zu  $x$  den Abstand  $t$  besitzt. Offenbar gilt dann auch  $u = (\ell(x, y) - t)_{(y, x)}$ . Die Menge der Punkte eines Graphen  $G$  wollen wir auch einfach kurz mit  $G$  bezeichnen. Nun können wir die oben definierte Distanzfunktion auf die Menge  $G \times V$  fortsetzen. Für eine Kante  $(x, y)$ , ein  $0 \leq t \leq \ell(x, y)$  und einen Knoten  $v \in V$  sei

$$d(t_{(x, y)}, v) = \min\{t + d(x, v), \ell(x, y) - t + d(y, v)\}.$$

Bevor wir beginnen, wollen wir noch den Begriff der *inzidenten Kante* erweitern. Sei  $u \in G \setminus V$  ein Punkt des Graphens, der auf der Kante  $(x, y)$  liegt. Diese Kante wird von  $u$  in zwei Teile unterteilt. Wir wollen beide Teile als zu  $x$  inzidente Kanten bezeichnen. Ist  $u \in V$  ein Knoten des Graphens, so bezeichnen wir die zu  $x$  inzidenten Kanten im herkömmlichen Sinn, nämlich als jene Kanten des Graphen, die  $x$  als Endpunkt haben.

Nun möchten wir noch einen kürzesten Weg zwischen einem allgemeinen Punkt des Graphen und einem Knoten einführen. Ist  $x \in G \setminus V$  und  $(u, v)$  die Kante auf der  $x$  liegt. Für einen Knoten  $y$  sei ohne Einschränkung  $d(v, y) \leq d(u, y)$ . Dann sei ein kürzester Weg

$$\mathcal{P}(x, y) = (V(\mathcal{P}(v, y)) \cup \{x\}, E(\mathcal{P}(v, y)) \cup \{(x, v)\}),$$

wobei die Länge der neuen Kante genau dem Abstand von  $x$  zu  $v$  entsprechen soll.

## 2.2 Der Median

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Mittelpunktsbegriffen beschäftigen, die sich als Optimallösung von Summenzielfunktionen charakterisieren lassen. Alle hier besprochenen Begriffe lassen sich als Spezialfälle des von Hakimi in [3] eingeführten *absoluten Medians* eines Graphen ableiten. Daher wollen wir mit diesem beginnen.

Die Median-Zielfunktion ist definiert als

$$\begin{aligned} med : G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sum_{v \in N} w(v) d(x, v). \end{aligned}$$

Unter einem (*absoluten*) *Median* versteht man einen Punkt  $x^* \in G$ , der die Median-Zielfunktion minimiert.

Eine Verallgemeinerung dieses Begriffs auf sogenannte  $p$ -Mediane beschreibt Hakimi in [4]. Dieses Konzept befasst sich mit einer Untermenge der Knotenmenge der Kardinalität  $p$ , die zusammen mit einem passenden verallgemeinerten Abstandsbegriff und Zielfunktion eine Optimallösung darstellen. Wir wollen uns hier nicht weiter mit dieser Arbeit auseinandersetzen. An dieser Stelle sei der Vollständigkeit halber nur erwähnt, dass der oben definierte Median einen 1-Median darstellt.

Hakimi hat in [4] gezeigt, dass es immer einen Knoten gibt, der auch ein absoluter Median ist. Daher sprechen wir, sofern nichts anderes behauptet, immer von einem Knoten, wenn wir von einem Median sprechen.

Sind alle Knotengewichte und Kantenlängen gleich 1, so fällt die obige Definition der Median-Zielfunktion zusammen mit der Definition des *Status*, der erstmals von Harary in [8] eingeführt wurde. Die Optimallösung wird in diesem Zusammenhang wiederum als Median bezeichnet. Mit dieser Zielfunktion werden wir uns im Abschnitt 2.5 noch genauer befassen.

Ist der zugrundeliegende Graph ein Baum  $T$ , so gibt es noch einen weiteren Mittelpunktsbegriff, der in starkem Zusammenhang mit dem Median steht, das sogenannte *Zentroid* (siehe z.B. Harary [9]) bzw. der gewichteten Verallgemeinerung das sogenannte  *$w$ -Zentroid* (siehe Kariv, Hakimi [12]).

Sei  $u$  ein Knoten des Baumes  $T$ . Ein *Zweig* bei  $u$  von  $T$ , ist ein maximaler Unterbaum von  $T$  der  $u$  als Blatt enthält. Das Gewicht eines solchen Astes  $T'$  sei

$$\mathcal{W}(T') = \sum_{x \in V(T') \setminus \{u\}} w(x).$$

Seien  $T_1, \dots, T_k$  alle Äste bei  $u$ . Das *Astgewicht* von  $u$  ist dann definiert als

$$\mathcal{W}(u) = \max_{i=1, \dots, k} \mathcal{W}(T_i).$$

Ein Knoten  $v$  wird als  *$w$ -Zentroidknoten* bezeichnet, wenn

$$\mathcal{W}(v) = \min_{u \in V(T)} \mathcal{W}(u).$$

Die Menge der  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten wird auch als  $\mathbf{w}$ -Zentroid bezeichnet. Ist die Gewichtsfunktion konstant Eins, so fällt dieser Begriff mit dem gewöhnlichen Zentroid zusammen. Dieses trägt unter anderem auch den Namen *Schwerpunkt*. In diesem Fall ist das Astgewicht des Knotens die maximale Anzahl von Knoten oder Kanten eines Baumes.

Man beachte, dass diese Eigenschaft nicht von der Länge der Kanten abhängt. Im Falle eines ungewichteten Baumes hat schon Zelinka in [15] gezeigt, dass ein Knoten genau dann ein Median ist, wenn er ein Zentroidknoten ist. Allgemeiner konnten dies Kariv und Hakimi in [12] jedoch auch für absolute Medianknoten und  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten zeigen. Dieses Ergebnis wollen wir an dieser Stelle nun auch rezitieren.

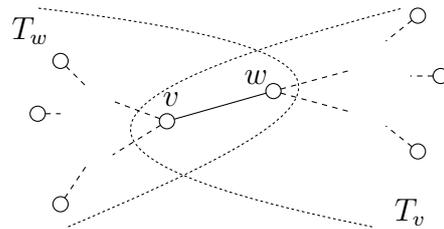
**Satz 2.2.1.** (Kariv, Hakimi [12]) *Sei  $T$  ein Baum,  $\mathbf{w}$  eine Gewichtsfunktion auf den Knoten von  $T$  und  $v$  ein Knoten von  $T$ .  $v$  ist genau dann ein absoluter Median, wenn er ein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten ist.*

Für den Beweis dieses Satzes wollen wir uns zuerst noch das folgende Lemma ansehen.

**Lemma 2.2.2.** *Sei  $T$  ein Baum,  $\mathbf{w}$  eine Gewichtsfunktion auf der Menge der Knoten von  $T$  und  $v$  ein Knoten von  $T$ .  $v$  ist genau dann ein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten, wenn*

$$\mathcal{W}(v) \leq \frac{1}{2} \sum_{u \in V(T)} \mathbf{w}(u).$$

Beweis des Lemmas. Sei  $v$  ein Knoten mit  $\mathcal{W}(v) > \frac{1}{2} \sum_{u \in V(T)} \mathbf{w}(u)$  und  $T_v$  ein Ast bei  $v$  mit  $\mathcal{W}(v) = \mathcal{W}(T_v)$ . Seien weiteres  $w$  der zu  $v$  benachbarte Knoten aus  $T_v$  und  $T_w$  der Ast bei  $w$ , der  $v$  enthält (siehe Abb. 2.1).



**Abbildung 2.1:** Darstellung der Knoten  $v$  und  $w$  und zugeh. Äste

Dann gilt

$$\mathcal{W}(T_w) = \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) - \mathcal{W}(T_v).$$

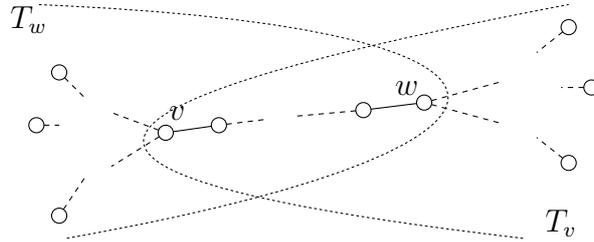
Zusammen erhalten wir nun

$$\mathcal{W}(T_w) < \mathcal{W}(T_v) = \mathcal{W}(v).$$

Da alle anderen Äste bei  $w$  Teilbäume von  $T_v$  sind, kann deren Astgewicht jenes von  $T_v$  nicht überschreiten. Insgesamt wissen wir an dieser Stelle also, dass  $\mathcal{W}(w) \leq \mathcal{W}(v)$ , wobei Gleichheit nur gelten kann, wenn  $\mathbf{w}(w) = 0$ . Ist  $\mathcal{W}(w) < \mathcal{W}(v)$ , so ist  $v$  kein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten. Anderenfalls ( $\mathcal{W}(w) = \mathcal{W}(v)$ ) ist auch  $w$  ein Knoten, der die Bedingung aus dem Satz nicht erfüllt. Dann lässt sich dieser Vorgang wiederholen. Da nicht alle Knoten Gewicht 0 haben können, findet man nach endlich vielen Schritten einen Knoten, der ein geringeres Astgewicht als  $v$  hat. Sei umgekehrt  $v$  ein Knoten von  $T$ , der die Bedingung

$$\mathcal{W}(v) \leq \frac{1}{2} \sum_{u \in V(T)} \mathbf{w}(u)$$

erfüllt. Seien weiters  $w \neq v$  ein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten,  $T_v$  der Ast bei  $v$ , der  $w$  enthält, und  $T_w$  der Ast bei  $w$  der  $v$  enthält (siehe Abbildung 2.2).



**Abbildung 2.2:** Darstellung von  $v$  und einem  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten  $w$

Dann gilt

$$\mathcal{W}(w) \geq \mathcal{W}(T_w) \geq \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) - \mathcal{W}(T_v) \geq \frac{1}{2} \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) \geq \mathcal{W}(v).$$

□

Beweis des Satzes 2.2.1. Seien  $v$  ein Knoten von  $T$  und  $T'$  der Ast bei  $v$  für den  $\mathcal{W}(v) = \mathcal{W}(T')$  und  $w$  der Nachbar von  $v$  in  $T'$  (siehe Abbildung 2.3). Ist  $v$  kein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten, dann gilt

$$\mathcal{W}(v) > \frac{1}{2} \sum_{u \in V(T)} \mathbf{w}(u).$$

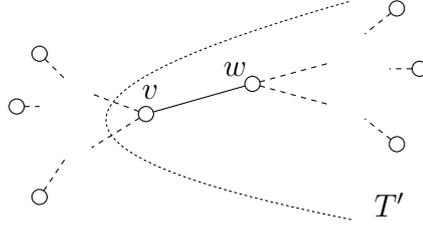


Abbildung 2.3: Darstellung der Wahl von  $w$

Für die Zielfunktion des Medians gilt dann

$$\begin{aligned}
 med(w) &= \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) d(w, x) \\
 &= \sum_{x \in V(T') \setminus \{v\}} \mathbf{w}(x)(d(v, x) - 1) + \sum_{x \notin V(T') \setminus \{v\}} \mathbf{w}(x)(d(v, x) + 1) \\
 &= med(v) + \sum_{x \notin V(T') \setminus \{v\}} \mathbf{w}(x) - \mathcal{W}(T') \\
 &= med(v) + \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) - 2\mathcal{W}(T') \\
 &< med(v).
 \end{aligned}$$

Daher ist  $v$  auch kein Median.

Seien nun  $v$  ein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten und  $w \neq v$  ein Median. Wir wissen bereits, dass  $w$  auch ein  $\mathbf{w}$ -Zentroidknoten sein muss. Seien weiters  $T_v$  der Ast bei  $v$ , der  $w$  enthält, und  $T_w$  der Ast bei  $w$ , der  $v$  enthält. Da

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) \leq \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) - \mathcal{W}(T_v) \leq \mathcal{W}(T_w) \leq \frac{1}{2} \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x), \quad (2.2.1)$$

folgt Gleichheit in allen Ungleichungen in (2.2.1). Damit gilt für alle Knoten  $x \in (T_v \cap T_w) \setminus \{v, w\}$  dass  $\mathbf{w}(x) = 0$ . Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
 med(v) &= med(w) + \sum_{x \notin V(T_v) \setminus \{v\}} \mathbf{w}(x) d(v, w) - \sum_{x \in V(T_v) \setminus \{v\}} \mathbf{w}(x) d(v, w) \\
 &= med(w) + d(v, w) \left( \sum_{x \in V(T)} \mathbf{w}(x) - 2\mathcal{W}(T_v) \right) \\
 &= med(w).
 \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass aus obigem Satz folgt, dass die Lage eines Medians nicht von den Längen der Kanten abhängt, sondern ausschließlich von den Gewichten der Knoten.

Aus dem Beweis lässt sich auch direkt die nachfolgende Aussage folgern.

**Korollar 2.2.3.** *Sei  $T$  ein Baum,  $w$  eine strikt positive Gewichtsfunktion auf den Knoten von  $T$ . Dann gibt es höchstens 2 Knoten, die einen absoluten Median darstellen. Diese sind dann adjazent.*

### 2.2.1 Algorithmische Bestimmung

An dieser Stelle wollen wir noch die algorithmische Bestimmung eines absoluten Medians besprechen. Bereits im Jahr 1961 veröffentlichten Hua et al. in [10], einer Arbeit die sich mit den mathematischen Anwendungen der Weizenerte auseinandersetzt, einen solchen Algorithmus. 10 Jahre später veröffentlichte Goldman unabhängig davon dieselbe Idee in seiner Arbeit über optimale Standorte in einfachen Netzwerken [1]. Die Idee ist nachfolgend in Algorithmus 1 zu finden. Die Korrektheit dieses Algorithmus folgt direkt aus dem obigen Lemma.

---

#### Algorithmus 1 FINDCENTROID

---

**Gegeben:** Baum  $T$ , Gewichtsfunktion  $w$  auf Knoten von  $T$

**Gesucht:** Berechnet das  $w$ -Zentroid des Baumes.

```

1:  $\mathcal{W} = \sum_{x \in V(T)} w(x)$ 
2:  $\mathcal{W}(v) = w(v)$  für alle  $v \in V(T)$ .
3:  $T' := T$ 
4: loop
5:   if  $|T'| = 1$  then
6:     return  $T'$ ;
7:   else
8:     Sei  $v$  Blatt von  $T'$  und  $u$  adjazent zu  $v$ . Dann sei
9:      $\mathcal{W}(u) := \mathcal{W}(u) + \mathcal{W}(v)$  und  $T'$  der Baum der durch Löschen von
10:     $v$  und der Kante  $(u, v)$  entsteht
11:    if  $\mathcal{W}(u) \geq \frac{1}{2} \mathcal{W}$  then
12:      return  $\{u\}$ 

```

---

## 2.3 Das Zentrum

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem zugehörigen Engpass-Problem befassen. Die Zentrums-Zielfunktion ist wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} cen : G &\rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto \max_{v \in N} \mathbf{w}(v) d(x, v) \end{aligned}$$

Ein Minimum der Zentrums-Zielfunktion heißt absolutes Zentrum des Graphen  $G$ . Es ist leicht einzusehen, dass dieser Punkt im Allgemeinen nicht in einem Knoten liegt.

Im Spezialfall  $\mathbf{w} \equiv 1$  wird die Zielfunktion auch *Radius* bzw. *rad* genannt. In Zusammenhang mit dem Radius werden in der Literatur meist nur Knoten als Lösung zugelassen. Diese spezielle Zielfunktion werden wir zusammen mit dem Status in Abschnitt 2.5 noch einmal genauer besprechen.

Die verallgemeinerte Zielfunktion, die auch allgemeine Punkte auf Kanten zulässt wurde, wie auch im Summenfall, von Hakimi in [3] eingeführt. Weiters haben sich Kariv und Hakimi in ihrer Arbeit [11] mit  $p$ -elementigen Teilmengen, den sogenannten  $p$ -Zentren, auseinandergesetzt. Der hier betrachtete Begriff entspricht einem 1-Zentrum.

### 2.3.1 Das lokale Zentrum

Die Arbeit von Kariv und Hakimi ([12]) führt das sogenannte *lokale Zentrum* ein. Mithilfe dieses Begriffs lassen sich die Eigenschaften eines absoluten Zentrums charakterisieren.

**Definition 2.3.1.** Sei  $(u, v) \in E$  eine Kante eines Graphen  $G = (V, E)$ . Ein Punkt  $x^* = t_{(u,v)}$  für ein  $0 \leq t \leq \ell(u, v)$  wird lokales Zentrum genannt, wenn

$$cen(x^*) = \min_{0 \leq t \leq \ell(u,v)} cen(t_{(u,v)}).$$

Ein lokales Zentrum einer Kante, dessen Zielfunktionswert, den der lokalen Zentren aller anderen Kanten nicht überschreitet, stellt klarerweise ein absolutes Zentrum dar.

Um ein lokales Zentrum einer Kante  $(u, v)$  zu bestimmen, betrachtet man die auf die Kante  $(u, v)$  eingeschränkte Distanzfunktion

$$\begin{aligned} d \mid (u, v) : [0, \ell(u, v)] \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}. \\ (t, w) &\mapsto \mathbf{w}(w) \min\{t_{(u,v)} + d(u, w), \ell(u, v) - t_{(u,v)} + d(v, w)\} \end{aligned}$$

Dies ist offenbar eine stückweise linear Funktion mit höchstens einem Knickpunkt mit Steigungen  $\pm \mathbf{w}(w)$ . Dieser stellt, im Falle der Existenz, ein Maximum in Abhängigkeit von  $t$  dar. Nun definieren wir

$$E_{(u,v)} : [0, \ell(u, v)] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$t \mapsto \max_{w \in V} \{d(t, w)\}$$

die *Exzentrizität* von  $t = t_{(u,v)}$ .

Ein lokales Zentrum ist ein Punkt  $x^* = t_{(u,v)}^*$ , sodass  $E_{(u,v)}(t_{(u,v)}^*) \leq E_{(u,v)}(t)$  für alle  $0 \leq t \leq \ell(u, v)$ . Offenbar erfüllt ein solches  $t_{(u,v)}^*$  einen der folgenden Punkte:

- (i)  $t_{(u,v)}^* = 0$
- (ii)  $t_{(u,v)}^* = \ell(u, v)$
- (iii)  $t_{(u,v)}^*$  ist ein Punkt, an dem sich  $d(t_{(u,v)}^*, v_i)$  und  $d(t_{(u,v)}^*, v_j)$  und die beiden Funktionen an der Stelle Steigung mit unterschiedlichem Vorzeichen haben.

Für alle Stellen  $0 \leq t \leq \ell(u, v)$ , die einen der obigen drei Punkte erfüllen, ist  $t_{(u,v)}^*$  einer, der  $E_{(u,v)}(t)$  minimiert. In einem Graphen mit  $n$  Knoten gibt es pro Kanten höchstens  $\frac{n(n-1)}{2} + 2$  Kandidatenpunkte.

### 2.3.2 Das Zentrum in Bäumen

Handler hat in [7] einige Eigenschaften des absoluten und des Knotenzentrums auf ungerichteten Bäumen mit ungewichteten Knoten untersucht. In diesem Abschnitt werden wir die Ergebnisse dieser Arbeit auf Bäume mit gewichteten Knoten verallgemeinern. Im weiteren Verlauf werden wir uns dann auch mit dem Begriff des Cent-Dians beschäftigen, der von Halpern in [5] eingeführt wurde. Die Arbeit von Halpern rezitiert Ergebnisse aus der Arbeit von Handler. Die nachfolgenden Ergebnisse werden uns erlauben auch die Arbeit von Halpern auf gewichtete Knoten zu verallgemeinern. Beginnen wir mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 2.3.2.** *Sei  $T = (V, E)$  ein Baum mit  $E \neq \emptyset$ . Seien weiters  $\mathbf{w}$  eine Gewichtsfunktion auf den Knoten und  $d$  eine Distanzfunktion auf  $T \times V$ . Ein absolutes Zentrum liegt nie in einem Blatt von  $T$ .*

Beweis. Sei  $x \in V$  ein Blatt von  $T$ . Angenommen  $cen(x) \leq cen(u)$  für alle  $u \in T$  und sei  $w \in V$  ein Knoten für den  $cen(x) = \mathbf{w}(w) d(x, w)$  gilt. Sei  $y$  der zu  $x$  adjazente Knoten und  $0 \leq t_{(x,y)} \leq \ell(x, y)$ . Es gilt

$$d(t_{(x,y)}, v) = \mathbf{w}(v)(\ell(x, y) - t_{(x,y)} + d(y, v)) \text{ für } v \neq x \text{ und}$$

$$d(t_{(x,y)}, x) = \mathbf{w}(x)t_{(x,y)}.$$

Damit erhalten wir für  $0 \leq t \leq \ell(x, y)$

$$E_{(x,y)}(t) = \max\{\mathbf{w}(x)t, \max_{v \in V \setminus \{x\}} \{\mathbf{w}(v)(\ell(x, y) - t + d(y, v))\}\}. \quad (2.3.1)$$

Stellt  $x$  das lokale Zentrum von  $(x, y)$  dar, dann gilt für alle  $0 \leq t \leq \ell(x, y)$

$$\mathbf{w}(v) d(x, v) = E_{(x,y)}(0) \leq E_{(x,y)}(t).$$

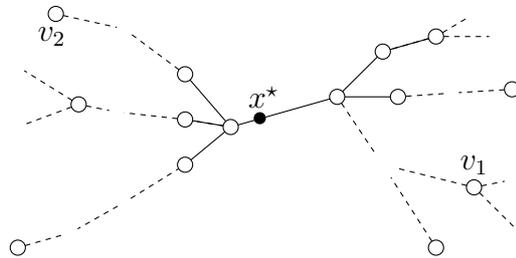
Da  $d(x, v) > \ell(x, y) - t + d(y, v)$  für  $t > 0$  wird das Maximum in (2.3.1) im ersten Argument angenommen. Daher gilt

$$\mathbf{w}(v) d(x, v) \leq \mathbf{w}(x)t \text{ für } 0 < t \leq \ell(x, y).$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung beliebig klein werden kann, folgt, dass  $\mathbf{w}(v) d(x, v) = 0$  für alle Knoten  $v$ . Laut Voraussetzung gibt es einen Knoten  $v$  mit  $\mathbf{w}(v) > 0$  und damit folgt  $x = v$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Lemma 2.3.3.** *Sei  $T = (V, E)$  ein Baum mit  $E \neq \emptyset$ . Seien weiters  $\mathbf{w}$  eine Gewichtsfunktion auf den Knoten,  $d$  eine Distanzfunktion auf  $T \times V$  und  $x^*$  ein absolutes Zentrum dieses Baumes. Dann gibt es zwei Knoten  $v_1$  und  $v_2$  sodass*

- (a)  $\mathcal{P}(v_1, x^*)$  und  $\mathcal{P}(v_2, x^*)$  zwei unterschiedliche zu  $x$  inzidenten Kanten beinhalten und
- (b)  $\text{cen}(x^*) = \mathbf{w}(v_1) d(x^*, v_1) = \mathbf{w}(v_2) d(x^*, v_2)$ .



**Abbildung 2.4:** Darstellung der Knoten  $x^*$ ,  $v_1$  und  $v_2$

Beweis. Ist  $x^*$  kein Knoten des Graphen, so fügen wir diesen Punkt als Knoten mit Gewicht Null hinzu. Die Kante auf der  $x^*$  liegt wird damit in zwei entsprechend lange Teile geteilt. Durch diese Transformation verändert sich die Lage des Zentrums nicht. Der transformierte Graph heiße wieder  $T = (V, E)$ . Sei  $v_1 \in V$  ein Knoten für den  $cen(x^*) = \mathbf{w}(v_1) d(x^*, v_1)$ . Dann gilt aufgrund der Voraussetzung an die Gewichtsfunktion jedenfalls  $\mathbf{w}(v_1) > 0$ . Entfernt man nun die zu  $x^*$  inzidente Kante  $(x^*, y)$  in  $\mathcal{P}(x^*, v_1)$ , so zerfällt  $T$  in zwei Zusammenhangskomponenten,  $N$  und  $V \setminus N$ . Ohne Einschränkung sei  $N$  jene Zusammenhangskomponente, die  $x^*$  enthält (siehe Abbildung 2.5).

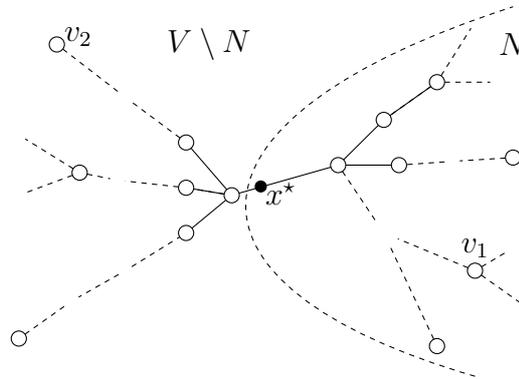


Abbildung 2.5: Wahl der Zusammenhangskomponenten

Sei  $0 < t_{(x^*, y)} \leq \ell(x^*, y)$  beliebiger Punkt auf der Kante  $(x^*, y)$ . Für alle Knoten  $v \in V \setminus N$  mit  $\mathbf{w}(v) > 0$  gilt

$$d(x^*, v) > d(t_{(x^*, y)}, v).$$

Da  $t_{(x^*, y)}$  keine bessere Exzentrizität als  $x^*$  haben kann, gilt

$$E_{(x^*, y)}(t_{(x^*, y)}) = \max_{v \in V} \{d(t_{(x^*, y)}, v)\} = \max_{v \in N} \{d(t_{(x^*, y)}, v)\}.$$

Es gibt also einen Knoten  $v_2 \in N$  sodass  $d(t_{(x^*, y)}, v_2) \geq d(t_{(x^*, y)}, v_1)$  für alle  $0 \leq t_{(x^*, y)} \leq \ell(x^*, y)$ . Für  $t = 0$  folgt:  $\mathbf{w}(v_2) d(x^*, v_2) \geq \mathbf{w}(v_1) d(x^*, v_1)$  und damit aufgrund der Wahl von  $v_1$  auch Gleichheit.  $\square$

**Korollar 2.3.4.** Sei  $T = (V, E)$  ein Baum mit  $E \neq \emptyset$ . Seien weiters  $\mathbf{w}$  eine Gewichtsfunktion auf den Knoten,  $d$  eine Distanzfunktion auf  $T \times V$  und  $x^*$  ein absolutes Zentrum dieses Baumes.

Für  $x \in T$  gibt es immer ein  $\tilde{v} \in V$  sodass  $cen(x) = \mathbf{w}(\tilde{v}) d(\tilde{v}, x)$  und  $x^*$  auf der Geodäte zwischen  $\tilde{v}$  und  $x$  liegt. Daher gilt

$$cen(x) = cen(x^*) + \mathbf{w}(\tilde{v}) d(x, x^*).$$

Daraus folgt direkt:

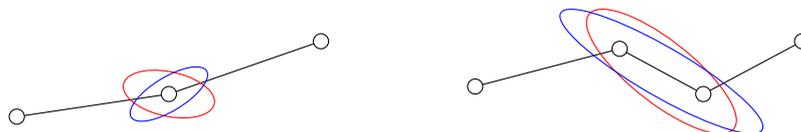
**Korollar 2.3.5.** *Das 1-Zentrum eines Baumes ist eindeutig.*

Erlaubt man nur Knoten als zulässige Lösungen, so verliert man im Allgemeinen diese Eindeutigkeit. Dies ist leicht einzusehen. Seien hierfür sowohl die Gewichte auf den Knoten als auch die Längen auf den Kanten konstant Eins. Betrachtet man einen einfachen Pfad ungerader Länge, so sieht man sofort, dass es zwei benachbarte Knoten gibt, die beide minimalen Radius besitzen.

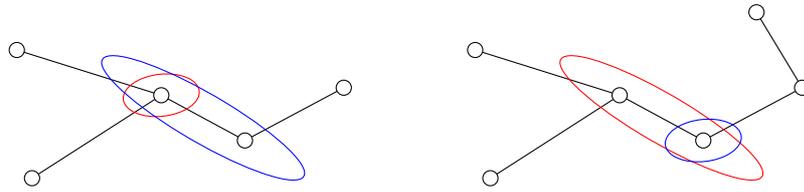
### 2.3.3 Beziehungen zwischen Median und Zentrum

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lage des Medians und des Zentrums befassen. Obwohl beide Begriffe Mittelpunktseigenschaften beschreiben, liegen Median und Zentrum im Allgemeinen in unterschiedlichen Punkten.

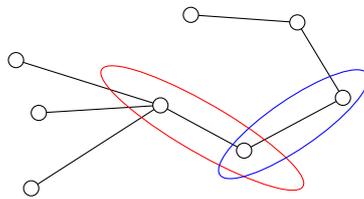
Im Folgenden wollen wir uns ein paar einfache Beispiele ansehen, die diesen Umstand demonstrieren sollen. Es lassen sich bereits große Unterschiede feststellen, wenn man sowohl die Gewichtsfunktion auf den Knoten als auch die Längen auf den Kanten konstant Eins wählt. In den nachfolgenden Beispielen betrachten wir anstatt des absoluten Zentrums auch das Knotenzentrum. Aufgrund der Wahl der Kantenlängen lässt sich die Lage des absoluten Zentrums dann leicht bestimmen. Gibt es einen zentralen Knoten, so entspricht dieser auch dem absoluten Zentrum. Ist das Knotenzentrum zweielementig, so sind die beiden Knoten adjazent und das absolute Zentrum liegt genau in der Mitte der zu beiden inzidenten Kante. In den nachfolgenden Beispielen ist das Zentroid immer rot, das Zentrum immer blau markiert. Die nachfolgenden 5 Beispielgraphen (siehe Abbildungen 2.6, 2.7 und 2.8) demonstrieren jede Möglichkeit wie Zentrum und Zentroid einen nicht-leeren Schnitt haben können.



**Abbildung 2.6:** Zentrum gleich Zentroid

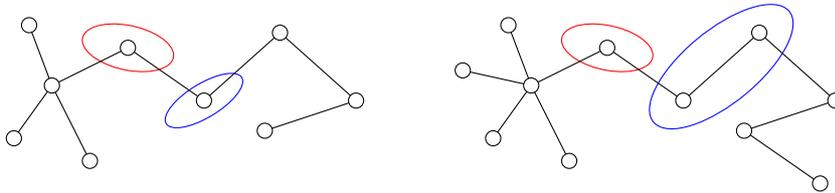


**Abbildung 2.7:** mögliches Inklusionsverhalten von Zentrum und Zentroid

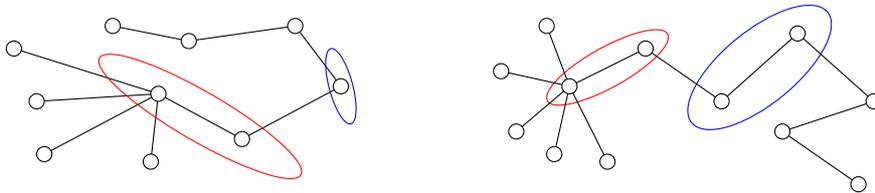


**Abbildung 2.8:** Schnitt von Zentrum und Zentroid (ohne Inklusion)

Doch kann der Schnitt von Zentrum und Zentroid bereits bei sehr kleinen Beispielen disjunkt sein, wie die nachfolgenden Beispiele demonstrieren (siehe Abbildungen 2.9 und 2.10).

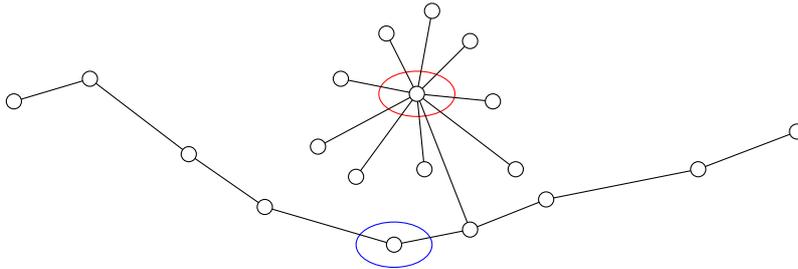


**Abbildung 2.9:** Zentroid (einelementig) und Zentrum disjunkt



**Abbildung 2.10:** Zentroid (zweielementig) und Zentrum disjunkt

Das Zentrum eines Baumes liegt auf jedem längsten Weg. Das Zentroid hingegen muss nicht einmal auf einem längsten Weg liegen, wie das folgende Beispiel zeigt. Das Zentroid ist wiederum rot, das Zentrum blau markiert. Man beachte dass das folgende Beispiel auch zeigt, dass Zentrum und Zentroid nicht benachbart sein müssen.



