



Michael Reiter, BSc

**Probabilistische Auslastungsanalyse einer
Verteilnetzstruktur auf Basis statistischer
Auswertungen von realen Smart-Meter-Messdaten**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Elektrotechnik-Wirtschaft

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

DI Thomas Wieland

Univ.-Prof. DI Dr.techn. Lothar Fickert

Institut für Elektrische Anlagen

Technische Universität Graz

Institutsleiter: Univ.-Prof. DI Dr.techn. Lothar Fickert

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum / Date

Unterschrift / Signature

Danksagung

Für die stetige Unterstützung möchte ich mich beim Institut für Elektrische Anlagen der Technischen Universität Graz bedanken. Mein Dank gilt vor allem Herrn Univ.-Prof. DI Dr.techn. Lothar Fickert, der stets um meine Anliegen bemüht war und sehr viel positiven Einfluss auf die vorliegende Arbeit nahm.

Besonders möchte ich mich bei Herrn DI Thomas Wieland für die Betreuung seitens des Institutes, aber auch die zahlreichen fachlichen Gespräche bedanken. Für die vielseitigen Hilfestellungen danke ich allen MitarbeiterInnen des Instituts für Elektrische Anlagen.

Mein spezieller Dank gebührt meinen Eltern, die mich in jeder Lebenslage unterstützt und mir so das Studium an der Technischen Universität Graz erst ermöglicht haben. Meine Familie, allen voran meine Schwester, gab mir stets den nötigen Rückhalt um dieses Studium zu beenden.

Bedanken möchte ich mich auch bei all meinen Freunden und Verwandten, die mich während der Zeit des Studiums begleitet haben und bei meiner Freundin für das Verständnis und die Geduld während des Verfassens dieser Arbeit.

Kurzfassung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die Analyse von Smart-Meter-Messdaten, um eine detaillierte Aussage über das Lastverhalten von Haushalten im untersuchten Netzgebiet zu erhalten. In diesem Zusammenhang wird die österreichische Gesetzeslage im Umgang mit Smart-Meter-Messdaten erläutert. Die Analyse der Smart-Meter-Messdaten wird mittels statistischer Methoden durchgeführt. Hierfür wird für jedes Viertelstunden-Intervall von definierten Typtagen („Winter Werktag“, „Winter Samstag“, „Winter Sonntag“) eine statistische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ermittelt, die das Lastverhalten des untersuchten Netzgebietes möglichst genau beschreibt. Es wird gezeigt, dass die Haushaltsleistungen des in dieser Arbeit untersuchten, städtischen Netzgebietes lognormalverteilt sind. Auf Basis dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden Leistungswerte einzelner Haushalte stochastisch generiert, die als Grundlage der probabilistischen Auslastungsanalyse einer typischen Verteilnetzstruktur dienen. So werden Häufigkeitsdiagramme der auftretenden Spannungs- bzw. Stromwerte der untersuchten Verteilnetzstruktur bereitgestellt, die eine statistische Beurteilung bezüglich deren Auslastung ermöglichen.

Schlüsselwörter: Smart-Meter-Messdaten, Haushaltslasten, Leistungsverteilung, stochastischer Lastfluss, probabilistische Auslastungsanalyse, Lognormalverteilung

Abstract

In this diploma thesis the measurement data of smart meter is used for analysing household loads. The aim of this thesis is to analyse the load behaviour in the observed distribution area more in detail. Therefore statistical methods are used. In this context, the situation of the Austrian law concerning the handling of smart meter data is explicated. Probability density functions are determined for every 15-minute interval of certain types of days (“winter workday”, “winter saturday”, “winter sunday”), which specify the load behaviour for the observed distribution area. It can be shown, that the household loads of the observed, urban distribution area follow a lognormal probability distribution. Based on the determined probability density functions, the load power of each household is stochastically generated, to execute probabilistic load-flow analysis of a typical low voltage feeder. These analyses provide histograms of the load current and voltage distribution of the observed low voltage feeder, to evaluate the degree of capacity utilisation.

Keywords: smart meter data, household loads, load distribution, stochastic load-flow, probabilistic evaluation of load capacity, log-normal distribution

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	5
1 Zusammenfassung	7
1.1 Ziel	7
1.2 Methode	7
1.3 Ergebnisse	7
1.4 Ausblick	7
2 Einleitung	8
3 Rechtliche Aspekte	9
Teil A: Theoretischer Hintergrund.....	11
4 Statistische Verteilungen	11
4.1 Grundbegriffe und Definitionen	11
4.1.1 Diskrete und stetige Variablen	12
4.1.2 Verteilungen von Zufallsvariablen	12
4.2 Erwartungswert und Varianz.....	16
4.3 Spezielle Verteilungen	17
4.3.1 Ausgewählte diskrete Verteilungen.....	17
4.3.2 Ausgewählte stetige Verteilungen.....	21
4.4 Klassifizierung von Daten	24
4.5 Der Begriff der Verteilungsfunktion	25
4.6 Faltung von Zufallsvariablen	27
4.7 Erzeugung von Zufallszahlen auf Basis einer vorgegebenen Verteilung	30
5 Methoden der Leistungsflussrechnung	32
5.1 Allgemeines.....	32
5.2 Deterministische Leistungsflussberechnung	32
5.2.1 Lastarten/Lastverhalten	33
5.2.2 Numerische Leistungsflussberechnung	35
5.3 Probabilistische Leistungsflussberechnung	40

5.3.1	Monte-Carlo-Methode.....	41
6	Lastprofile	42
6.1	Standardlastprofile.....	42
6.2	Lastprofile aus Smart-Meter-Daten	45
Teil B: Praktische Umsetzung		47
7	Smart-Meter Datenanalyse	47
7.1	Allgemeines.....	47
7.2	Datenpool	47
7.3	Methode	49
7.3.1	Ermittlung der Leistungswerte	50
7.3.2	Zuordnung und Klassifizierung der Leistungswerte.....	52
7.3.3	Bestimmung der Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	55
7.4	Ergebnisse und Diskussion.....	57
7.4.1	Häufigkeitsdiagramme und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen	57
7.4.2	Parameterdiskussion	61
7.4.3	Leistungsverteilungsgebirge	63
8	Probabilistische Auslastungsanalyse	65
8.1	Allgemeines.....	65
8.2	Beurteilung der Spannungswerte.....	65
8.3	Methodik der probabilistischen Auslastungsanalyse	66
8.3.1	Modell der Verteilnetzstruktur	66
8.3.2	Auslastungsanalyse unter Berücksichtigung der Haushaltslastmodelle	68
8.4	Ergebnisse und Diskussion.....	73
8.4.1	Vereinfachte Methodik – Gleichverteilte Haushaltslasten.....	73
8.4.2	Verfeinerte Methodik – Lognormalverteilte Haushaltslasten.....	76
9	Schlussfolgerungen und Ausblick	81
10	Literatur	83

1 Zusammenfassung

1.1 Ziel

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, Haushaltslasten anhand von Smart-Meter-Messdaten zu analysieren, um eine detaillierte Aussage über das Lastverhalten des untersuchten Netzgebietes zu ermöglichen. Es wird eine Methodik entwickelt, die anhand der Kenntnis des realen Lastverhaltens einzelner Netzgebiete eine Evaluation von Verteilnetzstrukturen ermöglicht.

1.2 Methode

Die Analyse der Smart-Meter-Messdaten wird mittels statistischer Auswertemethoden durchgeführt. Es wird für jedes Viertelstunden-Intervall von definierten Typtagen eine statistische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ermittelt, die das Lastverhalten des untersuchten Netzgebietes möglichst genau beschreibt. Auf Basis dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden Leistungswerte einzelner Haushalte stochastisch generiert, die als Grundlage der probabilistischen Auslastungsanalyse einer Verteilnetzstruktur dienen.

1.3 Ergebnisse

Die Ergebnisse dieser Methodik sind zum einen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die eine Beurteilung des Lastverhaltens des untersuchten Netzgebietes erlauben. Hier wird gezeigt, dass die Haushaltsleistungen des untersuchten städtischen Netzgebietes lognormalverteilt sind. Zum anderen werden Häufigkeitsdiagramme der auftretenden Spannungs- bzw. Stromwerte der untersuchten Verteilnetzstruktur bereitgestellt. Diese ermöglichen eine statistische Beurteilung bezüglich deren Auslastung.

1.4 Ausblick

Durch die flächendeckende Installation von Smart-Metern in Haushalten stehen zukünftig große Mengen an Daten zur Verfügung. Durch diese ist es möglich, Lastprognosen zu tätigen, bestehende Verteilnetzstrukturen zu analysieren und Netzausbauszenarien zu simulieren. Die Anwendung stochastischer Methoden ermöglicht es, nicht nur singuläre Extremwerte, sondern statistische Eigenschaften der Systemumgebung zu ermitteln.

2 Einleitung

Der im Jahr 2012 vom österreichischen Bundesministerium für Wirtschaft, Familie und Jugend (BMWFJ) veröffentlichte Erlass „Intelligente Messgeräte-Einführungsverordnung“ (IME-VO) sieht die Einführung von intelligenten Messgeräten in Österreich vor. Dieser basiert auf § 83 (1) Elektrizitätswirtschafts- und –organisationsgesetz (EiwOG 2010) [1]. In dem Erlass ist festgehalten, dass bis Ende 2019 mindestens 95% aller österreichischen Stromkunden mit einem intelligenten Messgerät auszustatten sind [2].

Bisher wird die bezogene Energie in Haushalten mittels Ferraris-Zählern fortlaufend gemessen und zumeist nur jährlich festgehalten. Das Lastverhalten in Niederspannungsnetzen wird demnach nur über den jährlichen Energiebezug anhand von definierten Standardlastprofilen abgeschätzt. Die Installation von intelligenten Messgeräten (Smart-Metern) ermöglicht es, den Energiebezug von Verbrauchern (Haushalt, Gewerbe, Industrie, ...) in definierten Zeitintervallen zu dokumentieren. Durch die Auswertung dieser Daten ist es möglich, eine detailliertere Nachbildung spezifischer Verbrauchergewohnheiten zu gewinnen.

Einige wissenschaftliche Arbeiten beschäftigen sich demnach bereits mit der Auswertung von Smart-Meter-Messdaten zur Untersuchung des Lastverhaltens von Verbrauchern im Niederspannungsnetz [3], [4], [5], [6]. In dieser Arbeit wird eine detaillierte Analyse von Smart-Meter-Messdaten unter Verwendung statistischer Methoden durchgeführt. Die dafür benötigten statistischen Grundlagen werden in Kapitel 4 behandelt. Bei den Messdaten handelt es sich um viertelstündliche Energiewerte von Haushalten aus einem städtischen Gebiet.

Folgende Fragestellungen werden im Zuge dieser Diplomarbeit erörtert:

- Welchem statistischen Verteilungsmodell folgen die Leistungswerte der Haushalte des untersuchten Netzgebietes?
- Wie unterscheiden sich die Verteilungen für unterschiedliche Typtage und Tageszeiten?
- Wie können diese Daten verwendet werden, um die Auslastung von Verteilnetzstrukturen zu untersuchen?
- Was sind die Vorteile einer Auslastungsanalyse von Verteilnetzstrukturen auf Basis von realen Smart-Meter-Messwerten?

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Entwicklung einer Methode zur Beantwortung der genannten Fragestellungen. Es wird eine auf statistischen Grundlagen basierende Methodik zur Auswertung der Smart-Meter-Messdaten vorgestellt und deren Ergebnisse diskutiert. Zur Durchführung der Auslastungsanalyse einer Verteilnetzstruktur wird ein probabilistischer Ansatz gewählt.

3 Rechtliche Aspekte

Im Rahmen dieser Diplomarbeit erfolgt eine umfassende Analyse von Smart-Meter-Messdaten. Dabei handelt es sich um Messdaten von intelligenten Energiezählern aus einzelnen Haushalten. Damit stellt sich die Frage des Umganges mit personenbezogenen Daten, deren Herkunft bestimmt oder bestimmbar ist [7].

Bei der generellen Verwendung von Daten in Österreich ist das Datenschutzgesetz (DSG 2000) [8] heranzuziehen. Dieses ist ausschließlich auf die Verwendung von personenbezogenen Daten im Inland anzuwenden. Personenbezogene Daten in diesem Sinne sind Angaben über Betroffene, deren Identität bestimmt oder bestimmbar ist. Darunter fallen auch indirekt personenbezogene Daten, die vom Verwender nur mit rechtswidrigen Mitteln auf eine Person zurückgeführt werden können. Bei den zu beurteilenden Smart-Meter-Messdaten handelt es sich zumindest um indirekt personenbezogene Daten, da die Kundenidentität jedenfalls durch den Netzbetreiber bestimmbar ist. Daher eröffnet sich der Anwendungsbereich des DSG 2000. Dazu wird an dieser Stelle das DSG 2000 § 46 (1) wiedergegeben [8].

„Für Zwecke wissenschaftlicher oder statistischer Untersuchungen, die keine personenbezogenen Ergebnisse zum Ziel haben, darf der Auftraggeber der Untersuchung alle Daten verwenden, die

- 1. öffentlich zugänglich sind oder*
- 2. er für andere Untersuchungen oder auch andere Zwecke zulässigerweise ermittelt hat oder*
- 3. für ihn nur indirekt personenbezogen sind.“*

Im Zusammenhang mit Smart-Meter-Messdaten besteht zudem ein bereichsspezifischer Datenschutz. Dieser ist in vereinzelt Gesetzen des Elektrizitätswirtschafts- und –organisationsgesetzes (EIWOG 2010) [1] geregelt.

Dieses besagt laut § 84a (1), dass Viertelstundenwerte zum Zweck der Elektrizitätsstatistik, insbesondere zu dem Zweck, Entwicklungen der tageszeitlichen Schwankungen (Tagesganglinien) der Erzeugung aus erneuerbaren Energieträgern sowie Entwicklungen der tageszeitlichen Schwankungen der Stromabnahme aus dem öffentlichen Netz auszuwerten, ausgelesen werden dürfen. Das Selbige ist zum Zweck der Energielenkung sowie zum Zweck der Überwachung hinsichtlich der Versorgungssicherheit und des Elektrizitätsmarktsystems aus dem intelligenten Messgerät zulässig, sofern die Daten unmittelbar nach deren Auslesung mit Daten von anderen Endverbrauchern weitest möglich aggregiert und anschließend anonymisiert werden. Die Daten dürfen nur in dieser anonymisierten Form verwendet werden.

Ein Auslesen von Daten zu statistischen Zwecken ist jedoch nur dann zulässig, wenn bei Netzbetreibern die hierfür erforderlichen statistischen Daten noch nicht vorhanden sind. Der Endverbraucher ist im Falle einer Auslesung der Viertelstundenwerte ohne Einwilligung jedoch laut § 84a (1) EIWOG zeitnah darüber zu informieren [1].

Eine Weitergabe von Daten zu wissenschaftlichen und statistischen Untersuchungen im Rahmen von Forschungszwecken ist demnach jedenfalls dann zulässig, wenn die TU Graz als Dienstleister die Daten im Auftrag eines Netzbetreibers im Rahmen eines konkreten Forschungsprojektes dieses Netzbetreibers zu gesetzlich besonders gerechtfertigten Zwecken (sei es zum besonderen Verwendungszweck für Wissenschaft und Forschung) verwendet. Die Daten dürfen dabei auch ohne ausdrückliche Zustimmung des Betroffenen übermittelt werden, da dieser zu deren Messung ohnehin schon vorab Zustimmung erteilt hat. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass die Daten nur in anonymisierter Form weitergegeben werden.

Teil A: Theoretischer Hintergrund

4 Statistische Verteilungen

Statistische Verteilungen stellen ein elementares Werkzeug der beurteilenden Statistik dar. Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden diverse statistische Verteilungsmodelle herangezogen, um die oben beschriebene Fragestellung zu erläutern. Zunächst wird in diesem Kapitel auf die grundlegenden Begriffe der Statistik eingegangen, um einige ausgewählte Verteilungsmodelle vorzustellen. Außerdem werden einige für diese Arbeit relevante statistische Methoden und Werkzeuge behandelt.

4.1 Grundbegriffe und Definitionen

Bei der Behandlung von Vorgängen mit zufälligem, unvorhersehbarem Ausgang ist zunächst der Begriff der Wahrscheinlichkeit zu definieren. In der Praxis wird meist eine Definition über die relative Häufigkeit von Ereignissen herangezogen. Bei der Durchführung von N Versuchen, bei denen das Ereignis e auftreten kann und dabei n mal tatsächlich auftritt, ordnet man dem Ereignis e die Wahrscheinlichkeit $p(e)$ durch die relative Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses zu [9]. Dieser Zusammenhang wird in Formel (4.1) beschrieben.

$$p(e) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (4.1)$$

Da in der Praxis nicht unendlich viele Versuche durchgeführt werden können, wird die Wahrscheinlichkeit aus endlichen Stichproben abgeschätzt.

Ist es beispielsweise aus Symmetriegründen möglich zu argumentieren, dass alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens jedes einzelnen Ergebnisses gegeben durch die Anzahl der möglichen Ereignisse N [9] und es gilt Formel (4.2).

$$p(e) = \frac{1}{N} \quad (4.2)$$

Ein Beispiel stellt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer 6 bei dem Wurf eines Würfels dar. Diese beträgt, gegeben durch die Geometrie des Würfels, genau $1/6$. Auch die

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von „Kopf“ bei einem Münzwurf ist gegeben durch $1/2$. Da in diesem Fall alle Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, spricht man hier von gleichverteilten Zufallsvariablen.

4.1.1 Diskrete und stetige Variablen

Bei der praktischen Behandlung von statistischen Fragestellungen erweist es sich als sinnvoll, die einzelnen Ergebnisse von Zufallsexperimenten durch Zahlenwerte zu charakterisieren. So werden beispielsweise die Ausgänge beim Werfen eines Würfels durch die Augenzahlen beschrieben. Die Menge der Zahlenwerte kann als Definitionsbereich einer Variablen aufgefasst werden, die Zufallsvariable genannt wird. Den Ausgängen des Zufallsexperimentes sind also Werte der Zufallsvariablen zugeordnet. In weiterer Folge kann jedem Wert der Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Ausganges des Zufallsexperimentes zugeordnet werden [10].

Ausgang A_i des
Zufallsexperimentes \rightarrow Zufallsvariable x_i \rightarrow Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$

Grundsätzlich wird bei den Zufallsvariablen zwischen diskreten und kontinuierlichen (stetigen) unterschieden. Diese Tatsache ist bei der Definition von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Bedeutung, da die Wahrscheinlichkeiten für diskrete Zustandsvariablen andere Eigenschaften aufweisen als jene für stetige [11].

Diskrete Zufallsvariablen liegen vor, wenn die verschiedenen Zahlenwerte abgezählt werden können. Ist beispielsweise die Zufallsvariable X die Anzahl der aus einem Kartenstapel gezogenen Asse, so lässt sich X abzählen und eine Obergrenze von 5 Werten angeben: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Demnach ist X eine diskrete Zufallsvariable [11]. Weitere Beispiele von diskreten Zufallsvariablen sind die Anzahl der Regentage in einem Monat, die Anzahl der Zerfälle eines radioaktiven Präparates in einem festen Zeitintervall Δt oder auch die Anzahl an Leistungswerten in einem definierten Leistungsintervall ΔP .

Stetige Zufallsvariablen können nicht abgezählt werden. Sie können alle Werte innerhalb eines bestimmten Intervalls annehmen und werden in der Regel durch einen Messvorgang ermittelt. Grundsätzlich handelt es sich um stetige Zufallsvariablen, wenn die Größe beliebig genau angegeben werden kann. Abstände, Gewichte oder auch Temperaturen sind klassische Beispiele, die hier genannt werden können [11].

4.1.2 Verteilungen von Zufallsvariablen

Für Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Zufallsvariablen ist vor allem von Interesse, welchen Wert eine Zufallsvariable annimmt. In weiterer Folge interessiert auch, in welchem Wertebereich die Zufallsvariable diese Werte annimmt. Diese

Ereignisse besitzen eine Wahrscheinlichkeit, die sich aus der Wahrscheinlichkeit der zugrunde liegenden Ereignisse ergibt [12].

Bei der Betrachtung von Verteilungen wird grundsätzlich unterschieden, ob es sich um diskrete oder stetige Zufallsvariablen handelt. In Abbildung 4.1 ist eine Übersicht der statistischen Verteilungsmodelle dargestellt.

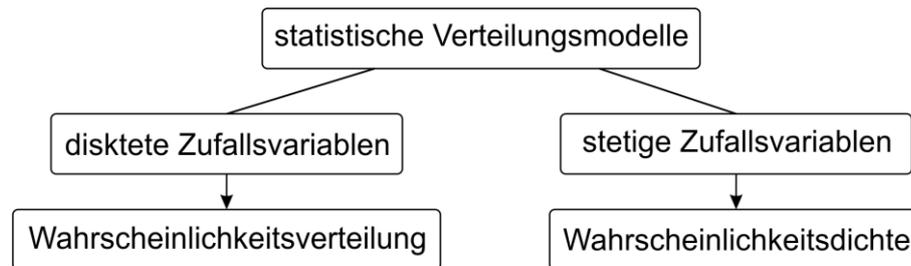


Abbildung 4.1: Übersicht der statistischen Verteilungsmodelle

Bei **diskreten Zufallsvariablen** kann für jedes Auftreten eines bestimmten Wertes der Variable x_i eine entsprechende Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$ zugeordnet werden [9]. Die Betrachtung aller Wahrscheinlichkeiten für jeden Wert der diskreten Zufallsvariablen heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** [10].

Abbildung 4.2 zeigt ein Beispiel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von diskreten Zufallsvariablen.

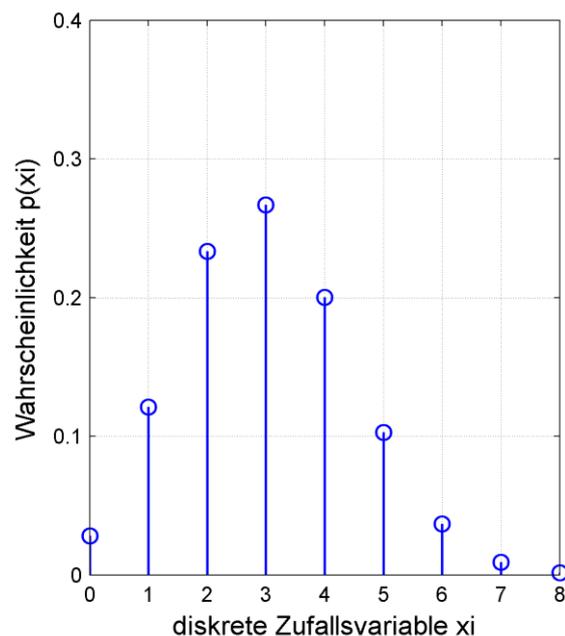


Abbildung 4.2: Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable x_i [9]

Ein Beispiel einer solchen Verteilung ist die Anzahl an Leistungswerten in einem definierten Leistungsintervall ΔP . Üblicherweise werden Verteilungen diskreter Variablen wie in Abbildung 4.2 als Säulen dargestellt. Auch die Darstellung in einem Balkendiagramm ist hier anwendbar.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x_i)$ teilt also jedem Wert x_i die entsprechende Wahrscheinlichkeit zu.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen müssen folgende Bedingungen erfüllen [11]:

- Für jeden Wert x muss es einen eindeutigen Funktionswert $p(x_i)$ geben
- Die Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$ muss für jeden Wert x_i zwischen 0 und 1 liegen
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Werte x_i muss 1 ergeben

Stetige Zufallsvariablen können, wie oben bereits erwähnt, unendlich viele Werte innerhalb eines bestimmten Intervalls annehmen. Somit geht die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes gegen 0. Es wird bei stetigen Variablen lediglich eine Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von x in einem Intervall Δx angegeben. Formel (4.3) beschreibt den Übergang in den kontinuierlichen Wertebereich [9]:

$$\Delta p(x) = \frac{\Delta p(x)}{\Delta x} \Delta x \quad \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \quad dp(x) = \frac{dp(x)}{dx} dx = f(x) dx \quad (4.3)$$

Der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x_i)$ bei diskreten Zufallsvariablen x_i entspricht bei stetigen Zufallsvariablen x die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $f(x)$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Wahrscheinlichkeit pro Einheit der Zufallsvariablen [10].

Abbildung 4.3 zeigt eine Wahrscheinlichkeitsdichte von stetigen Zufallsvariablen.

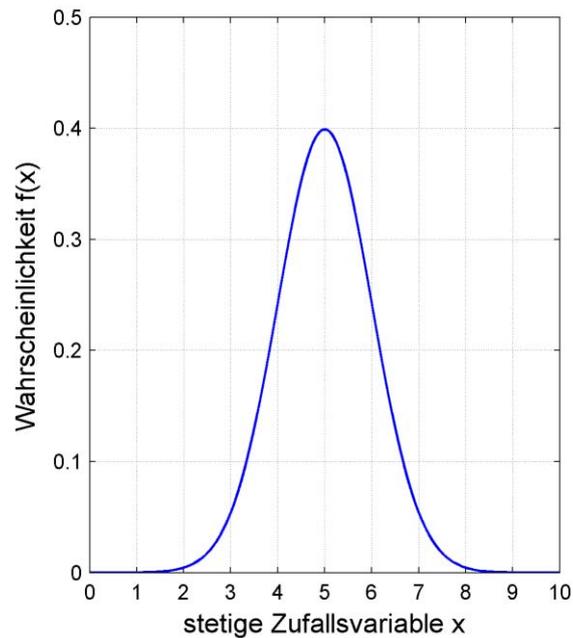


Abbildung 4.3: Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariable x [9]

Analog zum diskreten Fall muss auch die zu stetigen Zufallsvariablen gehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion folgende Bedingungen erfüllen [11]:

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist im gesamten Bereich nicht negativ, somit gilt $f(x) \geq 0$ für alle Werte von x
- Die Gesamtfläche unter der Kurve $f(x)$ aus Abbildung 4.3 ist 1. Formel (4.4) stellt diesen Zusammenhang dar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.4)$$

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte können also nur Wahrscheinlichkeiten in einem definierten Werteintervall der Zufallsvariablen x bestimmt werden. Für ein solches Intervall mit den Grenzen a und b gilt Formel (4.5) [11]:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (4.5)$$

4.2 Erwartungswert und Varianz

Obwohl die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x_i)$ bzw. die stetige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ die meisten Möglichkeiten bieten um ausführliche Aussagen über die Eigenschaften der Zufallsvariablen zu treffen, ist es oft überschaubarer, bestimmte Eigenschaften durch einige wenige Parameter zusammenzufassen.

Der **Erwartungswert** $E(x)$ gibt an, welchen Wert eine Zufallsvariable X , bei der häufigen Durchführung eines Zufallsexperimentes, im Durchschnitt annehmen wird. Dieser wird mit dem griechischen Buchstaben μ bezeichnet.

Um auszudrücken, wie stark die Zufallswerte um diesen Mittelwert streuen wird der Begriff der **Varianz** $\text{Var}(x)$ eingeführt. Diese stellt die mittlere quadratische Abweichung der Stichprobenwerte vom Mittelwert dar. Üblicherweise wird das Maß der „Streuung“ als **Standardabweichung** angegeben. Diese ergibt sich aus der quadratischen Wurzel der Varianz und wird in der Literatur mit dem griechischen Buchstaben σ bezeichnet. Die Formel (4.6) stellt diesen Zusammenhang dar.

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sigma^2} \quad (4.6)$$

Im Falle empirisch ermittelter Daten, werden die oben genannten Werte als Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung s bezeichnet. Für die Standardabweichung s gilt wiederum:

$$s = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{s^2} \quad (4.7)$$

Tabelle 4.1 fasst die Formeln für den Erwartungswert $E(x)$ und die Varianz $\text{Var}(x)$ jeweils für empirische Datensätze, diskrete und stetige Verteilungsmodelle zusammen [11].

Tabelle 4.1: Gleichungen für den Erwartungswert $E(x)$ und die Varianz $\text{Var}(x)$

	Erwartungswert $E(x)$	Varianz $\text{Var}(x)$
empirisch	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
diskret	$\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$
stetig	$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$

Die in Tabelle 4.1 dargestellten Formeln stellen die allgemeine Berechnungsgrundlage für den Erwartungswert $E(x)$ und die Varianz $\text{Var}(x)$ dar.

4.3 Spezielle Verteilungen

Statistische Verteilungen stellen ein elementares Werkzeug zur Beantwortung verschiedenster ingenieurwissenschaftlicher Fragestellungen dar. Dementsprechend wird in der Literatur auch eine Vielzahl an diskreten und stetigen Verteilungen beschrieben [9], [10], [11], [12]. In den folgenden Kapiteln werden folgende ausgewählte Verteilungsmodelle für diskrete und stetige Zufallsvariablen vorgestellt:

- Binomialverteilung (diskret)
- Poissonverteilung (diskret)
- Gleichverteilung (stetig)
- Normalverteilung (stetig)
- Lognormalverteilung (stetig)

Konkret werden an späterer Stelle die Gleichverteilung und die Lognormalverteilung angewendet.