**Abbildung 2.11:** Zentroid (rot) liegt nicht am längsten Weg

Es gilt jedoch die folgende Proposition.

**Proposition 2.3.6.** *Sei  $T = (V, E)$  ein Baum und  $\ell$  die längste Wegelänge von  $T$ . Wenn  $|E| \leq 2\ell$ , dann ist das Zentroid im Zentrum dieses Baumes enthalten.*

Beweis. Sei  $\mathcal{P}$  ein längster Weg  $v$  ein Knoten, der in  $\mathcal{P}$  nicht vorkommt. Dann gibt es einen Ast  $T'$  bei  $v$ , in dem  $\mathcal{P}$  enthalten ist. Daher gilt

$$\mathcal{W}(T') > \ell \geq \frac{1}{2}|E|,$$

und somit  $v$  kein Zentroidknoten. Ein Zentroidknoten muss also auf jedem längsten Weg liegen. Es folgt, dass das Zentroid im Zentrum enthalten ist.  $\square$

Jedoch muss unter den obigen Voraussetzungen ein zentraler Knoten kein Zentroidknoten sein, wie der linke Graph in Abbildung 2.7 zeigt. Ist  $\ell$  jedoch gerade, so gibt es nur einen zentralen Knoten, dieser ist unter den obigen Bedingungen dann offensichtlich auch ein Zentroidknoten.

## 2.4 Der Cent-Dian

Der vorige Abschnitt hat verdeutlicht, dass sich Median und Zentrum an unterschiedlichen Punkten eines Graphen befinden können. Dennoch wünscht man sich oft, dass man einen Punkt im Graphen findet, der bis zu einem gewissen Grad Eigenschaften sowohl vom Median als auch vom Zentrum besitzt. Halpern führte in [5] zu diesem Zweck den sogenannten *Cent-Dian* ein. In der Arbeit von Halpern sind die zugrundeliegenden Graphen ausschließlich Bäume. Weiters erlaubt er die Knotengewichte zwar für den Median, nicht aber für das Zentrum. Auch in diesem Abschnitt wollen wir uns auf Bäume beschränken. Jedoch werden wir sehen, dass sich die Ergebnisse von Halpern auf den Fall eines gewichteten Zentrums erweitern lassen. Seien  $w_1$  und  $w_2$  zwei Gewichtsfunktion auf den Knoten des betrachteten Baumes,  $med$  die Median-Zielfunktion bezüglich  $w_1$  und  $cen$  die Zentrums-Zielfunktion bezüglich  $w_2$ . Für ein  $\lambda \in [0, 1]$  sei die Cent-Dian Zielfunktion definiert als

$$\begin{aligned} centdian_\lambda : G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \lambda med(x) + (1 - \lambda) cen(x). \end{aligned}$$

Ein Minimum dieser Zielfunktion wird Cent-Dian genannt. Um die Abhängigkeit von  $\lambda$  hervorzuheben werden wir auch die Bezeichnung  $\lambda$ -Cent-Dian verwenden.

Die Zielfunktion lässt vermuten, dass ein Cent-Dian in der konvexen Hülle des absoluten Medians und des absoluten Zentrums liegt. Die folgenden beiden Lemmata beschreiben sogar noch mehr Eigenschaften.

**Lemma 2.4.1.** *Seien  $T = (V, E)$  ein Baum,  $x_{med}$  ein absoluter Median und  $x_{cen}$  das absolute Zentrum von  $T$ . Für  $\lambda \in [0, 1]$  liegt ein  $\lambda$ -Cent-Dian liegt auf  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$ .*

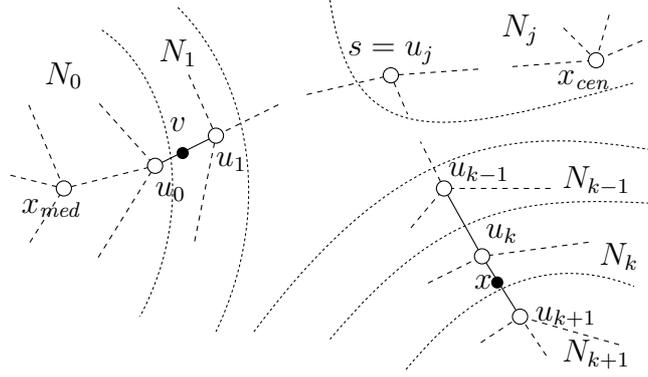
*Beweis.* Ist  $x_{cen}$  kein Knoten des Graphen, so fügen wir diesen Punkt als Knoten mit Gewicht Null hinzu. Die Kante, auf der  $x_{cen}$  liegt, wird damit in zwei entsprechend lange Teile geteilt. Durch diese Transformation verändert sich weder die Lage des Medians noch die des Zentrums. Der transformierte Graph heiße wieder  $T = (V, E)$ .

Sei  $x$  ein Punkt von  $T$  der nicht auf  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$  und  $s$  der zu  $x$  nächste Punkt auf diesem Weg. Da wir den Medianknoten  $x_{med}$  wie üblich als Knoten des Graphen annehmen, ist  $s$  in jedem Fall ein Element der Knotenmenge.

**Behauptung.** Für  $v \in \mathcal{P}(x_{med}, x)$  gilt

$$med(v) \leq med(x).$$

Beweis der Behauptung: Sei  $(u_0, u_1, \dots, u_{k+1})$  die Knotenfolge, die von  $v$  zu  $x$  führt, das heißt,  $v$  liegt auf  $(u_0, u_1)$  und  $x$  auf  $(u_k, u_{k+1})$  wobei  $v \neq u_1$  und  $x \neq u_{k+1}$ . Kappt man nun die Verbindungen von einem Knoten  $u_j$  auf diesem Weg mit seinen(m) Nachbarknoten auf eben diesem, so soll die Zusammenhangskomponente, die  $u_j$  enthält,  $N_j$  heißen (siehe Abb. 2.12).



**Abbildung 2.12:** Darstellung der Zusammenhangskomponenten  $N_0, \dots, N_{k+1}$

Für eine Teilmenge  $N \subset V$  sei  $med(x, N) = \sum_{v \in N} \mathbf{w}_1(v) d(x, v)$ . Die Zielfunktion lässt sich für einen Punkt  $y \in \mathcal{P}(x_{med}, x)$  nun aufspalten in

$$med(y) = med(y, N_0) + med(y, N_{k+1}) + \sum_{j=1}^k med(y, N_j).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} med(x, N_0) &= med(v, N_0) + \mathcal{W}_1(N_0) d(x, v), \\ med(x, N_{k+1}) &= med(v, N_{k+1}) - \mathcal{W}_1(N_{k+1}) d(x, v) \text{ und} \\ med(x, N_j) &= med(v, N_j) + \mathcal{W}_1(N_j)(d(u_j, x) - d(u_j, v)). \end{aligned}$$

Da  $d(u_j, v) = d(v, x) - d(u_j, x)$  für  $j > 0$  gilt, erhalten wir

$$med(x) = med(v) + d(x, v)(\mathcal{W}_1(N_0) - \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j)) + 2 \sum_{j=1}^k \mathcal{W}_1(N_j) d(u_j, x).$$

Da  $N_0$  den Median enthält und  $\mathcal{W}_1(V \setminus N_0) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j)$ , ist  $\mathcal{W}_1(N_0) - \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j)$  nicht-negativ. Der dritte Summand von  $med(x)$  ist trivialerweise nicht negativ und die Behauptung folgt.

**Behauptung.** Für jeden Punkt  $v \in V \cap \mathcal{P}(x, x_{cen})$

$$cen(v) \leq cen(x).$$

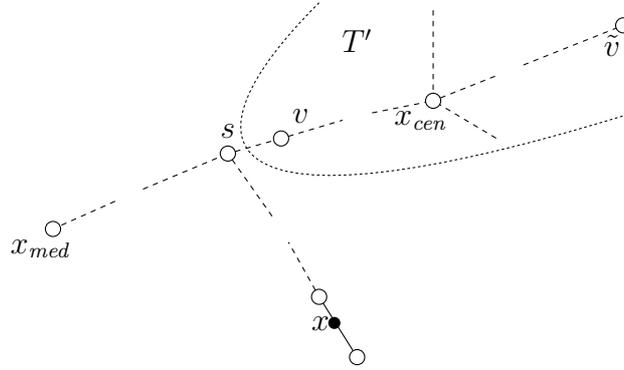


Abbildung 2.13: Darstellung der Lage von  $v$  und des Astes  $T'$

Beweis der Behauptung: Für  $v = x_{cen}$  gilt die Behauptung trivialerweise. Sei also  $v \in V$  ein Knoten auf dem Weg  $\mathcal{P}(x, x_{cen})$ . Betrachten wir den Zweig  $T'$  bei  $v$ , der  $x_{cen}$  enthält. Dann gibt es einen Knoten  $\tilde{v} \in T'$ , sodass  $cen(v) = w_2(\tilde{v}) d(v, \tilde{v})$ . (Da ansonsten  $v$  einen kleineren Zielfunktionswert ergeben würde.). Da nun  $d(x, \tilde{v}) > d(v, \tilde{v})$  folgt die Behauptung. Insgesamt folgt für den Knoten  $s$ :

$$\begin{aligned} centdian_\lambda(s) &= \lambda med(s) + (1 - \lambda) cen(s) \\ &\leq \lambda med(x) + (1 - \lambda) cen(x) \\ &= centdian_\lambda(x). \end{aligned}$$

Damit liegt ein optimale Punkt auf dem Weg zwischen  $x_{cen}$  und  $x_{med}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ist  $\lambda < 1$ , so folgt im vorigen Beweis, dass

$$centdian_\lambda(s) < centdian_\lambda(x)$$

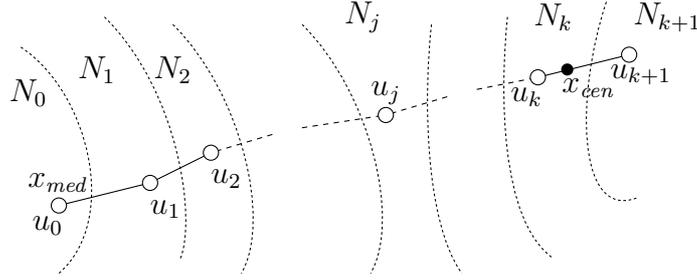
und damit befindet sich jeder  $\lambda$ -Cent-Dian auf dem Pfad zwischen  $x_{med}$  und  $x_{cen}$ .

**Lemma 2.4.2.** *Seien  $T = (V, E)$  ein Baum,  $x_{med}$  ein absoluter Median,  $x_{cen}$  das absolute Zentrum von  $T$  und  $\lambda \in [0, 1]$ . Dann ist die Zielfunktion des  $\lambda$ -Cent-Dians eingeschränkt auf  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$  stetig, konvex und stückweise linear mit Knickstellen genau in den Knoten dieses Weges.*

Beweis. Als Konvexkombination stetiger Funktionen ist

$$centdian_\lambda(x) = \lambda med(x) + (1 - \lambda) cen(x)$$

stetig. Betrachten wir die Funktion also auf dem Weg  $\mathcal{P}(x_{med}, x_{cen})$ . Sei wieder  $(u_0, u_1, \dots, u_k)$  die Knotenfolge zwischen  $u_0 = x_{med}$  und  $x_{cen}$ , wobei  $x_{cen}$  auf der Kante  $(u_k, u_{k+1})$  liegt und falls  $x_{cen}$  ein Knoten ist, dann  $u_{k+1}$ . Wie oben, sei  $N_j$  die Zusammenhangskomponente von  $u_j$ , die bei Entfernung der zu  $u_j$  inzidenten Kanten in  $\mathcal{P}(x_{med}, x_{cen})$  entsteht (siehe Abbildung 2.14).



**Abbildung 2.14:** Darstellung der Zusammenhangskomponenten  $N_0, \dots, N_{k+1}$

Fixieren wir nun eine Kante  $(u_\ell, u_{\ell+1})$ . Sei  $x$  ein Punkt dieser Kante. Ist  $\ell = k$ , dann soll sich  $x$  zwischen  $u_k$  und  $x_{cen}$  befinden.

Dann gilt

$$med(x) = med(x_{med}) + \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j)(d(u_j, x) - d(u_j, x_{med})).$$

Da  $d(u_j, x) = d(u_j, u_\ell) + d(u_\ell, x)$  für  $j \leq \ell$  und  $d(u_j, x) = d(u_j, u_\ell) - d(u_\ell, x)$  für  $j > \ell$ , erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} med(x) &= med(x_{med}) + \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j)(d(u_j, u_\ell) - d(u_j, x_{med})) \\ &\quad + d(u_\ell, x) \left( \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{W}_1(N_j) - \sum_{j=\ell+1}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j) \right). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden sind unabhängig von  $x$  und daher konstant. Für weitere Zwecke nennen wir

$$D(\ell) = \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{W}_1(N_j) - \sum_{j=\ell+1}^{k+1} \mathcal{W}_1(N_j).$$

Betrachten wir nun die Zentrums-Zielfunktion. Nach Korollar 2.3.4 gibt es für jeden Punkt  $x$  auf  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$  einen Knoten  $\tilde{v}$ , sodass  $cen(x) = cen(x_{cen}) +$

$\mathbf{w}_2(\tilde{v}) d(x, x_{cen})$ . Da es ein solches  $\tilde{v}$  jedenfalls in  $N_{k+1}$  gibt, kann für alle Punkte  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$  dasselbe  $\tilde{v}$  gewählt werden. Sei nun weiters  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_2(\tilde{v})$ . Für  $x \in (u_\ell, u_{\ell+1})$  gilt

$$cen(x) = cen(x_{cen}) + \tilde{\mathbf{w}} d(x, x_{cen}) = cen(x_{cen}) + \tilde{\mathbf{w}} d(u_\ell, x_{cen}) - \tilde{\mathbf{w}} d(u_\ell, x).$$

Wiederum sind die ersten beiden Summanden konstant in  $x$ .

$d(u_\ell, x)$  beschreibt den Abstand des Punktes  $x$  von  $u_\ell$ . Da  $x$  auf der Kante  $(u_\ell, u_{\ell+1})$  liegt, ist dies eine lineare Funktion mit Steigung 1. Also gilt  $\frac{d}{dx} d(u_\ell, x) = 1$ . Daher ist die Ableitung nach  $x$  von  $centdian_\lambda$  für  $0 < x < \ell(u_\ell, u_{\ell+1})$  gleich

$$\frac{d}{dx} centdian_\lambda(x) = \lambda D(\ell) - (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{w}},$$

und somit auf der Kante  $(u_\ell, u_{\ell+1})$  konstant in  $x$ . Daher können sich Knickstellen nur in den Knoten  $u_1, \dots, u_k$  befinden. Die Konvexität folgt aus der Tatsache, dass  $D(\ell)$  offenbar eine monoton wachsende Funktion ist.  $\square$

Mit diesen beiden Lemmata erhalten wir nun den folgenden Satz

**Satz 2.4.3.** *Seien  $T = (V, E)$  ein Baum,  $x_{med}$  ein absoluter Median,  $x_{cen}$  das absolute Zentrum von  $T$  und  $\lambda \in [0, 1)$ . Ein  $\lambda$ -Cent-Dian ist entweder gleich  $x_{cen}$  oder liegt in einem Knoten des Pfades zwischen  $x_{cen}$  und  $x_{med}$ .*

Beweis. Da  $\lambda < 1$  liegt jeder  $\lambda$ -Cent-Dian auf dem Pfad  $\mathcal{P}(x_{cen}, x_{med})$ . Die Cent-Dian-Zielfunktion ist auf diesem Pfad, stetig, stückweise linear und konvex. Ein Minimum wird daher am Rand oder in einer der Knickstellen angenommen, das heißt entweder in  $x_{cen}$  oder in einem Knoten des Pfades.  $\square$

## 2.5 Radius und Status in Bäumen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Spezialfall, dass sowohl die Gewichtsfunktion auf der Menge der Knoten also auch die Längen auf den Kanten konstant Eins ist. In diesem Fall nennt man die Median-Zielfunktion auch Status und die Zielfunktion des Zentrums Radius.

Zur Erinnerung: Der Status eines Knotens  $x$  ist definiert als

$$s(x) = \sum_{y \in V} d(x, y).$$

Ein Knoten mit minimalem Status wird als (ungewichteter Knoten-)Median bezeichnet. Laut Satz 2.2.1 ist ein Knoten genau dann ein Medianknoten, wenn er ein Zentroidknoten ist. Der *Status eines Graphen*  $G$  sei hier definiert als der Status eines Medianknoten, genauer

$$s(G) = \min_{x \in V} s(x).$$

Der Radius eines Knotens  $x$  ist definiert als

$$rad(x) = \max_{y \in V} d(x, y).$$

Ein Knoten mit minimalem Radius wird als (ungewichtetes Knoten-)Zentrum bezeichnet. Der *Radius eines Graphen*  $G$  sei hier definiert als Radius eines zentralen Knoten des Graphens, genauer

$$rad(G) = \min_{x \in V} rad(x).$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass in diesem Abschnitt mit Median bzw. Zentrum immer ein optimaler Knoten bezüglich der ungewichteten Zielfunktion bezeichnet wird.

Wie wir bereits gesehen haben, befinden sich Zentrum und Zentroid im Allgemeinen in unterschiedlichen Punkten eines Graphens. Auf den ersten Blick haben die beiden bezüglich ihrer Lage nicht viel gemeinsam. Jedoch weisen ihre beiden Zielfunktionen, Radius und Status, einige Gemeinsamkeiten auf. In diesem Abschnitt untersuchen wir das Extremalverhalten der beiden Zielfunktionen in Abhängigkeit der Ordnung und des Maximalgrades eines Baumes. Wir werden sehen, dass beide Zielfunktionen in analogen Baumstrukturen ihre Minimal- und Maximalwerte annehmen. Des Weiteren erlauben die Untersuchungen auf Bäumen auch Aussagen in allgemeinen Graphen, wie wir am Ende dieses Abschnittes sehen werden.



**Proposition 2.5.1.** *Seien  $T$  ein Baum,  $x$  ein Zentroidknoten von  $T$ ,  $b$  ein Blatt,  $u \neq x$  ein Knoten von  $T$  und  $\bar{T}$  der Baum, der aus  $T$  entsteht, wenn man die Kante zwischen  $b$  und seinem Nachbarknoten entfernt und stattdessen  $(u, b)$  hinzufügt. Seien ferner  $T_1$  der Ast von  $T$  bei  $x$ , der  $u$  enthält,  $T_2$  jener der  $b$  enthält und  $S = (T \setminus (T_1 \cup T_2)) \cup \{x\}$ . Dann gilt:*

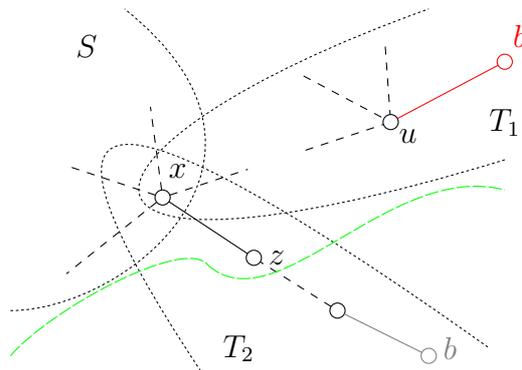
- (a) *Ist  $T_1 = T_2$ , dann ist  $x$  Zentroidknoten von  $\bar{T}$ .*
- (b) *Ist  $T_1 \neq T_2$  und  $|T_1| < |T_2| + |S| - 1$ , dann ist  $x$  Zentroidknoten von  $\bar{T}$ .*
- (c) *Ist  $T_1 \neq T_2$  und  $|T_1| \geq |T_2| + |S| - 1$ , dann ist  $y$ , der eindeutige Nachbarknoten von  $x$  auf der Geodäte  $\{x\} - \{u\}$ , ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$ .*

Beweis. Ist  $T_1 = T_2$ , so bleiben die Astgewichte bei der Transformation gleich.  $x$  bleibt im Zentroid. Von nun an, sei  $T_1 \neq T_2$ . Je nachdem, welchen Grad  $x$  in  $T$  besitzt, enthält  $S$  keinen, einen oder mehrere Äste von  $T$  bei  $x$ . Daher sei  $S'$  folgendermaßen definiert. Enthält  $S$  keinen Ast bei  $x$ , dann sei  $S' = \{x\}$ , anderenfalls, sei  $S'$  ein Ast bei  $x$  in  $S$  mit größtem Gewicht. Seien  $\bar{T}_1 = T_1 \cup \{b\}$  und  $\bar{T}_2 = T_2 \setminus \{b\}$  die transformierten Äste bei  $x$  in  $\bar{T}$ . Dann ist das Astgewicht von  $x$  in  $\bar{T}$

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(x) = \max\{|\bar{T}_1|, |\bar{T}_2|, |S'|\} - 1.$$

Da  $x$  ein Zentroidknoten ist, gilt

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq |S \cup T_2| + 1 = |S| + |T_2|, \\ |T_2| &\leq |S \cup T_1| + 1 = |S| + |T_1| \text{ und} \\ |S'| &\leq |T_1 \cup T_2 \cup (S \setminus S')| + 1 = |T_1| + |T_2| + |S| - |S'|. \end{aligned}$$



**Abbildung 2.16:** Zentroidknoten liegt nicht in  $T_2$

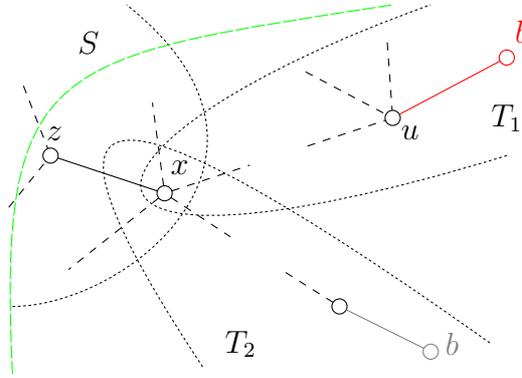
**Behauptung.** Ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$  liegt auf jeden Fall im  $\bar{T}_1$ .

Beweis der Behauptung. Sei zuerst  $z$  der Nachbar von  $x$  in  $T_2$  (siehe Abbildung 2.16).

Ein Ast von  $z$  ist  $\bar{T}_1 \cup S \cup \{z\}$  mit Gewicht  $|\bar{T}_1| + |S| - 1 = |T_1| + |S|$ . Jeder andere Ast bei  $z$  hat ein Gewicht kleiner  $|\bar{T}_2| - 2 = |T_2| - 1 < |S| + |T_1|$ . Daher gilt (zusammen mit den obigen Ungleichungen)

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) = |\bar{T}_1| + |S| - 1 \geq \mathcal{W}_{\bar{T}}(x).$$

Sei nun  $z$  ein Nachbar von  $x$  in  $S$  und  $\bar{S}$  der Ast bei  $x$ , der  $z$  enthält (siehe Abbildung 2.17). Dann ist  $\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2 \cup (S \setminus \bar{S}) \cup \{z\}$  mit Gewicht  $|\bar{T}_1| + |\bar{T}_2| + |S| - |\bar{S}| - 1$ .



**Abbildung 2.17:** Zentroidknoten liegt nicht in  $S$

Jeder weitere Ast hat Gewicht kleiner  $|\bar{S}| - 2$ . Da weiters

$$\begin{aligned} |\bar{S}| - 2 &\leq |S'| - 2 \\ &\leq |T_1| + |T_2| + |S| - |S'| - 2 \\ &\leq |T_1| + |T_2| + |S| - |\bar{S}| - 2 \\ &= |\bar{T}_1| + |\bar{T}_2| + |S| - |\bar{S}| - 2, \end{aligned}$$

folgt

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(y) = |\bar{T}_1| + |\bar{T}_2| + |S| - |\bar{S}| - 1 \geq |\bar{T}_1| + |\bar{T}_2| + |S| - |S'| - 1 \geq \mathcal{W}_{\bar{T}}(x).$$

Ist also  $x$  kein Zentroidknoten von  $\bar{T}$ , dann ist es ein anderer Knoten aus  $T_1$ . Sei  $y$  der Nachbar von  $x$  in  $T_1$  (siehe Abbildung 2.18). Ein Ast von  $y$  ist  $S \cup \bar{T}_2 \cup \{y\}$  mit Gewicht  $|S| + |\bar{T}_2| - 1$ . Jeder andere Ast bei  $y$  ist Teil

von  $\bar{T}_1 \setminus \{x\}$  und hat damit Gewicht kleiner gleich  $|\bar{T}_1| - 2 = |T_1| - 1$ . Ist  $|T_1| < |S| + |T_2| - 1$ , dann gilt jedenfalls  $\mathcal{W}_{\bar{T}}(y) = |S| + |\bar{T}_2| - 1$ . Da nun auch

$$\begin{aligned} |\bar{T}_1| - 1 &= |T_1| \leq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y), \\ |\bar{T}_2| - 1 &\leq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y) \text{ und} \\ |S'| - 1 &\leq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y), \end{aligned}$$

folgt  $\mathcal{W}_{\bar{T}}(x) \leq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y)$  und  $x$  bleibt ein Zentroidknoten.

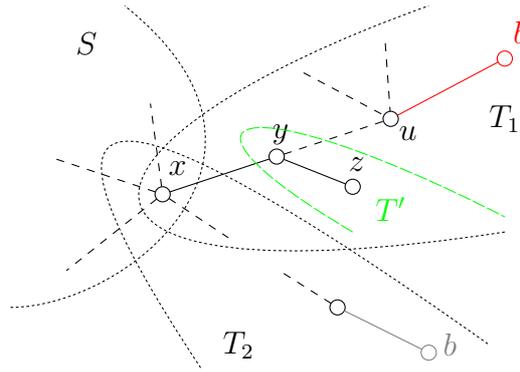
Ist nun  $|T_1| \geq |S| + |T_2| - 1$ , dann gilt jedenfalls

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(y) \leq |T_1| - 1 \leq |\bar{T}_1| - 1 \leq \mathcal{W}_{\bar{T}}(x).$$

Weiters folgt dann

$$|\bar{T}_1| - 1 = |T_1| \geq |S| + |\bar{T}_2| - 1 \geq |S'| - 1, |\bar{T}_2| - 1,$$

und damit  $\mathcal{W}_{\bar{T}}(x) = |\bar{T}_1| - 1 \geq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y)$ .



**Abbildung 2.18:** Zentroidknoten höchstens 1 von  $x$  entfernt

Sei  $z$  ein Nachbar von  $y$  in  $T_1$  ungleich  $x$  und  $T'$  der Ast bei  $y$ , der  $z$  enthält. Dann ist  $S \cup \bar{T}_2 \cup (\bar{T}_1 \setminus T') \cup \{y, z\}$  ein Ast bei  $z$  mit Gewicht  $|S| + |\bar{T}_2| + |\bar{T}_1| - |T'| - 1$ .

Da die anderen Äste bei  $z$  Gewicht kleiner

$$|T'| - 1 \leq |\bar{T}_1| - 2 = |T_1| - 1 \leq |S| + |\bar{T}_2| \leq |S| + |\bar{T}_2| + |\bar{T}_1| - |T'| - 1$$

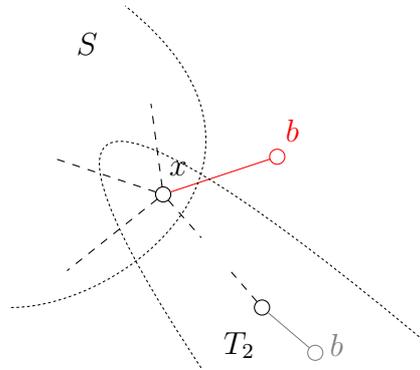
haben, folgt

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) = |S| + |\bar{T}_2| + |\bar{T}_1| - |T'| - 1 \geq |S| + |\bar{T}_2| \geq \mathcal{W}_{\bar{T}}(y).$$

In diesem Fall ist also jedenfalls  $y$  ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$ . Die Aussage folgt.  $\square$

**Proposition 2.5.2.** *Seien  $T$  ein Baum,  $x$  ein Zentroidknoten von  $T$ ,  $b$  ein Blatt von  $T$  und  $\bar{T}$  der Baum, der aus  $T$  entsteht, wenn man die Kante zwischen  $b$  und seinem Nachbarknoten entfernt und stattdessen  $(x, b)$  hinzufügt. Dann ist  $x$  ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$ .*

Beweis. Durch die Transformation entsteht ein neuer Ast bei  $x$ , der genau 2 Knoten enthält (siehe Abbildung 2.19). Da jeder Ast mindestens zwei Knoten enthält, müssen wir diesen Ast bei der Bestimmung des Gewichts von  $x$  in  $\bar{T}$  nicht berücksichtigen. Der Ast bei  $x$  in  $T$  aus dem  $b$  entfernt wird, sei  $T_2$ . Weiters sei wieder  $S = (T \setminus T_2) \cup \{x\}$  und  $S' \subset S$  ein Ast bei  $x$  in  $S$  mit maximalem Gewicht.



**Abbildung 2.19:** Neuer Ast bei  $x$  durch Transformation

Da  $x$  ein Zentroidknoten ist, gilt

$$|T_2| \leq |S| + 1,$$

und damit

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(x) = \max\{|T_2| - 1, |S'|\} - 1 < |S|.$$

Sei  $z$  der Nachbarknoten von  $x$  in  $T_2$ . Dann hat  $z$  den Ast  $S \cup \{b, z\}$  mit Gewicht  $|S| + 1$ . Daher gilt

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) \geq |S| + 1 > \mathcal{W}_{\bar{T}}(x).$$

Sei nun  $z$  ein Nachbarknoten von  $x$  in  $S$  und sei  $\bar{S}$  der Ast bei  $x$ , der  $z$  enthält. Ein Ast bei  $z$  ist jedenfalls  $\bar{T}_1 \cup \{b\} \cup (S \setminus \bar{S}) \cup \{z\}$  mit Gewicht  $|T_1| + |S| - |\bar{S}|$ . Daraus folgt

$$\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) \geq |T_1| + |S| - |\bar{S}|.$$

Jedenfalls ist dann  $\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) > |T_1| - 2$ . Weiters gilt, da  $S'$  ein Ast bei  $x$  ist mit  $|\bar{S}| \leq |S'|$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\bar{T}}(z) &\geq |T_1| + |S| - |\bar{S}| \\ &\geq |T_1| + |S| - |S'| \\ &\geq |S'| \\ &> |S'| - 1.\end{aligned}$$

$x$  ist demnach Zentroidknoten von  $\bar{T}$ . □

### 2.5.1 Die untere Schranke

Für die untere Schranke der beiden Zielfunktionen sind balancierte Bäume interessant. Wir nennen einen Baum  $T$  *k-vollständig*, wenn es einen Knoten  $z$  gibt, sodass alle Knoten  $u$  mit Abstand  $d(z, u) \leq \text{rad}(z) - 1$  einen Grad gleich  $k$  haben. Ein Baum  $T$  wird *k-balanciert* genannt, wenn  $T$  nach Entfernen aller Knoten  $u$  mit Abstand  $d(z, u) = \text{rad}(z)$  ein  $k$ -vollständiger Baum ist.  $k$ -balancierte Bäume der Ordnung  $n$  werden hier mit  $B_{n,k}$  bezeichnet.

Sei  $B_{n,k}$  ein  $k$ -vollständiger Baum und  $h = \text{rad}(B_{n,k})$ . Durch einfaches Abzählen erhält man die Ordnung  $N_{k,h}$  dieses Baumes.

$$\begin{aligned}N_{k,h} &= 1 + k + k(k-1) + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{h-1} \\ &= \begin{cases} 2h-1 & \text{für } k=2 \\ 1 + k \frac{1-(k-1)^h}{2-k} & \text{für } k>2. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Anzahl der Knoten eines  $k$ -balancierten Baumes der Höhe  $h$  liegt offenbar zwischen  $N_{k,h-1} + 1$  und  $N_{k,h}$ .

Es gilt der folgende Satz.

**Satz 2.5.3.** *Sei  $T$  ein Baum mit  $n$  Knoten und  $\Delta(T) = k$ . Dann gilt*

$$\text{rad}(B_{n,k}) \leq \text{rad}(T),$$

*das heißt der Radius nimmt seinen minimalen Wert in  $k$ -balancierten Bäumen an.*

*Beweis.* Seien  $r = \text{rad}(T)$  und  $x$  ein zentraler Knoten von  $T$ . Dann gilt  $e_T(x) = r$ . Sei weiters  $h \in \mathbb{N}$ , sodass  $N_{k,h-1} + 1 \leq n \leq N_{k,h}$  und  $B_{n,k}$  ein beliebiger  $k$ -balancierter Baum. Offenbar gilt  $\text{rad}(B_{n,k}) = h$ .

Angenommen  $T$  ist kein  $k$ -balancierter Baum. Dann gibt es einen Knoten  $u \in V(T)$ , mit  $\text{deg}_T(u) < k$  mit  $d = d_T(x, u) \leq r - 2$ . Sei  $b$  ein Blatt

eines längsten Pfades. Da hierfür in jedem Fall mindestens zwei Blätter zur Verfügung stehen, sei  $b$  ohne Einschränkung so gewählt, dass die Abtrennung des Knotens den Maximalgrad des so entstandenen Baumes nicht verändert. Sei weiters  $\bar{T}$  der Baum, der durch Abtrennen von  $b$  und Hinzufügen der Kante  $(u, b)$  entsteht.  $\bar{T}$  ist dann ein Baum der Ordnung  $n$  mit Maximalgrad gleich  $k$ .

Wenn  $T$  nur einen längsten Pfad besitzt und dieser von ungerade Länge ist, dann ist  $x$  kein zentraler Knoten von  $\bar{T}$ . Dieser ist jedoch ein direkter Nachbar von  $x$  und hat damit in  $\bar{T}$  Abstand zu  $b$  kleiner gleich  $r$ . Da der längste Pfad von  $T$  bei der Transformation um 1 verkürzt wird, folgt  $\text{rad}(\bar{T}) \leq \text{rad}(T)$ .

Ist ein längster Pfad von gerader Länge oder gibt es mehr als einen, so bleibt  $x$  als zentraler Knoten von  $\bar{T}$  erhalten. Da  $d_{\bar{T}}(x, b) \leq r - 1$ , bleibt der Radius in diesem Fall bei der Transformation erhalten.

Insgesamt folgt  $\text{rad}(\bar{T}) \leq \text{rad}(T)$ . Die Aussage folgt.  $\square$

**Beispiel.** Gibt es kein  $h$ , sodass die Ordnung  $n$  eines Baumes  $T$   $n \neq N_{k,h}$  erfüllt, dann kann  $T$  den minimal möglichen Radius  $\text{rad}(B_{n,k})$  annehmen ohne selbst  $k$ -balanciert sein. Der rechte Baum der folgenden Abbildung hat Ordnung 13, Maximalgrad 3. Obwohl dies kein 3-balancierter Baum ist, nimmt er den minimalen Radius  $\text{rad}(B_{13,3})$  an.

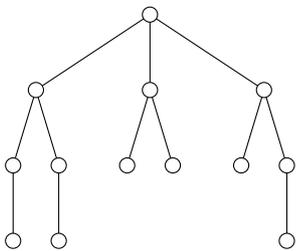


Abbildung 2.20:  $B_{13,3}$

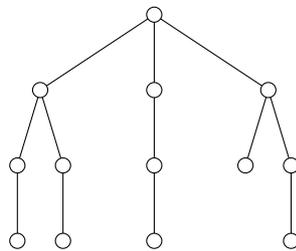


Abbildung 2.21:  $T \neq B_{13,3}$

Nun zur Zielfunktion des Zentroids, dem Status. Wiederum sind es  $k$ -balancierte Bäume, in denen der Status sein Minimum annimmt (in Abhängigkeit von Ordnung und Maximalgrad). Dieses Ergebnis erzielten bereits Lin, Shang und Zhang in [13]. Wir wollen den Beweis dieser Arbeit jedoch nicht rezitieren, sondern wieder dieselbe Transformation wie oben verwenden um das ähnliche Extremalverhalten der Zielfunktion deutlich zu machen. Bei der Auswahl des Blattes  $b$  für die Transformation muss man jedoch etwas vorsichtiger vorgehen, da man jedenfalls sicherstellen muss, dass sich der Maximalgrad des transformierten Baumes nicht von dem des Ausgangsbaumes

unterscheidet. Weiters lässt sich im folgenden Beweis der Status durch die Transformation strikt verkleinern. Daher nimmt der Status sein Minimum nur in  $k$ -balancierten Bäume an.

**Satz 2.5.4.** *Sei  $T$  ein Baum mit  $n$  Knoten und  $\Delta(T) = k$ . Dann gilt*

$$s(B_{n,k}) \leq s(T)$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $T = B_{n,k}$ .

Beweis. Angenommen  $T$  ist kein  $k$ -balancierter Baum. Wir zeigen, dass sich in diesem Fall eine Transformation von  $T$  zu einem Baum  $\bar{T}$  der Ordnung  $n$  und  $\Delta(\bar{T}) = k$  durchführen lässt, sodass  $s(\bar{T}) < s(T)$ .

Seien  $x$  ein Zentroidknoten von  $T$  und  $r = \text{rad}(x)$ . Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1)  $\text{deg}(x) = k$

(2)  $\text{deg}(x) < k$

Sei zuerst  $\text{deg}(x) = k$ . Ist  $T$  nicht  $k$ -balanciert, so gibt es einen Knoten  $u$  mit  $d_T(x, u) \leq r - 2$  und  $\text{deg}_T(u) < k$ . Wähle ein Blatt  $b$  mit  $d_T(x, b) = r$ , ohne Einschränkung sei  $b$  so gewählt, dass  $\Delta(T \setminus \{b\}) = k$ . Sei  $\bar{T}$  der Baum, der aus  $T$  entsteht, indem man  $b$  abtrennt und  $(u, b)$  hinzufügt. Dann hat  $\bar{T}$  genau  $n$  Knoten und der Maximalgrad ist wieder  $k$ . Seien weiters  $T_1$  der Ast von  $T$  bei  $x$ , der  $b$  enthält,  $T_2$  jener, der  $u$  enthält, und  $S = (T \setminus (T_1 \cup T_2)) \cup \{x\}$ . Aus  $\text{deg}(x) = k$  folgt  $x \neq u$  und damit erhalten wir mit Proposition 2.5.1, dass  $x$  Zentroidknoten von  $\bar{T}$  ist, wenn  $T_1 = T_2$  oder, falls  $T_1 \neq T_2$ , also  $|T_1| < |T_2| + |S| - 1$  gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(\bar{T}) &= s(x) = \sum_{z \in \bar{T}} d_{\bar{T}}(x, z) \\ &= \sum_{z \in T \setminus \{b\}} d_T(x, z) + d_{\bar{T}}(x, b) \\ &= s(T) - d_T(x, b) + d_T(x, u) + 1 \\ &< s(T). \end{aligned}$$

Ist  $T_1 \neq T_2$  und  $|T_1| \geq |T_2| + |S| - 1$ , dann sei  $y$  der eindeutige Nachbar von  $x$  auf der Geodäte  $\{x\} - \{u\}$  ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$  (siehe Abb. 2.22).

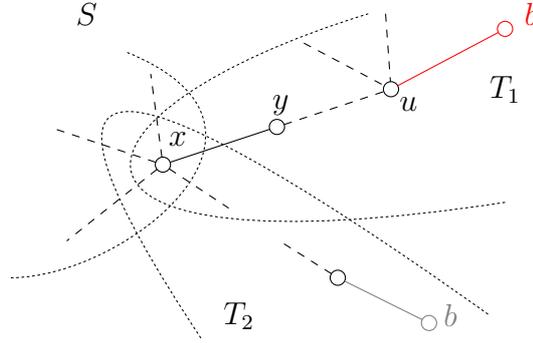


Abbildung 2.22:  $y$  ist Zentroidknoten nach Transformation

Es gilt

$$\begin{aligned}
s(\bar{T}) &= s(y) = \sum_{z \in \bar{T}} d_{\bar{T}}(y, z) \\
&= \sum_{z \in (T_1 \cup \{b\}) \setminus \{x\}} d_{\bar{T}}(y, z) + \sum_{z \in S \cup (T_2 \setminus \{b\})} d_{\bar{T}}(y, z) \\
&= \sum_{z \in T_1 \setminus \{x\}} (d_T(x, z) - 1) + d_{\bar{T}}(y, b) + \sum_{z \in S \cup (T_2 \setminus \{b\})} (d_T(x, z) + 1) \\
&= s(T) - d_T(x, b) - (|T_1| - 1) + d_T(x, u) + |S| + |T_2| - 2 \\
&= s(T) + (d_T(x, u) - d_T(x, b)) + (|S| + |T_2| - |T_1| - 1) \\
&< s(T).
\end{aligned}$$

Sei nun  $\deg_T(x) < k$ . Ist  $T$  nicht  $k$ -balanciert, so gibt es jedenfalls ein Blatt  $b$  mit  $d_T(x, b) > 1$  sodass der Nachbar von  $b$  nicht der einzige Knoten von  $T$  mit Grad gleich  $k$  ist. Denn: Sei  $z$  der einzige Knoten mit Grad  $k$  und  $T'$  der Ast bei  $x$ , der  $z$  enthält. Dann gilt  $|T'| \geq k + 1$ . Angenommen jeder andere Ast bei  $x$  besteht aus genau zwei Knoten, dann gilt wegen  $\deg_T(x) < k$

$$|T'| \geq k + 1 > |(T \setminus T') \cup \{x\}| + 1.$$

Dann kann jedoch  $x$  kein Zentroidknoten sein. Ein Widerspruch.

Sei also  $b$  ein Blatt mit  $d_T(x, b) > 1$  so gewählt, dass die Transformation, die  $b$  von  $T$  abtrennt und die Kante  $(x, b)$  hinzufügt, den Maximalgrad nicht verändert. Wiederum sei der transformierte Baum mit  $\bar{T}$  bezeichnet. Dann ist laut Proposition 2.5.2  $x$  ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$  und es gilt wie oben

$$s(\bar{T}) = s(T) - d_T(x, b) + 1 < s(T).$$

Die Aussage folgt. □

## 2.5.2 Die obere Schranke

Für die oberen Schranken der beiden Zielfunktionen betrachten wir sternförmige Bäume, genauer werden diese folgendermaßen definiert. Der vollständig bipartite Graph  $S_n = K_{1,n-1}$  wird auch  $n$ -Stern genannt. Unter einem *einfachen*  $k$ -Kometen  $S_{n,k}$  verstehen wir hier einen Baum mit  $n$  Knoten, der aus einem  $k$ -Stern mit  $2 \leq k \leq n-1$  besteht, an dessen inneren Knoten noch ein Pfad der Länge  $n-k$  angefügt wurde. Ein *zweifacher*  $k$ -Komet  $S_{n,k,\ell}$  ist ein einfacher  $k$ -Komet  $S_{n-\ell,k-1}$ , mit einem weiteren Pfad der Länge  $\ell$ , der an den inneren Knoten des Sternes gehängt wurde.

Offenbar gilt:  $S_n = S_{n,n-1} = S_{n,n-2,1}$  und  $S_{n,k} = S_{n,k-1,1}$ . Der Begriff des Kometen ist daher eine einfache Verallgemeinerung des Sterns. Wir werden des Weiteren, falls keine genaue Unterscheidung notwendig ist, alle drei als  $k$ -Kometen bezeichnen. Der maximale Knotengrad eines  $k$ -Kometen ist immer  $k$  und wird von genau einem Knoten angenommen, genau  $k$  Knoten haben den Grad 1 und die restlichen  $n-k-1$  den Grad 2.

**Beispiel.** Hier zwei einfache Beispiele von 9-Kometen.

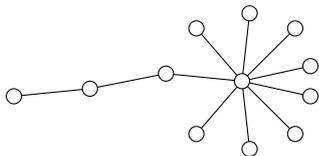


Abbildung 2.23:  $S_{12,9}$

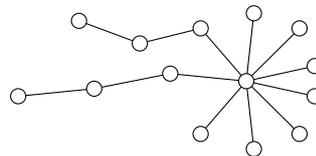


Abbildung 2.24:  $S_{14,9,3}$

**Satz 2.5.5.** Sei  $T$  ein Baum mit  $n$  Knoten und  $\Delta(T) = k$ . Dann gilt

$$rad(T) \leq rad(S_{n,k}).$$

Ein Baum  $T$  erfüllt Gleichheit, wenn entweder  $T = S_{n,k,\ell}$  für ein  $\ell$ , oder es einen Knoten  $z$  gibt, sodass  $T \setminus \{z\} = S_{n-1,k,\ell}$ .

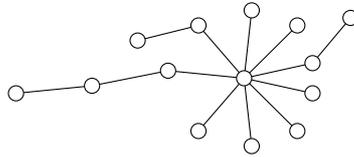
Beweis. Sei  $x$  ein zentraler Knoten von  $T$ ,  $z$  ein Knoten mit Grad gleich  $k$ , nicht notwendigerweise ungleich  $x$ . Sei  $b$  ein Blatt von  $T$  mit  $d(x,b) = rad(x)$ . Ist  $T \neq S_{n,k}$ , dann gibt es zwei Knoten  $u \neq v$  mit  $d(z,u), d(z,v) \geq 2$ , insbesondere gibt es ein Blatt  $\bar{b} \neq b$  mit  $d(x,\bar{b}) \geq 2$ . Sei nun  $y$  der zu  $\bar{b}$  adjazente Knoten.

Betrachten wir nun die folgende Transformation. Sei  $\bar{T}$  der Baum, der aus  $T$  durch Entfernen der Kante  $(y, \bar{b})$  und Hinzufügen der Kante  $(b, \bar{b})$  entsteht. Besitzt  $T$  genau einen längsten Pfad und ist  $\bar{b}$  ein Knoten dieses Pfades, so bleibt die Länge des längsten Pfades bei der Transformation gleich. Es folgt  $e(\bar{T}) = e(T)$ .

Sei nun entweder  $\bar{b}$  kein Knoten des einzigen längsten Pfades oder es gibt mehr als einen längsten Pfad in  $T$ . Ist  $x$  der einzige zentrale Knoten von  $T$ , so hat jeder längste Pfad von  $T$  gerade Länge und damit jeder längste Pfad von  $\bar{T}$  ungerade Länge.  $x$  bleibt bei der Transformation ein zentraler Knoten, die Exzentrizität hat sich um genau eins erhöht. Es gilt  $e(\bar{T}) > e(T)$ .

Ist das Zentrum zweielementig, so hat jeder längste Pfad von  $T$  ungerade Länge. Damit hat jeder solche Pfad in  $\bar{T}$  gerade Länge und  $x$  ist nicht mehr zentral in  $\bar{T}$ . Der Nachbarknoten von  $x$  auf der Geodäte  $\{x\} - \{b\}$  bleibt jedoch zentral. Der Radius bleibt daher bei der Transformation unverändert. Insgesamt folgt  $rad(\bar{T}) \leq rad(T)$ .  $\square$

**Beispiel.** Dieser Baum  $T$  hat 14 Knoten und Maximalgrad 9. Obwohl er kein 9-Komet ist, erfüllt er  $rad(T) = rad(S_{14,9}) = 3$ .



**Abbildung 2.25:**  $S_{14,9,3}$

Auch der Status nimmt auf sternförmigen Bäumen seine Maximalwerte an. Auch dieses Resultat über den Status ist bereits aus [13] bekannt. Doch lässt es sich, wie bereits angekündigt, mithilfe derselben Transformation zeigen. Weiters lässt sich, mit einer guten Auswahl des zu transformierenden Knotens, der Status immer strikt erhöhen. Dadurch erhalten wir zusätzlich, dass nur einfache Kometen den maximalen Status erreichen können.

**Satz 2.5.6.** *Sei  $T$  ein Baum mit  $n$  Knoten und  $\Delta(T) = k$ . Dann gilt*

$$s(T) \leq s(S_{n,k})$$

*mit Gleichheit genau dann, wenn  $T$  ein einfacher Komet  $S_{n,k}$  ist.*

Beweis. Für  $k = 2$  gilt  $T = S_{n,2}$ , daher sei o.E.  $k > 2$ . Sei  $x$  ein Zentroidknoten von  $T$  und  $z$  ein Knoten mit  $\deg(z) = k$ , nicht notwendigerweise  $z \neq x$ . Ist  $T \neq S_{n,k}$ , dann gibt es zwei Blätter  $b$  und  $\bar{b}$  mit  $d_T(z, b), d_T(z, \bar{b}) > 1$ . Daher können wir  $b$  und  $\bar{b}$  so wählen, dass gilt  $d_T(x, b) \geq d_T(x, \bar{b}) > 1$ .

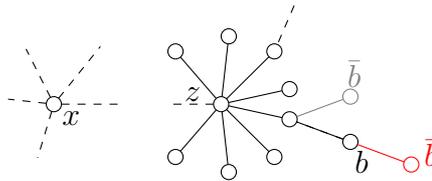
Sei  $\bar{T}$  jener Baum, der aus  $T$  durch Abtrennen von  $\bar{b}$  und Hinzufügen der Kante  $(b, \bar{b})$  entsteht.  $\bar{T}$  ist wieder ein Baum mit  $n$  Knoten und  $\Delta(\bar{T}) = k$ .

Kann man  $b$  und  $\bar{b}$  so wählen, dass  $x$  auch ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$  ist, dann gilt (wie im Beweis für die untere Schranke)

$$\begin{aligned}
 s(\bar{T}) &= s(x) = \sum_{u \in \bar{T}} d_{\bar{T}}(x, u) \\
 &= \sum_{u \in T \setminus \{\bar{b}\}} d_T(x, u) + d_{\bar{T}}(x, \bar{b}) \\
 &= \sum_{u \in T} d_T(x, u) - d_T(x, \bar{b}) + (d_T(x, b) + 1) \quad (2.5.1) \\
 &\geq s(T) + 1 \\
 &> s(T).
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle stellt sich nun die Frage, wie die beiden Blätter gewählt werden müssen um entweder  $x$  als Zentroidknoten erhalten zu können oder anderenfalls  $s(T) > s(\bar{T})$  garantieren zu können.

Sei nun  $T_1$  der Ast bei  $x$ , der  $z$  enthält. Gibt es in  $T_1$  zwei Blätter von  $T$  die zu  $z$  Abstand größer Eins haben, dann wähle  $b$  und  $\bar{b}$ , so dass  $d_T(x, b) \geq d_T(x, \bar{b})$  (siehe Abb. 2.26). Wegen Proposition 2.5.1 ist dann  $x$  wieder Zentroidknoten. Nach (2.5.1) gilt  $s(\bar{T}) > s(T)$ .



**Abbildung 2.26:**  $T_1$  enthält zwei passende Blätter

Gibt es einen Ast  $T_2 \neq T_1$  bei  $x$ , der kein Pfad ist, dann enthält  $T_2$  mindestens 2 Blätter von  $T$  (siehe Abb. 2.27). Da sich die Blätter im selben Ast befinden haben sie zu  $x$  und damit auch zu  $z$  Abstand größer Eins.

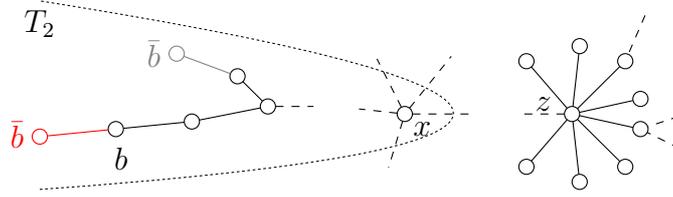


Abbildung 2.27: Ast bei  $x$ , der keinen Pfad darstellt

Wir wählen zwei Blätter  $b$  und  $\bar{b}$  in  $T_1$ , sodass  $d_T(x, b) \geq d_T(x, \bar{b})$ . Laut Proposition 2.5.1 ist  $x$  ein Zentroidknoten von  $\bar{T}$  und nach (2.5.1) folgt damit  $s(\bar{T}) > s(T)$ .

Sei nun jeder Ast ungleich  $T_1$  ein Pfad und enthalte  $T_1$  höchstens ein Blatt mit Abstand zu  $z$  größer 1. Weiters seien  $b$  ein Blatt von  $T$  mit maximalem Abstand zu  $x$  und  $\bar{b}$  ein beliebiges Blatt mit  $d_T(z, \bar{b}) > 1$ . Jedenfalls befinden sich die beiden Blätter dann in unterschiedlichen Ästen bei  $x$ . Sei  $T_b$  der Ast von  $T$  bei  $x$ , der  $b$  enthält und  $T_{\bar{b}}$  jener, der  $\bar{b}$  enthält. Weiters sei  $S = (T \setminus (T_b \cup T_{\bar{b}})) \cup \{x\}$ . Mithilfe der Proposition 2.5.1 wissen wir nun weiters, dass falls  $|T_b| < |T_{\bar{b}}| + |S| - 1$ ,  $x$  einen Zentroidknoten von  $\bar{T}$  darstellt. Damit folgt, nach (2.5.1), wieder  $s(\bar{T}) > s(T)$ .

Anderenfalls, wenn  $|T_b| \geq |T_{\bar{b}}| + |S| - 1$ , ist der eindeutige Nachbarknoten  $y$  von  $x$  auf der Geodäte  $\{x\} - \{b\}$  ein Zentroidknoten von  $\bar{b}$ .

Dann gilt (wie im Beweis für die untere Schranke)

$$\begin{aligned}
 s(\bar{T}) &= s(y) = \sum_{u \in T} d_{\bar{T}}(y, u) \\
 &= \sum_{u \in T_b \setminus \{x\}} d_{\bar{T}}(y, u) + \sum_{u \in S \cup T_{\bar{b}}} d_{\bar{T}}(y, u) \\
 &= \sum_{u \in T} d_T(x, u) - d_T(x, \bar{b}) - |T_b| + 1 + d_T(x, b) + |S| + |T_{\bar{b}}| - 2 \\
 &= s(T) + (d_T(x, b) - d_T(x, \bar{b})) + (|S| + |T_{\bar{b}}| - |T_b| - 1).
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle unterscheiden wir in die folgenden zwei Fälle.

1.  $b$  kann aus einem Ast  $T_b \neq T_1$  gewählt werden (siehe Abb. 2.28).
2.  $b$  muss aus  $T_1$  gewählt werden.

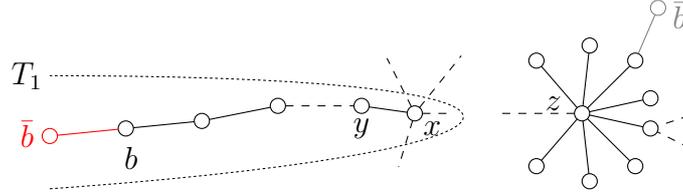
Fall 1. Da  $T_b \neq T_1$  gilt  $d_T(x, b) = |T_b| - 1$ . Gilt nun  $|S| > 1$ , dann folgt aus  $|S| + |T_{\bar{b}}| - 1 \leq |T_b|$ , dass

$$d_T(x, \bar{b}) \leq |T_{\bar{b}}| - 1 < |T_b| - 1 = d_T(x, b).$$

Insgesamt gilt

$$(|S| + |T_{\bar{b}}| - |T_b| - 1) + (d_T(x, b) - d_T(x, \bar{b})) > 0.$$

Somit folgt auch in diesem Fall  $s(\bar{T}) > s(T)$ .



**Abbildung 2.28:**  $b$  liegt nicht in  $T_1$

Ist  $|S| = 1$ , dann hat  $x$  genau zwei Äste,  $T_b$  und  $T_{\bar{b}} = T_1$ . Laut Annahme ist  $T_b$  ein Pfad der Länge  $|T_b| - 1$ . Nun muss  $T_1$  jedenfalls einen Knoten mit Grad  $k$  ( $> 2$ ) enthalten. Daraus folgt, dass  $d_T(x, \bar{b}) \leq |T_1| - 1 - (k - 2)$ . Insgesamt gilt daher

$$\begin{aligned} s(\bar{T}) - s(T) &= (d_T(x, b) - d_T(x, \bar{b})) + (|S| + |T_1| - |T_b| - 1) \\ &\geq (|T_b| - 1) - (|T_1| - (k - 1)) + (1 + |T_1| - |T_b| - 1) \\ &= k - 2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall gilt  $s(\bar{T}) > s(T)$ .

Gehen wir nun zu Fall 2. Muss  $b$  aus  $T_1$  gewählt werden, so gilt für alle anderen Blätter  $b'$  von  $T$

$$d_T(x, b) > d_T(x, b'),$$

und damit folgt direkt

$$(|S| + |T_{\bar{b}}| - |T_b| - 1) + (d_T(x, b) - d_T(x, \bar{b})) > 0.$$

Die Aussage folgt. □

An dieser Stelle berechnen wir nun noch den Radius und den Status eines Kometen. Die Länge eines längsten Pfades eines Kometen  $S_{n,k,l}$  beträgt offenbar  $n - k + 1$ . Daher ist der Radius

$$rad(S_{n,k}) = \left\lceil \frac{n - k}{2} \right\rceil.$$

Für den Status sind nur mehr einfache Kometen  $S_{n,k}$  von Interesse. Seien  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  die Knotenmenge und  $E = \{(x_j, x_{j+1}) \mid j = 1, \dots, n-k\} \cup \{(x_{n-k+1}, x_j) \mid j = n-k+2, \dots, n\}$  die Kantenmenge des Kometen. Sei zuerst  $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Wegen Lemma 2.2.2, stellt  $x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  einen Zentroidknoten dar. Sein Status beträgt

$$s(x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}) = 1 + 2 + \dots + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + 2 + \dots + (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k) + (k-1)(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k + 1).$$

Ist nun  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < k < n$ , stellt offenbar  $x_{n-k+1}$  einen Zentroidknoten dar. Sein Status ist

$$s(x_{n-k+1}) = 1 + 2 + \dots + n - k + (k-1)$$

Insgesamt erhalten wir also

$$s(S_{n,k}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i + \sum_{i=1}^{n-k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i + (k-1)(n-k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) & 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 1 + 2 + \dots + (n-k) + (k-1) & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < k < n. \end{cases}$$

### 2.5.3 Schranken in allgemeinen Graphen

Sei  $G$  ein beliebiger, einfacher, ungerichteter Graph. Für jeden Knoten  $x$  von  $G$  gibt es einen Spannbaum  $T_x$  von  $G$ , sodass für alle Knoten  $y$  in  $G$  gilt

$$d_G(x, y) = d_{T_x}(x, y).$$

Daher können wir aus den, in den letzten beiden Abschnitten hergeleiteten oberen und unteren Schranken, Aussagen über allgemeine Graphen ableiten. Für allgemeine zusammenhängende Graphen erhalten wir nun den folgenden Satz.

**Satz 2.5.7.** *Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Knoten und Maximalgrad  $\Delta(G) = k$ . Dann gilt*

$$\text{rad}(B_{n,k}) \leq \text{rad}(G) \leq \text{rad}(S_{n,k})$$

und

$$s(B_{n,k}) \leq s(G) \leq s(S_{n,k}).$$

Weiters erhalten wir

(i) *Ist  $B_{n,k}$  ein Spannbaum von  $G$ , dann gilt  $\text{rad}(G) = \text{rad}(B_{n,k})$ .*

(ii) Ist  $rad(G) = rad(S_{n,k})$ , dann enthält  $G$  einen Spannbaum  $T$ , sodass  $T = S_{n,k,\ell}$  oder es gibt einen Knoten  $z$ , sodass  $T \setminus \{z\} = S_{n-1,k,\ell}$  für ein  $\ell$ .

(iii)  $s(G) = s(B_{n,k})$  genau dann, wenn  $G$  einen  $B_{n,k}$  enthält.

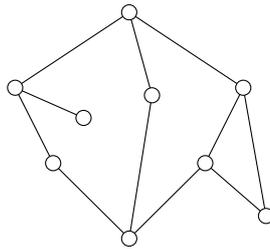
(iv) Ist  $s(G) = s(S_{n,k})$ , dann ist  $S_{n,k}$  ein Teilbaum von  $G$ .

Beweis.  $G$  enthält jedenfalls Spannbäume  $T_1, T_2$ , sodass  $rad(G) = rad(T_1)$  und  $s(G) = s(T_2)$ . Der erste Teil der Aussage folgt somit direkt aus den Aussagen, der beiden vorigen Abschnitte.

Sei nun  $T$  ein Spannbaum von  $G$ . Da für alle Knoten  $x, y \in V$  gilt, dass  $d_G(x, y) \leq d_T(x, y)$ , folgt dass  $rad(G) \leq rad(T)$  und  $s(G) \leq s(T)$ . Damit folgt auch der zweite Teil der Aussage.  $\square$

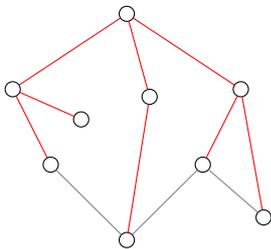
An dieser Stelle sei bemerkt, dass ein Graph  $G$  unter den Voraussetzungen des obigen Satzes einen Kometen  $S_{n,k,\ell}$  enthalten kann, deren Radien jedoch nicht übereinstimmen müssen.

**Beispiel.** Der folgende Graph  $G$  hat 9 Knoten und Maximalgrad 3.

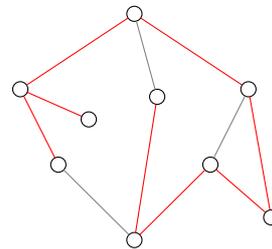


**Abbildung 2.29:**  $|G| = 9, \Delta(G) = 3$

Dieser Graph enthält sowohl einen  $B_{9,3}$ , als auch  $S_{9,3}$  als Spannbaum.



**Abbildung 2.30:** Spannbaum  $B_{9,3}$



**Abbildung 2.31:** Spannbaum  $S_{9,3}$

Mithilfe des obigen Satzes erhalten wir nun, dass  $rad(G) = rad(B_{9,3}) = 2$  und  $s(G) = s(B_{9,3}) = 13$ . Doch  $rad(S_{9,3}) = 4$  und  $s(S_{9,3}) = 19$ .

# Kapitel 3

## Minimal zentrale Teilbäume

### 3.1 Einführung

Die bisher untersuchten Mittelpunktskonzepte in Graphen waren auf die Eigenschaften einzelner Punkte im Graphen beschränkt. Aus diesem Schema wollen wir nun in diesem Abschnitt ausbrechen und uns mit den Eigenschaften von ganzen Teilbäumen eines Baumes auseinandersetzen. Diese bilden zusammen mit der Enthaltensrelation (bzw. „Teilbaum-Relation“) einen oberen Halbverband. Diese Relationen lassen sich mittels eines Hasse-Diagramms graphisch ausdrücken. Aus diesem speziellen Graphen lässt sich nun ein Abstandsbegriff auf der Menge der Teilbäume ableiten. Minimal zentrale Teilbäume sind spezielle Teilbäume die, in der Menge aller Teilbäume, einerseits „zentral“ bezüglich dieses Abstands liegen und andererseits mit dieser Eigenschaft von minimaler Ordnung sind.

Nieminen und Peltola bzw. Hamina und Peltola haben in [14] bzw. [6] dieses Konzept beschrieben und einige interessante Eigenschaften erforscht, jedoch keine Möglichkeit präsentiert einen solchen Teilbaum zu bestimmen. Zu diesem Zeitpunkt ist der Autorin keine Veröffentlichung eines solchen Algorithmus bekannt. Der folgende Teil dieser Arbeit beschreibt nun erstmals eine Möglichkeit einen minimal zentralen Teilbaum in polynomieller Zeit (bzgl. der Ordnung des Baumes) zu bestimmen.

Beginnen wir mit den grundlegenden Begriffen und Notationen. In diesem Abschnitt werden nur Knoten des Baumes oder des Hasse-Graphen betrachtet. Wir verwenden ab hier die Notation  $x \in T$  um auszudrücken, dass  $x$  ein Knoten des Baumes  $T$  ist.

**Definition 3.1.1.** Eine teilgeordnete Menge  $(V, \leq)$  heißt *oberer Halbverband*, wenn zu je zwei Elementen  $u, v \in V$  auch das Supremum  $u \vee v := \sup(u, v)$  in  $V$  existiert.