4.3.1 Ausgewählte diskrete Verteilungen

In der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung interessiert vor allem die Wahrscheinlichkeit, ob ein Ereignis eintritt oder nicht eintritt. Ein solches Zufallsexperiment hat demnach nur zwei mögliche Ergebnisse, die sich gegenseitig ausschließen. Dieses Experiment wird in der Literatur als Bernoulli-Experiment bezeichnet. Grundlegend lassen sich alle Experimente in einem ersten Schritt auf eine solche Aussage reduzieren [11]. Einfache Beispiele hierzu wären:

- Münzwurf: Wappen = 1, Zahl = 0
- Qualitätsprüfung: Produkt ok = 1, Produkt defekt = 0

Bei einem Bernoulli-Experiment tritt das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p ein und das Komplementäreignis B , mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ [11]. Demnach ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x_i)$ ganz allgemein:

$$p(x_i) = \begin{cases} 1-p & X = 0 \\ p & X = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

Demnach nimmt die Zufallsvariable X bei dieser Verteilung die Werte 0 oder 1 an. Bei den folgenden diskreten Verteilungen kann die Zufallsvariable X mehrere Werte annehmen.

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ergibt sich aus mehrfach durchgeführten Bernoulli-Experimenten. Jedes Experiment besitzt dabei wieder die beiden möglichen Ergebnisse A und dessen Komplement. Bei dem Wurf einer Münze, das ein klassisches Bernoulli-Experiment darstellt, ist nur eines der beiden Ergebnisse „Kopf“ oder „Zahl“ möglich. Mit der Binomialverteilung ist es allerdings möglich, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass nach zehn Würfen genau sieben Mal „Zahl“ gewürfelt wird. Die Binomialverteilung erlaubt also die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer speziellen Anzahl von Ereignissen für eine bestimmte Anzahl von Bernoulli-Experimenten. Die Zufallsvariable X ist dabei die Anzahl an beobachteten Ereignissen [11]. Voraussetzungen für die Binomialverteilung sind:

- Jedes Ereignis A in einem Teilexperiment muss immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p eintreten
- Ergebnisse der einzelnen Experimente müssen voneinander unabhängig sein

Die Binomialverteilung wird von zwei Parametern gestützt. Der erste Parameter ist die Wahrscheinlichkeit p , mit der das Ereignis A eines Bernoulli-Experimentes auftritt. Der zweite Parameter ist die Anzahl n der aufeinander folgenden Bernoulli-Experimenten. Die allgemeine Gleichung der Binomialverteilung lautet:

$$P(X = k) = f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

Die Abhängigkeit der Binomialverteilung von der Wahrscheinlichkeit p ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Diese Abbildung zeigt jeweils die Binomialverteilung für eine Anzahl von $n = 10$ aufeinanderfolgende Bernoulli-Experimenten und verschiedene Wahrscheinlichkeiten p .

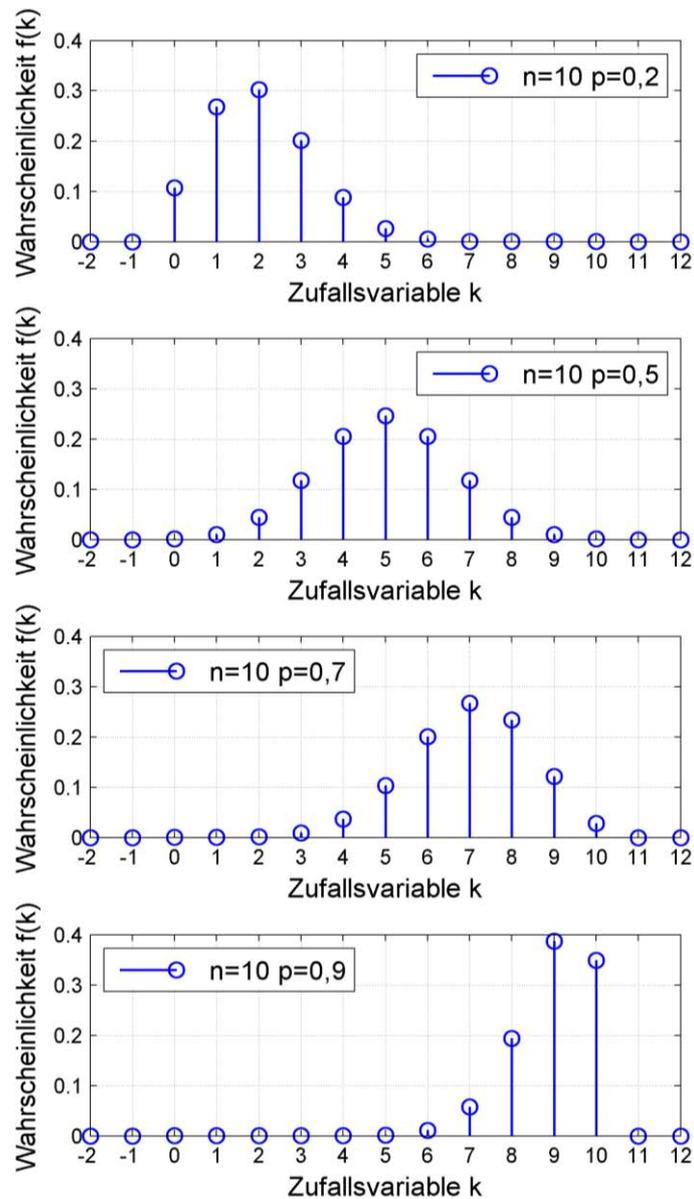


Abbildung 4.4: Binomialverteilung für eine Anzahl von $n = 10$ aufeinander folgenden Bernoulli-Experimenten und verschiedene Wahrscheinlichkeiten p (0,2 bis 0,9)

Aus Abbildung 4.4 ist ersichtlich, dass für größer werdende Wahrscheinlichkeit p eines Bernoulli-Experimentes der Spitzenwert größer wird. Weiters ist zu erkennen, dass die Binomialverteilung für $p = 0,5$ symmetrisch ist.

Poissonverteilung

Dieses Verteilungsmodell wird herangezogen, wenn es sich bei einem Experiment um eine große Anzahl von Wiederholungen $n > 100$ handelt und die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges sehr gering ist ($p < 0,1$). Diese Verteilung wird lediglich von dem Parameter λ gestützt, der die erwartete durchschnittliche Anzahl an Erfolgen darstellt. Die

Poissonverteilung ergibt sich demnach aus der Binomialverteilung, wenn die Anzahl der Wiederholungen n gegen ∞ und die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges p gegen 0 geht, unter konstantem Parameter $\lambda = n \cdot p$ [11]. Die Formel der Poissonverteilung lautet:

$$P(X = k) = f(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.10)$$

In Abbildung 4.5 ist die Poissonverteilung für verschiedene Werte von λ dargestellt.

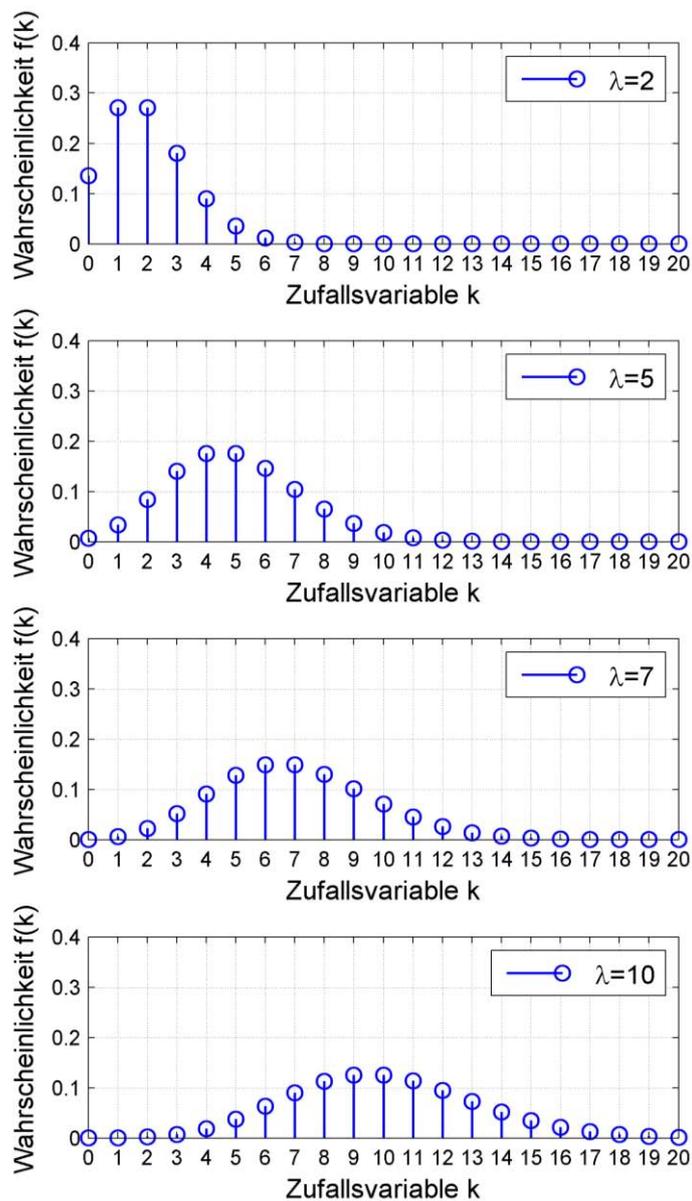


Abbildung 4.5: Poissonverteilung für verschiedene Werte von λ (2 bis 10)

Aus Abbildung 4.5 ist ersichtlich, dass die Poissonverteilung für kleine Werte von Lambda ($\lambda = 2$) eine stark asymmetrische Gestalt besitzt. Je größer λ wird, desto eher nimmt die Poissonverteilung eine symmetrische Gestalt an. Für $\lambda > 30$ kann gezeigt werden, dass die Poissonverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden kann [11].

4.3.2 Ausgewählte stetige Verteilungen

Verteilungen mit stetigen Zufallsvariablen sind durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichte gekennzeichnet. Im folgenden Abschnitt werden einige für diese Arbeit relevante Verteilungsmodelle beschrieben.

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung kann auch bei diskreten Zufallsvariablen angewendet werden. Hier spricht man von einer Gleichverteilung, wenn alle möglichen Werte mit derselben Wahrscheinlichkeit realisiert werden können. Ein Beispiel stellt hier die Augenzahl eines Würfels dar. Hierbei besitzt jede Zahl die gleiche diskrete Wahrscheinlichkeit von $p = 1/6$.

Im Falle einer stetigen Verteilung ist eine Zufallsvariable in einem Intervall zwischen den Grenzen a und b gleichverteilt, wenn Ihre Dichte über diesem Intervall einen konstanten Wert annimmt und außerhalb dieses Intervalls gleich 0 ist [11]. Dadurch wird die Gleichverteilung auch häufig als Rechteckverteilung bezeichnet. Die allgemeine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gleichverteilung lautet:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.11)$$

Normalverteilung

Eine Vielzahl von natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftlichen Zusammenhängen wird durch die Normalverteilung entweder exakt oder zumindest in guter Näherung beschrieben. Als Beispiele sind hier die Körpergröße, das Gewicht oder auch Messfehler anzuführen. Des weiteren nähern sich viele diskrete Verteilungen, wie die Binomialverteilung oder die Poissonverteilung unter gewissen Voraussetzungen und genügend großem Erhebungsumfang der Normalverteilung an.

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit ist die Tatsache, dass die Summen und Durchschnittswerte von unabhängigen Zufallsvariablen nahezu normalverteilt sind. Diese Tatsache wird als zentraler Grenzwertsatz bezeichnet [9].

Die Normalverteilung wird ausschließlich durch den Mittelwert μ und die Streuung σ charakterisiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet und anhand Formel (4.12) berechnet:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (4.12)$$

Die Normalverteilung wird als Verteilung von Abweichungen um einen Mittelwert interpretiert. Abbildung 4.6 stellt die Normalverteilung für unterschiedliche Werte von μ und σ dar.

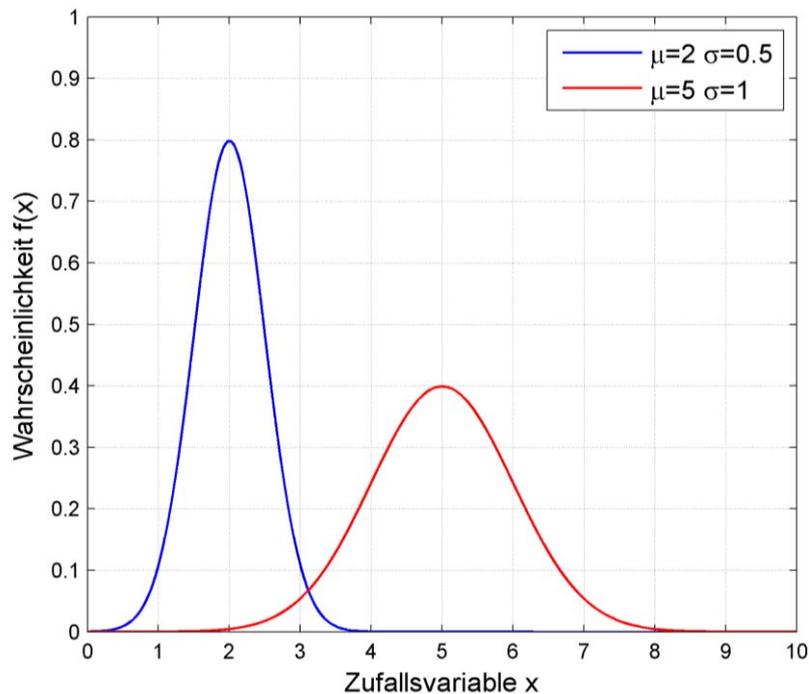


Abbildung 4.6: Normalverteilung mit den Werten Mittelwert μ ($\mu = 2$ bzw. 5) und Streuung σ ($\sigma = 0,5$ bzw. 1)

Aus Abbildung 4.6 wird ersichtlich, dass der Mittelwert μ die Lage des Maximums beeinflusst. Der Mittelwert μ wird dabei als Lage- und die Streuung σ als Skalenparameter bezeichnet. Die Verteilung verschiebt sich nach rechts, für größer werdenden Mittelwert μ und nach links für kleiner werdenden Mittelwert μ . Die Streuung σ beschreibt dabei die breite der Kurve. Für große Werte der Streuung σ ist die Kurve breit und flach und für kleine Werte der Streuung σ schmal und hoch.

Die Normalverteilung wird durch folgende charakteristischen Eigenschaften beschrieben [11].

- Die Verteilung ist glockenförmig, wobei die Form (Breite) der Glocke durch die Streuung σ bestimmt wird
- Die Verteilung ist spiegelsymmetrisch um den Mittelwert μ . Es gilt $f(\mu + x) = f(\mu - x)$
- Das Maximum der Verteilung liegt an der Stelle $x = \mu$
- Die Kurve der Normalverteilung nähert sich für größer bzw. kleiner werdende Zufallsvariablen x der x -Achse an

Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung wird in vielen Bereichen der Anpassung bzw. Modellierung von Messdaten angewendet. Der folgende Abschnitt beschreibt die Eigenschaften dieser Verteilung.

Die Lognormalverteilung ist eng mit der Normalverteilung verwandt. Ist der natürliche Logarithmus einer Zufallsvariablen X normalverteilt, so ist X lognormalverteilt [13]. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ergibt sich demnach aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung und es gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.13)$$

Die Berücksichtigung des Logarithmus der Zufallsvariablen x wirkt sich dabei auf die Bedeutung der Parameter aus. Bei der Lognormalverteilung wird anders als bei der Normalverteilung μ als Skalen- und σ als Formparameter bezeichnet.

Die Lognormalverteilung wird als Modell herangezogen, wenn es sich bei den zugrunde liegenden Daten grundsätzlich um positive Werte handelt, deren Verteilung ein Maximum aufweist, asymmetrisch ist und eine zugrundeliegende Normalverteilung ausschließt [13]. Nähert sich der Wert des Formparameters σ dem Wert 0 an, so ist die Zufallsvariable X annähernd normalverteilt. Abbildung 4.7 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von lognormalverteilten Zufallsvariablen mit festem Skalenparameter $\mu = 0$ und verschiedenen Werten des Formparameters σ dar.

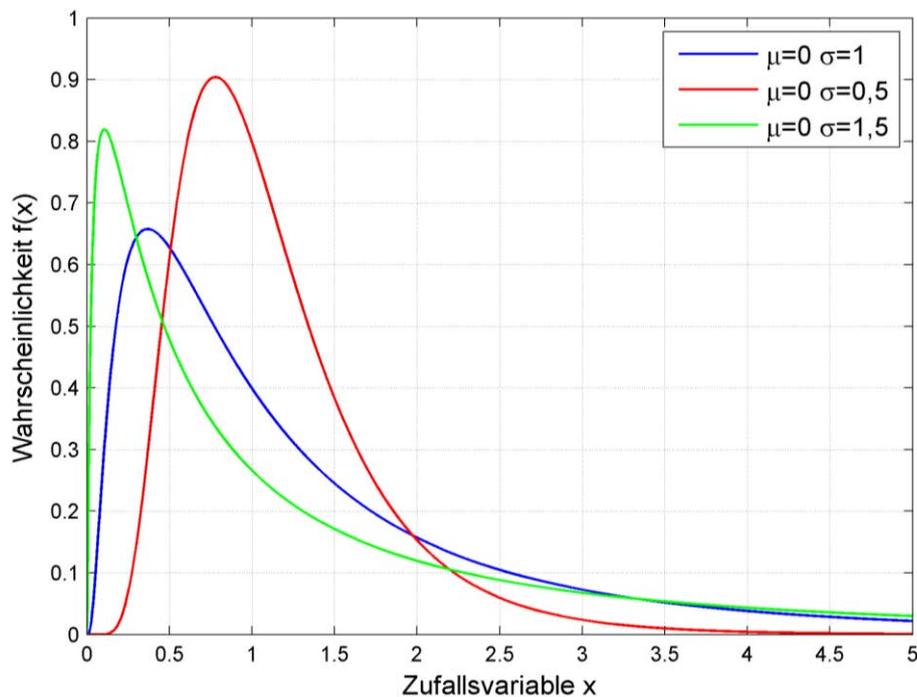


Abbildung 4.7: Lognormalverteilung für $\mu=0$ und verschiedene Werte für σ

Aus Abbildung 4.7 wird ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit kleiner werdendem Formparameter σ an Symmetrie zunimmt und sich mit zunehmendem Formparameter σ der y-Achse nähert.

Eine wiederum für diese Arbeit relevante Eigenschaft ist die Stabilität bei der Addition mehrerer Lognormalverteilungen. Dies besagt, dass die Summe unabhängiger lognormalverteilter Zufallszahlen wieder lognormalverteilt ist [13].

4.4 Klassifizierung von Daten

In der Literatur werden Methoden, die sich mit der Auswertung von Messdaten befassen als beschreibende Statistik bezeichnet. Im Gegensatz dazu können in weiterer Folge mit verschiedensten Werkzeugen der beurteilenden Statistik, Aussagen zu einer über die untersuchten Daten hinausgehenden Grundgesamtheit getroffen werden.

Das Ziel der beschreibenden Statistik ist es, Messdaten in Grafiken zusammenzufassen, um durch den visuellen Eindruck die Interpretation von großen Datenmengen zu erleichtern. Statistische Kennwerte erlauben eine Zusammenfassung der Daten zu einzelnen, charakteristischen Werten [11].

Eine solche Grafik stellt unter anderem die so genannte Häufigkeitsverteilung dar. Diese ergibt sich aus der Häufigkeit des Auftretens einzelner Merkmalsausprägungen in einer Stichprobe. Treten in einer Stichprobe sehr viele verschiedene Ausprägungen eines Merkmals auf, so ist es zweckmäßig, die Stichprobe zu vereinfachen. Dies kann durch das Zusammenfassen von ähnlichen bzw. benachbarten Ausprägungen in Klassen realisiert

werden. Es wird für jede Klasse die Häufigkeit angegeben. Durch die Division der einzelnen Häufigkeiten je Klasse (absolute Klassenhäufigkeit) durch den Stichprobenumfang, ergeben sich die relativen Klassenhäufigkeiten. Diese Klassenhäufigkeiten beziehen sich somit auf ein Intervall, das die Klasse definiert.

Zur Erstellung einzelner Klassen werden in der Literatur folgende Richtlinien beschrieben [11]:

- Alle Klassen sollten die gleiche Breite besitzen.
- Offene Klassen sollten vermieden werden. Sofern aber Minimum bzw. Maximum nicht bekannt ist, muss die entsprechende Klasse nach unten bzw. oben offen bleiben.
- Klassen müssen eindeutig definiert sein und sich gegenseitig ausschließen, sodass jeder Wert nur einer Klasse zugeordnet werden kann.
- Alle Messdaten der Stichprobe müssen genau einer Klasse zugeordnet werden.

Für die Größe der Klasse kann lediglich eine Faustregel zitiert werden [11]. Die angegebene Formel (4.14) stellt also wiederum nur einen Richtwert zur Verfügung.

$$k \approx \begin{cases} \sqrt{n} & n \leq 1000 \\ 10 \cdot \log(n) & n > 1000 \end{cases} \quad (4.14)$$

Unter Berücksichtigung dieser Richtlinien können die Messdaten in einem so genannten Histogramm dargestellt werden. Dabei wird über jedem Intervall (Klasse) die entsprechende Häufigkeit aufgetragen. Diese Methode ermöglicht es, relativ einfach zu zeigen, wie die Messdaten auf die einzelnen Klassen verteilt sind.

4.5 Der Begriff der Verteilungsfunktion

Durch die Verteilungsfunktion wird bestimmt, welcher Anteil der beobachteten Messwerte bzw. Zufallsvariablen unterhalb bzw. oberhalb eines bestimmten Grenzwertes liegt. Dazu kann im Falle eines Häufigkeitsdiagrammes die kumulierte Häufigkeit herangezogen werden. Dabei werden die relativen Häufigkeiten beginnend mit der kleinsten Ausprägung in aufsteigender Reihenfolge addiert (kumuliert).

Diese Methodik wird auch auf die bereits vorgestellte Wahrscheinlichkeitsfunktion für diskrete Zufallsvariablen und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für stetige Zufallsvariablen angewendet. Zweitgenannte wird in der englischsprachigen Literatur als **probability density function** (pdf) bezeichnet.

Ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion für diskrete Zufallsvariablen oder die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für stetige Zufallsvariablen ermittelt, kann auf die sogenannte (kumulierte) Verteilungsfunktion geschlossen werden. Diese ist im englischsprachigen Raum als **cumulative distribution function** (cdf) bekannt.

In Falle der **diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion** werden wie bei der kumulierten Häufigkeit, die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $f(x_i) = p_i$ aufsummiert. Die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist [11].

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 = \sum_{i=1}^2 p_i & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1 & x \geq x_n \end{cases} \quad (4.15)$$

Abbildung 4.8 stellt die Verteilungsfunktion der bereits behandelten Binomialverteilung für eine Anzahl von $n = 10$ aufeinander folgenden Bernoulli-Experimenten und einer Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines speziellen Ergebnisses von $p = 0,2$ dar.

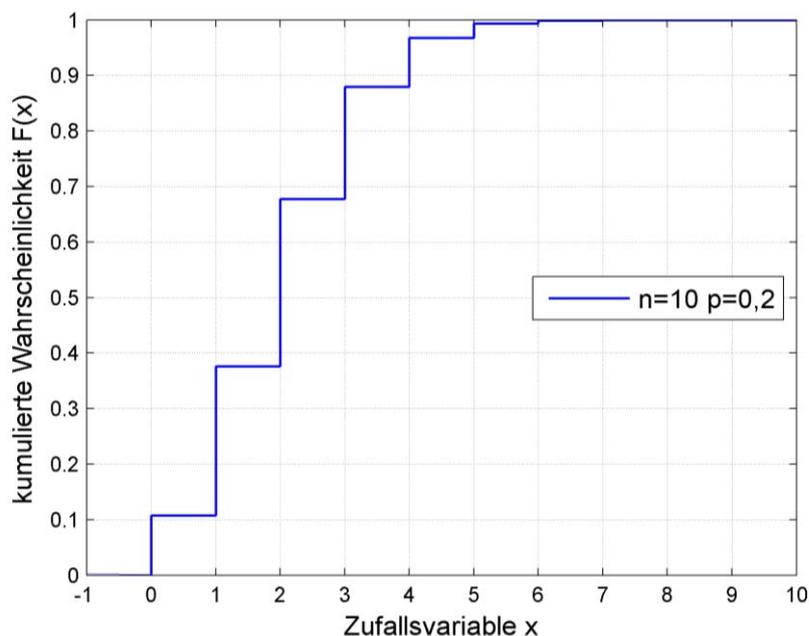


Abbildung 4.8: Verteilungsfunktion der Binomialverteilung für eine Anzahl von $n = 10$ aufeinander folgenden Bernoulli-Experimenten und einer Wahrscheinlichkeit von $p=0,2$

Die Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsvariablen nimmt demnach immer die Form einer Treppe an. Die einzelnen Treppenstufenhöhen sind dabei gleich der entsprechenden Wahrscheinlichkeit p_i . Nach der letzten Treppenstufe sind alle Wahrscheinlichkeiten aufaddiert und die Funktion erreicht den Wert 1.

Im Falle der **stetigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** kann nun ähnlich vorgegangen werden. Hier kommt man allerdings mittels des Integrals über $f(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zur

Verteilungsfunktion $F(x)$. Diese ist eine kontinuierliche, monoton wachsende Kurve, die über Formel (4.16) berechnet wird.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (4.16)$$

Wobei hier die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion als $f(y)$ angegeben wird, da das Integral bis zur oberen Grenze x bestimmt wird. Abbildung 4.9 stellt die Verteilungsfunktion einer Lognormalverteilung für die Werte $\mu=0$ und $\sigma=0,5$ dar.

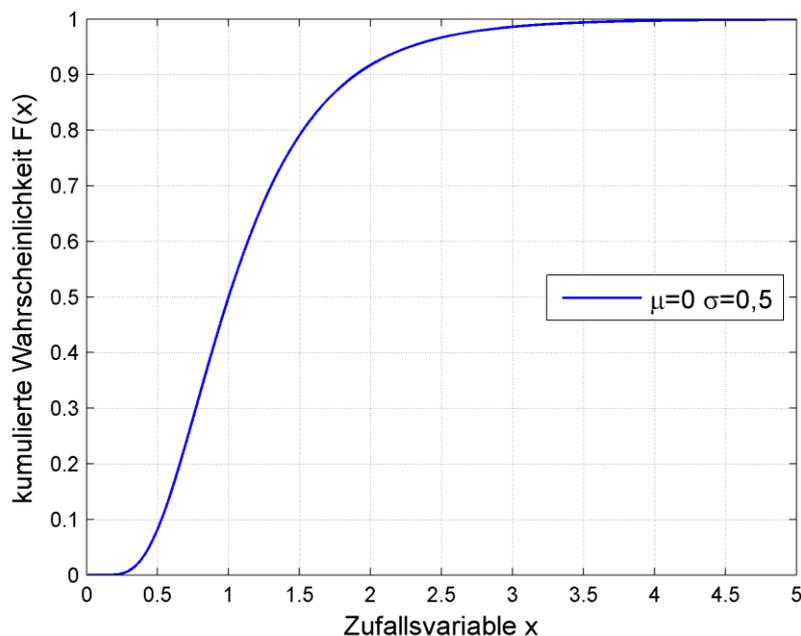


Abbildung 4.9: Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung für $\mu=0$ und $\sigma=0,5$

Analog zur Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsvariablen nähert sich die Verteilungsfunktion für stetige Zufallsvariablen für größer werdendes x ebenfalls dem Wert 1 an.

4.6 Faltung von Zufallsvariablen

Bei vielen Fragestellungen interessiert die Summe der einzelnen Zufallsvariablen. Insbesondere die daraus resultierende Verteilung. Die Addition der Zufallsvariablen wird in der Literatur als Faltung bezeichnet.

Handelt es sich dabei um **diskrete Zufallsvariablen**, so gilt für die Summe zweier Variablen X und Y , mit deren zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$, die

Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_Z(z)$ mit $Z = X + Y$ [14]. Für die Berechnung dieser Faltung gilt Formel (4.17).

$$f_Z(z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) \cdot f_Y(z_i - x_i) \quad (4.17)$$

Abbildung 4.10 stellt eine diskrete Gleichverteilung dar. Für diese Darstellung wird eine Anzahl von $N = 10000$ Zufallszahlen zwischen 0 und 1 generiert und klassifiziert. Die einzelnen Klassen stellen die Zufallsvariablen x_i dar. Die Zufallsvariablen x_i treten somit mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Intervall von 0 bis 1 auf.