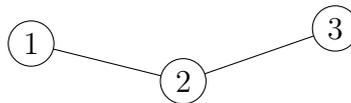
Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei Teilbäume eines Baumes  $T$ . Ist  $T_1$  ein Teilbaum von  $T_2$ , dann schreiben wir  $T_1 \subset T_2$ . Die Relation  $\subset$  ist offensichtlich eine Halbordnung auf der Menge der Teilbäume eines Baumes. Mit dieser Halbordnung bildet die Menge der Teilbäume einen oberen Halbverband. Dieser wird im Folgenden mit  $\mathcal{L}(T)$  bezeichnet. Das Supremum  $T_1 \vee T_2$  ist der kleinste Teilbaum von  $T$ , der beide Teilbäume  $T_1$  und  $T_2$  enthält, das heißt der von  $T_1$  und  $T_2$  induzierte Teilbaum. Haben die Knotenmengen von  $T_1$  und  $T_2$  nicht-leeren Schnitt, so ist das Infimum  $T_1 \wedge T_2$  der größte Teilbaum, der in beiden Teilbäumen enthalten ist. In diesem Zusammenhang wird  $(\emptyset, \emptyset)$  nicht als Baum aufgefasst, daher existiert das Infimum im Allgemeinen nicht und  $\mathcal{L}(T)$  bildet keinen Verband.

Das zugehörige Hasse-Diagramm wollen wir als Graph auffassen und mit  $G_{\mathcal{L}(T)}$  bezeichnen. Da alle Teilbäume in  $T$  selbst enthalten sind, ist der Graph  $G_{\mathcal{L}(T)}$  zusammenhängend. Mithilfe dieses Graphen kann man nun eine Distanzfunktion  $d_{\mathcal{L}}$  auf dem Halbverband  $\mathcal{L}(T)$  definieren.

**Definition 3.1.2.** Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei Teilbäume von  $T$ . Der  $\mathcal{L}$ -Abstand  $d_{\mathcal{L}}(T_1, T_2)$  sei definiert als die Länge eines kürzesten Weges von  $T_1$  nach  $T_2$  in  $G_{\mathcal{L}(T)}$ . Für einen Teilbaum  $S$  ist die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität definiert durch  $e_{\mathcal{L}}(S) = \max_{S' \in \mathcal{L}(T)} d_{\mathcal{L}}(S, S')$ . Ein *zentraler Teilbaum* ist ein Element  $S \in \mathcal{L}(T)$  von minimaler  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität. Ein *minimal zentraler Teilbaum* ist ein zentraler Teilbaum mit minimaler Knotenanzahl.

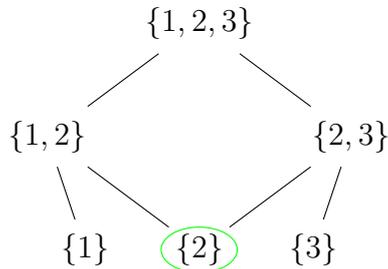
Man beachte, dass jeder Knoten des Hasse-Graphen einem Teilbaum entspricht. Daher werden der einfachen Lesbarkeit halber im Rahmen dieser Arbeit, Hasse-Knoten und Teilbäume identifiziert.

**Beispiel.** Sei  $T$  der Pfad, der aus drei Knoten besteht.



**Abbildung 3.1:** Pfad mit 3 Knoten

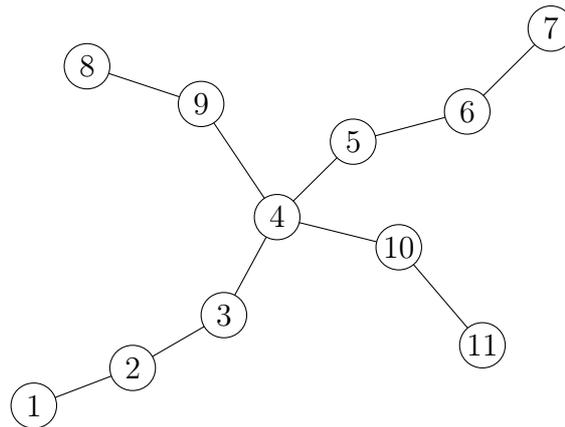
Das assoziierte Hasse-Diagramm  $G_{\mathcal{L}}$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Es ist einfach zu überprüfen, dass  $\{2\}$  von minimaler  $L$ -Exzentrizität (2) ist. In dieser sehr kleinen Instanz ist dieser Teilbaum eindeutig mit dieser Eigenschaft. Weiters stellt der Knoten klarerweise das Zentrum und auch das Zentroid des gegebenen Baumes dar.



**Abbildung 3.2:** Hasse-Diagramm zu Baum mit 3 Knoten

Minimal zentrale Teilbäume sind im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel.** Betrachten wir den Baum  $T$  der Abbildung 3.3.



**Abbildung 3.3:** Baum bestehend aus zwei zusammengeführten Pfaden

Dieser Teilbaum enthält, trotz seiner relativ einfachen Form, bereits 162 unterschiedliche Teilbäume. Wie die folgende Abschnitte jedoch zeigen werden, müssen wir nicht alle diese Teilbäume bei der Bestimmung betrachten. Ein Kandidat für einen minimal zentralen Teilbaum enthält kein Blatt des Baumes. Daher kommt nur ein Teilbaum von  $T' = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$  in Frage. Zusätzlich werden wir herausfinden, dass jeder minimal zentrale Teilbaum das Zentrum enthält und das Zentroid schneidet. Da diese beiden in unserem Beispiel im Knoten 4 zusammenfallen, können wir die Auswahl weiter einschränken. Um die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität eines Teilbaumes  $S$  von  $T'$  mit  $4 \in S$  zu bestimmen, müssen wir in diesem Beispiel den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu insgesamt nur

5 Teilbäumen berechnen. Auch dieses Vorgehen wird später noch ausführlich erklärt. Diese Teilbäume sind der ganze Baum und die vier Teilbäume, die nur aus einem Blatt bestehen, d.h.  $\{1\}$ ,  $\{7\}$ ,  $\{8\}$  und  $\{11\}$ . Die beiden Teilbäume in Abbildung 3.4 stellen die beiden einzigen minimal zentralen Teilbäume in diesem Beispiel dar.



**Abbildung 3.4:** Minimal zentrale Teilbäume des Baumes in Abb. 3.3

Betrachten wir den Teilbaum  $S = \{3, 4, 5, 9\}$ . Um z.B. den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu 1 zu bestimmen, muss man im Hasse-Graphen einen kürzesten Weg zwischen diesen beiden Teilbäumen betrachten. Wie wir später sehen werden, gibt es immer einen kürzesten Weg, der durch das Supremum der beiden Teilbäume führt. Es gilt

$$S \vee \{1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$$

Die Knotenfolge im Hasse-Graphen von 1 zu  $S \vee \{1\}$  ist

$$\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$$

Zusammen mit der Knotenfolge von  $S$  zu  $S \vee \{1\}$ , d.h.

$$\{3, 4, 5, 9\} \subset \{2, 3, 4, 5, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 9\},$$

erhalten wir einen kürzesten Weg der Länge 7. Analog erhält man die  $\mathcal{L}$ -Abstände zu den anderen 4 Teilbäumen. Mithilfe der beiden Propositionen 3.1.4 und 3.1.4 lässt sich auch einfach argumentieren, warum diese beiden Teilbäume die einzigen aus der Menge der möglichen Teilbäume sind, die den Abstand zu den obigen 5 Teilbäumen minimieren. Die minimale  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität beträgt 7.

Die Anzahl der Teilbäume eines Baumes muss nicht polynomiell in der Ordnung des Baumes sein. Der Hasse-Graph kann daher im Allgemeinen sehr

groß werden. Insbesondere bedeutet das, dass das Betrachten aller Möglichkeiten keinen effizienten Ansatz darstellt einen minimalen Teilbaum zu bestimmen.

Nieminen und Peltola haben in [14] eine Möglichkeit präsentiert, die es erlaubt, den  $\mathcal{L}$ -Abstand zwischen zwei Teilbäumen ohne den Hasse-Graphen zu bestimmen. Hierzu dient ein zweiter Abstandsbegriff. Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei Teilbäume von  $T$ . Der Abstand dieser beiden in  $T$  ist die Länge des Pfades, der die beiden in  $T$  verbindet. Falls die beiden Teilbäume einen gemeinsamen Schnitt haben, ist dieser Abstand Null. Im weiteren Verlauf bezeichnen wir den Abstand der Teilbäume im ursprünglichen Baum  $T$  mit  $d_T(T_1, T_2)$ . Dies ist eine Verallgemeinerung des üblichen Abstands zwischen 2 Knoten in Graphen. Für einen Knoten  $x$  kürzen wir daher  $d_T(T_1, \{x\})$  mit  $d_T(T_1, x)$  ab.

**Lemma 3.1.3.** *(Nieminen, Peltola, 1999,[14]) Sei  $T$  ein Baum und  $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(T)$  zwei beliebige Teilbäume. Dann gilt*

$$d_{\mathcal{L}}(S_1, S_2) = \begin{cases} |S_1| + |S_2| + 2(d_T(S_1, S_2) - 1) & \text{wenn } S_1 \cap S_2 = \emptyset \\ |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2| & \text{wenn } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Beweis. Seien  $S_1$  und  $S_2$  zwei Teilbäume von  $T$ . Zwei Teilbäume sind im Hasse-Graph direkt durch eine Kante verbunden, wenn sie sich um genau einen Knoten unterscheiden. Ein Pfad von  $S_1$  zu  $S_2$  kann als Transformation von  $S_1$  zu  $S_2$  interpretiert werden. Ein Schritt über eine Kante „nach oben“ im Hasse-Graphen entspricht dem Hinzufügen eines Blattes, ein Schritt „nach unten“ dem Entfernen eines Blattes. Die Länge eines Pfades von  $S_1$  nach  $S_2$  entspricht daher der Anzahl der Schritte, die die entsprechende Transformation benötigt.

Seien  $S_1$  und  $S_2$  nicht disjunkt. Um  $S_1$  in  $S_2$  umzuwandeln müssen alle Knoten aus  $S_1 \setminus S_2$  entfernt und alle aus  $S_2 \setminus S_1$  hinzugefügt werden. Auf einem kürzesten Weg in  $G_{\mathcal{L}}$  wird sonst kein Knoten hinzugefügt oder entfernt. Daher gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S_1, S_2) &= |S_1 \setminus S_2| + |S_2 \setminus S_1| \\ &= |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2|. \end{aligned}$$

Seien  $S_1$  und  $S_2$  nun disjunkt. In diesem Fall muss vorsichtiger vorgegangen werden. Jedenfalls müssen alle Knoten von  $S_2$  hinzugefügt werden und alle von  $S_1$  entfernt werden. Doch kann im Allgemeinen kein Knoten von  $S_2$  als Blatt zu  $S_1$  hinzugefügt werden. Daher müssen zuerst die Knoten auf der Geodäte  $S_1 - S_2$  hinzugefügt werden. Nach Aufnahme der Knoten von

$S_2$  können, Schritt für Schritt, die Knoten von  $S_1$  und der Geodäte wieder entfernt werden. Bis auf die Reihenfolge ist dies die kürzeste Möglichkeit für die Transformation von  $S_1$  zu  $S_2$ .

Damit folgt

$$d_{\mathcal{L}}(S_1, S_2) = |S_1| + |S_2| + 2(d_T(S_1, S_2) - 1).$$

□

Mithilfe der beiden Formeln aus Lemma 3.1.3, kann man nun den  $\mathcal{L}$ -Abstand zweier Bäume ausrechnen. Da sich im Hasse-Graphen zwischen zwei Teilbäumen genau dann eine Kante befindet, wenn sich die beiden um ein Blatt eines der beiden unterscheiden, kann man durch Hinzufügen bzw. Entfernen eines solchen den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu anderen Teilbäumen vergrößern oder verkleinern. Die beiden folgenden Propositionen geben den genauen Zusammenhang zwischen der Wahl des Knotens und dem Teilbaum, zu dem der  $\mathcal{L}$ -Abstand betrachtet wird, wieder.

**Proposition 3.1.4.** *Sei  $T$  ein Baum und  $S$  und  $\bar{S}$  zwei beliebige Teilbäume von  $T$  mit  $S \cap \bar{S} \neq \emptyset$ . Weiters sei  $v$  ein Knoten in  $T$ , der zu  $S$  in  $T$  benachbart ist, d.h. ein Knoten sodass  $|S \vee \{v\}| = |S| + 1$ . Dann gilt*

$$(a) \text{ Ist } v \in \bar{S}, \text{ dann } d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) = d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) - 1.$$

$$(b) \text{ Ist } v \notin \bar{S}, \text{ dann } d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) = d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) + 1.$$

Beweis. Ist  $v \in \bar{S}$ , so gilt  $|S \wedge \bar{S}| + 1 = |(S \vee \{v\}) \wedge \bar{S}|$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) &= |S \vee \{v\}| + |\bar{S}| - 2|(S \vee \{v\}) \wedge \bar{S}| \\ &= |S| + 1 + |\bar{S}| - 2(|S \wedge \bar{S}| + 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) - 1. \end{aligned}$$

Ist  $v \notin \bar{S}$ , so gilt  $|S \wedge \bar{S}| = |(S \vee \{v\}) \wedge \bar{S}|$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) &= |S \vee \{v\}| + |\bar{S}| - 2|(S \vee \{v\}) \wedge \bar{S}| \\ &= |S| + 1 + |\bar{S}| - 2|S \wedge \bar{S}| \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) + 1. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.1.5.** *Sei  $T$  ein Baum und  $S$  und  $\bar{S}$  zwei beliebige Teilbäume von  $T$  mit  $S \cap \bar{S} = \emptyset$ . Weiters sei  $v$  ein Knoten in  $T$ , der zu  $S$  in  $T$  benachbart ist, d.h. ein Knoten sodass  $|S \vee \{v\}| = |S| + 1$ . Dann gilt*

(a) Liegt  $v$  auf der Geodäte  $S - \bar{S}$ , dann  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) = d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) - 1$ .

(b) Liegt  $v$  nicht auf dieser Geodäte, dann  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) = d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) + 1$ .

Beweis. Sei zuerst  $v$  ein Knoten auf der Geodäte von  $S$  zu  $\bar{S}$ . Gilt  $v \in \bar{S}$ , so sind die beiden Teilbäume  $S$  und  $\bar{S}$  benachbart, d.h.  $d_T(S, \bar{S}) = 1$ . Ihr  $\mathcal{L}$ -Abstand beträgt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) = |S| + |\bar{S}| + 2(d_T(S, \bar{S}) - 1) = |S| + |\bar{S}|.$$

Weiters gilt dann

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) &= |S \vee \{v\}| + |\bar{S}| - 2|(S \vee \{v\}) \wedge \bar{S}| \\ &= |S| + 1 + |\bar{S}| - 2 \\ &= |S| + |\bar{S}| - 1. \end{aligned}$$

Liegt  $v$  nicht in  $S$ , so verringert sich der Abstand der Teilbäume in  $T$  durch durch Hinzufügen von  $v$  zu  $\bar{S}$  jedoch um 1. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) &= |S \vee \{v\}| + |\bar{S}| + 2(d_T(S \vee \{v\}, \bar{S}) - 1) \\ &= |S| + 1 + |\bar{S}| + 2(d_T(S, \bar{S}) - 1 - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) - 1. \end{aligned}$$

Ist nun  $v$  kein Knoten auf der Geodäte von  $S$  zu  $\bar{S}$  gilt  $d_T(S \vee \{v\}, \bar{S}) = d_T(S, \bar{S})$  und es folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{v\}, \bar{S}) &= |S \vee \{v\}| + |\bar{S}| + 2(d_T(S \vee \{v\}, \bar{S}) - 1) \\ &= |S| + 1 + |\bar{S}| + 2(d_T(S, \bar{S}) - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S}) + 1. \end{aligned}$$

□

Hamina und Peltola haben in [6] weitere Eigenschaften von minimal zentralen Teilbäumen veröffentlicht. Diese werden hier im Folgenden zusammengefasst. Insbesondere die letzten beiden sind für uns von besonderem Interesse.

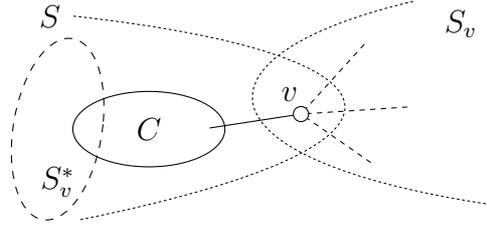
**Lemma 3.1.6.** (Hamina, Peltola, 2011 [6]) Seien  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum eines Baumes  $T$ ,  $v$  ein zu  $C$  adjazenter Knoten und  $C_v = C \vee \{v\}$ . Sei weiters  $S_v^*$  ein Teilbaum, der  $e_{\mathcal{L}}(C_v) = d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*)$  erfüllt. Dann gilt

$$e_{\mathcal{L}}(C) \leq e_{\mathcal{L}}(C_v) \leq e_{\mathcal{L}}(C) + 1.$$

Weiters ist  $v \notin S_v^*$  und wenn  $C \cap S_v^* = \emptyset$ , dann liegt  $v$  auch nicht auf der Geodäte  $C - S_v^*$ .

Beweis. Folgt direkt aus den beiden Propositionen 3.1.4 und 3.1.5.  $\square$

Sei nun  $S$  jener Zweig bei  $v$ , der  $C$  enthält und  $S_v = (T \setminus S) \vee \{v\}$  der Teilbaum, der durch Entfernen dieses Zweiges ohne den Knoten  $v$  entsteht (siehe Abbildung 3.5). Mithilfe des Lemmas 3.1.6 folgt, dass  $S_v^* \subset S$ . Die von  $C_v$  am weitesten entfernten Teilbäume liegen also in demselben Ast bei  $v$ , in dem auch  $C$  liegt.



**Abbildung 3.5:** Skizze der Lage von  $S_v^*$

**Lemma 3.1.7.** (Hamina, Peltola, 2011, [6]) Seien  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum eines Baumes  $T$ ,  $v$  ein zu  $C$  adjazenter Knoten und  $C_v = C \cup \{v\}$ . Sei weiters  $S_v^*$  ein Teilbaum, der  $e_{\mathcal{L}}(C_v) = d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*)$  erfüllt,  $S$  jener Ast bei  $v$ , der  $C$  enthält und  $S_v = (T \setminus S) \vee \{v\}$ . Dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^* \vee S_v) = d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*) + |S_v| - d_T(S_v, S_v^*) - 1.$$

Beweis. Sei  $v^*$  der Knoten mit  $d_T(S_v, S_v^*) = d_T(v, v^*)$ . Da laut Lemma 3.1.6  $v \notin S_v^*$  und  $v \notin C - S_v^*$ , gilt jedenfalls  $v \neq v^*$  und  $C_v \wedge (S_v^* \vee S_v) \neq \emptyset$ . Ist  $C_v \cap S_v^* \neq \emptyset$ , so gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^* \vee S_v) &= |C_v| + |S_v^* \vee S_v| - 2|C_v \wedge (S_v^* \vee S_v)| \\ &= |C_v| + |S_v^*| + |S_v| + d_T(S_v, S_v^*) - 1 \\ &\quad - 2(|C_v \cap S_v^*| + d_T(S_v, S_v^*)) \\ &= d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*) + |S_v^*| - d_T(S_v, S_v^*) - 1. \end{aligned}$$

Ist  $C_v \cap S_v^* = \emptyset$ , so gilt  $|C_v \wedge (S_v^* \vee S_v)| = d_T(S_v, S_v^*) - d_T(C_v, S_v^*) + 1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^* \vee S_v) &= |C_v| + |S_v^* \vee S_v| - 2|C_v \wedge (S_v^* \vee S_v)| \\ &= |C_v| + |S_v^*| + |S_v| + d_T(S_v, S_v^*) - 1 \\ &\quad - 2(d_T(S_v, S_v^*) - d_T(C_v, S_v^*) + 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*) + |S_v^*| - d_T(S_v, S_v^*) - 1. \end{aligned}$$

$\square$

Aus diesen Lemma folgt nun direkt

**Korollar 3.1.8.** (Hamina, Peltola, 2011, [6]) Seien  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum eines Baumes  $T$ ,  $v$  ein zu  $C$  adjazenter Knoten und  $C_v = C \cup \{v\}$ . Sei weiters  $S_v^*$  ein Teilbaum, der  $e_{\mathcal{L}}(C_v) = d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*)$  erfüllt,  $S$  jener Ast bei  $v$ , der  $C$  enthält und  $S_v = (T \setminus S) \vee \{v\}$ . Dann gilt

$$|S_v| \leq d_T(S_v, S_v^*).$$

Beweis. Da  $v \in S_v^* \vee S_v$ , kann nach Lemma 3.1.6  $S_v^* \vee S_v$  nicht maximalen  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $C_v$  haben, es gilt also  $e_{\mathcal{L}}(C_v) > d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v \vee S_v^*)$ . Daher

$$d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*) > d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v \vee S_v^*) = d_{\mathcal{L}}(C_v, S_v^*) + |S_v| - d_T(S_v, S_v^*) - 1$$

und damit

$$d_T(S_v, S_v^*) + 1 > |S_v|.$$

□

**Proposition 3.1.9.** Sei  $T$  ein Baum der Ordnung  $n$ , der kein Pfad gerader Länge ist. Dann gilt für mindestens einen Zentroidknoten  $v$

$$e_{\mathcal{L}}(\{v\}) \leq d_{\mathcal{L}}(\{v\}, T) = n - 1.$$

Beweis. Für einen Teilbaum  $S$  von  $T$  mit nicht-leerem Schnitt mit dem Teilbaum, der nur aus dem Knoten  $v$  besteht, gilt

$$d_{\mathcal{L}}(\{v\}, S) = |S| + 1 - 2|S \wedge \{v\}| = |S| - 1 \leq |T| - 1 = d_{\mathcal{L}}(\{v\}, T).$$

Betrachten wir also Teilbäume, die  $v$  nicht enthalten. Ein solcher Teilbaum  $S$  ist klarerweise in einem Ast bei  $v$  enthalten, und dieser kann nicht mehr als  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  Knoten besitzen. Da dieser Ast auch die Geodäte von  $S$  zu  $v$  enthält, gilt

$$|S| + d_T(S, \{v\}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$$

Des Weiteren kann die Geodäte von  $S$  zu  $v$  keinesfalls länger als  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  sein. Daher gilt die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(\{v\}, S) &= 1 + |S| + 2(d_T(S, \{v\}) - 1) \\ &= |S| + d_T(S, \{v\}) + d_T(S, \{v\}) - 1 \\ &\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \\ &= 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{aligned}$$

Ist  $n$  also ungerade, so erhalten wir sofort  $d_{\mathcal{L}}(\{v\}, S) \leq n - 1 = d_{\mathcal{L}}(\{v\}, T)$ . Sei nun  $n$  gerade. Falls  $d_{\mathcal{L}}(\{v\}, S) = n$ , dann muss  $S$  aus einem Blatt bestehen von dem  $v$  genau  $\frac{n}{2}$  Kanten entfernt ist. Dies bedeutet jedoch, dass der Ast bei  $v$ , der  $S$  enthält, die Ordnung  $\frac{n}{2} + 1$  hat. Es ist einfach nachzurechnen, dass es nun einen zweiten Zentroidknoten gibt, der zu  $w$  benachbart ist. Dieser liegt klarerweise in demselben Ast wie  $S$ , da anderenfalls sein Gewicht größer als  $\frac{n}{2}$  ist. Für  $w$  gilt dann klarerweise  $d_T(S, \{w\}) = d_T(S, \{v\}) - 1$  und damit auch  $d_{\mathcal{L}}(\{w\}, S) \leq n - 1 = d_{\mathcal{L}}(\{w\}, T)$ . Da  $T$  laut Voraussetzung kein Pfad ist, kann es nun keinen Ast bei  $w$  geben, der ein Pfad der Länge  $\frac{n}{2}$  ist. Daher gilt die eben genannte Abschätzung für jeden Teilbaum  $S$ , der  $w$  nicht enthält.  $\square$

**Lemma 3.1.10.** (Nieminen, Peltola, 1999, [14]) Sei  $T$  ein Baum mit Ordnung größer 2. Dann enthält kein minimal zentraler Teilbaum von  $T$  ein Blatt von  $T$ .

Beweis. Sei  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum mit  $b \in C$  ein Blatt von  $T$ . Sei weiters  $S$  ein beliebiger Teilbaum von  $T$ . Wir müssen zeigen, dass bei Entfernen von  $b$  aus  $C$  die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität nicht steigt, denn dann kann  $C$  kein minimal zentraler Teilbaum sein.

Sei zuerst  $C \cap S = \emptyset$ . Da  $b$  ein Blatt ist, gilt  $b \notin C - S$  und wir erhalten mit Proposition 3.1.5  $d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, S) = d_{\mathcal{L}}(C, S) - 1$ .

Sei nun  $C \cap S \neq \emptyset$ . Ist  $b \notin S$ , so erhalten wir mit Proposition 3.1.4 wiederum  $d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, S) = d_{\mathcal{L}}(C, S) - 1$ . Ist nun  $b \in S$ , aber  $|S| > 1$ , so muss, da  $b$  ein Blatt ist,  $C \cap S$  mehr als nur den Knoten  $b$  enthalten. Daher ist  $(C \setminus \{b\}) \cap S = C \cap (S \setminus \{b\}) \neq \emptyset$ . Weiters gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, S) &= |C \setminus \{b\}| + |S| - 2|(C \setminus \{b\}) \cap S| \\ &= |C| + |S \setminus \{b\}| - 2|C \cap (S \setminus \{b\})| \\ &= d_{\mathcal{L}}(C, S \setminus \{b\}) \\ &\leq e_{\mathcal{L}}(C). \end{aligned}$$

Zum Schluss betrachten wir noch den Fall  $S = \{b\}$ . Es ist leicht nachzurechnen, dass  $e_{\mathcal{L}}(T) = |T| - 1$ . Laut Proposition 3.1.9 gibt es in einem Baum, der kein Pfad gerader Länge ist, immer einen Zentroidknoten  $v$ , der  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$  erfüllt. Daher gilt in diesem Fall  $C \neq T$ . Sei also  $T$  ein Pfad gerader Länge und  $S = \{v_1, v_2\}$  sein Zentroid.  $T$  besitzt genau 2 Blätter  $b_1$  und  $b_2$ . Ohne Einschränkung seien diese so nummeriert, dass  $d_T(v_j, b_j) = \frac{|T|}{2} - 1$  gilt. Wegen der Propositionen 3.1.4 und 3.1.5 sind die Teilbäume mit maximal möglichem  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  die drei Teilbäume  $T$ ,

$\{b_1\}$  und  $\{b_2\}$ . Es gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, T) = |T| - 2 \text{ und}$$

$$d_{\mathcal{L}}(S, \{b_j\}) = 2 + 1 + 2\left(\frac{|T|}{2} - 2\right) = |T| - 1.$$

Daher ist auch in diesem Fall  $C \neq T$ .

Da  $C \neq T$ , gibt es jedenfalls ein Blatt  $x$  von  $T$  mit  $x \notin C$  und damit

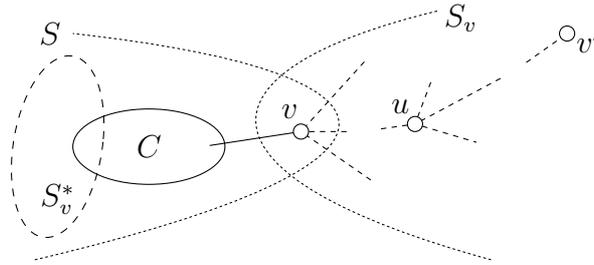
$$d_{\mathcal{L}}(C, \{x\}) > d_{\mathcal{L}}(C, \{b\}) = d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, \{b\}) - 1.$$

Daraus folgt, dass  $d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, \{b\}) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$ . □

Mithilfe der bisher gezeigten Ergebnisse lassen sich nun die folgenden beiden Sätze beweisen.

**Satz 3.1.11.** (*Hamina, Peltola, 2011, [6]*) *Das Zentrum eines Baumes ist in jedem minimal zentralen Teilbaum dieses Baumes enthalten.*

Beweis. Sei  $Z$  das Zentrum von  $T$  und  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum, der  $Z$  nicht enthält. Dann gibt es einen Knoten  $u \in Z \setminus C$ . Weiters sei  $v$  der eindeutige Nachbar von  $C$  auf der Geodäte  $C - \{u\}$ . Sei  $S$  der Ast bei  $v$ , der  $C$  enthält,  $S_v = (T \setminus S) \vee \{v\}$  und  $S_v^*$  ein Teilbaum mit  $e_{\mathcal{L}}(C \vee \{v\}) = d_{\mathcal{L}}(C \vee \{v\}, S_v^*)$ . Dann ist  $u \in S_v$  und es gibt einen Punkt  $v' \in S_v$ , sodass  $d_T(u, v') \geq \text{rad}(T) - 1$ .



**Abbildung 3.6:** Darstellung der Lage von  $v$ ,  $u$  und  $v'$

Daher gilt

$$d_T(v, v') = d_T(v, u) + d_T(u, v') \geq d_T(v, u) + \text{rad}(T) - 1.$$

Dann gilt mit Korollar 3.1.8

$$d_T(v, u) + \text{rad}(T) \leq d_T(v, v') + 1 \leq |S_v| \leq d_T(S_v, S_v^*) = d_T(v, S_v^*).$$

Da weiters

$$d_T(v, S_v^*) = d_T(u, S_v^*) - d_T(u, v),$$

folgt

$$2 d_T(u, v) \leq d_T(u, S_v^*) - \text{rad}(T) \leq 0.$$

Also gilt  $u = v$ .

Angenommen, das Zentrum hat leeren Schnitt mit  $C$ . Dann liegt es vollständig in  $S_v$ , das heißt, es gibt einen Knoten  $v' \in S_v$  mit  $d_T(v, v') = \text{rad}(T)$  und damit

$$\text{rad}(T) + 1 \leq |S_v| \leq d_T(S_v, S_v^*) \leq \text{rad}(T),$$

ein Widerspruch.

Nun gibt es noch die Möglichkeit, dass das Zentrum zweielementig ist,  $Z = \{v, w\}$  mit  $w \in C$  ein Nachbar von  $v$ . Dann gibt es in  $S_v$  einen Knoten  $v'$  mit  $d_T(v, v') = \text{rad}(T) - 1$ . Somit gilt

$$d_T(C, v') = d_T(w, v') = \text{rad}(T)$$

und

$$\text{rad}(T) \leq |S_v| \leq d_T(S_v, S_v^*) \leq \text{rad}(T).$$

Also gilt  $|S_v| = d_T(S_v, S_v^*) = \text{rad}(T)$ .  $S_v^*$  besteht nur aus einem Blatt von  $T$  und damit gilt nach Lemma 3.1.10  $C \cap S_v^* = \emptyset$ . Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, \{v'\}) &= |C| + 1 + 2(d_T(C, v') - 1) \\ &= |C \vee \{v'\}| - 1 + |S_v^*| + 2(\text{rad}(T) - 1) \\ &= |C \vee \{v'\}| + |S_v^*| + 2(d_T(C \vee \{v'\}, S_v^*) - 1) \\ &\quad + 2(\text{rad}(T) - d_T(C \vee \{v'\}, S_v^*)) - 1 \\ &= d_{\mathcal{L}}(C \vee \{v'\}, S_v^*) + 1 + 2(\text{rad}(T) - 1 - d_T(C \vee \{v'\}, S_v^*)) \\ &= e_{\mathcal{L}}(C \vee \{v'\}) + 1 + 2(\text{rad}(T) - 1 - d_T(C \vee \{v'\}, S_v^*)). \end{aligned}$$

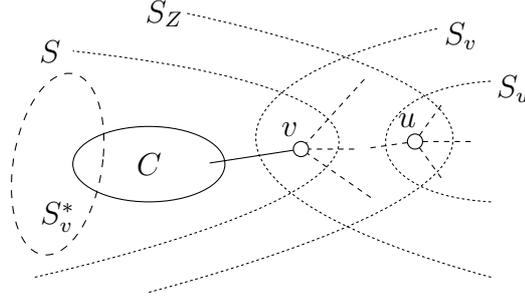
Da  $d_T(C \vee \{v'\}, S_v^*) \leq \text{rad}(T) - 1$ , gilt nun

$$e_{\mathcal{L}}(C \vee \{v'\}) < e_{\mathcal{L}}(C),$$

ein Widerspruch. □

**Satz 3.1.12.** (*Hamina, Peltola, 2011, [6]*) *Jeder minimal zentrale Teilbaumes eines Baumes hat einen nicht-leeren Schnitt mit dessen Zentroid.*

Beweis. Sei  $Z$  das Zentroid und  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum mit  $C \cap Z = \emptyset$ . Sei  $u$  ein Zentroidknoten mit  $d_T(C, Z) = d_T(C, u)$  und  $v$  der eindeutige Nachbar von  $C$  auf der Geodäte  $C - \{u\}$ . Sei  $S$  der Ast bei  $v$ , der  $C$  enthält und  $S_v = (T \setminus S) \vee \{v\}$ . Weiters sei  $S_Z$  der Ast bei  $u$  der  $C$  enthält,  $S_u = (T \setminus S_Z) \vee \{u\}$  und  $S_v^*$  ein Teilbaum mit  $e_{\mathcal{L}}(C \vee \{v\}) = d_{\mathcal{L}}(C \vee \{v\}, S_v^*)$ .