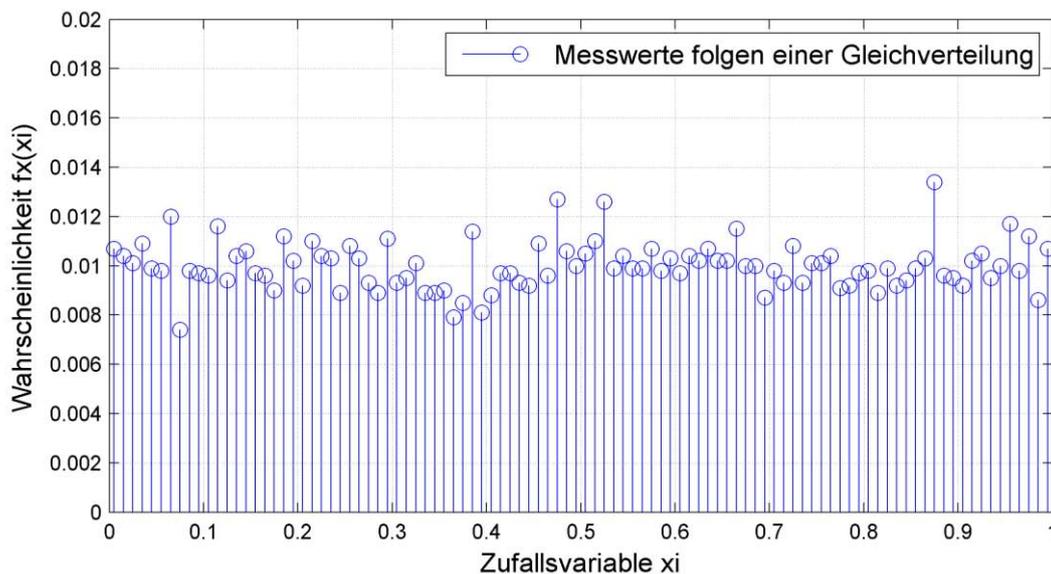


Abbildung 4.10: diskrete Gleichverteilung für Zufallsvariablen x_i im Intervall von 0 bis 1

Wird die in Abbildung 4.10 dargestellte Verteilung mit einer identen Gleichverteilung gefaltet, so ergibt die resultierende Verteilung eine Dreiecksverteilung. Diese ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

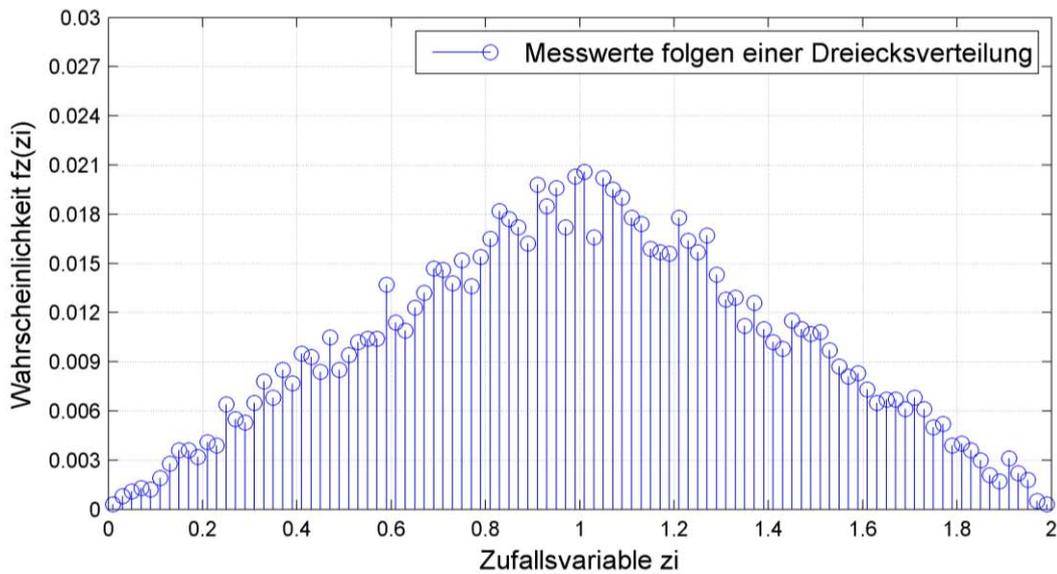


Abbildung 4.11: Faltung zweier Gleichverteilungen (Dreiecksverteilung)

Die aus der Faltung der beiden Gleichverteilungen resultierende Dreiecksverteilung konzentriert sich um den Mittelwert $\bar{x} = 1$.

Wiederholt man diesen Vorgang beliebig oft, so nähert sich die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung immer näher einer Normalverteilung an. Dieses Verhalten ist bereits in Kapitel 4.3.2 erwähnt und wird als zentraler Grenzwertsatz bezeichnet [9]. Dieser besagt, dass die Kombination einer großen Anzahl aus Zufallsvariablen mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung als resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung die Normalverteilung ergibt. In Abbildung 4.12 wird dies mittels 10 Faltungen der in Abbildung 4.10 beschriebenen Gleichverteilung dargestellt.

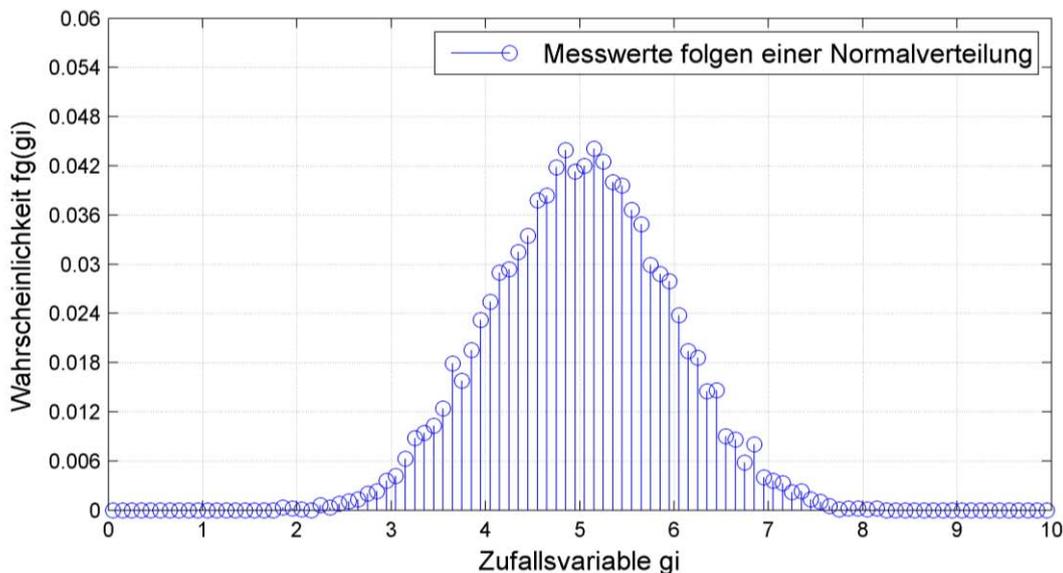


Abbildung 4.12: Annäherung von 10 gefalteten Gleichverteilungen an die Normalverteilung

Als Mittelwert der in Abbildung 4.12 dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich der Mittelwert $\bar{x} = 5$. Eine Annäherung an die Normalverteilung ist bereits sehr gut zu erkennen.

Im Falle **stetiger Zufallsvariablen** wird bei der Addition von der Faltung der Dichten gesprochen. Die Faltung der Dichten $f(x)$ und $g(y)$ ergibt die Dichte $h(z)$. Diese entspricht der Summe $Z = X + Y$ [14]. Die Faltung von Wahrscheinlichkeitsdichten wird in Formel (4.18) beschrieben.

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x) \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(z-x) \cdot f(x) dx \quad (4.18)$$

Dabei können die im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x)$ und $g(x)$ unterschiedlich sein. Die zusammengesetzte Größe Z ist selbst erneut eine Zufallsvariable.

4.7 Erzeugung von Zufallszahlen auf Basis einer vorgegebenen Verteilung

Computer-Simulationen sind ein wichtiges Hilfsmittel in verschiedensten Bereichen der Wissenschaft, Technik oder auch der Wirtschaft. So können komplexe Fragestellungen der einzelnen Disziplinen mittels Simulationen nach dem Zufallsprinzip (Monte-Carlo-Methode) berechnet werden. Die Idee hierbei ist, repräsentative Stichproben auf Basis einer zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsdichte zu erzeugen [9]. Diese Stichproben können zur Bewertung der jeweiligen Fragestellung herangezogen werden, oder als Grundlage für weitere Überlegungen dienen. In diesem Kapitel wird eine Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen auf Basis einer zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion vorgestellt.

Mittels eines Zufallsgenerators, wird bei jedem Aufruf eine neue Zufallszahl z , die im Intervall von 0 bis 1 gleichverteilt ist, erzeugt. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ weist ebenfalls immer einen Bildbereich zwischen 0 und 1 auf. Setzt man $z = F(x)$, so erhält man zu jeder „gewürfelten“ Zahl z eine entsprechende Zufallszahl x mit der gewünschten Verteilung [9]. Diese Methode wird in der Literatur als Inversionsmethode bezeichnet und mathematisch durch Formel (4.19) beschrieben.

$$x = F^{-1}(z) \quad (4.19)$$

Wählt man also im Intervall von 0 bis 1 eine Zahl, so kann man sie als Wert einer Verteilungsfunktion $F(x)$ interpretieren. Der dazugehörige Wert der Zufallsvariable ist dann die gewünschte Zufallszahl. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist die Existenz der

Umkehrfunktion F^{-1} . In Abbildung 4.13 ist diese Methodik am Beispiel einer Lognormalverteilung grafisch dargestellt.

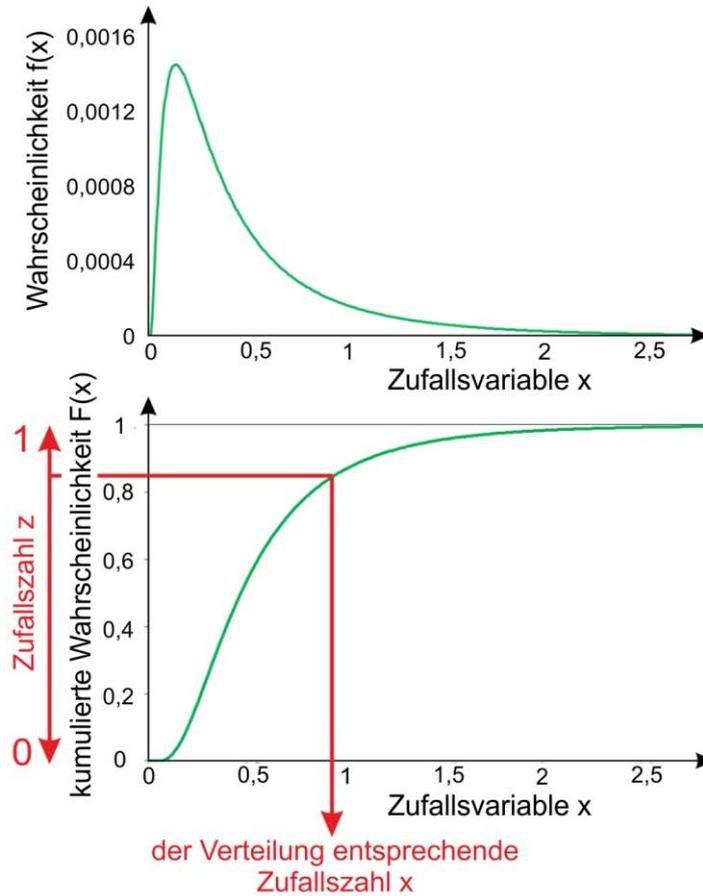


Abbildung 4.13: Schematische Darstellung der Inversionsmethode

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ kann auf die Verteilungsfunktion $F(x)$ geschlossen werden. Auf Basis dieser kann mittels der oben beschriebenen Methodik anhand einer Zufallszahl z eine entsprechende Zahl x generiert werden. Auf diese Weise kann eine beliebige Anzahl an Zahlen erzeugt werden, die einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte entsprechen.

5 Methoden der Leistungsflussrechnung

5.1 Allgemeines

Die Berechnung charakteristischer Parameter wie z.B. der Knotenspannungen und Leiterströme von Netzen und Leitungen im stationären Betrieb erfolgt standardmäßig mittels Leistungsflussberechnungsprogrammen. Unter dem Begriff der Leistungsflussrechnung versteht man die Ermittlung der Wirk- und Blindleistungsflüsse eines elektrischen Netzes aus vorgegebenen Einspeiseleistungen und Bezugsleistungen. Die Kenntnis der ermittelten Lastflüsse ermöglicht der Netzplanung eine Netzgestaltung bezüglich der Auswahl der Leiterquerschnitte [15].

Eine einfache Leistungsflussrechnung liefert folgende Ergebnisse [15], [16]:

- Knotenspannungen und Ströme der Betriebsmittel nach Betrag und Phase
- Wirk- und Blindleistungsflüsse der Leitungen
- Übertragungsverluste seitens der Leitungen und Transformatoren
- Kraftwerkskapazitäten zur Speisung der Lasten

Durch Berechnung verschiedener Last- bzw. Einspeiseszenarien kann das Verhalten des Netzes bei unterschiedlichem Einsatz von Betriebsmitteln untersucht werden. Es werden sowohl Höchstlast- als auch Niedriglastszenarien berücksichtigt [16]. Es können mit der in Kapitel 5.2 beschriebenen Lastflussrechnung somit lediglich Worst-Case Betrachtungen durchgeführt werden. Um zusätzlich Aussagen über die Häufigkeiten der auftretenden Systemzustände zu tätigen, kann auf das Verfahren der in Kapitel 5.3 vorgestellten probabilistischen Lastflussrechnung zurückgegriffen werden.

5.2 Deterministische Leistungsflussberechnung

Für die Berechnung des Strom- bzw. Spannungs-Verhaltens in Drehstromnetzen wird im Allgemeinen ein symmetrischer Aufbau und Betrieb angenommen. Somit ist eine einpolige Nachbildung des Netzes gemäß den Analyseverfahren der symmetrischen Komponenten im Mitsystem möglich. Es handelt sich grundsätzlich um stationäre Berechnungen mit konstanter Netzfrequenz. In vielen Fällen ist die Verwendung der in Kapitel 5.2.2 vorgestellten, sehr aufwendigen Methode der numerischen Lastflussrechnung nicht notwendig. Insbesondere bei der Dimensionierung von Niederspannungsleitungen, die meist als Strahlennetze ausgeführt und betrieben werden, wird daher häufig auf klassische Methoden der Leitungsbemessung zurückgegriffen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Nachbildung der Betriebsmittel. Diese werden durch ihre Ersatzschaltbilder mittels ohmscher, induktiver und kapazitiver Komponenten nachgebildet und je nach Anforderung durch konstante oder geregelte Strom- oder Spannungsquellen ergänzt. Schaltanlagen werden im Allgemeinen als Knoten betrachtet. Eine wesentliche Rolle spielt dabei die Nachbildung der Lasten [16]. Hierauf wird in Kapitel 5.2.1 speziell eingegangen.

5.2.1 Lastarten/Lastverhalten

Die in Energieversorgungsnetzen installierten Verbraucher besitzen meist eine ohmsch-induktive Charakteristik. Verbraucher, bei denen eine Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie erfolgt, werden als „motorische Lasten“ bezeichnet. Alle anderen Verbraucher werden als „ruhende Lasten“ bezeichnet [17]. Hier einzuordnen sind unter anderem Beleuchtungsanlagen, elektronische Geräte, Elektroherde, Elektroöfen oder Durchlauferhitzer.

Treten in Netzgebieten mit großem industriellen Anteil vorwiegend motorische Lasten auf, so handelt es sich bei den auftretenden Lasten in öffentlichen Niederspannungsnetzen meist um Mischlasten. Große motorische Lasten sind in öffentlichen Mittelspannungsnetzen sehr selten und werden zur Unterscheidung als Punktlast bezeichnet. Abbildung 5.1 stellt dies schematisch dar.

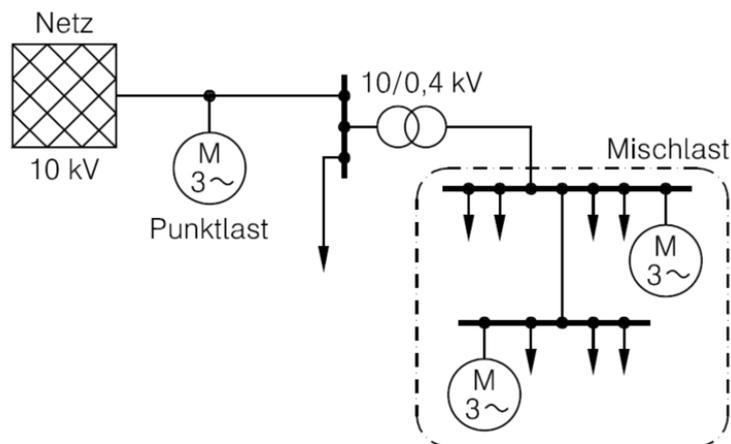


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung von Punkt- bzw. Mischlasten [17]

Mischlasten bestehen sowohl aus ruhenden als auch aus motorischen Verbrauchern. Grundsätzlich weiß man dabei nicht, ob die einzelnen Verbraucher eingeschaltet sind. Zur Kennzeichnung dieser Lasten wird daher die Wirk- bzw. Blindleistung anstelle ihrer Eingangsimpedanzen verwendet.

Die Gesamtleistung wird als Anschlusswert P_A bezeichnet und errechnet sich aus der Summe der Bemessungsleistungen P_N der angeschlossenen Verbraucher [17]. Formel (5.1) stellt diesen Zusammenhang für eine Gesamtanzahl von M Verbrauchern dar.

$$P_A = \sum_{i=1}^M P_{N,i} \quad (5.1)$$

Da nicht alle angeschlossenen Verbraucher im Niederspannungsnetz zur gleichen Zeit ihre volle Anschlussleistung P_A nutzen, ist die tatsächlich auftretende Höchstlast niedriger als die Summe der Anschlusswerte. Dieses Verhalten ist speziell bei Haushalten im Niederspannungsnetz ersichtlich. Mittels des Gleichzeitigkeitsfaktors g wird die Belastung eines Wohngebietes mit der Anzahl von n Wohneinheiten nach Formel (5.2) berechnet [17].

$$P = n \cdot g \cdot P_A \quad (5.2)$$

Der Gleichzeitigkeitsfaktor g stellt dabei den Gleichzeitigkeitsgrad dar. Dieser berücksichtigt die bereits erwähnte Tatsache, dass nicht alle Verbraucher gleichzeitig die volle Anschlussleistung nutzen. Der Gleichzeitigkeitsfaktor ist ein Erfahrungswert, der vom Elektrifizierungsgrad des Netzgebietes, sowie von der Art und Anzahl der Verbraucher abhängt und aus zahlreichen Messungen gewonnen wurde. In der Literatur wird der Gleichzeitigkeitsfaktor in Abhängigkeit der Anzahl der Haushalte n durch Formel (5.3) beschrieben [3].

$$g(n) = g_\infty + (1 - g_\infty) \cdot n^{-\frac{3}{4}} \quad (5.3)$$

Der Faktor g_∞ richtet sich nach dem Elektrifizierungsgrad des Netzgebietes. Hierbei wird unterschieden zwischen schwach elektrifiziert, teilelektrifiziert und vollelektrifiziert.

Die in [3] durchgeführte Untersuchung beschäftigt sich mit der Evaluierung des Gleichzeitigkeitsfaktors, da auf Basis neuer Technologien wie z.B. dem Smart-Metering neue Erkenntnisse bezüglich des Gleichzeitigkeitsfaktors erwartet werden.

Neben der Wirkleistung P wird auch die Blindleistung Q zur Charakterisierung der Lasten herangezogen. Der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ kann ebenfalls aus Erfahrungswerten abgeschätzt werden und es gilt Formel (5.4).

$$Q = P \cdot \tan \varphi \quad (5.4)$$

Die obigen Betrachtungen gelten für Bemessungsverhältnisse der Betriebsmittel. Im Netzbetrieb treten allerdings stationäre Abweichungen von der Bemessungsfrequenz f_N und der Lastbemessungsspannung U_N auf. Dadurch wird die stationäre Leistungsaufnahme der Last beeinflusst. Das Lastverhalten in Abhängigkeit dieser Abweichungen wird in Formel (5.5) für die Wirkleistung P und in Formel (5.6) für die Blindleistung Q beschrieben [17]. Der Index N symbolisiert dabei die Referenzwerte, auch Bemessungswerte oder Nennwerte genannt.

$$P = P(U, f) = P_N \cdot \left(\frac{U}{U_N}\right)^p \cdot \left(\frac{f}{f_N}\right)^{c_P} \quad (5.5)$$

$$Q = Q(U, f) = Q_N \cdot \left(\frac{U}{U_N}\right)^q \cdot \left(\frac{f}{f_N}\right)^{c_Q} \quad (5.6)$$

Die Exponenten p und q bestimmen das Verhältnis der an der Last tatsächlich anliegenden Spannung U zur Bemessungsspannung U_N . Die Exponenten c_P und c_Q berücksichtigen in ähnlicher Weise die Frequenzabhängigkeit. In der Literatur wird folgender Wertebereich für die Exponenten angegeben [17]:

$$0 \leq p \leq 2, \quad 0 \leq q \leq 2, \quad 0 \leq c_P \leq 1, \quad -1 \leq c_Q \leq 1 \quad (5.7)$$

Da die Änderung der Frequenz im Verbundbetrieb sehr gering ist, kann dieser Einfluss meist vernachlässigt werden. Die Spannungsänderungen können hingegen einen empfindlichen Einfluss auf die bezogene Leistung haben [18]. Es werden daher die elektrischen Lasten anhand der Exponenten p und q in folgende Kategorien eingeteilt [17]:

- $p = q = 0 \rightarrow$ Lasten mit konstanter Blind- und Wirkleistungsaufnahme
- $p = q = 1 \rightarrow$ Lasten mit konstantem Wirk- und Blindstrombezug
- $p = q = 2 \rightarrow$ Lasten mit konstanter ohmsch-induktiver Last

Eine konkrete Vorhersage, wie ein Versorgungsgebiet auf eine Spannungsänderung reagiert, ist aufgrund des stochastischen Lastverhaltens sehr schwierig. Untersuchungen diesbezüglich und deren Auswirkungen auf die Einspeisekapazität dezentraler Erzeugungseinheiten in Verteilernetze wurden in [19] durchgeführt. Hier werden Werte für die Exponenten p und q von Haushalten wie folgt angegeben:

- $p = 0,71 - 1,30$
- $q = 2,96 - 4,38$

Bei stark belasteten Netzen sinkt die Netzspannung ab, dadurch gilt für den Quotienten $\left(\frac{U}{U_N}\right) < 1$. Sind die Exponenten p und q positiv, so verringert sich gemäß Formel (5.5) und (5.6) auch die Last, was einen gewissen Selbstregelungseffekt zur Folge hat. Bei der Netzplanung wird dieser positive Effekt allerdings vernachlässigt und man betrachtet die Verbraucherleistung als spannungsunabhängig ($p = q = 0$) [18].

5.2.2 Numerische Leistungsflussberechnung

Eine manuelle Berechnung des Strom- bzw. Spannungs-Verhaltens beschränkt sich allerdings auf kleinere Netzanlagen, da anderenfalls der Rechenaufwand zu groß wird. Bei umfangreicheren Netzen sind numerische Verfahren erforderlich. Mit solchen Verfahren

lassen sich die Leistungsflüsse zwischen den Einspeisungen und den Lasten ermitteln. Für diese Methoden wird dementsprechend der Begriff Leistungsfluss- oder Lastflussrechnung verwendet [17]. Während bei kleineren Problemen der Netzwerktheorie Spannungs- bzw. Stromquellen sowie passive lineare Bauelemente vorgegeben sind, werden bei der Leistungsflussrechnung Lasten nicht als Bauelemente, sondern als konstante Leistungssenken, die aus Lastprognosen oder Messungen bekannt sind, dargestellt [15]. Die angenommenen elektrischen Leistungen führen zu nichtlinearen Gleichungssystemen mit komplexen Variablen und komplexen Matrizen. Auf Basis der Kirchhoff'schen Gesetze können jedoch mathematische Modelle in Form linearer Gleichungssysteme aufgestellt werden.

Durch Anwendung des **Knotenverfahrens** erhält man die unbekannt Knotenspannungen. Aus deren Differenz ergeben sich die Zweigspannungen und über das ohmsche Gesetz lassen sich die Zweigströme berechnen [15].

Als Ergebnis des **Maschenverfahrens** erhält man die Maschenströme, aus deren Addition sich die Zweigströme und über das ohmsche Gesetz die Zweigspannungen ergeben [15].

In kleineren, schwach vermaschten Netzen kommt das Maschenverfahren zum Einsatz, der überwiegende Teil der Berechnungsverfahren beruht allerdings auf dem Knotenverfahren, weshalb hier in weiterer Folge lediglich auf dieses eingegangen wird.

Die Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung werden dabei durch die komplexe Systemadmittanzmatrix \underline{Y} des Netzes bzw. der dazu inversen Impedanzmatrix \underline{Z} gebildet [20].

Abbildung 5.2 stellt ein vermaschtes Netz dar. Die jeweiligen Netzknoten sind durch die zugehörigen Zweigimpedanzen \bar{Z} verbunden.

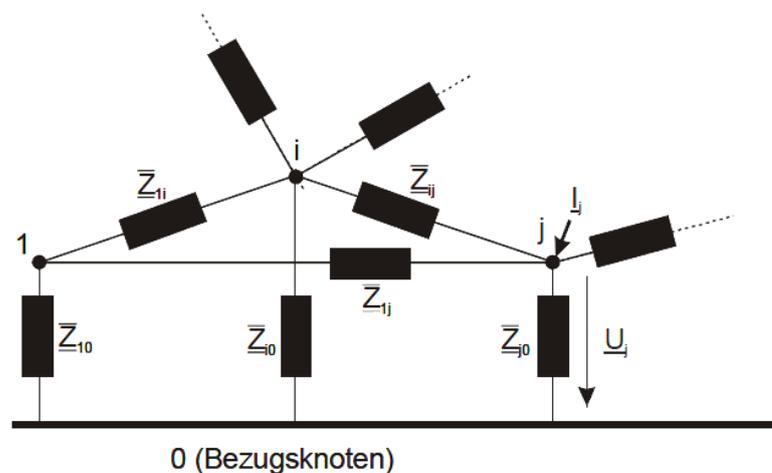


Abbildung 5.2: Netz mit komplexen Zweigimpedanzen \bar{Z} [20]

Die Zusammenhänge der einzelnen Knoten werden durch die Knotenadmittanzmatrix \underline{Y} beschrieben:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \cdots & \underline{Y}_{1i} & \underline{Y}_{1j} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & & \\ \underline{Y}_{1i} & & \underline{Y}_{ii} & & \\ \underline{Y}_{1j} & & & \underline{Y}_{jj} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Die Elemente der Knotenadmittanzmatrix werden dabei aus den Zweigimpedanzen \underline{Z} bzw. Zweigadmittanzen \underline{Y} bestimmt. Dabei wird unterschieden zwischen Eigenadmittanzen und Koppeladmittanzen.

Die **Eigenadmittanzen** \underline{Y}_{ii} stellen die Hauptdiagonale der Admittanzmatrix \underline{Y} dar. Die Eigenadmittanz wird aus der Summe aller am jeweiligen Knoten anliegenden Admittanzen gebildet. Formel (5.9) stellt diesen Zusammenhang dar.

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_j \frac{1}{\underline{Z}_{ij}} \quad (5.9)$$

Die **Koppeladmittanzen** \underline{Y}_{ij} stellen die Elemente der Nebendiagonalen dar. Die Koppelimpedanz ist die negative Zweigadmittanz zwischen zwei Knoten. Dies wird in Formel (5.10) gezeigt.

$$\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{ji} = -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}} \quad (5.10)$$

Die Berechnung der Ströme \underline{I} bzw. Spannungen \underline{U} erfolgt mittels des in Formel (5.11) und Formel (5.12) beschriebenen Zusammenhanges.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \cdots & \cdots & \underline{Y}_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \underline{Y}_{41} & \cdots & \cdots & \underline{Y}_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \cdots & \cdots & \underline{Y}_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \underline{Y}_{41} & \cdots & \cdots & \underline{Y}_{44} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Sind sowohl Knotenspannungen \underline{U} als auch Knotenströme \underline{I} gegeben, erfolgt eine Partitionierung der Admittanzmatrix \underline{Y} und die Bildung der Hybridmatrix \underline{H} . Die Partitionierung der Admittanzmatrix \underline{Y} ist in Abbildung 5.3 dargestellt [20].

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_M \\ \vdots \\ \underline{I}_{M+1} \\ \vdots \\ \underline{I}_{M+N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \dots & \underline{Y}_{1,M} & \underline{Y}_{1,M+1} & \dots & \underline{Y}_{1,M+N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Y}_{M,1} & \dots & \underline{Y}_{M,M} & \underline{Y}_{M,M+1} & \dots & \underline{Y}_{M,M+N} \\ \underline{Y}_{M+1,1} & \dots & \underline{Y}_{M+1,M} & \underline{Y}_{M+1,M+1} & \dots & \underline{Y}_{M+1,M+N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Y}_{M+N,1} & \dots & \underline{Y}_{M+N,M} & \underline{Y}_{M+N,M+1} & \dots & \underline{Y}_{M+N,M+N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_M \\ \vdots \\ \underline{U}_{M+1} \\ \vdots \\ \underline{U}_{M+N} \end{pmatrix}$$

Abbildung 5.3: Partitionierung der Admittanzmatrix \underline{Y} [20]

Die einzelnen Partitionen der Admittanzmatrix werden in Formel (5.13) zusammengefasst und können in die Hybridmatrix umgeformt werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{AA} & \underline{Y}_{AB} \\ \underline{Y}_{BA} & \underline{Y}_{BB} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Formel (5.14) stellt die Hybridmatrix dar, wobei die einzelnen Elemente gemäß Formel (5.15) bis (5.18) berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{U}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{AA} & \underline{H}_{AB} \\ \underline{H}_{BA} & \underline{H}_{BB} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{I}_B \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\underline{H}_{AA} = \underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} \cdot \underline{Y}_{BB}^{-1} \cdot \underline{Y}_{BA} \quad (5.15)$$

$$\underline{H}_{AB} = \underline{Y}_{AB} \cdot \underline{Y}_{BB}^{-1} \quad (5.16)$$

$$\underline{H}_{BA} = -\underline{Y}_{BB}^{-1} \cdot \underline{Y}_{BA} \quad (5.17)$$

$$\underline{H}_{BB} = -\underline{Y}_{BB}^{-1} \quad (5.18)$$

Die bisherigen Betrachtungen gehen von der Annahme bekannter Knotenströme aus und führten zu linearen Gleichungssystemen. Die Knotenströme \underline{I} stehen in der Regel jedoch

nicht zur Verfügung, da sie von der spannungs- (und frequenz-) abhängigen Stromaufnahme der Lasten abhängen und die Knotenspannungen zu Beginn nicht bekannt sind. Deshalb werden diese zunächst aus den bekannten Knotenleistungen und einem Schätzwert für die jeweiligen Knotenspannungen berechnet. Im Gegensatz zu den Berechnungen mit bekannten Knotenströmen sind die Leistungsflussgleichungen nichtlinear [15]. Das nichtlineare Gleichungssystem wird demnach iterativ gelöst.