**Abbildung 3.7:** Darstellung der Lage von  $v$  und  $u$

Dann gilt  $S \subset S_Z$  und  $|S_Z \cap Z| = 1$ . Ist  $|T| = 2m$ , so gilt  $|S| \leq |S_Z| \leq m$ , ist  $|T| = 2m + 1$ , so gilt  $|S| \leq |S_Z| \leq m + 1$ . In beiden Fällen gilt

$$|S_v| = |T| - |S| + 1 \geq m + 1. \quad (3.1.1)$$

Wir wissen bereits, dass  $S_v^* \subset S$ . Daher gilt  $d_T(S_v, S_v^*) \leq |S| - 1$ . Mithilfe von Korollar 3.1.8 und der Ungleichung (3.1.1) erhält man nun

$$m + 1 \leq |S_v| \leq d_T(S_v, S_v^*) \leq |S| - 1.$$

Insgesamt folgt nun

$$m + 2 \leq |S| \leq |S_Z| \leq m,$$

ein Widerspruch. □

**Korollar 3.1.13.** *Sei  $T$  ein Baum der Ordnung  $n$  und  $C_R = \{u, w\}$  das Zentroid von  $T$ . Ist  $w$  nicht in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten, so ist der Ast bei  $w$ , der  $u$  enthält, ein Pfad der Länge  $\frac{n}{2}$ .*

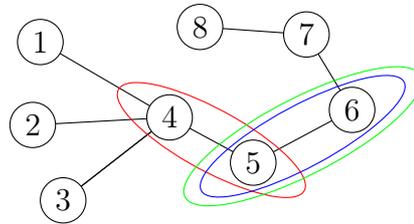
Beweis. Sei  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum, der  $w$  nicht enthält. Aufgrund des vorigen Resultats wissen wir bereits, dass dann jedenfalls  $u$  in  $C$  enthalten sein muss.  $C \cup \{w\}$  ist also wieder ein Teilbaum von  $T$ . Sei  $S$  der Ast bei  $w$  der  $C$  enthält und  $S_w = (T \setminus S) \cup \{w\}$ . Da  $u \in S$ , gilt  $|S| = \frac{n}{2} + 1$ . Daher

ist  $|S_w| = \frac{n}{2}$ . Ist  $S_w^*$  ein Teilbaum mit maximalem  $\mathcal{L}$ -Abstand von  $C \cup \{w\}$ , dann gilt nach Korollar 3.1.8

$$\frac{n}{2} = |S_w| \leq d_T(S_w, S_w^*) \leq |S| - 1 = \frac{n}{2}.$$

Da nun  $d_T(S_w, S_w^*) = d_T(w, S_w^*) = \frac{n}{2}$ , folgt, dass  $S_w^*$  nur aus einem Blatt besteht. Weiters enthält  $S$  genau  $\frac{n}{2} + 1$  Knoten und ist daher ein Pfad von  $w$  zu  $S_w^*$ .  $\square$

**Beispiel.** Besteht das Zentroid aus 2 Knoten, so müssen diese nicht beide in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten sein. Betrachten wir den Baum in Abbildung 3.8.



**Abbildung 3.8:** Baum mit minimal zentralen Teilbaum, der Zentroid nicht enthält

Ein minimal zentraler Teilbaum dieses Baumes besteht aus den Knoten 5 und 6 und der zugehörigen Kante. Dieser enthält das Zentrum (blau) und einen, aber nicht beide Zentroidknoten (rot). Man beachte, der Ast bei 4, der 5 enthält, ist ein Pfad der Länge 4.

Insbesondere bedeutet dies, dass es einen Zentroidknoten gibt, der in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten ist. Zusammen mit Satz 2.4.3 können wir nun auch die nachstehende Aussage über den Cent-Dian schlussfolgern.

**Korollar 3.1.14.** *Seien  $T$  ein Baum,  $w$  ein zentraler Knoten,  $v$  ein Zentroidknoten, der in jedem minimal zentralen Teilbaum von  $T$  enthalten ist und  $\lambda \in [0, 1)$ . Ein  $\lambda$ -Cent-Dian ist in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten.*

Ein  $\lambda$ -Cent-Dian muss sich daher (für  $\lambda < 1$ ) stets in jedem minimal zentralen Teilbaum befinden.

## 3.2 Algorithmische Bestimmung

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, lässt sich die Anzahl der Teilbäume eines Baumes nicht polynomiell in der Anzahl der Knoten des Baumes beschränken. Es ist also naheliegend, bei der algorithmischen Bestimmung eines minimalen Teilbaumes auf die Bestimmung aller Teilbäume (und damit auch den Hasse-Graphen) verzichten zu wollen. Die folgenden Zeilen beschreiben nun die Grundidee des hier präsentierten Algorithmus, der polynomiell in der Anzahl der Knoten des Baumes ist.

Sei  $S$  ein beliebiger Knoten des Hasse-Graphen  $G_{\mathcal{L}}$  und  $S'$  ein Knoten mit  $d_{\mathcal{L}}(S, S') = e_{\mathcal{L}}(S)$ . Zwischen je zwei Knoten von  $G_{\mathcal{L}}$  existiert genau dann eine Kante, wenn die beiden Teilbäume sich um ein Blatt eines der beiden unterscheiden. Einen Nachbarknoten von  $S$  (im Hasse-Diagramm), der näher zu  $S'$  liegt, erhält man, indem man entweder ein Blatt von  $S$  entfernt oder hinzufügt.

Ist  $S$  nicht zentral, so kann bei geeigneter Wahl des Teilbaumes  $S'$  und des Blattes von  $S$ , ein Teilbaum mit besserer  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität gefunden werden.

*Ausgehend von einem echten Teilbaum  $S$  eines minimal zentralen Teilbaumes lässt sich nun immer ein zu  $S$  benachbarter Knoten  $v$  angeben, der zusammen mit  $S$  wieder in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten ist. Zusätzlich können wir eindeutig angeben, wann die Aufnahme weiterer Knoten keine Verkleinerung der  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität bewirkt.*

Auf diesem Weg „rutschen“ wir im Hasse-Graphen Kante für Kante in Richtung eines zentralen Teilbaumes bis eine der Stoppbedingungen erreicht wird. Wir wissen bereits aus Satz 3.1.12, dass jeder minimal zentrale Teilbaum nicht-leeren Schnitt mit dem Zentroid hat. Weiters konnten wir in Korollar 3.1.13 bereits beobachten, welche Eigenschaften ein Zentroidknoten hat, der nicht in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten sein muss. Ein Zentroidknoten stellt jedoch auf Grund seiner Mittelpunktseigenschaften in einem Baum einen exzellenten Startknoten dar. Daher wollen wir uns zuerst mit der Frage auseinandersetzen, welchen Zentroidknoten man jedenfalls als Startknoten wählen kann.

**Lemma 3.2.1.** *Sei  $T$  ein Baum, kein Pfad gerader Länge, und  $v$  ein Zentroidknoten mit der Eigenschaft  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) \leq |T| - 1$ . Dann ist  $v$  in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten.*

Beweis. Besteht das Zentroid aus nur einem Knoten, folgt die Aussage direkt aus Satz 3.1.12. Sei nun das Zentroid zweielementig. Da  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) \leq |T| - 1$ , gilt für jedes Blatt  $b$  von  $T$ , dass  $d_{\mathcal{L}}(\{v\}, \{b\}) \leq |T| - 1$ . Insbesondere gibt es dann kein Blatt  $b$ , sodass  $d_T(v, b) = \frac{|T|}{2}$ . Daher hat  $v$  keinen Ast, der

einen Pfad der Länge  $\frac{|T|}{2}$  darstellt. Aus Korollar 3.1.13 folgt, dass  $v$  in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten sein muss.  $\square$

Ein Zentroidknoten mit dieser Eigenschaft ist für den hier vorgestellten Algorithmus sehr wichtig. Wir wissen bereits mit Proposition 3.1.9, dass jeder Baum mit Ausnahme der Pfade gerader Länge einen solchen Zentroidknoten besitzen. Daher wollen wir an dieser Stelle Pfade behandeln. Die einfache Struktur dieser Bäume erlaubt uns, die folgende Aussage zu machen.

**Satz 3.2.2.** *Sei  $T$  ein Pfad. Der vom Zentrum von  $T$  induzierte Teilbaum ist der einzige minimal zentrale Teilbaum von  $T$ .*

Beweis. Laut Satz 3.1.11 ist das Zentrum in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten. Sei nun  $S$  der vom Zentrum induzierte Teilbaum und  $n$  die Ordnung von  $T$ . Ist  $n \leq 2$ , so ist  $S$  offensichtlich minimal zentral. Sei also  $n \geq 3$ . Sei  $S'$  ein Teilbaum von  $T$ , der  $S$  enthält. Dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, S') = |S| + |S'| - 2|S| = |S'| - |S| \leq |T| - |S| = d_{\mathcal{L}}(S, T)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $S' = T$ . Ist  $n$  gerade, so ist  $|S| = 2$  und es gibt Teilbäume  $S'$  mit nicht-leerem Schnitt mit  $S$ , die nur einen Knoten  $w$  aus  $S$  enthalten. Ein solcher Teilbaum kann maximal  $\frac{n}{2}$  Knoten enthalten. Daher gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, S') = 2 + |S'| - 2 \leq \frac{n}{2} \leq |T| - 2 = d_{\mathcal{L}}(S, T),$$

wobei Gleichheit nur im Fall  $n = 4$  gelten kann.

Sei  $S'$  ein zu  $S$  disjunkter Teilbaum.  $S'$  liegt in einem der Teilpfade, die bei Entfernung von  $S$  aus  $T$  bestehen. Da  $T$  ein Pfad ist, besitzt  $T$  genau zwei Blätter  $b_1$  und  $b_2$ . Diese sind nicht in  $S$  enthalten. Sei ohne Einschränkung  $b_1$  das Blatt, das im selben Teilpfad wie  $S'$  liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S, S') &= |S| + |S'| + 2(d_T(S, S') - 1) \\ &\leq |S| + |S' \vee \{b_1\}| + 2(d_T(S, S' \vee \{b_1\}) - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, S' \vee \{b_1\}) \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $b_1$  in  $S'$  enthalten ist. Ein zu  $S$  disjunkter Teilbaum kann nur maximalen  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  haben, wenn er auch das zugehörige Blatt enthält. Sei nun  $S'$  ein Teilbaum und  $b_1$  das Blatt mit  $b_1 \in S'$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S, S') &= |S| + |S'| + 2(d_T(S, S') - 1) \\ &= |S| + 1 + (|S'| - 1) + 2(d_T(S, b_1) - (|S'| - 1) - 1) \\ &= |S| + 1 + 2(d_T(S, b_1) - 1) - (|S'| - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, \{b_1\}) - (|S'| - 1). \end{aligned}$$

Die Teilbäume, die nur aus einem Blatt von  $T$  bestehen, maximieren also den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  unter allen disjunkten Teilbäumen. Zusätzlich gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \{b_j\}) = |S| + 1 + 2(d_T(S, b_j) - 1).$$

Ist nun  $n$  ungerade, so gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \{b_j\}) = 1 + 1 + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n - 1.$$

Ist  $n$  gerade, so gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \{b_j\}) = 2 + 1 + 2\left(\frac{n-2}{2} - 1\right) = n - 1.$$

Die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität von  $S$  beträgt also in jedem Fall  $n-1$ . Sei  $C$  ein Teilbaum mit  $S \subsetneq C$ . Dann enthält  $C$  jedenfalls Knoten, die zu  $S$  adjazent sind. Sei  $u_j$  der zu  $S$  benachbarte Knoten auf der Geodäte  $S - \{b_j\}$  ( $j = 1, 2$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{u_1\}, \{b_2\}) &= d_{\mathcal{L}}(S, \{b_2\}) + 1 > e_{\mathcal{L}}(S) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{u_1, u_2\}, \{b_2\}) &= d_{\mathcal{L}}(S, \{b_2\}) + 1 - 1 = e_{\mathcal{L}}(S). \end{aligned}$$

Die analoge Aussage gilt für  $b_1$ . Ein minimal zentraler Teilbaum enthält keinen der beiden Nachbarn alleine. Durch die Aufnahme beider wird die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität aber nicht mehr verbessert. Durch iterative Anwendung dieses Arguments erhält man, dass ein solcher Teilbaum  $C$  nicht minimal zentral sein kann.  $\square$

**Bemerkung.** In einem Pfad ist das Zentrum gleich dem Zentroid. Der eindeutige minimal zentrale Teilbaum eines Pfades ist also ebenso gleich dem vom Zentroid induzierten Teilbaum.

### 3.2.1 $S$ -Gewichte und assoziierte Teilbäume

Von nun an sei  $T$  kein Pfad und  $v$  ein fixer Zentroidknoten, der  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) \leq |T| - 1$  erfüllt. Weiters sei  $S$  ein Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes  $C$  mit  $v \in S$ . Ist  $S \subsetneq C$ , so gilt  $e_{\mathcal{L}}(S) > e_{\mathcal{L}}(C)$ . Daher gibt es einen Teilbaum  $S'$  mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S') > d(C, S')$ .  $C$  enthält also einen Knoten, der den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S'$  verringert. Die beiden Propositionen 3.1.4 und 3.1.5 geben nun Auskunft über die Lage dieses Knotens. Ist  $S'$  zu  $S$  disjunkt, so enthält  $C$  mindestens einen Knoten auf der Geodäte  $S - S'$ , sind die beiden nicht-disjunkt, so enthält  $C$  einen Knoten aus  $S'$ , der noch nicht in  $S$  ist. Um zu entscheiden, ob und welche Knoten  $S$  noch fehlen, müssen wir die Teilbäume kennen, die von  $S$  den größten  $\mathcal{L}$ -Abstand haben.

**Definition 3.2.3.** Für einen Knoten  $w$  ist  $T_w$  der maximale Teilbaum von  $T$ , der  $w$ , aber keinen weiteren Knoten des Pfades von  $v$  nach  $w$  enthält, d.h. ein Teilbaum maximaler Ordnung mit  $T_w \wedge (\{v\} - \{w\}) = \{w\}$ .

Das  $S$ -Gewicht  $A_S(w)$  eines Knotens  $w$  ist der maximale Wert, um den sich der  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  eines Teilbaumes  $S'$ , mit  $S' \cap T_w = \{w\}$ , vergrößert, wenn man  $S'$  mit einem Teilbaum  $S'' \subset T_w$  zusammenfügt, der  $w$  enthält.

Mit  $S_w$  bezeichnen wir einen Teilbaum von  $T_w$  mit  $w \in S_w$ , sodass für jeden Teilbaum  $S'$  mit  $S' \cap T_w = \{w\}$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, S' \vee S_w) = d_{\mathcal{L}}(S, S') + A_S(w)$$

und unter allen Teilbäumen von  $T_w$  mit dieser Eigenschaft von minimaler Ordnung ist. (Wir werden später sehen, dass ein solcher Teilbaum existiert und eindeutig ist.)

Ein Knoten  $w \neq v$  mit Grad (in  $T$ ) ungleich 2 wird  $T$ -Gabelungsknoten genannt. Auf der Suche nach den Teilbäumen mit maximalem  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  unterscheiden wir jene, die  $v$  enthalten und jene, die dies nicht erfüllen.  $S_v$  ist per Definition der Teilbaum mit  $v \in S_v$  und maximalem Abstand zu  $S$ . Unter den Teilbäumen, die  $v$  nicht enthalten, reicht es sich auf  $S_w$  mit einem  $T$ -Gabelungsknoten  $w$  zu beschränken. Dies folgt aus den Propositionen 3.1.4 und 3.1.5.

Im Folgenden werden wir uns mit der Bestimmung eines Teilbaumes  $S_w$  befassen. Mithilfe dieser Konstruktion werden wir sehen, dass ein solcher Teilbaum immer existiert und auch eindeutig ist. Sei zuerst  $w \notin S$ . Durch Unterscheidung ob  $S \cap S' = \emptyset$  oder  $S \cap S' \neq \emptyset$ , erhält man

$$d_{\mathcal{L}}(S, S' \vee S_w) = d_{\mathcal{L}}(S, S') + |T_w| - 1 - |T_w \setminus S_w|.$$

Daher ist  $S_w = T_w$  und  $A_S(w) = d_{\mathcal{L}}(S, S' \vee S_w) - d_{\mathcal{L}}(S, S') = |T_w| - 1$ . Sei also  $w \in S$ . Da

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S, S' \vee S_w) &= |S| + |S'| + |S_w| - 1 - 2(|S \cap S'| + |S \cap S_w| - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, S') + |S_w| - 2|S \cap S_w| + 1, \end{aligned}$$

folgt

$$A_S(w) = |S_w| - 2|S \cap S_w| + 1.$$

Für die Bestimmung der  $S_w$  unterscheiden wir zwei Fälle,  $\deg_S(w) = 1$  und  $\deg_S(w) > 1$ . Sei zuerst  $w$  ein Blatt von  $S$ . Dann ist  $w$  der einzige Knoten in  $S \cap T_w$ . Es gilt

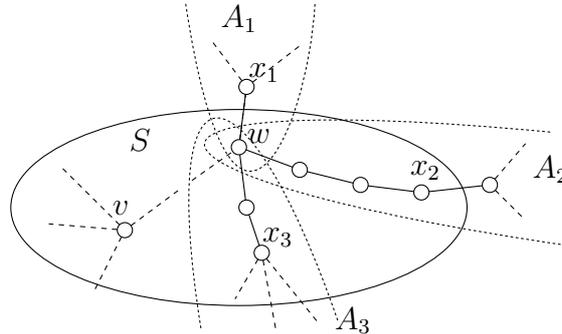
$$A_S(w) = |S_w| - 2|S \cap S_w| + 1 = |S_w| - 1 \leq |T_w| - 1.$$

In diesem Fall folgt  $S_w = T_w$ .

Sei also  $\deg_S(w) > 1$  und seien  $A_1, \dots, A_s$  die Äste bei  $w$  in  $T_w$ . Für jeden Ast  $A_i$  definieren wir einen Knoten  $x_i$  wie folgt.

- (a) Ist  $S \cap A_i = \{w\}$ , dann sei  $x_i$  der zu  $w$  adjazente Knoten in  $A_i$ .
- (b) Haben alle Knoten ungleich  $w$  in  $S \cap A_i$  Grad gleich 2, dann sei  $x_i \in S \cap A_i$  der Knoten mit maximalem Abstand zu  $w$ .
- (c) Gibt es einen Gabelungsknoten in  $S \cap A_i$ , dann sei  $x_i$  jener Gabelungsknoten, sodass alle Knoten auf der Geodäte  $\{w\} - \{x_i\}$  ungleich  $w$  und  $x_i$  einen Grad gleich 2 haben.

Abbildung 3.9 soll die 3 eben beschriebenen Fälle nochmal graphisch darstellen. Der Knoten  $w$  hat in  $T_w$  Grad 3,  $x_1$  ist zu  $w$  adjazent, jedoch nicht mehr in  $S$  enthalten. Der Ast  $A_2$  enthält in  $S$  außer  $w$  keinen Knoten mit Grad ungleich 2, daher ist  $x_2$  der am weitesten von  $w$  entfernte Knoten in  $S$ . Der Ast  $A_3$  enthält einen Gabelungsknoten in  $S$ ,  $x_3$  ist jener Gabelungsknoten ungleich  $w$  mit minimalem Abstand zu  $w$ .



**Abbildung 3.9:** Auswahl der Knoten  $x_i$

Ist  $x_i \in A_i$  kein Element von  $S$ , dann gilt klarerweise  $S_{x_i} \subset S_w$ . Sei also  $x_i \in S \cap A_i$ . Da der Teilbaum  $S_{x_i}$  per Definition die bestmögliche Wahl eines Teilbaumes von  $T_{x_i}$  darstellt, der  $x_i$  enthält, um den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  zu maximieren, stellt sich für den Knoten  $w$  nur noch die Frage ob  $x_i \in S_w$ . Betrachten wir die Geodäte  $\{w\} - \{x_i\}$ . Sei  $w \neq y \in \{w\} - \{x_i\}$  der von  $w$  am weitesten entfernte Knoten. Ist  $y \neq x_i$ , dann ist  $\deg_S(y) = 2$  und  $S_w \setminus \{y\}$  ein Teilbaum mit größerem  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  (laut Proposition 3.1.4). Daher gilt entweder  $S_w \cap (\{w\} - \{x_i\}) = \{w\}$  oder  $S_w \cap (\{w\} - \{x_i\}) = \{w\} - \{x_i\}$ . Sei  $u$  der Nachbar von  $w$  in  $A_i$ . Dann wissen wir jetzt, dass von  $\{u\} \vee S_{x_i}$  entweder jeder oder kein Knoten in  $S_w$  liegt.

Sei nun  $S' = S_w \setminus (\{u\} \vee S_{x_i})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S, \bar{S} \vee S_{x_i}) &= |S| + |S'| + d_T(w, x_i) + |S_{x_i}| - 1 \\ &\quad - 2(|S \wedge S'| + d_T(w, x_i) + |S_{x_i} \wedge S| - 1) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, S') + |S_{x_i}| - 2|S_{x_i} \wedge S| + 1 - d_T(w, x_i) \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, S') + A_S(x_i) - d_T(w, x_i). \end{aligned}$$

Daher ist  $S_{x_i}$  genau dann in  $S_w$  enthalten, wenn  $A_S(x_i) - d_T(w, x_i) > 0$  (Gleichheit ist ausgeschlossen, da  $S_w$  mit maximalem  $\mathcal{L}$ -Abstand minimale Ordnung besitzt.)

Definiert man

$$J_S(x) = \{x_i \mid i = 1, \dots, s, x_i \notin S \text{ oder } A_S(x_i) - d_T(w, x_i) > 0\},$$

dann gilt

$$S_w = \bigvee_{y \in J_S(x)} S_y.$$

Weiters erhält man

$$A_S(w) = \sum_{y \in J_S(x) \cap S} (A_S(y) - d_T(w, y)) + \sum_{y \in J_S(x) \setminus S} |T_y|.$$

**Bemerkung.** Für einen Knoten  $w$  hängt  $S_w$  immer von dem zugrundeliegenden Teilbaum  $S$  eines minimal zentralen Teilbaumes ab. Mit der Vergrößerung von  $S$  kann sich  $S_w$  im Allgemeinen verkleinern.

**Bemerkung.** Aus dieser Konstruktion lässt sich nun einfach erkennen, dass es genau einen Teilbaum mit den Eigenschaften von  $S_w$  gibt. Ist  $w \notin S$  oder  $\deg_S(w) = 1$ , dann ist  $S_w = T_w$  und jeder echte Teilbaum  $S'$  von  $T_w$  mit  $w \in S'$  hat strikt kleineren  $\mathcal{L}$ -Abstand. Ist  $w \in S$ , so hat man für alle Äste  $A_i$  bei  $w$  in  $T_w$  zu entscheiden, ob  $x_i$  samt  $S_{x_i}$  in  $S_w$  enthalten ist oder nicht. Da  $x_i$  nur aufgenommen wird, wenn sich dadurch der  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  strikt vergrößert, muss jeder Teilbaum  $S' \subset T_w$  mit  $w \in S'$  und  $A_S(w) = |S'| - 2|S' \cap S| + 1$  den Knoten  $x_i$  enthalten. Damit folgt  $S_w \subset S'$ .

Man beachte, dass  $v$ , aufgrund seiner speziellen Rolle, bereits per Definition kein  $T$ -Gabelungsknoten ist, selbst wenn  $\deg_T(v) > 2$ . Für einen  $T$ -Gabelungsknoten  $w$  gilt also jedenfalls  $v \notin S_w$ . Die eben beschriebene Konstruktion lässt sich aber auch für  $v$  durchführen. Der Teilbaum  $S_v$  spielt auch während des Algorithmus eine besondere Rolle.

**Satz 3.2.4.** *Seien  $T$  ein Baum und  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum von  $C$ . Sei weiters  $v \in C$  ein Zentroidknoten mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$ . Dann gilt*

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_v) \geq e_{\mathcal{L}}(C) - 1.$$

Beweis. Ist  $C = \{v\}$ . Dann gilt  $C_v = T$  und laut Voraussetzung  $d_{\mathcal{L}}(C, T) = e_{\mathcal{L}}(C)$ .

Sei also  $\{v\} \subsetneq C$ . Aufgrund der Definition von  $C_v$ , gilt für alle Teilbäume  $S'$  mit  $v \in S'$

$$d_{\mathcal{L}}(C, S') \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

Es genügt also zu zeigen, dass es einen Teilbaum  $S'$  geben muss, der  $v \in S'$  und  $d_{\mathcal{L}}(C, S') \geq e_{\mathcal{L}}(C) - 1$  erfüllt.

Da  $C$  mehr als einen Knoten enthält, gibt es jedenfalls 2 Blätter  $b_1$  und  $b_2$  von  $C$ . Ist  $v$  kein Blatt von  $C$ , dann können  $b_1$  und  $b_2$  aus verschiedenen Ästen bei  $v$  gewählt werden. Sei nun  $w$  ein  $T$ -Gabelungsknoten. Ist  $w \notin C$ , so liegt höchstens einer der beiden Knoten  $b_1$  oder  $b_2$  auf der Geodäte  $C - C_w$ . Ist  $w \in C$ , so liegen alle Blätter von  $C$  in  $C_w$  im selben Ast bei  $v$ .  $C_w$  enthält daher höchstens einen der beiden Knoten  $b_1$  oder  $b_2$ . Wegen der Propositionen 3.1.4 und 3.1.5 gilt daher

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b_1, b_2\}, C_w) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_w) + 1 - 1 \leq e_{\mathcal{L}}(C).$$

Aufgrund der Wahl der Teilbäume  $C_w$  gilt nun klarerweise für alle Teilbäume  $S'$ , die  $v$  nicht enthalten

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b_1, b_2\}, S') \leq d_{\mathcal{L}}(C, S') + 1 - 1 \leq e_{\mathcal{L}}(C).$$

Da  $C$  minimal zentral ist, muss es jedoch einen Teilbaum  $S'$  geben, sodass

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b_1, b_2\}, S') > e_{\mathcal{L}}(C).$$

Ein solcher Teilbaum muss also  $v$  enthalten.

Ist  $v$  ein Blatt von  $C$ , so wähle  $b_1 = v$  und  $b_2$  ein beliebiges Blatt von  $C$ . Die Entfernung von  $b_1$  und  $b_2$  hat auf alle Teilbäume denselben Effekt wie eben beschrieben. Die Aussage folgt.  $\square$

### 3.2.2 $S$ -Gültigkeit

Es reicht jedoch nicht aus für einen Teilbaum  $S$  nur die Teilbäume der Form  $S_x$  auf ihren  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S$  zu untersuchen. Ein längster Pfad im Hasse-Graphen kann im Allgemeinen ungerade Länge haben. Daher interessieren

uns nicht nur die Teilbäume mit maximalem  $\mathcal{L}$ -Abstand, sondern auch jene deren  $\mathcal{L}$ -Abstand um genau Eins weniger als der maximale Abstand beträgt. Sei  $y$  ein beliebiger Knoten. Ist  $S_y$  ein Teilbaum, zu dem wir den Abstand verkleinern wollen, dann müssen wir zu  $S$  einen Knoten „in Richtung“  $S_y$  hinzufügen, das heißt entweder einen Knoten aus  $S_y$  oder einen auf der Geodäte  $S - S_y$ . Damit nähern wir uns automatisch auch jedem Teilbaum, der  $S_y$  enthält.

Wir interessieren uns daher für Teilbäume von  $S_y$ , deren  $\mathcal{L}$ -Abstand um Eins weniger beträgt als jener von  $S_y$ .

**Notation.** Sei  $y$  ein Knoten von  $T$ . Mit  $\overline{S_y}$  bezeichnen wir von nun an einen Teilbaum von  $S_y$ , der  $y$  enthält und

$$d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_y}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_y) - 1$$

erfüllt.

Im Allgemeinen gibt es mehr als einen solchen Teilbaum von  $S_y$ . Dennoch wollen wir auf einen solchen immer mit  $\overline{S_y}$  verweisen. Jeder solche Teilbaum von  $S_y$  lässt sich aus  $S_y$  konstruieren. Dafür gibt es die nachfolgenden drei Möglichkeiten.

- (a) Sei  $b$  ein beliebiges Blatt von  $T$  in  $S_y$ . Dann ist  $S_y \setminus \{b\}$  ein Teilbaum  $\overline{S_y}$ .
- (b) Ist  $y \in S$  und gibt es ein  $w \in J_S(y) \cap S$  mit  $A_S(w) - d_T(y, w) = 1$ , dann sei  $u$  der Nachbar von  $y$  auf der Geodäte  $\{y\} - \{w\}$ . Dann ist  $S_y \setminus (\{u\} \vee S_w)$  ein  $\overline{S_y}$ .
- (c) Ist  $y \in S$  und  $w \in J_S(y)$ , dann ist der Teilbaum, der aus  $S_y$  entsteht, wenn man  $S_w$  durch ein  $\overline{S_w}$  ersetzt, ein Teilbaum  $\overline{S_y}$ .

Sei nun  $x$  ein Knoten von  $T$ . Gilt  $x \in S$ ,  $x \notin S_v$  oder gibt es ein  $y$  und einen Teilbaum  $\overline{S_y}$ , sodass  $x \in S_y \setminus \overline{S_y}$ , dann bezeichnen wir  $x$  als *S-ungültig*. Anderenfalls wollen wir diesen Knoten als *S-gültig* bezeichnen. Ist klar um welchen Teilbaum  $S$  es sich handelt, werden wir die Knoten auch kurz mit gültig und ungültig bezeichnen.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass sich der Teilbaum  $S$  so aufbauen lässt, dass wir in jedem Schritt (bis auf eventuell einen) nur *S-gültige* Knoten aufnehmen dürfen. Daher wollen wir noch einen weiteren Begriff einführen und zwar jenen der *S-gültigen* Richtung.

**Definition 3.2.5.** Seien  $S$  ein Teilbaum und  $v$  ein Knoten des Zentroids mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$  und  $v \in S$ . Ein Teilbaum der Form  $S_x$  mit  $x = v$  oder  $x$  ein  $T$ -Gabelungsknoten, heißt *S-gültige Richtung*, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (a)  $x \in S$  und  $S_x$  enthält mindestens einen gültigen Knoten.
- (b)  $x \notin S$  und der eindeutige Nachbar von  $S$  auf der Geodäte  $S-S_y$  ist ein  $S$ -gültiger Knoten.

Weiters bezeichne

$$\mathcal{D}(S) = \{x \in T \mid S_x \text{ ist } S\text{-gültige Richtung}\}.$$

Ist  $S_x$  keine  $S$ -gültige Richtung, so wird diese als  $S$ -ungültig bezeichnet.

Gültige Richtungen sind also jene Teilbäume  $S_x$ , zu denen man durch Hinzufügen eines  $S$ -gültigen Knotens den Abstand verkleinern kann.

### 3.2.3 Aktualisierungsschritt

Sowohl die Teilbäume der Form  $S_x$  für einen Knoten  $x$  als auch die  $S$ -Gültigkeit der Knoten (und damit auch der Richtungen) hängt vom betrachteten Teilbaum  $S$  eines minimal zentralen Teilbaumes ab. Wird ein zu  $S$  adjazenter Knoten zu  $S$  hinzugefügt, so können sich diese verändern. Um diesen Vorgang beschreiben zu können, muss man zuerst verstehen, inwiefern sich das  $S$ -Gewicht eines Knotens verändert. Die folgende Proposition gibt darüber Auskunft.