In der modernen Leistungsflussrechnung kommen die Gauß-Seidel-Iteration und vorrangig das Newton-Raphson-Verfahren zur Anwendung. Die beiden Verfahren unterscheiden sich hinsichtlich des Programmieraufwandes. So hat das Gauß-Seidel-Verfahren vergleichsweise einen geringen Programmieraufwand, liefert allerdings mit wachsender Knotenanzahl schlechtere Ergebnisse. Da das Newton-Raphson-Verfahren unabhängig von der Systemgröße nach 4 – 5 Iterationsschritten zur Lösung führt, arbeiten leistungsfähige Programme mit dem Newton-Raphson-Algorithmus [15].

Abschließend wird der Umgang mit unterschiedlichen Netzknoten behandelt. Jeder Netzknoten kann durch vier Größen charakterisiert werden:

- Wirkleistung P
- Blindleistung Q
- Betrag der Phasenspannung $|\underline{U}|$
- Phasenwinkel δ

In jedem Netzknoten sind zwei der genannten Größen bekannt, die anderen beiden werden gesucht. Im Wesentlichen unterscheidet man drei Arten von Netzknoten. Tabelle 5.1 fasst diese zusammen.

Tabelle 5.1: Arten der Netzknoten [15]

Knotenart	Gegeben	Gesucht
Lastknoten: (P-, Q-Knoten, ca.80 % bis 90 % aller Knoten)	+P, +Q _{ind} oder -Q _{kap}	$ \underline{U} , \delta$
Speiseknoten: (Generatorknoten, spannungsgeregelter Knoten)	-P, $ \underline{U} $	Q, δ
Bilanzknoten: (Slack-Knoten, Swing-Knoten, Bezugsknoten)	$ \underline{U}_1 , \delta_1=0$	P, Q

Grundsätzlich wird ein Einspeiseknoten als **Bilanzknoten** definiert. Es wird üblicherweise die Sammelschiene eines leistungsstarken Kraftwerkes gewählt. In diesem Knoten ist der Spannungsbetrag gegeben und der Phasenwinkel der Spannung wird gleich 0 gesetzt. In allen anderen **Speiseknoten** sind die Spannungsbeträge und die Wirkleistungen gegeben. In den **Lastknoten** sind Wirkleistung und Blindleistung durch die Lasten festgelegt und können in erster Näherung als konstant angenommen werden.

5.3 Probabilistische Leistungsflussberechnung

Die in Kapitel 5.2 vorgestellte, deterministische Leistungsflussberechnung stellt das heutige Standardwerkzeug zur Berechnung eines elektrischen Energiesystems dar. Diese Methode ermöglicht allerdings keine Aussagen über die zu erwartende Häufigkeit und der damit verbundenen Wahrscheinlichkeit des Auftretens verschiedener Systemzustände zu tätigen. Hier werden deterministische Eingangsgrößen zu deterministischen Ausgangsgrößen zugeordnet. Es wird also die Wahrscheinlichkeit der Variablen mit 1 festgelegt [15].

In [21] wird eine Übersicht über Alternativansätze zur deterministischen Lastflussrechnung gegeben, wobei diese zeigt, dass sämtliche Literaturstellen aus dem Bereich der Hochschul- bzw. Institutsforschung stammen. Daraus lässt sich ableiten, dass in der Vergangenheit noch kein wirtschaftliches Interesse bei Netzbetreibern bzw. Energieversorgern für eine Anwendung alternativer Netz-Berechnungsverfahren bestanden hat. Die deterministische Lastflussrechnung stellt seit Jahrzehnten einen bewährten Ansatz zur Einhaltung diverser Normen dar. Der hohe Versorgungsstandard steht allerdings in Verbindung mit hohen Investitionskosten und somit gewinnen alternative Ansätze mehr an Bedeutung.

Die probabilistische Leistungsflussberechnung bietet Möglichkeiten, Aussagen über die Häufigkeit einzelner Systemzustände zu tätigen. Dabei werden die Eingangsgrößen als stochastische Zufallsgrößen in Form von Wahrscheinlichkeitsdichten definiert. Auf Basis dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen kann eine Leistungsflussrechnung durchgeführt werden. Die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bestimmt die Qualität der Berechnung. Eine Methode zur Bestimmung charakteristischer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wird in Kapitel 7.3 vorgestellt.

Die Leistungsflussrechnung kann mittels der in Kapitel 4.6 vorgestellten Methode der Faltung von Zufallsvariablen durchgeführt werden, oder durch eine Monte-Carlo-Simulation angenähert werden. In dieser Arbeit findet die zweitgenannte Methode Anwendung und wird in Kapitel 5.3.1 vorgestellt. Das Ergebnis der probabilistischen Leistungsflussberechnung ist ein Satz von Wahrscheinlichkeitsdichten für Ausgangsgrößen wie die Knotenspannungen, Leitungsströme und Leistungsflüsse. Es lassen sich so Aussagen treffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit thermische Überlastungen zu erwarten sind und Knotenspannungen außerhalb des vorgegebenen Spannungsbandes liegen [15]. Auf Basis dieser Informationen können bestehende Netzgebiete evaluiert und zukünftige Netzgebiete hinsichtlich ihrer Auslegung dimensioniert werden.

5.3.1 Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode stellt ein Werkzeug zur Lösung komplexer, numerischer Probleme dar. Das Grundprinzip dieser Methode ist das mehrfache Durchführen deterministischer Berechnungen. Dabei werden die einzelnen deterministischen Werte durch das Ziehen von Zufallsstichproben aus bekannten Verteilungen generiert. Das Generieren solcher Zufallsstichproben auf Basis von gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichten erfolgt nach der in Kapitel 4.7 vorgestellten Inversionsmethode. Somit ist die Monte-Carlo-Analyse eine stochastische Methode, die sich auch zur Simulation zufälliger Vorgänge eignet.

Die Monte-Carlo-Analyse wird häufig zur Simulation von mathematischen, physikalischen oder technischen Systemen herangezogen, insbesondere dann, wenn deterministische Algorithmen zu aufwendig oder gar nicht möglich sind [9]. Klassische Anwendungsbeispiele der Monte-Carlo-Methode sind die Bestimmung des Flächeninhalts verschiedenster Polygone oder die mathematische Näherung der irrationalen Zahl π .

Bei der konkreten Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf die probabilistische Leistungsflussberechnung handelt es sich um das wiederholte Durchführen deterministischer Leistungsflussberechnungen. Dabei werden in jedem Durchlauf einzelne Lasten in Form von konstanten Leistungen, auf Basis der für das entsprechende Netzgebiet und dem entsprechenden Zeitintervall ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, generiert.

Um die Güte einer Monte-Carlo-Simulation definieren zu können, kann Formel (5.19) herangezogen werden. Diese liefert einen Schätzwert, wie viele Wiederholungen n einer Berechnung notwendig sind, um eine bestimmte Genauigkeit ε zu erreichen [12].

$$n \geq \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\varepsilon^2} \quad (5.19)$$

Der Parameter $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ stellt dabei das $1 - \frac{\alpha}{2}$ – Quantil der Standardnormalverteilung dar, wobei α die Irrtumswahrscheinlichkeit angibt. Für eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0,1$ und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ ($z_{0,975} = 1,96$) müssen demnach $n \geq 385$ Berechnungen durchgeführt werden. Um bei gleicher Genauigkeit eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ ($z_{0,995} = 2,58$) zu erreichen, müssen $n \geq 666$ Berechnungen durchgeführt werden. Um ein genaueres Ergebnis ($\varepsilon = 0,01$) bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ zu ermitteln, sind allerdings schon $n \geq 38416$ Berechnungen notwendig.

6 Lastprofile

Lastprofile werden herangezogen, um den Energiebezug einzelner Verbraucher abzuschätzen. Diese Abschätzung stellt die Basis der Bilanzierung bzw. Abrechnung von Endverbrauchern dar. Im folgenden Kapitel wird zunächst der Umgang mit Standardlastprofilen erläutert, um in weiterer Folge mögliche Abweichungen zum tatsächlichen Lastprofil einer bestimmten Region aufzuzeigen. Abschließend werden Publikationen vorgestellt, die sich mit der Erstellung von Lastprofilen auf Basis von Smart-Meter-Messdaten auseinandersetzen.

6.1 Standardlastprofile

Für Endverbraucher, die weniger als 100.000 kWh Jahresenergiebezug oder weniger als 50 kW Anschlussleistung aufweisen, müssen laut EIWOG § 18 (2) [1] Lastprofile erstellt werden. Die Basis für die vom Bilanzgruppenkoordinator (APCS – Austrian Power Clearing & Settlement) jährlich zur Verfügung gestellten Lastprofile, bilden dabei die vom Verband der Elektrizitätswirtschaft VDEW (seit 2007 Bundesverband der Energie- und Wasserwirtschaft BDEW) publizierte Standardlastprofile [22].

Standardlastprofile (SLP) stellen das dem Stand der Technik entsprechende Werkzeug zur Abschätzung des Energiebedarfs verschiedener Verbrauchergruppen dar. Das Standardlastprofil gibt den zu erwartenden Verlauf des Leistungsbedarfs der entsprechenden Verbrauchergruppe wieder. Dieses ist jedoch erst ab einer Anzahl von mehr als 150 Verbrauchern statistisch gültig [23].

Der Energiebezug einzelner Verbraucher wird in der Regel in einem jährlichen Intervall abgelesen. Das Standardlastprofil ermöglicht dem Energieversorger, auf Basis des Jahresenergiebezugs, den viertelstündlichen Energiebedarf seiner Kunden in einem Netzgebiet abzuschätzen.

Die Standardlastprofile sind normiert auf einen Jahresenergiebezug von 1000 kWh. Das Energieversorgungsunternehmen hält demnach jedem Kunden (Verbraucher) der entsprechenden Verbrauchergruppe die auf Basis des Standardlastprofils nach Formel (6.1) berechnete Leistung P bereit [4].

$$P = \frac{SLP \cdot W_{vor}}{1000 \text{ kWh}} \quad (6.1)$$

Der Parameter SLP stellt dabei den Leistungswert des entsprechenden Standardlastprofils dar. Dieser wird mit dem Jahresenergiebezug des Vorjahres W_{vor} multipliziert und durch den Faktor 1000 kWh dividiert.

Standardlastprofile stehen für drei verschiedene Kundengruppen zur Verfügung. Es wird bei den Profiltypen zwischen landwirtschaftlichen Betrieben (L), Gewerben (G) und Haushalten (H) unterschieden. Für die Kundengruppe der landwirtschaftlichen Betriebe und der Gewerbe steht zwar ein generelles Profil (L0 bzw. G0) zur Verfügung, es können jedoch noch genauere Spezifikationen getätigt werden. Für landwirtschaftliche Betriebe stehen zwei unterschiedliche Profiltypen zur Verfügung und für Gewerbe unterscheidet man zwischen sechs Typen. Die Verbrauchergruppe der Haushalte wird nicht genauer spezifiziert und es gibt demnach nur einen Profiltyp für Haushalte (H0) [4].

Es werden zusätzlich drei Verbrauchsperioden unterschieden. Diese sind Sommer, Winter und Übergangszeit. Tabelle 6.1 stellt die jeweiligen Perioden dar.

Tabelle 6.1: Definition der Verbrauchsperioden [4]

Verbrauchsperiode	Beginn	Ende
Winter	1. November	20. März
Sommer	15. Mai	14. September
Übergangszeit 1	21. März	14. Mai
Übergangszeit 2	15. September	31. Oktober

Zusätzlich wird die Art der Tage in Werktag, Samstag und Sonntag in den Lastprofilen unterschieden. Somit ergeben sich 9 Typtage, wobei für jeden Typtag ein Lastprofil zur Verfügung steht. Die Standardlastprofile des BDEW für die jeweiligen Verbrauchsperioden und Tagesarten werden in Abbildung 6.1, Abbildung 6.2 und Abbildung 6.3 für den Profiltyp Haushalt (H0) dargestellt.

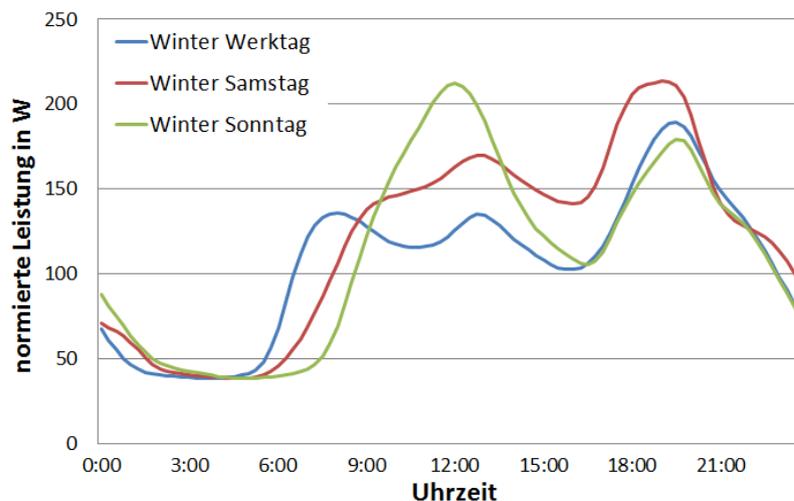


Abbildung 6.1: normierte Standardlastprofile (H0) der Verbrauchsperiode Winter für Werktag, Samstag und Sonntag [24]

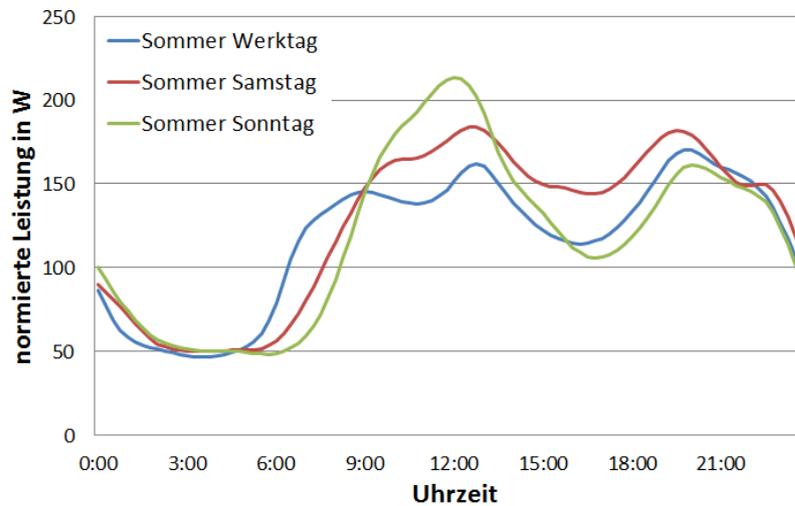


Abbildung 6.2: normiertes Standardlastprofil (H0) der Verbrauchsperiode Sommer für Werktag, Samstag und Sonntag [24]

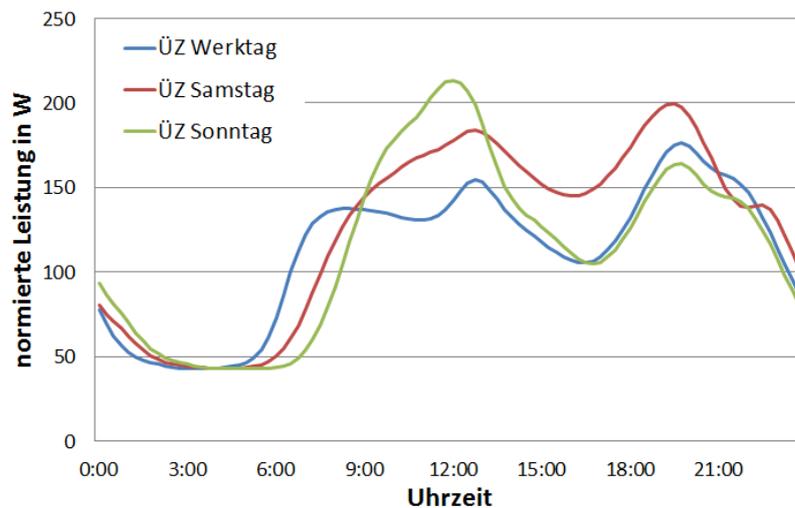


Abbildung 6.3: normiertes Standardlastprofil (H0) der Verbrauchsperiode Übergangszeit für Werktag, Samstag und Sonntag [24]

Aus den normierten Standardlastprofilen ist deutlich ersichtlich, dass während der Nachtstunden ein erheblich niedriger Energiebedarf besteht. Charakteristisch sind auch die Mittagsspitzen an Sonntagen (grüne Kurven) sowie die Abendspitzen, die an Samstagen am stärksten ausgeprägt sind (rote Kurven).

Das Standardlastprofil für Haushalte (H0) wird zusätzlich dynamisiert, um die unterschiedlich hohen Energieverbräuche von Sommer und Winter zu berücksichtigen. Die Dynamisierungsfunktion ordnet jedem Tag d des Jahres einen Dynamisierungsfaktor $DF(d)$ zu. Mit diesem Faktor werden die Leistungswerte des entsprechenden Tages multipliziert.

Die Dynamisierungsfunktion ist durch das in Formel (6.2) beschriebene Polynom 4. Grades charakterisiert [25].

$$DF(d) = a_4 \cdot d^4 + a_3 \cdot d^3 + a_2 \cdot d^2 + a_1 \cdot d + a_0 \quad (6.2)$$

Die einzelnen Koeffizienten besitzen folgende Werte:

$$a_4 = -3,92 \cdot 10^{-10}; \quad a_3 = 3,2 \cdot 10^{-7}; \quad a_2 = -7,02 \cdot 10^{-5}; \quad a_1 = 2,1 \cdot 10^{-3}; \quad a_0 = 1,24$$

Bei der Dynamisierungsfunktion wird unterschieden, ob es sich um ein Schaltjahr (366 Tage) oder ein Gemeinjahr (365 Tage) handelt. Abbildung 6.4 stellt die Dynamisierungsfunktion eines Gemeinjahres dar.

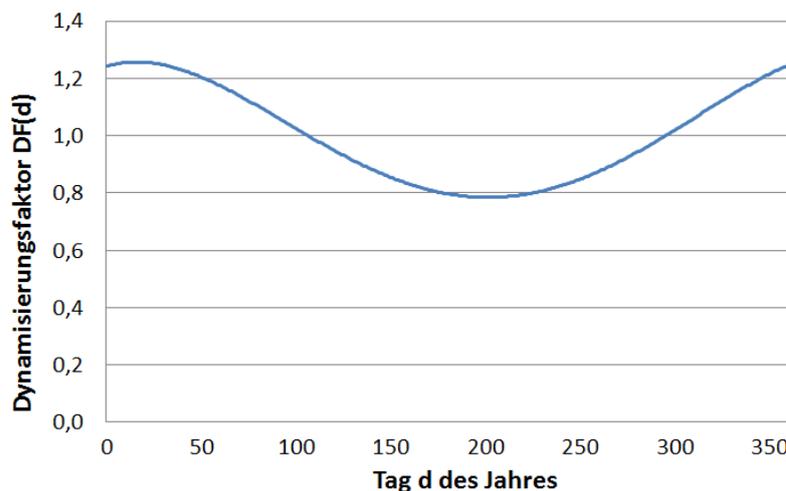


Abbildung 6.4: Dynamisierungsfunktion des Gemeinjahres [25]

Die Dynamisierungsfunktion berücksichtigt dabei, dass der Energiebezug während den Wintermonaten höher ($DF > 1$) und in den Sommermonaten niedriger ($DF < 1$) ist. Gemittelt über das ganze Jahr ergibt sich der Dynamisierungsfaktor zu eins.

6.2 Lastprofile aus Smart-Meter-Daten

Die in Kapitel 6.1 beschriebenen Standardlastprofile stellen synthetische Lastprofile dar. Ein synthetisches Lastprofil ist ein aus gemessenen Lastgängen gewonnenes und mit Hilfe von Durchmischung verschiedener Verbrauchertypen verallgemeinertes Lastprofil. Die Standardlastprofile weisen allerdings vertikale und horizontale Abweichungen vom tatsächlichen Verbrauch einer bestimmten Region auf. Diese sind größtenteils auf geografische Unterschiede zurückzuführen [26]. Die Datenerhebung des VDEW erfolgte

Mitte der 1980er Jahre [23], weshalb auch aufgrund der fehlenden Aktualität Abweichungen vom tatsächlichen Energiebedarf eines Verbraucherkollektives auftreten. Abbildung 6.5 stellt schematisch mögliche Abweichungen vom Standardlastprofil dar.

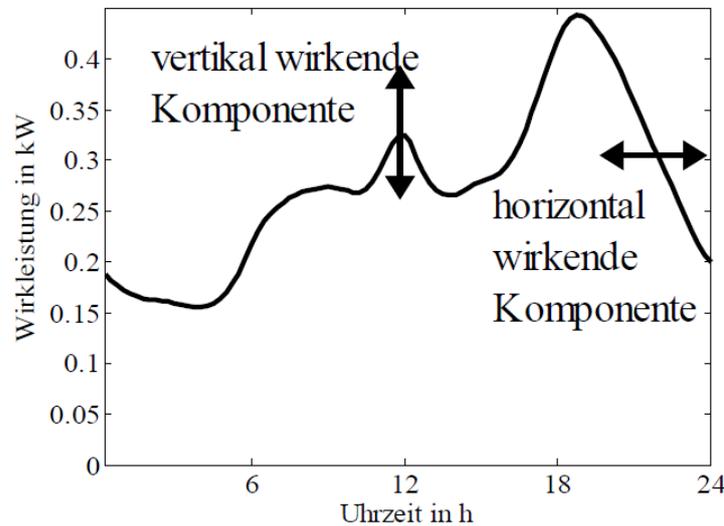


Abbildung 6.5: Abweichungen vom Standardlastprofil [26]

Die in Abbildung 6.5 dargestellten Abweichungen vom Standardlastprofil bestehen aus einer vertikalen und horizontalen Komponente. Die vertikalen Abweichungen sind unter anderem auf Temperaturunterschiede einzelner Regionen, die geografisch und meteorologisch unterschiedlichen Bedingungen unterliegen, zurückzuführen. Die horizontale Komponente hängt sehr stark von der Alters- und Sozialstruktur der Bevölkerung in der jeweiligen Region, sowie von unterschiedlichen Sonnen-Auf- bzw. Untergangszeiten ab [26].

Die Leistungsbedarfsabschätzung einzelner Haushalte erfolgt auf Basis der VDEW-Standardlastprofile anhand Formel (6.1). Hier wird die Beziehung zwischen bezogener Energie über ein längeres Zeitintervall und maximal auftretender Leistung als linear angenommen. In [5] wird die Beziehung zwischen dem Haushaltsenergiebezug und dem Maximum der elektrischen Leistung innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls untersucht und dabei widerlegt, dass ein linearer Zusammenhang zwischen elektrischer Energie und elektrischer Leistung eines Haushaltes besteht.

Durch die flächendeckende Installation von Smart-Metern steht zukünftig eine große Menge an Messdaten von Haushaltslasten zur Verfügung. Einige wissenschaftliche Publikationen liefern bereits erste Ansätze zur Entwicklung von Standardlastprofilen auf Basis von Smart-Meter-Messdaten. In [3] wird dabei ein Ansatz verfolgt, der es ermöglicht, Standardlastprofile für bestimmte Kundengruppen zu erstellen und regionale Besonderheiten im Vergleich mit den VDEW-Standardlastprofilen abzuleiten. Auch in [4] wird eine Methodik zur Erstellung von Lastprofilen aus Smart-Meter-Messdaten vorgestellt, wobei hier speziell auf den Umgang mit lückenhaften Smart-Meter-Messdaten eingegangen wird.

Teil B: Praktische Umsetzung

7 Smart-Meter Datenanalyse

7.1 Allgemeines

Die Installation von intelligenten Energiezählern (Smart-Metern) ermöglicht es, den Energiebezug von Verbrauchern (Haushalt, Gewerbe, Industrie, ...) in definierten Zeitintervallen zu dokumentieren. Bisher wurde die bezogene elektrische Energie in Haushalten mittels Ferraris-Zählern fortlaufend gemessen und zumeist nur jährlich festgehalten.

Smart-Meter messen den viertelstündlichen Energiebezug und sind in der Lage, diesen in Registern zu speichern. Die Messdaten werden ausgelesen, oder bei vorhandener Internetverbindung in Datenbanken gespeichert. Dadurch entstehen vielseitige Möglichkeiten zur Auswertung und Analyse dieser Messdaten [3], [4], [5].

In diesem Kapitel wird eine Methode zur Auswertung und Analyse von Smart-Meter-Messdaten vorgestellt. Zunächst wird der in dieser Arbeit zugrundeliegende Datenpool an Messwerten erläutert. Anschließend wird auf die Methode zur Auswertung und Analyse der Smart-Meter-Messdaten eingegangen. Abschließend werden die Ergebnisse der Analyse präsentiert und diskutiert.

7.2 Datenpool

Die in dieser Arbeit zugrundeliegenden Smart-Meter-Messwerte wurden dem Institut für Elektrische Anlagen der Technischen Universität Graz in anonymisierter Form zur Verfügung gestellt. Die Datenreihen enthalten keine Informationen über Namen, Adressen oder Zählpunktnummern. Ein Rückschluss auf die Herkunft der einzelnen Datenreihen ist somit nicht möglich, dies entspricht den in Kapitel 3 erörterten Datenschutzbestimmungen.

Bei den zur Verfügung stehenden Messdaten handelt es sich um viertelstündliche Aufzeichnungen von ausschließlich in Haushalten installierten Smart-Metern. Es handelt sich hierbei um Energiewerte in kWh, wobei für jeden Haushalt i (Zähler, Smart-Meter) je ein Matrix der Energiewerte sowie der zugehörigen Zeitpunkte existiert. Jeder Haushalt i wird mit einer durch Zufallszahlen generierten, neu erstellten Bezeichnung Haushalt i versehen. Es gilt: $i \neq i'$

Tabelle 7.1 stellt die Matrix für den Haushalt i schematisch dar.

Tabelle 7.1: Datenvektoren je Haushalt (Beispiel)

Haushalt i	
Datum/Zeit	Zählerstand in kWh
⋮	⋮
'16.12.2013 11:30:00'	139,1380
'16.12.2013 11:45:00'	139,1460
'16.12.2013 12:00:00'	139,1540
'16.12.2013 12:15:00'	139,1780
⋮	⋮

Somit kann jedem Haushalt ein Energiewert zu jeder Viertelstunde der zur Verfügung stehenden Tage zugeordnet werden.

Da die Smart-Meter in den jeweiligen Haushalten zu unterschiedlichen Zeitpunkten installiert bzw. in Betrieb genommen wurden, beginnen die Datenreihen der einzelnen Haushalte zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Aus diesem Grund spielt der zu jedem Haushalt gehörige Zeitvektor in der weiteren Verarbeitung der Daten eine wesentliche Rolle. Allgemein stehen Aufzeichnungen im Zeitraum von Dezember 2013 bis April 2014 zur Verfügung.

Die Daten stammen von Haushalten aus städtischen Bereichen, wobei eine Zuordnung der einzelnen Haushalte zu drei Transformatoren möglich ist. Abbildung 7.1 stellt die Zuordnung der Haushalte zu den jeweiligen Transformatoren in einem städtischen Gebiet schematisch dar.

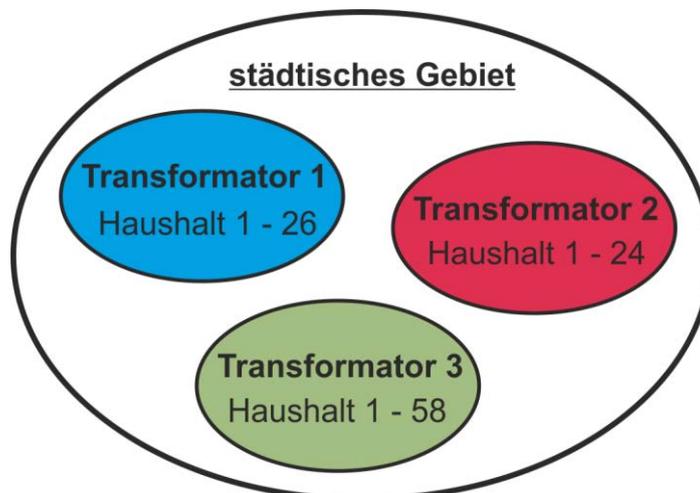


Abbildung 7.1: Zuordnung der Haushalte zu den zugehörigen Transformatoren

Aus Abbildung 7.1 wird ersichtlich, dass den einzelnen Transformatoren eine unterschiedliche Anzahl an Haushalten zugeordnet ist. Im Gebiet des Transformators 1 stehen Messreihen von 26 Haushalten zur Verfügung, bei Transformator 2 von 24 Haushalten und von Transformator 3 stehen Messreihen von 58 Haushalten bereit.