**Proposition 3.2.6.** *Sei  $S$  ein Teilbaum, der einen Zentroidknoten  $v$  mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$  enthält. Sei weiters  $w$  ein zu  $S$  adjazenter Knoten und  $x$  ein  $T$ -Gabelungsknoten. Dann gilt*

$$\begin{aligned} A_{S \vee \{w\}}(x) &< A_S(x) \text{ falls } w \neq x, w \in S_x \text{ und} \\ A_{S \vee \{w\}}(x) &= A_S(x) \text{ falls } w = x \text{ oder } w \notin S_x. \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt: Sei  $x \neq w$  ein  $T$ -Gabelungsknoten mit  $w \in S_x$ . Ist  $w \in (S \vee \{w\})_x$ , dann*

$$A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x) - 2.$$

Beweis. Sei  $x$  ein  $T$ -Gabelungsknoten. Dann gilt

$$S_x = \bigvee_{y \in J_S(x)} S_y$$

und

$$A_S(x) = \sum_{\substack{y \in J_S(x) \\ y \in S}} (A_S(y) - d_T(x, y)) + \sum_{\substack{y \in J_S(x) \\ y \notin S}} |T_y|.$$

Ist  $w \notin S_x$ , dann ist  $w \notin J_S(y)$  für alle Knoten  $y$  in  $S_x$ . Daraus folgt, dass  $A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x)$ . Ist  $x = w$ , dann gilt  $(S \vee \{w\})_w = S_w = T_w$  und damit

$$\begin{aligned} A_{S \vee \{w\}}(w) &= |T_w| - 2|(S \vee \{w\}) \wedge T_w| + 1 \\ &= |T_w| - 1 \\ &= A_S(w). \end{aligned}$$

Sei also  $x \neq w$  und  $w \in S_x$ . Sei zuerst  $x$  ein  $T$ -Gabelungsknoten, sodass alle Knoten auf der Geodäte  $\{x\} - \{w\}$  ungleich  $x$  und  $w$  Grad gleich 2 besitzen und sei  $u \in S$  der zu  $w$  adjazente Knoten. Ist  $u = x$ , dann ist  $w \in J_S(x)$  mit  $w \notin S$ . Gilt  $A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) > 0$ , dann ist  $J_{S \vee \{w\}}(x) = J_S(x)$  und es gilt

$$\begin{aligned} A_{S \vee \{w\}}(x) &= A_S(x) - |T_w| + A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) \\ &= A_S(x) - |T_w| + |T_w| - 1 - 1 \\ &= A_S(x) - 2. \end{aligned}$$

Gilt  $A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) \leq 0$ , dann ist  $J_{S \vee \{w\}}(x) = J_S(x) \setminus \{w\}$  und es gilt

$$A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x) - |T_w| < A_S(x).$$

Da  $d_T(x, w) = 1$ , ist dies genau dann der Fall, wenn  $A_{S \vee \{w\}}(w) = |T_w| - 1 \leq 1$ , d.h.  $|T_w| \leq 2$ .

Ist  $x \neq u$ , also  $\deg_T(u) = 2$ , dann gilt

$$A_{S \vee \{w\}}(w) = A_S(u) - 1 \text{ und } d_T(x, w) = d_T(x, u) + 1.$$

Daraus folgt

$$A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) = A_S(u) - d_T(x, u) - 2.$$

Ist  $A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) > 0$ , dann ist  $J_{S \vee \{w\}}(x) = (J_S(x) \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ . Für alle anderen  $y \in J_S(x)$  gilt  $A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x)$ . Da  $u \in S$  gilt nun

$$\begin{aligned} A_{S \vee \{w\}}(x) &= A_S(x) - (A_S(u) - d_T(x, u)) + (A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w)) \\ &= A_S(x) - 2 \end{aligned}$$

Ist  $A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) \leq 0$ , so ist wegen  $A_S(u) - d_T(x, u) > 0$

$$A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x) - (A_S(u) - d_T(x, u)) < A_S(x)$$

Sei nun  $x$  ein  $T$ -Gabelungsknoten mit  $x \neq w$  und  $w \in S_x$ . Sei  $x$  so gewählt, dass es ein  $z \in J_S(x)$  gibt, sodass  $w \neq z$  und  $w \in S_z$ . Setzen wir voraus, dass  $z$  die Aussagen des Satzes bereits erfüllt. Mithilfe der Überlegungen bisher, können wir die Berechnung der  $(S \vee \{w\})$ -Gewichte von „außen nach innen“ durchführen. Für alle  $y \in J_S(x)$  mit  $y \neq z$  gilt dann  $w \notin S_y$  und daher

$$A_{S \vee \{w\}}(y) = A_S(y).$$

Insbesondere gilt  $w \notin J_S(x)$ . Daraus folgt dass  $J_{S \vee \{w\}}(x) \setminus S = J_S(x) \setminus S$ . Ist  $A_{S \vee \{w\}}(z) - d_T(x, z) > 0$ , dann gilt  $J_{S \vee \{w\}}(x) = J_S(x)$  und damit

$$\begin{aligned} A_{S \vee \{w\}}(x) &= A_S(x) - (A_S(z) - d_T(x, z)) + (A_{S \vee \{w\}}(z) - d_T(x, z)) \\ &= A_S(x) + A_{S \vee \{w\}}(z) - A_S(z). \end{aligned}$$

Ist  $w \in (S \vee \{w\})_z$ , dann gilt laut Voraussetzung  $A_{S \vee \{w\}}(z) = A_S(z) - 2$ . Dann ist auch  $w \in (S \vee \{w\})_x$  und es gilt  $A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x) - 2$ .

Ist  $A_{S \vee \{w\}}(z) - d_T(x, z) \leq 0$ , dann gilt  $J_{S \vee \{w\}}(x) = J_S(x) \setminus \{z\}$  und damit

$$A_{S \vee \{w\}}(x) = A_S(x) - (A_S(z) - d_T(x, z)).$$

Da  $z \in J_S(x)$  gilt  $A_S(z) - d_T(x, z) > 0$  und damit  $A_{S \vee \{w\}}(x) < A_S(x)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Die Aussage in Proposition 3.2.6 gilt ebenso für  $S_v$ .

Die Teilbäume der Form  $S_x$  und damit auch die der Form  $\overline{S_x}$  stehen in direktem Zusammenhang mit dem  $S$ -Gewicht von  $x$  und damit insbesondere vom Teilbaum  $S$ . Verändert sich für einen Knoten  $x$  die Menge  $J_S(x)$  bei der Aufnahme eines neuen Knotens, so verkleinert sich auch jeder Teilbaum  $S_y$ , der  $x$  (und damit  $S_x$ ) enthält. Auch die Menge der  $S$ -gültigen Knoten kann sich daher bei der Aufnahme des Knotens  $w$  zu  $S$  verkleinern. Daher wollen wir uns an dieser Stelle damit auseinandersetzen wie die Teilbäume  $(S \vee \{w\})_x$  und  $(\overline{S \vee \{w\}})_x$  (in Abhängigkeit von  $S_x$  und  $\overline{S_x}$ ) aussehen.

Sei  $x$  der zu  $w$  am nächsten gelegene  $T$ -Gabelungsknoten in Richtung  $v$  und  $u \in S$  der zu  $x$  adjazente Knoten auf der Geodäte  $\{x\} - \{w\}$ .

Ist  $u = w$  und  $|T_w| \leq 2$ , dann ist

$$(S \vee \{w\})_x = S_x \setminus T_w.$$

$T_w \not\subseteq (S \vee \{w\})_v$  und enthält damit keine  $(S \vee \{w\})$ -gültigen Knoten mehr. Insbesondere kann kein Teilbaum von  $T_w$  eine  $(S \vee \{w\})$ -gültige Richtung darstellen.

Ist  $u \neq w$  und  $A_{S \vee \{w\}}(w) - d_T(x, w) \leq 0$ , so gilt

$$(S \vee \{w\})_x = S_x \setminus (\{u\} \vee T_w).$$

Wieder ist  $(\{u\} \vee T_w) \not\subseteq (S \vee \{w\})_v$  und enthält damit auch keine  $(S \vee \{w\})$ -gültigen Knoten mehr. Insbesondere gibt es in  $S_x \setminus (S \vee \{w\})_x$  keine  $(S \vee \{w\})$ -gültige Richtungen mehr. In jedem anderen Fall gilt  $(S \vee \{w\})_x = S_x$ . Für alle  $x$  mit  $x = w$  oder  $w \notin S_x$ , gilt auch  $(S \vee \{w\})_x = S_x$ .

Die Teilbäume der Form  $S_x$  und können sich nur verändern, wenn sie  $w$  enthalten. Weiters sind  $S$ -ungültige Knoten auch  $(S \vee \{w\})$ -ungültig. Es können jedoch neue  $(S \vee \{w\})$ -ungültige Knoten bei der Aufnahme von  $w$  zu  $S$  entstehen.

Seien nun  $x$  und  $y$  zwei beliebige  $T$ -Gabelungsknoten auf der Geodäte  $\{v\} - \{w\}$  mit  $y \neq w$  bzw.  $x = v$  mit  $d_T(v, x) < d_T(v, y)$ , sodass jeder Knoten auf dem Pfad von  $x$  nach  $y$  (exkl.  $x, y$ ) Grad gleich 2 besitzt. Dann gilt

- (a) Ist  $A_{S \vee \{w\}}(y) - d_T(x, y) \leq 1$ , so ist jeder Knoten in  $T_y$   $S(\vee \{w\})$ -ungültig. Insbesondere ist kein Teilbaum von  $T_w$  eine  $(S \vee \{w\})$ -gültige Richtung.
- (b) Ist  $A_{S \vee \{w\}}(y) - d_T(x, y) \leq 0$ , so ist  $(S \vee \{w\})_y = (S_y \setminus (\{y\} \vee S_w)) \vee \{y\}$ .

Algorithmus 2 stellt diesen Aktualisierungsschritt nun noch einmal detailliert dar.

---

**Algorithmus 2** UPDATE

---

**Gegeben:** TB  $S$  eines min. zentralen TB, Knoten  $w$ , der zu  $S$  aufgenommen wird und Liste der TB  $S_x$ , Gewichte  $A_S$ , der  $S$ -gültigen Knoten  $\mathcal{V}$  und der  $S$ -gültigen Richtungen  $\mathcal{D}$ .

**Gesucht:** Aktualisiert die übergebenen Listen.

```
1:  $G$  sei eine Liste aller  $T$ -Gabelungsknoten (inklusive  $v$ ) mit  $w \in S_x$ .
2: if  $w \notin G$  then
3:   Füge  $w$  zu  $G$  hinzu.
4: Ordne  $G$  absteigend bzgl. dem Abstand zu  $v$ .
5:  $D = 2$ 
6:  $R = \emptyset$ 
7:  $x = G[0]$ 
8:  $i = 1$ 
9: for  $i = 1; i < |G|; i = i + 1$  do
10:   $y = G[i]$ 
11:  if  $A_S(x) - d_T(x, y) \leq 1$  then
12:     $\mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus S_x$ 
13:     $\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus S_x$ 
14:  if  $i == 1$  und  $d_T(x, w) == 1$  then
15:     $D = 2$ 
16:     $A_S(y) = A_S(y) - D$ 
17:  else if  $A_S(x) - d_T(x, y) \leq 0$  then
18:     $R = (\{y\} \vee S_x) \setminus \{y\}$ 
19:     $S_y = S_y \setminus R$ 
20:     $D = A_S(x) - d_T(x, y) + D$ 
21:     $A_S(y) = A_S(y) - D$ 
22:  else
23:     $S_y = S_y \setminus R$ 
24:     $A_S(y) = A_S(y) - D$ 
25:   $x = y$ 
```

---

### 3.2.4 Auswahl eines Knotens

Ist  $S$  nicht minimal zentral, so müssen weitere Knoten aufgenommen werden. Die nachfolgenden Aussagen helfen uns dabei zu entscheiden, welcher Knoten aufgenommen werden darf. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen an den Teilbaum  $S$  nur Knoten aus  $S_v$  aufgenommen werden dürfen. Weiters werden wir sehen, dass wir höchstens einmal einen  $S$ -ungültigen Knoten aufnehmen dürfen. Dies geschieht, falls

notwendig, im letzten Schritt und wird im nächsten Abschnitt noch einmal genauer behandelt.

**Lemma 3.2.7.** *Sei  $S$  ein echter Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes  $C$  mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Dann gilt*

$$C \setminus S \subset S_v.$$

Beweis. Angenommen  $(C \setminus S) \setminus S_v \neq \emptyset$ . Ohne Einschränkung sei  $w$  ein Blatt von  $C$  in  $C \setminus S$  mit  $w \notin S_v$ . Wir zeigen, dass dann ein Blatt  $b \in C \setminus S$  von  $C$  existiert, sodass  $e_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b, w\}) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$ .

Sei  $z$  ein Knoten mit

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= e_{\mathcal{L}}(C) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w\}, (C \setminus \{w\})_z) &= e_{\mathcal{L}}(C) + 1. \end{aligned}$$

Ein solcher Knoten existiert, da anderenfalls das Entfernen von  $z$  zu einer geringeren  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität führen würde. Weiters ist offenbar  $z \neq v$ .

Ist  $w \notin (C \setminus \{w\})_z$ , dann auch nicht in  $C_z$  und der Knoten muss auf der Geodäte  $S - \{z\}$  liegen. Damit ist  $w$  das einzige Blatt von  $C$  in  $C \setminus S$ , das den Abstand zu  $(C \setminus \{w\})_z$  verringert bzw. dessen Entfernen die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität erhöht. Besitzt  $C$  in  $C \setminus S$  ein weiteres Blatt, so kann dieses gewählt werden. Angenommen es gibt kein solches Blatt, dann verringert jeder Knoten in  $|C \setminus S|$  den Abstand in Richtung  $z$  (genauer muss dann jeder Knoten von  $C \setminus S$  auf der Geodäte  $S - \{z\}$  liegen). Daher gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_z) = d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - |C \setminus S|.$$

Da laut Voraussetzung jedoch  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$  gilt andererseits

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_v) &\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - |(C \setminus S) \cap S_v| + |(C \setminus S) \setminus S_v| \\ &> d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - |C \setminus S| + 1 \\ &\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - |C \setminus S| + 1 \\ &= d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 1, \end{aligned}$$

Daraus folgt nun  $d_{\mathcal{L}}(C, C_z) < e_{\mathcal{L}}(C)$ , ein Widerspruch. In diesem Fall existiert also jedenfalls ein solches Blatt  $b$ .

Sei nun  $y$  ein Knoten, sodass  $w \in (C \setminus \{w\})_y$  und  $d_{\mathcal{L}}(C, C_y) \geq e_{\mathcal{L}}(C) - 1$ . Gesucht ist ein Blatt  $b$  mit der Eigenschaft

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, (C \setminus \{b\})_y) = d_{\mathcal{L}}(C, C_y) - 1.$$

Angenommen für alle Blätter  $b$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, (C \setminus \{b\})_y) \geq d_{\mathcal{L}}(C, C_y).$$

Dann ist jeder Knoten in  $C \setminus S$  entweder auf der Geodäte  $S - \{y\}$  oder in einem entsprechenden Unterbaum von  $T_y$ . Sei  $\mathcal{U}$  die Menge jener Knoten  $x \in C \setminus S$  die den Abstand in Richtung  $y$  bei der Aufnahme der Knoten aus  $C \setminus S$  nicht erhöht haben. Dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_z) = d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - |C \setminus S| + |\mathcal{U}|.$$

Da  $w$  nicht in  $S_v$  liegt, folgt, dass  $y \notin S_v$  und damit gilt  $\mathcal{U} \cap S_v = \emptyset$ . Die Menge  $(C \setminus S) \setminus S_v$  lässt sich also unterteilen in  $\mathcal{U}$  und  $((C \setminus S) \setminus S_v) \setminus \mathcal{U}$ . Da jedenfalls  $w \notin \mathcal{U}$  gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_v) &\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - |(C \setminus S) \cap S_v| + |(C \setminus S) \setminus S_v| \\ &> d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - |C \setminus S| + |\mathcal{U}| + |((C \setminus S) \setminus S_v) \setminus \mathcal{U}| \\ &\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - |C \setminus S| + |\mathcal{U}| + 1 \\ &= d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 1, \end{aligned}$$

womit wir wieder einen Widerspruch erhalten. Das gesuchte Blatt  $b$  muss also existieren.

Weiters wissen wir, dass  $w \notin S_v$  und damit  $w \notin (C \setminus \{w\})_v$ . Insbesondere ist dann  $C_v = (C \setminus \{w\})_v$  und damit gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w\}, (C \setminus \{w\})_v) = d_{\mathcal{L}}(C, C_v) - 1.$$

Es folgt sofort

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b, w\}, (C \setminus \{b, w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

Insgesamt erhalten wir also  $e_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b, w\}) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$ . □

Wir können die Auswahl der Knoten sogar noch weiter einschränken. Wie das nächste Lemma zeigt, darf auch höchstens ein  $S$ -ungültiger Knoten zu  $S$  hinzugefügt werden. Den Begriff der  $S$ -Gültigkeit haben wir in Abschnitt 3.2.2 definiert.

**Lemma 3.2.8.** *Sei  $S$  ein echter Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes  $C$  mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Dann kann  $C \setminus S$  maximal einen  $S$ -ungültigen Knoten enthalten.*

Beweis. Seien  $w_1$  und  $w_2$  zwei verschiedenen  $S$ -ungültige Knoten in  $C \setminus S$ . Ohne Einschränkung können wir  $w_1$  als Blatt annehmen.

**Behauptung.** Ist der Nachbar von  $w_1$  innerhalb von  $C$   $S$ -ungültig, dann gilt  $w_1 \notin (C \setminus \{w_1\})_v$ .

Beweis der Behauptung. Sei  $w_2 \in C$  der Nachbar von  $w_1$ . Dann ist  $w_2$  auch  $(C \setminus \{w_1, w_2\})$ -ungültig. Daher gibt es einen Knoten  $x$  und einen Teilbaum  $(C \setminus \{w_1, w_2\})_x$  mit  $w_2 \in (C \setminus \{w_1, w_2\})_x \setminus \overline{(C \setminus \{w_1, w_2\})_x}$  (siehe Abschnitt 3.2.2). Zur Erinnerung: Es gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, \overline{(C \setminus \{w_1, w_2\})_x}) = d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_x) - 1.$$

Daraus folgt

$$(C \setminus \{w_1\})_x = \overline{(C \setminus \{w_1, w_2\})_x}.$$

Insbesondere folgt:  $w_2 \notin (C \setminus \{w_1\})_x$  und damit auch  $w_1 \notin (C \setminus \{w_1\})_x$ . Da jedoch  $w_1 \in T_x$ , kann  $w_1$  kein Element von  $(C \setminus \{w_1\})_v$  sein.

Sei  $z$  ein Knoten mit

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= e_{\mathcal{L}}(C) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1\}, (C \setminus \{w_1\})_z) &= e_{\mathcal{L}}(C) + 1. \end{aligned}$$

Da  $w_1$  auch  $(C \setminus \{w_1\})$ -ungültig ist folgt, dass  $z \neq v$ .

Sei zuerst  $w_1 \notin (C \setminus \{w_1\})_z$ . Dann ist  $w_1$  das einzige Blatt von  $C$  in Richtung  $z$ . Angenommen der Nachbar von  $w_1$  in  $C$  ist auch  $S$ -ungültig, o.E. sei  $w_2$  dieser Nachbar. Dann gilt wegen der Behauptung zu Beginn des Beweises, dass  $w_1 \notin (C \setminus \{w_1\})_v$ .

Gibt es in  $C \setminus S$  also ein weiteres Blatt  $b$  von  $C$ , dann kann dieses gemeinsam mit  $w_1$  aus  $C$  entfernt werden ohne den Abstand in Richtung  $z$  und  $v$  zu vergrößern. Ein solches muss dann existieren, da anderenfalls folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - |C \setminus S| \\ &= d_{\mathcal{L}}(S, S_z) - (|C \setminus S| - 2) - 2 \\ &\leq d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - (|C \setminus S| - 2) - 2 \\ &\leq d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_v) - 2 \\ &\leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v) - 2 \\ &< e_{\mathcal{L}}(C) - 1. \end{aligned}$$

Ist der Nachbar von  $w_1$  in  $C$  nicht  $S$ -ungültig, so kann  $w_2$  ebenfalls als Blatt von  $C$  angenommen werden. In diesem Fall folgt sofort

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_z) &= d_{\mathcal{L}}(C, C_z) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_v) &\leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v). \end{aligned}$$

Sei nun  $y \neq$  ein Knoten mit  $d_{\mathcal{L}}(C, C_y) \geq e_{\mathcal{L}}(C) - 1$  und  $w_1 \in (C \setminus \{w_1\})_y$ . Wir zeigen nun, dass es in diesem Fall ein  $S$ -ungültiges Blatt  $w_2$  gibt, sodass

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_2\}, (C \setminus \{w_2\})_y) = d_{\mathcal{L}}(C, C_y) - 1.$$

Angenommen für alle Blätter von  $C$  in  $C \setminus S$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_2\}, (C \setminus \{w_2\})_y) \geq d_{\mathcal{L}}(C, C_y).$$

Dann sei  $\mathcal{U}$  die Menge der Knoten von  $C \setminus S$ , die den Abstand in Richtung  $y$  nicht erhöht haben. Dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_y) = d_{\mathcal{L}}(S, S_y) - |C \setminus S| + |\mathcal{U}|.$$

Nun haben wir die folgenden Informationen. Da  $w_1 \in (C \setminus \{w_1\})_y$ , muss der Nachbar von  $w_1$  in  $C$   $S$ -gültig sein (wegen der Behauptung zu Beginn des Beweises). Daher kann  $w_2$  ebenfalls als Blatt von  $C$  angenommen werden. Ist  $w_2 \in (C \setminus \{w_2\})_y$ , dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_2\}, (C \setminus \{w_2\})_y) = d_{\mathcal{L}}(C, C_y) + 1$$

und damit folgt  $w_2 \notin \mathcal{U}$ . Da auch  $w_1 \notin \mathcal{U}$ , folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_y) &\leq d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - |C \setminus S| + |\mathcal{U}| \\ &\leq d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_v) - 2 \\ &\leq e_{\mathcal{L}}(C) - 2, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt, dass  $w_2 \notin (C \setminus \{w_2\})_y$  und damit auch nicht in  $(C \setminus \{w_1, w_2\})_y$  liegt. Damit erhalten wir

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}, (C \setminus \{w_1, w_2\})_y) = d_{\mathcal{L}}(C, C_y).$$

und somit  $e_{\mathcal{L}}(C \setminus \{w_1, w_2\}) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$  (Man beachte, dass durch Wahl von  $w_2$  auch der Abstand zu  $z$  erhalten bleibt).  $\square$

**Satz 3.2.9.** *Sei  $S$  ein Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Sei weiters  $S_x$  ein Teilbaum mit  $x \in S$ , der einen  $S$ -gültigen Knoten  $w$  enthält, sodass  $S \vee \{w\}$  wieder in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten ist und  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$ . Weiters seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(S, x) &= \max_{x \neq y \in T_x} 2 d_T(S, y) + A_S(y), \\ \mathcal{N}(S, x) &= \max_{x \neq y \in T_x \cap \mathcal{D}(S)} 2 d_T(S, y) + A_S(y), \\ \mathcal{T}(S, x) &= \{y \in T_x \mid 2 d_T(S, y) + A_S(y) = \mathcal{M}(S, x)\} \text{ und} \\ \mathcal{S}(S, x) &= \{y \in T_x \cap \mathcal{D}(S) \mid 2 d_T(S, y) + A_S(y) = \mathcal{N}(S, x)\}. \end{aligned}$$

Sei weiters die Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  definiert wie folgt:

(i) Sei  $\mathcal{M}(S, x) > \mathcal{N}(S, x)$  und  $\mathcal{T}(S, x) = \{h\}$ . Dann ist  $h \notin S$  und  $c$  der zu  $S$  benachbarte Knoten, sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{c\}, S_h) < d_{\mathcal{L}}(S, S_h)$ . Gibt es  $y \in \mathcal{S}(S, x)$ , sodass  $S_y$  einen  $(S \vee \{c\})$ -gültigen Knoten  $w$  enthält, dann sei  $\mathcal{A}(S, x)$  die Menge all jener  $y$ .

Existiert kein solcher Knoten in  $\mathcal{S}(S, x)$  und enthält  $S_x$  einen  $(S \vee \{c\})$ -gültigen Knoten  $w$ , dann gilt  $\mathcal{A}(S, x) = \mathcal{D}(S \vee \{c\}) \cap T_x$ .

Enthält  $S_x$  keinen  $(S \vee \{c\})$ -gültigen Knoten, dann sei  $\mathcal{A}(S, x)$  gleich  $\mathcal{D}(S) \cap T_x$ .

(ii) Ist  $\mathcal{M}(S, x) = \mathcal{N}(S, x)$  oder  $|\mathcal{T}(S, x)| > 1$  sei  $\mathcal{A}(S, x) = \mathcal{S}(S, x)$ .

Dann gilt

(a) Gibt es ein  $y \in \mathcal{A}(S, x) \setminus S$ , dann kann  $w$  als der eindeutige Nachbar von  $S$  auf der Geodäte  $S - S_y$  gewählt werden.

(b) Sei  $y \in \mathcal{A}(S, x)$  mit  $y \in S$  beliebig. Dann gibt es einen  $S$ -gültigen Knoten  $w \in S_y$ , sodass  $S \vee \{w\}$  in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten ist.

Beweis. Im Rahmen dieses Beweises müssen aufgrund der Definition der Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  einige Fallunterscheidungen gemacht werden. Daher wollen wir uns hier, zu Beginn des Beweises, mit dessen Aufbau auseinandersetzen.

Wir wollen folgendermaßen vorgehen. Sei  $y \in \mathcal{A}(S, x)$  und  $C$  ein minimal zentraler Teilbaum, der  $S$  aber keinen  $S$ -gültigen Knoten in Richtung  $y$  enthält. Wir werden ein Blatt  $b \in C \setminus S$  von  $C$  und einen Knoten  $w$  in Richtung  $y$  angeben, sodass

$$e_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}) = e_{\mathcal{L}}(C).$$

Daraus folgt, dass es einen minimal zentralen Teilbaum gibt, der  $S \vee \{w\}$  enthält.

Im Wesentlichen gehen wir in zwei großen Schritten vor.

1. Wir zeigen, dass sich  $b$  immer so wählen lässt, dass

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

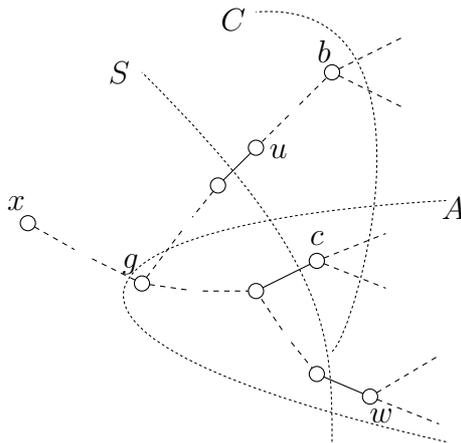
2. Die Auswahl des Blattes in 1. erfüllt für jeden Knoten  $z \neq v$

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_z) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_z).$$

Bei der Auswahl des Blattes  $b$  muss vorsichtig vorgegangen werden. Wir wählen  $b$  aus  $S_x$ , da wir die Existenz eines solchen Blattes aufgrund der Voraussetzungen garantieren können. Sei  $w$  ein  $S$ -gültiger, zu  $S$  benachbarter Knoten aus  $S_y$  bzw. der Geodäte  $S - S_y$ . Es gibt einen Gabelungsknoten  $g$ , der zu  $v$  maximalen Abstand hat mit den Eigenschaften (siehe Abb. 3.10)

- (a)  $g \in S$
- (b)  $w \in T_g$  (der Ast bei  $g$ , der  $w$  enthält, heiße  $A$ )
- (c)  $T_g$  enthält einen  $S$ -gültigen Knoten  $u \in S_x \cap (C \setminus S)$
- (d) Mit diesen Eigenschaften habe  $g$  maximalen Abstand zum Knoten  $v$

Sei weiters  $b$  ein Blatt von  $C$  mit  $u \in \{g\} - \{b\}$ . ( $u = b$  ist offenbar möglich.)



**Abbildung 3.10:** Wahl der Knoten  $u$  und  $b$

Beginnen wir mit Schritt 1. Aufgrund der Wahl von  $g$  kann  $u$  nicht in  $A$  enthalten sein. Wegen Lemma 3.2.8 kann  $C \setminus S$  höchstens einen  $S$ -ungültigen Knoten  $c$  enthalten. Dieser Knoten ist der einzige Knoten aus  $C \setminus S$ , der in  $A$  enthalten sein kann. Eine weitere wichtige Unterscheidung in diesem Beweis ist, ob und wann  $c$  in  $A$  enthalten sein kann.

Ist  $c$  nicht in  $A$ , so verändert sich  $S_g$  in diesem Ast beim Übergang von  $S$  zu  $C$  nicht, da aus diesem Ast keine Knoten zu  $S$  hinzugefügt wurden. Da  $w$   $S$ -gültig ist, erhalten wir  $w \in S_v$  und damit  $w \in S_g$ . Damit erhalten wir in diesem Fall  $w \in (C \setminus \{b\})_g$ . Ist  $b$   $(C \setminus \{b\})$ -gültig, so liegt  $(C \setminus \{b\})_g$  in jedem  $(C \setminus \{b\})_v$  und damit ist auch  $w$   $(C \setminus \{b\})$ -gültig. Ist  $b$   $(C \setminus \{b\})$ -ungültig, so muss aufgrund derselben Überlegung  $w$  auch  $(C \setminus \{b\})$ -ungültig sein.

Ist  $c \in A$ , so werden wir sehen, dass wir immer einen Knoten  $w$  wählen können, der  $(S \vee \{c})$ -gültig ist. Damit ist  $w$  jedenfalls in jedem  $(C \setminus \{b\})_v$  enthalten (siehe Abschnitt 3.2.2).

In beiden Fällen gilt dann

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v). \quad (3.2.1)$$

**Fall 1:** Ist  $\mathcal{M}(S, x) = \mathcal{N}(S, x)$ , so ist  $\mathcal{A}(S, x) = \mathcal{S}(S, x)$ . Es gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_y) = d_{\mathcal{L}}(S, S_y) + |C \setminus S|.$$

Enthält  $A$  einen  $S$ -ungültigen Knoten  $c$  und zeigt dieser in eine Richtung  $z \neq y$ , dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C, C_z) \leq d_{\mathcal{L}}(S, S_z) + |C \setminus S| - 1.$$

und damit

$$e_{\mathcal{L}}(C) \geq d_{\mathcal{L}}(C, C_y) > d_{\mathcal{L}}(C, C_z).$$

Entfernt man nun  $c$  aus  $C$ , so vergrößert sich der Abstand in Richtung  $z$  höchstens um Eins. Die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität vergrößert sich dadurch nicht, ein Widerspruch. Daher kann  $A$  keinen  $S$ -ungültigen Knoten enthalten und wir erhalten wegen (3.2.1)

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_z) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_z).$$

**Fall 2:** Ist  $\mathcal{M}(S, x) > \mathcal{N}(S, x)$  und  $|\mathcal{T}(S, x)| > 1$ . Seien  $b_1, b_2 \in \mathcal{T}(S, x)$ . Da diese Knoten keine  $S$ -gültigen Richtungen darstellen, kann der  $\mathcal{L}$ -Abstand wegen Lemma 3.2.8 nicht mehr zu beiden verringert werden. Da laut Voraussetzung  $C \setminus S$  mindestens einen  $S$ -gültigen Knoten enthält, wird durch diesen der  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S_{b_1}$  und  $S_{b_2}$  um Eins erhöht. Angenommen  $C \setminus S$  enthält einen  $S$ -ungültigen Knoten  $a$ , o.E. in Richtung  $b_1$ , dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(C, C_{b_2}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{b_2}) + |C \setminus S| \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(C, C_{b_1}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{b_1}) + |C \setminus S| - 1. \end{aligned}$$

Da  $e_{\mathcal{L}}(C) \geq d_{\mathcal{L}}(C, C_{b_2}) > d_{\mathcal{L}}(C, C_{b_1})$  gilt  $d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{a\}, S_{b_i}) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$ . Da  $a$   $S$ -ungültig ist, gilt

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{a\}, (C \setminus \{a\})_v) = d_{\mathcal{L}}(C, C_v) \leq e_{\mathcal{L}}(C).$$

Das Entfernen von  $a$  kann den Abstand zu anderen Teilbäumen erhöhen. Aufgrund der Wahl von  $b_1$  jedoch kann der Abstand nicht größer werden als

zu  $C_{b_1}$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $C$  minimal zentral. In diesem Fall enthält  $S_x \wedge (C \setminus S)$  keinen  $S$ -ungültigen Knoten. Mit (3.2.1) erhalten wir nun, dass

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

**Fall 3:** Sei  $\mathcal{M}(S, x) > \mathcal{N}(S, x)$  und  $\mathcal{T}(S, x) = \{h\}$ . Ist  $c \in S_h$ , dann muss aufgrund der Wahl von  $g$  auch  $w \in S_h$  sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $h$  eine ungültige Richtung darstellt. Daher ist  $c$  der eindeutige Nachbar von  $S$  in Richtung  $h$ .