Um ein möglich breites Spektrum an verschiedenen Haushalten zu analysieren, werden in der weiteren Auswertung die Daten aller Haushalte zusammengefasst und die Zugehörigkeit zu den einzelnen Transformatoren nicht berücksichtigt. Somit stehen insgesamt 108 Haushalte für die Auswertung zur Verfügung.

7.3 Methode

Die im Folgenden vorgestellte Methode zur Auswertung und Analyse von Smart-Meter-Messdaten ermöglicht es, für jedes Viertelstunden-Intervall eines definierten Typtages eine statistische Verteilung der auftretenden Leistungswerte bereit zu stellen. Diese beschreibt das Lastverhalten des untersuchten Netzgebietes für das jeweilige Zeitintervall. Als Typtage werden zu Vergleichszwecken die in Kapitel 6.1 vorgestellten Typtage der Standardlastprofile herangezogen.

Folgende statistischen Verteilungsmodelle können das Lastverhalten von Haushalten beschreiben [5]:

- Weibull Verteilung
- Lognormal Verteilung
- Inverse Gauss Verteilung
- Log-Logistische Verteilung
- Verallgemeinerte Extremwertverteilung
- Birnbaum Saunders Verteilung
- Beta Verteilfunktion

Die Untersuchung von statistischen Verteilungen zur Beschreibung des Lastverhaltens von Haushalten wurde in [5] durchgeführt. Das Ergebnis dieser Untersuchung zeigt, dass die Lognormale Verteilfunktion in den Wintermonaten das Lastverhalten am besten annähert. Dies ist darauf zurück zu führen, dass in den Wintermonaten die Summenlast vergleichsweise hoch ist. Auch an einigen Sonntagen der Übergangszeit beschreibt die Lognormalfunktion das Lastverhalten am besten. In den Sommermonaten ist die Summenlast geringer, weshalb die Lognormale Verteilungsfunktion in dieser Verbrauchsperiode seltener auftritt. Hier kann vor allem die Verallgemeinerte Extremwertverteilung zur Beschreibung der Haushaltslasten herangezogen werden [5].

Die in dieser Diplomarbeit zugrunde liegenden Messdaten sind vor allem der Verbrauchsperiode Winter zuzuordnen. Somit wird in dieser Arbeit die Lognormale Verteilfunktion zur Beschreibung der Haushaltslasten herangezogen. Die Auswertung der Daten, sowie die Bestimmung der Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für jedes Viertelstunden-Intervall wird somit für die Verbrauchsperiode Winter durchgeführt.

Im ersten Schritt werden aus den für jeden Haushalt zur Verfügung stehenden Energiewerten E viertelstündliche Leistungsmittelwerte \bar{P} errechnet. Diese werden im zweiten Schritt den entsprechenden Zeitintervallen der einzelnen Typtage zugeordnet. Auf Basis dieser Zuordnung können die Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Lognormalverteilung bestimmt werden.

7.3.1 Ermittlung der Leistungswerte

Die Messreihen der Smart-Meter stehen in Form von viertelstündlichen Energiewerten, wie in Tabelle 7.1 dargestellt, in Excel-Sheets zur Verfügung. Diese werden mittels der Software MATLAB[®] eingelesen und ausgewertet.

Aus dem viertelstündlichen Energiebezug in kWh jedes Haushaltes wird für jedes Viertelstunden-Intervall t ein gemittelter Leistungswert in W gemäß Formel (7.1) errechnet.

$$\bar{P}(t) = \frac{E(t+1) - E(t)}{1/4} \cdot 1000 \quad (7.1)$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ berücksichtigt dabei die Mittelung der Leistung über das Intervall von 15 Minuten und über den Faktor 1000 erfolgt die Umrechnung in W. Die Auswertung der Leistungswerte in Watt hat in der weiteren Verarbeitung der Daten Vorteile, die sich in der Berechnung bzw. Interpretation der Parameter der Lognormalfunktion bemerkbar machen. Verwiesen sei hier darauf, dass der Logarithmus einer Zahl kleiner 1 negativ ist und dementsprechend Leistungswerte bis 1000 W bei ihrer Darstellung in kW Werte kleiner 1 annehmen.

Die viertelstündlich gemittelten Leistungswerte eines ausgewählten Haushaltes sind in Abbildung 7.2 für einen Zeitraum von einer Woche dargestellt. Der Tag 1 stellt dabei einen Montag dar. Tag 2 der Woche ist demnach der Dienstag, bis hin zu Tag 7, der den Sonntag repräsentiert.

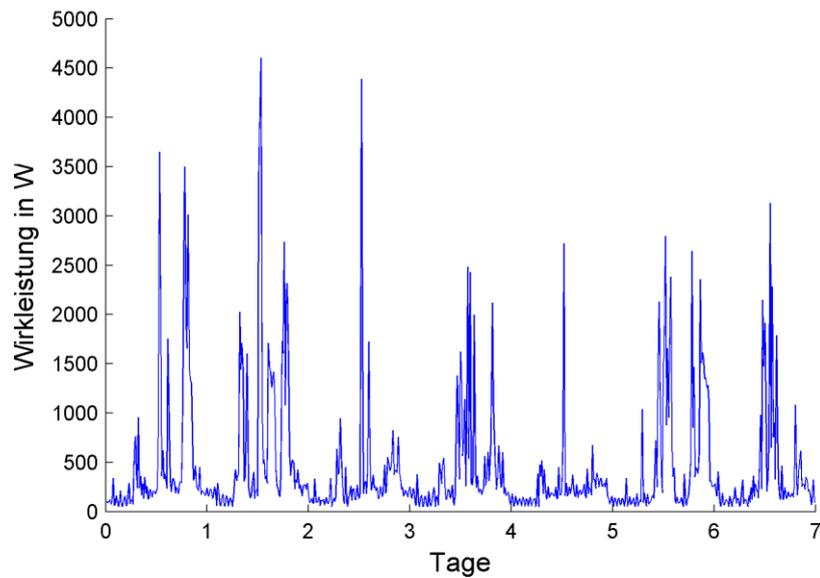


Abbildung 7.2: Leistungswerte eines ausgewählten Haushaltes für den Zeitraum von einer Woche

Aus dem in Abbildung 7.2 dargestellten Wochenlastgang lässt sich die tägliche Periodizität der Werte erkennen. Ein Tag besteht aus 96 Viertelstunden-Intervallen, demnach ergeben sich für eine Woche 672 Leistungswerte.

Bei 27 der insgesamt 108 Smart-Meter handelt es sich um Nachtstromzähler. Abbildung 7.3 stellt die gemittelten Leistungswerte eines Nachtstromzählers für einen Zeitraum von einer Woche (672 Viertelstunden-Intervalle) dar.

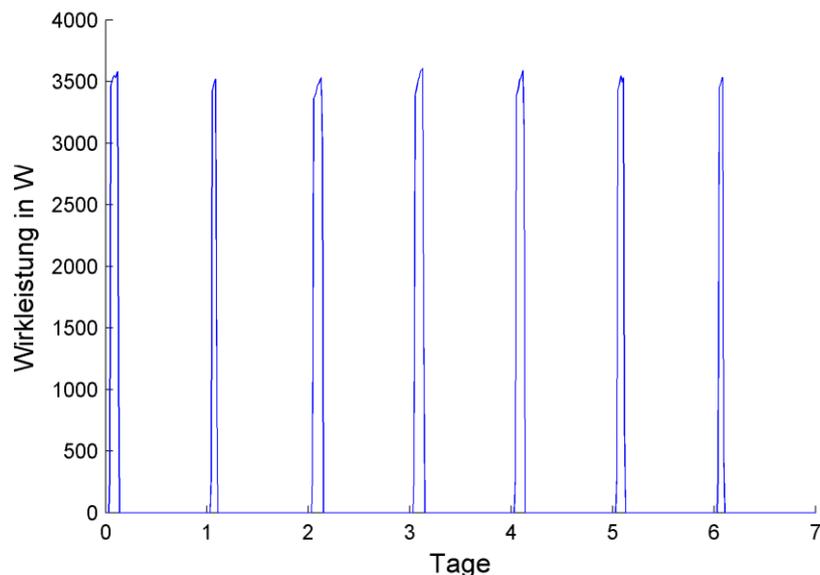


Abbildung 7.3: Leistungswerte eines Nachtstromzählers für den Zeitraum von einer Woche

Aus Abbildung 7.3 wird ersichtlich, dass im Falle eines Nachtstromzählers lediglich Leistungswerte für kurze Zeitintervalle zu einer bestimmten Uhrzeit nach 00:00 Uhr zur Verfügung stehen und den anderen Zeitintervallen ein Leistungswert von Null zugeordnet ist.

Die Daten dieser Smart-Meter (Nachtstromzähler) werden in der weiteren Auswertung nicht berücksichtigt. Somit reduziert sich die Anzahl der auszuwertenden Haushalte auf 81. Für den oben genannten Zeitraum von 4 Monaten stehen demnach ca. 880 000 Leistungswerte zur Auswertung zur Verfügung.

7.3.2 Zuordnung und Klassifizierung der Leistungswerte

Die einzelnen Tageslastgänge (96 gemittelte Viertelstunden-Leistungswerte eines Tages) der verfügbaren Haushalte werden im nächsten Schritt den einzelnen Typtagen zugeordnet. Diese lauten wie folgt:

- Winter Werktag
- Winter Samstag
- Winter Sonntag

Dem Typtag „Winter Werktag“ werden beispielsweise die Tageslastgänge aller verfügbaren Haushalte der Werktage Montag bis einschließlich Freitag im Zeitraum von 1. November bis 20. März (entsprechend den Verbrauchsperioden aus Tabelle 6.1) zugeordnet. Die Zuordnung der Tageslastgänge ergibt für jeden Typtag eine Matrix mit Leistungswerten. Tabelle 7.2 stellt schematisch den Aufbau der Matrix der Leistungswerte für den Typtag „Winter Werktag“ dar.

Tabelle 7.2: Schematische Darstellung der zugeordneten Leistungswerte für den Winter Werktag

		Winter Werktag (Leistungswerte in W)				
		00:00 - 00:15	00:15 - 00:30	00:30 - 00:45	...	23:45 - 00:00
Haushalt 1	Montag	44	36	32	...	104
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Freitag	144	152	80	...	72
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Montag	404	364	388	...	440
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Freitag	104	40	32	...	148
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Haushalt 81	Montag	112	104	104	...	168
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Freitag	168	168	176	...	160
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Montag	140	108	104	...	104
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Freitag	100	100	100	...	180

Die in Tabelle 7.2 dargestellte Matrix besteht aus 96 Spaltenvektoren, die den Viertelstunden-Intervallen zugeordnet werden. Die einzelnen Zeilen der Matrix stellen die Tageslastgänge der Werktage aller 81 Haushalte dar.

Abbildung 7.4 stellt Tageslastgänge einzelner ausgewählter Tage des Typs „Winter Werktag“ dar. Für das Zeitintervall von 11:45 bis 12:00 Uhr ist exemplarisch ein schematisches Häufigkeitsdiagramm der auftretenden Leistungswerte dargestellt.

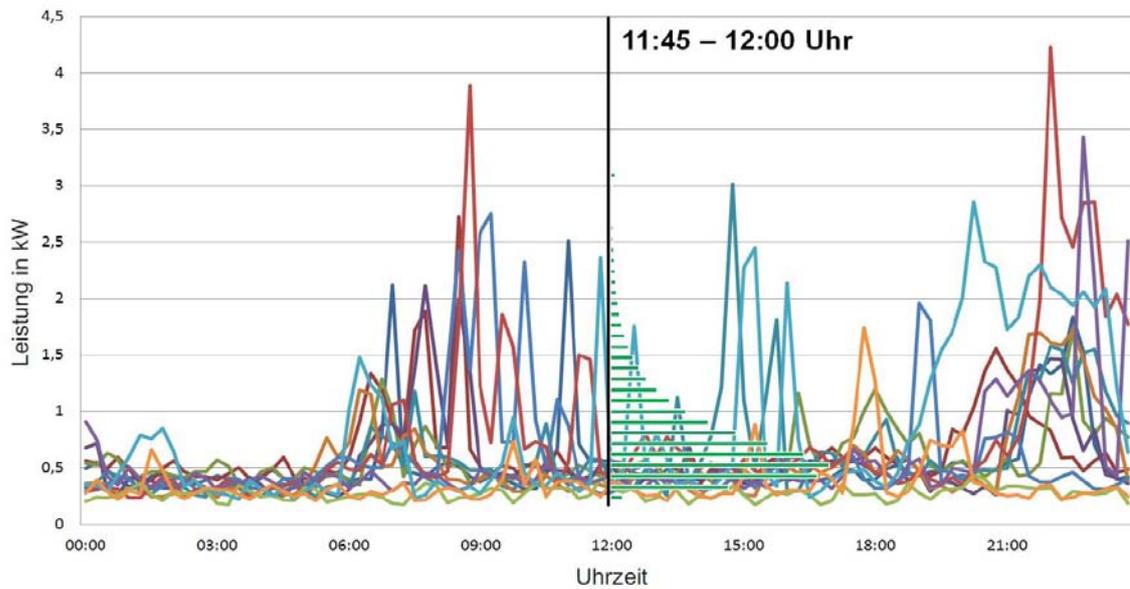


Abbildung 7.4: Lastprofile einzelner Tage des Typs „Winter Werktag“ inklusive exemplarischer Darstellung des Häufigkeitsdiagramms der auftretenden Leistungen für das Zeitintervall 11:45 bis 12:00 Uhr

Abbildung 7.4 zeigt, dass die einzelnen Tageslastgänge voneinander abweichen. Eine Zusammenfassung der einzelnen Leistungswerte je Viertelstunden-Intervall in ein Häufigkeitsdiagramm ist demnach sinnvoll und beschreibt das Lastverhalten für das jeweilige Zeitintervall.

Für jedes Viertelstunden-Intervall (jede Spalte der Matrix aus Tabelle 7.2) wird zunächst ein Histogramm unter Berücksichtigung der in Kapitel 4.4 vorgestellten Richtlinien zur Klassifizierung der Messdaten erstellt. Diese können in weiterer Folge mittels Häufigkeitsdiagrammen grafisch dargestellt werden. Tabelle 7.3 stellt schematisch den Aufbau der Histogramm Matrix für den Typtag „Winter Werktag“ dar.

Tabelle 7.3: Schematischer Aufbau der Histogramm Matrix für den Winter Werktag

Winter Werktag (Anzahl der auftretenden Leistungswerte)						
		00:00 - 00:15	00:15 - 00:30	00:30 - 00:45	...	23:45 - 00:00
Klassengrenzen in W	0 - 100	189	200	197	...	179
	100 - 200	223	212	205	...	234
	200 - 300	196	187	189	...	203
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	2800 - 2900	12	7	14	...	5
	2900 - 3000	4	3	8	...	0
	> 3000	1	0	4	...	0

Die Spalten der in Tabelle 7.3 dargestellten Histogramm Matrix stellen für jedes Zeitintervall des Typtages „Winter Werktag“ ein Histogramm der auftretenden Leistungswerte zur Verfügung. Die grafische Darstellung dieser Histogramme in Häufigkeitsdiagrammen lässt eine erste optische Beurteilung der Verteilung der Leistungswerte je Viertelstunden-Intervall zu. Abbildung 7.5 zeigt schematisch die Darstellung von klassifizierten Leistungswerten in Häufigkeitsdiagrammen für zwei ausgewählte Zeitintervalle (11:45 bis 12:00 Uhr bzw. 20:45 bis 21:00 Uhr).

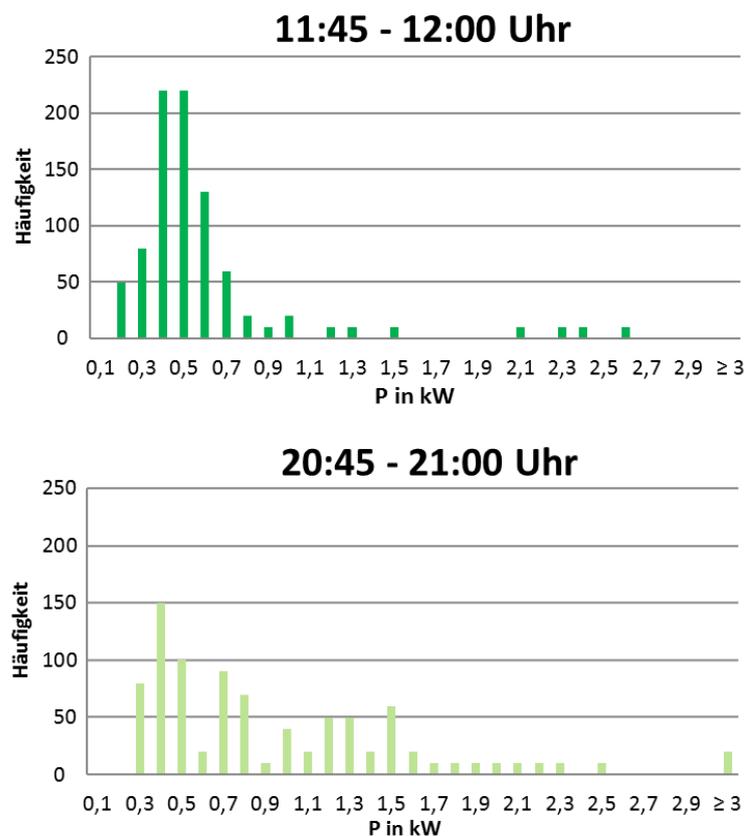


Abbildung 7.5: Schematische Darstellung der Häufigkeitsdiagramme (11:45 bis 12:00 Uhr bzw. 20:45 bis 21:00 Uhr)

Auf der Ordinate der in Abbildung 7.5 dargestellten Häufigkeitsdiagramme ist die Häufigkeit der auftretenden Leistungswerte in einem definierten Leistungsintervall aufgetragen. Die definierten Leistungsintervalle werden auf der Abszisse aufgetragen.

7.3.3 Bestimmung der Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Die im vorherigen Kapitel bestimmten Häufigkeitsdiagramme ordnen jedem definierten Leistungsintervall einen diskreten Häufigkeitswert zu. Die Ermittlung einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für jedes Zeitintervall, ermöglicht die Definition einer

stetigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über ein definiertes Leistungsspektrum. Diese stetigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen stellen die Basis der in Kapitel 8 vorgestellten probabilistischen Auslastungsanalyse dar.

Aufgrund der in Kapitel 7.3 erläuterten Gründe wird in dieser Arbeit die Lognormalverteilung, zur Beschreibung der Leistungsverteilungen jedes Viertelstunden-Intervalls, herangezogen. Auf Basis des Häufigkeitsdiagrammes jedes Viertelstunden-Intervalls werden der am besten passende Skalenparameter μ und Formparameter σ der in Formel (4.13) vorgestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Lognormalverteilung mit einer geeigneten Methode bestimmt.

Die Anwendung der oben beschriebenen Methodik auf die einzelnen Leistungsvektoren der jeweiligen Typtage (Spalten der Matrix aus Tabelle 7.2) ermöglicht es, für jedes Viertelstunden-Intervall des entsprechenden Typtages, den Skalenparameter μ und den Formparameter σ der Lognormalverteilung zu ermitteln. Es werden für jeden Typtag zwei Parametervektoren mit je 96 Werten berechnet, welche für jedes Viertelstunden-Intervall einen Wert für den Skalenparameter μ und den Formparameter σ bereitstellen. Die beiden Vektoren sind in Tabelle 7.4 für den Typtag „Winter Werktag“ dargestellt.

Tabelle 7.4: schematische Darstellung der Parametervektoren

	Winter Werktag			
	00:00 - 00:15	00:15 - 00:30	...	23:45 - 00:00
Skalenparameter μ	4,4554	4,4140	...	4,5456
Formparameter σ	1,0683	1,0489	...	1,0532

Jede Spalte aus Tabelle 7.4 stellt ein Zeitintervall des jeweiligen Typtages dar und beinhaltet die zu diesem Zeitintervall gehörigen Parameter. Auf Basis dieser Parameter kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für jedes Zeitintervall grafisch dargestellt werden. Trägt man die einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen über den zugehörigen Zeitintervallen auf, so entsteht eine 3 dimensionale Grafik, die in weiterer Folge als „Leistungsverteilungsgebirge“ bezeichnet wird. Abbildung 7.6 stellt schematischen Aufbau des Leistungsverteilungsgebirges dar.

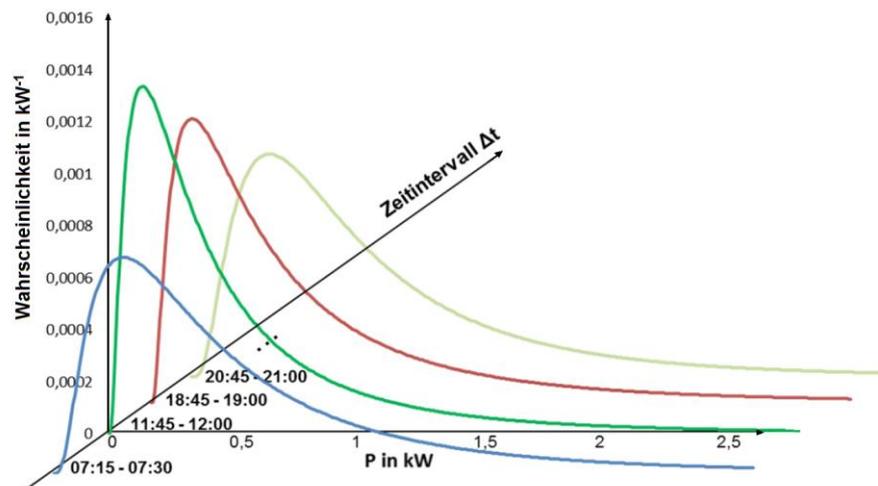


Abbildung 7.6: Schematische Darstellung des Leistungsverteilungsgebietes

Die einzelnen Kurven aus Abbildung 7.6 stellen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen jedes Zeitintervalls dar. Entlang der z-Achse des Koordinatensystems wird die Wahrscheinlichkeit aufgetragen, die von den entlang der x-Achse aufgetragenen kontinuierlichen Leistungswerten P abhängt. Die y-Achse repräsentiert dabei die Zeitachse von 00:00 bis 23:45 Uhr.

7.4 Ergebnisse und Diskussion

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der Smart-Meter-Datenanalyse vorgestellt. Es werden zunächst einige ausgewählte Häufigkeitsdiagramme und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für unterschiedliche Typtage und Tageszeiten (Viertelstunden-Intervalle) dargestellt. Anschließend werden die Vektoren des Skalenparameters μ und des Formparameters σ diskutiert und zuletzt das Leistungsverteilungsgebiet vorgestellt.

7.4.1 Häufigkeitsdiagramme und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Die in Kapitel 7.3 vorgestellte Methode ermöglicht es, für jedes Viertelstunden-Intervall eines bestimmten Typtages ein Häufigkeitsdiagramm der in diesem Zeitintervall auftretenden Leistungswerte zu erstellen und die, das Lastverhalten für dieses Zeitintervall beschreibenden, Parameter der Lognormalfunktion zu finden. In Abbildung 7.7 sind die Häufigkeitsdiagramme und in Abbildung 7.8 die ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für ausgewählte Zeitintervalle des Typtages „Winter Werktag“ dargestellt.

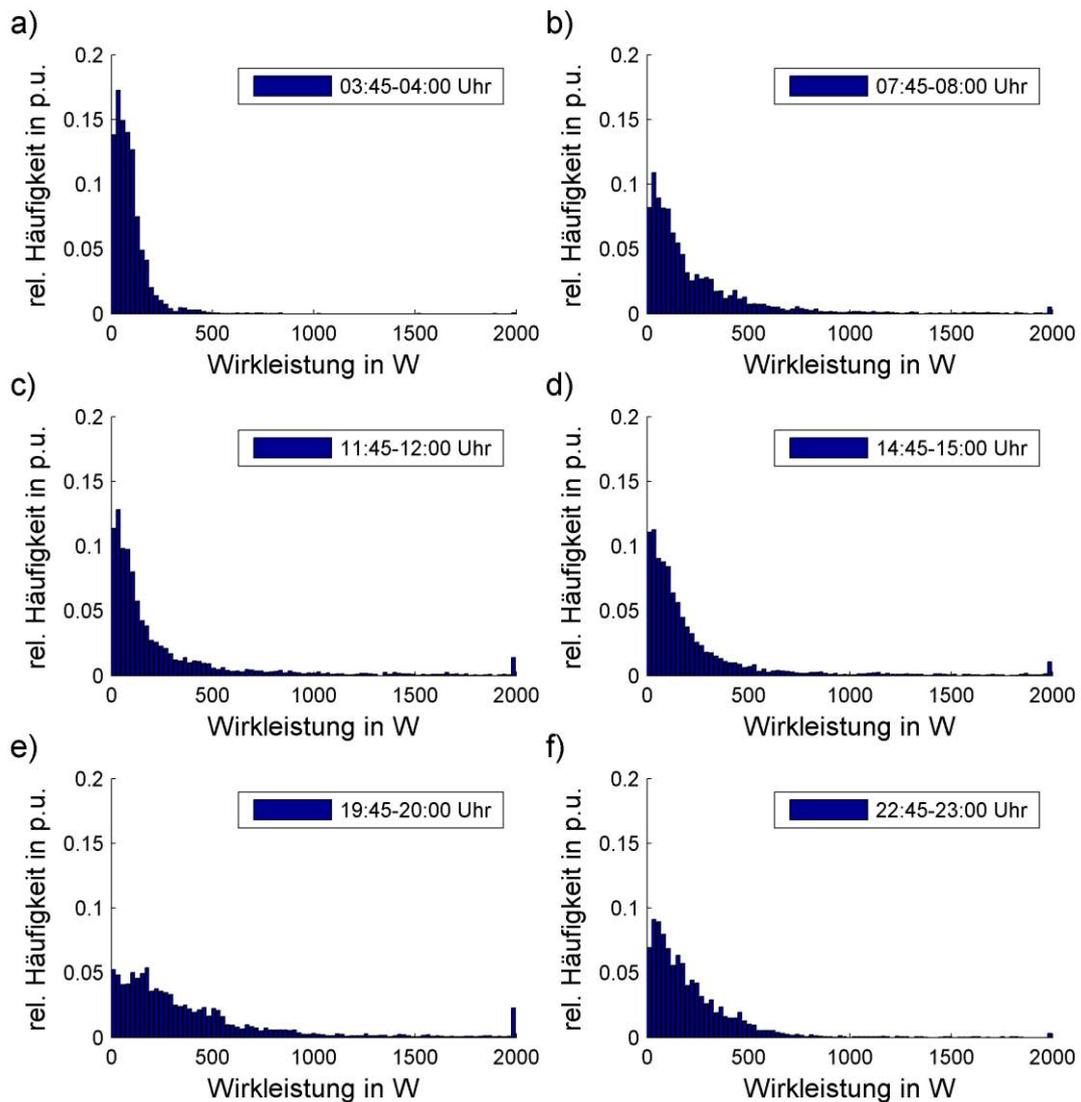


Abbildung 7.7: Häufigkeitsdiagramme ausgewählter Zeitintervalle des Typs „Winter Werktag“

Abbildung 7.7 zeigt die Häufigkeitsdiagramme für sechs ausgewählte Zeitintervalle. Aus dem Häufigkeitsdiagramm a) ist zu erkennen, dass im Zeitintervall von 03:45 bis 04:00 Uhr hauptsächlich Leistungswerte zwischen 0 und 500 W auftreten. Die relative Häufigkeit für das Auftreten einer „niedrigen“ Leistung ist demnach hoch.

Im Zeitintervall von 07:45 bis 08:00 Uhr (Häufigkeitsdiagramm b)) ist die relative Häufigkeit für das Auftreten von niedrigen Lasten im Vergleich zum Zeitintervall von 03:45 bis 04:00 Uhr (Häufigkeitsdiagramm a)) niedriger. In diesem Zeitintervall treten allerdings häufiger Leistungswerte > 500 W auf.

Im Zeitintervall von 11:45 bis 12:00 Uhr (Häufigkeitsdiagramm c)) ist die relative Häufigkeit für das Auftreten niedriger Leistungswerte wieder höher als im Zeitintervall von 07:45 bis

08:00 Uhr. Es ist kein wesentlicher Unterschied zum Häufigkeitsdiagramm d) für das Zeitintervall von 14:45 bis 15:00 Uhr zu erkennen.

In den Abendstunden sind die auftretenden Leistungswerte breiter gestreut, wie aus dem Häufigkeitsdiagramm e) für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr abgeleitet werden kann.

Für das Zeitintervall von 22:45 bis 23:00 Uhr (Häufigkeitsdiagramm f)) sinkt die relative Häufigkeit für das Auftreten von Leistungswerten > 500 W wieder stärker.

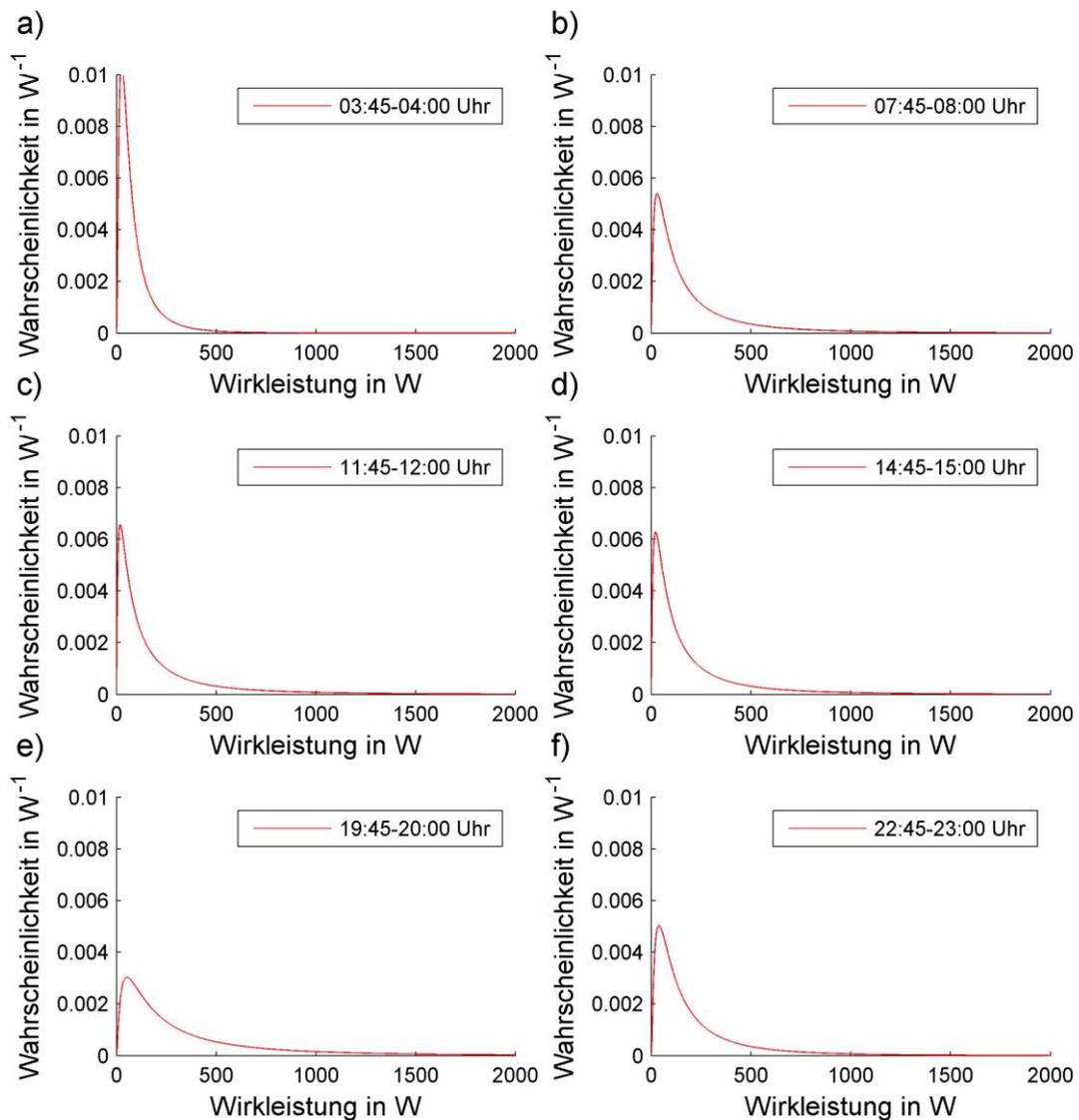


Abbildung 7.8: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ausgewählter Zeitintervalle des Typs „Winter Werktag“

Abbildung 7.8 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für sechs ausgewählte Zeitintervalle. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion a) für das Zeitintervall von 03:45 bis

04:00 Uhr weist für kleine Leistungswerte einen hohen Peak auf. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verläuft für steigende Leistungswerte sehr flach aus.

Im Zeitintervall von 07:45 bis 08:00 Uhr (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion b)) ist der Peak der Verteilung kleiner. Die Wahrscheinlichkeit für des Auftreten von Leistungswerten > 500 W ist höher, als im Zeitintervall von 03:45 bis 04:00 Uhr. Das spiegelt sich in einem höheren Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für steigende Leistungswerte wider.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das Zeitintervall von 11:45 bis 12:00 Uhr weist einen höheren Peak für niedrige Leistungswerte auf. Daraus lässt sich schließen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten höherer Lasten sehr gering ist und demnach nur wenige Verbraucher über die Mittagszeit eingeschaltet sind. Ähnlich kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion d) für das Zeitintervall von 14:45 bis 15:00 Uhr interpretiert werden.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr weist einen niedrigen Peak auf und ist im Vergleich zu anderen Zeitintervallen erhöht für steigende Leistungswerte. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von höheren Leistungswerten größer ist, als beispielsweise für das Zeitintervall von 03:45 bis 04:00 Uhr.

Für das Zeitintervall von 22:45 bis 23:00 Uhr ist der Peak für niedrige Leistungswerte wieder höher als für das zuvor beschriebene Zeitintervall und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von höheren Leistungswerten ist kleiner.

Eine ähnliche Diskussion kann für die Häufigkeitsdiagramme und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Typtage „Winter Samstag“ und „Winter Sonntag“ durchgeführt werden. Abbildung 7.9 stellt die Häufigkeitsdiagramme für die Zeitintervalle 07:45 bis 08:00 Uhr sowie 11:45 bis 12:00 Uhr des Typs „Winter Sonntag“ dar.

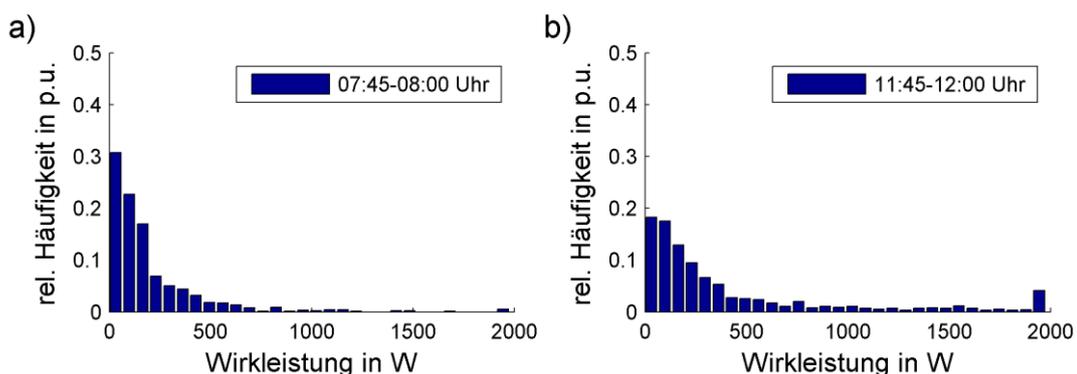


Abbildung 7.9: Häufigkeitsdiagramme ausgewählter Zeitintervalle des Typs „Winter Sonntag“

Die Säulen der in Abbildung 7.9 dargestellten Häufigkeitsdiagramme sind im Vergleich zu den Säulen der Häufigkeitsdiagramme in Abbildung 7.7 breiter. Das ist auf die größere Klassenbreite zurückzuführen, welche aus der geringeren Anzahl an Daten für die

Tageskategorie Sonntag resultiert. Daher ist auch die relative Häufigkeit der einzelnen Leistungsklassen höher.

Abbildung 7.10 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Zeitintervalle 07:45 bis 08:00 Uhr sowie 11:45 bis 12:00 Uhr des Typs „Winter Sonntag“ dar.

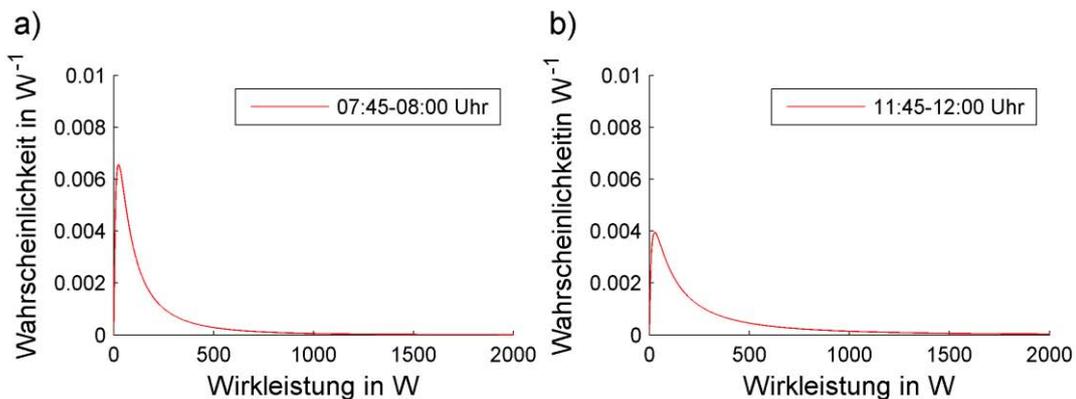


Abbildung 7.10: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ausgewählter Zeitintervalle des Typs „Winter Sonntag“

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion b) in Abbildung 7.10 für das Zeitintervall von 11:45 bis 12:00 Uhr weist im Vergleich zum selben Zeitintervall des Typtages „Winter Werktag“ einen kleineren Peak auf. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten höherer Leistungswerte ist größer, als im Vergleichsintervall des Typs Werktag.

7.4.2 Parameterdiskussion

Der Skalenparameter μ und der Formparameter σ definieren die jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der einzelnen Zeitintervalle. Die Bedeutung der Parameter auf die Form der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wurde in Kapitel 4.3.2 diskutiert. Ein hoher Wert des Skalenparameters μ bedeutet, dass es sich bei der zugrundeliegenden Datenmenge um hohe Leistungswerte handelt. Der Formparameter σ beschreibt dabei die Streuung der zugrundeliegenden Leistungswerte. Für kleinere Werte des Formparameters σ wird die Kurve immer symmetrischer und nähert sich der Gauß'schen Glockenkurve an. Für höhere Werte des Formparameters σ sind die einzelnen Leistungswerte breiter gestreut. Tabelle 7.5 stellt die Wertebereiche der Parameter für die einzelnen Tagestypen dar.

Tabelle 7.5: Wertebereiche der Parameter für die einzelnen Typtage

Typtag	μ_{\min}	μ_{\max}	σ_{\min}	σ_{\max}
Winter Werktag	4,1450	5,4234	0,9319	1,3600
Winter Samstag	4,1389	5,3817	0,9027	1,4459
Winter Sonntag	4,1436	5,5368	0,9235	1,4248

Die Werte in Tabelle 7.5 stellen die maximalen und minimalen Parameterwerte der einzelnen Typtage dar. Das Verhalten der Parameter für jedes Viertelstunden-Intervall für die jeweiligen Typtage wird in Abbildung 7.11 und Abbildung 7.12 dargestellt.

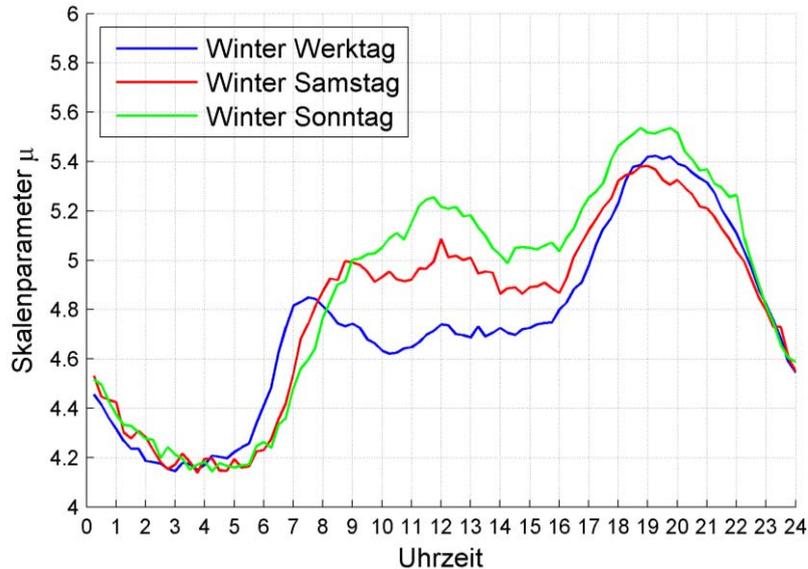


Abbildung 7.11: Werteverlauf des Skalensparameters μ für die jeweiligen Typtage

Die grüne Kurve in Abbildung 7.11 zeigt den Verlauf des Skalensparameters μ für einen Winter Sonntag. Es ist zu erkennen, dass der Skalensparameter μ eine Spitze zur Mittagszeit sowie in den Abendstunden aufweist. Dieser Verlauf stimmt sinngemäß mit dem Verlauf der in Kapitel 6.1 beschriebenen Standardlastprofile überein. Am Winter Sonntag treten im Vergleich zu den Werten der gleichen Zeitintervalle der anderen beiden Typtage von 09:00 Uhr bis 23:00 Uhr stets höhere Werte des Skalensparameters μ auf.

Für den Winter Werktag (blaue Kurve in Abbildung 7.11) fällt die Mittagsspitze weg. An diesem Typtag tritt eine kleine Spitze des Skalensparameters μ in den Morgenstunden (06:00 bis 09:00 Uhr) und eine wesentlich höhere in den Abendstunden (18:00 bis 22:00 Uhr) auf.

Abbildung 7.12 stellt den Verlauf des Formparameters σ für die jeweiligen Typtage dar.

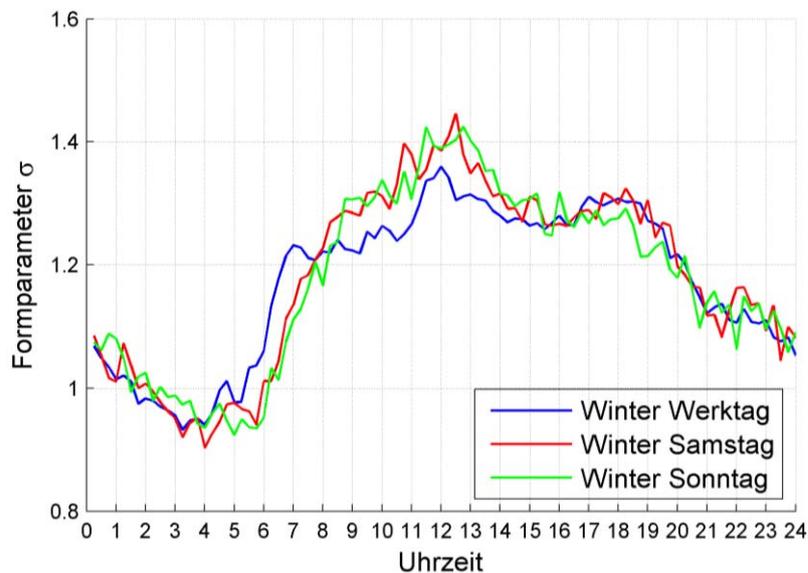


Abbildung 7.12: Werteverlauf des Formparameters σ für die jeweiligen Typtage

In Abbildung 7.12 ist eine tendenzielle Erhöhung des Formparameters σ für die Mittagsstunden zu erkennen. Der niedrigere Wert des Formparameters σ während der Nacht beschreibt die hohe Symmetrie (während der Nacht treten mit hoher Wahrscheinlichkeit eher niedrige Leistungswerte auf) der Verteilung für diese Zeitintervalle. Auch für die Abendstunden sinkt tendenziell der Wert des Formparameters σ , wobei parallel die tendenzielle Erhöhung des Skalenparameters μ aus Abbildung 7.11 zu erkennen ist.

7.4.3 Leistungsverteilungsgebiete

Eine getrennte Betrachtung der Parameter μ und σ liefert allerdings keine vollständige Beschreibung des Lastverhaltens für das jeweilige Zeitintervall. Die beiden Parameter zusammen definieren die aussagekräftige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Durch die Anwendung der in Kapitel 7.3.3 vorgestellten Methode zur Bildung des Leistungsverteilungsgebietes wird zusätzlich noch der zeitliche Bezug der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen berücksichtigt.

Die in Abbildung 7.8 dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind ein Bestandteil des Leistungsverteilungsgebietes. In diesem sind alle 96 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen eines Typtages dargestellt.

Abbildung 7.13 stellt das Leistungsverteilungsgebiet für den Typtag „Winter Werktag“ dar.

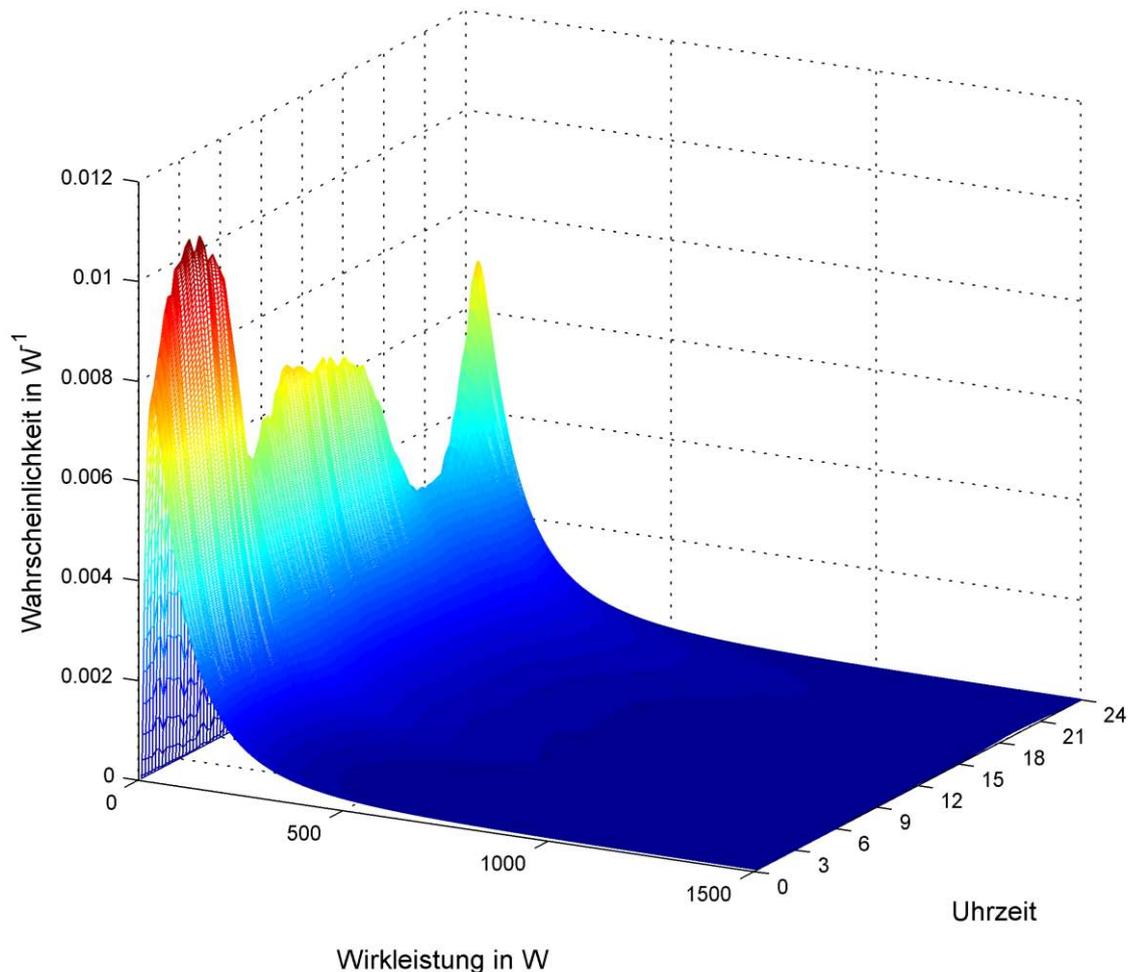


Abbildung 7.13: Leistungsverteilungsgebiete für den Typtag „Winter Werktag“

Das in Abbildung 7.13 dargestellte Leistungsverteilungsgebiete weist jedem Viertelstunden-Intervall des Typtages „Winter Werktag“ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu. Die Unterschiede in den Farbtönen stellen die Höhe der Wahrscheinlichkeitswerte dar. Betrachtet man die Verläufe der Farbgrößen, so lässt sich sinngemäß der Verlauf eines Lastprofils erkennen.

Während der Nachtstunden (00:00 bis 06:00 Uhr) ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten niedriger Leistungswerte hoch (rot eingefärbt). Die Dichten dieser Zeitintervalle laufen mit steigenden Leistungswerten sehr flach aus (dunkelblau eingefärbt).

In den Abendstunden (18:00 bis 21:00 Uhr) weisen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen kleinere Wahrscheinlichkeitswerte für geringe Leistungswerte auf. Die Wahrscheinlichkeitswerte für höhere Leistungswerte sind jedoch größer. In der Grafik ist dieses Verhalten durch die helleren Blautöne für größer werdende Leistungswerte ersichtlich.

8 Probabilistische Auslastungsanalyse

8.1 Allgemeines

Im folgenden Kapitel findet die in Kapitel 5.3 vorgestellte probabilistische Leistungsflussrechnung Anwendung. Diese ermöglicht es, Aussagen über die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Systemgrößen zu tätigen. In dieser Arbeit werden die Auftrittshäufigkeiten einzelner Strom- bzw. Spannungswerte einer vorgegebenen Verteilnetzstruktur untersucht. Die Auftrittshäufigkeit der Spannungswerte wird dabei unter Berücksichtigung europäischer Norm EN 50160 [27] diskutiert.

Zunächst wird auf die für diese Arbeit relevanten Merkmale der Spannung in öffentlichen Elektrizitätsversorgungsnetzen unter Berücksichtigung der EN 50160 [27] eingegangen. Anschließend wird die in dieser Arbeit zugrunde liegende Methodik der probabilistischen Auslastungsanalyse vorgestellt. Dabei wird das der Analyse zugrunde liegende Verteilnetzmodell dargelegt. Dieses wird unter Annahme der folgenden Haushaltslastmodelle analysiert. Das Lastverhalten einzelner Haushalte wird auf Basis

- einer Gleichverteilung (**Vereinfachte Methodik**)
- der in Kapitel 7 ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (**Verfeinerte Methodik**)

simuliert. Abschließend werden die Ergebnisse der Auslastungsanalyse präsentiert und deren Aussagen diskutiert.

8.2 Beurteilung der Spannungswerte

Für Niederspannungsnetze sind die Merkmale der Spannung in öffentlichen Netzen in der europäischen Norm EN 50160 [27] geregelt. Dabei wird unterschieden zwischen andauernden Phänomenen und Spannungsereignissen. Andauernde Phänomene beschreiben Abweichungen vom Nennwert, die dauerhaft auftreten. Spannungsereignisse dagegen stellen erhebliche Abweichungen von der Nenn- oder gewünschten Kurvenform dar. Für bestimmte andauernde Phänomene („*Abweichungen vom Nennwert, die dauerhaft über die Zeit auftreten*“ [27]) werden Grenzwerte angegeben, für Spannungsereignisse („*plötzliche und erhebliche Abweichungen von der Nenn- oder gewünschten Kurvenform*“ [27]) werden hingegen nur Richtwerte angegeben.

Für diese Arbeit ist die Beurteilung der Spannungswerte relevant und ist in der EN 50160 wie folgt definiert [27]:

„Unter normalen Betriebsbedingungen mit der Ausnahme von Intervallen mit Unterbrechungen sollten Änderungen der Versorgungsspannung $\pm 10\%$ der Nennspannung U_n nicht überschreiten“

Zur Überprüfung der Spannungswerte wird diese Definition noch genauer spezifiziert [27]. Demnach müssen unter normalen Betriebsbedingungen:

- 95 % der 10-Minuten-Mittelwerte des Effektivwertes der Versorgungsspannung jedes Wochenintervalls innerhalb des Bereichs $U_n \pm 10 \%$ liegen
- alle 10-Minuten-Mittelwerte des Effektivwertes der Versorgungsspannung innerhalb des Bereichs $U_n + 10 \%$ / - 15 % liegen

Bei den dieser Arbeit zugrundeliegenden Smart-Meter-Messdaten handelt es sich um viertelstündlich gemittelte Wirkleistungswerte. Infolgedessen handelt es sich bei den in Kapitel 8.4 vorgestellten Ergebnissen der probabilistischen Auslastungsanalyse ebenfalls um 15-Minuten-Mittelwerte.

In [28] wird der Einfluss der in der europäischen Norm EN 50160 herangezogenen Parameter auf die Beurteilung der Spannungswerte untersucht. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf die Untersuchung des Einflusses des Aggregationsintervalls (1 Minute, 10 Minuten, 30 Minuten), der Aggregationsmethode (Mittelwert, Maximalwert) und des Beurteilungsquantils (95 %, 99 %) gelegt. Dabei konnte kein signifikanter Unterschied in der Beurteilung der Spannungswerte durch die verschiedenen Parameter festgestellt werden.

Somit erscheint die Beurteilung der in Kapitel 8.4 präsentierten 15-Minuten-Mittelwerte der Spannung im Hinblick auf die in der EN 50160 vorgegebenen Merkmale der Spannung hilfreich.

8.3 Methodik der probabilistischen Auslastungsanalyse

Die in Kapitel 5.3 beschriebene probabilistische Lastflussrechnung ermöglicht es, eine Netzstruktur bezüglich ihrer Auslastung zu untersuchen. Dabei ist es notwendig, statistische Verteilungsmodelle als Eingangsgrößen zu definieren. Bei den Eingangsgrößen der in dieser Arbeit durchgeführten Auslastungsanalyse handelt es sich um die Wirkleistung der Haushalte, welche die Verbraucher eines Niederspannungsabganges in einem städtischen Netzmodell darstellen.

Das grundlegende Prinzip dieses Verfahrens wird dabei zunächst unter der Annahme von gleichverteilten Haushaltslasten demonstriert. Anschließend wird eine Auslastungsanalyse unter Berücksichtigung der in Kapitel 7 ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für Haushaltslasten durchgeführt.

8.3.1 Modell der Verteilnetzstruktur

In [29] erfolgt eine Klassifizierung und Erstellung von Modellnetzen auf Basis einer ausgiebigen Analyse von realen Netzplänen. Diese Modellnetze berücksichtigen dabei die unterschiedliche Einwohnerdichte sowie die Netzstruktur verschiedener Besiedlungsformen. Die Modellnetze der Mittelspannungs- und Niederspannungsnetzstruktur werden nach [29] in ein städtisches Modellnetz, ein vorstädtisches Modellnetz und ein ländliches Modellnetz eingeteilt.

Das dieser Untersuchung zugrundeliegende Modell eines Niederspannungsabganges aus dem städtischen Bereich wurde auf Basis der in [29] definierten Modellnetze erstellt. Dieses

Modell wurde gewählt, da es sich bei dem in Kapitel 7.2 beschriebenen Datenpool um Messwerte von Haushalten aus dem städtischen Bereich handelt. Abbildung 8.1 zeigt das dieser Untersuchung zugrundeliegende Modell eines Niederspannungsabganges aus dem städtischen Bereich.

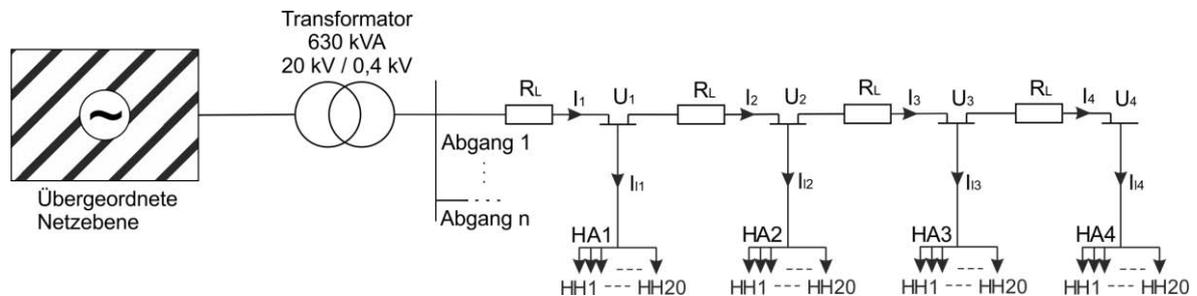


Abbildung 8.1: Modell eines Niederspannungsabganges aus dem städtischen Bereich [29]

Der in Abbildung 8.1 dargestellte Niederspannungsabgang besteht aus vier Hausanschlüssen HA. Die einzelnen Hausanschlüsse HA versorgen jeweils bis zu 20 Haushalte HH. Der Leitungswiderstand R_L errechnet sich nach Formel (8.1).

$$R_L = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (8.1)$$

Der Parameter l beschreibt dabei die mittlere Leitungslänge zwischen den einzelnen Hausanschlüssen HA. Der Parameter A definiert den Leiterquerschnitt des verwendeten Kabels und der Parameter ρ stellt den spezifischen Widerstand des verwendeten Leitermaterials dar. Die für die Auslastungsanalyse verwendeten Parameterwerte sind in Absprache mit einem Verteilnetzbetreiber definiert und in Tabelle 8.1 dargestellt.

Tabelle 8.1: Parameterwerte der Netzstruktur

Parameter	Wert
spezifischer Widerstand ρ_{Cu}	$0,0178 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{m}$
Leitungslänge l	80 m
Leiterquerschnitt A	95 mm^2

In dieser Arbeit wird Kupfer als Leitermaterial angenommen, womit sich ein Widerstandswert von $R_L = 0,015 \Omega$ ergibt. Aus Kostengründen wird häufig auch Aluminium verwendet. Um dabei den gleichen spezifischen Widerstand zu erreichen, muss der Leiterquerschnitt für Leiter aus Aluminium erhöht werden.