Da  $c \in S_v$  gibt zwei Gabelungsknoten  $c_1, c_2 \in S_v$  mit  $c \in S_{c_1}$ , sodass  $d_T(v, c_1) < d_T(v, c_2)$ , auf der Geodäte zwischen den beiden kein weiterer Gabelungsknoten liegt und

$$A_S(c_2) - d_T(c_1, c_2) = 1.$$

Sei  $u$  ein  $S$ -gültiger Nachbarknoten von  $S$ , sodass  $u$   $(S \vee \{c\})$ -ungültig ist. Da  $u$  kein Blatt von  $T$  ist, gibt es zwei Gabelungsknoten  $x_1$  und  $x_2$  mit  $u \in (S \vee \{c\})_{x_2}$ , sodass  $d_T(v, x_1) < d_T(v, x_2)$ , auf der Geodäte zwischen ihnen kein weiterer Gabelungsknoten liegt und

$$A_{S \vee \{c\}}(x_2) - d_T(x_1, x_2) = 1.$$

Da  $u$   $S$ -gültig ist, folgt  $x_2 \in S_v$  und

$$A_S(x_2) - d_T(x_1, x_2) > 1$$

Daher muss sich das Gewicht von  $x_2$  bei der Aufnahme von  $c$  verändert haben. Dies kann nur passieren, wenn  $c \in S_{x_2}$ .

Weiters folgt aus der  $S$ -Gültigkeit auch, dass  $u \notin S_{c_2}$ . Damit muss  $c_1 \in S_{x_2}$  gelten. Insbesondere gilt dann, dass

$$A_{S \vee \{c\}}(x_2) = A_S(x_2) - 1.$$

Daraus folgt nun, dass

$$A_S(x_2) - d_T(x_1, x_2) = 2.$$

Da  $u, c \in S_{x_2}$  und beide Nachbarn von  $S$  sind, folgt  $x_2 \in S$  und damit  $u \neq x_2$ . Daher gilt laut Proposition 3.2.6  $A_{S \vee \{u\}}(x_2) < A_S(x_2)$ . Gilt  $A_{S \vee \{u\}}(x_2) = A_S(x_2) - 1$ , dann  $u \in (S \vee \{u\})_{x_1}$  und damit auch in  $(S \vee \{u\})_{x_2}$ . Dann folgt wegen Proposition 3.2.6, ein Widerspruch. Daher gilt

$$A_S(x_2) - d_T(x_1, x_2) \leq 0$$

und so folgt  $c \notin (S \vee \{u\})_v$ .

Laut Voraussetzung gibt es einen Nachbarknoten  $u$  von  $S$  mit  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$ . Insbesondere gilt  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}) = d_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}, (S \vee \{u\})_v)$ . Gibt es in  $S_x$  keine  $(S \vee \{c\})$ -gültigen Knoten, dann ist insbesondere ein solches  $u$   $(S \vee \{c\})$ -ungültig und es folgt wegen Lemma 3.2.7, dass  $c \notin C$ .

Gibt es keine  $(S \vee \{c\})$ -gültige Knoten in  $S_x$ , so ist also  $c \notin A$  und es gilt wegen (3.2.1)

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

Gibt es  $(S \vee \{c\})$ -gültige Knoten in  $\mathcal{S}(S, x)$ , dann enthält  $\mathcal{A}(S, x)$  auch nur  $(S \vee \{c\})$ -gültige Richtungen. In diesem Fall wählen wir den Knoten  $w$  als  $(S \vee \{c\})$ -gültig. Daher gilt auch in diesem Fall

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_v).$$

Damit ist Schritt 1 abgeschlossen und wir können mit Schritt 2 beginnen.

Sei  $z \neq v$  ein Gabelungsknoten von  $T$ . Wir unterscheiden, ob  $z$  ein Element von  $T_x \setminus \{x\}$  oder nicht.

Sei zuerst  $z \notin T_x \setminus \{x\}$ . Wir haben in Schritt 1  $b$  so gewählt, dass  $b \in (C \setminus \{b\})_g$  genau dann, wenn  $w \in (C \setminus \{b\})_g$ . Damit gilt

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_z) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_z).$$

Sei also  $z \in T_x \setminus \{x\}$ , o.E. können wir annehmen, dass

$$d_{\mathcal{L}}(C \setminus \{b\}, (C \setminus \{b\})_z) = d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 1$$

gilt und  $w \notin (C \setminus \{b\})_z$  (anderenfalls erhöht der Austausch den Abstand zu  $z$  nicht).

An dieser Stelle unterscheiden wir wieder in 2 Fälle,

(a)  $\mathcal{A}(S, x) \cap \mathcal{S}(S, x) = \emptyset$

(b)  $\mathcal{A}(S, x) \cap \mathcal{S}(S, x) \neq \emptyset$ .

**Fall a.** In diesem Fall ist  $\mathcal{M}(S, x) > \mathcal{N}(S, x)$ ,  $\mathcal{T}(S, x) = \{h\}$  und es gibt in  $\mathcal{S}(S, x)$  keinen  $(S \vee \{c\})$ -gültige Richtung. Da  $u$  ein gültiger Knoten Richtung  $z$  ist, ist  $z$  eine  $S$ -gültige Richtung. Ist  $z \notin \mathcal{S}(S, x)$ , dann ist

$$d_{\mathcal{L}}(S, S_z) \leq d_{\mathcal{L}}(S, S_h) - 2.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
e_{\mathcal{L}}(C) &\geq d_{\mathcal{L}}(C, C_h) \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_h) + |C \setminus S| - 1 \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_z) + |C \setminus S| + 1 \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 2.
\end{aligned}$$

Durch den Austausch von  $b$  und  $w$  wird der Abstand in Richtung  $z$  um maximal 2 erhöht, daher gilt

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_z) \leq e_{\mathcal{L}}(C).$$

Ist  $z \in \mathcal{S}(S, x)$ , dann muss  $u$  und damit auch  $b$  ( $S \vee \{c\}$ )-ungültig sein. In Fall 3 des ersten Schrittes haben wir uns bereits überlegt, dass dann  $c$  kein Element von  $C$  sein kann. Damit ist wieder

$$\begin{aligned}
e_{\mathcal{L}}(C) &\geq d_{\mathcal{L}}(C, C_h) \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_h) + |C \setminus S| \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(S, S_z) + |C \setminus S| + 1 \\
&\geq d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 2
\end{aligned}$$

und dieser Fall ist abgeschlossen.

**Fall b.** Sei nun  $\mathcal{M}(S, x) = \mathcal{N}(S, x)$  oder  $|\mathcal{T}(S, x)| > 1$ . Dann ist  $y \in \mathcal{S}(S, x)$ . Da  $b$  entweder ein  $S$ -gültiger Knoten ist oder in dieselbe Richtung wie  $u$  zeigt, stellt  $z$  eine  $S$ -gültige Richtung dar und es gilt laut Voraussetzung

$$2 d_T(S, z) + A_S(z) \leq 2 d_T(S, y) + A_S(y).$$

Zum Schluss unterscheiden wir noch ein letztes Mal in die 3 Fälle,  $z \notin C$ ,  $z \in C$  aber  $z \notin S$  und  $z \in S$ .

Ist  $z \notin C$ , dann gilt  $d_T(C, z) \leq d_T(S, z) - 1$ ,  $d_T(C, y) = d_T(S, y)$  und  $C_z = S_z$ .

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= |C| + |C_z| + 2(d_T(C, z) - 1) \\
&\leq |C| + |S_z| + 2(d_T(S, z) - 1 - 1) \\
&= |C| - 1 + 2 d_T(S, z) + A_S(z) - 2 \\
&\leq |C| - 1 + 2 d_T(S, y) + A_S(y) - 2 \\
&= |C| - 1 + 2 d_T(C, y) + A_C(y) - 2 \\
&= d_{\mathcal{L}}(C, C_y) - 2 \\
&\leq e_{\mathcal{L}}(C) - 2.
\end{aligned}$$

Ist  $z \in C$ , aber  $z \notin S$ . Es gilt jedenfalls  $C_z \subset S_z$  und damit

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= |C| + |C_z| - 2(|C_z \cap C|) \\
&\leq |C| + |C_z| - 2 \\
&\leq |C| + |S_z| - 2 + 2(d_T(S, z) - 1) \\
&= |C| - 1 + 2d_T(S, z) + A_S(z) - 2 \\
&\leq |C| - 1 + 2d_T(S, y) + A_S(y) - 2 \\
&= |C| - 1 + 2d_T(C, y) + A_C(y) - 2 \\
&= d_{\mathcal{L}}(C, C_y) - 2 \\
&\leq e_{\mathcal{L}}(C) - 2.
\end{aligned}$$

Ist  $z \in S$ , dann gilt auch  $z \in C$ . Dann  $u \in C_z \subset S_z$ . Da  $u \notin S$ , gilt  $u \neq z$  damit laut Proposition 3.2.6  $A_C(z) \leq A_S(z) - 2$ . Weiter ist wiederum  $d_T(S, y) = d_T(C, y)$ . Da  $d_T(S, z) = 0$  gilt

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}(C, C_z) &= |C| - 1 + A_C(z) \\
&\leq |C| - 1 + 2d_T(S, z) + A_S(z) - 2 \\
&\leq |C| - 1 + 2d_T(S, y) + A_S(y) - 2 \\
&= |C| - 1 + 2d_T(C, y) + A_C(y) - 2 \\
&= d_{\mathcal{L}}(C, C_y) - 2 \\
&\leq e_{\mathcal{L}}(C) - 2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$d_{\mathcal{L}}((C \setminus \{b\}) \vee \{w\}, ((C \setminus \{b\}) \vee \{w\})_z) \leq d_{\mathcal{L}}(C, C_z) + 2 \leq e_{\mathcal{L}}(C).$$

$(C \setminus \{b\}) \vee \{w\}$  ist minimal zentraler Teilbaum. □

**Bemerkung.** Die Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  enthält nur gültige Richtungen.

Mithilfe von Algorithmus 3, CALCULATEDIRECTIONS, lassen sich diese Richtungen nun berechnen. Dieses Codestück berechnet die Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  aus Satz 3.2.9.

---

**Algorithmus 3** CALCULATEDIRECTIONS

---

**Gegeben:** TB  $S$  eines min. zentralen TB, Knoten  $x$  sodass Teilbaum  $S_x$ , der einen Knoten  $w$  enthält, der aufgenommen werden kann

**Gesucht:** Berechnet die Richtungen in  $S_x$ , in die  $S$  vergrößert werden kann

- 1:  $M = \max_{y \in T_x, y \neq x} 2 d_T(S, y) + A_S(y)$
  - 2:  $N = \max_{y \in T_x \cap \mathcal{D}(S), y \neq x} 2 d_T(S, y) + A_S(y)$
  - 3:  $B = \{y \in T_x \mid y \neq x, 2 d_T(S, y) + A_S(y) = M\}$
  - 4:  $A = \{y \in T_x \cap \mathcal{D}(S) \mid y \neq x, 2 d_T(S, y) + A_S(y) = N\}$
  - 5:  $C = T_x \cap \mathcal{D}(S)$
  - 6: **if**  $M > N$  und  $|B| == 1$  **then**
  - 7:    $y = B[0]$
  - 8:    $G$  sei eine Liste aller  $T$ -Gabelungsknoten (inklusive  $v$ ) auf  $\{v\} - \{y\}$ .
  - 9:   Ordne  $G$  absteigend bzgl. dem Abstand zu  $v$ .
  - 10: **for**  $i = 0; i < |G| - 1; i = i + 1$  **do**
  - 11:   **if**  $A_S(G[i + 1]) - d_T(G[i], G[i + 1]) == 2$  **then**
  - 12:     Lösche die Knoten von  $(\{G[i + 1]\} \vee S_{G[i]}) \setminus \{G[i + 1]\}$  aus  $A$ .
  - 13:     Lösche die Knoten von  $(\{G[i + 1]\} \vee S_{G[i]}) \setminus \{G[i + 1]\}$  aus  $C$ .
  - 14:   **if**  $A$  ist leer **then**
  - 15:      $A = C$
  - 16:   **if**  $A$  ist leer **then**
  - 17:      $A = T_x \cap \mathcal{D}(S)$
  - 18: **return**  $A$
- 

Kann man die Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  berechnen, so steht der Bestimmung des Knotens, der im nächsten Schritt zu  $S$  aufgenommen werden kann, nichts mehr im Weg, wie Algorithmus 4, FINDVERTEX, darstellt.

---

**Algorithmus 4** FINDVERTEX

---

**Gegeben:** TB  $S$  eines min. zentralen TB, Knoten  $x$  sodass Teilbaum  $S_x$ , einen Knoten enthält, der aufgenommen werden kann.

**Gesucht:** Zu  $S$  adj. Knoten  $w$ , sodass  $S \vee \{w\}$  in einem min. zentralen TB

- 1:  $y = x$
  - 2: **loop**
  - 3:    $d = \text{CALCULATECANDIDATEDIRECTIONS}(S, y)$
  - 4:   **if**  $d \cap (T \setminus S) \neq \emptyset$  **then**
  - 5:     **return** Nachbar von  $S$  in Richtung  $d[0]$
  - 6:   **else**
  - 7:      $k = d[0]$
-

### 3.2.5 Stoppbedingungen

Um einen vollständigen Algorithmus angeben zu können fehlen uns an dieser Stelle noch die Stoppbedingungen. Von nun an sei

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(S, v) = |S| - 1 + \max_{v \neq y \in T} (2 d_T(S, y) + A_S(y)).$$

In jedem Schritt wird ein Knoten  $w$  zu  $S$  aufgenommen, der den  $\mathcal{L}$ -Abstand in Richtungen gewisser Knoten verkleinert. Richtungen unterschiedlicher Knoten können, aus der Perspektive des Teilbaumes  $S$ , dieselbe Richtung darstellen. Wir müssen im Laufe des Algorithmus unterscheiden, welche Richtungen sich „wirklich“ unterscheiden, in dem Sinne, dass wir unterschiedliche Knoten zu  $S$  hinzufügen müssen um den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu ihnen zu verringern. Um festzustellen wie viele unterschiedliche Nachbarn von  $S$  in einem Schritt berücksichtigt werden müssen, brauchen wir eine Möglichkeit, die überflüssigen Richtungen auszusortieren.

**Definition 3.2.10.** Sei  $K$  eine Menge von Knoten von  $T$ . Dann sei  $K^*$  die kleinste Teilmenge von  $K$ , die die folgenden beiden Punkte erfüllt.

- (a) Für jedes  $y \in K \setminus S$  gibt es einen Knoten  $x \in K^*$  mit  $y \in T_x$ .
- (b) Für jedes  $y \in K \cap S$  gibt es einen Knoten  $x \in K^*$  mit  $x \in T_y$ .

Mithilfe von Algorithmus 5 können wir ausgehend von einer Menge  $K$  von Knoten, die in möglicherweise gleiche Richtungen (ausgehend von  $S$ ) zeigen, die redundanten Knoten aussortieren, d.h. die Menge  $K^*$  bestimmen.

---

#### Algorithmus 5 DIRECTIONS

---

**Gegeben:** Menge von Richtungen  $K$ , aktueller Teilbaum  $S$

**Gesucht:** Löscht redundante Richtungen aus  $K$

- 1:  $D = K \setminus S$
  - 2:  $N = K \cap S$
  - 3: **for**  $y \in D$  **do**
  - 4:   **if** es existiert  $x \in D$  mit  $x \neq y$  und  $y \in T_x$  **then**
  - 5:     Lösche  $y$  aus  $K$
  - 6: **for**  $y \in N$  **do**
  - 7:   **if** es existiert  $x \in K$  mit  $x \neq y$  und  $y \in T_x$  **then**
  - 8:     Lösche  $x$  aus  $K$
  - 9: **return**  $K$
-

**Satz 3.2.11.** Sei  $T$  ein Baum,  $S$  ein Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes,  $v$  ein Zentroidknoten mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$  und  $v \in S$ . Sei

$$\mathcal{M}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$$

und

$$\mathcal{K}^*(S) = \{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M}(S) - 1\}^*.$$

Ist  $\mathcal{K}^*(S) \not\subseteq \mathcal{D}(S)$  oder  $|\mathcal{K}^*(S)| > 1$ , dann ist  $S$  minimal zentral.

Beweis. Es gilt  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Ist  $S$  nicht minimal zentral, so dürfen nur noch Knoten aus  $S_v$  und höchstens ein  $S$ -ungültiger Knoten zu  $S$  aufgenommen werden.

Es gilt  $\mathcal{M}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Es gibt daher ein  $x_1 \neq v$  mit  $d_{\mathcal{L}}(S, S_v) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1})$ . Ist  $|\mathcal{K}^*(S)| > 1$ , dann sei  $x_2 \in \mathcal{K}^*(S)$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Es gilt  $d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 \leq d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2})$ . Seien weiters  $w_1$  und  $w_2$  Nachbarn von  $S$  mit  $w_i \in S_{x_i}$  falls  $x_i \in S$  und  $w_i \in S - S_{x_i}$  sonst. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_j\}, S_{x_j}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_j}) - 1 \text{ für } j = 1, 2, \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, S_{x_2}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) + 1 \geq \mathcal{M}(S) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_2\}, S_{x_1}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) + 1 = \mathcal{M}(S) + 1. \end{aligned}$$

Weder die Aufnahme von  $w_1$ , noch die eines anderen Knotens  $w_2$ , kann  $\mathcal{M}(S)$  verkleinern. Um den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu  $S_{w_1}$  zu verringern, muss jedoch  $w_1$  (bzw. ein gültiger Knoten in dieselbe Richtung) zu  $S$  hinzugefügt werden. Da dadurch der Abstand zu  $S_{w_2}$  auf  $\mathcal{M}(S)$  steigt, muss in einem Teilbaum  $C$  mit  $S \subset C$  und geringerem  $\mathcal{M}(C)$  auch  $w_2$  (bzw. ein gültiger Knoten in dieselbe Richtung) enthalten sein. Werden beide Knoten hinzugefügt, so folgt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, S_{x_1}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) - 1 + 1 = \mathcal{M}(S) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, S_{x_2}) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) - 1 + 1 \leq \mathcal{M}(S). \end{aligned}$$

Jedes weitere Hinzufügen von Knoten hat offenbar denselben Effekt auf  $\mathcal{M}(S)$  wie eben beschrieben.  $S$  ist daher minimal zentral.

Sei nun  $\mathcal{K}^*(S) \not\subseteq \mathcal{D}(S)$  und  $x \in \mathcal{K}^*(S)$  mit  $x \notin \mathcal{D}(S)$ . Jeder  $S$ -gültige Knoten würde den Abstand zu  $S_x$  erhöhen. Gibt es einen Nachbarknoten von  $S$  in  $S_v$ , der den Abstand zu  $S_x$ , verringert, so erhöht dieser jedoch den Abstand zu einem  $\overline{S_v}$ . Ein Teilbaum, der  $S$  echt enthält, kann daher bestenfalls dieselbe  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität haben, keinesfalls jedoch eine kleinere. Daher ist  $S$  minimal zentral. □

**Satz 3.2.12.** *Sei  $T$  ein Baum,  $S$  ein Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes,  $v$  ein Zentroidknoten mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$ ,  $v \in S$  und es gilt*

$$\mathcal{M}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1.$$

*Seien*

$$\mathcal{K}_1^*(S) = \{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) = \mathcal{M}(S)\}^* \text{ und}$$

$$\mathcal{K}_2^*(S) = \{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M}(S) - 1\}^*.$$

- (a) *Ist  $|\mathcal{K}_1^*(S)| \geq 2$  und  $|\mathcal{K}_2^*(S)| > 2$ , dann ist  $S$  minimal zentral.*
- (b) *Sei  $\mathcal{K}_1^*(S) = \{x_1, x_2\}$ . Sind  $S_{x_1}$  und  $S_{x_2}$  beide  $S$ -ungültige Richtungen, dann ist  $S$  minimal zentral.*
- (c) *Sei  $x_1 \in \mathcal{K}_1^*(S)$  und  $S_{x_1}$  eine  $S$ -ungültige Richtung. Gibt es keinen Nachbarknoten  $w_1$  von  $S$  mit  $w_1 \in S_v$ , sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, S_{x_1}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) - 1$ , dann ist  $S$  minimal zentral.*
- (d) *Sei  $\mathcal{K}_1^*(S) = \mathcal{K}_2^*(S) = \{x_1, x_2\}$ . Seien  $S_{x_1}$  und  $S_{x_2}$   $S$ -gültige Richtungen und  $w_1$  ein  $S$ -gültiger Nachbarknoten von  $S$ , sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, S_{x_1}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) - 1$ . Dann gilt:*
- (i) *Gibt es einen zu  $S$  benachbarten Knoten  $w_2$  mit  $w_2 \in (S \vee \{w_1\})_v$ , sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_2\}, S_{x_2}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) - 1$ , dann ist  $S \vee \{w_1, w_2\}$  minimal zentral.*
- (ii) *Gilt für jeden zu  $S$  adjazenten Knoten  $w_2$  mit  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_2\}, S_{x_2}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) - 1$ , dass  $w_2 \notin (S \vee \{w_1\})_v$ , dann ist  $S$  minimal zentral.*
- (e) *Sei  $\mathcal{K}_1^*(S) \subset \mathcal{K}_2^*(S) = \{x_1, x_2\}$  und  $x_1 \in \mathcal{K}_1^*(S)$  mit  $x_1 \notin \mathcal{D}(S)$ . Seien weiters  $S_{x_2}$  eine  $S$ -gültige Richtung und  $w_1$  ein Nachbarknoten von  $S$  mit  $w_1 \in S_v$ , sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, S_{x_1}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) - 1$ . Dann gilt:*
- (i) *Ist  $x_2 \in \mathcal{D}(S \vee \{w_1\})$ , dann gibt es einen  $(S \vee \{w_1\})$ -gültigen Nachbarn  $w_2$  von  $S$  mit  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_2\}, S_{x_2}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) - 1$ .  $S \vee \{w_1, w_2\}$  ist minimal zentral.*
- (ii) *Ist  $x_2 \notin \mathcal{D}(S \vee \{w_1\})$ , dann ist  $S$  minimal zentral.*
- (f) *Sei  $\mathcal{K}_2^*(S) = \{x_1\}$ , sei  $x_1 \notin \mathcal{D}(S)$  und  $w_1$  ein Nachbarknoten von  $S$  mit  $w_1 \in S_v$ , sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, S_{x_1}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) - 1$ .*
- (i) *Gibt es einen  $(S \vee \{w_1\})$ -gültigen Nachbarn  $w_2$  von  $S$ , dann ist  $S \vee \{w_1, w_2\}$  minimal zentral.*

(ii) Enthält  $T$  keine  $(S \vee \{w_1\})$ -gültigen Knoten mehr, dann ist  $S$  minimal zentral.

Beweis.

Zu (a). Sei  $|\mathcal{K}_1^*(S)| \geq 2$  Seien  $x_1, x_2 \in \mathcal{K}_1^*(S)$  und  $x_3 \in \mathcal{K}_2^*(S)$  paarweise verschiedene Richtungen. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_1}) &= \mathcal{M}(S), \\ d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) &= \mathcal{M}(S) \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_3}) &\geq \mathcal{M}(S) - 1. \end{aligned}$$

Weiters sei  $C$  ein Teilbaum, der  $S$  echt enthält. Jeder Knoten in  $C \setminus S$  kann den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu höchstens einem der 3 Teilbäume verringern, erhöht aber gleichzeitig den Abstand zu den anderen beiden. Daher gilt in jedem Fall  $e_{\mathcal{L}}(S) \leq e_{\mathcal{L}}(C)$ . Somit ist  $C$  nicht minimal zentral.

Zu (b). Ist  $\mathcal{K}_1^*(S) = \{x_1, x_2\}$  und  $w_1$  und  $w_2$  Nachbarn von  $S$  in Richtung  $S_{x_1}$  bzw.  $S_{x_2}$ . Laut Voraussetzung sind beide  $S$ -ungültig. Um den  $\mathcal{L}$ -Abstand sowohl zu  $S_{x_1}$  als auch zu  $S_{x_2}$  nicht zu vergrößern müssen beide aufgenommen werden. Wegen Lemma 3.2.8 können aber nicht beide in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten sein, der bereits  $S$  enthält. Daher ist  $S$  schon minimal zentral.

Zu (c). Gibt es eine Richtung in  $\mathcal{K}^*(S)$  zu der der Abstand nur mehr durch einen Knoten außerhalb  $S_v$  verkleinert werden kann, ist  $S$  wegen Lemma 3.2.7 minimal zentral.

Für die Fälle (d)-(f) gilt für  $x \neq x_1, x_2, v$  gilt jedenfalls

$$d_{\mathcal{L}}(S, S_x) < \mathcal{M}(S) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 2$$

und damit unabhängig von der Wahl von  $w_1$  und  $w_2$

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, (S \vee \{w_1, w_2\})_x) < e_{\mathcal{L}}(S).$$

Sei  $w_2$  ein  $S$  benachbarter Knoten, sodass  $d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_2\}, S_{x_2}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_2}) - 1$ . Dann gilt für  $i = 1, 2$

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, S_{x_i}) = d_{\mathcal{L}}(S, S_{x_i}).$$

Zu (d). Wir wissen, dass

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v) < d_{\mathcal{L}}(S, S_v).$$

Ist  $w_2 \in (S \vee \{w_1\})_v$ , dann gilt weiters

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, (S \vee \{w_1, w_2\})_v) \leq d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v).$$

Insgesamt gilt damit in diesem Fall  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}) = \mathcal{M}(S)$ . Jede weitere Aufnahme von Knoten kann den  $\mathcal{L}$ -Abstand zu beiden  $S_{x_i}$  bestenfalls halten. Damit ist  $S \vee \{w_1, w_2\}$  minimal zentral. Gibt es jedoch keinen Nachbarn  $w_2$  von  $S$  mit  $w_2 \in (S \vee \{w_1\})_v$ , dann gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, (S \vee \{w_1, w_2\})_v) > d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v).$$

Die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität kann daher nicht mehr verbessert werden.

An dieser Stelle wollen wir uns überlegen, dass die Wahl des Knotens  $w_1$  die Existenz eines passenden Knotens  $w_2$  nicht beeinflusst. Sei  $g$  ein Gabelungsknoten, sodass  $T_g$  die Teilbäume  $S_{x_1}$  und  $S_{x_2}$  enthält. Da  $w_1$  und  $w_2$  unterschiedliche Nachbarknoten von  $S$  sind, muss  $g \in S$  gelten und  $x_1$  und  $x_2$  in verschiedenen Ästen bei  $g$  liegen. Jede mögliche Wahl des Knotens  $w_1$  liegt im selben Ast wie  $x_1$ . Bei der Aufnahme eines Knotens aus diesem Ast verändert sich das  $S$ -Gewicht von  $g$  immer auf dieselbe Weise, unabhängig von der Wahl von  $w_1$ . Damit gilt: Gibt es eine mögliche Wahl von  $w_1$ , sodass  $g \in (S \vee \{w_1\})_v$ , dann gilt dies für jede mögliche Wahl von  $w_1$ .  $w_2$  befindet sich in einem anderen Ast bei  $g$ . Dieser Ast verändert sich innerhalb von  $S_g$  bei der Aufnahme von  $w_1$  nicht. Daher gilt  $w_2 \in (S \vee \{w_1\})_v$  genau dann, wenn  $g \in (S \vee \{w_1\})_v$ .

Wählt man  $g$  mit maximal möglichem Abstand zu  $v$ , so können wir an dieser Stelle die analoge Überlegung für (e) anstellen. Wieder verändert sich der Ast bei  $g$  von  $x_2$  (und damit jeder möglichen Wahl von  $w_2$ ) innerhalb von  $S_g$  bei Aufnahme von  $w_1$  nicht. Ist jede Wahl von  $w_2$   $(S \vee \{w_1\})$ -ungültig, dann ist entweder  $w_2$  bereits  $S$ -ungültig oder  $g$  ist  $(S \vee \{w_1\})$ -ungültig. In beiden Fällen, kann die Wahl des Knotens  $w_1$  dies nicht beeinflussen.

Zu (e). Laut Voraussetzung ist  $S_{x_1}$  eine  $S$ -ungültige Richtung und es gibt einen zu  $S$  benachbarten Knoten  $w_1 \in S_v$  in Richtung  $S_{x_1}$ . Es gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v).$$

Gibt es eine  $(S \vee \{w_1\})$ -gültige Wahl für  $w_2$ , dann folgt

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}, (S \vee \{w_1, w_2\})_v) < d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v).$$

In diesem Fall folgt wieder  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$ . Eine weitere Verbesserung wie in (d) kann nicht mehr erreicht werden. Wiederum ist die Wahl von  $w_1$  nicht relevant.

Zu (f). Um die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität zu verkleinern muss jedenfalls ein Nachbar von  $S$  mit den Eigenschaften von  $w_1$  zu  $S$  aufgenommen werden. Analog zum vorigen Fall gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1\}, (S \vee \{w_1\})_v) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v).$$

Daher muss noch ein weiterer Knoten aufgenommen werden, der den Abstand zu  $(S \vee \{w_1\})_v$  und allen  $(\overline{S \vee \{w_1\}})_v$  verringert. Dies kann nur ein  $(S \vee \{w_1\})_v$ -gültiger Knoten tun. Gibt es einen solchen, dann auch einen zu  $S$  benachbarten Knoten  $w_2$ . Dann gilt  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$ . Da  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w_1, w_2\}) = \mathcal{M}(S)$  resultiert jede weitere Aufnahme von Knoten in keiner Verbesserung mehr.

Existiert kein solcher Knoten, so kann die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität nicht mehr verbessert werden. Die Aussage folgt. □

Tritt einer der Fälle des Satzes 3.2.12 ein, so terminiert der Algorithmus in diesem Schritt. Algorithmus 6 präsentiert die Überprüfung der Bedingungen (c) bis (f) aus dem Satz 3.2.12 algorithmisch. Man beachte, dass diese Routine nur aufgerufen werden soll, wenn  $|\mathcal{K}_2^*(S)| \leq 2$  und höchstens einer der beiden Knoten in dieser Menge  $S$ -ungültig ist.

---

**Algorithmus 6** FINDLASTTWOVERTICES

---

**Gegeben:** TB  $S$  eines min. zen. TB, Liste  $L$  mit max. 2 Richtungen, TB  $S_v$

**Gesucht:** Überprüft ob keiner oder zwei Knoten zu  $S$  aufgenommen werden

```
1: if  $|L| == 2$  then
2:   if  $L[1] \notin \mathcal{D}$  then
3:      $x = L[1], y = L[0]$ 
4:   else
5:      $x = L[0], y = L[1]$ 
6:   else
7:      $x = L[0]$ 
8:   if  $x \notin \mathcal{D}$  then
9:      $W$  sei Menge der Nachbarknoten von  $S$  die Abstand zu  $x$  verringern.
10:  for  $w \in W$  do
11:    if  $w \notin S_v$  then
12:      Lösche  $w$  aus  $W$ 
13:  if  $W == \emptyset$  then
14:    return  $\emptyset$ 
15:   $w = W[0]$ 
16:  UPDATE( $S, w, \mathcal{T}, \mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{D}$ )
17:  if  $\mathcal{D} == \emptyset$  then
18:    return  $\emptyset$ 
19:  else if  $|L| == 2$  und  $y \notin \mathcal{D}$  then
20:    return  $\emptyset$ 
21:  else
22:    return  $\{w, \text{FINDANNEXATIONVERTEX}(S, S_v)\}$ 
23: else if  $|L| == 2$  then
24:   $w = \text{FINDANNEXATIONVERTEX}(S, S_v)$ 
25:  UPDATE( $S, w, \mathcal{T}, \mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{D}$ )
26:   $U$  sei Menge der Nachbarknoten von  $S$  die Abstand zu  $y$  verringern.
27:  for  $u \in U$  do
28:    if  $u \notin S_v$  then
29:      Lösche  $u$  aus  $U$ 
30:  if  $U == \emptyset$  then
31:    return  $\emptyset$ 
32:  else
33:    return  $\{U[0], w\}$ 
```

---

Algorithmus 7 zeigt das Zusammenspiel der bisherigen Ergebnisse auf. Sowohl die Korrektheit als auch die Laufzeit des gesamten Algorithmus werden im Anschluss untersucht.