8.3.2 Auslastungsanalyse unter Berücksichtigung der Haushaltslastmodelle

Im folgenden Kapitel wird das in Abbildung 8.1 dargestellte Modell eines städtischen Niederspannungsabganges hinsichtlich des Strom- und Spannungsverhaltens untersucht. Dabei findet die in Kapitel 5.3 vorgestellte probabilistische Leistungsflussberechnung Anwendung.

Die Basis der probabilistischen Leistungsflussberechnung stellt die Definition der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Haushaltslasten dar. Um die grundlegende Methodik zu demonstrieren, wird diese zunächst als **Gleichverteilung** angenommen. Die in Kapitel 7 durchgeführte Smart-Meter-Datenanalyse gibt Aufschluss über die tatsächliche Verteilung der Haushaltslasten des untersuchten Netzgebietes. Diese zeigt, dass sich die Haushaltslasten des untersuchten Netzgebietes für die Verbrauchsperiode Winter durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der **Lognormalverteilung** nachbilden lassen.

Anhand der vorgegeben Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des zugrundeliegenden Verteilungsmodelles werden Leistungswerte generiert, welche die Eingangsgrößen zur Berechnung der Leiterströme (I_1 , I_2 , I_3 und I_4) und Knotenspannungen (U_1 , U_2 , U_3 und U_4) des Niederspannungsabganges aus Abbildung 8.1 darstellen.

8.3.2.1 Vereinfachte Methodik – Gleichverteilte Haushaltslasten

Im hier gewählten Ansatz werden Leistungswerte auf Basis der in Kapitel 4.3.2 vorgestellten Gleichverteilung generiert. Abbildung 8.2 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der zugrundeliegenden Verteilung dar.

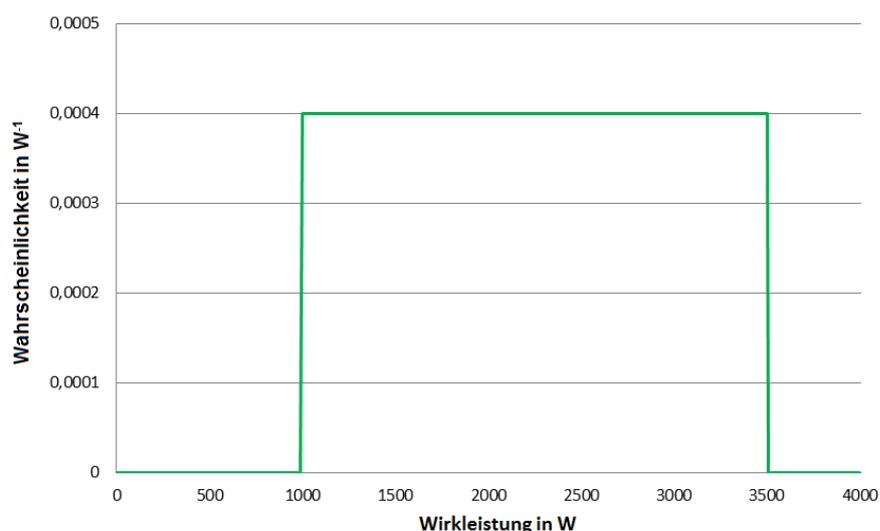


Abbildung 8.2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gleichverteilung

Aus Abbildung 8.2 wird ersichtlich, dass die Wirkleistung eines Haushaltes zwischen 1000 W und 3500 W gleichverteilt angenommen wird. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Leistungswertes aus diesem Intervall ist konstant. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Leistungswertes $< 1000\text{ W}$ bzw. $> 3500\text{ W}$ ist Null.

Die Leistungswerte P_{HH} der einzelnen Haushalte werden stochastisch anhand von Formel (8.2) generiert.

$$P_{HH} = z \cdot 2500\text{ W} + 1000\text{ W} \tag{8.2}$$

Die Variable z stellt eine mittels Zufallsgenerator erzeugte, gleichverteilte Zufallsvariable zwischen 0 und 1 dar. Diese wird auf den Bereich von 2500 W skaliert und durch die Addition von 1000 W angepasst. Somit können beliebig viele gleichverteilte Leistungswerte im vorgegebenen Leistungsintervall generiert werden.

Die generierten Leistungswerte werden in einem weiteren Schritt den einzelnen Haushalten HH zugeordnet. Durch deren Überlagerung werden die Leistungswerte je Hausanschluss HA berechnet. Die so ermittelten Leistungswerte stellen die Eingangsgrößen für jeden Berechnungsdurchlauf der Monte-Carlo-Simulation dar. Aufgrund der in Kapitel 5.2.2 erläuterten Tatsache, dass die Stromaufnahme von Lasten mit konstanter Wirkleistungsaufnahme spannungsabhängig ist, werden je Berechnungsdurchlauf drei Iterationen zur Berechnung der Knotenspannungen und Leiterströme durchgeführt.

Abbildung 8.3 stellt den Ablauf der probabilistischen Auslastungsanalyse unter der Annahme gleichverteilter Haushaltslasten schematisch dar.

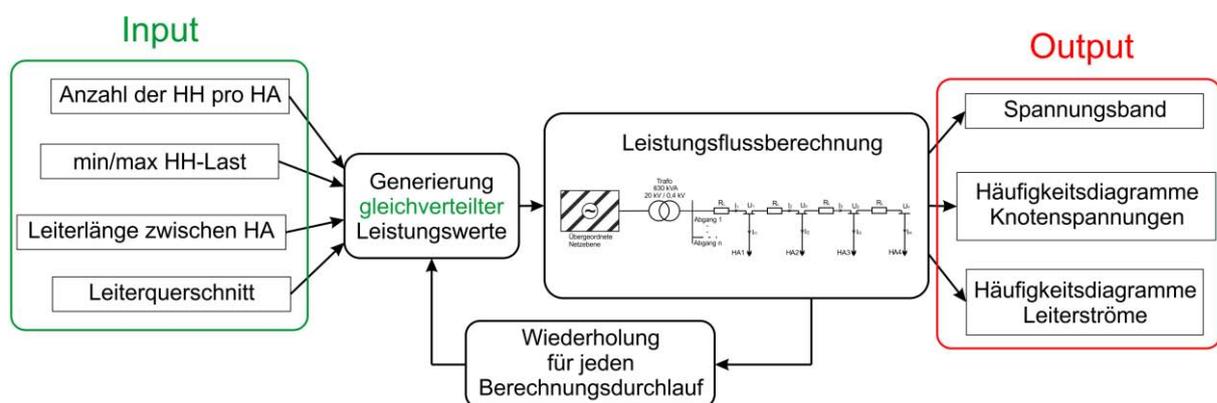


Abbildung 8.3: schematischer Ablauf der probabilistischen Auslastungsanalyse unter Annahme gleichverteilter Haushaltslasten

Der grün umrandete Block in Abbildung 8.3 beschreibt die Eingangsgrößen (Input) des Modells. Der rot umrandete Block stellt die Ausgangsgrößen (Output) dar. Die Werte für die Eingangsgrößen des Leiterquerschnittes sowie der Leiterlänge zwischen den Hausanschlüssen können aus Tabelle 8.1 entnommen werden. Die minimale bzw. maximale Haushaltslast ist definiert durch die in Abbildung 8.2 gezeigte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gleichverteilung. Die Anzahl der Haushalte pro Hausanschluss wird in diesem grundlegenden Modell als konstant mit 20 Haushalten HH pro Hausanschluss HA festgelegt.

Die Anzahl n der notwendigen Berechnungsdurchläufe um eine vorgegebene Genauigkeit bei definierter Irrtumswahrscheinlichkeit zu erreichen kann durch Formel (5.19) abgeschätzt werden. Um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0,1$ bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ ($z_{0,995} = 2,58$) zu erreichen, müssen nach Formel (5.19) $n \geq 666$ Berechnungen durchgeführt werden.

Die Ausgangsgrößen bzw. Ergebnisse der probabilistischen Auslastungsanalyse sind das Spannungsband für jeden Hausanschluss entlang der Leitung, die Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen an jedem Hausanschluss sowie die Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme der einzelnen Leiterabschnitte.

8.3.2.2 Verfeinerte Methodik – Lognormalverteilte Haushaltslasten

In Kapitel 7 erfolgt eine umfassende Analyse von Haushaltslasten durch die Auswertung von Smart-Meter-Messdaten. Das Ergebnis dieser Analyse sind die Parameter μ und σ der Lognormalverteilung für jedes Viertelstunden-Intervall eines definierten Typtages, die das Lastverhalten für das jeweilige Zeitintervall am besten beschreiben.

Die probabilistische Auslastungsanalyse auf Basis der in Kapitel 7 ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen erfolgt somit separat für jedes Viertelstunden-Intervall der einzelnen Typtage.

In diesem Kapitel wird die Methodik der probabilistischen Auslastungsanalyse für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr des Typtages „Winter Werktag“ demonstriert.

Die Parameter der zugrundeliegenden Lognormalverteilung für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr des Typtages „Winter Werktag“ sind wie folgt definiert:

- Skalenparameter $\mu = 5,421$
- Formparameter $\sigma = 1,211$

Abbildung 8.4 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Lognormalverteilung mit den angegebenen Parametern für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr dar.

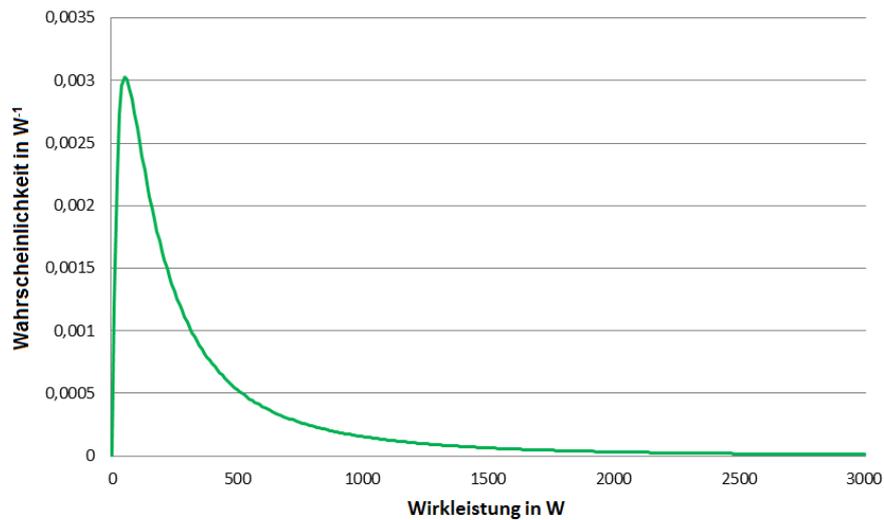


Abbildung 8.4: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Lognormalverteilung mit den Parametern $\mu = 5,4212$ und $\sigma = 1,2110$

Aus der in Abbildung 8.4 dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird ersichtlich, dass das Auftreten von Leistungswerten im Bereich von 0 bis 500 W wahrscheinlicher ist, als das Auftreten höherer Leistungswerte. Allerdings ist die Verteilung nach oben offen und es können Leistungswerte > 3500 W auftreten, wenngleich dies nicht sehr wahrscheinlich ist. Eine obere Begrenzung der Leistungswerte ergibt sich durch die Schutzeinrichtungen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der in Abbildung 8.4 dargestellten Lognormalverteilung stellt die Basis der Leistungswertgenerierung dar. Es werden Leistungswerte unter Anwendung der in Kapitel 4.7 vorgestellten Inversionsmethode synthetisch erzeugt, die reale Leistungswerte einzelner Haushalte HH des untersuchten Netzgebietes widerspiegeln. Durch deren Überlagerung werden die Leistungswerte je Hausanschluss HA generiert. Abbildung 8.5 stellt die Generierung der Leistungswerte für die Auslastungsanalyse schematisch dar.

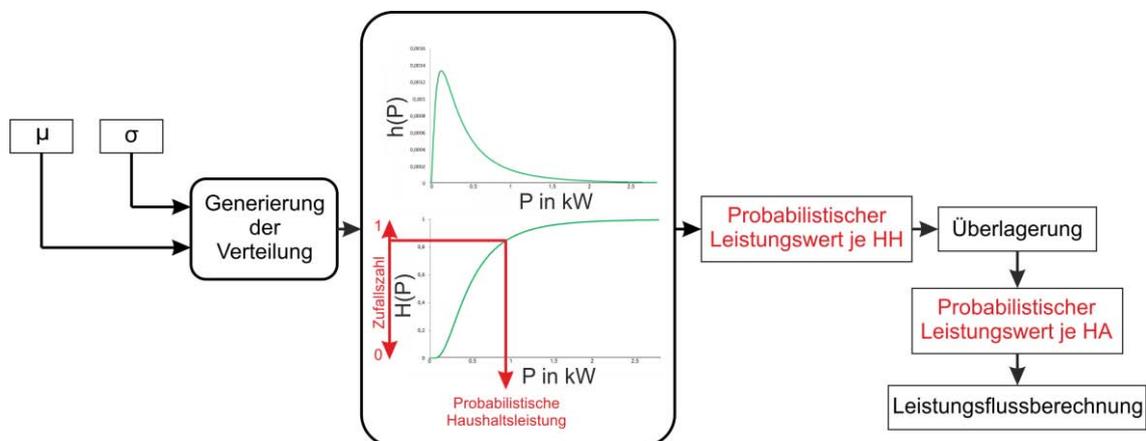


Abbildung 8.5: Generierung lognormalverteilter Leistungswerte für die Auslastungsanalyse

Als Eingangsgrößen der in Abbildung 8.5 dargestellten Generierung der Leistungswerte dienen die Parameter μ und σ des zu betrachtenden Zeitintervalls eines definierten Typtages. Für den Typtag „Winter Werktag“ im Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr werden die oben angeführten Parameter zur Leistungswertegenerierung herangezogen. Die durch diese Methode generierten Leistungswerte dienen als Eingangsgrößen für jeden Berechnungsdurchlauf der Monte-Carlo-Simulation. Aufgrund der in Kapitel 5.2.2 erläuterten Tatsache, dass die Stromaufnahme von Lasten mit konstanter Wirkleistungsaufnahme spannungsabhängig ist, werden je Berechnungsdurchlauf drei Iterationen zur Berechnung der Knotenspannungen und Leiterströme durchgeführt, wodurch erfahrungsgemäß eine ausreichende Genauigkeit erreicht werden kann.

Abbildung 8.6 stellt den Ablauf der probabilistischen Auslastungsanalyse unter der Annahme lognormalverteilter Haushaltslasten schematisch dar. Die in Abbildung 8.5 im Detail erläuterte Generierung lognormalverteilter Leistungswerte ist im Ablaufdiagramm der probabilistischen Auslastungsanalyse als eigener Block dargestellt.

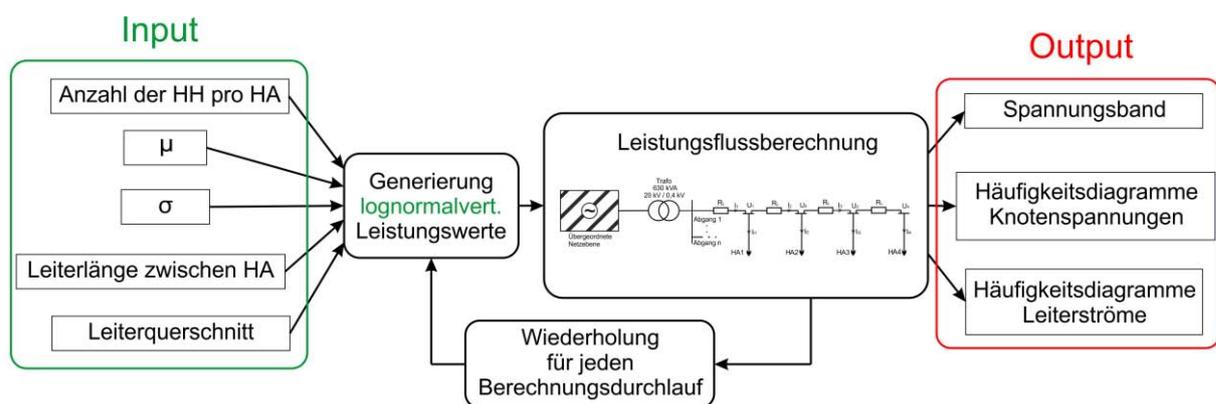


Abbildung 8.6: schematischer Ablauf der probabilistischen Auslastungsanalyse unter Annahme lognormalverteilter Haushaltslasten

Der in Abbildung 8.6 dargestellte Ablauf der probabilistischen Auslastungsanalyse ist mit Ausnahme des Blocks „Generierung lognormalverteilter Haushaltslasten“ mit dem in Kapitel 8.3.2.1 beschriebenen Ablauf für gleichverteilte Haushaltslasten identisch. Die Anzahl der Haushalte HH pro Hausanschluss HA wird wie im Modell mit gleichverteilten Haushaltslasten mit 20 angenommen. Die Anzahl der notwendigen Berechnungsdurchläufe ist identisch mit jener der Monte-Carlo-Simulation für gleichverteilte Haushaltslasten.

Die Ausgangsgrößen bzw. Ergebnisse der probabilistischen Auslastungsanalyse für lognormalverteilte Haushaltslasten sind wiederum das Spannungsband für jeden Hausanschluss entlang der Leitung, die Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen an jedem Hausanschluss sowie die Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme der einzelnen Leiterabschnitte.

8.4 Ergebnisse und Diskussion

Im folgenden Kapitel werden zunächst die Ergebnisse der probabilistischen Auslastungsanalyse unter der Annahme von **gleichverteilten Haushaltslasten** diskutiert. Anschließend wird auf die Ergebnisse der Auslastungsanalyse unter Anwendung der in Kapitel 8.3.2.2 vorgestellten Methodik für **lognormalverteilte Haushaltslasten**, die anhand realer Smart-Meter-Daten ermittelt werden, eingegangen.

8.4.1 Vereinfachte Methodik – Gleichverteilte Haushaltslasten

Für den in Abbildung 8.1 dargestellten Niederspannungsabgang, bestehend aus vier Hausanschlüssen HA, werden zunächst die Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme I_1 , I_2 , I_3 und I_4 der einzelnen Leiterteilstücke in Abbildung 8.7 dargestellt.

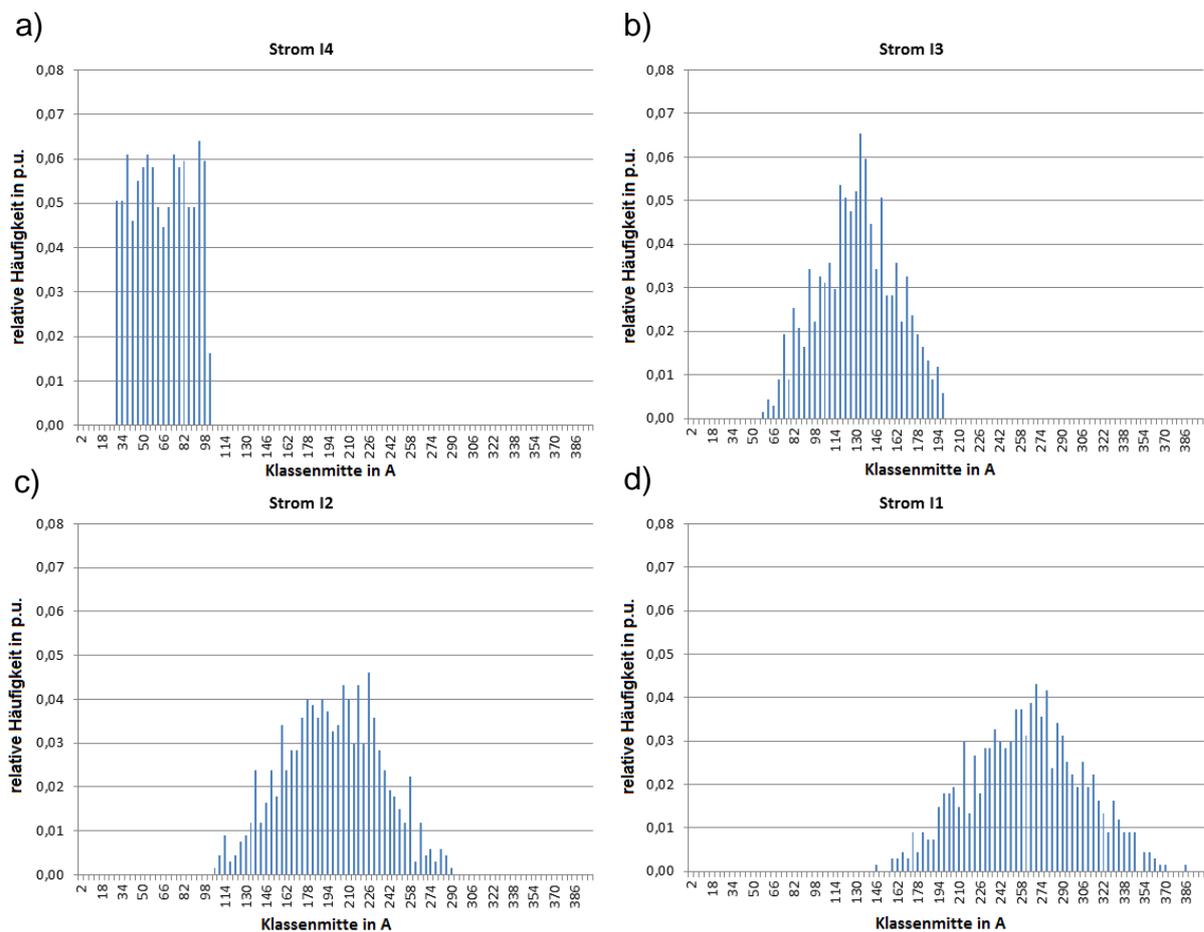


Abbildung 8.7: Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme (I_1 bis I_4)

Aufgrund der Annahme gleichverteilter Leistungswerte der einzelnen Haushaltslasten sind auch die auftretenden Stromwerte des letzten Leiterabschnittes I_4 gleichverteilt zwischen 30 und 100 A (Abbildung 8.7 a)). Die Stromwerte I_3 des vorletzten Leiterabschnittes aus dem Niederspannungsabgang in Abbildung 8.1 ergeben sich aus der Addition der Stromwerte I_{13} und I_{14} . Da die Werte dieser Ströme gleichverteilt sind, ergibt deren Addition wie in Kapitel 4.6 erläutert eine Dreiecksverteilung. Die Stromwerte I_3 des vorletzten Leiterabschnittes folgen demnach einer Dreiecksverteilung mit den Grenzwerten 60 und 200 A (Abbildung 8.7 b)). Die mehrmalige Überlagerung von gleichverteilten Stromwerten ergibt nach dem in Kapitel 4.6 beschriebenen zentralen Grenzwertsatz ein Verteilungsmodell, welches sich dem der Normalverteilung annähert.

Die Ströme des ersten Leiterabschnittes I_1 zeigen, dass die Werte schon annähernd normalverteilt sind (Abbildung 8.7 d)). Das Verteilungsmodell für die auftretenden Leiterströme I_1 kann allerdings nicht als Normalverteilung bezeichnet werden, da ein minimaler und maximaler Stromwert nicht unter bzw. überschritten werden kann. Das theoretische Verteilungsmodell der Normalverteilung ist allerdings unten und oben „offen“. Der physikalisch mögliche minimale bzw. maximale Wert ergibt sich aus der Addition der Minimal- bzw. Maximalwerte der einzelnen Gleichverteilungen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass unter Berücksichtigung gleichverteilter Haushaltslasten mit den in Kapitel 8.3.2.1 definierten Eigenschaften, im ersten Leiterabschnitt Ströme zwischen 120 und 400 A auftreten können. Die auftretenden Stromwerte I_1 sind annähernd normalverteilt um den Mittelwert von 260 A.

Auch die Knotenspannungen der einzelnen Hausanschlüsse U_1 , U_2 , U_3 und U_4 können ähnlich diskutiert werden. Abbildung 8.8 stellt die Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen dar.

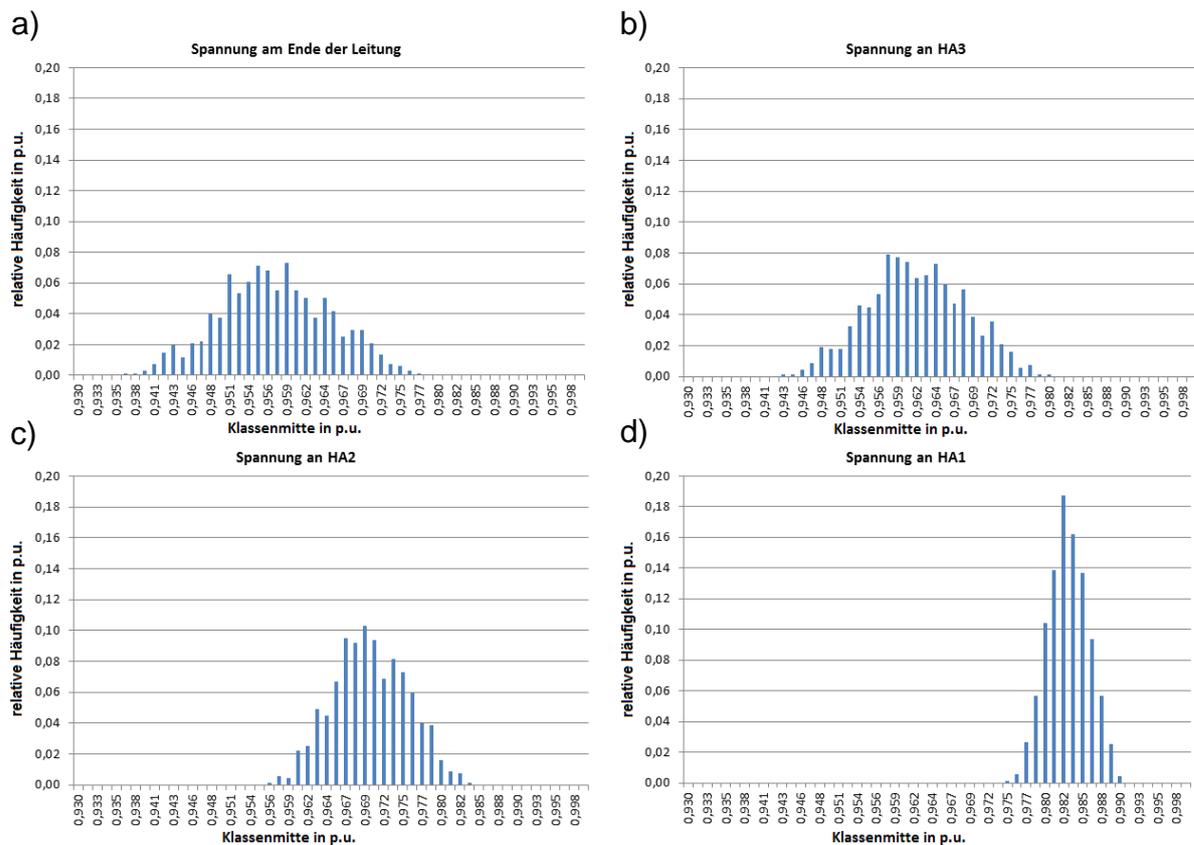


Abbildung 8.8: Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen

Die Knotenspannungen ergeben sich aus der Addition der Spannungsabfälle über die jeweiligen Leiterabschnitte. Die Knotenspannung U_1 an Hausanschluss 1 (HA1) (Abbildung 8.8 d)) weist demnach die gleiche Verteilung der Spannungswerte auf, wie die Verteilung der Stromwerte des ersten Leiterabschnittes I_1 .

Die Verteilung der Knotenspannungen U_4 am Ende der Leitung (Abbildung 8.8 a)) ist im Vergleich zur Verteilung der Werte von U_1 breiter gestreut und weist einen kleineren Peak auf. Sie nähert sich ebenfalls einer Normalverteilung an.

Um Aussagen bezüglich des Unterschreitens der in Kapitel 8.2 diskutierten Spannungsgrenzen zu tätigen, wird das Spannungsband je Hausanschluss HA entlang der Leitung herangezogen. Der Spannungsverlauf entlang der Leitung wird in Abbildung 8.9 für charakteristische Werte der Knotenspannungsverteilung jedes Hausanschlusses dargestellt.

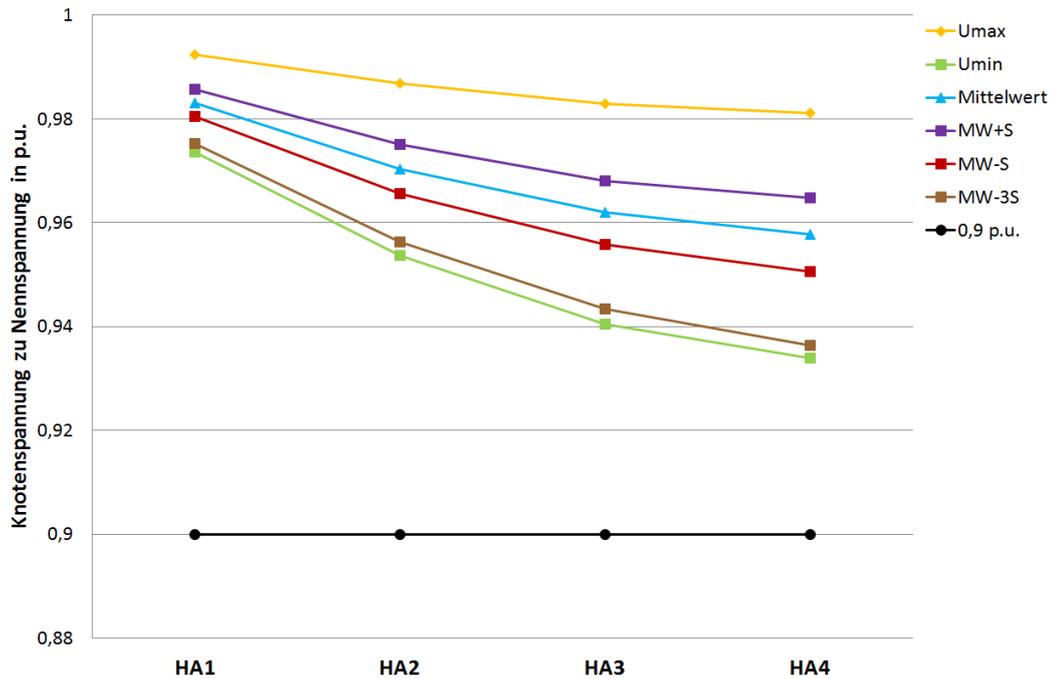


Abbildung 8.9: Spannungsband je Hausanschluss (HA) entlang der Leitung

Die hellblaue Kurve in Abbildung 8.9 stellt den Verlauf des Mittelwertes der auftretenden Spannungswerte je Hausanschluss dar. Weitere charakteristische Werte ergeben sich aus den Eigenschaften der Normalverteilung.

Die Abkürzung MW-S steht in weiterer Folge für den Wert „Mittelwert abzüglich Standardabweichung“. MW+S wird als Abkürzung für den Wert „Mittelwert plus Standardabweichung“ bezeichnet. Selbiges gilt für die Bezeichnung MW-3S, welche als Abkürzung für den Wert „Mittelwert abzüglich dreimal Standardabweichung“ bezeichnet wird. Im Intervall MW+S bis MW-S befinden sich beispielsweise ca. 68% aller Werte. Bereits 99% aller auftretenden Werte befinden sich im Intervall MW+3S bis MW-3S.

Der Verlauf des Wertes MW-3S (braune Kurve) zeigt demnach, dass am Ende der Leitung mehr als 99% der auftretenden Spannungswerte über 0,935 p.u. liegen. Im Falle gleichverteilter Haushaltslasten kann der Minimalwert der auftretenden Spannung am Ende der Leitung den theoretisch errechneten von 0,934 p.u. ohnehin nicht unterschreiten. Im Falle lognormalverteilter Haushaltslasten gibt es allerdings keinen theoretischen Grenzwert, weshalb eine Argumentation über die oben beschriebenen charakteristischen Werte sinnvoll ist.

8.4.2 Verfeinerte Methodik – Lognormalverteilte Haushaltslasten

Die Ergebnisse der probabilistischen Auslastungsanalyse unter Berücksichtigung der auf Basis realer Smart-Meter-Messdaten ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden im folgenden Kapitel vorgestellt und diskutiert. Die dabei zugrundeliegende

Lognormalverteilung beschreibt das Lastverhalten von Haushalten aus einem städtischen Gebiet für das Zeitintervall von 19:45 bis 20:00 Uhr des Typtages „Winter Werktag“.

Wie in Kapitel 8.4.1 werden zunächst die Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme I_1 , I_2 , I_3 und I_4 des in Abbildung 8.1 dargestellten Niederspannungsabganges diskutiert. Diese sind in Abbildung 8.10 dargestellt.

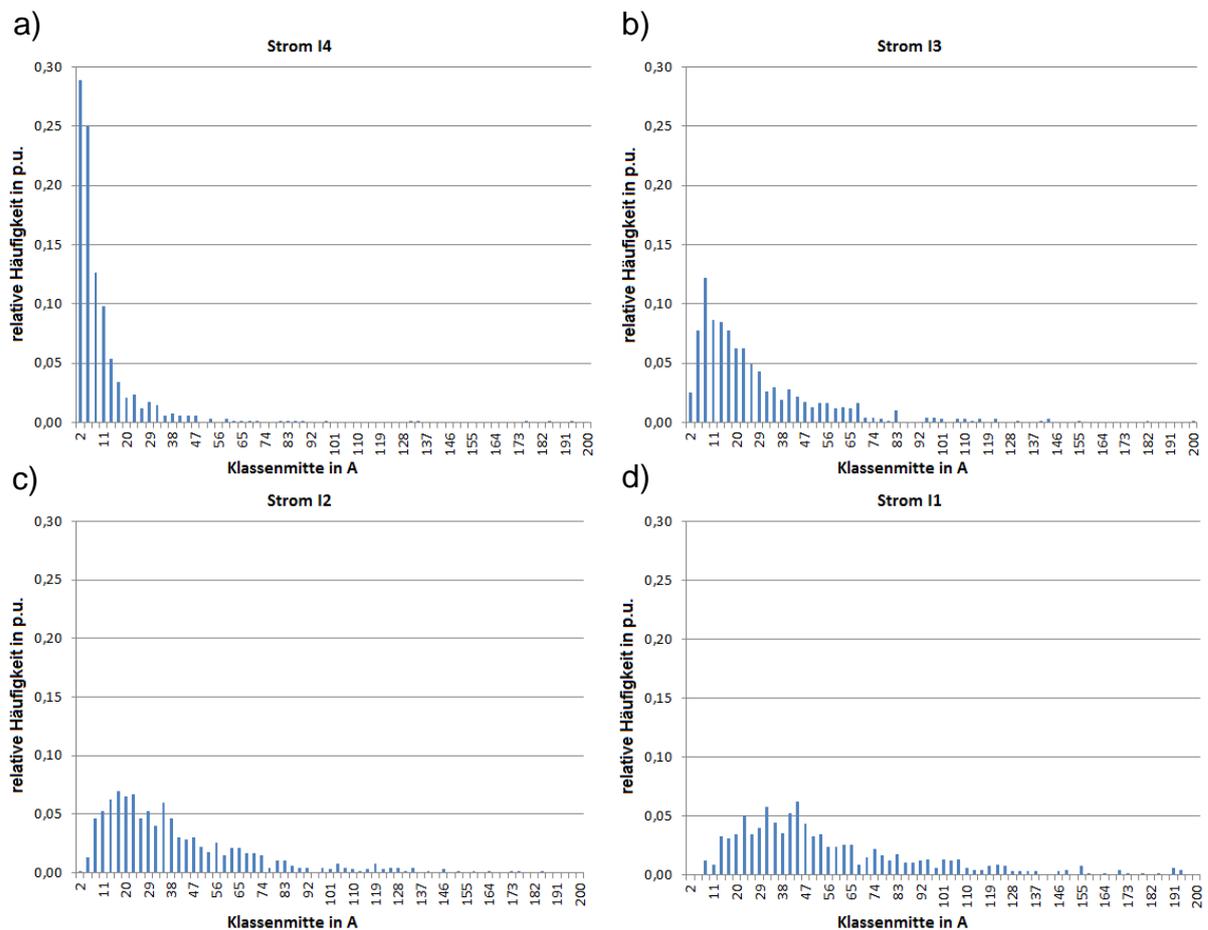


Abbildung 8.10: Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme

Die Verteilung der Stromwerte des letzten Leiterabschnittes I_4 (Abbildung 8.10 a)) zeigt, dass die relative Häufigkeit für das Auftreten von „kleinen“ Stromwerten hoch ist. Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Strömen > 20 A ist im Verhältnis dazu gering. Dieses Verhalten lässt wiederum auf das Verteilungsmodell der Lognormalverteilung schließen. Die Stromwerte I_3 des vorletzten Leiterabschnittes aus dem Niederspannungsabgang in Abbildung 8.1 ergeben sich aus der Addition der Stromwerte I_3 und I_4 . Aufgrund der in Kapitel 4.3.2 erwähnten Stabilität unter Addition nähert sich die Verteilung der Stromwerte I_3 (Abbildung 8.10 b)) wiederum dem Verteilungsmodell der Lognormalverteilung an. Es ist zu erkennen, dass die Verteilung der Stromwerte I_3 bereits einen wesentlich kleineren Peak aufweist, als die Verteilung der Stromwerte I_4 .

Die Verteilung der Stromwerte des ersten Leiterabschnittes I_1 (Abbildung 8.10 d)) kann demnach ebenfalls als lognormalverteilt angesehen werden. Die Verteilung der Stromwerte I_1 weist allerdings im Vergleich zur Verteilung der Stromwerte des letzten Leiterabschnittes I_4 einen kleineren Peak für verhältnismäßig kleinere Stromwerte auf. Ebenfalls kann ein höherer Auslauf der relativen Häufigkeit für verhältnismäßig höhere Stromwerte festgehalten werden.

Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Stromwerten $I_1 > 200$ A im ersten Leiterabschnitt ist allerdings sehr gering. Die Auslegung und Dimensionierung der Betriebsmittel in Niederspannungsnetzen erfolgt allerdings grundsätzlich anhand von Extremwerten. Die Beurteilung der Häufigkeitsdiagramme kann demnach unterstützend in der Netzplanung eingesetzt werden.

Ein weiteres wichtiges Merkmal zu Beurteilung der Auslastung von Niederspannungsnetzen ist die Betrachtung der Spannungswerte. Abbildung 8.11 stellt die Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen der einzelnen Hausanschlüsse U_1, U_2, U_3 und U_4 dar.

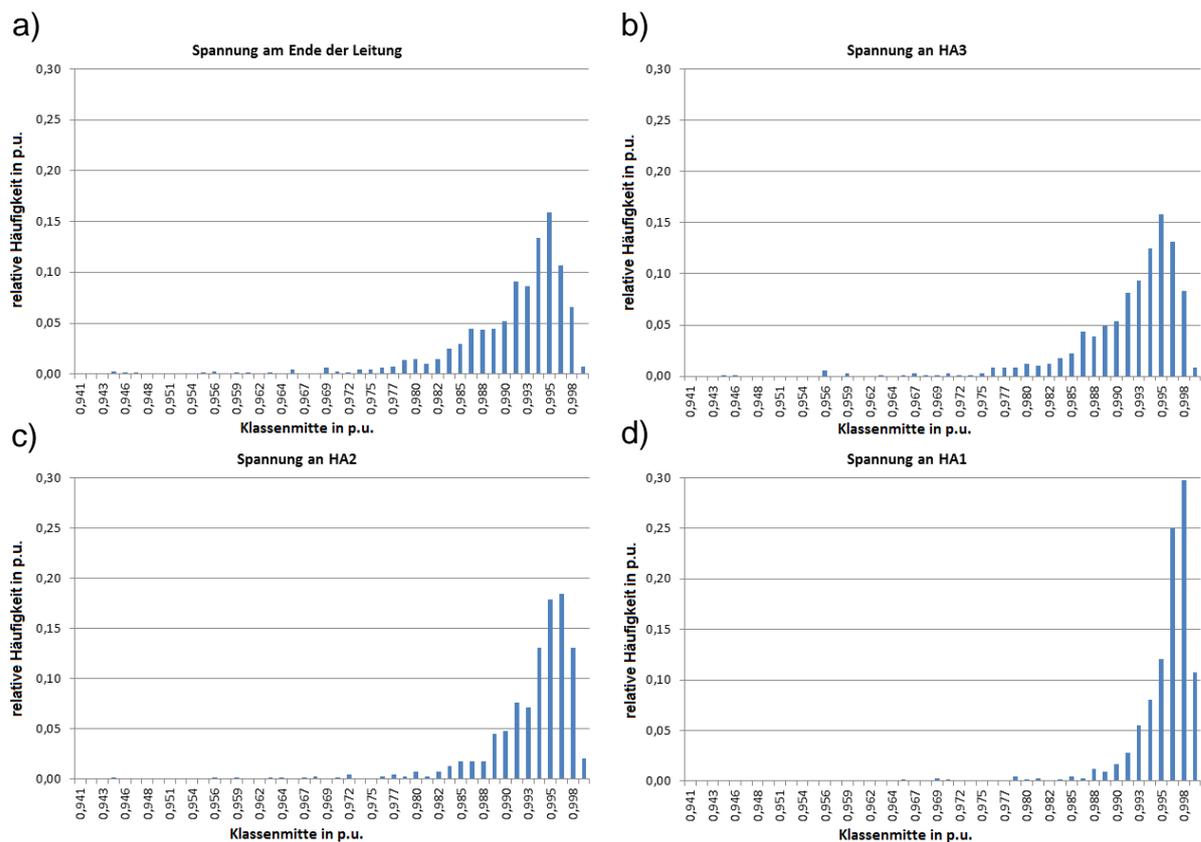


Abbildung 8.11: Häufigkeitsdiagramme der Knotenspannungen

Der Vergleich der einzelnen Häufigkeitsdiagramme aus Abbildung 8.11 kann ähnlich wie der der Häufigkeitsdiagramme der Leiterströme (Abbildung 8.10) anhand der Form der Verteilung getätigt werden. Diese kann für alle in Abbildung 8.11 dargestellten Häufigkeitsdiagramme als lognormalverteilt angesehen werden.

Aus dem Häufigkeitsdiagramm der auftretenden Knotenspannungen U_1 an Hausanschluss 1(HA1) (Abbildung 8.11 d)) wird ersichtlich, dass Spannungswerte zwischen 0,999 p.u. und 0,992 p.u. mit der größten relativen Häufigkeit auftreten. Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Spannungswerten < 0.988 p.u. ist bereits vernachlässigbar klein.

Von Interesse sind vor allem die auftretenden Spannungswerte U_4 am Ende der Leitung (Abbildung 8.11 a)). Das Häufigkeitsdiagramm der auftretenden Spannungswerte am Ende der Leitung zeigt, dass das Auftreten von Spannungswerten zwischen 0,998 p.u. und 0,982 p.u. am wahrscheinlichsten ist. Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Spannungswerten $< 0,970$ p.u. am Ende der Leitung ist sehr gering.

Anhand des Spannungsbandes je Hausanschluss HA entlang der Leitung kann die Einhaltung der in Kapitel 8.2 beschriebenen Spannungsgrenzwerte diskutiert werden. Abbildung 8.12 stellt den Verlauf charakteristischer Werte der Knotenspannungsverteilung jedes Hausanschlusses dar.

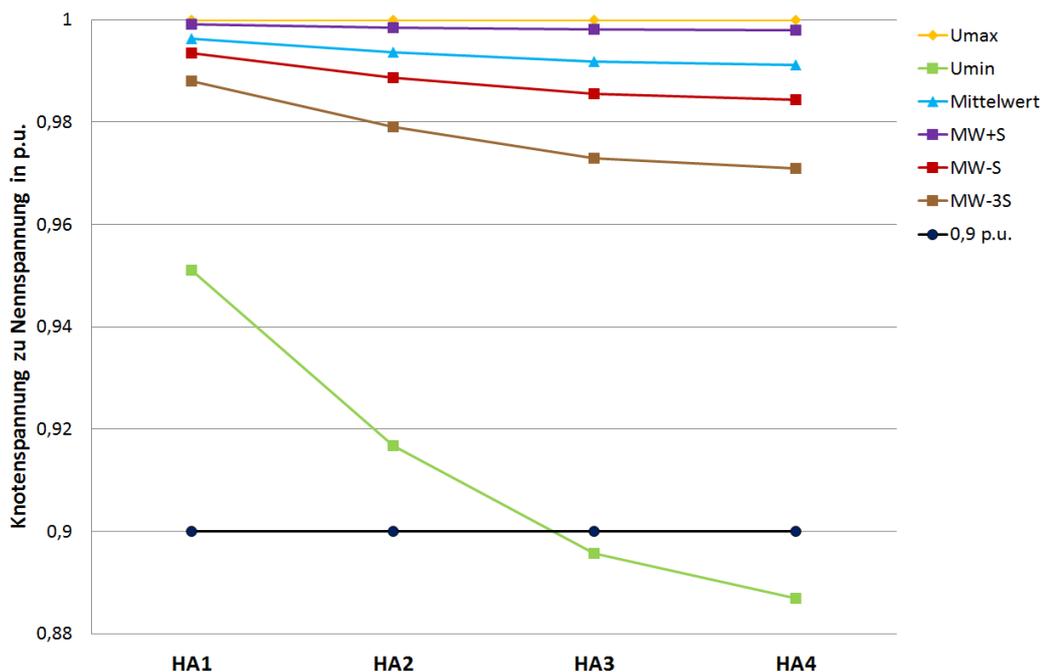


Abbildung 8.12: Spannungsband je Hausanschluss (HA) entlang der Leitung

Für die in Abbildung 8.12 verwendeten Abkürzungen gilt selbiges wie für die in Abbildung 8.9. Die Spannung U_{max} (gelbe Kurve) stellt den Verlauf des größten auftretenden Wertes der Knotenspannungen je Hausanschluss HA dar. Die Spannung U_{min} (grüne Kurve) jenen Wert, des kleinsten auftretenden Wertes der Knotenspannungen.

Die braune Kurve stellt die Werte der Knotenspannungen jedes Hausanschlusses HA dar, oberhalb welcher sich 99% aller auftretenden Spannungswerte befinden. So kann

beispielsweise mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0,1$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ gesagt werden, dass lediglich 1% der auftretenden Spannungswerte am Ende der Leitung den Wert 0,970 p.u. unterschreiten. Bereits 68% der auftretenden Spannungswerte je Hausanschluss HA liegen zwischen der violetten Kurve (MW+S) und der roten Kurve (MW-S).

Die schwarze Linie (0,9 p.u.) stellt die in Kapitel 8.2 beschriebene 0,9 p.u. Grenze der Spannungswerte dar. Die probabilistische Auslastungsanalyse zeigt, dass diese Spannungsgrenze zwar unterschritten werden kann, ein Auftreten eines solchen niedrigen Spannungswertes allerdings mit einer relativen Auftrittshäufigkeit von 0,0015 p.u. (= 0,15 %) sehr unwahrscheinlich ist.

Bezugnehmend auf die in Kapitel 8.2 beschriebene Beurteilung der Spannungswerte können somit folgende Aussagen zur Spannung am Ende der Leitung getroffen werden:

- Mehr als 68 % der auftretenden 15-Minuten-Mittelwerte des Effektivwertes der Knotenspannung U_4 liegen im Bereich $U_n - 1,8 \%$
- Mehr als 99 % der auftretenden 15-Minuten-Mittelwerte des Effektivwertes der Knotenspannung U_4 liegen im Bereich $U_n - 3 \%$

Die Einhaltung der Spannungsgrenzwerte ist demnach im vorgestellten Niederspannungsabgang der Verteilnetzstruktur erfüllt. Die probabilistische Auslastungsanalyse zeigt, dass der Niederspannungsabgang hinsichtlich der Spannungswerte nicht ausgelastet ist und eine Verschiebung der Verteilung zu kleineren Spannungswerten durchaus zulässig wäre.

Bei vorgegebenen Abständen zwischen den Hausanschlüssen und vorgegebenem Leitermaterial definiert die Wahl des Leiterquerschnittes den Leiterwiderstand und in weiterer Folge den Spannungsabfall entlang der Leiterabschnitte. Eine Verkleinerung der Leiterquerschnitte hätte demnach eine Verschiebung der Verteilung der Knotenspannungswerte zu kleineren Spannungswerten zur Folge. Dadurch entsteht für Verteilnetzbetreiber ein Einsparungspotential hinsichtlich des zu verbauenden Materials.

Die Einplanung gewisser „Reserven“ ist dennoch sinnvoll, da eventuelle Ausbauszenarien in dieser Betrachtung nicht berücksichtigt werden. Der langfristige Planungshintergrund sollte demnach in eventuelle Entscheidungen hinsichtlich der Netzplanung miteingebunden werden.

9 Schlussfolgerungen und Ausblick

Die in dieser Diplomarbeit vorgestellte Methode zur Auswertung und Analyse von Smart-Meter-Messdaten ermöglicht es, für jedes Viertelstunden-Intervall eines definierten Typtages eine statistische Verteilung der auftretenden Leistungswerte bereitzustellen. Diese Verteilung beschreibt das Lastverhalten des untersuchten Netzgebietes für das jeweilige Zeitintervall. Bei den Smart-Meter-Messdaten handelt es sich um gemessene Leistungen (15-Minuten-Leistungsmittelwerte) von Haushalten im städtischen Bereich. Durch die Betrachtung von gemittelten Leistungswerten gehen allerdings Informationen über die tatsächlich auftretenden Spitzenleistungswerte verloren.

Die Auswertung der Messdaten, sowie die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für jedes Viertelstunden-Intervall wird für die Verbrauchsperiode Winter durchgeführt. Es wird in dieser Arbeit die Lognormalverteilung zur Beschreibung der Haushaltslasten herangezogen. Es kann anhand des Leistungsverteilungsgebirges (Abbildung 7.13) gezeigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Leistungswerten < 500 W pro Haushalt sehr hoch ist. Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Leistungswerten > 500 W pro Haushalt eher gering. Dies ist aus den Auswertungen der Verbrauchsperiode Winter für Haushalte aus dem städtischen Bereich ersichtlich. Die vorgestellte Methodik kann ebenfalls auf die Verbrauchsperioden Sommer und Übergangszeit angewendet werden. Eine weiterführende Untersuchung von Haushaltslasten aus dem ländlichen bzw. vorstädtischen Bereich ist insofern sinnvoll, um Vergleiche tätigen zu können.

Das grundlegende Prinzip der probabilistischen Auslastungsanalyse wird zunächst unter der Annahme von gleichverteilten Haushaltslasten demonstriert. Anschließend wird eine Auslastungsanalyse einer Verteilnetzstruktur unter Berücksichtigung der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für Haushalte aus dem städtischen Bereich durchgeführt. Hier wird ein besonderes Augenmerk auf die auftretenden Strom- und Spannungswerte in einem Niederspannungsabgang gelegt.

Im Falle gleichverteilter Haushaltslasten unterschreitet der Minimalwert der auftretenden Spannung am Ende der Leitung den theoretisch errechneten von 0,934 p.u. nicht. Die aus der probabilistischen Simulation errechneten Spannungswerte am Ende der Leitung sind annähernd normalverteilt um den Mittelwert von 0,956 p.u..

Im Falle lognormalverteilter Haushaltslasten gibt es allerdings keine theoretischen Grenzwerte der Strom- bzw. Spannungswerte, weshalb eine Argumentation über statistische Größen sinnvoll ist. Die Verteilung der Stromwerte in den Leiterabschnitten kann als lognormalverteilt angesehen werden. Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Stromwerten $I > 200$ A im ersten Leiterabschnitt ist beispielsweise sehr gering. So kann die Beurteilung der erzeugten Häufigkeitsdiagramme unterstützend in der Netzplanung eingesetzt werden.

Von Interesse sind vor allem die auftretenden Spannungswerte am Ende der Leitung. Es wird gezeigt, dass das Auftreten von Spannungswerten zwischen 0,998 p.u. und 0,982 p.u. am wahrscheinlichsten ist. Die relative Häufigkeit für das Auftreten von Spannungswerten $< 0,970$ p.u. am Ende der Leitung ist sehr gering ($< 1\%$).

Die probabilistische Auslastungsanalyse zeigt, dass der untersuchte Niederspannungsabgang hinsichtlich der Spannungswerte deutlich „Reserven“ aufweist. Dadurch entsteht für Verteilnetzbetreiber ein Einsparungspotential hinsichtlich des zu verbauenden Materials. Die Miteinbeziehung von „Reserven“ ist dennoch sinnvoll, da eventuelle Ausbauszenarien in dieser Betrachtung nicht berücksichtigt werden. Der langfristige Planungshintergrund sollte demnach in eventuelle Entscheidungen hinsichtlich der Netzplanung miteingebunden werden.

10Literatur

- [1] Bundeskanzleramt: "Bundesgesetz, mit dem die Organisation auf dem Gebiet der Elektrizitätswirtschaft neu geregelt wird (Elektrizitätswirtschafts- und -organisationsgesetz 2010 - EIWOG 2010)", Rechtsinformationssystem RIS, Fassung vom 07.02.2014, 2010
- [2] Energie-Control: "Einführung von intelligenten Messgeräten in Österreich", Smart Meter-Monitoring 2013, 2013
- [3] T. Stetz, H. Wolf, A. Probst, S. Eilenberger: "Stochastische Analyse von Smart-Meter Messdaten", VDE-Kongress, Stuttgart, ISBN 978-3-8007-3446-7, 2012
- [4] D. Baranek, A. Probst, S. Tenbohlen: "Optimierung der Lastprognose mittels Smart Meter Daten", IEEE Power and Energy Student Summit Bielefeld, 2013
- [5] G. Kayser, A. Probst, M. Braun, S. Tenbohlen: "Probabilistische Lastmodellierung von Haushaltslasten", IEEE Power and Energy Student Summit Ilmenau, 2012
- [6] C. Elbe: "A Contribution to Residential Energy Disaggregation Based on Appliance-Specific Characteristics", Dissertation, Graz University of Technology, Institute of Electrical Power Systems, 2014
- [7] I. Füreder: "Internes Memorandum Betreff Verwendung von Daten zu Forschungszwecken", Institut für Elektrische Anlagen, Technische Universität Graz, 2014
- [8] Bundeskanzleramt: "Bundesgesetz über den Schutz personenbezogener Daten (Datenschutzgesetz 2000 - DSG 2000)", Rechtsinformationssystem RIS, Fassung vom 24.05.2014, 2000
- [9] H. Kolanoski: "Statistische Methoden der Datenanalyse", Vorlesungsunterlagen, Humboldt-Universität Berlin, 2008
- [10] K. Weltner, H. Wiesner, P. Heinrich, P. Engelhard, H. Schmidt: "Mathematik für Physiker 1", Springer, Deutschland, 13. überarbeitete Auflage, ISBN -13 978-3-540-29842-7, 2006
- [11] M. Oestreich, O. Romberg: "Keine Panik vor Statistik!", Vieweg+Teubner, Deutschland, 3. überarbeitete Auflage, ISBN 978-3-8348-1378-7, 2010
- [12] O. Beucher: "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit Matlab", Springer, Deutschland, ISBN 3-540-23416-0, 2005
- [13] S. Scheid: "Die verallgemeinerte Lognormalverteilung", Diplomarbeit, Universität Dortmund, 2001
- [14] C. Mazza: "Einführung in die Wahrscheinlichkeit", Vorlesungsunterlagen, Universität Freiburg, 2007
- [15] A. J. Schwab: "Elektroenergiesysteme", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Karlsruhe, 3. neu bearbeitete und erweiterte Auflage, ISBN 978-3-642-21957-3, 2012

- [16] V. Crastan, D. Westermann: "Elektrische Energieversorgung 3", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Deutschland, 3. bearbeitete Auflage, ISBN 978-3-642-20099-1, 2012
- [17] K. Heuk, K. Dettmann, D. Schulz: "Elektrische Energieversorgung", Vieweg+Teubner Verlag, Deutschland, 8. überarbeitete und aktualisierte Auflage, ISBN 978-3-8348-0736-6, 2010
- [18] V. Crastan: "Elektrische Energieversorgung 1", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Deutschland, 2. bearbeitete Auflage, ISBN 978-3-540-69439-7, 2007
- [19] T. Wieland, F. Otto, L. Fickert: "Impact and Analysis of Different Source- and Load-Characteristics on the Feed-In Capacity of Decentralized Generation Units in the Distribution Grid", IEEE, Institute of Electrical Power Systems of the Graz University of Technology, ISBN 978-1-4673-5556-8/13, 2013
- [20] H. Renner: "Regelung und Stabilität Elektrischer Energiesysteme", Vorlesungsunterlagen, Institut für Elektrische Anlagen, Technische Universität Graz, 2013
- [21] E. Wieben: "Multivariates Zeitreihenmodell des aggregierten elektrischen Leistungsbedarfes von Standardverbrauchern für die probabilistische Lastflussrechnung", Dissertation, Technische Universität Clausthal, Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften, 2008
- [22] Energie-Control: "Zählwerte, Datenformate und standardisierte Lastprofile", Sonstige Marktregeln Strom, Version 3.3, 2011
- [23] P. Esslinger, R. Witzmann: "Entwicklung und Verifikation eines stochastischen Verbraucherlastmodells für Haushalte", 12. Symposium Energieinnovation Graz, 2012
- [24] Vereinigte Stadtwerke Netz GmbH: "Standardlastprofile", <http://www.vsg-netz.de/vsgnetz/Stromnetz/Lastprofilverfahren.php>, zuletzt besucht am: 22.04.2014
- [25] Stadtwerke Hettstedt GmbH: "Standardlastprofile", <http://www.stadtwerke-hettstedt.de/index.php/stromnetz/netzzugang-s/slp-s>, zuletzt besucht am: 22.04.2014
- [26] N. Lübke, A. Holst, R. Tolzmann: "Entwicklung eines synthetischen Jahreslastprofils für Haushaltsabnahme aus Elt.-Versorgungsnetzen", 12. Symposium Maritime Elektrotechnik, Rostock/Deutschland, 2007
- [27] EN 50160: "Merkmale der Spannung in öffentlichen Elektrizitätsversorgungsnetzen", Ausgabe: 2011-03-01, 2011
- [28] M. Domagk, J. Meyer, P. Schegner, G. Eberl, T. Darda: "Influence of aggregation intervals on power quality assessment according to EN 50160", CIRED, 22nd International Conference on Electricity Distribution, Stockholm, 10-13 June 2013
- [29] T. Wieland, F. Otto, L. Fickert, T. Schuster: "Analyse, Bewertung und Steigerung möglicher Einspeisekapazität dezentraler Energieerzeugungsanlagen in der Verteilnetzebene", 8. Internationale Energiewirtschaftstagung an der TU Wien, Wien, 2013