---

**Algorithmus 7** FINDLCS

---

**Gegeben:** Baum  $T$ .

**Gesucht:** Ein minimal zentraler Teilbaum  $C$  von  $T$ .

```
1:  $Z = \text{FINDCENTROID}(T)$ .
2: if  $T$  ist Pfad then
3:   return  $Z$ 
4: Sei  $v \in Z$  mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) \leq |T| - 1$ 
5:  $S = \{v\}$ 
6: Für alle Knoten  $x \in T$  setze  $S_x = T_x$  und  $A_S(x) = |T_x| - 1$ .
7:  $\mathcal{V} = T \setminus (\{v\} \cup \{x \in T \mid \text{deg}_T(x) = 1\})$ 
8:  $\mathcal{F} = \{v\} \cup \{x \mid \text{deg}_T(x) \neq 2\}$ 
9:  $\mathcal{W} = \{A_S(x) \mid x \in \mathcal{F}\}$ 
10:  $\mathcal{T} = \{S_x \mid x \in \mathcal{F}\}$ 
11:  $\mathcal{D} = \{x \mid x \in \mathcal{F} \text{ mit } \text{deg}_T(x) \neq 1 \text{ oder } d_T(v, x) \neq 1\}$ 
12: loop
13:    $\mathcal{M} = |S| - 1 + \max\{2 d_T(S, y) + A_S(y) \mid y \in \mathcal{F} \setminus \{v\}\}$ 
14:    $\mathcal{K}_1 = \text{DIRECTIONS}(\{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) = \mathcal{M}\})$ 
15:    $\mathcal{K}_2 = \text{DIRECTIONS}(\{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M} - 1\})$ 
16:   if  $\mathcal{D} = \emptyset$  then
17:     return  $S$ 
18:   if  $\mathcal{M} = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$  und  $(|\mathcal{K}_1| > 1 \vee \mathcal{K}_1 \not\subseteq \mathcal{D})$  then
19:     return  $S$ 
20:   if  $\mathcal{M} = d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1$  then
21:     if  $|\mathcal{K}_1| > 2$  then
22:       return  $S$ 
23:     if  $|\mathcal{K}_1| == 2$  then
24:       if  $|\mathcal{K}_2| > 2$  then
25:         return  $S$ 
26:       else
27:         if  $|\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{D}| > 1$  then
28:           return  $S$ 
29:         else
30:           return  $S \vee \text{FINDLASTTWOVERTICES}$ 
31:       else
32:         if  $\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{D} = \emptyset$  then
33:           return  $S \vee \text{FINDLASTTWOVERTICES}$ 
34:        $w = \text{FINDANNEXATIONVERTEX}$ 
35:        $S = S \vee w$ 
36:        $\text{UPDATE}(S, w, \mathcal{T}, \mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{D})$ 
```

---

### 3.2.6 Korrektheit des Algorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir die Korrektheit des Algorithmus besprechen. Alle dafür notwendigen Ergebnisse sind bereits in den vorigen Abschnitten beschrieben. Zur Erinnerung beschreiben wir an dieser Stelle noch einmal die dem Algorithmus zugrundeliegende Idee. Ist der Baum  $T$  ein Pfad, so wissen wir wegen Satz 3.2.2, dass der vom Zentrum induzierte Teilbaum der einzige minimal zentrale Teilbaum ist. Dies wird in Zeile 2 überprüft und gegebenenfalls zurückgegeben.

Ist  $T$  kein Pfad, so gibt es laut Proposition 3.1.9 einen Zentroidknoten  $v$  mit  $e_{\mathcal{L}}(\{v\}) = |T| - 1$ . Ein solcher Zentroidknoten ist, laut Lemma 3.2.1, in jedem minimal zentralen Teilbaum von  $T$  enthalten. Der Teilbaum  $S = \{v\}$  stellt daher mit Sicherheit einen Teilbaum eines minimal zentralen Teilbaumes dar. Da  $S_v = T$  gilt bereits zu Beginn  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ .

In jedem Schritt, bis auf eventuell den letzten, haben wir einen Teilbaum  $S$  eines minimal zentralen Teilbaumes  $C$  mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S_v)$ . Ist  $C \setminus S \neq \emptyset$ , so gilt, aufgrund der minimalen Ordnung von  $C$

$$e_{\mathcal{L}}(S) > e_{\mathcal{L}}(C).$$

Daher gibt es einen Teilbaum  $S'$ , mit  $e_{\mathcal{L}}(S) = d_{\mathcal{L}}(S, S') > d_{\mathcal{L}}(C, S')$ . Dieser Teilbaum  $S'$  ist von der Form  $S_x$  für ein  $x = v$  oder einen  $T$ -Gabelungsknoten  $x$ . Wegen der Propositionen 3.1.4 und 3.1.5 wissen wir nun, dass  $S \subset C$  mindestens einen Knoten in Richtung  $S'$  enthält. Wir wissen weiters, dass  $C \setminus S \subset S_v$  und dass  $C \setminus S$  maximal einen  $S$ -ungültigen Knoten enthalten kann.

Sei wiederum

$$\mathcal{M}(S) = |S| - 1 \max_{x \neq v} 2 d_T(v, x) + A_S(x)$$

Ein minimal zentraler Teilbaum teilt als zentraler Knoten im Hasse-Graphen jeden längsten Pfad auf dem er liegt in zwei Hälften. Die Längen dieser Hälften müssen nicht unbedingt gleich lang sein, sie können sich um 1 unterscheiden. Daher sind für uns nicht immer nur die Teilbäume mit maximalem  $\mathcal{L}$ -Abstand von Interesse, sondern auch jene mit  $\mathcal{L}$ -Abstand um 1 geringer. Wir unterscheiden 3 Fälle:

- (i)  $d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 > \mathcal{M}(S)$
- (ii)  $d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 = \mathcal{M}(S)$
- (iii)  $d_{\mathcal{L}}(S, S_v) = \mathcal{M}(S)$

Beginnen wir mit Fall (i). Um die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität zu verringern, muss der Abstand zu  $S_v$  und zu jedem  $\overline{S_v}$  verringert werden. Dies kann durch die Aufnahme jedes, zu  $S$  benachbarten,  $S$ -gültigen Knoten erreicht werden. Gibt es noch einen  $S$ -gültigen Knoten, so gibt es auch einen solchen zu  $S$  benachbarten Knoten  $u$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}, S_v) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 1 \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}, \overline{S_v}) &= d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_v}) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 2. \end{aligned}$$

Für Knoten  $x \neq v$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_x}) < d_{\mathcal{L}}(S, S_x) < e_{\mathcal{L}}(S) - 1.$$

Durch die Aufnahme der Knotens  $u$  zu  $S$  werden diese Abstände um maximal 1 erhöht. Daher ist  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{u\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$  und  $S$  kann nicht minimal zentral sein. In diesem Fall wissen wir, dass  $S_v$  jedenfalls einen  $S$ -gültigen Knoten enthält, der zu  $S$  hinzugefügt werden kann. Mithilfe von Satz 3.2.9 kann dieser Knoten nun bestimmt werden. Insbesondere stellt  $S_v$  eine gültige Richtung dar, der Algorithmus kann also nicht in Zeile 16 terminieren.

Gibt es keinen  $S$ -gültigen Knoten mehr, so ist es nicht mehr möglich die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität zu verbessern.  $S$  ist in diesem Fall bereits minimal zentral. Der Algorithmus stoppt in Zeile 16, da es keine gültigen Richtung mehr gibt.

Zu Fall (ii). Seien hierfür

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^*(S) &= \{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) = \mathcal{M}(S)\}^* \text{ und} \\ \mathcal{K}_2^*(S) &= \{x \in T \mid |S| - 1 + 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M}(S) - 1\}^*. \end{aligned}$$

Der einzige Fall, der in Satz 3.2.12 nicht abgedeckt ist, ist wenn  $\mathcal{K}_1^*(S) = \{x\}$  und  $x$  eine  $S$ -gültige Richtung darstellt. Dann gibt es einen  $S$ -gültigen Nachbarknoten  $w$  von  $S$ , sodass gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, S_x) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_x) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 2, \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, S_v) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 1 \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, \overline{S_v}) &= d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_v}) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 2. \end{aligned}$$

Für Knoten  $y \neq v, x$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_y}) < d_{\mathcal{L}}(S, S_y) < e_{\mathcal{L}}(S) - 1.$$

Durch die Aufnahme von  $u$  zu  $S$  werden diese Abstände um maximal 1 erhöht. Damit ist  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$  und  $S$  kann nicht minimal zentral sein.  $S_v$  ist jedenfalls ein Teilbaum, der die Voraussetzungen des Satzes 3.2.9

erfüllt. Mithilfe dieses Satzes kann der Knoten also bestimmt werden. Man beachte, dass in  $S_x$  eine gültige Richtung darstellt, der Algorithmus kann also nicht in Zeile 16 terminieren.

Betrachten wir nun Satz 3.2.12. Ist  $|\mathcal{K}_1^*(S)| > 2$  (siehe (a)), dann terminiert der Algorithmus in Zeile 21. Sei zuerst  $\mathcal{K}_1^*(S) = \{x_1, x_2\}$ . Ist dann  $|\mathcal{K}_2^*(S)| > 2$  (siehe (a)), so terminiert der Algorithmus in Zeile 24. Sind beide Knoten aus  $\mathcal{K}_1^*(S)$   $S$ -ungültig (siehe (b)), dann endet der Algorithmus in Zeile 27.

Tritt keiner dieser Fälle auf, dann wird die Routine `FINDLASTTWOVERTICES` die Bedingungen (c) bis (f) überprüfen. Wir wissen an dieser Stelle bereits, dass höchstens einer der beiden Knoten  $x_1$  oder  $x_2$  einen  $S$ -ungültige Richtung darstellt. Sei zuerst o.E.  $x_1$  eine  $S$ -ungültige Richtung und gilt für alle Nachbarn  $w$  von  $S$ , die den Abstand zu  $S_{x_1}$  verringern könnten, dass  $w \notin S$  (siehe (c)), dann gibt die Routine in Zeile 13 die leere Menge zurück. Insgesamt wird dann in Zeile 30 der Teilbaum  $S$  zurückgegeben.

Gibt es einen Knoten  $w \in S_v$ , der den Abstand zu  $S_{x_1}$  verringern kann, dann berechnet `UPDATE` unter anderem alle  $(S \vee \{w\})$ -gültigen Richtungen. Ist  $x_2$  eine solche Richtung, dann (siehe (e)) bestimmt `FINDVERTEX` einen Knoten  $u$  in Richtung  $S_{x_2}$ . Dies folgt aus der Wahl der Menge  $\mathcal{A}(S, x)$  in Satz 3.2.9. Der Algorithmus gibt in Zeile 30  $S \vee \{u, w\}$  zurück. Ist  $x_2$  eine  $(S \vee \{w\})$ -ungültig Richtung, so wird dies in `FINDLASTTWOVERTICES` in Zeile 19 festgestellt und der Algorithmus gibt in Zeile 30  $S$  aus.

Ist  $x_1$  jedoch eine  $S$ -gültige Richtung (dann o.E. auch  $x_2$ ), dann bestimmt man mit `FINDVERTEX` einen Knoten  $w$ , der den Abstand zu  $S_{x_1}$  verringert. Nun berechnen wir in `FINDLASTTWOVERTICES` mithilfe `UPDATE` den Teilbaum  $(S \vee \{w\})_v$ . Gibt es einen Nachbarn  $u \in (S \vee \{w\})_v$  von  $S$ , der den Abstand zu  $S_{x_2}$  verringern kann, so ist dieser laut (f) in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten. `FINDLASTTWOVERTICES` gibt  $\{u, w\}$  zurück und unser Algorithmus stoppt in 30 mit dem minimal zentralen Teilbaum  $S \vee \{u, w\}$ . Gibt es einen solchen Nachbarn  $u$  nicht, erkennt dies `FINDLASTTWOVERTICES` in Zeile 30 und der Algorithmus gibt  $S$  zurück.

Damit ist der Fall  $|\mathcal{K}_1^*(S)| = 2$  abgeschlossen.

Sei nun  $x_1$  der eindeutige Knoten aus  $\mathcal{K}_2^*(S)$ , dann wird `FINDLASTTWOVERTICES` in Zeile 33 aufgerufen. Da  $x_1$  eine  $S$ -ungültige Richtung ist, muss die Bedingung in (c) wieder überprüft werden. Dies funktioniert auf selbem Weg wie vorhin. Ist (c) nicht erfüllt und  $w \in S_v$  ein Nachbarknoten von  $S$  in Richtung  $S_{x_1}$ , so überprüfen wir noch ob es eine  $(S \vee \{w\})$ -gültige Richtung gibt (nach (f)). Ist dies der Fall so berechnet der Algorithmus diese mithilfe von `FINDVERTEX`, anderenfalls wird  $S$  zurückgegeben.

Zu Fall (iii). Es sei

$$\mathcal{K}^*(S) = \{x \in T \mid 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M}(S) - 1\}^*.$$

Laut Satz 3.2.11 gilt, dass  $S$  minimal zentral ist, wenn  $\mathcal{K}^*(S) \not\subseteq \mathcal{D}(S)$  oder  $|\mathcal{K}^*(S)| > 1$ . Dies wird in Zeile 18 überprüft. Sei also  $\mathcal{K}^*(S) = \{x\} \subset \mathcal{D}(S)$ . Da  $x$  eine gültige Richtung darstellt, gibt es einen  $S$ -gültigen Nachbarn  $w$  von  $S$ , sodass gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, S_x) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_x) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 1, \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, S_v) &= d_{\mathcal{L}}(S, S_v) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 1 \text{ und} \\ d_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}, \overline{S_v}) &= d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_v}) - 1 = e_{\mathcal{L}}(S) - 2. \end{aligned}$$

Für Knoten  $y \neq v, x$  gilt

$$d_{\mathcal{L}}(S, \overline{S_y}) < d_{\mathcal{L}}(S, S_y) < e_{\mathcal{L}}(S) - 1.$$

Durch die Aufnahme von  $u$  zu  $S$  werden diese Abstände um maximal 1 erhöht. Damit ist  $e_{\mathcal{L}}(S \vee \{w\}) < e_{\mathcal{L}}(S)$  und  $S$  kann nicht minimal zentral sein.  $S_v$  ist jedenfalls ein Teilbaum, der die Voraussetzungen des Satzes 3.2.9 erfüllt. Mithilfe dieses Satzes kann der Knoten also bestimmt werden. Man beachte, dass in  $S_x$  eine gültige Richtung darstellt, der Algorithmus kann also nicht in Zeile 16 terminieren.

Gibt es keine gültigen Richtungen mehr, dann ist  $S$  in jedem der 3 Fälle minimal zentral. Die Stoppbedingung in Zeile 16 ist daher auch korrekt.

### 3.2.7 Laufzeit

In diesem Abschnitt wollen wir eine grobe Laufzeitanalyse des vorgestellten Algorithmus angeben. Hierfür beziehen wir uns auf die obigen Codestücke und vernachlässigen jede Möglichkeit einer effizienteren Implementierung der algorithmischen Idee. Sei hierfür  $n$  die Ordnung des Eingabebaumes. Im Rahmen dieser Analyse wird angenommen, dass der Abstand eines Knotens zum Startknoten  $v$  in einer Liste abgelegt wurde. Ein Zugriff auf den Wert  $d_T(v, x)$  kann jedenfalls in  $\mathcal{O}(n)$  Schritten geschehen. Man beachte hier, dass sich der Abstand  $d_T(x, y)$  aus  $d_T(v, x)$  und  $d_T(v, y)$  berechnen lässt sofern einer der 3 Knoten auf der Geodäte der anderen beiden liegt. Weiters wollen wir hier auch annehmen, dass die Gewichte  $A_S(x)$  und die Teilbäume  $S_x$  der Knoten ebenfalls in Listen abgelegt werden. Ein Zugriff auf eines dieser benötigt somit ebenfalls  $\mathcal{O}(n)$  Rechenschritte. Während des gesamten Algorithmus werden arithmetische Operationen auf Zahlen kleiner gleich  $n$  ausgeführt. Diese benötigen damit  $\mathcal{O}(\log n)$  Rechenoperationen.

Beginnen wir mit der Subroutine UPDATE (Algorithmus 2). Für die Erstellung der Liste  $G$  müssen  $\mathcal{O}(n)$  Knoten  $x$  betrachtet werden. Um festzustellen ob der betrachtete Knoten  $w$  in  $S_x$  liegt benötigt man wiederum  $\mathcal{O}(n)$  Rechenoperationen. Das Erstellen der Liste benötigt also  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenoperationen.

Da die Liste nicht mehr als  $n$  Knoten enthält, benötigt das Ordnen dieser  $\mathcal{O}(n \log n)$  Schritte. Dies kann in Anbetracht des Aufwands der Erstellung der Liste vernachlässigt werden. Die Schleife iteriert  $\mathcal{O}(n)$  mal. Betrachten wir eine Iteration genauer. Die arithmetischen Berechnungen können wir hier vernachlässigen, der Rechenaufwand entsteht durch das Aktualisieren der Liste der gültigen Knoten  $\mathcal{V}$  und der Liste der gültigen Richtungen  $\mathcal{D}$ . Für jeden Knoten, der aus einer solchen Liste entfernt wird, braucht man  $\mathcal{O}(n)$  Schritte und es werden gegebenenfalls auch  $\mathcal{O}(n)$  Knoten entfernt. Eine solche Aktualisierung kostet demnach  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenschritte. Die Berechnung der Knotenmenge in Zeile 18 kann z. B. durch eine Tiefensuche innerhalb von  $S_y$  durchgeführt werden, da  $S_x$  bekannt ist und man nur noch die Knoten der Geodäte  $\{y\} - \{x\}$  bestimmen muss. Dies gelingt jedenfalls in  $\mathcal{O}(n)$ . Insgesamt benötigt die Schleife und damit die gesamte Routine  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen.

Nun zu Algorithmus 3, der Subroutine CALCULATEDIRECTIONS. Die Mengen  $A, B, C = T_x \cap \mathcal{D}(S)$  und die Werte  $M$  und  $N$  lassen sich jedenfalls in  $\mathcal{O}(n^2)$  Schritten bestimmen. Wie in UPDATE wird eine Liste  $G$  bestimmt und geordnet, dies kostet  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenoperationen. Die Schleife iteriert wieder  $\mathcal{O}(n)$  mal. In einer Iteration wird auf einmal auf die Liste der Gewichte  $A_S$  und zweimal auf die Liste der Abstände  $d_T$  zugegriffen, dies kostet jeweils  $\mathcal{O}(n)$  Operationen. Auch die Bestimmung der zu löschenden Knoten lässt sich wieder in  $\mathcal{O}(n)$  Schritten durchführen, das Löschen selbst benötigt zwei Mal  $\mathcal{O}(n^2)$  Schritte. Damit können alle Zuweisungen und arithmetischen Operationen wieder vernachlässigt werden. Insgesamt braucht die Routine wieder  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen.

Die Routine FINDVERTEX besteht aus einer Schleife, die  $\mathcal{O}(n)$  Iterationen durchführt. In jeder Iteration wird die eben beschriebene Subroutine CALCULATEDIRECTIONS aufgerufen. Die Überprüfung in der *if*-Abfrage kostet  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen. Die Bestimmung des Nachbarknotens von  $S$  kann z.B. folgende Weise geschehen. Angenommen wir haben eine gerichtete Kopie des Baumes  $T$ , in der alle Kanten in Richtung  $v$  führen (eine Erstellung dieses Baumes ist einmalig und kostet  $\mathcal{O}(n)$  Rechenschritte), dann kann man ausgehend vom Knoten  $d[0]$  der die Richtung angibt, dem gerichteten Pfad in Richtung  $v$  folgen und in jedem Schritt überprüfen ob man sich bereits in  $S$  befindet. Merkt man sich den im jeweils vorigen Schritt betrachteten Knoten, so benötigt dieses Vorgehen  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenschritte. Insgesamt erhalten wir hier also  $\mathcal{O}(n^4)$  Rechenoperationen.

In CLEANDIRECTIONS iterieren beide Schleifen zusammen  $\mathcal{O}(n)$  mal, die *if*-Abfrage kostet jedoch  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenschritte. Insgesamt erhält man hier also  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen.

Bevor wir die Hauptroutine analysieren, betrachten wir noch FINDLASTT-

WOVERTICES. Die Initialisierung von  $x$  und gegebenenfalls  $y$  mitsamt der nötigen Überprüfung und auch die Abfrage, ob  $x$  ein gültiger Knoten ist, benötigt  $\mathcal{O}(n)$  Rechenschritte. Nun unterteilt sich die Routine in zwei große Verzweigungen, die sich aber sehr analog analysieren lassen. Ein wichtiger Teil in beiden Zweigen ist die Bestimmung aller Nachbarknoten zu  $S$  die den  $\mathcal{L}$ -Abstand in eine bestimmte Richtung verkleinern können. Befindet sich der, die Richtung angegebende Knoten außerhalb von  $S$ , so können wir wie in FIND-VERTEX vorgehen. Anderenfalls lässt sich mittels Breiten- oder auch Tiefensuche vorgehen und in jedem Schritt überprüfen ob der betrachtete Knoten noch in  $S$  liegt. In beiden Fällen benötigt man  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenoperationen. In beiden Zweigen wird die Kandidatenmenge dann mittels einer Schleife untersucht und Knoten, die sich nicht in  $S_v$  (bzw. dem aktualisierten  $S_v$ ) befinden gelöscht. Dieser Vorgang benötigt wiederum  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenoperationen. Ansonsten wird in beiden Zweigen höchstens einmal UPDATE und FINDVERTEX aufgerufen. Alle anderen Schritte sind im Vergleich vernachlässigbar. Insgesamt benötigt FINDLASTTWOVERTICES also  $\mathcal{O}(n^4)$  Rechenoperationen. Nun da wir den Rechenaufwand der Einzelteile abgeschätzt haben, können wir und mit der Laufzeit von FINDLCS auseinandersetzen. Die Bestimmung des Zentroids lässt sich mithilfe von Algorithmus 1 durchführen, dies kann in  $\mathcal{O}(n^2)$  Rechenoperationen umgesetzt werden. Sowohl die Überprüfung ob  $T$  ein Pfad ist als auch ob ein Zentroidknoten einen Ast besitzt der ein Pfad der Länge  $\frac{n}{2}$  lässt sich in  $\mathcal{O}(n)$  Schritten durchführen. Mittels einer Tiefensuche ausgehend von  $v$  kann man die Teilbäume  $T_x$  und auch die Ordnung dieses Teilbaumes für jeden Knoten  $x$  bestimmt werden. Die Initialisierung der Listen  $\mathcal{V}$  (Liste der gültigen Knoten),  $\mathcal{F}$  (Liste der Gabelungsknoten und  $v$ ) und  $\mathcal{D}$  (Liste der gültigen Richtungen) lässt sich jedenfalls in  $\mathcal{O}(n^2)$  Schritten umsetzen.

Nun zur Schleife. Diese iteriert  $\mathcal{O}(n)$  mal. In einer Iteration wird  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{O}(n)$ ,  $\mathcal{K}_1^*$  und  $\mathcal{K}_2^*$  in  $\mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen bestimmt. Bei der Überprüfung der Stoppbedingungen werden entweder arithmetische Operationen ausgeführt (die vernachlässigt werden können), überprüft ob eine Liste mehr Elemente als eine Konstante hat ( $\mathcal{O}(1)$  Rechenschritte) oder ob bzw. wieviele Elemente einer Liste in der Liste der gültigen Richtungen liegen ( $\mathcal{O}(n)$  Operationen). Tritt keine dieser Bedingung ein so wird noch FINDVERTEX und UPDATE mit insgesamt  $\mathcal{O}(n^4)$  Rechenoperationen ausgeführt. Insgesamt haben wir also  $\mathcal{O}(n)$  Iterationen die  $\mathcal{O}(n^4)$  Rechenschritte benötigen plus eventuell in der letzten Iteration ein Aufruf von FINDLASTTWOVERTICES. Damit erhalten wir als Gesamtergebnis eine sehr grobe Laufzeitabschätzung von  $\mathcal{O}(n^5)$ , d.h. polynomiell in der Anzahl der Knoten.

### 3.2.8 Ein Beispiel

Zum Schluss wollen wir den Algorithmus noch anhand eines kleinen Beispiels demonstrieren. Wir betrachten den Baum in Abbildung 3.11.

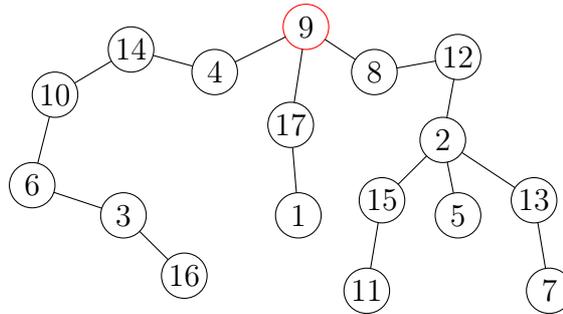


Abbildung 3.11: Baum mit Zentroid  $\{9\}$

Sein Zentroid besteht aus dem Knoten 9 und ist rot markiert. Da das Zentroid nur aus einem Knoten besteht, muss es in jedem minimal zentralen Teilbaum enthalten sein. Wir wählen  $S = \{9\}$  und beginnen mit der Berechnung. Dann sind 1, 2, 5, 7, 11, 16 die Gabelungsknoten des Baumes.  $S_9$  ist zu Beginn der ganze Baum, die Teilbäume  $S_1, S_5, S_7, S_{11}$  und  $S_{16}$  bestehen aus jeweils nur einem Knoten. Der Teilbaum  $S_2$  hat die folgende Form.

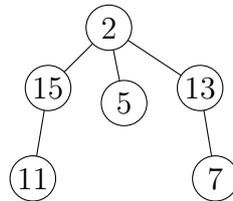


Abbildung 3.12: Der Teilbaum  $S_2$  für  $S = \{9\}$

Die nachstehende Tabelle listet nun die  $\mathcal{L}$ -Abstände zu den eben beschriebenen Bäumen auf.

$S_x$	$S_9$	$S_1$	$S_2$	$S_5$	$S_7$	$S_{11}$	$S_{16}$
$d_{\mathcal{L}}(S_x, S)$	15	4	11	8	10	10	12

Zu Beginn sind alle Blätter und der Knoten 9 ungültig, das heißt, die Menge der gültigen Knoten ist

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17\}.$$

Die  $S$ -gültigen Richtungen sind damit 2,5,7,9,11 und 16. Es gilt

$$e_{\mathcal{L}}(S) = 15 \text{ und} \\ \mathcal{M}(S) = 12.$$

$S_9$  erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes 3.2.9. Mit der Notation aus dem Satz erhalten wir  $\mathcal{M}(S, 9) = \mathcal{N}(S, 9)$  und damit  $\mathcal{S}(S, 9) = \{16\}$ . Da 16 nicht in  $S$  liegt, kann der eindeutige Nachbar von  $S$  auf der Geodäte  $S - S_{16}$  zu  $S$  hinzugefügt werden, d.h.  $S = \{9, 4\}$ . Die aktualisierten Abstände sind

$S_x$	$S_9$	$S_1$	$S_2$	$S_5$	$S_7$	$S_{11}$	$S_{16}$
$d_{\mathcal{L}}(S_x, S)$	14	5	12	9	11	11	11

und damit  $e_{\mathcal{L}}(S) = 14$ ,  $\mathcal{M}(S) = 12$ .  $S_9$  erfüllt wieder die Voraussetzungen von Satz 3.2.9 und  $\mathcal{A}(S, 9) = \{2\}$ . Wir können den Knoten 8 zu  $S$  hinzufügen. Die aktualisierten  $\mathcal{L}$ -Abstände sind

$S_x$	$S_9$	$S_1$	$S_2$	$S_5$	$S_7$	$S_{11}$	$S_{16}$
$d_{\mathcal{L}}(S_x, S)$	13	6	11	8	10	10	12

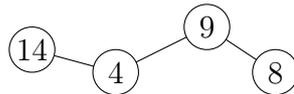
und daher gilt  $e_{\mathcal{L}}(S) = 13$  und  $\mathcal{M}(S) = 12$ . Da  $S_{16}$  eine gültige Richtung darstellt, tritt keine der Bedingungen in Satz 3.2.12 ein. Eine Erweiterung in Richtung  $S_{16}$  verkleinert offenbar die  $\mathcal{L}$ -Exzentrizität. Da dies offenbar die einzige Möglichkeit ist, enthält wiederum  $S_9$  einen gültigen Knoten der mitsamt  $S$  in einem minimal zentralen Teilbaum enthalten ist. Wir erweitern  $S$  nach Satz 3.2.9, d.h.  $S = \{14, 4, 9, 8\}$ . Die aktualisierten Abstände lauten

$S_x$	$S_9$	$S_1$	$S_2$	$S_5$	$S_7$	$S_{11}$	$S_{16}$
$d_{\mathcal{L}}(S_x, S)$	12	7	12	9	11	11	11

Nun gilt  $e_{\mathcal{L}}(S) = 12 = \mathcal{M}(S)$ . Wählt man, wie in Satz 3.2.11, die Menge

$$\mathcal{K}^*(S) = \{x \in T \mid 2 d_T(S, x) + A_S(x) \geq \mathcal{M}(S) - 1\}^* = \{2, 16\}.$$

dann erhalten wir mit demselben Satz, dass keine Verbesserung mehr möglich ist. Der Teilbaum in Abb. 3.13 ist minimal zentral.



**Abbildung 3.13:** Ein minimal zentraler Teilbaum des Baumes aus Abb. 3.11

# Literaturverzeichnis

- [1] A. J. Goldman. Optimal center location in simple networks. *Transportation Science*, 5(2):212–221, 1971.
- [2] A. J. Goldman. Minimax location of a facility in a network. *Transportation Science*, 6(4):407–418, 1972.
- [3] S. L. Hakimi. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12(3):450–459, 1964.
- [4] S. L. Hakimi. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. *Operations Research*, 13(3):462–475, 1965.
- [5] J. Halpern. The location of a center-median convex combination on an undirected tree. *Journal of Regional Science*, 16(2):237–245, 1976.
- [6] M. Hamina and M. Peltola. Least central subtrees, center, and centroid of a tree. *Networks*, 57(4):328–332, 2011.
- [7] G. Y. Handler. Minimax location of a facility in an undirected tree graph. *Transportation Science*, 7(3):287–293, 1973.
- [8] F. Harary. Status and contrastatus. *Sociometry*, 22(1):23–42, 1959.
- [9] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 3rd edition, 1972.
- [10] L.-K. Hua et al. Application of mathematical methods to wheat harvesting. *Chinese Mathematics*, 2:77–91, 1962. Ursprünglich auf Chinesisch veröffentlicht in Acta Math Sinica 11, 1961.
- [11] O. Kariv and L. Hakimi. An algorithmic approach to network location problems i: The  $p$ -centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37:513–538, 1979.

- [12] O. Kariv and L. Hakimi. An algorithmic approach to network location problems ii: The  $p$ -medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37:539–560, 1979.
- [13] C. Lin, Y.-J. Zhang, and J.-L. Shang. Statuses of graphs. Technical report, National Central University, Department of Mathematics and Kainan University, Department of Banking and Finance, Taiwan, 2009. <http://par.cse.nsysu.edu.tw/~algo/paper/paper09/C3-3.pdf>.
- [14] J. Nieminen and M. Peltola. The subtree center of a tree. *Networks*, 34(4):272–278, 1999.
- [15] B. Zelinka. Medians and peripherians of a tree. *Archivum Mathematicum*, 4:87–95, 1968.